DECISIÓN MULTICRITERIO

DECISIÓN MULTICRITERIO

- ➢ **INTRODUCCIÓN**
- ➢ **CONCEPTOS BÁSICOS**
- ➢ **EVOLUCIÓN HISTÓRICA**
- ➢ **CLASIFICACIÓN DE LAS TÉCNICAS**
  - Decisión Multicriterio Continua
    - Técnicas Generadoras
    - Programación por Compromiso (PPC)
    - TOPSIS
    - VIKOR
    - Programación por Metas (PPM)
  - Decisión Multicriterio Discreta
    - Teoría de Utilidad Multiatributo (MAUT)
    - Proceso Analítico Jerárquico (AHP)
    - Métodos de Superación

DECISIÓN MULTICRITERIO

- **Significado**
  - Diversos campos del saber
  - Dudas en la notación
  - Conceptos básicos
  - Definiciones
  - Nuestra Definición
- **Evolución histórica**
  - Enfoque tradicional (uniobjetivo)
  - Enfoque moderno (multiobjetivo)

DECISIÓN MULTICRITERIO

- Análisis realista del problema, en particular el proceso de análisis realizado en el PTD.
- Mejorar efectividad, eficacia y eficiencia, en concreto, uso eficiente de la información
- Trabajar con múltiples criterios, escenarios y actores
- La interacción entre la gente y la información
- No recurrir a la rígida reducción a una escala
- Matemáticamente (A, PO)

DECISIÓN MULTICRITERIO

- Respecto a los **conceptos básicos** empleados en Decisión Multicriterio (Ignizio, 1982; Zeleny, 1982; Chankong y Haimes, 1983; y Moreno, 1993), se entiende por.
- **Atributo** (también denominado característica, aspecto, propiedad, cualidad, distinción, etc.), la descripción de la realidad que normalmente puede identificarse y medirse independientemente de los deseos y necesidades del decisor (Zeleny, 1982).
- Estos atributos pueden ser: **objetivos**, si son percibidos de forma similar por todos los sujetos, y **subjetivos**, si la percepción depende del sujeto que observa.

DECISIÓN MULTICRITERIO

- **Objetivo** una dirección de mejora que refleja los deseos del decisor.
  - Ansoff (1976) distingue cuatro grupos de objetivos: **a)** los **económicos** que tratan la eficiencia del proceso de transformación; **b)** los **sociales** o no económicos que tratan de dar respuesta a las necesidades de aspiración de los miembros de la empresa; **c)** las **responsabilidades** que son obligaciones autoimpuestas por la propia empresa fruto de su conciencia social; y **d)** las **restricciones** que son condiciones del sistema social, político, legal, etc.
  - Shi Yu (1990), basándose en la jerarquía de necesidades de Maslow, estructura las funciones objetivo en siete niveles: a) **existencia** y **seguridad**; b) **perpetuación de la especie**; c) **autoimportancia**; d) **aprobación social**; e) **gratificación sensorial**; f) **consistencia cognitiva** y **curiosidad**; g) **actualización propia**.

DECISIÓN MULTICRITERIO

- a) **Existencia y Seguridad**: salud sicológica, nivel y calidad el aire, agua,etc.. Seguridad, ganancia de dinero y bienes de consumo; b) **Perpetuación** de la especie: actividad sexual, nacimientos, amor de la familia, salud y bienestar; c) **Sentimientos de autoimportancia**: poder reconocimiento, prestigio, creatividad, superioridad, riqueza; d) **Aprobación Social**: respeto, amistades, ideologías, creencias, actitudes y comportamientos; e) **Gratificación Sensorial**: sexual, visual, auditiva, lor, gusto, tacto; f) **Consistencia Cognitiva y Curiosidad**: consistencia en creencias y opiniones, adquisición de conocimiento, verdad, belleza y religión; g) **Actualización propia**: habilidad para aceptar y depender de uno mismo.
- Estos objetivos se derivan de la conocida como **Jerarquía de Necesidades de Maslow**. Si ordenamos, de forma decreciente en cuanto a su satisfacción, las necesidades humanas se tiene: a) **Fisiológicas**; b) **Seguridad y Salud**; c) **Pertenencia**; d) **Estima** y e) **Autosuficiencia**.

PRINCIPIO DE OPTIMIDAD (PO)

- **Meta** un nivel de aspiración fijado para un objetivo (racionalidad estricta y acotada).
- **Criterio** una medida, regla o estándar que guía la toma de decisiones. Es el concepto más amplio de los mencionados anteriormente (atributo, objetivo, meta). En esencia, es una medida de los atributos, objetivos o metas que se juzguen relevantes para el problema.
- La **función esencial de todo proceso de decisión** es transformar la información de entrada en una decisión, que es la salida del mismo.
- La determinación de la "**calidad del proceso**" no puede establecerse en términos generales (Edward y otros 1984), aunque se puede estimar como la relación entre los inputs y los outputs.

