PROGRAMMATION LINEAIRE - EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1 : Programme linéaire sous forme standard

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8 \\ 2x_2 + 5x_3 \le 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 8 \\ 2x_2 + 5x_3 + x_5 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_6 = 15 \end{cases}$$

$$\text{MAX } (Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3) \qquad \text{MAX } (3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6)$$

SOLUTION

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	2	3	0	1	0	0	8	**2,66**
0	5	0	2	5	0	1	0	10	5
0	6	3	2	4	0	0	1	15	7,5
	C_j	3	5	4	0	0	0		
	Δ_j	3	**5**	4	0	0	0	Z = 0	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_0	x_k/x_{kj}
5	2	2/3	1	0	1/3	0	0	8/3	∞
0	5	- 4/3	0	5	- 2/3	1	0	14/3	**0,93**
0	6	5/3	0	4	- 2/3	0	1	29/3	2,41
	C_j	3	5	4	0	0	0		
	Δ_j	- 1/3	0	**4**	- 5/3	0	0	Z = 40/3	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_0	x_k/x_{kj}
5	2	2/3	1	0	1/3	0	0	8/3	4
4	3	- 4/15	0	1	- 2/15	1/5	0	14/15	-
0	6	41/15	0	0	- 2/15	- 4/5	1	89/15	**2,17**
	C_j	3	5	4	0	0	0		
	Δ_j	**11/15**	0	0	- 17/15	- 4/5	0	Z = 256/15	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_0
5	2	0	1	0	15/41	8/41	- 10/41	50/41
4	3	0	0	1	- 6/41	5/41	4/41	62/41
3	1	1	0	0	- 2/41	- 12/41	15/41	89/41
	C_j	3	5	4	0	0	0	
	Δ_j	0	0	0	- 45/41	- 24/41	- 11/41	**Z = 765/41**

RESULTAT : $x_1 = 89/41$ $x_2 = 50/41$ $x_3 = 62/41$ $Z = 765/41$

EXERCICE 1 : Programme linéaire sous forme standard

Une entreprise pharmaceutique fabrique trois types de médicaments : des euphorisants, des analgésiques et des somnifères, dont les bénéfices de production escomptés sont respectivement de 25, 60 et 30 milliers d'euros par kilo.

Pour fabriquer chacun de ces médicaments, trois matières premières sont utilisées : morphine, caféine et aspirine. Les quantités nécessaires de ces produits pour fabriquer un kilo de médicaments sont résumées dans le tableau suivant :

	euphorisant	analgésique	somnifère
Morphine	2	4	4
Caféine	1	2	0
Aspirine	2	5	4

Par ailleurs les quantités de morphine, caféine et aspirine sont limitées par leur production à respectivement 20, 6 et 14 unités par jour. Le but de l'exercice est de plannifier les quantités de médicaments à produire afin de maximiser le bénéfice quotidien.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \le 20 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_6 = 14 \end{cases}$$

$$\text{MAX}\,(Z = 25x_1 + 60x_2 + 30x_3) \qquad 5 \text{ x MAX}\,(5x_1 + 12x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6)$$

SOLUTION

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	2	4	4	1	0	0	20	5
0	5	1	2	0	0	1	0	6	3
0	6	2	5	4	0	0	1	14	2,8
	C_j	5	12	6	0	0	0		
	Δ_j	5	12	6	0	0	0	Z = 0	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	2/5	0	4/5	1	0	- 4/5	44/5	
0	5	1/5	0	- 8/5	0	1	- 2/5	2/5	
12	2	2/5	1	4/5	0	0	1/5	14/5	
	C_j	5	12	6	0	0	0		
	Δ_j	1/5	0	- 18/5	0	0	- 12/5	Z = 168/5	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	0	0	4	2	- 2	0	8	
5	1	1	0	- 8	0	5	- 2	2	
12	2	0	1	4	0	- 2	1	2	
	C_j	5	12	6	0	0	0		
	Δ_j	0	0	- 2	0	- 1	- 2	Z = 34	

RESULTAT : $x_1 = 2 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 0 \quad Z = 170$

EXERCICE 2 : Programme linéaire sous forme standard

Trois tailles de minerais t_1, t_2 et t_3 sont respectivement susceptibles de fournir une extraction maximale journalière de 200, 500 et de 300 tonnes.

La production journalière est d'abord stockée dans un local abrité d'une contenance maximale de 1800 m^3 et l'on indique les volumes spécifiques respectifs des trois catégories de produits : 1,8 ; 2 et 2,2 m^3/t.

Le lendemain, les minerais sont lavés : la laverie débite respectivement 80, 90 et 100 tonnes à l'heure pour les produits extraits des tailles t_1, t_2 et t_3 ; en outre, son horaire journalier est limité à 10 heures de travail.

Enfin, les profits unitaires réalisés sont, respectivement : $p_1 = 4$, $p_2 = 5$, $p_3 = 6$ unités monétaires.

1. Formuler ce problème sous forme de programme linéaire.
2. En utilisant la méthode de simplexe, trouver la meilleure répartition des quantités à extraire ?

SOLUTION

$$\begin{cases} x_1 \le 200 \\ x_2 \le 500 \\ x_3 \le 300 \\ 1{,}8\,x_1 + 2\,x_2 + 2{,}2\,x_5 \le 1800 \\ \dfrac{1}{80}x_1 + \dfrac{1}{90}x_2 + \dfrac{1}{100}x_5 \le 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \le 200 \\ x_2 \le 500 \\ x_3 \le 300 \\ 9\,x_1 + 10\,x_2 + 11\,x_5 \le 9000 \\ 45\,x_1 + 40\,x_2 + 36\,x_5 \le 36000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 200 \\ x_2 + x_5 = 500 \\ x_3 + x_6 = 300 \\ 9\,x_1 + 10\,x_2 + 11\,x_5 + x_7 = 9000 \\ 45\,x_1 + 40\,x_2 + 36\,x_5 + x_8 = 36000 \end{cases}$$

$$\text{MAX}\,(Z = 4\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_2) \qquad \text{MAX}\,(4\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 + 0\,x_6 + 0\,x_7 + 0\,x_8)$$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	1	0	0	1	0	0	0	0	200	∞
0	5	0	1	0	0	1	0	0	0	500	∞
0	6	0	0	1	0	0	1	0	0	300	300
0	7	9	10	11	0	0	0	1	0	9000	818,18
0	8	45	40	36	0	0	0	0	1	36000	1000
	C_j	4	5	6	0	0	0	0	0		
	Δ_j	4	5	6	0	0	0	0	0	Z = 0	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	1	0	0	1	0	0	0	0	200	∞
0	5	0	1	0	0	1	0	0	0	500	500
6	3	0	0	1	0	0	1	0	0	300	∞
0	7	9	10	0	0	0	- 11	1	0	5700	570
0	8	45	40	0	0	0	- 36	0	1	25200	630
	C_j	4	5	6	0	0	0	0	0		
	Δ_j	4	5	0	0	0	- 6	0	0	Z = 1 800	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	1	0	0	1	0	0	0	0	200	200

5	2	0	1	0	0	1	0	0	0	500	∞
6	3	0	0	1	0	0	1	0	0	300	∞
0	7	9	0	0	0	- 10	- 11	1	0	700	77,77
0	8	45	0	0	0	- 40	- 36	0	1	5200	115,55
	C_j	4	5	6	0	0	0	0	0		
	Δ_j	4	0	0	0	- 5	- 6	0	0	Z = 4 300	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	0	0	0	1	10/9	11/9	- 1/9	0	1100/9	
5	2	0	1	0	0	1	0	0	0	500	
6	3	0	0	1	0	0	1	0	0	300	
4	1	1	0	0	0	- 10/9	- 11/9	1/9	0	700/9	
0	8	0	0	0	0	10	19	- 5	1	1700	
	C_j	4	5	6	0	0	0	0	0		
	Δ_j	0	0	0	0	- 5/9	- 10/9	- 4/9	0	Z = 41 500/9	

<u>RESULTAT</u> : $x_1 = 700/9 = 77{,}77$ $x_2 = 500$ $x_3 = 300$ $Z = 41500/9 = 4611{,}11$

<u>EXERCICE 3</u> : Programme linéaire sous forme standard

Un atelier peut fabriquer trois types d'articles : l'article A_1 à la cadence de 35 objets à l'heure ; l'article A_2 à la cadence de 45 objets à l'heure et l'article A_3 à la cadence de 20 objets à l'heure. Cette fabrication utilise une machine-outil unique, disponible 200 heures par mois.

Ces objets sont vendus en totalité à des grossistes ; on a observé qu'on ne pouvait écouler, par mois, plus de 4 900 objets du type A_1, ni plus de 5 400 objets du type A_2, ni plus de 2 000 objets du type A_3.

