5
Mercados Incompletos I: Exógenos

Kamal A. Romero S.

Sumario

Estas notas describe el modelo básico de mercados incompletos, específicamente una economía muy sencilla en la cual un continuo de agentes consume un bien perecedero y acumula un activo no contingente cuyo rendimiento es exógeno. Dichos agentes se encuentran sujetos a choques idiosincráticos los cuales no pueden ser perfectamente asegurados y se encuentran igual e idénticamente distribuidos a través de los mismos.

Contenido

1. Mercados Completos vs. Mercados Incompletos: Diferencias 2

2. Economía Base: Precios Exógenos 2

3. Mercados Completos vs. Mercados Incompletos: Dificultades 4
3.1. Historia de Choques 4
3.2. Variable de Estado 4

4. Representación Recursiva 5

5. Distribución de Agentes y Ley de Movimiento 5
5.1. Distribución de Agentes 6
5.2. Ley de Movimiento de la Distribución 6

6. Equilibrio Competitivo 7

1. Mercados Completos vs. Mercados Incompletos: Diferencias

Las economía con mercados completos se caracterizaban por poseer un mercado de activos contingentes, los cuales permitían a los agentes asegurarse de manera perfecta.

En esta sección nos apartamos de este supuesto y se reducen el número de activos que pueden ser transados por los agentes, limitando así la capacidad de los mismos de asegurarse ante cualquier contingencia.

Se presentan modelos en los cuales un gran número de agentes reciben choques idiosincráticos y transan sólo un activo no contingente, el cual utilizan para paliar fluctuaciones en su ingreso.

Lo anterior permite generar una distribución de agentes que difieren en su historia de choques, la cual viene reflejada por la cantidad de activos que son capaces de acumular

2. Economía Base: Precios Exógenos

Enumeremos las características de nuestra economía:

- Existe un continuo de agentes que maximizan una función de utilidad estándar que representa de manera adecuada su ordenación de secuencias de consumo del bien perecedero.
- Estos se encuentran expuestos a choques idiosincráticos los cuales asumimos no pueden ser asegurados a través de un mercado de activos contingentes. No obstante, permitimos que los agentes acumulen un activo no contingente que posee un pago seguro al final del período.
- Asumimos que dicho pago es exógeno y representa una fracción del valor del activo (equilibrio parcial)[1].

Ante este entorno los agentes acumularan este activo no solo para intercambiar consumo presente por consumo futuro como en los modelos deterministas, sino que lo utilizarán para poder suavizar su consumo ante distintas realizaciones del choque idiosincrático (precautionary saving).

Para representar nuestra economía necesitamos:

- Una función de utilidad.
- La distribución del proceso estocástico del choque idiosincrático el cual representa la fuente de incertidumbre del modelo

[1] En realidad se realiza un análisis de equilibrio de estado estacionario, en el cual los precios son constantes y se encuentran en función de la distribución estacionaria de agentes. En efecto, al resolver este tipo de modelos en equilibrio general se utiliza el concepto de equilibrio recursivo estacionario

- La descripción de las posibilidades de elección del agente dado el entorno financiero al que se enfrenta.

El problema al que se enfrenta el agente toma la siguiente forma:

$$\text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=i}^{N} \beta^t \pi(s_i) u(C_t)$$

sujeto a

$$c_t + a_{t+1} = (1+r)a_t + s_t$$

Donde:

- a_t representa los activos con que llega al período t y los cuales restringimos que pertenezcan al conjunto $A = \{a_{1,}a_2, \ldots, a_K\}$.
- s representa los posibles estados de la naturaleza, siendo la variable de estado estocástica.
- $\pi(s_i)$ es la probabilidad de ocurrencia del estado de la naturaleza s_i
- Se asume que s sigue un proceso de Markov. Este supuesto es útil, debido a que se adapta bien a la representación de nuestro problema.

Donde $a_1 = 0$, es decir, no permitimos que el agente se endeude.

