RAFAEL MANTEIGA BALBINO

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE CONDUÇÃO DE CALOR EM UMA PAREDE: COMPARAÇÃO DE MÉTODOS DE DIFERENÇAS FINITAS

Relatório apresentado na disciplina de Cálculo IV do curso de graduação em Ciência da Computação da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Professora: Dra. Cristiane Oliveira de Faria

Rio de Janeiro
2023

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O método das diferenças finitas é um método usado para tornar uma equação diferencial num sistema de equações algébricas (MONERAT et al., 2010).

A condução de calor é definida como a propagação de calor que aumenta a temperatura através de um determinado elemento (ALMEIDA; COELHO; PEDROSO, 2017).

Dessa forma, o objetivo do trabalho é calcular a distribuição de temperatura dentro de uma parede composta por uma liga de ferro e níquel, como uma função do tempo, utilizando a equação do calor unidimensional e um método de discretização.

2 DESENVOLVIMENTO

Neste trabalho, o método das diferenças finitas foi utilizado para encontrar a solução aproximada da distribuição de temperatura no tempo final $t_f = 0,1h$ utilizando os tamanhos de passos $\Delta x = 0,05;\ \Delta t = 0,01$ e $\Delta x = 0,05\ e\ \Delta t = 0,05$.

Inicialmente cria-se a função *solve_heat_conduction* que nos retornará a solução aproximada de acordo com os parâmetros *delta_x* e *delta_t*. Dentro desta função, define-se as temperaturas da superfície e interna, assim como a espessura da parede e a difusividade. Calcula-se, em seguida, o número de nós e o número de passos, para que a matriz das temperaturas seja montada. As condições iniciais são, então, inseridas na matriz.

Após isso, são iniciadas as repetições para calcular a distribuição de temperatura na parede em cada passo de tempo (*j+1*) com base nas temperaturas nos nós vizinhos no passo de tempo anterior (*j*) usando o método de diferenças finitas para a equação de condução de calor unidimensional. Esse processo itera por todos os passos de tempo e nós espaciais, atualizando a matriz de temperaturas *T* até que a solução seja obtida.

Define-se, então, os valores de *delta_x* e *delta_t* do problema, assim como a difusividade. Estes parâmetros serão utilizados para que seja aplicada tanto a solução aproximada quanto a solução exata, por isso foram definidos fora do escopo da função. Logo após, a função para obter as soluções aproximadas é aplicada em cada caso.

Inicia-se, então, o cálculo da solução exata. Inicialmente é criado um vetor que representa os pontos discretos ao longo da espessura da parede. É criada, então, uma sequência linear de valores espaçados uniformemente, começando com 0 e terminando com 1, contendo o número de elementos igual a $\frac{1}{\Delta x} + 1$.

Em seguida, os valores são definidos conforme o problema

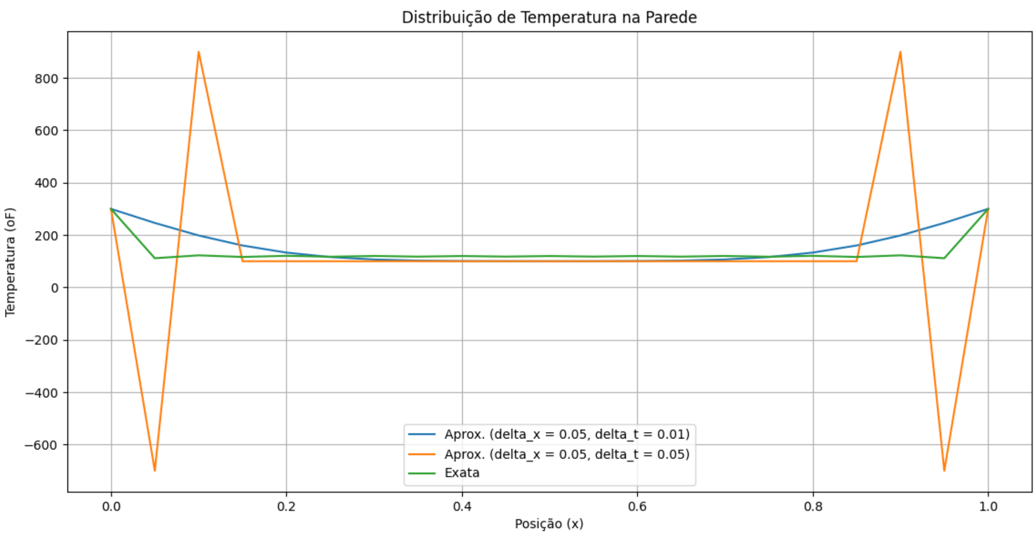
Aplica-se, então, o cálculo para a solução exata, conforme abaixo:

$$T(x,t) \;=\; T_s + 2(T_i - T_s)\sum_{n=1}^{99} \frac{e^{-\frac{\pi\alpha t}{L^2}}(1-(-1)^n)\, sen(\frac{n\pi x}{L})}{n\pi}\ .$$