Le bénéfice unitaire pour l'article A_1 est de 60 u.m. par objet, pour A_2 de 40 u.m., pour A_3 de 80 u.m. Quels sont alors les nombres des objets à fabriquer pour avoir du bénéfice maximal ?

<u>SOLUTION</u>

$$\begin{cases} x_1 \le 4900 \\ x_2 \le 5400 \\ x_3 \le 2000 \\ \frac{1}{35}x_1 + \frac{1}{45}x_2 + \frac{1}{20}x_5 \le 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \le 4900 \\ x_2 \le 5400 \\ x_3 \le 2000 \\ 36x_1 + 28x_2 + 63x_5 \le 252\,000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = 4900 \\ x_2 + x_5 = 5400 \\ x_3 + x_6 = 2000 \\ 36x_1 + 28x_2 + 63x_5 + x_7 = 252000 \end{cases}$$

$$\text{MAX}\,(Z = 60x_1 + 40x_2 + 80x_2) \qquad 20 \text{ x MAX}\,(3x_1 + 2x_2 + 4x_2 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7)$$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	1	0	0	1	0	0	0	4900	∞
0	5	0	1	0	0	1	0	0	5400	∞
0	6	0	0	1	0	0	1	0	2000	2000
0	7	36	28	63	0	0	0	1	252000	4000
	C_j	3	2	4	0	0	0	0		
	Δ_j	3	2	4	0	0	0	0	Z = 0	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	1	0	0	1	0	0	0	4900	4900
0	5	0	1	0	0	1	0	0	5400	∞
4	3	0	0	1	0	0	1	0	2000	∞
0	7	36	28	0	0	0	- 63	1	126000	3500
	C_j	3	2	4	0	0	0	0		
	Δ_j	3	2	0	0	0	- 4	0	Z = 8 000	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	0	- 7/9	0	1	0	7/4	- 1/36	1400	800
0	5	0	1	0	0	1	0	0	5400	∞
4	3	0	0	1	0	0	1	0	2000	2000
3	1	1	7/9	0	0	0	- 7/4	1/36	3500	-
	C_j	3	2	4	0	0	0	0		
	Δ_j	0	- 1/3	0	0	0	5/4	- 1/12	Z = 18 500	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0	x_k/x_{kj}
0	6	0	- 4/9	0	4/7	0	1	- 1/63	800	-
0	5	0	1	0	0	1	0	0	5400	5400
4	3	0	4/9	1	- 4/7	0	0	1/63	1200	2700
3	1	1	0	0	1	0	0	0	4900	∞
	C_j	3	2	4	0	0	0	0		
	Δ_j	0	2/9	0	- 5/7	0	0	- 4/63	Z = 19 500	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0
0	6	0	0	1	0	0	1	0	2000
0	5	0	0	- 9/4	9/7	1	0	- 1/28	2700
2	2	0	1	9/4	- 9/7	0	0	1/28	2700
3	1	1	0	0	1	0	0	0	4900
	C_j	3	2	4	0	0	0	0	
	Δ_j	0	0	- 1/2	- 3/7	0	0	- 1/14	Z = 20 100

RESULTAT : $x_1 = 4900$ $x_2 = 2700$ $x_3 = 0$ $Z = 402\,000$

EXERCICE 4 : Programme linéaire sous forme standard

Pour mettre en valeur un espace de 40 ha, un agriculteur dispose d'un montant de 63 000 unités monétaires (u.m.), de 840 journées de travail et se propose de semer du maïs, du blé et du soja.

La préparation à la culture coûte : 1500 u.m. par ha pour le maïs, 1800 u.m. par ha pour le blé et 1050 u.m. par ha pour le soja. La culture d'un ha nécessite : 18 journées de travail pour le maïs, 27 journées pour le blé et 15 journées pour le soja.

Les rapports espérés sont respectivement proportionnels à : 420 u.m. pour le maïs, 510 u.m. pour le blé et 360 u.m pour le soja. Quel seront les choix de l'agriculture ? Indication : x1, x2, x3 : superficies à cultiver respectivement du maïs, du blé et du soja pour rendre maximum le profit.

SOLUTION

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 40 \\ 1500\,x_1 + 1800\,x_2 + 1050\,x_5 \le 63\,000 & (/150) \\ 18\,x_1 + 27\,x_2 + 15\,x_3 \le 840 & (/3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40 \\ 10\,x_1 + 12\,x_2 + 7\,x_3 + x_5 = 420 \\ 6\,x_1 + 9\,x_2 + 5\,x_3 + x_6 = 280 \end{cases}$$

$$\text{MAX}\,(Z = 420\,x_1 + 510\,x_3 + 360\,x_2) \quad (/30) \qquad \text{MAX}\,(14\,x_1 + 17\,x_2 + 12\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 + 0\,x_6)$$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	1	1	1	1	0	0	40	40
0	5	10	12	7	0	1	0	420	35
0	6	6	9	5	0	0	1	280	31,11
	C_j	14	17	12	0	0	0		
	Δ_j	14	17	12	0	0	0	Z = 0	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	1/3	0	4/9	1	0	- 1/9	80/9	26,66
0	5	2	0	1/3	0	1	- 4/3	140/3	23,33
17	2	2/3	1	5/9	0	0	1/9	280/9	46,66
	C_j	14	17	12	0	0	0		
	Δ_j	8/3	0	23/9	0	0	- 17/9	Z = 4760/9	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	0	0	7/18	1	- 1/6	1/9	10/9	2,85
14	1	1	0	1/6	0	1/2	- 2/3	70/3	140
17	2	0	1	4/9	0	- 1/3	5/9	140/9	35
	C_j	14	17	12	0	0	0		
	Δ_j	0	0	19/9	0	- 4/3	- 1/9	Z = 5320/9	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_0	x_k/x_{kj}
12	3	0	0	1	18/7	- 3/7	2/7	20/7	
14	1	1	0	0	- 3/7	4/7	- 5/7	160/7	
17	2	0	1	0	- 8/7	- 1/7	3/7	100/7	
	C_j	14	17	12	0	0	0		
	Δ_j	0	0	0	- 38/7	- 3/7	- 5/7	Z = 4180/7	

RESULTAT : $x_1 = 160/7$ $x_2 = 100/7$ $x_3 = 20/7$ $Z = (4180 \times 30) / 7 = 17\,914{,}28$

EXERCICE 5 : Programme linéaire sous forme standard

Une menuiserie fabrique des tables, des chaises et des armoires. Elle est ouverte 45 semaines par an, et peut produire 5 tables ou 8 chaises ou 3 armoires par semaine. Mais, une étude de marché permet de déterminer que la production annuelle ne doit pas dépasser : 100 tables, 150 chaises et 50 armoires.

La production d'une table donne un profit net de 15 000 Ar, 7 000 Ar pour une chaise et 30 000 pour une armoire. Trouver la répartition de la capacité de production entre les trois produits, de manière à obtenir le profit maximal.

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{8}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \le 45 \\ x_1 \le 100 \\ x_2 \le 150 \\ x_3 \le 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24x_1 + 15x_2 + 40x_3 \le 5400 \\ x_1 \le 100 \\ x_2 \le 150 \\ x_3 \le 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24x_1 + 15x_2 + 40x_3 + x_4 = 5400 \\ x_1 + x_5 = 100 \\ x_2 + x_6 = 150 \\ x_3 + x_7 = 50 \end{cases}$$

$$\text{MAX}\,(Z = 15000x_1 + 7000x_2 + 30000x_3) \qquad \text{MAX}\,(15x_1 + 7x_2 + 30x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7)$$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	24	15	40	1	0	0	0	5400	135
0	5	1	0	0	0	1	0	0	100	∞
0	6	0	1	0	0	0	1	0	150	∞
0	7	0	0	1	0	0	0	1	50	**50**
	C_j	15	7	30	0	0	0	0		
	Δ_j	15	7	**30**	0	0	0	0	Z = 0	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	24	15	0	1	0	0	- 40	3400	141,66
0	5	1	0	0	0	1	0	0	100	**100**
0	6	0	1	0	0	0	1	0	150	∞
30	3	0	0	1	0	0	0	1	50	∞
	C_j	15	7	30	0	0	0	0		
	Δ_j	**15**	7	0	0	0	0	- 30	Z = 1 500	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	0	15	0	1	- 24	0	- 40	1000	**66,66**
15	1	1	0	0	0	1	0	0	100	∞
0	6	0	1	0	0	0	1	0	150	150
30	3	0	0	1	0	0	0	1	50	∞
	C_j	15	7	30	0	0	0	0		
	Δ_j	0	**7**	0	0	- 15	0	- 30	Z = 3 000	

C_i	I	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0
7	2	0	1	0	1/15	- 24/15	0	- 40/15	200/3
15	1	1	0	0	0	1	0	0	100
0	6	0	0	0	- 1/15	24/15	1	40/15	250/3
30	3	0	0	1	0	0	0	1	50
	C_j	15	7	30	0	0	0	0	
	Δ_j	0	0	0	- 7/15	- 57/15	0	- 34/3	Z = 10 400 / 3

