3
Mercados Completos

Kamal A. Romero S.

Sumario

Se introduce el modelo base de tratamiento de la incertidumbre en macroeconomía. Se estudia como encontrar los precios y asignaciones que implementen un equilibrio competitivo. Asimismo se enfatiza en las implicaciones del modelo en relación con el precio de los activos, la independencia del consumo con respecto a la renta personal y la historia de choques y el aseguramiento perfecto.

Contenido

1. Introducción

Analizamos la manera estándar de introducir incertidumbre en un modelo de equilibrio general dinámico, a saber, la estructura de mercados completos.

Se asume que un bien en determinados estados de la naturaleza es considerado como bienes distintos, de ese modo expandimos el espacio de bienes en función del número de estados de la naturaleza y aplicamos los procedimientos habituales para localizar equilibrios en este tipo de economías.

La estructura de mercados completos asume la existencia de un número de activos igual al número de estados de la naturaleza o contingencias existentes en la economía, es decir, que el agente posee la posibilidad de adquirir un activo que le ofrezca un pago para cada una de los eventos posibles, pudiendo asegurarse "perfectamente" ante cualquier eventualidad.

Una de las principales conclusiones de este entorno es que el consumo es independiente de la historia de los agentes (toda la serie de sucesos a los cuales se han enfrentado en su pasado).

De este supuesto de mercados completos deriva la representación comunmente llamada de "agente representativo", la cual solemos utilizar cuando analizamos los modelos de ciclo real o de política óptima.

A continuación describiremos como se escribe una economía de este tipo y sus principales implicaciones.

2. Una Economía con Mercados Completos

2.1. Entorno

2.1.1. Preferencias y Dotaciones

Supongamos una economía habitada por I agentes indexados por $i = \{1, 2, \ldots, I\}$, que viven un número T de períodos, donde T puede ser infinito. Cada individuo recibe una dotación del único bien físico de la economía $y^i(s_t)$. La dotación depende de la realización de una variable aleatoria s_t, la cual representa la fuente de incertidumbre de esta economía.

Asumimos que la variable s_t se distribuye como un proceso de Markov en un soporte definido $S = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$, donde las probabilidades de transición vienen dadas por:

$$P\{s_t = \theta_j | s_{t-1} = \theta_i\}$$

Se puede asumir cualquier otro proceso generador para s_t, pero hemos elegido este ya que se adecúa al proceso numérico de resolución a ser utilizado en la sección de mercados incompletos.

Definicion 2.1. Una *historia* $s^t = (s_0, \ldots, s_t) \in S$ es una secuencia de realizaciones de la variable s, y representa todos los choques realizados desde el inicio de los tiempos hasta t. S^t denota todas las posibles historias hasta el período t.

Dada la cadena de Markov asociada al proceso de s_t y un estado inicial s_0, podemos escribir la probabilidad de cualquier historia s^t del siguiente modo:

$$\pi(s^t) = \pi(s_t|s_{t-1})\pi(s_{t-1}|s_{t-2})\dots\pi(s_1|s_0)\pi_0(s_0)$$

Definicion 2.2. Una *asignación o plan contingente de consumo* es una función que aplica historias a posibles consumos en cada período t $c^i : S^t \to \mathbb{R}^n$ y se denota como $c^i = \{c_t^i(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$.

Definicion 2.3. Una asignación es *factible* si satisface:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t\in S} c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t\in S} y^i(s_t)$$

Los agentes poseen preferencias sobre c^i cuyo ordenamiento viene representado por una función de utilidad esperada von Neumann Morgenstern de la forma

$$U(c^i) = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t\in S} \beta^t\pi(s^t)u[c_t^i(s^t)] \tag{1}$$

donde $\beta \in (0,1)$ es la tasa subjetiva de descuento.

La función de utilidad instantánea $u(c_t^i)$ es crecientes, continua dos veces diferenciable, estrictamente cóncava y cumple la llamada condición de Inada[1].

Dado que asumimos mercados completos y por lo tanto existe una activo para cada contingencia posible en esta economía, la restricción de los agentes se escribe de la siguiente forma:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t\in S} q_t(s^t)c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{s^t\in S} q_t(s^t)y^i(s_t) \tag{2}$$

donde $q_t(s^t)$ es el precio de una unidad de consumo en el período t contingente a la ocurrencia de la historia s^t en términos del bien hoy.