Por motivos de simplicidad y de exposición asumimos que existen dos estado en la economía $Z = \{s_1, s_2\}$. Estos pueden tener multiples interpretaciones:

- estar desempleado o empleado, en este caso asumimos que al estar desempleado no se generan ingresos salariales o se cobra un seguro de desempleo que representa una fracción del salario.
- productividad alta o baja, cada una asociada a unidades de eficiencia del factor trabajo distintas.
- no existe mercado laboral y s representa las dotaciones de bien que posee el agente y r la tasa de almacenamiento, etc.

Lo importante es que el choque idiosincrático afecte de manera directa el conjunto de posibilidades de elección (restricción presupuestaria) del agente.

Necesitamos el valor de las probabilidades de ocurrencia de cada uno de los estados, de manera que el agente pueda calcular su utilidad esperada.

Necesitamos tres elementos:

- La distribución inicial de los estados.

- La matriz de transición entre estados que resume la probabilidad de pasar a s_i dado s hoy $\pi(s_{t+1} = s_i \mid s_t = s)$

- Las probabilidades de ocurrencia de los estados. Con estos elementos es posible calcular tanto la matriz de transición como la distribución estacionaria de s

Distribución inicial $Z = \{s_1, s_2\}$
Matriz de transición P= $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$
Pares ordenados $a, s \in S = A \times Z$ nos indican la posición del agente en cada instante del tiempo.

3. Mercados Completos vs. Mercados Incompletos: Dificultades

3.1. Historia de Choques

Supongamos que $Z = \{s_1 = \text{empleado}, s_2 = \text{desempleado}\}$

En este modelo los agentes difieren del estado de la naturaleza en el cual se encuentren. En cada instante del tiempo puede haber agentes empleados o desempleados.

Asimismo, difieren en la *historia* de sus choques idiosincráticos. Por ejemplo, en cada instante del tiempo existirán agentes que hayan pasado largas épocas de desempleo, acaben de perder su empleo, nunca hayan estado desempleados, etc.

Un agente que haya recibido muchas realizaciones adversas (períodos prolongados de desempleo) se encontrará en una posición distinta a otro que haya recibido un gran número de realizaciones favorables, si tuviéramos que seguir la pista de toda la historia de choques de cada uno de los agentes el problema sería matemática y numéricamente intratable.

Afortunadamente el nivel de activos al inicio del período a_t nos resumen la historia del agente, debido al papel que juegan los activos como amortiguador de choques adversos y objetos de acumulación ante choques favorables. Por lo cual agentes con muchas realizaciones buenas (malas) poseerán un gran (poco) número de activos.

Por lo anterior, en cada t los agentes diferirán en su historia, resumida por el estado de la naturaleza en que se encuentren y su tenencia de activos. Tendremos $A \times Z$ agentes distintos.

3.2. Variable de Estado

A diferencia de los modelos de agente representativo, la variable de estado pasa a ser una distribución y los precios y asignaciones de equilibrio pasan a depender de esta.

Por ejemplo, en el modelo de crecimiento estocástico la variable de estado es el capital agregado[2], por su parte en esta economía la variable de estado sería las tenencias de capital que posee cada agente dependiendo del estado (e historias) en que se encuentra.

La dificultad adicional de estos modelos radica en que se debe computar la distribución de la variable de estado y la ley de movimiento de esta, de modo que los agentes puedan predecir los precios y variables agregadas futuros necesarios para resolver su programa de maximización.

4. Representación Recursiva

Representamos el problema del agente en su forma recursiva, ya que utilizaremos métodos de programación dinámica para obtener las reglas de decisión de los agentes, las cuales utilizaremos como insumos en nuestra labor:

$$V(s,a) = \max_{c,k'}[u(c) + \beta E\{V(s',a')|s\}] \tag{1}$$
$$\text{sujeto a}$$
$$c = a(1+r) + s - a'$$
$$a' \in A$$

las primas representan el valor de la variable el próximo período.

La solución de este problema viene dado por:

- Una función valor $v^*(s,a)$, $v : A \times S \Rightarrow \Re$
- Funciones de políticas asociadas $a' = g^a(a,s)$, $g : A \times S \Rightarrow A$ y $c = g^c(a,s)$, $g : A \times S \Rightarrow A$ que resuelvan el problema arriba enunciado.