<u>RESULTAT</u> : $x_1 = 100$ $x_2 = 200/3 = 66,66$ $x_3 = 50$ $Z = (10\,400/3) \times 1000 = 10\,400\,000 / 3 = 3\,466\,666,66$

<u>EXERCICE 6</u> : Application de la dualité

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{dualité}} \begin{cases} 3y_1 + 6y_2 \leq 15 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + y_4 = 15 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_5 = 33 \end{cases}$$

$$MIN\ Z = 15x_1 + 33x_2 \qquad MAX\ \overline{Z} = 6y_1 + 6y_2 + y_3$$

C_i	I	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0	y_k/y_{kj}
0	4	3	6	0	1	0	15	5
0	5	2	1	1	0	1	33	16,5
	C_j	6	6	1	0	0		
	Δ_j	6	6	1	0	0	$\overline{Z} = 0$	

C_i	I	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0	y_k/y_{kj}
6	1	1	2	0	1/3	0	5	5
0	5	0	- 3	1	- 2/3	1	23	23
	C_j	6	6	1	0	0		
	Δ_j	0	- 6	1	- 2	0	$\overline{Z} = 30$	

C_i	I	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0
6	1	1	2	0	1/3	0	5
1	3	0	- 3	1	- 2/3	1	23
	C_j	6	6	1	0	0	
	Δ_j	0	- 3	0	- 4/3	- 1	$\overline{Z} = 53$

<u>RESULTAT</u> : $y_1 = 5$ $y_2 = 0$ $y_3 = 23$ $x_1 = (-\Delta_4) = 4/3$ $x_2 = (-\Delta_5) = 1$ $Z = 53$

<u>Résolution directe en introduisant des variables artificielles</u>

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 6 \\ 6x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 6 \\ x_2 - x_5 + x_8 = 1 \end{cases}$$

$$MIN\ Z = 15x_1 + 33x_2 \qquad -MAX\ (-15x_1 - 33x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8)$$

C_i	I	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
- M	6	3	2	- 1	0	0	1	0	0	6	2
- M	7	6	1	0	- 1	0	0	1	0	6	1
- M	8	0	1	0	0	- 1	0	0	1	1	∞
	C_j	- 15	- 33	0	0	0	- M	- M	- M		
	Δ_j	- 15 + 9M	- 33 + 4M	- M	- M	- M	0	0	0	Z = - 13M	

C_i	I	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
- M	6	0	3/2	- 1	1/2	0	1	- 1/2	0	3	2
- 15	1	1	1/6	0	- 1/6	0	0	1/6	0	1	6
- M	8	0	1	0	0	- 1	0	0	1	1	1

	C_j	- 15	- 33	0	0	0	- M	- M	- M	
	Δ_j	0	- 61/2 + 5M/2	- M	- 5/2 + M/2	- M	0	5/2 – 3M/2	0	Z = - 15 - 4M

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
- M	6	0	0	- 1	1/2	3/2	1	- 1/2	- 3/2	3/2	1
- 15	1	1	0	0	- 1/6	1/6	0	1/6	- 1/6	5/6	5
- 33	2	0	1	0	0	- 1	0	0	1	1	-
	C_j	- 15	- 33	0	0	0	- M	- M	- M		
	Δ_j	0	0	- M	- 5/2 + M/2	- 61/2 + 3M/2	0	-	-	Z = - 91/2 - 3M/2	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
0	5	0	0	- 2/3	1/3	1	2/3	- 1/3	- 1	1	3
- 15	1	1	0	1/9	- 2/9	0	- 1/9	2/9	0	2/3	-
- 33	2	0	1	- 2/3	1/3	0	2/3	- 1/3	0	2	6
	C_j	- 15	- 33	0	0	0	- M	- M	- M		
	Δ_j	0	0	- 61/3	23/3	0	-	-	-	Z = - 76	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0
0	4	0	0	- 2	1	3	2	- 1	- 3	3
- 15	1	1	0	- 1/3	0	2/3	1/3	0	- 2/3	4/3
- 33	2	0	1	0	0	- 1	0	0	1	1
	C_j	- 15	- 33	0	0	0	- M	- M	- M	
	Δ_j	0	0	- 5	0	- 23	-	-	-	Z = - 53

RESULTAT : $x_1 = 4/3$ $x_2 = 1$ $Z = 53$

EXERCICE 7 : Application de la dualité

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 6x_3 \geq 1 \\ -3x_1 + x_2 + 14x_3 \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{MIN } (Z = 2x_1 + x_2 + 35x_3)$$

dualité

$$\begin{cases} 4y_1 - 3y_2 \leq 2 \\ -2y_1 + y_2 \leq 1 \\ -6y_1 + 14y_2 \leq 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y_1 - 3y_2 + y_3 = 2 \\ -2y_1 + y_2 + y_4 = 1 \\ -6y_1 + 14y_2 + y_5 = 35 \end{cases}$$

$$\text{MAX } (\overline{Z} = y_1 + 2y_2)$$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0	y_k/y_{kj}
0	3	4	- 3	1	0	0	2	-
0	4	- 2	**1**	0	1	0	1	**1**
0	5	- 6	14	0	0	1	35	2,5
	C_j	1	2	0	0	0		
	Δ_j	1	**2**	0	0	0	$\overline{Z} = 0$	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0	y_k/y_{kj}
0	3	- 2	0	1	3	0	5	-
2	2	- 2	1	0	1	0	1	-

0	5	**22**	0	0	- 14	1	21	**0,95**
	C_j	1	2	0	0	0		
	Δ_j	**5**	0	0	- 2	0	$\overline{Z} = 2$	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0	y_k/y_{kj}
0	3	0	0	1	**19/11**	1/11	76/11	**4**
2	2	0	1	0	- 3/11	1/11	32/11	-
1	1	1	0	0	- 7/11	1/22	21/22	**-**
	C_j	1	2	0	0	0		
	Δ_j	0	0	0	**13/11**	- 5/22	$\overline{Z} = 149/22$	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0
0	4	0	0	11/19	1	1/19	4
2	2	0	1	3/19	0	2/19	4
1	1	1	0	7/19	0	3/38	7/2
	C_j	1	2	0	0	0	
	Δ_j	0	0	- 13/19	0	- 11/38	$\overline{Z} = 23/2$

<u>Résolution directe en introduisant des variables artificielles</u>

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 6x_3 \geq 1 \\ -3x_1 + x_2 + 14x_3 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 6x_3 - x_4 + x_6 = 1 \\ -3x_1 + x_2 + 14x_3 - x_5 + x_7 = 2 \end{cases}$$

$$\text{MIN}\,(Z = 2x_1 + x_2 + 35x_3) \Rightarrow -\text{MAX}\,(-2x_1 - x_2 - 35x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7)$$

C_i	I	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0	x_k/x_{kj}
- M	6	4	- 2	- 6	- 1	0	1	0	1	-
- M	7	- 3	1	**14**	0	- 1	0	1	2	**1/7**
	C_j	- 2	- 1	- 35	0	0	- M	- M		
	Δ_j	- 2 + M	- 1 - M	**- 35 + 8M**	- M	- M	0	0	Z = - 3M	

C_i	I	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0	x_k/x_{kj}
- M	6	**19/7**	- 11/7	0	- 1	- 3/7	1	3/7	13/7	**13/19**
- 35	7	- 3/14	1/14	1	0	- 1/14	0	1/14	1/7	**-**
	C_j	- 2	- 1	- 35	0	0	- M	- M		
	Δ_j	**-19/2 +19M/7**	3/2 – 11M/7	0	- M	- 5/2 - 3M/7	0	5/2 – 4M/7	Z = - 13M/7 – 5	

C_i	I	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0
- 2	1	1	- 11/9	0	- 7/19	- 3/19	7/19		13/19
- 35	3	0	- 1/19	**1**	- 3/38	- 2/19	3/38		11/38
	C_j	- 2	- 1	- 35	0	0	- M	- M	
	Δ_j	0	- 4	**0**	- 7/2	- 4	-		**Z = - 23/2**