ALTERNATIVAS (A)

- Se entiende por **alternativa** cualquier curso de acción, actuación, opción, objeto de elección, acción o estrategia. Estas alternativas vienen caracterizadas por los atributos, y a su vez pueden ser:

  (1) alternativa **óptima**, es aquella que alcanza simultáneamente el óptimo (de manera individualizada) en todos los criterios considerados

  (2) alternativa **eficiente**, o no dominada, es aquella que no puede mejorar su valor en uno de los criterios sin empeorar al menos otro

  (3) alternativa **preferida**, es aquella seleccionada por el decisor, en general dentro del grupo de las no dominadas, conforme a sus preferencias en la decisión final

  (4) alternativa **satisfactoria**, es aquella que alcanza los niveles de aspiración en todos los criterios considerados.

TÉCNICAS DE DECISIÓN MULTICRITERIO

- Origen remoto (resolución de conflictos)
- **Aproximación científica**.
  - Precursores: (Caballero de Bordá, 1770; Marqués Caritat de Condorcet, 1780)
  - Elección social
  - Investigaciones económicas (Walras, Cournot y Pareto -**Óptimo Pareto, 1896**-) a finales XIX; Hicks, Bergson y Samuelson a principios del XX)
  - Von Newman y Morgesterm (1944)
  - **Koopman (1951); Kuhn y Tucker (1951)**; Arrow (1951); Allais (1953); Hitch (1953); May (1954); Savage (1954); Luce (1956); Luce y Raiffa (1957)
  - **Charnes y Cooper (1961)**; Roy (1968); Tversky (1969)
  - Fishburn (1970); Krant, Luce, Suppes y Tversky (1971); **Conferencia de Carolina del Sur, 1972.** Keeney y Raiffa (1976); Saaty (1977)
  - Zeleny (1982); Edwards (1982); Steuer (1986),

TÉCNICAS DE DECISIÓN MULTICRITERIO

- **Nijkamp y van Delft** (1977) indican que los modelos multicriterio ofrecen la posibilidad de establecer un análisis equilibrado de los problemas de planificación, en particular los que presentan aspectos intangibles como los sociales y ambientales. El fin básico, en este caso, es investigar un número de alternativas bajo la luz de múltiples criterios y objetivos en conflicto (Voogd, 1983).
- **Colson y de Bruin** (1989) consideran las Técnicas de Decisión Multicriterio (TDMC) como un conjunto de modelos, métodos y técnicas para auxiliar a los centros decisores a describir, evaluar, ordenar, jerarquizar, seleccionar o rechazar objetos en base a una evaluación.

TÉCNICAS DE DECISIÓN MULTICRITERIO

- **Ridgley y Rijsberman** (1992) consideran el análisis multicriterio como un conjunto de metodologías de ayuda a la toma de decisiones en problemas de medición complejos.
- **Eastman et al. (1993)** definen las TDMC como el conjunto de herramientas para el análisis de las complejas propiedades existentes entre las alternativas.
- **Romero (1993)** señala que el paradigma de decisión multicriterio plantea la resolución de problemas de decisión complejos donde los criterios y objetivos pueden ser múltiples.

TÉCNICAS DE DECISIÓN MULTICRITERIO

- **Saaty (1994)** afirma que el objetivo de las decisiones multicriterio es asistir a la gente a expandir el conocimiento, a relacionarlo con los valores empleados, y a establecer las prioridades que permitan tomar decisiones.
- **Barredo (1996)** las define como un conjunto de técnicas orientadas a asistir en el proceso de toma de decisiones.
  - Coincidiendo con la línea expuesta por el GDMZ (Moreno, 1993, 1995, 1996, 1996a, 1996b).
- En lo que sigue, se entiende por *Técnicas de Decisión Multicriterio* el conjunto de herramientas que permiten una resolución más realista y efectiva del problema sin tener que recurrir, como ocurre con los enfoques tradicionales a la rígida reducción a una escala monetaria.

DECISIÓN MULTICRITERIO

- ***Decisión Multicriterio*** **(Moreno, 1996)** es el conjunto de aproximaciones, métodos, modelos, técnicas y herramientas dirigidas a ***mejorar la calidad integral y a incrementar el conocimiento de los procesos de decisión*** seguidos por los individuos y sistemas, en situaciones complejas en las que intervienen múltiples escenarios, actores y criterios, esto es, a ***mejorar la efectividad, eficacia y eficiencia de los procesos de decisión, y a aumentar el valor añadido del conocimiento de los mismos.***

CLASIFICACIÓN

TÉCNICAS DE DECISIÓN MULTICRITERIO

- La gran expansión que han tenido las Técnicas de Decisión Multicriterio en los últimos años hace que el número de las mismas haya crecido considerablemente y sea necesaria una clasificación que permita apreciar las características más destacadas de las mismas.
- Diferentes métodos, enfoques o aproximaciones multicriterio pueden verse en Saaty (1980), Goicochea et al (1982), Voogd (1983), Janssen y Rietveld (1990), y Corver (1991).
- Existen tantas clasificaciones como criterios seguidos para las mismas. Entre los criterios más empleados destacan (Cohon,1978; Hwang y Masud, 1979; Zionts, 1980; Rietveld, 1980).

