

# Distribución Estacionaria y Ley de Movimiento

Kamal A. Romero S.

## Sumario

Se describe con detalle el paso computacional adicional que diferencia a este modelo de aquellos de agente representativo: la implementación numérica de la iteración en la distribución conjunta con el objeto de obtener la distribución estacionaria (y su ley de movimiento) que luego será utilizada para calcular parte de los agregados de nuestra economía.

## Contenido

<b>1. Ley de Movimiento de la Distribución</b>	<b>2</b>
1.1. Implementación Numérica . . . . .	3
<b>2. Distribución Estacionaria</b>	<b>6</b>
2.1. Implementación Numérica . . . . .	6
<b>3. Cálculo de Agregados</b>	<b>9</b>

## 1. Ley de Movimiento de la Distribución

Se ha mencionado que la función  $Q$  es generada por las reglas de decisión y la matriz de transición de  $s$ . ¿Por qué?

Supongamos que deseamos conocer la siguiente esperanza:  $\Pr(s_{t+1} = s', a_{t+1} = a' \mid s_t = s, a_t = a)$ . Es posible determinar la misma a través de dos elementos:

- la matriz  $P$  que nos indica la probabilidad  $\pi(s_{t+1} = s' \mid s_t = s)$  la cual es independiente de  $a$ .
- la función de política que nos indica la cantidad de activos mañana contingente al número de activos y estado de la naturaleza hoy  $a_{t+1} = g^a(a_t = a, s_t = s)$ .

Así que la probabilidad de poseer  $a_{t+1}$  en el estado  $s_{t+1}$  dado  $(a_t, s_t)$  es igual a  $\pi(s_{t+1} = s' \mid s_t = s)$  *siempre y cuando*  $a_{t+1} = g^a(a_t = a, s_t = s)$ . Analicemos esta idea de manera intuitiva con un ejemplo.

**Ejemplo 1.1.** Supongamos que:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2\} \\ Z &= \{s_1, s_2\} \text{ donde } s_1 > s_2 \\ \pi(s_i \mid s_t) &= 0,5 \quad \forall i = 1, 2 \end{aligned}$$

$a' = g^a(a, s)$  viene dada por la siguiente tabla:

$s$	$a$	$a'$
$s_1$	1	2
$s_1$	2	2
$s_2$	1	1
$s_2$	2	1

Deseamos conocer  $\Pr(s_{t+1} = s_1, a_{t+1} = 2 \mid s_t = s_1, a_t = 2)$ , según la función de política si  $(a_t, s_t) = (2, s_1)$  lo óptimo es  $a' = 2$ , por lo cual dado  $S = (2, s_1)$  la probabilidad de que el agente escoja  $a' = 2$  es 1.

Sabemos que  $\pi(s_1 \mid s_1) = 0,5$ , por lo tanto la probabilidad  $\Pr(s_{t+1} = s_1, a_{t+1} = 2 \mid s_t = s_1, a_t = 2)$  es igual a:

$$\Pr(a_{t+1} = 2 \mid s_t = s_1, a_t = 2) \times \Pr(s_{t+1} = s_1 \mid s_t = s_1) = 1 \times 0,5 = 0,5^1$$

Dicho de otra forma es igual a  $P$  siempre y cuando  $a_{t+1}$  corresponda a una elección óptima del agente dado el estado actual.

---

<sup>1</sup>Formalmente esta expresión es igual a  $\Pr(a_{t+1} = 2 \mid s_t = s_1, a_t = 2) \times \Pr(s_{t+1} = s_1 \mid s_t = s_1) \times \Pr(s_t = s_1 \mid a_t = 2)$ , el último término de la ecuación es igual a 1 porque conocemos la posición actual del agente.

Calculemos ahora  $\Pr(s_{t+1} = s_1, a_{t+1} = 1 \mid s_t = s_1, a_t = 2)$ , acorde a la función de política si el agente se encuentra en  $(a_t, s_t) = (2, s_1)$  su elección óptima es  $a' = 2$ , no escogerá  $a' = 1$  y por ende la probabilidad de que ocurra la transición planteada al inicio del párrafo es cero.

