RAFAEL MANTEIGA BALBINO
ARTHUR HERNANDEZ PEREZ
MARIANA MARTINS CHAGAS

SÉRIES DE TAYLOR NA COMPARAÇÃO DAS LEIS DE RADIAÇÃO DO CORPO NEGRO

Relatório apresentado na disciplina de Cálculo IV do curso de graduação em Ciência da Computação da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Professora: Dra. Cristiane Oliveira de Faria

Rio de Janeiro
2023

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É possível definir "série" como a soma dos termos de uma sequência finita. Podemos, dessa forma, definir a série de potência como uma série em que os termos são representados como uma função de potência (STEWART, 2013).

Quando esta função pode ser definida por uma série de potências em torno de *a* (sendo *a* um ponto qualquer), esta série pode ser definida como a série de Taylor da função em torno do ponto *a* (STEWART, 2013).

Faz-se necessário definir as Leis que serão comparadas.

A Lei de Rayleigh-Jeans indica uma função para encontrar a densidade de energia da radiação do corpo negro a partir do comprimento de onda (λ) (SILVA, 2018). A função está expressa abaixo:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}.$$

Porém, Max Planck concebeu uma melhoria para o modelo. Esta melhoria ficou conhecida como Lei de Planck (SILVA, 2018). A função de Planck pode ser vista abaixo:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{(\lambda kt)}}-1}.$$

Dessa forma, o objetivo do trabalho é demonstrar que as funções de Rayleigh-Jeans e de Planck retornam valores cada vez mais próximos à medida que o comprimento de onda aumenta.

2 DESENVOLVIMENTO

O polinômio ou série de Taylor possui diversas aplicações. Neste trabalho, a série será utilizada para encontrar aproximações para as funções provenientes da Lei de Rayleigh-Jeans e Lei de Planck.

A forma de demonstração utiliza a Série de Taylor para realizar a aproximação das funções e verificar a diferença relativa entre os resultados para constatar que esta diminui à medida que o comprimento de onda λ aumenta.

Faz-se necessário demonstrar matematicamente o que é proposto. Ou seja, demonstrar a diferença relativa entre as leis torna-se insignificante quando o comprimento de onda aumenta indefinidamente.

Segue a demonstração:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\frac{8\pi kT}{\lambda^4} - \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}}{\frac{8\pi kT}{\lambda^4}} = \lim_{\lambda \to +\infty} 1 - \frac{\frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}}{\frac{8\pi kT}{\lambda^4}}$$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} 1 - \frac{8\pi hc\lambda^{-5}\lambda^4}{(e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1)8\pi kT} = 1 - \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{hc\lambda^{-1}}{(e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1)kT}$$

Aplicando L'Hopital:

$$= 1 - \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{-hc\lambda^{-2}}{-\frac{hc\lambda^{-2}}{kT}e^{\frac{hc}{\lambda kT}}kT} = 1 - \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}$$

Logo,

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\frac{8\pi kT}{\lambda^4} - \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}}{\frac{8\pi kT}{\lambda^4}} = 1 - 1 = 0$$

Neste trabalho foi utilizada a linguagem de programação Python para encontrar os resultados, compará-los e plotar o gráfico.

Inicialmente é criada uma função que utiliza a biblioteca *sympy* para retornar a Série de Taylor dada a função *f*, o ponto *a* e a quantidade de termos *n*. Além disso, são criadas as funções para plotar o gráfico, calcular a série e calcular a diferença relativa.