CRITERCIOS DE CLASIFICACIÓN DE LAS TDMC

1) Número de alternativas disponibles.
2) Tipo de datos y su escala de medida.
3) Información sobre las preferencias.
4) Formas de modelizar las preferencias.
5) Número de alternativas en la decisión final.
6) Incertidumbre acerca de los datos.
7) Número de decisores.
8) Mecanismos para la generación de alternativas.
9) Tipo de información sobre preferencias.
10) **Relación entre el analista y el decisor**.
11) Las características del sistema informático asociado.

DECISIÓN MULTICRITERIO

- **Evans (1984)** clasifica las técnicas combinando tres ideas: el tipo de variables (continuas y discretas); la linealidad o no de la función objetivo, y la información sobre las preferencias.
- **Ko y Lin (1988)** consideran cuatro tipos de modelos multicriterio:
  - I. Modelos con pesos derivados de la observación (análisis de regresión y análisis de la varianza);
  - II. Modelos de extracción directa (AHP y MAUT);
  - III. Modelos de programación matemática (programación lineal, programación por metas y programación por objetivos);
  - IV. Modelos geométricos (escalas multidimensionales y medidas conjuntas).

DECISIÓN MULTICRITERIO

- **Jankowski (1995)** clasifica las técnicas multicriterio según el proceso de demanda cognitiva que requieren del centro decisor y el método de agregación de prioridades establecidos. En relación con dicha clasificación se diferencian dos tipos de técnicas: compensatorias y no compensatorias, siendo las compensatorias las que demandan un mayor proceso cognitivo (Hwang y Yoon, 1981). Barrero (1996) presenta un clasificación adaptada de la anterior.
- Si nos centramos en el décimo criterio de clasificación de las Técnicas de Decisión Multicriterio (**flujo de información**), se pueden distinguir:

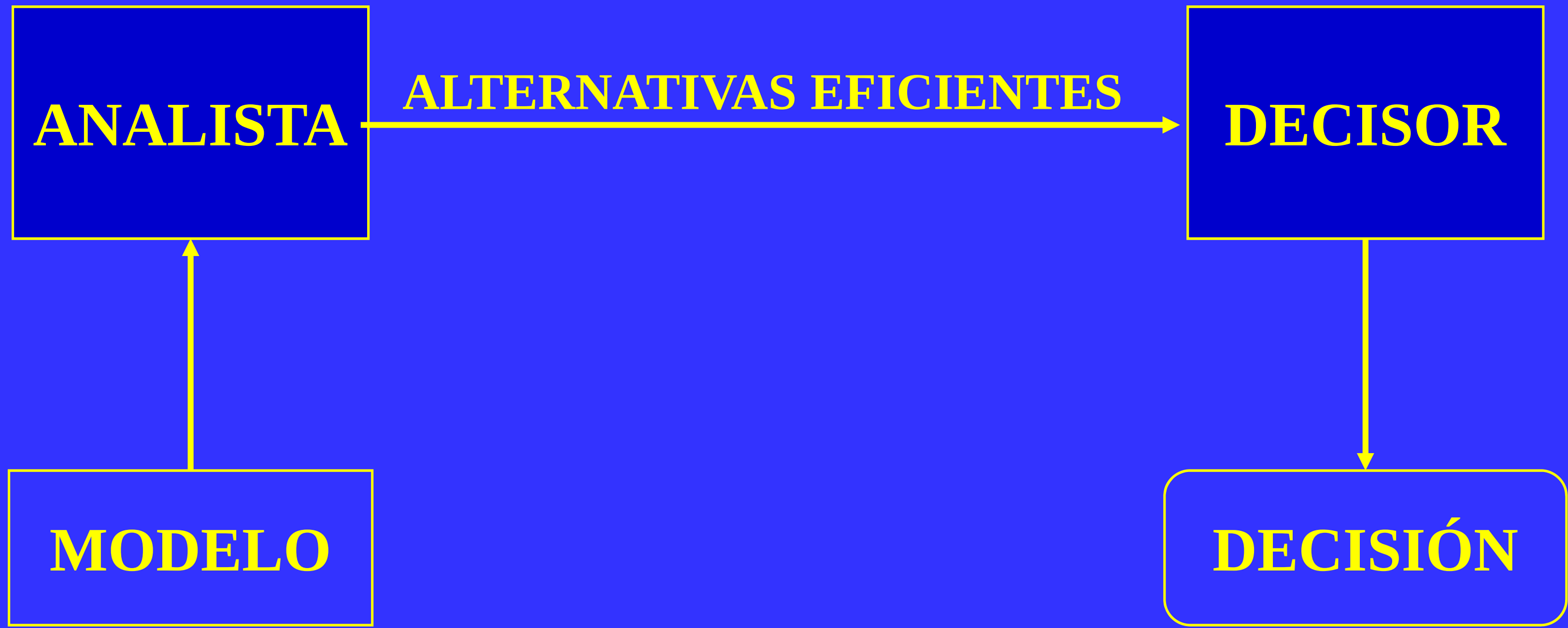
DECISIÓN MULTICRITERIO

- Las **Técnicas de Decisión Multicriterio** (TDMC) son un grupo de herramientas que abordan la resolución de problemas complejos de una forma más realista que los enfoques tradicionales, permitiendo la incorporación de diferentes criterios y visiones de la realidad.
- Hay **muchas clasificaciones** de las TDMC. Siguiendo un criterio basado en el flujo de información entre dos de los actores participantes en el PTD (**decisor y analista**), se pueden considerar tres grande grupos de técnicas:

  a) **sin** información a priori;