Podemos resumir lo anterior con la siguiente expresión:

$$Q[(a, s), (\mathcal{B}(A), \mathcal{C}(Z))] = \begin{cases} \sum_{s' \in \mathcal{C}(Z)} \pi(s' \mid s) & \text{si } a' = g(a, s) \in \mathcal{B}(A) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

o de la siguiente forma más estándar en la literatura:

$$\Phi'(a', s') = \sum_a \sum_s \Phi(a, s) \pi(s_{t+1} = s' \mid s_t = s) \times \mathcal{I}(a', s, a)$$

donde  $\mathcal{I}(a', s, a)$  es una función indicador que es igual 1 si  $a' = g^a(a, s)$  y 0 en caso contrario.

Esta expresión puede simplificarse y escribirse como:

$$\Phi'(a', s') = \sum_s \sum_{a: a'=g(a,s)} \Phi(a, s) P(s', s)$$

### 1.1. Implementación Numérica

Una vez que obtengamos las reglas de decisión podemos representar  $Q$  numéricamente.

Dado que se trata de una sumatoria convencional podemos representarla a través de un *producto matricial*.

El único elemento novedoso que hay que tomar en cuenta es la condición de que la sumatoria a través de los estados debe restringirse a aquellos puntos del espacio en que  $a' = g(a, s)$ .

Es posible pensar en  $Q$  como una matriz de transición entre estados conjuntos, la cual construiremos numéricamente utilizando las reglas de decisión y la matriz  $P$ .

Dicha matriz es de orden  $(A \times Z) \times (A \times Z)$ , lo que para números elevados de estados y activos su manipulación computacional puede representar una pesadilla en términos de memoria y tiempo.

No obstante,  $Q$  no se encuentra definido sobre todos los puntos de  $A$ , sino solamente sobre aquellos tal que dado  $(a, s)$  se cumpla que  $a' = g(a, s)$ .

Por lo cual, lo primero que se realizará es localizar que puntos de la a veces inmensa matriz  $(A \times Z) \times (A \times Z)$  vamos a utilizar y de ese modo evitar disgustos computacionales.

El primer paso consiste en generar una matriz por cada estado  $s$  que sólo tome en cuenta las posiciones de la matriz donde se cumple que  $a' = g(a, s)$ .

Específicamente construiremos  $s$  matrices de dimension  $A \times A$  donde las filas representen los valores de  $a$  y las columnas los de  $a'$ , las cuales nos indiquen con un número 1 aquellos elementos  $(i, j)$  en los cuales sea cierto que el activo  $a_i$  hoy implique el activo  $a'_j$  el período siguiente dado el estado  $s$  de la matriz correspondiente.

Una vez se han obtenido las  $s$  matrices podemos calcular las transiciones de  $s$  a  $s'$  multiplicando la matriz  $s$  por cada una de las probabilidades de transición  $\pi(s_i/s)$ .

Fíjense que lo que se ha realizado es representar matricialmente la expresión

$$\Pr(s_{t+1}, a_{t+1} \mid s_t, a_t) = \Pr(a_{t+1} \mid s_t, a_t) \times \Pr(s_{t+1} \mid s_t)$$

Donde el primer término del lado derecho de la expresión viene dado por las matrices (función de política) y el segundo término por los elementos de la matriz de transición  $P$ .

Para evitar la llamada maldición de la dimensión (curse of dimensionality) se explota el hecho de que las matrices a las que nos referimos arriba son *dispersas*, es decir, que la mayor parte de sus elementos son iguales a cero.

Esto es debido a que para cada activo hoy  $a$  (fila) sólo existe un valor de  $a'$  (columna), resultando en matrices cuyas filas se encuentran compuestas por elementos iguales a cero excepto uno cuyo valor es 1.