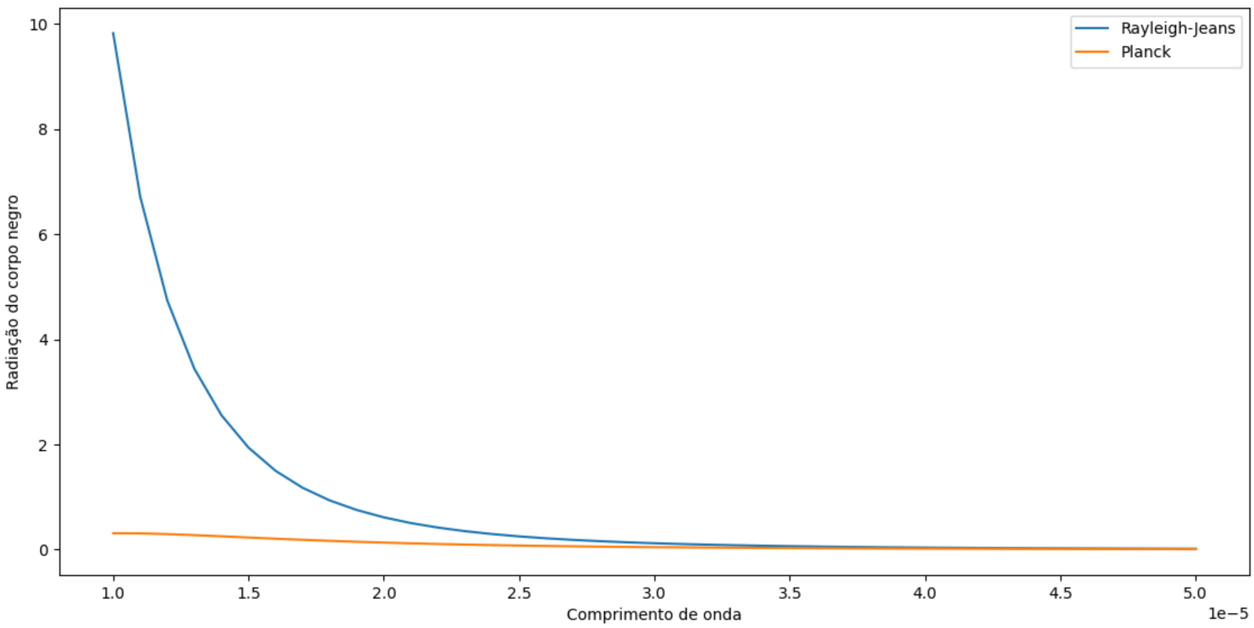
A função para plotar o gráfico tem como parâmetros os valores de x e de y, além da legenda do gráfico. Já a função que calcula a série possui a função *f*, o ponto *a* e a quantidade de termos *n*.

Após a criação destas funções, as constantes que serão usadas nas funções de Rayleigh-Jeans e Planck são definidas:

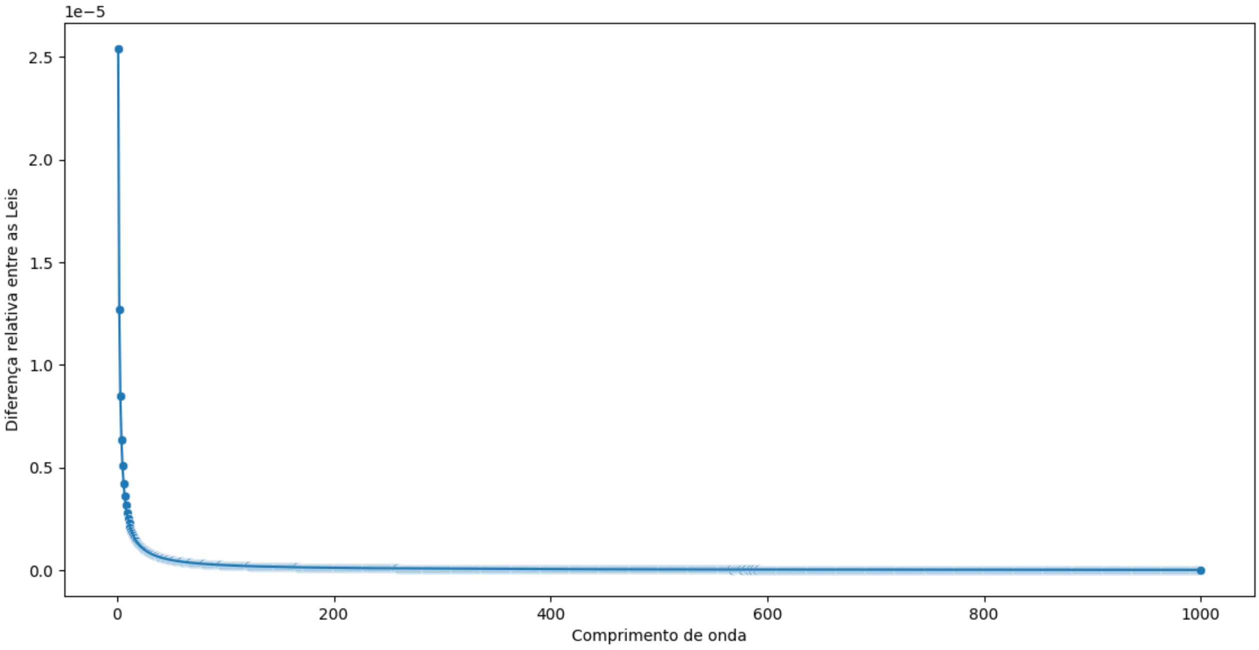
- Ponto fixo: a =1
- Quantidade de termos: n = 10
- Constante de Planck: h = $6,6262 \times 10^{-34}\, J.s$
- Velocidade da Luz: $c = 2,997925 \times 10^{8}\, m/s$
- Constante de Boltzmann's: $k = 1,3807 \times 10^{-23}\, J/K$
- Temperatura (K): $T = 283,15\, K$