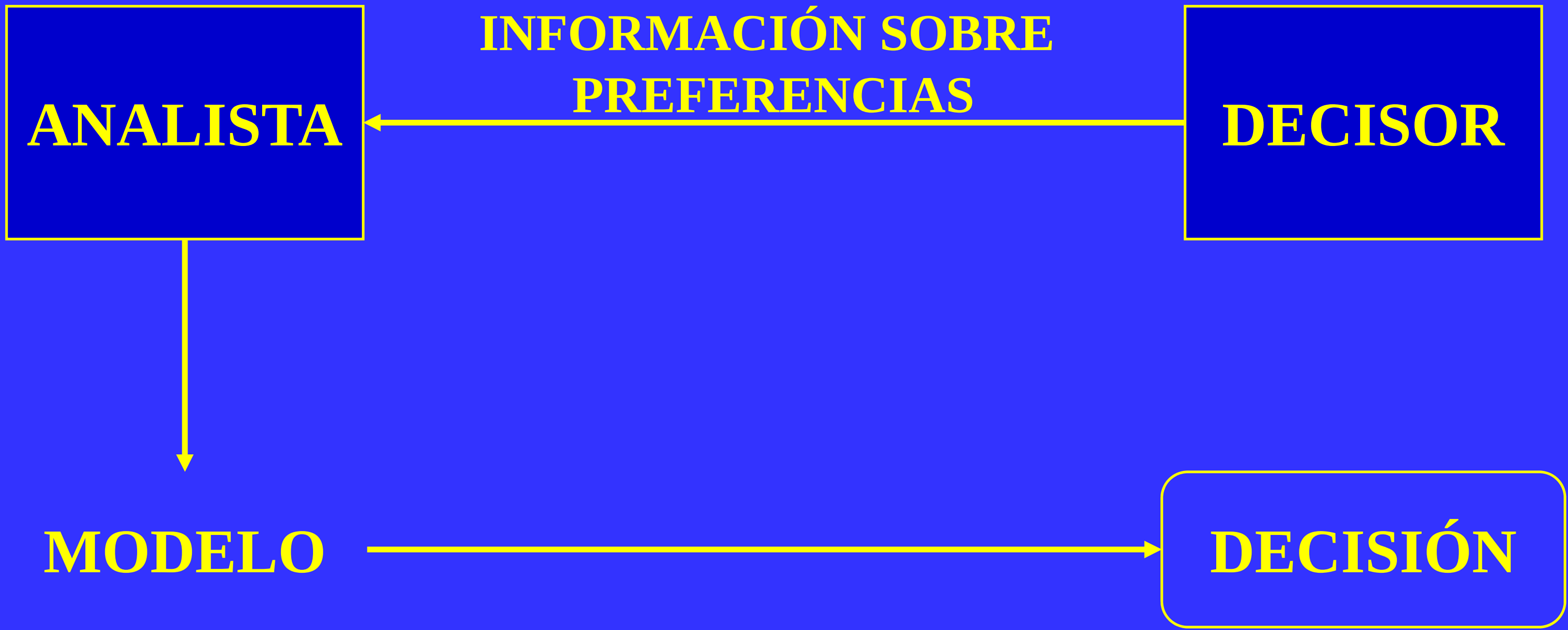
  b) con **información a priori**, y

  c) técnicas **interactivas**.
- En el segundo grupo se distinguen las técnicas existentes para un número finito e infinito de alternativas.