## Pasos Computacionales

- Paso 1: Se construyen tantas matrices dispersas de ceros como estados hallamos definidos<sup>2</sup>.

```
g1=sparse(K,K);
```

```
g2=sparse(K,K);
```

- Paso 2: Se rellenan dichas matrices. Indicamos a través de un bucle que nos coloque un número 1 en aquellas posiciones donde se cumple  $a' = g(a, s)$ , para esto necesitamos la función de política en forma de índice en cada estado. En los programas y funciones del material de apoyo dichas funciones se llaman PGKINDEX y PBKINDEX para los estados 1 y 2 respectivamente. El bucle poseería la siguiente forma:

```
for i=1:NK
```

```
g1(i,PGKINDEX(i))=1;
```

```
g2(i,PBKINDEX(i))=1;
```

```
end;
```

---

<sup>2</sup>El definir matrices de ceros que luego procedemos a llenar es una estrategia típica de programación en MATLAB que permite ahorrar tiempo y memoria, dado que de ese modo el programa no asigna memoria cada vez que crea un nuevo elemento de una matriz que no se encuentre predefinida.

Este bucle nos indica que para cada fila  $i$  y columna que corresponde a aquella posición del activo óptimo ( $a'$ ) asociada al activo que representa la fila  $i$  ( $a$ ) le asigne un valor igual a 1.

Ya poseemos una matriz que nos indica que posiciones debemos tomar en cuenta a la hora de calcular la transición entre estados conjuntos.

**Ejemplo 1.2.** Tomando en cuenta la función de política tabulada en la sección anterior las matrices por estado quedarían de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cc}
 & a' = 1 & a' = 2 \\
 a = 1 & 0 & 1 \\
 a = 2 & 0 & 1
 \end{array} \quad S=s_1$$

$$\begin{array}{cc}
 & a' = 1 & a' = 2 \\
 a = 1 & 1 & 0 \\
 a = 2 & 1 & 0
 \end{array} \quad S=s_2$$

que en forma de matriz dispersa MATLAB las representa como:

$$(1, 2) = 1$$

$$(2, 2) = 1 \text{ para } s_1 \text{ y}$$

$$(1, 1) = 1$$

$$(2, 1) = 1 \text{ para } s_2$$

- Paso 3: Se multiplican las  $s$  matrices por cada una de las probabilidades de transición.

Si nos encontramos en el estado 1 tenemos dos opciones: quedarnos en el mismo estado o transitar al estado 2 y viceversa si nos encontramos en el estado 2. Partiendo de esta idea debemos multiplicar la matriz correspondiente a  $s_1$  por  $\pi(s_1/s_1)$  y  $\pi(s_1/s_2)$  y la matriz  $s_2$  por  $\pi(s_2/s_2)$  y  $\pi(s_2/s_1)$ .

$$\text{trans\_joint1}=[Q(1,1)*g1 \quad Q(1,2)*g1; \quad Q(2,1)*g2 \quad Q(2,2)*g2];$$

En el comando anterior hemos definido una matriz de orden  $(K \times N) \times (K \times N)$  compuesta por 4 submatrices. Cada una de estas matrices representan probabilidades de transición entre activos manteniéndose en el estado de la matriz correspondiente.

**Ejemplo 1.3.** Siguiendo con el ejemplo anterior se representa la matriz calculada a partir de las matrices dispersas arriba descritas:

	$(a = 1, s = 1)$	$(a = 2, s = 1)$	$(a = 1, s = 2)$	$(a = 2, s = 2)$
$(a = 1, s = 1)$	0	0,8	0,2	0
$(a = 2, s = 1)$	0	0,8	0,2	0
$(a = 1, s = 2)$	0	0,5	0,5	0
$(a = 2, s = 2)$	0	0,5	0,5	0

La matriz se lee del siguiente modo. La probabilidad de pasar de  $s_t = (1, 1)$  a  $s_{t+1} = (1, 1)$  es de 0,8, mientras que la probabilidad de pasar de  $s_t = (2, 1)$  a  $s_{t+1} = (1, 2)$  es de 0,2.

