9
Modelos con Precios Endógenos 2: Economía con Producción

Kamal A. Romero S.

Sumario

Se resuelve una economía con producción en la cual los precios se determinan de manera endógena. En este caso además de la condición de vaciado de mercado y consistencia agregada, se debe tomar en cuenta que la tasa de interés debe ser igual al producto marginal del capital físico.

Contenido

1. Introducción

Pueden existir casos en los cuales nos interesa analizar situaciones donde la tasa de ahorro agregada es positiva[1], para analizar cuestiones como el efecto de determinadas políticas sobre el nivel de ahorro y por ende la capacidad de expansión de una economía, por ejemplo.

Aiyagari (1994) es el primero en computar el equilibrio de una economía en el cual existe un nivel positivo de ahorro y se toma en cuenta las posibilidades de producción. Utiliza esta economía para analizar precisamente la importancia del riesgo idiosincrático en la determinación del nivel agregado de ahorro.

Existía la idea de que el llamado ahorro precaución[2] podría ser un determinante importante del ahorro total, Aiyagari (1994) encuentra que para valores plausibles de los parámetros de las preferencias y el proceso individual de los ingresos, la contribución del ahorro precaución es más bien modesta.

Si deseamos tener niveles positivos de ahorro, la estrategia de Huggett (1993) ya no es valida al imponer este un nivel de ahorro igual a cero como condición de equilibrio para determinar la tasa de interés. Así que Aiyagari (1994) introduce una nueva condición de equilibrio, en la cual exige que la tasa agregada de ahorro sea igual al capital físico agregado, que es utilizado en una función de producción neoclásica.

Analizaremos una economía con una función de producción neoclásica en la cual el tipo de interés, y por ende, el capital agregado es endógeno, mientras que el trabajo agregado es exógeno.

En una economía de este tipo además de una condición de vaciado de mercado (demanda agregada = oferta agregada) y una condición de consistencia agregada (el capital agregado es igual a la suma de las reglas de decisión a través de los estados de la economía), en equilibrio la tasa de interés debe ser igual al producto marginal del capital.

2. La Economía

La principal diferencia de una economía tipo Aiyagari con las estudiadas en las secciones anteriores es la existencia de una función de producción.

La incorporación de una tecnología en nuestra economía no solo se limita a añadir en el código una función Cobb-Douglas y una ley de movimiento del capital agregado, ya que el trabajo agregado es exogeno y debemos calcular su nivel correcto.

El nivel agregado de trabajo es igual a:

$$L = \xi' \overline{s} \tag{1}$$

[1] Recordar que en el modelo de Huggett (1993) la tasa de ahorro agregada es cero.

[2] Ahorro producto de la incertidumbre individual y no relacionado con el intercambio entre consumo presente y futuro.

Donde ξ' es la distribución invariante asociada a la matriz de transición del proceso estocástico, mientras que $\overline{s}$ es la distribución de las unidades de eficiencia del trabajo.

Obtener el nivel de trabajo implicado por 1 numéricamente es muy sencillo y sera explicado con detalle en la proxima sección.

El problema del consumidor se escribe ahora de la siguiente forma:

$$\text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=i}^{N} \beta^t \pi(s_i) u(C_t)$$

sujeto a

$$c_t + x_t = rk_t + ws_t$$

Donde:

- x_t representa la inversión bruta en capital físico k.
- r es la renta del capital, que es igual a la tasa de interés en el equilibrio.
- w es la remuneración al trabajo (salario)
- s representa los posibles valores (2) que pueden presentar las unidades de eficiencia del trabajo.
- $\pi(s_i)$ es la probabilidad de ocurrencia del estado de la naturaleza s_i donde $i = 1, 2$
- Se asume que s sigue un proceso de Markov.

Adicionalmente, tenemos la ley de movimiento del capital:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + x_t \tag{2}$$

donde δ es la tasa de depreciación del capital.

Sustituyendo 2 en la restricción de presupuesto obtenemos:

$$c_t + k_{t+1} = (1 + r - \delta)k_t + ws_t$$

Que sería la restricción que utilizaremos en nuestro código.

La representación recursiva del problema arriba enunciado es:

$$V(s, a) = \max_{c,k'} [u(c) + \beta E\{V(s', a')|s\}] \tag{3}$$

sujeto a

$$c = ws + (1 + r - \delta)k - k'$$

$$k' \in K$$

Esta economía posee una función de producción agregada que combina el nivel agregado de trabajo y capital para obtener el bien que consumen nuestros agentes.