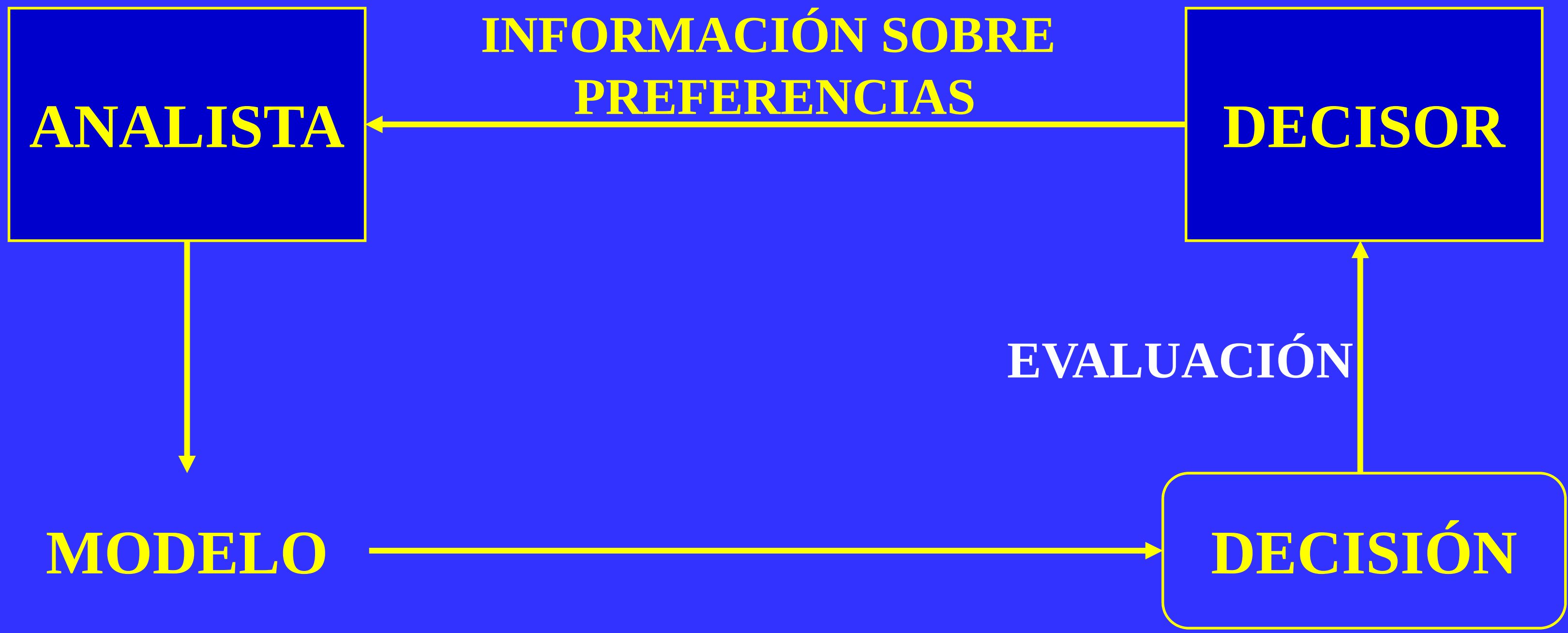
TÉCNICAS GENERADORAS

DECISIÓN MULTICRITERIO



TÉCNICAS CON INFORMACIÓN A PRIORI

DECISIÓN MULTICRITERIO



TÉCNICAS INTERACTIVAS

➢ *Técnicas sin información a priori* (generadoras):

- Son aquellas en las que el flujo de información va del analista al decisor.
- El analista estudia objetivamente el problema y obtiene el conjunto de alternativas eficientes que presenta al decisor. Éste elige aquella que más se adecua a su estructura de preferencias que no ha hecho explícita en ningún momento del proceso.
- Con ellas se genera, parcial o totalmente, el conjunto de alternativas eficientes.
- La principal ventaja de este tipo de técnicas es que la única información necesaria del decisor es su opinión de "cuanto más mejor".
- Los inconvenientes más importantes son los asociados a su complejidad calculista en cuanto el número de criterios considerados se va elevando (prácticamente no se usan con más de tres criterios).
- Entre las técnicas generadoras destacan (Steuer, 1986): el método de ponderaciones, el de la ε-restricción y el simplex multicriterio.

DECISIÓN MULTICRITERIO

- ***Técnicas con información a priori***: El flujo de información es en el sentido contrario, del decisor al analista. Estas técnicas exigen que el decisor proporcione al analista su estructura de preferencias, y éste es quién construye el modelo incluyendo en él toda esta información. La solución del problema (decisión) surge del modelo (su resolución) directamente.
- El conocimiento explícito de las preferencias del decisor no es sencillo. Se necesita: conocer la propia estructura de preferencias; no cometer errores en el proceso de extracción y de incorporación de la misma. Además el decisor suele modificar sus preferencias a lo largo del proceso de resolución, por lo que deberá establecer determinados controles para retroalimentar el modelo.

DECISIÓN MULTICRITERIO

- Este grupo de técnicas se suele distinguir según el número de alternativas que tenga el problema: finito o infinito.
- Si el conjunto de alternativas es infinito, la búsqueda de la solución se efectúa, habitualmente, mediante la minimización de una distancia: **programación por compromiso** y **programación por metas**.
- Si el conjunto de alternativas es discreto se distinguen:
  - i) ***Métodos de Agregación***: En este tipo de métodos se modelizan las preferencias a través de una función valor
    - ***Directos***: Teoría de Utilidad Multiatributo (**MAUT**)
    - ***Jerárquicos***: Proceso Analítico Jerárquico (**AHP**), y SMART (Edwards, 1982)
  - ii) ***Métodos basados en relaciones de orden***: Se modelizan las preferencias a través de un sistema de relaciones binarias. Métodos de Superación (MS).

- ***Técnicas interactivas.*** El decisor proporciona al analista una información parcial sobre su estructura de preferencias al principio del proceso. Con esta información el analista presenta una alternativa al decisor que éste evalúa y puede aceptar o rechazar. Si se rechaza, da más información al analista sobre sus preferencias, de modo que pueda buscarse una alternativa más aceptable.
- El intercambio de información es la principal característica de estas técnicas. Dentro de este conjunto de métodos los más utilizados han sido: **STEM** y **Método de Zionts-Wallenius** (1976, 1983). Muchos de los métodos anteriormente mencionados pueden considerarse dentro de este último grupo, bastando para ello que el decisor revise sus juicios dentro del PTD.

