Introducción a los modelos de equilibrio general dinámico con mercados incompletos exógenos

"Any claim that modern macro is dominated by representative agent models is wrong"
V.V Chari[1].

1. Introducción

Los modelos de equilibrio general dinámicos (DGE[2]) constituyen actualmente la base de la macroeconomía moderna. Su estructura de equilibrio general la cual garantiza la coherencia interna de los modelos, la posibilidad de evaluar distintas medidas de política económicas tomando en cuenta la interdependencia estratégica entre los agentes y el poder obtener estadísticos que puedan posteriormente compararse con datos de economías reales, entre otros, han sido motivos claves que han llevado a este marco de referencia a ocupar un sitio prominente en el actual "mainstream" de la teoría macroeconómica.

Asimismo, la extensión de los DGE a entornos estocásticos (DSGE[3]) ha producido un éxito tan grande que llevó a iniciar uno de los programas de investigación más influyente en la macroeconomía actual. Dicho programa no sólo significó un aporte teórico importante, sino también un gran aporte metodológico que popularizo el uso de este tipo de modelos a través de la implementación de herramientas computacionales, que permiten trabajar con representaciones de economías con determinadas características de interés para el investigador, a través de las cuales podemos generar series de tiempo y contrastarlas con datos reales.

Los DSGE utilizan una estructura de mercados completos para tratar el problema de la incertidumbre. Dicha estructura asume la existencia de un número de activos igual al número de estados de la naturaleza o contingencias existentes en la economía, es decir,

[1] "Building a Science of Economics for the Real World". Hearing before the House Committee on Science and Technology. Subcommittee on Investigations and Oversight. House of Representatives of the United States of América. July 20, 2010

[2]Por sus siglas en inglés, Dynamic General Equilibrium

[3]Por sus siglas en inglés, Dynamic Stochastic General Equilibrium

que el agente posee la posibilidad de adquirir un activo que le ofrezca un pago para cada una de los eventos posibles, pudiendo asegurarse "perfectamente" ante cualquier eventualidad. Una de las principales conclusiones de este entorno es que el consumo es independiente del ingreso personal disponible actual (hipótesis de la renta permanente) y que la historia de los agentes (toda la serie de sucesos a los cuales se han enfrentado en su pasado) no se toman en cuenta en sus decisiones presentes. De este supuesto de mercados completos deriva la representación comunmente llamada de "agente representativo".

A pesar del poder de este tipo de modelos, existen preguntas que involucran la interacción de agentes que difieren entre si, las cuales este marco de referencia no es capaz de responder.

Muchos de los problemas económicos actuales deben enfrentar en alguna etapa de su análisis el hecho cierto de que los agentes económicos se diferencian entre si. Existen empresas de distinto tamaño y por ende distinta capacidad de apalancamiento financiero, existen trabajadores de distinta edad y productividades, familias de distinto niveles de ingreso, etc. Este hecho condiciona muchas de las preguntas relevantes de la agenda de investigación actual; los efectos de la política económica sobre algún agregado objetivo pueden diferir si se toma en cuenta la heterogeneidad de los agentes, así como el efecto sobre el nivel de bienestar de una economía de las fluctuaciones del producto o algún choque exógeno no anticipado, entre otros. Asimismo, sería deseable dar respuestas cuantitativas a estas cuestiones.

Aiyagari (1994) menciona en la introducción de su trabajo, en el cual utiliza un DSGE con heterogeniedad de agentes lo siguiente: *"The exposition is motivated by two facts (I) the behavior of individual consumptions, wealths, and portfolios is strongly at variance with the complete markets model implicit in the representative agent framework, and (II) recently several authors have found versions of such models useful for analyzing a variety of issues including asset pricing, monetary policy, business cycles, and taxation."*

Por lo tanto, el extender los DSGE para incorporar diferencias entre los agentes de una economía, podría ayudar a resolver anomalías presentes en los modelos con mercados completos, tales como el *home bias*, el *equity premium puzzle* y el *price-quantity anomaly* presente en los modelos de ciclo real internacional entre otros. Así como analizar los efectos distributivos de una política económica concreta (Díaz-Giménez and Pijoan-Mas (2006)) o evento inesperados como la crisis reciente.

A continuación se expone brevemente como pasar de una economía de mercados completos a una de mercados incompletos resaltando las dificultades que esto plantea y la manera como dichos escollos han sido resueltos.

2. Mercados Completos

Analizamos la manera estándar de introducir incertidumbre en un modelo de equilibrio general dinámico, la estructura de mercados completos.

Se asume que un bien en determinados estados de la naturaleza es considerado como bienes distintos, de ese modo expandimos el espacio de bienes en función del número de estados de la naturaleza y aplicamos los procedimientos habituales para localizar equilibrios en este tipo de economías.

La estructura de mercados completos asume la existencia de un número de activos igual al número de estados de la naturaleza o contingencias existentes en la economía, es decir, que el agente posee la posibilidad de adquirir un activo que le ofrezca un pago para cada una de los eventos posibles, pudiendo asegurarse "perfectamente" ante cualquier eventualidad.

Una de las principales conclusiones de este entorno es que el consumo es independiente de la historia de los agentes (toda la serie de sucesos a los cuales se han enfrentado en su pasado). De este supuesto de mercados completos deriva la representación comunmente llamada de "agente representativo", la cual solemos utilizar cuando analizamos los modelos de ciclo real o de política óptima.

A continuación describiremos como se escribe una economía de este tipo y sus principales implicaciones.

2.1. Entorno

2.1.1. Preferencias y Dotaciones

Supongamos una economía habitada por I agentes indexados por $i = \{1, 2, \ldots, I\}$, que viven un número T de períodos, donde T puede ser infinito. Cada individuo recibe una dotación del único bien físico de la economía $y^i(s_t)$. La dotación depende de la realización de una variable aleatoria s_t, la cual representa la fuente de incertidumbre de esta economía.

Asumimos que la variable s_t se distribuye como un proceso de Markov en un soporte definido $S = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$, donde las probabilidades de transición vienen dadas por:

$$P\{s_t = \theta_j | s_{t-1} = \theta_i\}$$

Se puede asumir cualquier otro proceso generador para s_t.

Definicion 2.1. Una *historia* $s^t = (s_0, \ldots, s_t) \in S$ es una secuencia de realizaciones de la variable s, y representa todos los choques realizados desde el inicio de los tiempos hasta t. S^t denota todas las posibles historias hasta el período t.

Dada la cadena de Markov asociada al proceso de s_t y un estado inicial s_0, podemos escribir la probabilidad de cualquier historia s^t del siguiente modo:

$$\pi(s^t) = \pi(s_t|s_{t-1})\pi(s_{t-1}|s_{t-2})\dots\pi(s_1|s_0)\pi_0(s_0)$$

Definicion 2.2. Una *asignación o plan contingente de consumo* es una función que aplica historias a posibles consumos en cada período t $c^i : S^t \to \mathbb{R}^n$ y se denota como $c^i = \{c^i_t(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$.