RESULTAT : $x_1 = 13/19$ $x_2 = 0$ $x_3 = 11/38$ $Z = 23/2$

EXERCICE 8 : Programme linéaire sous forme générale

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 3 \\ x_2 + 3x_3 \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_7 = 2 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_5 = 3 \\ x_2 + 3x_3 + x_6 = 5 \end{cases}$$

$$\text{MAX}\,(Z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3) \qquad \text{MAX}\,(5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7)$$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0	x_k/x_{kj}
- M	7	2	2	- 1	- 1	0	0	1	2	1
0	5	3	- 4	0	0	1	0	0	3	1
0	6	0	1	3	0	0	1	0	5	∞
	C_j	5	- 2	3	0	0	0	- M		
	Δ_j	5 + 2M	- 2 + 2M	3 - M	- M	0	0	0	Z = - 2M	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0	x_k/x_{kj}
5	1	1	1	- 1/2	- ½	0	1	1/2	1	-
0	5	0	- 7	3/2	3/2	1	0	- 3/2	ε	2ε/3
0	6	0	1	3	0	0	1	0	5	5/3
	C_j	5	- 2	3	0	0	0	- M		
	Δ_j	0	- 7	11/2	5/2	0	0	- M - 5/2	Z = 5	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0	x_k/x_{kj}
5	1	1	- 4/3	0	0	1/3	0		1	-
3	3	0	- 14/3	1	1	2/3	0		2ε/3	-
0	6	0	15	0	- 3	- 2	1		5	1/3
	C_j	5	- 2	3	0	0	0			
	Δ_j	0	56/3	0	- 3	- 11/3	0		Z = 5	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0	x_k/x_{kj}
5	1	1	0	0	- 4/15	7/45	4/45		13/9	-
3	3	0	0	1	1/15	2/45	14/45		14/9	70/3
- 2	2	0	1	0	- 1/5	- 2/15	1/15		1/3	-
	C_j	5	- 2	3	0	0	0			
	Δ_j	0	0	0	11/15	- 53/45	- 56/45		Z = 101/9	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0
5	1	1	0	4	0	1/3	4/3		23/3
0	4	0	0	15	1	2/3	14/3		70/3
- 33	2	0	1	3	0	0	1		5
	C_j	5	- 2	3	0	0	0		

Δ_j	0	0	- 11	0	- 5/3	- 14/3		Z = 85/3

RESULTAT : $x_1 = 23/3 = 7{,}66 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = 0 \quad Z = 85/3 = 28{,}33$

EXERCICE 9 : Exemple de résolution d'un programme linéaire sous forme générale

On désire faire un mélange de trois gaz combustibles dans les conditions suivantes :
- Le volume total doit atteindre 250 000 m^3 ;
- Le volume calorifique doit être compris ente 2 200 mth/m^3 et 2 600 mth/m^3 ;
- La teneur en soufre ne doit pas dépasser 3 grammes/m^3 ;
- La proportion du troisième gaz ne doit pas excéder 28 % du volume total.

Les teneurs respectifs en soufre sont de 7, ½, et 2 grammes par m^3. Les pouvoirs calorifiques respectifs se montent à 1 000, 2 000 et 6 000 mth/m^3.

Déterminer le mélange le moins coûteux, en admettant que les prix respectifs sont de 12, 36 et 10 unités monétaires par millier de m^3.

SOLUTION

Résolution sur ordinateur

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 250 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 650 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 \ge 550 \\ 14x_1 + x_2 + 4x_3 \le 1500 \\ x_3 \le 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 250 \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 250 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 650 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 \ge 550 \\ 14x_1 + x_2 + 4x_3 \le 1500 \\ x_3 \le 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 250 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_{10} = 250 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_6 = 650 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_7 + x_{11} = 550 \\ 14x_1 + x_2 + 4x_3 + x_8 = 1500 \\ x_3 + x_9 \le 70 \end{cases}$$

$$\text{MIN}\,(Z = 12x_1 + 36x_2 + 10x_3)$$

$$\Rightarrow\ -\text{MAX}\,(-12x_1 - 36x_2 - 10x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 - Mx_{10} - Mx_{11})$$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_0
0	4	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	250
- M	10	1	1	1	0	- 1	0	0	0	0	1	0	250
0	6	1	2	6	0	0	1	0	0	0	0	0	650
- M	11	1	2	6	0	0	0	- 1	0	0	0	1	550
0	8	14	1	4	0	0	0	0	1	0	0	0	1500
0	9	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	70
	C_j	- 12	- 36	- 10	0	0	0	0	0	0	- M	- M	
	Δ_j	- 12 + 2M	- 36 + 3M	- 10 + 7M	0	- M	0	- M	0	0	0	0	Z = - 800M

Résolution manuelle

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 250 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 \le 650 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 \ge 550 \\ 14x_1 + x_2 + 4x_3 \le 1500 \\ x_3 \le 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6(250 - x_1 - x_2) \le 650 \\ x_1 + 2x_2 + 6(250 - x_1 - x_2) \ge 550 \\ 14x_1 + x_2 + 4(250 - x_1 - x_2) \le 1500 \\ 250 - x_1 - x_2 \le 70 \end{cases}$$

$$\text{MIN}\,(Z = 12x_1 + 36x_2 + 10x_3) \qquad \text{MIN}\,(Z = 6x_1 + 18x_2 + 5(250 - x_1 - x_2))$$

$$\begin{cases} -5x_1 - 4x_2 \le -850 \\ -5x_1 - 4x_2 \ge -950 \\ 10x_1 - 3x_2 \le 500 \\ -x_1 - x_2 \le -180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \ge 850 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 950 \\ 10x_1 - 3x_2 \le 500 \\ x_1 + x_2 \ge 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 950 \\ 10x_1 - 3x_2 + x_4 = 500 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_5 + x_7 = 850 \\ x_1 + x_2 - x_6 + x_8 = 180 \end{cases}$$

$$\text{MIN}\,(Z = x_1 + 13x_2 + 1250) \Rightarrow -\text{MAX}\,(-x_1 - 13x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7 - Mx_8)$$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
0	3	5	4	1	0	0	0	0	0	950	190
0	4	10	- 3	0	1	0	0	0	0	500	50
- M	7	5	4	0	0	- 1	0	1	0	850	170
- M	8	1	1	0	0	0	- 1	0	1	180	180
	C_j	- 1	- 13	0	0	0	0	- M	- M		
	Δ_j	- 1 + 6M	- 13 + 5M	0	0	- M	- M	0	0	Z = - 1030M	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
0	3	0	11/2	1	- ½	0	0	0	0	700	1400/11
- 1	1	1	- 3/10	0	1/10	0	0	0	0	50	-
- M	7	0	11/2	0	- ½	- 1	0	1	0	600	1200/11
- M	8	0	13/10	0	- 1/10	0	- 1	0	1	130	100
	C_j	- 1	- 13	0	0	0	0	- M	- M		
	Δ_j	0	- 133/10 + 34M/5	0	1/10 - 3M/5	- M	- M	0	0	Z = - 50 - 730M	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
0	3	0	0	1	- 1/13	0	55/13	0	- 55/13	150	390/11
- 1	1	1	0	0	1/13	0	- 3/13	0	3/13	80	-
- M	7	0	0	0	- 1/13	- 1	55/13	1	- 55/13	50	130/11
- 13	2	0	1	0	- 1/13	0	- 10/13	0	10/13	100	-
	C_j	- 1	- 13	0	0	0	0	- M	- M		
	Δ_j	0	0	0	- 12/13 - M/13	- M	- 133/13 + 55M/13	0	133/13 - 68M/13	Z = - 1380 - 50M	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0
0	3	0	0	1	0	1	0	- 1	0	100
- 1	1	1	0	0	4/55	- 3/55	0	3/55	0	910/11
0	6	0	0	0	- 1/55	- 13/55	1	13/55	- 1	130/11
- 13	2	0	1	0	- 1/11	- 2/11	0	2/11	0	1200/11

C_j	- 1	- 13	0	0	0	0	- M	- M	
Δ_j	0	0	0	- 61/55	- 133/55	0	-	-	Z = - 16 510 / 11

<u>RESULTAT</u> : $x_1 = 910/11$ $x_2 = 1200/11$ $x_3 = 640/11$ Z = 60 520 / 11

<u>VERIFICATION</u> : - 16510/11 – 1250 = - (16510 + 13750) / 11 = - 30260 / 11 à multiplier par 2 = - 60520 / 11

<u>EXERCICE 10</u> : Exemple de résolution d'un programme linéaire sous forme générale

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus trois produits : orge, arachide, sésame. L'aliment ainsi conditionné devra comporter au moins 22 % de protéines et 3,6 % de graisses, pour se conformer aux exigences de la clientèle.

On a dans le tableau ci-dessous les pourcentages de protéines et de graisses contenus, respectivement, dans l'orge, les arachides et le sésame, ainsi que le coût par tonne de chacun des produits bruts :

Produit brut	orge	arachides	sésame
Pourcentage de protéines	12 %	52 %	42 %
Pourcentage de graisses	2 %	2 %	10 %
Coût par tonne	25 F	41 F	39 F

On notera x_i (i = 1,2,3) la fraction de tonne de produit brut i contenu dans une tonne d'aliment. Trouver les quantités x_1, x_2 et x_3 respectant les contraintes ci-dessus et en minimisant le coût de l'aliment.