Onde,

- $T(x,t)$ representa a temperatura na posição x da parede no tempo t;
- T_s é a temperatura da superfície da parede;
- T_i é a temperatura interna da parede;
- L é a espessura da parede;
- α é a difusividade térmica do material;
- t é o tempo;
- n é um inteiro positivo que varia de 1 a 99;

Após estes cálculos, o gráfico é plotado para cada caso de aproximação e para a solução exata:



Segue abaixo o código em Python utilizado para chegar à demonstração. O código está disponível no repositório *fael0306/calculo-iv-uerj-trabalho2* do Github:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def solve_heat_conduction(delta_x, delta_t):
    # Parâmetros do problema
    L = 1.0  # Espessura da parede
    Ts = 300.0  # Temperatura da superfície
    Ti = 100.0  # Temperatura interna
    alpha = 0.1  # Difusividade

    # Número de nós no espaço
    num_nodes = int(L / delta_x) + 1

    # Número de passos de tempo
    num_steps = int(tf / delta_t) + 1

    # Inicialização da matriz de temperaturas
    T = np.zeros((num_nodes, num_steps))

    # Condições iniciais
    T[:, 0] = Ti
    T[0, :] = Ts
    T[-1, :] = Ts

    # Iteração pelos passos de tempo e nós espaciais
    for j in range(0, num_steps - 1):
        for i in range(1, num_nodes - 1):
            T[i, j+1] = T[i, j] + alpha * delta_t / (delta_x**2) * (T[i+1, j] - 2*T[i, j] + T[i-1, j])

    return T

# Parâmetros do problema
delta_x_1 = 0.05
delta_t_1 = 0.01
delta_x_2 = 0.05
delta_t_2 = 0.05
tf = 0.1

# Solução aproximada para delta_x = 0.05 e delta_t = 0.01
T_1 = solve_heat_conduction(delta_x_1, delta_t_1)

# Solução aproximada para delta_x = 0.05 e delta_t = 0.05
T_2 = solve_heat_conduction(delta_x_2, delta_t_2)

# Solução exata
x = np.linspace(0, 1, int(1/delta_x_1) + 1)
Ts = 300.0  # Temperatura da superfície
Ti = 100.0  # Temperatura interna
```

```
L = 1.0  # Espessura da parede
alpha = 0.1  # Difusividade
exact_solution = Ts + 2*(Ti - Ts) * np.sum(np.exp(-(np.pi**2 / L**2) * alpha * tf) * (1 -
(-1)**np.arange(1, 100)) / (np.arange(1, 100) * np.pi) * np.sin(np.pi * np.arange(1, 100) * x[:,
np.newaxis] / L), axis=1)

# Plotagem dos resultados
plt.plot(x, T_1[:, -1], label='Aprox. (delta_x = 0.05, delta_t = 0.01)')
plt.plot(x, T_2[:, -1], label='Aprox. (delta_x = 0.05, delta_t = 0.05)')
plt.plot(x, exact_solution, label='Exata')
plt.xlabel('Posição (x)')
plt.ylabel('Temperatura (oF)')
plt.title('Distribuição de Temperatura na Parede')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```
Fonte: Elaboração Própria

3 CONCLUSÃO

Através da plotagem dos resultados, observamos que a distribuição de temperatura ao longo da parede converge para a solução exata à medida que o número de passos de tempo e o espaçamento entre os nós no espaço são aumentados. Esse comportamento ilustra a importância de escolher adequadamente os parâmetros de discretização para obter resultados mais precisos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Gisele; COELHO, Nailde; PEDROSO, Lineu. Distribuição de temperatura em placas em regime transiente: comparação entre solução analítica e numérica. Revista Interdisciplinar De Pesquisa Em Engenharia, Brasília, v. 2, n. 26, p. 149-153, 10 fev. 2017. DOI https://doi.org/10.26512/ripe.v2i26.20833. Disponível em: https://periodicos.unb.br/index.php/ripe/article/download/20833/19204. Acesso em: 19 jul. 2023.

MONERAT, Germano; FILHO, Luiz; VASQUEZ, Eduardo; OLIVEIRA-NETO, Gil; NOGUEIRA, Patrícia; ASSUMPÇÃO, Alzira. Quantização de sistemas hamiltonianos via método das diferenças finitas. Revista Brasileira do Ensino de Física, São Paulo, v. 32, n. 1, 2 jul. 2010. DOI https://doi.org/10.1590/S1806-11172010000100004. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbef/a/ZtyWjdNPhBFtkbYfnkLzPcs/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 19 jul. 2023.