Definicion 2.3. Una asignación es *factible* si satisface:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t\in S} c^i_t(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t\in S} y^i(s_t)$$

Los agentes poseen preferencias sobre c^i cuyo ordenamiento viene representado por una función de utilidad esperada von Neumann Morgenstern de la forma

$$U(c^i) = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t\in S} \beta^t\pi(s^t)u[c^i_t(s^t)] \tag{2.1}$$

donde $\beta \in (0,1)$ es la tasa subjetiva de descuento.

La función de utilidad instantánea $u(c^i_t)$ es crecientes, continua dos veces diferenciable, estrictamente cóncava y cumple la llamada condición de Inada[4].

Dado que asumimos mercados completos y por lo tanto existe una activo para cada contingencia posible en esta economía, la restricción de los agentes se escribe de la siguiente forma:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t\in S} q_t(s^t)c^i_t(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t\in S} q_t(s^t)y^i(s_t) \tag{2.2}$$

donde $q_t(s^t)$ es el precio de una unidad de consumo en el período t contingente a la ocurrencia de la historia s^t en términos del bien hoy.

Si asumimos que todos los intercambios de activos se realizan el período 0, y que luego a medida que se vaya realizando la historia se van liquidando los acuerdos, nos encontramos en una economía Arrow-Debreu, lo cual nos permite escribir una sola restricción del tipo de la ecuación 2.2.

2.2. Equilibrio

Si existe una sola restricción, podemos escribir el programa de optimización del agente como la elección de una secuencia o plan contingente de consumo $c^i = \{c^i_t(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ tal que se maximize 2.1 sujeto a 2.2.

[4] $\lim_{c\to 0} u'(c) \to +\infty$

A partir de esta descripción podemos definir un equilibrio para esta economía. Asumimos un arreglo financiero en el cual todos los activos se negocian en el período 0, por lo que trabajaremos en una economía Arrow-Debreu.

Definicion 2.4. Un *equilibrio Arrow-Debreu* es una secuencia de precios $\{q_t(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ y una secuencia de asignaciones de consumo $c^i = \{c_t^i(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ $\forall i \in I$ tal que cada consumidor i maximiza 2.1 sujeto a 2.2 y los mercados se vacían:

$$\sum_{i=0}^{I} c_t^i = \sum_{i=0}^{I} y_t^i \tag{2.3}$$

Si denotamos por λ^i el multiplicador de Lagrange de la maximización restringida, la condición de primer orden viene dada por:

$$\beta^t \pi(s^t) u'[c_t^i(s^t)] \quad = \quad \lambda^i q_t(s^t) \tag{2.4}$$

A través de 2.4 también podemos obtener una expresión para los precios contingentes $q_t(s^t)$:

$$q_t(s^t) = \frac{\beta^t \pi(s^t) u'[c_t^i(s^t)]}{\lambda^i} \tag{2.5}$$

La expresión 2.4 debe cumplirse para todo i. Por lo tanto, es cierto que para cada par de consumidores $(i,j) \in I$ que se enfrentan al mismo precio $q_t(s_t)$:

$$\frac{u'[c_t^i(s^t)]}{u'[c_t^j(s^t)]} = \frac{\lambda^i}{\lambda^j} \tag{2.6}$$

para todos los estados s y períodos t. Por ende, con una estructura de mercados completos el cociente de utilidades marginales entre cualquier par de agentes es constante a través del tiempo y los estados.

A partir de 2.6:

$$c_t^i(s^t) = u'^{-1}\left\{ u'[c_t^j(s^t)] \frac{\lambda^i}{\lambda^j} \right\} \tag{2.7}$$

el consumo del agente i será una fracción del consumo del agente j donde dicha fracción no depende del estado de la economía.

Lo anterior implica que existe aseguramiento perfecto del riesgo. Si recordamos la literatura básica de elección bajo incertidumbre, esta establecía que en el óptimo los agentes aversos al riesgo elegían una demanda de "seguro" tal que su utilidad marginal no se modificara a través de los estados de la economía.

Utilizando las ecuaciones 2.7 y 2.3 podemos encontrar una expresión para el consumo relativo.

$$\sum_{i=0}^{I} y^i(s_t) = \sum_{i=0}^{I} u'^{-1}\left\{ u'[c_t^j(s^t)] \frac{\lambda^i}{\lambda^j} \right\} \tag{2.8}$$

Según esta expresión, este dependerá sólo del nivel agregado de la dotación y del estado en s_t, no de la historia completa de eventos s^t.

Ahora volvamos al tema de los precios contingentes. Las condiciones de óptimo del problema del consumidor nos permiten valorar el consumo ocurrido en determinados períodos y estados en términos de otros períodos y contingencias.

Dado que λ^i es independiente del tiempo debido a que trabajamos con una sola restricción de presupuesto, la expresión 2.5 se debe cumplir también para $t-1$:

$$q_{t-1}(s^{t-1}) = \frac{\beta^{t-1}\pi(s^{t-1})u'[c_{t-1}^i(s^{t-1})]}{\lambda^i} \tag{2.9}$$

Combinando las ecuaciones 2.5 y 2.9 obtenemos:

$$\begin{aligned} q_t(s^t)\frac{\beta^{t-1}\pi(s^{t-1})u'[c_{t-1}^i(s^t)]}{q_{t-1}(s^{t-1})} &= \beta^t\pi(s^t)u'[c_t^i(s^{t-1})] \\ \frac{q_t(s^t)}{q_{t-1}(s^{t-1})} &= \frac{\beta^t\pi(s^t)u'[c_t^i(s^t)]}{\beta^{t-1}\pi(s^{t-1})u'[c_{t-1}^i(s^{t-1})]} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Recordar que podemos escribir la probabilidad de las historias como:

$$\pi(s^t) = \pi(s_t|s_{t-1})\pi(s_{t-1}|s_{t-2})\ldots\pi(s_1|s_0)\pi_0(s_0)$$

$$\pi(s^{t-1}) = \pi(s_{t-1}|s_{t-2})\ldots\pi(s_1|s_0)\pi_0(s_0)$$

por lo que $\frac{\pi(s^t)}{\pi(s^t-1)}$ es igual a:

$$\frac{\pi(s^t)}{\pi(s^t-1)} = \pi(s_t|s_{t-1})$$

quedando la expresión 2.10 como:

$$\frac{q_t(s^t)}{q_{t-1}(s^{t-1})} = \beta\pi(s^t|s^{t-1})\frac{u'[c_t^i(s^t)]}{u'[c_{t-1}^i(s^{t-1})]} \tag{2.11}$$

Esta expresión es una de las bases de la teoría de valoración de activos (asset pricing). El término $\beta\frac{u'[c_t^i(s^t)]}{u'[c_{t-1}^i(s^{t-1})]}$ es conocido como como el factor de descuento estocástico, que juega un rol importante en determinar el comportamiento de martingala de ciertos activos.