Résolution sur ordinateur

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 12x_1 + 52x_2 + 42x_3 \geq 22 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \geq 3{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ 12x_1 + 52x_2 + 42x_3 \geq 22 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \geq 3{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_8 = 1 \\ 12x_1 + 52x_2 + 42x_3 - x_6 + x_9 = 22 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 - x_7 + x_{10} = 3{,}6 \end{cases}$$

$$\text{MIN}\,(Z = 25x_1 + 41x_2 + 39x_3)$$
$$\Rightarrow\ -\text{MAX}\,(-25x_1 - 41x_2 - 39x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - Mx_8 - Mx_9 - Mx_{10})$$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
- M	8	1	1	1	0	- 1	0	0	1	0	0	1	1
- M	9	12	52	42	0	0	- 1	0	0	1	0	22	22/42
- M	10	2	2	10	0	0	0	- 1	0	0	1	3,6	3,6/10
	C_j	- 25	- 41	- 39	0	0	0	0	- M	- M	- M		
	Δ_j	- 25 + 12M	- 41 + 32M	- 39 + 47M	0	- M	- M	- M	0	0	0	Z = - 21M	

Résolution manuelle

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 12x_1 + 52x_2 + 42x_3 \geq 22 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \geq 3{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 26x_2 + 21(1 - x_1 - x_2) \geq 11 \\ 5x_1 + 5x_2 + 25\,(1 - x_1 - x_2) \geq 9 \end{cases}$$

$$\text{MIN}\,(Z = 25x_1 + 41x_2 + 39x_3) \qquad \text{MIN}\,(Z = 25x_1 + 41x_2 + 39(1 - x_1 - x_2))$$

$$\begin{cases} -15x_1 + 5x_2 \geq -10 \\ -20x_1 - 20x_2 \geq -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 2 \\ 5x_1 + 5x_2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 5x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\text{MIN}\,(Z = -14x_1 + 2x_2 + 39) \Rightarrow -\text{MAX}\,(7x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4)$$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4		x_k/x_{kj}
0	3	3	- 1	1	0	2	2/3
0	4	5	5	0	1	4	4/5
	C_j	7	- 1	0	0		
	Δ_j	7	- 1	0	0	Z = 0	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4		x_k/x_{kj}
7	1	1	- 1/3	1/3	0	2/3	-
0	4	0	20/3	- 5/3	1	2/3	1/10
	C_j	7	- 1	0	0		
	Δ_j	0	4/3	- 7/3	0	Z = 14/3	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	
7	1	1	0	1/4	1/20	7/10
- 1	2	0	1	- 1/4	3/20	1/10
	C_j	7	- 1	0	0	
	Δ_j	0	0	- 2	- 1/5	Z = 24/5

RESULTAT : $x_1 = 7/10 = 0{,}7$ $x_2 = 1/10 = 0{,}1$ $x_3 = 2/10 = 0{,}2$ $Z = 147/5$

VERIFICATION : $- 24/5 \text{ x } 2 + 39 = - 48/5 + 195/5 = 147/5$

EXERCICE 11 : Programme linéaire sous forme standard

Une entreprise fabrique trois pièces mécaniques dont chacune nécessite les procédés de fabrication suivants : usinage, fraisage et assemblage. Les temps opératoires requis, en minutes, pour chaque type de pièces avec les différents procédés, sont les suivants :

Pièces	Usinage	fraisage	Assemblage
Pièce S_1	5	4	2
Pièce S_2	6	3	4
Pièce S_3	2	5	5
Disponibilités en temps machine	1 500 min/jour	1 200 min/jour	1 400 min/jour

L'étude du marché révèle que la production journalière ne devrait pas excéder : 100 unités du type S_1, 150 unités pour le type S_2, 70 unités pour le type S_3.

La contribution au bénéfice pour chaque type de pièces est : pièces S_1 : 8 € / unité, pièces S_2 : 10 € / unité, pièces S_3 : 9 € / unité.

Déterminer à l'aide des tableaux du simplexe, le programme de fabrication qui maximise les bénéfices.

SOLUTION

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 2x_5 \leq 1500 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_5 \leq 1200 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_5 \leq 1400 \\ x_1 \leq 100 \\ x_2 \leq 150 \\ x_3 \leq 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 2x_5 + x_4 = 1500 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_5 + x_5 = 1200 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_5 + x_6 = 1400 \\ x_1 + x_7 = 100 \\ x_2 + x_8 = 150 \\ x_3 + x_9 = 70 \end{cases}$$

$$\text{MAX}\,(Z = 8x_1 + 10x_2 + 9x_2) \qquad \text{MAX}\,(8x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9)$$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	5	6	2	1	0	0	0	0	0	1500	250
0	5	4	3	5	0	1	0	0	0	0	1200	400
0	6	2	4	5	0	0	1	0	0	0	1400	350
0	7	1	0	0	0	0	0	1	0	0	100	∞
0	8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	150	**150**
0	9	0	0	1	0	0	0	0	0	1	70	∞
	C_j	8	10	9	0	0	0	0	0	0		
	Δ_j	8	**10**	9	0	0	0	0	0	0	Z = 0	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	5	0	2	1	0	0	0	- 6	0	600	300
0	5	4	0	5	0	1	0	0	- 3	0	750	150
0	6	2	0	5	0	0	1	0	- 4	0	800	160
0	7	1	0	0	0	0	0	1	0	0	100	∞
10	2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	150	∞
0	9	0	0	1	0	0	0	0	0	1	70	**70**
	C_j	8	10	9	0	0	0	0	0	0		
	Δ_j	8	0	**9**	0	0	0	0	- 10	0	Z = 1 500	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	5	0	0	1	0	0	0	- 6	- 2	460	**92**
0	5	4	0	0	0	1	0	0	- 3	- 5	400	100
0	6	2	0	0	0	0	1	0	- 4	- 5	450	225
0	7	1	0	0	0	0	0	1	0	0	100	100
10	2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	150	∞
9	3	0	0	1	0	0	0	0	0	1	70	∞
	C_j	8	10	9	0	0	0	0	0	0		
	Δ_j	**8**	0	0	0	0	0	0	- 10	- 9	Z = 2 130	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_0
8	1	1	0	0	1/5	0	0	0	- 6/5	- 2/5	92
0	5	0	0	0	- 4/5	1	0	0	9/5	- 17/5	32
0	6	0	0	0	- 2/5	0	1	0	- 8/5	-21/5	266
0	7	0	0	0	- 1/5	0	0	1	6/5	2/5	8
10	2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	150
9	3	0	0	1	0	0	0	0	0	1	70
	C_j	8	10	9	0	0	0	0	0	0	
	Δ_j	0	0	0	- 8/5	0	0	0	- 2/5	-29/5	Z = 2 866

RESULTAT : $x_1 = 92$ $x_2 = 150$ $x_3 = 70$ $Z = 2\,866$

EXERCICE 11 bis: Programme linéaire sous forme standard

Une entreprise fabrique trois pièces mécaniques dont chacune nécessite les procédés de fabrication suivants : usinage, fraisage et assemblage. Les temps opératoires requis, en minutes, pour chaque type de pièces avec les différents procédés, sont les suivants :

Pièces	Usinage	fraisage	Assemblage
Pièce S_1	5	4	2
Pièce S_2	6	3	4
Pièce S_3	2	5	5
Disponibilités en temps machine	7 50 min/jour	600 min/jour	700 min/jour

L'étude du marché révèle que la production journalière ne devrait pas excéder : 100 unités du type S_1, 150 unités pour le type S_2, 70 unités pour le type S_3.

La contribution au bénéfice pour chaque type de pièces est : pièces S_1 : 8 € / unité, pièces S_2 : 10 € / unité, pièces S_3 : 9 € / unité.

Déterminer à l'aide des tableaux du simplexe, le programme de fabrication qui maximise les bénéfices.