Una vez hemos obtenido la matriz de transición conjunta entre estados, utilizaremos esta como insumo para obtener la *distribución estacionaria de agentes*.

## 2. Distribución Estacionaria

Tal y como lo indica su nombre, entendemos distribución estacionaria como aquella invariante en el tiempo. En el contexto de nuestro modelo lo podemos entender como aquella distribución de agentes generada por la reglas de decisión y el proceso estocástico exógeno, la cual genera unos agregados (capital, consumo, etc.) y precios que dada las decisiones óptimas de los agentes se reproduce dicha distribución.

Recordemos que la distribución estacionaria es una función que nos “cuenta” la cantidad de agentes que se encuentran en determinados subconjuntos de  $A \times Z$ .

### 2.1. Implementación Numérica

Una vez obtenida la matriz de transición entre estados conjuntos lo único que necesitamos es una distribución inicial cualquiera la cual multiplicada por nuestra matriz  $Q$  nos da la distribución de agentes el período siguiente.

Repetimos dicho proceso hasta que la distribución no se modifique, una vez ocurrido esto obtenemos una distribución de agentes a través de los estados que no se modifica en el tiempo.

Es posible observar que se puede calcular la distribución estacionaria discreta a través de un proceso iterativo convencional en el cual multiplicamos de manera reiterada la distribución con la matriz de transición conjunta acorde a los siguientes pasos:

- 1 Definimos una distribución inicial de agentes ( $D_o$ )
- 2 Multiplicamos la distribución por la matriz  $Q$  y obtenemos una nueva distribución ( $D_1$ )
- 3 Evaluamos la diferencia entre  $D_o$  y  $D_1$  y verificamos si es inferior a una determinada métrica (criterio de tolerancia)  $|D_o - D_1| \leq tol$
- 4 De cumplirse el paso 3 hemos acabado, en caso contrario hacemos  $D_o = D_1$  y volvemos al paso 1.

## Distribución de Activos Condicionada al Estado Exógeno

### Pasos Computacionales

- Paso 1: se elige una distribución inicial en la cual los agentes poseen la misma cantidad de activos y definimos el criterio de tolerancia.  
 $P = (1/(N \times K)) * \text{ones}(N \times K, 1);$   
 $\text{distance\_distr} = 1;$   
 $\text{TOL} = 1 * 10^{(-3)};$
- Paso 2: se realiza la multiplicación  
 $\text{while } \text{distance\_distr} > \text{TOL};$   
 $P1 = \text{trans\_joint} * P;$
- Paso 3: se evalúa la distancia  
 $\text{distance\_distr} = \text{norm}(\text{abs}(P1 - P));$
- Paso 4: de no cumplirse el condicional **while**  
 $P = P1;$
- al cumplirse el condicional **while**  
 $\text{end}$

La distribución  $P$  es un vector de tamaño  $(K \times N)$ , donde las primeras  $K$  filas representan la cantidad de agentes que poseen activos de denominación  $a_k$  en el estado  $s_1$  y las  $K$  filas siguientes la cantidad de agentes que poseen dichos activos en el estado  $s_2$ .

En la figura 1 se representa dicho vector. Es posible observar como la fracción de los agentes que poseen activos es mayor en el estado “bueno”.

### Distribución de Activos no Condicionada

Una vez obtenida la distribución estacionaria se puede calcular la distribución de activos entre los diversos agentes sin tomar en cuenta el estado exógeno.

Para realizar esto debemos sumar la fracción de agentes que poseen  $a_k$  en  $s_1$  y en  $s_2$  para todo  $k$ . Esto lo podemos realizar “partiendo” el vector  $P$  en una matriz de dimensión  $K \times N$ , en la cual cada columna represente un estado de productividad y las filas los activos. Una vez obtenida dicha matriz sumamos a través de las filas y así obtenemos la fracción “total” de agentes que posee cada denominación de activos.