Asumimos como es usual en la literatura una función de producción Cobb-Douglas:

$$F(K,N) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

Esta función de producción determina en equilibrio los niveles del salario y la tasa de interés, a partir de las condiciones de optimización de la empresa.

$$\begin{aligned} w &= \frac{\partial F(K,N)}{\partial N} \\ r &= \frac{\partial F(K,N)}{\partial K} \end{aligned} \tag{4}$$

que en el caso de una función Cobb-Douglas son:

$$r = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \alpha\left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha} \tag{5}$$

$$w = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = (1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} \tag{6}$$

Ya poseemos todos los objetos necesarios para definir el equilibrio de nuestra economía. Observar los nuevos elementos de nuestra definición:

Definicion 2.1. Un **equilibrio** es una función valor, V_c, funciones de política $g^c(a,s)$ y $g^k(a,s)$, una medida Φ, una ley de movimiento para la medida de agentes $\Phi' = Q(\Phi)$ **y una tasa de interés** r tal que:

- La tasa de interés y el salario satisfacen 4
- Dado r, V_c es la función valor que maximiza 3 y $g^c(a,s)$ y $g^k(a,s)$ sus decisiones óptimas
- Las agregados son consistentes con las decisiones óptimas:

$$\begin{aligned} K(\Phi) &= \sum_a \sum_s \Phi(a,s) g^a(a,s) \\ C(\Phi) &= \sum_a \sum_s \Phi(a,s) g^c(a,s) \end{aligned}$$

- El operador Q es generado por las reglas de decisión y la matriz de transición de s:

$$\Phi^{'}(a',s') = \sum_s \sum_{a:a'=g(a,s)} \Phi(a,s) P(s',s)$$

- La medida de agentes $\Phi(a,k,s)$ es estacionaria: $\Phi = Q(\Phi)$

Podemos resumir en palabras el aspecto novedoso de esta definición de equilibrio.

En equilibrio, el nivel de capital debe generar una tasa de interés vía la expresión 4, tal que esta genere un nivel agregado de capital idéntico al inicial vía la agregación de las funciones de política.

Esta idea nos permitirá obtener la tasa de interés de equilibrio a través de un proceso iterativo, en el cual localizamos un punto fijo en el nivel agregado de capital.

Al igual que en la sección anterior realizaremos un análisis de estado estacionario; para una tasa interés dada obtenemos las funciones de política, la distribución de agentes y el nivel agregado de capital.

3. Implementación Numérica

3.1. Nivel Agregado de Trabajo

Hemos mencionado anteriormente que el nivel de trabajo venía dado por 1. Analizando esta expresión podemos determinar que el trabajo agregado es exógeno, debido a que tanto la distribución de las unidades de eficiencia del trabajo como la matriz de transición entre dichas unidades son exógenos.

No obstante, en la expresión 1 no se encuentra la matriz de transición como tal, sino la distribución invariante de esta.

Por lo tanto, para calcular el trabajo agregado debemos de computar dicha distribución invariante, proceso que realizamos sólo una vez.

Definimos una distribución estacionaria como aquella que no varia en el tiempo. Al igual que en el resto de análisis que hemos realizado a lo largo de las lecturas, la idea de estacionario suele estar asociado al punto fijo de algún tipo de operador.

En este caso la distribución estacionaria asociada a una determinada matriz de transición[3] se encuentra asociado a un punto fijo de un operador que aplica del espacio matrices de transición sobre si mismo.

Ilustremos la idea anterior con un ejemplo[4].

Si la distribución de unidades de eficiencia del trabajo viene dada por:

$$A = [0,5 \ \ 0,5]$$

y la matriz de transición por: $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

[3]Cadena de Markov o proceso de Markov en un espacio de estados finito.

[4]Este ejemplo es igual al de la sección de Cadenas de Markov. Dado que dicho capítulo no era de lectura obligatoria para aquellos que ya tenían conocimiento del tema hemos decidido repetir el ejemplo en esta sección.

La distribución de las unidades de eficiencia el próximo período vendrá dada por:

$$[\underbrace{(0,5 \times 0,8 + 0,5 \times 0,5)}_{s_1} \quad \underbrace{(0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5)}_{s_2}]$$

Lo cual en términos matriciales es $A \times P$.

Si deseamos saber la distribución de las unidades de eficiencia los próximos dos períodos, realizamos el producto $(A \times P) \times P = A \times (P \times P) = A \times P^2$.