SOLUTION

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 2x_5 \le 750 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_5 \le 600 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_5 \le 700 \\ x_1 \le 100 \\ x_2 \le 150 \\ x_3 \le 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 2x_5 + x_4 = 750 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_5 + x_5 = 600 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_5 + x_6 = 700 \\ x_1 + x_7 = 100 \\ x_2 + x_8 = 150 \\ x_3 + x_9 = 70 \end{cases}$$

$$MAX\ (Z = 8x_1 + 10x_2 + 9x_2) \qquad MAX\ (8x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9)$$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	5	6	2	1	0	0	0	0	0	750	**125**
0	5	4	3	5	0	1	0	0	0	0	600	200
0	6	2	4	5	0	0	1	0	0	0	700	175
0	7	1	0	0	0	0	0	1	0	0	100	∞

0	8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	150	150
0	9	0	0	1	0	0	0	0	0	1	70	∞
	C_j	8	10	9	0	0	0	0	0	0		
	Δ_j	8	**10**	9	0	0	0	0	0	0	Z = 0	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_0	x_k/x_{kj}
10	2	5/6	1	1/3	1/6	0	0	0	0	0	125	375
0	5	3/2	0	4	-1/2	1	0	0	0	0	225	56,25
0	6	-4/3	0	11/ 3	-2/3	0	1	0	0	0	200	54,54
0	7	1	0	0	0	0	0	1	0	0	100	∞
0	8	-5/6	0	-1/3	-1/6	0	0	0	1	0	25	-
0	9	0	0	1	0	0	0	0	0	1	70	**70**
	C_j	8	10	9	0	0	0	0	0	0		
	Δ_j	-1/3	0	**17/3**	-5/3	0	0	0	0	0	Z = 1 250	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_0	x_k/x_{kj}
10	2	21/22	1	0	5/22	0	-1/11	0	0	0	1175/11	111,98
0	5	65/22	0	0	5/22	1	-12/11	0	0	0	75/11	**2,30**
9	3	-4/11	0	1	-2/11	0	3/11	0	0	0	600/11	-
0	7	1	0	0	0	0	0	1	0	0	100	100
0	8	-21/22	0	0	-5/22	0	1/11	0	1	0	475/11	-
0	9	4/11	0	0	2/11	0	-3/11	0	0	1	170/11	42,5
	C_j	8	10	9	0	0	0	0	0	0		
	Δ_j	**19/11**	0	0	-7/11	0	-17/11	0	0	0	Z = 17150/11	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_0
10	2	0	1	0	2/13	-21/65	17/65	0	0	0	1360/13
8	1	1	0	0	1/13	22/65	-24/65	0	0	0	30/13
9	3	0	0	1	-2/13	8/65	9/65	0	0	0	720/13
0	7	0	0	0	-1/13	-22/65	24/65	1	0	0	1270/13
0	8	0	0	0	-2/13	21/65	-17/65	0	1	0	590/13
0	9	0	0	0	2/13	-8/65	-9/65	0	0	1	190/13
	C_j	8	10	9	0	0	0	0	0	0	
	Δ_j	0	0	0	-10/13	-38/65	-59/65	0	0	0	Z =20 320/13

RESULTAT : $x_1 = 30/13 = 2{,}3076$ $x_2 = 1360/13 = 104{,}6153$ $x_3 = 720/13 = 55{,}3846$

$Z = 20\ 320/13 = 1563{,}0769$

EXERCICE 12 : Programme linéaire sous forme standard avec résolution graphique

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\text{MAX}\,(Z = 2x_1 + x_2) \qquad \text{MAX}\,(2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5)$$

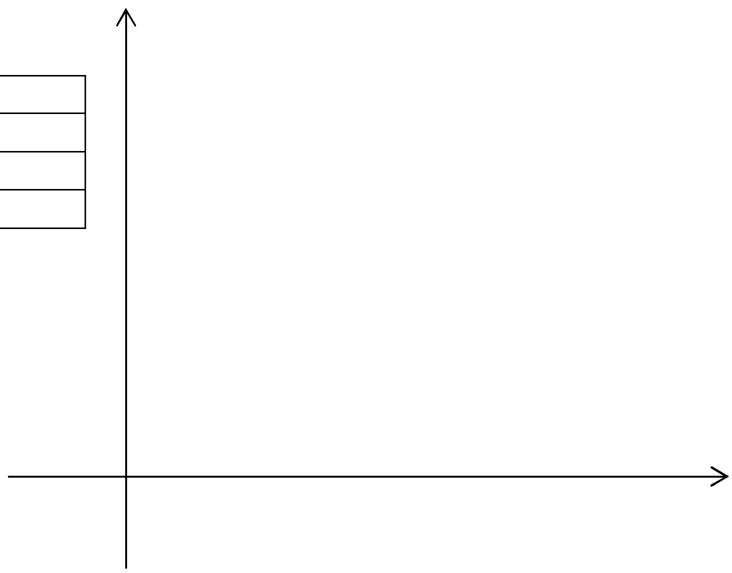
C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0	x_k/x_{kj}
0	3	**1**	- 1	1	0	0	3	**3**
0	4	1	2	0	1	0	6	6
0	5	- 1	2	0	0	1	2	-
	C_j	2	1	0	0	0		
	Δ_j	**2**	1	0	0	0	**Z = 0**	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0	x_k/x_{kj}
2	1	1	- 1	1	0	0	3	-
0	4	0	**3**	- 1	1	0	3	**1**
0	5	0	1	1	0	1	5	5
	C_j	2	1	0	0	0		
	Δ_j	0	**3**	- 2	0	0	**Z = 6**	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0
2	1	1	0	2/3	1/3	0	4
1	2	0	2	- 1/3	1/3	0	1
0	5	0	0	4/3	- 1/3	1	4
	C_j	2	1	0	0	0	
	Δ_j	0	0	- 1	- 1	0	**Z = 9**

<u>RESULTAT</u> : $x_1 = 4 \quad x_2 = 1 \quad Z = 9$

$x_1 - x_2 = 3$	(2, 0)	(1, 4)	
$x_1 + 2\,x_2 = 6$			
$- x_1 + 2\,x_2 = 2$			
$2\,x_1 + x_2 = 0$			



EXERCICE 13 : Programme linéaire sous forme standard avec résolution graphique

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 \le 11 \\ -x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \le 4 \\ x_2 \le 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 11 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_6 = 4 \\ x_2 + x_7 = 5 \end{cases}$$

$\text{MAX}(Z = x_1 + x_2)$ $\quad$ $\text{MAX}(x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7)$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0	x_k/x_{kj}
0	3	2	- 3	1	0	0	0	0	2	**1**
0	4	2	1	0	1	0	0	0	11	11/2
0	5	- 1	1	0	0	1	0	0	3	-
0	6	1	0	0	0	0	1	0	4	4
0	7	0	1	0	0	0	0	1	5	∞
	C_j	1	1	0	0	0	0	0		
	Δ_j	**1**	1	0	0	0	0	0	**Z = 0**	

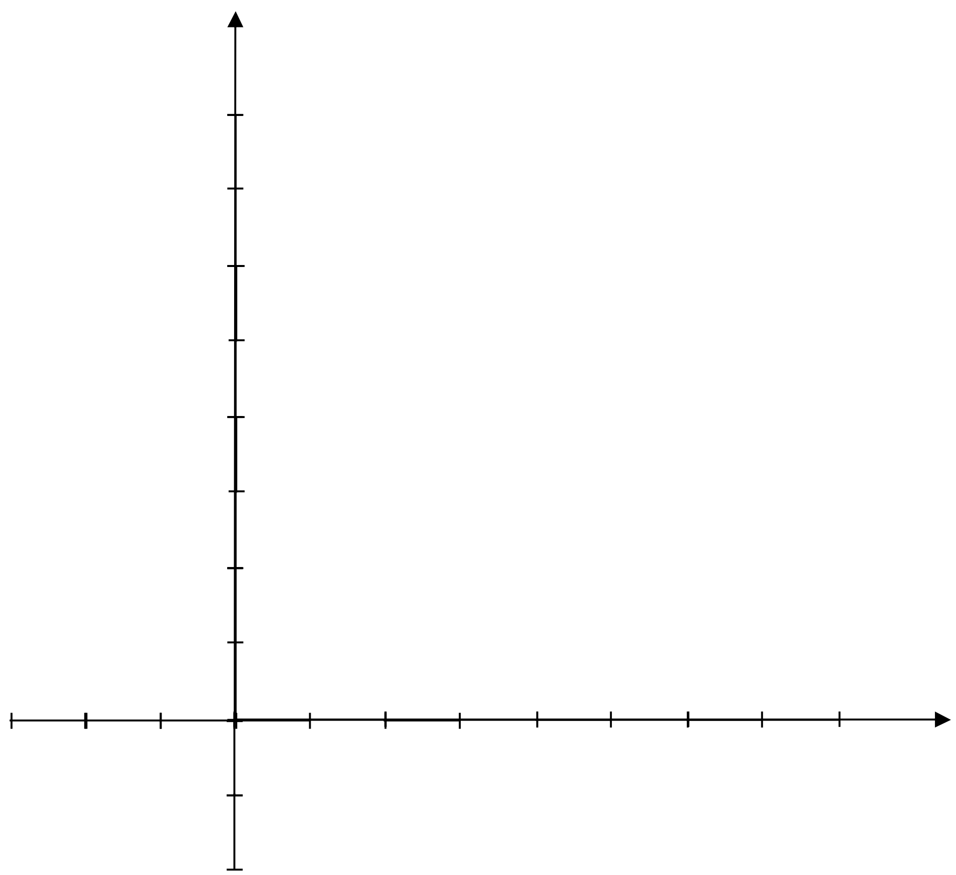
C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0	x_k/x_{kj}
1	1	1	- 3/2	1/2	0	0	0	0	1	-
0	4	0	4	- 1	1	0	0	0	9	9/4
0	5	0	- 1/2	1/2	0	1	0	0	4	-
0	6	0	3/2	- 1/2	0	0	1	0	3	**2**
0	7	0	1	0	0	0	0	1	5	5
	C_j	1	1	0	0	0	0	0		
	Δ_j	0	**5/2**	- 1/2	0	0	0	0	**Z = 1**	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0	x_k/x_{kj}
1	1	1	0	0	0	0	1	0	4	∞
0	4	0	0	1/3	1	0	- 8/3	0	1	**3**
0	5	0	0	1/3	0	1	1/3	0	5	15
1	2	0	1	- 1/3	0	0	2/3	0	2	-
0	7	0	0	1/3	0	0	- 2/3	1	3	9
	C_j	1	1	0	0	0	0	0		
	Δ_j	**0**	0	**1/3**	0	0	- 5/3	0	**Z = 6**	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0	x_k/x_{kj}
1	1	1	0	0	0	0	1	0	4	4
0	3	0	0	1	3	0	- 8	0	3	**-**
0	5	0	0	0	- 1	1	3	0	4	4/3
1	2	0	1	0	1	0	- 2	0	3	-
0	7	0	0	0	- 1	0	2	1	2	**1**
	C_j	1	1	0	0	0	0	0		
	Δ_j	0	0	0	- 1	0	**1**	0	**Z = 7**	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_0
1	1	1	0	0	½	0	0	- 1/2	3
0	3	0	0	1	- 1	0	0	4	11
0	5	0	0	0	½	1	0	- 3/2	1
1	2	0	1	0	0	0	0	1	5
0	6	0	0	0	- ½	0	1	1/2	1
	C_j	1	1	0	0	0	0	0	
	Δ_j	0	0	0	- ½	0	**0**	- 1/2	**Z = 8**