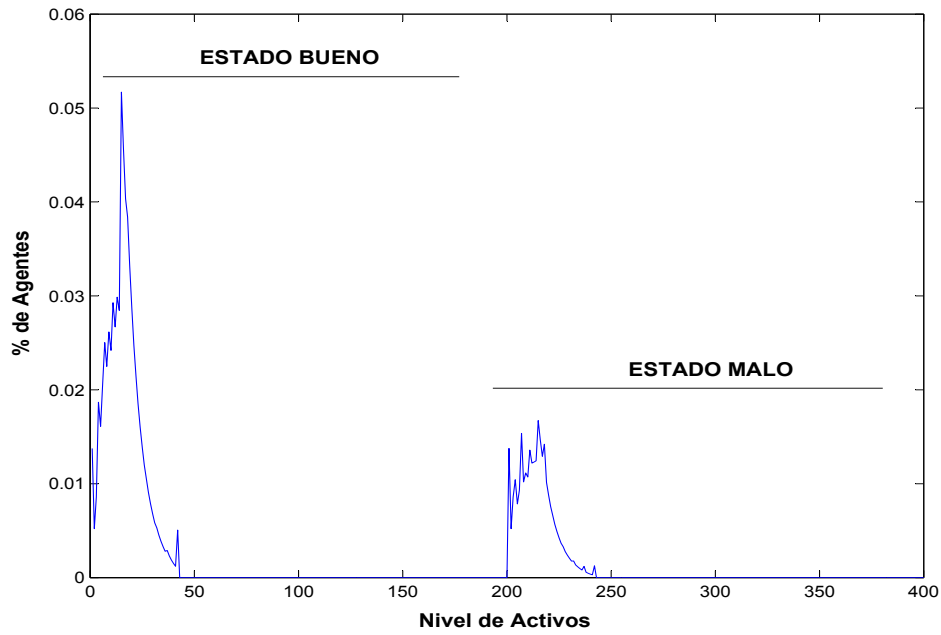


Figura 1: Distribución de Agentes condicionada a los estados de Empleo

### Pasos Computacionales

- Paso 1: Se crea una matriz de ceros de dimensión  $K \times N$  la cual procederemos a rellenar posteriormente.

```
joint=zeros(K,N);
```

- Recordemos que  $P$  es un vector en lugar de una matriz, así que convertimos la matriz `joint` de dimensión  $K \times N$  en un vector de tamaño  $(K \times N)$  y la igualamos al vector  $P$

```
joint(:)=P;
```

- Ya hemos rellenado la matriz `joint`, ahora solo queda realizar la sumatoria por filas

```
Pk=sum(joint');
```

El vector  $P_k$  de tamaño  $K$  nos indica la fracción de agentes que posee cada uno de los activos  $a_k$ . En el gráfico 2 se representa la distribución de activos para una tasa de interés del 3%, un factor subjetivo de descuento de 0,96 y un grado de aversión al riesgo de 2.