Si continuamos por inducción, la distribución A los próximos n períodos es $A \times P^n$.

Si la secuencia P^n converge a algún punto, la expresión $A \times P^n$ nos dará la distribución invariante P^*, que será uno de los vectores de la matriz.

Numéricamente, sólo debemos repetir un número determinado de veces el producto $P \times P$ y $A \times P$ hasta que la matriz P alcance un punto fijo.

3.1.1. Pasos Computacionales

1. Definimos un nivel de tolerancia y el valor inicial de la matriz P^o y de la métrica.
2. Realizamos los productos $P' = P \times P$ y $A \times P$
3. Evaluamos la diferencia entre P^o y P' y verificamos si es inferior al criterio de tolerancia $|D^o - D'| \leq tol$
4. De cumplirse el paso 3 hemos acabado, en caso contrario hacemos $D^o = D'$ y volvemos al paso 1.

Dado lo anterior los pasos computacionales son:

- Paso 1: se escribe la matriz de transición, se postula una distribución inicial para las unidades de eficiencia del trabajo, el criterio de tolerancia y el valor inicial de la métrica.

  ```
  p=Q;
  g=[0.5,0.5];
  distance=1;
  toll=1*10(-8);
  ```

- Paso 2: realizamos las multiplicaciones

  ```
  while distance>toll
  p1=p*p;
  g1=g*p;
  ```

- Paso 3: evaluamos la distancia entre la matriz de transición inicial y la obtenida en la multiplicación

  ```
  distance=norm(abs(p1-p));
  ```

- Paso 4: de no cumplirse el condicional `while`

  ```
  p=p1;
  g=g1;
  ```

- al cumplirse el condicional `while`

  ```
  end
  ```

Una vez obtenida la distribución estacionaria ξ', calculamos el trabajo agregado a través de 1 y lo utilizamos como insumo en la resolución del modelo.

3.2. Resolviendo la Economía

La idea de la implementación numérica de esta economía es de localizar un punto fijo en el nivel de capital agregado, a través de variar la tasa de interés. En la economía tipo Huggett realizábamos algo similar, variabamos la tasa de interés hasta que el nivel agregado de activos fuera cero.

En este caso buscamos una tasa que nos replique un nivel dado de capital. El algoritmo adopta la siguiente forma:

1. Postulamos una tasa de interés inicial. Utilizando las expresión 4 obtenemos un nivel de capital inicial. Utilizamos este capital y el nivel agregado de trabajo exógeno para obtener un salario a través de 4.
2. Obtenemos las funciones de política para esa tasa de interés y salario.
3. Calculamos la distribución estacionaria a partir de las reglas de decisión y la matriz de transición del choque idiosincrático.
4. Utilizamos la distribución de activos y su función de política para calcular el nivel agregado de activos y verificar si es igual al inicial.
5. En caso contrario volver al paso 1 y usar una nueva tasa de interés.

3.2.1. Pasos Computacionales

- Paso 1: Postulamos una tasa inicial `r`. Con esta tasa de interés obtenemos el capital inicial a través de 5. Con este nivel de capital y el trabajo agregado obtenemos el salario vía 5.

  ```
  r=x;
  K0=MeanL*(ALFA/(r+DELTA))exp(1/(1-ALFA));
  w=(1-ALFA)*TAU*(K(expALFA))*(MeanL(exp(-ALFA)));
  ```

- Paso 2: Se obtienen las reglas de decisión, la distribución de agentes y el capital agregado K.
- Paso 3: Se compara el nivel de capital obtenido con el inicial.

  ```
  distance=norm(abs(K0-K));
  ```

- Si la distancia es menor al criterio de tolerancia hemos acabado, en caso contrario se modifica la tasa de interés y volvemos al paso 1.

Al igual que la sección anterior utilizaremos la función *fzero* de MATLAB.

En este caso sencillamente creamos una función que nos compute el nivel de capital agregado `MeanK` y cuyo resultado sea la diferencia entre el capital inicial y el computado `e=MeanK-K;`, en un script definimos todos los parámetros del modelo y utilizamos *fzero* para buscar un cero de `e`.

Referencias

AIYAGARI, S. R. (1994): "Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving," *Quarterly Journal of Economics*, 109(3), 659–684.

HUGGETT, M. (1993): "The Risk Free Rate in Heterogeneous Agent Incomplete Insurance Economies," *Journal of Economic Dynamics and Control*, (17), 953–969.