RESULTAT : $x_1 = 3$ $x_2 = 5$ $Z = 8$



EXERCICE 14 : Programme linéaire sous forme générale avec résolution graphique

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ 7x_1 + 10x_2 \geq 47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 + x_7 = 8 \\ 7x_1 + 10x_2 - x_5 + x_8 = 47 \end{cases}$$

$$\text{MIN}\,(Z = 2x_1 + 3x_2) \qquad -\text{MAX}\,(-2x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8)$$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
- M	6	4	1	- 1	0	0	1	0	0	8	8
- M	7	1	4	0	- 1	0	0	1	0	8	**2**
- M	8	7	10	0	0	- 1	0	0	1	47	4,7
	C_j	- 2	- 3	0	0	0	- M	- M	- M		
	Δ_j	- 2 + 12M	**- 3 + 15M**	- M	- M	- M	0	0	0	**Z = - 63M**	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
- M	6	15/4	0	- 1	¼	0	1	- 1/4	0	**6**	8/5
- 3	2	¼	1	0	- ¼	0	0	1/4	0	2	8
- M	8	9/2	0	0	5/2	- 1	0	- 5/2	1	27	6
	C_j	- 2	- 3	0	0	0	- M	- M	- M		
	Δ_j	**- 5/4 + 33M/4**	0	- M	- 3/4 + 11M/4	- M	0	3/4 - 15M/4	0	**Z = - 33M - 6**	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
- 2	1	1	0	- 4/15	1/15	0	4/15		0	8/5	24
- 3	2	0	1	1/15	- 4/15	0	- 1/15		0	8/5	-
- M	8	0	0	6/5	11/5	- 1	- 6/5		1	99/5	**9**
	C_j	- 2	- 3	0	0	0	- M		- M		
	Δ_j	0	0	- 1/3 + 6M/5	**- 2/3 + 11M/5**	- M	1/3 - 11M/5		0	**Z = - 99M/5 - 8**	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
- 2	1	1	0	- 10/33	0	1/33			- 1/33	1	-
- 3	2	0	1	7/33	0	- 4/33			4/33	4	18,8
0	4	0	0	6/11	1	- 5/11			5/11	9	16,5
	C_j	- 2	- 3	0	0	0			- M		
	Δ_j	0	0	**1/33**	0	- 10/33			10/33 – M	**Z = - 14**	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
- 2	1	1	0	0	5/9	- 2/9				6	
- 3	2	0	1	0	- 7/18	1/18				1/2	
0	3	0	0	1	11/6	- 5/6				33/2	
	C_j	- 2	- 3	0	0	0			- M		
	Δ_j	0	0	0	- 1/18	- 5/18				**Z = - 27/2**	

RESULTAT : $\mathbf{x_1 = 6}$ $\mathbf{x_2 = 1/2}$ **Z = 27/2**

Résolution graphique :

Coordonnées pour tracer les droites

$4x_1 + x_2 = 8$	(1,4)	(2,0)	(1/2,6)
$x_1 + 4x_2 = 8$	(0,2)	(4,1)	(6,1/2)
$7x_1 + 10x_2 = 47$	(0,4.7)	(1,4)	(2,3.3)
$2x_1 + 3x_2 = 0$	(0,0)	(3,-2)	(-3,2)

Résolution par dualité :

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ 7x_1 + 10x_2 \geq 47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y_1 + y_2 + 7y_3 \leq 2 \\ y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y_1 + y_2 + 7y_3 + y_4 = 2 \\ y_1 + 4y_2 + y_3 + y_5 = 3 \end{cases}$$

$\text{MIN}(Z = 2x_1 + 3x_2)$ $\quad\quad$ $\text{MAX}(8y_1 + 8y_2 + 47y_3)$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0	x_k/x_{kj}
0	4	4	1	7	1	0	2	**0,28**
0	5	1	4	10	0	1	3	0,30
	C_j	8	8	47	0	0		
	Δ_j	8	8	**47**	0	0	**Z = 0**	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0	x_k/x_{kj}
47	3	4/7	1/7	1	1/7	0	2/7	**2**
0	5	- 33/7	18/7	0	- 10/7	1	1/7	**1/18**
	C_j	8	8	47	0	0		
	Δ_j	- 132/7	**9/7**	**0**	- 47/7	0	**Z = 94/7**	

C_i	i	A_1	A_{21}	A_3	A_4	A_5	A_0	x_k/x_{kj}
47	3	5/6	0	1	2/9	- 1/18	5/18	
8	2	- 11/6	1	0	- 5/9	7/18	1/18	
	C_j	8	8	47	0	0		
	Δ_j	- 33/2	0	**0**	- 6	- ½	**Z = 27/2**	

EXERCICE 15 : Programme linéaire sous forme générale avec résolution graphique

$$\begin{cases} x_2 \le 1000 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 4500 \\ x_1 \ge 600 \\ x_2 \ge 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 1000 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 4500 \\ x_1 - x_5 + x_7 = 600 \\ x_2 - x_6 + x_8 = 600 \end{cases}$$

$$\text{MAX}\,(Z = 4x_1 + 5x_2) \qquad \text{MAX}\,(4x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7 - Mx_8)$$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
0	3	0	1	1	0	0	0	0	0	1000	1000
0	4	2	3	0	1	0	0	0	0	4500	1500
- M	7	1	0	0	0	- 1	0	1	0	600	∞
- M	8	0	1	0	0	0	- 1	0	1	600	**600**
	C_j	4	5	0	0	0	0	- M	- M		
	Δ_j	4 + M	**5 + M**	0	0	- M	- M	0	0	**Z = - 1200M**	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
0	3	0	0	1	0	0	1	0	- 1	400	∞
0	4	2	0	0	1	0	3	0	- 1	2700	1350
- M	7	1	0	0	0	- 1	0	1	0	600	**600**
5	2	0	1	0	0	0	- 1	0	1	600	∞
	C_j	4	5	0	0	0	0	- M	- M		
	Δ_j	**4 + M**	0	0	0	- M	5	0	- 5 - M	**Z = - 600M + 3000**	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
0	3	0	0	1	0	0	1	0		400	**400**
0	4	0	0	0	1	2	3	- 2		1500	500
4	7	1	0	0	0	- 1	0	1		600	∞
5	2	0	1	0	0	0	- 1	0		600	-
	C_j	4	5	0	0	0	0	- M			
	Δ_j	0	0	0	0	4	**5**	- 4 - M		**Z = 5400**	