Si asumimos que todos los intercambios de activos se realizan el período 0, y que luego a medida que se vaya realizando la historia se van liquidando los acuerdos, nos encontramos en una economía Arrow-Debreu, lo cual nos permite escribir una sola restricción del tipo de la ecuación 2.

2.2. Equilibrio

Si existe una sola restricción, podemos escribir el programa de optimización del agente como la escogencia de una secuencia o plan contingente de consumo $c^i = \{c_t^i(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ tal que se maximize 1 sujeto a 2.

A partir de esta descripción podemos definir un equilibrio para esta economía. Asumimos un arreglo financiero en el cual todos los activos se negocian en el período 0, por lo que trabajaremos en una economía Arrow-Debreu.

[1] $\lim_{c\to 0} u'(c) \to +\infty$

Definicion 2.4. Un *equilibrio Arrow-Debreu* es una secuencia de precios $\{q_t(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ y una secuencia de asignaciones de consumo $c^i = \{c_t^i(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ $\forall i \in I$ tal que cada consumidor i maximiza 1 sujeto a 2 y los mercados se vacían:

$$\sum_{i=0}^{I} c_t^i = \sum_{i=0}^{I} y_t^i \tag{3}$$

Si denotamos por λ^i el multiplicador de Lagrange de la maximización restringida, la condición de primer orden viene dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(c^i)}{\partial c_t^i} &= 0 \\ \beta^t \pi(s^t) u'[c_t^i(s^t)] &= \lambda^i q_t(s^t) \end{aligned} \tag{4}$$

Esta condición de optimalidad indica que la utilidad marginal del consumo depende sólo del estado en t s_t, no de la historia pasada de eventos.

A través de 4 también podemos obtener una expresión para los precios contingentes $q_t(s^t)$:

$$q_t(s^t) = \frac{\beta^t \pi(s^t) u'[c_t^i(s^t)]}{\lambda^i} \tag{5}$$

El cual tampoco depende de la historia de eventos s^t.

La expresión 4 debe cumplirse para todo i. Por lo tanto, es cierto que para cada par de consumidores $(i, j) \in I$ que se enfrentan al mismo precio $q_t(s_t)$:

$$\frac{u'[c_t^i(s^t)]}{u'[c_t^j(s^t)]} = \frac{\lambda^i}{\lambda^j} \tag{6}$$

para todos los estados s y períodos t. Por ende, con una estructura de mercados completos el cociente de utilidades marginales entre cualquier par de agentes es constante a través del tiempo y los estados.

A partir de 6 podemos obtener una expresión para el consumo del agente i:

$$c_t^i(s^t) = u'^{-1}\left\{u'[c_t^j(s^t)]\frac{\lambda^i}{\lambda^j}\right\} \tag{7}$$

el consumo del agente i será una fracción del consumo del agente j donde dicha fracción no depende del estado de la economía.

Lo anterior implica que existe aseguramiento perfecto del riesgo. Si recordamos la literatura básica de elección bajo incertidumbre, esta establecía que en el óptimo los agentes aversos al riesgo elegían una demanda de "seguro" tal que su utilidad marginal no se modificara a través de los estados de la economía.

Utilizando las ecuaciones 7 y 3 podemos encontrar una expresión para el consumo relativo.

$$\sum_{i=0}^{I} y^i(s_t) = \sum_{i=0}^{I} u'^{-1}\left\{u'[c_t^j(s^t)]\frac{\lambda^i}{\lambda^j}\right\} \tag{8}$$

Según esta expresión, este dependerá sólo del nivel agregado de la dotación y del estado en s_t, no de la historia completa de eventos s^t.

Ahora volvamos al tema de los precios contingentes. Las condiciones de óptimo del problema del consumidor nos permiten valorar el consumo ocurrido en determinados períodos y estados en términos de otros períodos y contingencias.