TÉCNICAS MULTICRITERIO

- Aproximaciones
  - Generar soluciones eficientes (Generadoras)
    - Ponderaciones (algunos vértices de la frontera eficiente)
    - ε -restricciones (algunos puntos de la frontera eficiente)
  - Búsqueda de Metas (Minimización Distancias)
    - Programación por Compromiso (p=1,2,∞)
    - TOPSIS Y VIKOR
    - Programación por Metas
  - Utilización Funciones Valor
    - AHP
    - MAUT

GRUPO DECISIÓN MULTICRITERIO ZARAGOZA

1542 Universidad Zaragoza

TÉCNICAS MULTICRITERIO

$x \in X$

$z_j : X \to R$

$j=1,\ldots,q$

$z : X \to Z \subset R^q$

Espacio Soluciones

$z \in Z$

$v(z) = \Sigma_j v_j(z_j(x))$

$v : Z \to R$

Espacio Criterios

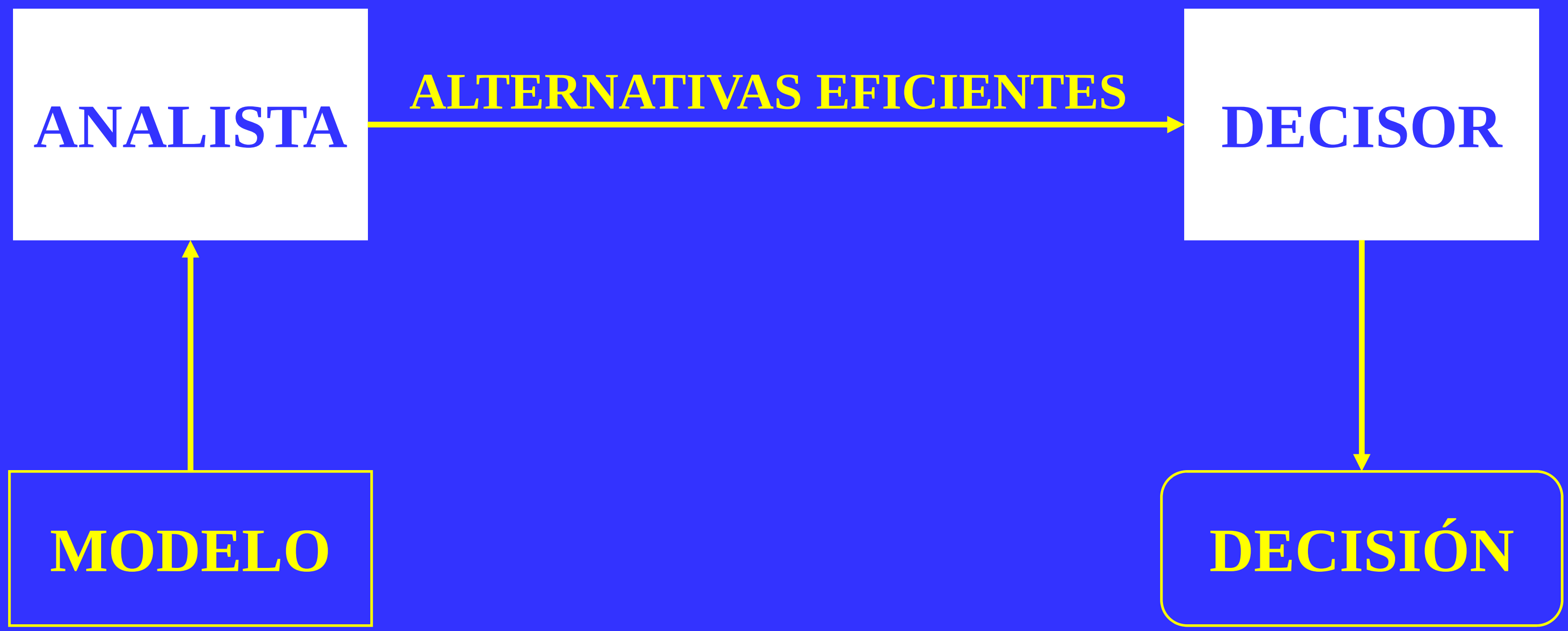
R

- Aproximaciones
  - Generar soluciones eficientes
  - Búsqueda de Metas (Minimización Distancias)
  - Utilización **Funciones Valor/Utilidad**

TÉCNICAS MULTICRITERIO

- Aproximaciones
  - Generar soluciones eficientes (Generadoras)
    - Ponderaciones (algunos vértices de la frontera eficiente)
    - ε -restricciones (algunos puntos de la frontera eficiente)
  - Búsqueda de Metas (Minimización Distancias)
    - Programación por Compromiso ($p=1,2,\infty$)
    - TOPSIS Y VIKOR
    - Programación por Metas
  - Utilización Funciones Valor
    - AHP
    - MAUT

DECISIÓN MULTICRITERIO



TÉCNICAS GENERADORAS

TÉCNICAS GENERADORAS

- Características generales
- **Métodos elementales**
  - **Método de las ponderaciones**
  - **Método de las ε-restricciones**
  - **Métodos mixtos**
- **Método del Simplex Multicriterio**
- Prácticas

CARACTERÍSTICAS GENERALES

- Flujo de información: analista $\rightarrow$ decisor
- Objetivo: generar el conjunto de soluciones eficientes
- Ventajas
  - Comodidad para el analista
  - No es necesario que el decisor haga explícita su estructura de preferencias
- Inconvenientes
  - Sensibles al número de objetivos del problema
  - Dificultades en la presentación de los resultados
    - Método gráfico (sólo 2 criterios)
    - Presentación tabular
    - Caminos de valor