Asimismo, el lado derecho de la ecuación 2.11 es el llamado kernel de valoración (pricing kernel), que es utilizado si deseamos valorar el precio de un rendimiento estocástico ocurrido en el período t, estado s^t en términos del bien de consumo en el período $t-1$, estado s^{t-1}.

Hemos observado que las asignaciones de consumo individuales dependen no del nivel individual de dotaciones sino del nivel agregado.

Esta última observación nos lleva a un a importante proposición[5]: Supongamos unas asignaciones $c^i = \{c_t^i(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ y unos precios $\{q_t(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ que sean un equilibrio Arrow-Debreu. Entonces la asignación:

$$c_t(s^t) = \sum_{i=1}^{I} c_t^i(s^t)$$

y los precios $\{q_t(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$, son un equilibrio Arrow-Debreu para una economía con un solo agente ($I = 1$), donde este agente representativo posee una dotación de:

$$y_t(s^t) = \sum_{i=1}^{I} y_t^i(s^t)$$

Lo anterior no es más que la representación estándar de agente representativo.

3. Mercados Incompletos

Llegado este punto cabría preguntarse, ¿Como es posible que un DSGE genere una distribución de agentes endógena?. La clave está en abandonar el supuesto de mercados completos. Al reducir el número de activos que pueden ser intercambiados por los agentes, se limita la capacidad de los mismos de asegurarse ante cualquier contingencia. Esta limitación en la capacidad de asegurar riesgos rompe los resultados de aseguramiento perfecto e independencia de las decisiones de los agentes de su historia.

Una manera de limitar la capacidad de aseguramiento de los agentes es exponerlos a choques idiosincráticos y permitirles que tengan acceso sólo un activo no contingente con rendimiento r, el cual utilizan no solo para intercambiar consumo presente por consumo futuro como en los modelos deterministas, sino para paliar fluctuaciones en su ingreso. Lo anterior permite generar una distribución de agentes que difieren en su historia, la cual viene reflejada por la cantidad de activos que son capaces de acumular.

Supongamos que los hogares se enfrentan al siguiente problema:

$$\text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=i}^{N} \beta^t \pi(s_i) u(C_t)$$

sujeto a

$$c_t + a_{t+1} = (1 + r)a_t + s_t$$

[5] La cual no va a ser demostrada.

Donde a_t representa los activos con que llega al período t y los cuales restringimos que pertenezcan al conjunto $A = \{a_{1,}a_2, \ldots, a_K\}$. s representa los posibles estados de la naturaleza, siendo la variable de estado estocástica. $\pi(s_i)$ es la probabilidad de ocurrencia del estado de la naturaleza $s_i \in Z$. Se asume que s sigue un proceso de Markov con matriz de transición P.

Supongamos que $Z = \{s_1 = \text{empleado}, s_2 = \text{desempleado}\}$

Representamos el problema del agente en su forma recursiva:

$$\begin{aligned} V(s,a) &= \max_{c,k'}[u(c) + \beta E\{V(s',a')|s\}] \\ &\text{sujeto a} \\ &c = a(1+r) + s - a' \\ &a' \in A \end{aligned} \tag{3.1}$$

las primas representan el valor de la variable el próximo período.

En este modelo los agentes difieren del estado de la naturaleza en el cual se encuentren. En cada instante del tiempo puede haber agentes empleados o desempleados. Asimismo, difieren en la *historia* de sus choques idiosincráticos. Por ejemplo, en cada instante del tiempo existirán agentes que hayan pasado largas épocas de desempleo, acaben de perder su empleo, nunca hayan estado desempleados, etc.

Un agente que haya recibido muchas realizaciones adversas (períodos prolongados de desempleo) se encontrará en una posición distinta a otro que haya recibido un gran número de realizaciones favorables, si tuviéramos que seguir la pista de toda la historia de choques de cada uno de los agentes el problema sería matemática y numéricamente intratable.

Afortunadamente el nivel de activos al inicio del período a_t nos resume la historia del agente, debido al papel que juegan los activos como amortiguador de choques adversos y objetos de acumulación ante choques favorables. Por lo cual agentes con muchas realizaciones buenas (malas) poseerán un gran (poco) número de activos.

Por lo anterior, en cada t los agentes diferirán en su historia, resumida por el estado de la naturaleza en que se encuentren y su tenencia de activos. Tendremos $A \times Z$ agentes distintos, la heterogeneidad que hemos estado buscando.

3.1. Variable de Estado

La extensión de estos modelos para poder tratar la heterogeneidad de los agentes no es directa. El abandonar el supuesto de mercados completos (y por ende el de agente representativo) complica el análisis de los modelos, ya que las variables de estado pasan a ser distribuciones y los precios y asignaciones de equilibrio pasan a depender de esta, lo cual dificulta el método de resolución numérica necesaria para este entorno.

Por ejemplo, en el modelo de crecimiento estocástico la variable de estado es el capital agregado, por su parte en esta economía la variable de estado sería las tenencias de capital que posee cada agente dependiendo del estado (e historias) en que se encuentra.

La dificultad adicional de estos modelos radica en que se debe computar la distribución de la variable de estado y la ley de movimiento de esta, de modo que los agentes puedan predecir los precios y variables agregadas futuros necesarios para resolver su programa de maximización.

3.1.1. Distribución de Agentes

Necesitamos obtener una medida estacionaria que nos "cuente" la cantidad o fracción de agentes que se encuentren en subconjuntos del espacio de los estados S. Dicho de manera sencilla, deseamos una función invariante en el tiempo que nos indique que fracción de nuestros agentes se encuentran en $a, s \in S$ específicos.

Formalmente:

Definicion 3.1. Una **Medida** de los agentes de nuestra economía es una función que aplique desde subconjuntos del espacio de los estados $S = A \times Z$ al campo de los reales positivos (set - point function) de la forma $\Phi : S \times \beta_s \to [0, 1]$, donde β_s es el algebra de Borel de S

Dado que el rango de la función es $[0, 1]$ podemos entender dicha función (medida) como una función de probabilidad.

3.1.2. Ley de Movimiento de la Distribución

Aún nos hace falta un elemento, una función que nos describa la probabilidad de que un agente que pertenezca hoy a $a, s \in S$ transite el próximo período a un subconjunto $B_a \times B_s \in S$, es decir, la probabilidad de pasar a estados conjuntos determinados dada su ubicación actual.

Podemos representar dicha función como $\Phi' = Q(\Phi)$.