Dado que λ^i es independiente del tiempo debido a que trabajamos con una sola restricción de presupuesto, la expresión 5 se debe cumplir también para $t-1$:

$$q_{t-1}(s^{t-1}) = \frac{\beta^{t-1}\pi(s^{t-1})u'[c^i_{t-1}(s^{t-1})]}{\lambda^i} \tag{9}$$

Combinando las ecuaciones 5 y 9 obtenemos:

$$q_t(s^t)\frac{\beta^{t-1}\pi(s^{t-1})u'[c^i_{t-1}(s^t)]}{q_{t-1}(s^{t-1})} = \beta^t\pi(s^t)u'[c^i_t(s^{t-1})]$$

$$\frac{q_t(s^t)}{q_{t-1}(s^{t-1})} = \frac{\beta^t\pi(s^t)u'[c^i_t(s^t)]}{\beta^{t-1}\pi(s^{t-1})u'[c^i_{t-1}(s^{t-1})]} \tag{10}$$

Recordar que podemos escribir la probabilidad de las historias como:

$$\pi(s^t) = \pi(s_t|s_{t-1})\pi(s_{t-1}|s_{t-2})\dots\pi(s_1|s_0)\pi_0(s_0)$$

$$\pi(s^{t-1}) = \pi(s_{t-1}|s_{t-2})\dots\pi(s_1|s_0)\pi_0(s_0)$$

por lo que $\frac{\pi(s^t)}{\pi(s^t-1)}$ es igual a:

$$\frac{\pi(s^t)}{\pi(s^t-1)} = \pi(s_t|s_{t-1})$$

quedando la expresión 10 como:

$$\frac{q_t(s^t)}{q_{t-1}(s^{t-1})} = \beta\pi(s^t|s^{t-1})\frac{u'[c^i_t(s^t)]}{u'[c^i_{t-1}(s^{t-1})]} \tag{11}$$

Esta expresión es una de las bases de la teoría de valoración de activos (asset pricing). El término $\beta\frac{u'[c^i_t(s^t)]}{u'[c^i_{t-1}(s^{t-1})]}$ es conocido como como el factor de descuento estocástico, que juega un rol importante en determinar el comportamiento de martingala de ciertos activos.

Asimismo, el lado derecho de la ecuación 11 es el llamado kernel de valoración (pricing kernel), que es utilizado si deseamos valorar el precio de un rendimiento estocástico ocurrido en el período t, estado s^t en términos del bien de consumo en el período $t-1$, estado s^{t-1}.

Ejemplo 2.5. Supongamos que las preferencias de los agentes se encuentran representadas por una función de utilidad de aversión relativa al riesgo constante:

$$U^i = \frac{c_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$$

donde $\sigma \geq 0$.

Según 6 la condición de primer orden viene dada por:

$$\frac{c_t^i}{c_t^j} = \left(\frac{\lambda^i}{\lambda^j}\right)^{-1/\sigma}$$

donde c_t^i vendrá dado por:

$$c_t^i = c_t^j \left(\frac{\lambda^i}{\lambda^j}\right)^{-1/\sigma} \tag{12}$$

Según 12 el consumo de cualquier agente i es una fracción constante del consumo de cualquier agente j, donde dicha fracción no depende del estado de la economía, tal y como hemos mencionado antes.

3. Resumen

En esta sección hemos demostrado que tanto las asignaciones como los precios de una economía con mercados completos **no dependen de la historia de eventos**.

Asimismo, hemos observado que las asignaciones de consumo individuales dependen no del nivel individual de dotaciones sino del nivel agregado.

Esta última observación nos lleva a un a importante proposición[2]: Supongamos unas asignaciones $c^i = \{c_t^i(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ y unos precios $\{q_t(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$ que sean un equilibrio Arrow-Debreu. Entonces la asignación:

$$c_t(s^t) = \sum_{i=1}^{I} c_t^i(s^t)$$

y los precios $\{q_t(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$, son un equilibrio Arrow-Debreu para una economía con un solo agente ($I = 1$), donde este agente representativo posee una dotación de:

$$y_t(s^t) = \sum_{i=1}^{I} y_t^i(s^t)$$

Lo anterior no es más que la representación estándar de agente representativo.

Es posible abandonar esta representación si modificamos la estructura de mercados completos, pero sólo a un costo, las asignaciones pasaran a depender de las historias y de las dotaciones individuales.

Pero obtendremos una ganancia, al haber diferentes historias tendremos distintos tipos de agentes, y la posibilidad de analizar problemas que involucren heterogeneidad.

[2]La cual no va a ser demostrada en estas notas.