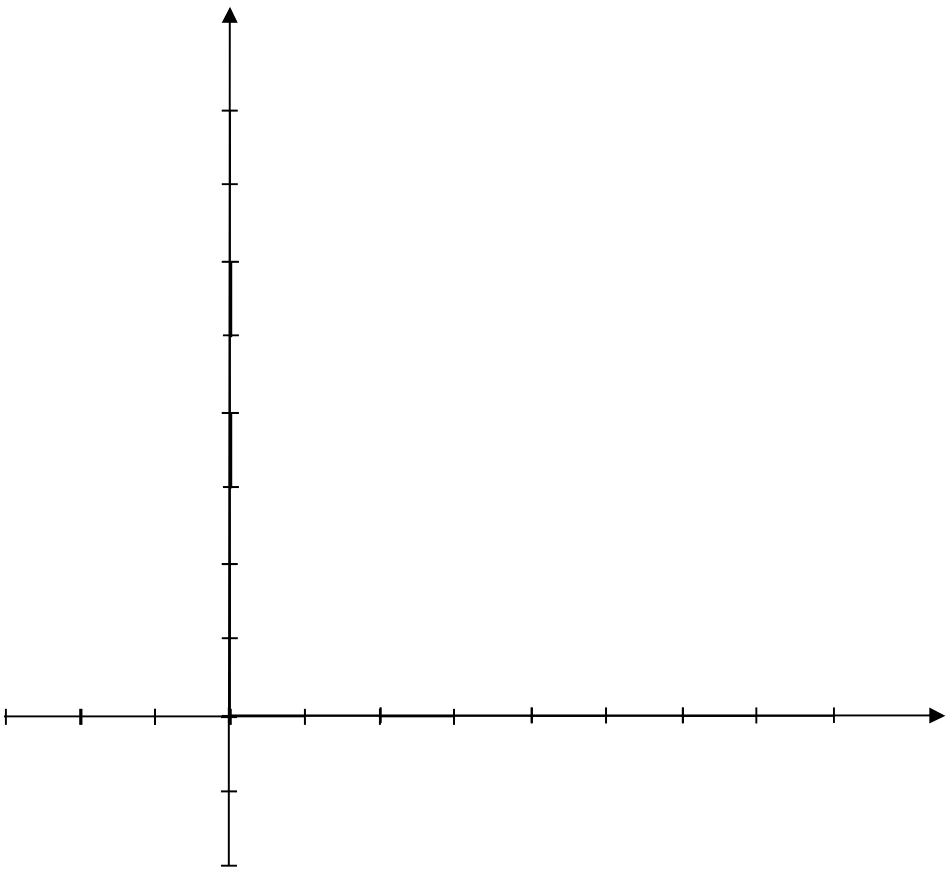
C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
0	6	0	0	1	0	0	1			400	∞
0	4	0	0	- 3	1	2	0			300	**150**
4	1	1	0	0	0	- 1	0			600	-
5	2	0	1	1	0	0	0			1000	∞
	C_j	4	5	0	0	0	0				
	Δ_j	0	0	- 5	0	**4**	0			**Z = 7400**	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
0	6	0	0	1	0	0	1			400	**400**
0	5	0	0	- 3/2	1/2	1	0			150	-

4	1	1	0	- 3/2	1/2	0	0			750	**-**
5	2	0	1	1	0	0	0			1000	1000
	C_j	4	5	0	0	0	0				
	Δ_j	0	0	**1**	- 2	0	0			**Z = 8000**	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_0	x_k/x_{kj}
0	3	0	0	1	0	0	1			400	
0	5	0	0	0	1/2	1	3/2			750	
4	1	1	0	0	1/2	0	3/2			1350	
5	2	0	1	1	0	0	- 1			600	
	C_j	4	5	0	0	0	0				
	Δ_j	0	0	0	- 2	0	- 1			**Z = 8400**	

RESULTAT : **$x_1 = 1350$ $x_2 = 600$ $Z = 8400$**



EXERCICE 16 : Programme linéaire sous forme générale avec résolution graphique

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

$$\text{MAX}\,(Z = 5x_1 + x_2) \qquad \text{MAX}\,(5x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6)$$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_0	x_k/x_{kj}
0	3	2	1	1	0	0	0	6	6
0	4	1	1	0	1	0	0	4	4
- M	6	1	2	0	0	- 1	1	1	**0,5**
	C_j	5	1	0	0	0	- M		
	Δ_j	5 + M	**1 + 2M**	0	0	- M	0	Z = - M	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_0	x_k/x_{kj}
0	3	3/2	0	1	0	1/2	- 1/2	11/2	11/3
0	4	½	0	0	1	1/2	- 1/2	7/2	7
1	2	½	1	0	0	- 1/2	1/2	½	**1**
	C_j	5	1	0	0	0	- M		
	Δ_j	**9/2**	0	0	0	1/2	- M – 1/2	Z = ½	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_0	x_k/x_{kj}
0	3	0	- 3	1	0	2		4	**2**
0	4	0	- 1	0	1	1		3	3
5	1	1	2	0	0	- 1		1	- 1
	C_j	5	1	0	0	0	- M		
	Δ_j	0	- 9	0	0	**5**		Z = 5	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_0
0	5	0	- 3/2	1/2	0	1		2
0	4	0	1/2	- 1/2	1	0		1
5	1	1	1/2	1/2	0	0		3
	C_j	5	1	0	0	0	- M	
	Δ_j	0	- 3/2	- 5/2	0	0		Z = 15

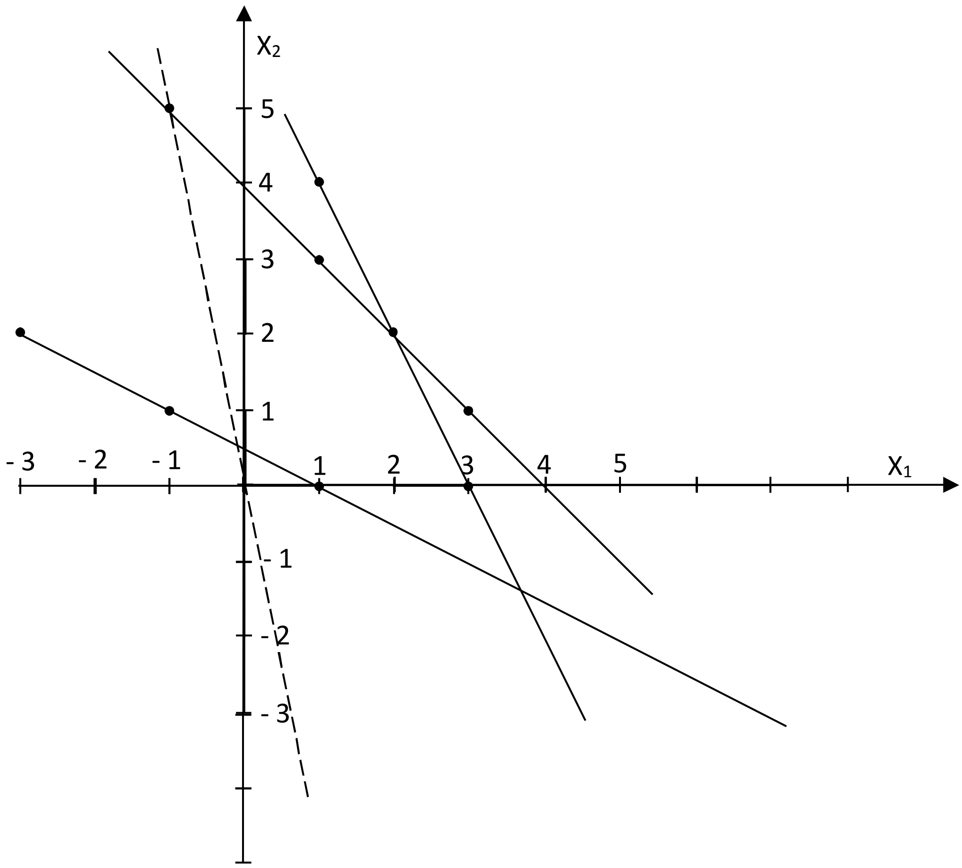
RESULTAT : $\mathbf{x_1 = 3 \quad x_2 = 0 \quad Z = 15}$

	$2x_1 + x_2 = 6$		
x_1	1	2	3
x_2	4	2	0

$x_1 + x_2 = 4$		
1	2	3
3	2	1

$x_1 + 2x_2 = 6$		
- 3	- 1	1
2	1	0

$5x_1 + x_2 = 0$			
0	1	- 1	x_1
0	- 5	5	x_2



$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 - 2x_2 \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -1 \end{cases}$$

$\text{MAX}\ (Z = 5x_1 + x_2)$ $\text{MAX}\ (5x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5)$

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0	x_k/x_{kj}
0	3	2	1	1	0	0	6	3
0	4	1	1	0	1	0	4	4
0	5	- 1	- 2	0	0	1	- 1	**1**
	C_j	5	1	0	0	0		
	Δ_j	**5**	1	0	0	0	Z = 0	

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0	x_k/x_{kj}
0	3	0	- 3	1	0	2	4	2
0	4	0	- 1	0	1	1	3	3
5	1	1	2	0	0	- 1	1	- 1

	C_j	5	1	0	0	0	
	Δ_j	0	- 9	0	0	5	Z = 5

C_i	i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0
0	5	0	- 3/2	1/2	0	1	2
0	4	0	1/2	- 1/2	1	0	1
5	1	1	1/2	1/2	0	0	3
	C_j	5	1	0	0	0	
	Δ_j	0	- 3/2	- 5/2	0	0	Z = 15

Contraintes contradictoires

$$\begin{cases} x_1 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ - x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

Max ($x_1 + 2\, x_2$)