Nótese la similitud de esta definición con la matriz de transición de un proceso markoviano, en efecto estamos hablando de una función de transición que nos resuma la transición de los agentes a través de pares ordenados de S, Formalmente:

Definicion 3.2. La *Ley de Movimiento* de la distribución Φ es una función $Q : S \times \wp(S) \to [0, 1]$ donde $\wp(S) = C(Z) \times B(A)$ es el espacio producto que denota el producto cartesiano de subconjuntos de Z y A. Se puede escribir la función Q como $Q(x, B) = \Pr\{S_{t+1} \in B \mid S_t = x\}$ para cualquier $x \in S$ y cualquier conjunto B σ- métrico.

Dicha función es generada por las reglas de decisión y la matriz de transición de s. ¿Qué significa esto?

Supongamos que deseamos conocer la siguiente esperanza: $\Pr(s_{t+1} = s', a_{t+1} = a' \mid s_t = s, a_t = a)$. Es posible determinar la misma a través de dos elementos:

- la matriz de transición P del proceso estocástico s, que nos indica la probabilidad $\pi(s_{t+1} = s' \mid s_t = s)$ la cual es independiente de a.
- la función de política que nos indica la cantidad de activos mañana contingente al número de activos y estado de la naturaleza hoy $a_{t+1} = g^a(a_t = a, s_t = s)$.

Así que la probabilidad de poseer a_{t+1} en el estado s_{t+1} dado (a_t, s_t) es igual a $\pi(s_{t+1} = s' \mid s_t = s)$ *siempre y cuando* $a_{t+1} = g^a(a_t = a, s_t = s)$. Analicemos esta idea de manera intuitiva con un ejemplo.

Example 3.3. Supongamos que:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2\} \\ Z &= \{s_1, s_2\} \text{ donde } s_1 > s_2 \\ \pi(s_i \mid s_t) &= 0,5 \;\; \forall\, i = 1, 2 \end{aligned}$$

$a' = g^a(a, s)$ viene dada por la siguiente tabla:

s	a	a'
s_1	1	2
s_1	2	2
s_2	1	1
s_2	2	1

Deseamos conocer $\Pr(s_{t+1} = s_1, a_{t+1} = 2 \mid s_t = s_1, a_t = 2)$, según la función de política si $(a_t, s_t) = (2, s_1)$ lo óptimo es $a' = 2$, por lo cual dado $S = (2, s_1)$ la probabilidad de que el agente escoja $a' = 2$ es 1.

Sabemos que $\pi(s_1 \mid s_1) = 0,5$, por lo tanto la probabilidad $\Pr(s_{t+1} = s_1, a_{t+1} = 2 \mid s_t = s_1, a_t = 2)$ es igual a:

$$\Pr(a_{t+1} = 2 \mid s_t = s_1, a_t = 2) \times \Pr(s_{t+1} = s_1 \mid s_t = s_1) = 1 \times 0,5 = 0,5^{6}$$

[6] Formalmente esta expresión es igual a $\Pr(a_{t+1} = 2 \mid s_t = s_1, a_t = 2) \times \Pr(s_{t+1} = s_1 \mid s_t = s_1) \times \Pr(s_t = s_1 \mid a_t = 2)$, el último término de la ecuación es igual a 1 porque conocemos la posición actual del agente.

Dicho de otra forma es igual a P siempre y cuando a_{t+1} corresponda a una elección óptima del agente dado el estado actual.

Calculemos ahora $\Pr(s_{t+1} = s_1, a_{t+1} = 1 \mid s_t = s_1, a_t = 2)$, acorde a la función de política si el agente se encuentra en $(a_t, s_t) = (2, s_1)$ su elección óptima es $a' = 2$, no escogerá $a' = 1$ y por ende la probabilidad de que ocurra la transición planteada al inicio del párrafo es cero.

Podemos resumir lo anterior con la siguiente expresión:

$$Q[(a,s),(\mathcal{B}(A),\mathcal{C}(Z))] = \begin{cases} \sum\limits_{s' \in \mathcal{C}(Z)} \pi(s' \mid s) & \text{si } a' = g(a,s) \in \mathcal{B}(A) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

o de la siguiente forma más estándar en la literatura:

$$\Phi^{'}(a', s') = \sum_a \sum_s \Phi(a,s)\pi(s_{t+1} = s' \mid s_t = s) \times \mathcal{I}(a', s, a)$$

donde $\mathcal{I}(a', s, a)$ es una función indicador que es igual 1 si $a' = g^a(a,s)$ y 0 en caso contrario.

Esta expresión puede simplificarse y escribirse como:

$$\Phi^{'}(a', s') = \sum_s \sum_{a:a'=g(a,s)} \Phi(a,s)P(s', s)$$

3.2. Estrategias de Solución

3.2.1. Precios Fijos

Una estrategia posible para atacar este tipo de problemas es hacer que los precios no dependan de la distribución de agentes. Los primeros modelos cuantitativos que tomaron en cuenta la heterogeneidad de los agentes adoptaron este camino.

La definición de equilibrio de una economía de este tipo con precios constantes, en este caso el tipo de interés, sería la siguiente:

Definicion 3.4. Un **equilibrio** es una función valor, V_c, funciones de política $g^c(a,s)$ y $g^a(a,s)$, una medida Φ y una ley de movimiento para la medida de agentes $\Phi' = Q(\Phi)$, dado un tipo de interés r tal que:

- Dado r, V_c es la función valor que maximiza 3.1 y $g^c(a,s)$ y $g^a(a,s)$ sus decisiones óptimas

- Las agregados son consistentes con las decisiones óptimas:

$$\begin{aligned} K(\Phi) &= \sum_a \sum_s \Phi(a,s) g^a(a,s) \\ C(\Phi) &= \sum_a \sum_s \Phi(a,s) g^c(a,s) \end{aligned}$$

- El operador Q es generado por las reglas de decisión y la matriz de transición de s:

$$\Phi^{'}(a',s') = \sum_s \sum_{a:a'=g(a,s)} \Phi(a,s) P(s',s)$$

- La medida de agentes $\Phi(a,s)$ es estacionaria: $\Phi = Q(\Phi)$

Se observa como forman parte en esta definición de equilibrio la medida (distribución) de los agentes y la ley de movimiento de la misma. Así como la naturaleza exógena de la tasa de interés.

El primer artículo en el que aparece un modelo cuantitativo con una distribución de agentes endógena es el de Imrohoruglu (1989). La autora se realiza la siguiente pregunta ¿El coste de bienestar de los ciclos económicos calculado en **?** es el mismo cuando se toma en cuenta la heterogeneidad entre los agentes?. Para responder a esta interrogante se construye un modelo en el cual un continuo de agentes idénticos ex-ante se encuentran sujetos a choques idosincráticos que dependen del ciclo económico, no existe un mercado de activos contingentes y los agentes acumulan un activo con el cual intentan paliar las fluctuaciones en su consumo producto de los choques.