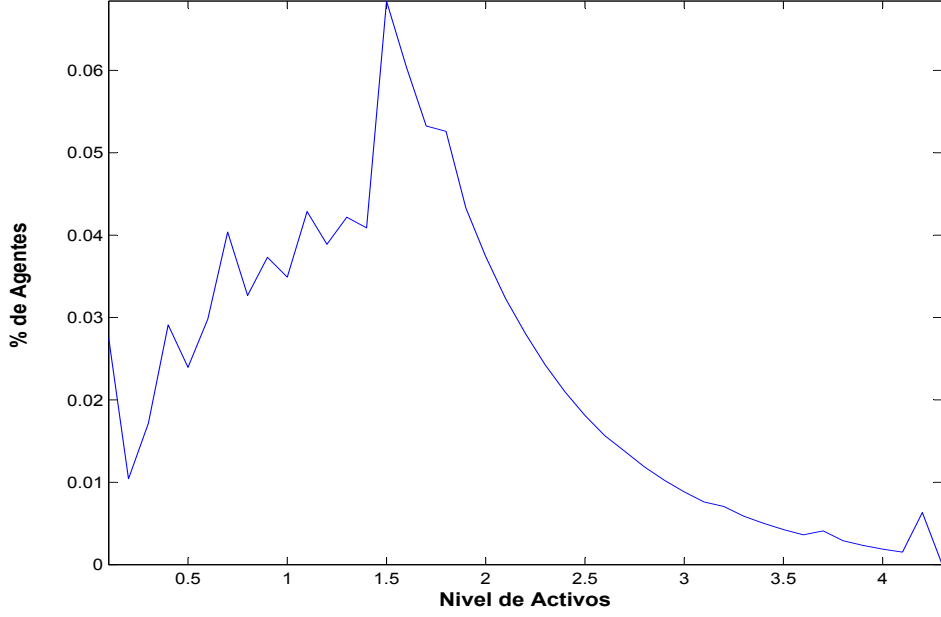


Figura 2: Distribución Estacionaria de Activos

### 3. Cálculo de Agregados

A diferencia de los modelos de agente representativo o los de mercados completos las variables individuales ya no son equivalentes a las magnitudes per cápita. En nuestro contexto en el cual poseemos varias “clases” de individuos, cada uno con distintas unidades de capital es necesario calcular el capital agregado de la economía.

Definiremos al capital agregado como la sumatoria de las reglas de decisión de las distintas clases de agentes a través de los estados de la economía  $a, s$

$$K = \sum_a \sum_s \Phi^*(a, s) \times g^a(a, s)$$

La expresión anterior nos indica que para calcular el capital agregado se necesita la distribución estacionaria y la regla de decisión del activo. Al ser el agregado una sumatoria convencional es posible obtenerlo numéricamente a través de un producto matricial.

La distribución estacionaria  $P$  es un vector de tamaño  $K \times N$ , mientras que la regla de decisión para el estado  $s_i$  es un vector de tamaño  $K$ .

Como poseemos  $N$  estados lo único que debemos hacer es ordenar las funciones de política por cada estado acorde al orden del vector  $P$  y realizar la multiplicación de vectores.

En nuestro caso que poseemos dos estados,  $P$  es un vector de tamaño  $K \times 2$  donde las primeras  $K$  filas representan la probabilidad de poseer un activo  $a_k$  en

el estado  $s_1$  mientras que el resto de las filas denotan la probabilidad de poseer un activo  $a_k$  en el estado  $s_2$ .

Para realizar la multiplicación creamos un vector de tamaño  $K \times 2$  que posea en las primeras  $K$  filas la regla de decisión para  $s_1$  y en el resto la regla de decisión para  $s_2$ .

Debemos utilizar la representación en nivel de las reglas de decisión, las cuales se encuentran nombradas en el código como `policy_good_Kap` y `policy_bad_Kap` para los estados 1 y 2 respectivamente.

### Pasos Computacionales

- Paso 1: Creamos una matriz  $N \times K$  en la que en cada columna aparezcan las reglas de decisión para cada estado

```
PFK=[policy_good_Kap' policy_bad_Kap'];
```

- Paso 2: Convertimos esta matriz en un vector de tamaño  $(N \times K)$  de manera tal que sea posible multiplicarlo con el vector  $P$

```
kk=PFK(:);
```

- Paso 3: Se calcula la media acorde a la expresión

```
Mean_K=P'*kk;
```

**Ejercicio 3.1.** Utilizando la función *distribucion* de MATLAB, observe que ocurre con la distribución del capital y su nivel agregado ante:

1. Un incremento de la tasa de interés de 3 % a 4 %
2. Un incremento de la tasa subjetiva de descuento de 2 a 3
3. Un incremento en la persistencia del desempleo a  $\pi(s' = \text{desempleo} \mid s = \text{desempleo}) = 0,8$