Las funciones de política (que no depende del tiempo) indican la cantidad de activos que el agente acumula para el período siguiente y la cantidad de consumo actual en función del estado en que se encuentre y el nivel de activos con que llega al período de decisión.

Dichas funciones son *las mismas para cada agente*. Las asignaciones difieren debido a las distintas historias de choques que poseen cada uno de los agentes.

5. Distribución de Agentes y Ley de Movimiento

Como se ha mencionado arriba, son elementos indispensable para resolver este modelo:

[2]Que es igual al individual debido al supuesto de mercados completos que deriva en la representación del agente representativo.

- Un objeto que nos represente la distribución de los agentes a través de los estados de la naturaleza y los distintos niveles de activo.

- La ley de movimiento de dicha distribución.

5.1. Distribución de Agentes

Necesitamos obtener una medida estacionaria que nos “cuente” la cantidad o fracción de agentes que se encuentren en subconjuntos del espacio de los estados S.

Dicho de manera sencilla, deseamos una función invariante en el tiempo que nos indique que fracción de nuestros agentes se encuentran en $a, s \in S$ específicos.

Formalmente:

Definicion 5.1. Una **Medida** de los agentes de nuestra economía es una función que aplique desde subconjuntos del espacio de los estados $S = A \times Z$ al campo de los reales positivos (set - point function) de la forma $\Phi : S \times \beta_s \to [0, 1]$, donde β_s es el algebra de Borel de S (subconjuntos de S los cuales cumplen determinadas condiciones que lo hacen susceptible de definir funciones de este tipo en ellos).

Dado que el rango de la función es $[0, 1]$ podemos entender dicha función (medida) como una función de probabilidad.

5.2. Ley de Movimiento de la Distribución

Aún nos hace falta un elemento, una función que nos describa la probabilidad de que un agente que pertenezca hoy a $a, s \in S$ transite el próximo período a un subconjunto $B_a \times B_s \in S$, es decir, la probabilidad de pasar a estados conjuntos determinados dada su actual ubicación.

Podemos representar dicha función como $\Phi' = Q(\Phi)$.

Nótese la similitud de esta definición con la matriz P, en efecto estamos hablando de una función de transición que nos resuma la transición de los agentes a través de pares ordenados de S, Formalmente:

Definicion 5.2. La *Ley de Movimiento* de la distribución Φ es una función $Q : S \times \wp(S) \to [0, 1]$ donde $\wp(S) = C(Z) \times B(A)$ es el espacio producto que denota el producto cartesiano de subconjuntos de Z y A. Se puede escribir la función Q como $Q(x, B) = \Pr\{S_{t+1} \in B \mid S_t = x\}$ para cualquier $x \in S$ y cualquier conjunto B σ- métrico.

Dicha función es generada por las reglas de decisión y la matriz de transición de s.

6. Equilibrio Competitivo

Ya poseemos todos los elementos necesarios para definir el equilibrio estacionario de esta economía:

Definicion 6.1. Un **equilibrio** es una función valor, V_c, funciones de política $g^c(a,s)$ y $g^a(a,s)$, una medida Φ y una ley de movimiento para la medida de agentes $\Phi' = Q(\Phi)$, dado una tasa de interés r tal que:

- Dado r, V_c es la función valor que maximiza 1 y $g^c(a,s)$ y $g^a(a,s)$ sus decisiones óptimas

- Las agregados son consistentes con las decisiones óptimas:

$$\begin{aligned} K(\Phi) &= \sum_a \sum_s \Phi(a,s) g^a(a,s) \\ C(\Phi) &= \sum_a \sum_s \Phi(a,s) g^c(a,s) \end{aligned}$$

- El operador Q es generado por las reglas de decisión y la matriz de transición de s:

$$\Phi^{'}(a',s') = \sum_s \sum_{a:a'=g(a,s)} \Phi(a,s) P(s',s)$$

- La medida de agentes $\Phi(a,k,s)$ es estacionaria: $\Phi = Q(\Phi)$

Se observa como forman parte en esta definición de equilibrio la medida (distribución) de los agentes y la ley de movimiento de la misma. Así como la naturaleza exógena de la tasa de interés.