Específicamente, existe una probabilidad de quedar desempleado en cuyo caso se obtiene un ingreso menor[7]. La probabilidad de abandonar el empleo, así como la probabilidad de no obtener uno nuevo estando desempleado, se incrementan durante las recesiones y disminuyen durante los auges. Formalmente se asume que el proceso del choque idiosincrático es markoviano.

En este modelo los agentes difieren del estado de la naturaleza en el cual se encuentren. En cada instante del tiempo puede haber agentes empleados o desempleados. Asimismo, diferiran en la posición de activos, dependiendo esta de la historia de choques idiosincráticos de cada agente.

Tendremos un número de agentes igual a los estados de la naturaleza (2, empleado o no) multiplicado por el número de denominaciones del activo (en el caso de Imrohoroglu 301 y 601).

Imrohoruglu fija el rendimiento del activo asumiendo que este se trata de una tecnología de almacenamiento, de ese modo el precio del activo no se modifica ante cambios

[7]Se puede interpretar este ingreso como un subsidio al desempleo.

en las variables de estado y por ende los agentes no tienen porque conocer la ley de movimiento de estas.

Esta estrategia simplifica mucho el análisis, ya que no es necesario determinar de manera endógena un precio y adicionalmente no es necesario computar la ley de movimiento de la distribución de agentes.

El trabajo de Imrohoruglu (1989) analiza tres entornos distintos en su modelo, los cuales utiliza para calcular el coste de los ciclos en cada versión. En el primero se asume que los agentes no pueden endeudarse, o lo que es lo mismo, sólo pueden mantener tenencias positivas de activos. En el segundo entorno asume que existe una tecnología de intermediación que utiliza recursos de la economía[8], y por último asume una estructura de mercados completos.

La estrategia de solución se basa en obtener las reglas de decisión o funciones de política dado el precio del activo, utilizando técnicas estándar de programación dinámica una vez discretizado el espacio de estados y controles. Posteriormente se obtiene la distribución estacionaria de agentes utilizando dichas reglas y la matriz de transición del proceso del choque idiosincrático.

Las principales conclusiones de este trabajo es que el coste de los ciclos es entre cuatro y cinco veces mayor en la economía sin endeudamiento, comparada con la versión de mercados completos. Asimismo, dicho coste se reduce notablemente (en un factor igual a seis comparado con el caso de aseguramiento perfecto) cuando es introducida la tecnología de intermediación.

Estos resultados ya son capaces de indicarnos la potencia de este tipo de modelos; los arreglos financieros y por ende la capacidad de aseguramiento de los agentes puede modificar los resultados estándar de los modelos de agente representativo.

Una estrategia similar a la de Imrohoruglu (1989) para solucionar este tipo de economías fijando los precios de manera exógena es la adoptada por los trabajos de Diaz-Gimenez and Prescott (1992) y (1997) e Imrohoroglu and Prescott (1991), donde se introduce un gobierno el cual implementa políticas (determina la inflación y por ende el proceso de los precios) de manera que los precios relativos no dependan de la distribución de agentes.

Según esta estrategia, existe un gobierno que interviene en los mercados de manera que los precios se mantengan a un determinado nivel. Dichos precios suelen ser el tipo de interés, el salario y en caso que exista alguna transferencia gubernamental, que no es un precio pero que afecta el conjunto de presupuesto de los agentes y por ende sus reglas de decisión.

Dada la naturaleza dinámica y recursiva de los entornos aquí descritos, el gobierno posee reglas de políticas contingentes al estado de la naturaleza pero independientes de

[8]Es decir, existe un coste de intermediación, y por ende un margen de tasas.

la distribución de agentes, los cuales conocen estas reglas. Formalmente el gobierno se "compromete" a las políticas $r(a,s)$, $w(a,s)$ y $tr(a,s)$, donde r es el tipo de interés *real*, w el salario y tr alguna transferencia.

El gobierno puede intervenir en los mercados a través de la compra-venta de activos financieros (operaciones de mercado abierto por ejemplo) e influir a través de impuestos en el rendimiento de activos reales (capital productivo) y los salarios.

En los trabajos arriba mencionados el gobierno a través de operaciones de mercado abierto en el caso de Diaz-Gimenez and Prescott (1992) y (1997) y variando el encaje legal en el caso de Imrohoroglu and Prescott (1991) logra fijar el tipo de interés nominal, mientras que el nivel de precios es establecido al nivel al cual el gobierno desea adquirir los bienes producidos en la economía.

Las políticas del gobierno dependen del estado de la naturaleza, dado que este determina el tamaño del desequilibrio en los mercados y por ende la magnitud de la intervención gubernamental. Pero al mantener los precios a los niveles preestablecidos, estos no dependen del estado de la naturaleza, por lo tanto los precios ya no son función de la distribución de agentes y tampoco las decisiones de estos.

Estos trabajos introducen la idea de que los agentes mantienen saldos reales en equilibrio para poder paliar las fluctuaciones en su ingreso producto de los choques idiosincráticos y de los cambios en el regimen monetario, representado como un choque agregado.

Los agentes mantienen dinero (activos emitidos por la unidad monetaria que no generan un rendimiento nominal) porque no poseen acceso pleno a los activos financieros emitidos por el banco central (bonos). En Imrohoroglu and Prescott los agentes deben acceder a una tecnología de intermediación para poder adquirir bonos, dicha tecnología es costesa en la medida que el agente debe pagar un coste fijo y luego un coste por unidad intermediada. En este caso, agentes que hayan recibido un buen número de choques adversos no poseerán suficientes recursos para acceder a dicha tecnología, viéndose obligados a acumular sólo dinero para poder suavizar su consumo.

Por su parte, en los trabajos de Diaz-Gimenez and Prescott las denominaciones de los bonos y el dinero son distintas. El dinero se emite en denominaciones pequeñas, mientras que la denominación de los bonos es un múltiplo grande de la del dinero. Al igual que el modelo anterior, sólo aquellos agentes que dado su historia de choques poseen suficientes recursos son los que demandan bonos para suavizar su consumo.

Estos modelos nos permiten evaluar las pérdidas o ganancias de bienestar producto de distintos niveles de inflación, así como obtener efectos reales ante cambios en la política monetaria.

Dado que distintos procesos de inflación hacen variar el rendimiento real de los activos que utilizan los agentes ante la inexistencia de un mercado completo de seguros, el consumo y las decisiones de estos también se ven modificados.

El bienestar de los agentes se ve reducido ante incrementos en el nivel de inflación, o lo que es igual, ante caídas del rendimiento real de sus activos. Asimismo, distintos rendimientos generan cambios en las decisiones de empleo de los agentes y por ende en el producto de la economía.