Após a definição das constantes a serem usadas, são criadas as funções para retornar os valores de cada Lei, dado o valor de λ em ambas as função

Após a criação destas funções, são chamadas as funções que calculam cada série (funções estas que chamam as funções que retornam cada lei) e plotam o gráfico. Após isso, os gráficos são mostrados. Nestes gráficos, é possível notar que a radiação tende a zero quando o comprimento de onda aumenta, tanto na Lei de Rayleigh-Jeans quanto na Lei de Planck:



Após isso, é chamada a função que calcula a diferença relativa. Esta função cria a repetição que faz o comprimento de onda variar de 1 a 1000. Através dessa repetição, são calculadas e armazenadas as diferenças relativas entre os resultados das séries de Taylor das funções. Também são armazenados os valores dos comprimentos de onda de 1 a 1000. Logo após, é plotado o gráfico que mostra a diferença relativa de acordo com o valor de λ:


1e−5
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
Diferença relativa entre as Leis
0
200
400
600
800
1000
Comprimento de onda

Segue abaixo o código em Python utilizado para chegar à demonstração. O código está disponível no repositório *fael0306/calculo-iv-uerj* do Github:

```
import sympy as sp
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def taylor(f, a, n):
    x = sp.Symbol('x')
    serie = sp.series(f, x, a, n, "+").removeO()
    return serie

def plot_grafico(x, y, label):
    plt.plot(x, y, label=label)
    plt.xlabel("Comprimento de onda")
    plt.ylabel("Radiação do corpo negro")
    plt.legend()

def calcular_serie(f, a, n, label):
    lvetor = np.arange(0.00001, 0.00005, 0.000001)
    serievetor = [taylor(f(l), a, n) for l in lvetor]
    plot_grafico(lvetor, serievetor, label)

def calcular_diferenca_relativa():
    lvetor = range(1, 1001)
    difvetor = []

    for l in lvetor:
        f1 = lei_rayleigh_jeans(l)
        f2 = lei_planck(l)
        serie1 = taylor(f1, a, n)
        serie2 = taylor(f2, a, n)
        difrelativa = abs((serie1 - serie2) / serie1)
        difvetor.append(difrelativa)

    plt.plot(np.array(lvetor), np.array(difvetor))
    plt.xlabel("Comprimento de onda")
    plt.ylabel("Diferença relativa entre as Leis")

# Ponto fixo
a = 1
# Quantidade de termos fixo
n = 10
# Constante de Planck
h = 6.6262 * (10 ** -34)
# Velocidade da luz
c = 2.997925 * (10 ** 8)
# Constante de Boltzmann
k = 1.3807 * (10 ** -23)
```

```
# Fixando a temperatura em Kelvin
T = 283.15

print("\nENUNCIADO\nUse o Polinômio de Taylor para mostrar que, para comprimentos de onda longos, a Lei de Planck fornece aproximadamente os mesmos valores que a Lei de Rayleigh-Jeans.\n")

# Lei de Rayleigh-Jeans
def lei_rayleigh_jeans(l):
    return (8 * math.pi * k * T) / (l ** 4)

# Lei de Planck
def lei_planck(l):
    return (8 * math.pi * h * c * (l ** (-5))) / (math.exp(h * c / (l * k * T)) - 1)

# Plotando gráfico para a Lei de Rayleigh-Jeans
calcular_serie(lei_rayleigh_jeans, a, n, "Rayleigh-Jeans")

# Plotando gráfico para a Lei de Planck
calcular_serie(lei_planck, a, n, "Planck")
plt.show()

# Plotando gráfico para a diferença relativa entre as Leis
calcular_diferenca_relativa()
plt.show()
```
Fonte: Elaboração Própria

3 CONCLUSÃO

Através do gráfico, é possível notar que, conforme o comprimento de onda aumenta, a diferença relativa entre o resultado das aproximações das funções das Leis diminui, demonstrando, desta forma, o que foi proposto inicialmente: quanto maior o comprimento de onda, mais próximos são os resultados da Lei de Planck e a Lei de Rayleigh-Jeans.

REFERÊNCIAS

SILVA, Ray. Uma aplicação do polinômio de Taylor na lei de Planck e a utilização do MATLAB. Orientador: Rinaldo Vieira da Silva Júnior. 2018. 42 p. Dissertação (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Alagoas, Arapiraca, 2018. Disponível em: https://ud10.arapiraca.ufal.br/repositorio/publicacoes/2411. Acesso em: 28 jun. 2023.

STEWART, James. Cálculo. 7. ed. São Paulo: Trilha, 2013. 664 p. v. 2. ISBN 978-85-221-1259-3.