La clave de estos modelos es la inexistencia de mercados completos, y la consecuente utilización de activos cuyo rendimiento varía según la regla de política para amortiguar las fluctuaciones en el ingreso.

Otros ejemplos de esta metodología pueden verse en los trabajos de Díaz-Giménez, Alvarez, Fitzgerald, and Prescott (1992) y Díaz-Giménez and Puch (1998), en el cual se analiza una economía en la cual existe un agente que intermedia fondos y el resto acumulan un bien duradero en presencia de restricciones financieras. Estos modelos nos ayudan a explicar la distribución de los bienes duraderos a través de los agentes, y por ende de la distribución de la riqueza, ya que la mayor parte de la riqueza de las economías domésticas de los percentiles medios-bajos se encuentra compuestas por bienes duraderos. Y lo que es más importante, resalta el rol de las restricciones financieras y las particularidades del bien duradero en la forma de la distribución de la riqueza.

3.2.2. Precios Endógenos

Adicional a la estrategia arriba descrita exista otra cuya idea básica es la misma, mantener las decisiones de los agentes independientes de la distribución de las variables de estado, pero que en lugar de fijar los precios de manera exógena, estos se determinan endogenamente.

El mantener los precios fijos implica abstraerse del hecho de que estos suelen ser el resultado de la interacción de los agentes en el mercado. Si se desea incorporar este elemento es necesario introducir los precios en la definición de equilibrio de la economía y por ende alguna condición de vaciado de mercado, la cual puede complicar el análisis en el sentido que los agentes de nuevo necesitarían conocer la distribución de las variables de estado.

Lo anterior puede complicar el análisis en el sentido que los agentes de nuevo necesitarían conocer la distribución de las variables de estado y su ley de movimiento para poder predecir los precios y resolver sus programas de optimización. Necesitamos una estrategia que desvincule las decisiones de los agentes de la distribución de las variables de estado sin tener que fijar los precios de manera exógena.

Esto es posible realizando un análisis de *estado estacionario*. En dicho estado los precios y la distribución de agentes a través de los estados de la economía es constante a través del tiempo, por lo cual el agente sólo observa el precio y resuelve su programa de optimización sin tomar en cuenta la forma y ley de movimiento de las variables de estado.

Al igual que en los casos anteriores con precios fijos, esto implica localizar un punto fijo en dos dimensiones; uno para computar las funciones de política y otro para obtener la distribución estacionaria. La diferencia crucial es que el precio debe ser tal que cumpla una condición de vaciado de mercado, y adicionalmente genere unas reglas de decisión que al agregarlas se obtenga la distribución estacionaria.

El primer trabajo que utiliza una condición de vaciado de mercado no trivial es el de Huggett (1993), cuyo artículo busca una explicación al llamado *equity premium puzzle*, el porque el exceso del rendimiento de las acciones sobre el tipo cero riesgo es mucho más elevada que aquella predecida por los modelos estándar. Siguiendo la literatura anterior al tema, busca construir un modelo en el cual las imperfecciones del mercado financiero, específicamente la ausencia de aseguramiento perfecto ante choques idiosincráticos, pueda explicar la existencia de un tipo libre de riesgo menor a la sugerida por los modelos con mercados completos.

En función de lo anterior, trabaja con un entorno en el cual los agentes acumulan un activo financiero (bonos) para poder suavizar su consumo ante la presencia de dotaciones estocásticas y la inexistencia de mercados completos. Dichos activos se encuentran sujetos a una restricción de crédito, la cual impide al agente endeudarse todo lo que desee. Los bonos (a descuento) generan un rendimiento q, que es determinado de manera endógena en el modelo como aquel nivel que vacía el mercado de crédito.

El problema del consumidor puede escribirse del siguiente modo:

$$\text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=i}^{N} \beta^t \pi(s_i) u(C_t)$$

$$\text{sujeto a}$$

$$c_t + q a_{t+1} = a_t + s_t$$

donde a_t representa el único activo que acumulan los agentes dado la inexistencia de mercados contingentes, q es el precio (endógeno) del activo que se adquiere a descuento, s representa los posibles valores (2) que pueden presentar la dotación del agente. Se asume que s sigue un proceso de Markov.

La representación recursiva del problema sería:

$$V(s,a) = \underset{c,a' \geq \underline{a}}{max} [u(c) + \beta E\{V(s', a')|s\}] \tag{3.2}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$c = a + s - qa'$$

$$a' \in \mathcal{A}$$

donde $\mathcal{A} = [\underline{a}, \ldots, \bar{a}]$

La restricción de crédito viene dada por el hecho de que hemos acotado por abajo es el espacio de activos $\mathcal{A}$, el nivel de activos $\underline{a}$ sería el máximo nivel de endeudamiento en el cual pueden incurrir los agentes en esta economía.

Como se menciona arriba, el "truco" utilizado para no hacer depender las reglas de decisión de la distribución de agentes, consiste en trabajar para cada tipo de interés en un estado estacionario. Es decir, una situación en la cual el rendimiento del activo no varíe en el tiempo. Esto permite obtener las reglas de decisión para un tipo de interés dado, sin necesidad de tomar en cuenta distribuciones. Posteriormente se obtiene la distribución de agentes al igual que en Imrohoruglu (1989), utilizando las reglas de decisión y el proceso markoviano de la dotación. Una vez obtenida la distribución se usa esta y la función de política del activo para obtener el nivel agregados de activos.

La definición de equilibrio de esta economía sería la siguiente:

Definicion 3.5. Un **equilibrio** es una función valor, V_c, funciones de política $g^c(a,s)$ y $g^a(a,s)$, una medida Φ, una ley de movimiento para la medida de agentes $\Phi' = Q(\Phi)$ **y una precio del bono (tipo de interés)** q tal que:

- Dado q, V_c es la función valor que maximiza 3.2 y $g^c(a,s)$ y $g^a(a,s)$ sus decisiones óptimas
- Las agregados son consistentes con las decisiones óptimas:

$$C(\Phi) = \sum_a \sum_s \Phi(a,s) g^c(a,s)$$

- El mercado de bonos está en equilibrio

$$\sum_a \sum_s \Phi(a,s) g^a(a,s) = 0$$

- El operador Q es generado por las reglas de decisión y la matriz de transición de s:

$$\Phi^{'}(a',s') = \sum_s \sum_{a:a'=g(a,s)} \Phi(a,s) P(s',s)$$

- La medida de agentes $\Phi(a,s)$ es estacionaria: $\Phi = Q(\Phi)$

La condición de equilibrio para el tipo de interés es que este genere unas reglas de política y un nivel agregado de activos tal que el balance neto del mercado de activos sea igual a cero, es decir, que la demanda de saldos negativos de activos (deudas) sea igual a la demanda de saldos positivos (préstamos).

Huggett llega a la conclusión que un modelo con restricciones de liquidez y choques idiosincráticos es capaz de generar una tasa de interés inferior a la de un modelo de agente representativo, lo cual puede ayudar a explicar la anomalía del *equity premium*

Este artículo representó un avance significativo, debido a que no sólo aportó una estrategia teórica para poder obtener precios endógenos sin necesidad de tomar en cuenta la distribución de agentes y la ley de movimiento de esta, sino que nos ha dejado un algoritmo sencillo con el cual podemos computar el equilibrio de este tipo de economías, el cual consiste en lo siguiente:

1. Fijar el tipo de interés a un nivel dado $r = r_0$.

2. Obtener las funciones de política para ese tipo de interés.

3. Calcular la distribución estacionaria a partir de las reglas de decisión y la matriz de transición del choque idiosincrático.

4. Utilizar la distribución de activos y su función de política para calcular el nivel agregado de activos y verificar si es igual cero.

Este algoritmo suele ser útil en entornos donde no existen activos reales (que contribuyen al nivel de producción de la economía) y por ende los rendimientos no se encuentran atados a condiciones tecnológicas (productividades marginales).

Pueden existir casos en los cuales nos interesa analizar situaciones donde la tasa de ahorro agregada es positiva[9], para analizar cuestiones como el efecto de determinadas políticas sobre el nivel de ahorro y por ende la capacidad de expansión de una economía, por ejemplo.

Aiyagari (1994) es el primero en computar el equilibrio de una economía en el cual existe un nivel positivo de ahorro y se toma en cuenta las posibilidades de producción. Utiliza esta economía para analizar precisamente la importancia del riesgo idiosincrático en la determinación del nivel agregado de ahorro.

Existía la idea de que el llamado ahorro precaución[10] podría ser un determinante importante del ahorro total, Aiyagari (1994) encuentra que para valores plausibles de los parámetros de las preferencias y el proceso individual de los ingresos, la contribución del ahorro precaución es más bien modesta.

Si deseamos tener niveles positivos de ahorro, la estrategia de Huggett (1993) ya no es valida al imponer este un nivel de ahorro igual a cero como condición de equilibrio para determinar la tasa de interés. Así que Aiyagari (1994) introduce una nueva condición

[9]Recordar que en el modelo de Huggett (1993) la tasa de ahorro agregada es cero.

[10]Ahorro producto de la incertidumbre individual y no relacionado con el intercambio entre consumo presente y futuro.

de equilibrio, en la cual exige que la tasa agregada de ahorro sea igual al capital físico agregado, que es utilizado en una función de producción neoclásica.

Analizaremos una economía con una función de producción neoclásica en la cual el tipo de interés, y por ende, el capital agregado es endógeno, mientras que el trabajo agregado es exógeno.

En una economía de este tipo además de una condición de vaciado de mercado (demanda agregada = oferta agregada) y una condición de consistencia agregada (el capital agregado es igual a la suma de las reglas de decisión a través de los estados de la economía), en equilibrio el tipo de interés debe ser igual al producto marginal del capital.

La principal diferencia de una economía tipo Aiyagari con las estudiadas en las secciones anteriores es la existencia de una función de producción.

La incorporación de una tecnología en nuestra economía no solo se limita a añadir una función de producción y una ley de movimiento del capital agregado, ya que el trabajo agregado es exogeno y debemos calcular su nivel correcto.

El nivel agregado de trabajo es igual a:

$$L = \xi' \overline{s} \tag{3.3}$$

Donde ξ' es la distribución invariante asociada a la matriz de transición del proceso estocástico, mientras que $\overline{s}$ es la distribución de las unidades de eficiencia del trabajo.

El problema del consumidor se escribe ahora de la siguiente forma:

$$\text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=i}^{N} \beta^t \pi(s_i) u(C_t)$$

sujeto a

$$c_t + x_t = rk_t + ws_t$$

donde x_t representa la inversión bruta en capital físico k. r es la renta del capital, que es igual al tipo de interés en el equilibrio. w es la remuneración al trabajo (salario), s representa los posibles valores (2) que pueden presentar las unidades de eficencia del trabajo. Se asume que s sigue un proceso de Markov.

Adicionalmente, tenemos la ley de movimiento del capital:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + x_t \tag{3.4}$$

donde δ es la tasa de depreciación del capital.

Sustituyendo 3.4 en la restricción de presupuesto obtenemos:

$$c_t + k_{t+1} = (1 + r - \delta)k_t + ws_t$$

La representación recursiva del problema arriba enunciado es:

$$\begin{aligned} V(s,a) = \underset{c,k'}{max}&[u(c) + \beta E\{V(s',a')|s\}] \\ &\text{sujeto a} \\ &c = ws + (1 + r - \delta)k - k' \\ &k' \in K \end{aligned} \tag{3.5}$$

Esta economía posee una función de producción agregada que combina el nivel agregado de trabajo y capital para obtener el único bien de esta economía.

Asumimos como es usual en la literatura una función de producción Cobb-Douglas:

$$F(K,N) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

Esta función de producción determina en equilibrio los niveles del salario y la tasa de interés, a partir de las condiciones de optimización de la empresa.

$$\begin{aligned} w &= \frac{\partial F(K,N)}{\partial N} \\ r &= \frac{\partial F(K,N)}{\partial K} \end{aligned} \tag{3.6}$$

que en el caso de una función Cobb-Douglas son:

$$r = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha} \tag{3.7}$$

$$w = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = (1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} \tag{3.8}$$

Ya poseemos todos los objetos necesarios para definir el equilibrio de nuestra economía. Observar los nuevos elementos de nuestra definición:

Definicion 3.6. Un **equilibrio** es una función valor, V_c, funciones de política $g^c(a,s)$ y $g^k(a,s)$, una medida Φ, una ley de movimiento para la medida de agentes $\Phi' = Q(\Phi)$ **y un tipo de interés** r tal que:

- El tipo de interés y el salario satisfacen 3.6
- Dado r, V_c es la función valor que maximiza 3.5 y $g^c(a,s)$ y $g^k(a,s)$ sus decisiones óptimas

- Las agregados son consistentes con las decisiones óptimas:

$$K(\Phi) = \sum_a \sum_s \Phi(a,s) g^k(a,s)$$
$$C(\Phi) = \sum_a \sum_s \Phi(a,s) g^c(a,s)$$

- El operador Q es generado por las reglas de decisión y la matriz de transición de s:

$$\Phi^{'}(a', s') = \sum_s \sum_{a:a'=g(a,s)} \Phi(a,s) P(s', s)$$

- La medida de agentes $\Phi(a,k,s)$ es estacionaria: $\Phi = Q(\Phi)$

Esta incorporación cambia el algoritmo utilizado para determinar el equilibrio de este tipo de economías. En el primer paso no se postula un tipo de interés inicial, sino que se fija un capital inicial K_0 y se determina el tipo de interés como el producto marginal de K_0, los dos siguientes pasos son iguales al propuesto por Huggett (1993), pero el cuarto pasa a ser:

- Utilizar la distribución de activos y su función de política para calcular el nivel agregado de activos y verificar si es igual a K_0.

De no cumplirse la condición anterior se postula un nuevo nivel de capital y se repite el proceso.

Además del tópico del ahorro precaución, el papel de Aiyagari (1994) presenta las predicciones del modelo en torno a la forma de la distribución de la riqueza. A pesar de no replicar perfectamente los datos de concentración de riqueza observados en la economía norteamericana, logra obtener una distribución de la riqueza más concentrada que la del ingreso y sesgada hacia los percentiles superiores de renta.

Estas observaciones han hecho que versiones de este modelo sean una de las principales herramientas utilizadas para tratar de replicar ciertas características de la distribución de la riqueza[11].

Dichas extensiones han intentado explicar las dos dimensiones de la distribución de la riqueza en las cuales se comporta peor el modelo de Aiyagari (1994), a saber, las dos colas de la distribución. Los agentes presentes en la cola inferior (superior) acumulan mucho más (menos) activos que los observados en los datos.

Para intentar mejorar el desempeño del modelo en esos aspectos se han introducido al mismo elementos de ciclo vital (Huggett 1996), del sistema impositivo y seguridad

[11]Para una revisión de la utilización de estos modelos para estudiar la distribución de la riqueza ver Castaneda, Diaz-Gimenez, and Rios-Rull (2003), Rios-Rull (2002) y Quadrini and Rios-Rull (1997)

social progresivos (Huggett and Ventura 2000), la iniciativa empresarial (Quadrini (2000) y Cagetti and Nardi (2006)), incorporación de bienes duraderos (Díaz and Luengo-Prado (2010), Chambers, Garriga, and Schlagenhauf (2009), Fernández-Villaverde and Krueger (2011)) etc[12].

Un trabajo que destaca en esta literatura es el de Castaneda, Diaz-Gimenez, and Rios-Rull (2003), el cual incorpora un sistema impositivo progresivo, elementos de ciclo vital y agentes altruistas que dejan herencias y oferta de trabajo endógena. En este entorno los autores buscan un proceso para los ingresos que pueda replicar de manera adecuada y simultanea la distribución del ingreso y la riqueza y permita a los agente de alto nivel de ingreso acumular grandes cantidades de riqueza en un tiempo suficientemente rápido.

Se logra el objetivo de replicar la distribución de la riqueza, pero a costa de un proceso exógeno (calibrado en equilibrio) de los ingresos con diferencias excesivas de productividad entre los distintos tipos de agentes.

Hemos observado como la incorporación de la falta de aseguramiento completo en los DSGE han contribuido a incrementar la capacidad explicativa de este tipo de modelos, y lo continuará haciendo en la medida que se avance en el desarrollo de los métodos numéricos necesarios para tratar las dificultades técnicas que este tipo de entornos implica.

[12]Para un adecuado survey que revisa los aspectos principales de esta literatura ver Nardi (2015) y Cagetti and Nardi (2008)

Referencias

Aiyagari, S. R. (1994): "Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving," *Quarterly Journal of Economics*, 109(3), 659–684.

Cagetti, M., and M. D. Nardi (2006): "Entrepreneurship, Frictions, and Wealth," *Journal of Political Economy*, 114(5), 835–870.

——— (2008): "Wealth Inequality: Data And Models," *Macroeconomic Dynamics*, 12(S2), 285–313.

Castaneda, A., J. Diaz-Gimenez, and J.-V. Rios-Rull (2003): "Accounting for the U.S. Earnings and Wealth Inequality," *Journal of Political Economy*, 111(4), 818–857.

Chambers, M., C. Garriga, and D. E. Schlagenhauf (2009): "Accounting For Changes In The Homeownership Rate," *International Economic Review*, 50(3), 677–726.

Díaz, A., and M. J. Luengo-Prado (2010): "The Wealth Distribution With Durable Goods," *International Economic Review*, 51(1), 143–170.

Díaz-Giménez, J., F. Alvarez, T. Fitzgerald, and E. C. Prescott (1992): "Banking in computable general equilibrium economies," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 16.

Díaz-Giménez, J., and J. Pijoan-Mas (2006): "Flat Tax Reforms in the US: A Boon for the Income Poor," CEPR Discussion Papers 5812, C.E.P.R. Discussion Papers.

Díaz-Giménez, J., and L. Puch (1998): "Borrowing Constraints in Economies with Indivisible Household Capital and Banking: An Application to the Spanish Housing Market (1982-89)," *Investigaciones Económicas*, XXII(3), 469–499.

Diaz-Gimenez, J., and E. C. Prescott (1992): "Liquidity constraints in economies with aggregate fluctuations: a quantitative exploration," Staff Report 149, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

——— (1997): "Real returns on government debt: A general equilibrium quantitative exploration," *European Economic Review*, 41(1), 115–137.

Fernández-Villaverde, J., and D. Krueger (2011): "Consumption And Saving Over The Life Cycle: How Important Are Consumer Durables?," *Macroeconomic Dynamics*, 15(05), 725–770.

Huggett, M. (1993): "The Risk Free Rate in Heterogeneous Agent Incomplete Insurance Economies," *Journal of Economic Dynamics and Control*, (17), 953–969.

——— (1996): "Wealth distribution in life-cycle economies," *Journal of Monetary Economics*, 38(3), 469–494.

Huggett, M., and G. Ventura (2000): "Understanding Why High Income Households Save More than Low Income Households," *Journal of Monetary Economics*, (45), 361–397.

Imrohoroglu, A., and E. C. Prescott (1991): "Evaluating the Welfare Effects of Alternative Monetary Arrangements," Quarterly Review 3, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

Imrohoruglu, A. (1989): "Cost of Business Cycles with Indivisibilities and Liquidity Constraints," *Journal of Political Economy*, 97(6), 1364–83.

Nardi, M. D. (2015): "Quantitative Models of Wealth Inequality: A Survey," NBER Working Papers 21106, National Bureau of Economic Research, Inc.

Quadrini, V. (2000): "Entrepreneurship, Saving and Social Mobility," *Review of Economic Dynamics*, 3(1), 1–40.

Quadrini, V., and J. V. Rios-Rull (1997): "Understanding the U.S. Distribution of Wealth," Quarterly Review 2, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

Rios-Rull, J. V. (2002): "Desigualdad, ¿Que sabemos?," *Investigaciones Económicas*, XXVI(2), 221–254.