DECISIÓN MULTICRITERIO

- Problema de **Programación Lineal Multiobjetivo** (PPLMO)

$$[P] \qquad \text{Max } z = (z_1(x), \ldots, z_q(x))$$
$$\text{s.a.} \qquad Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

- El número de criterios es q (se supone que de máximo)
- Todas las restricciones y criterios son lineales
- Se buscan soluciones eficientes:
  - $x^* \in X$ es **solución eficiente (E)** si no existe $x \in X$ tal que $z_j(x) \ge z_j(x^*)$ $\forall j=1,\ldots,q$, y existe al menos un $k \in \{1,\ldots,q\}$ con $z_k(x) > z_k(x^*)$.
  - $x^* \in X$ es **solución débilmente eficiente (DE)** si no existe $x \in X$ tal que $z_j(x) > z_j(x^*)$ $\forall j=1,\ldots,q$ (**E⇒DE y no al revés**).

S o **X** denotan la Región de factibilidad en el **ESPACIO DE SOLUCIOINES**

Z denota la Región de factibilidad en el **ESPACIO DE CRITERIOS**

- Vector criterio no dominado $\bar{z} \in Z$
- Solución eficiente $\bar{x} \in S$
  - Solución eficiente punto extremo
  - Solución eficiente no punto extremo

$E \Rightarrow$ Conjunto de soluciones eficientes o **FRONTERA EFICIENTE** $E \subset S$

MÉTODO GRÁFICO

- Sólo para problemas con 2 criterios
- Procedimiento para un PPLMO
  - Representar la región de factibilidad del espacio de soluciones
  - Determinar los puntos extremos y evaluarlos en los distintos criterios
  - Representar el espacio de criterios
  - Determinar la frontera eficiente
- La pendiente de los segmentos de la frontera representan las tasas de intercambio (*trade-offs*)

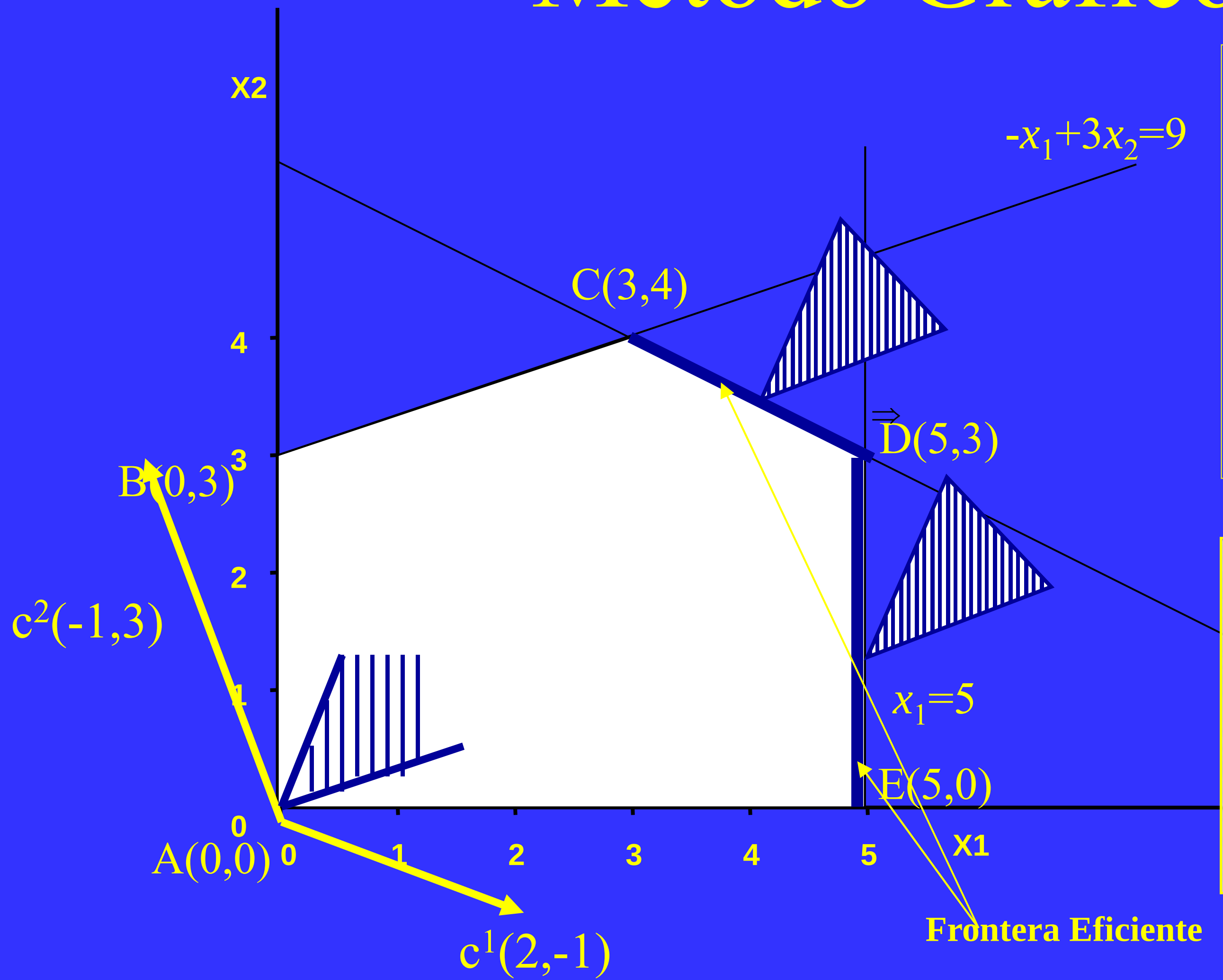
EJEMPLO 0:

$$\text{Max } Z_1 = 2x_1 - x_2$$

$$\text{Max } Z_2 = -x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.:} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Método Gráfico



EJEMPLO 0:

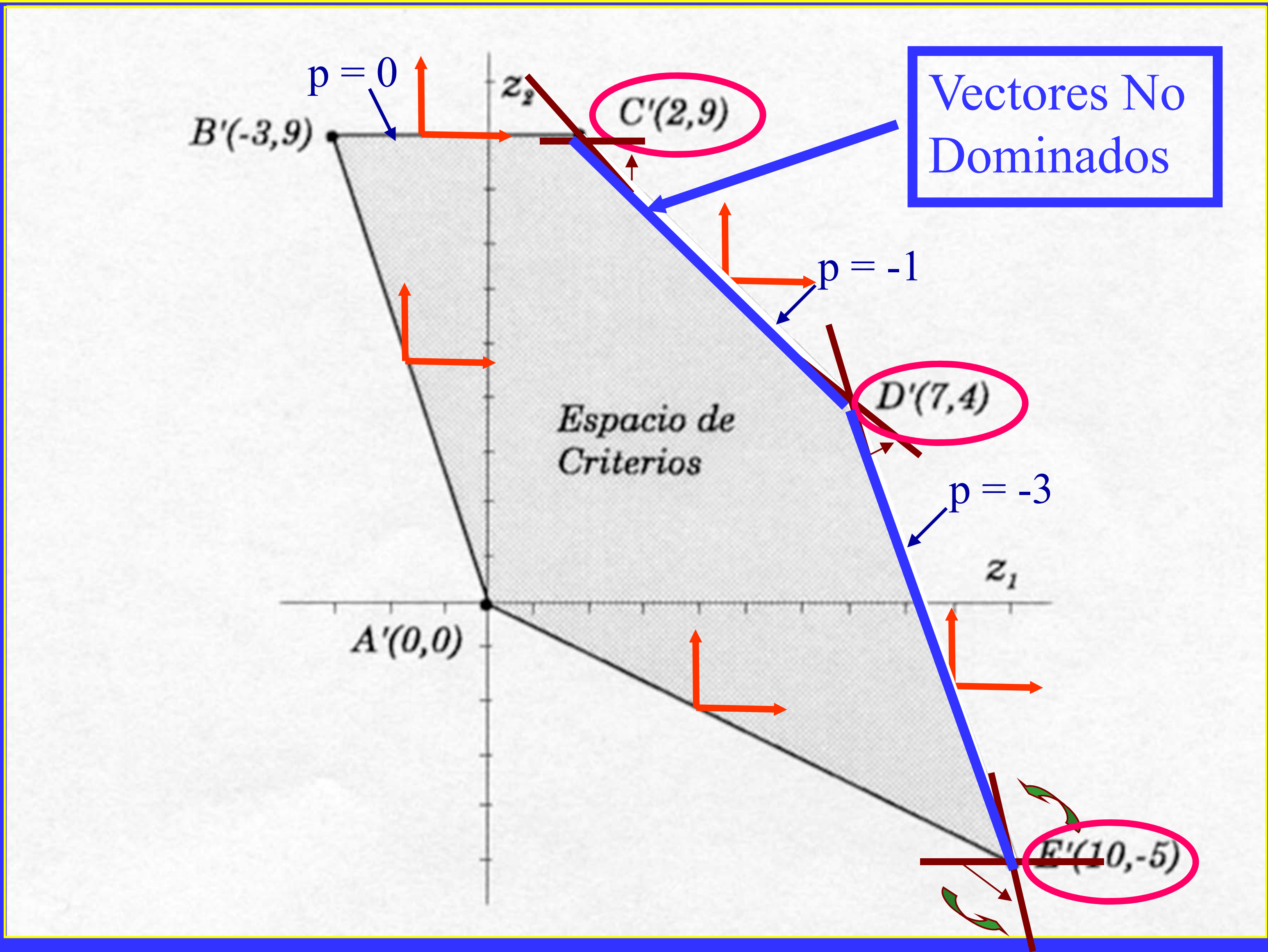
$$\text{Max } Z_1 = 2x_1 - x_2$$

$$\text{Max } Z_2 = -x_1 + 3x_2$$

s.a.:
$$x_1 + 2x_2 \leq 11$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_1 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Extremo	x_1	x_2	z_1	z_2
A	0	0	0	0
B	0	3	-3	9
C	3	4	2	9
D	5	3	7	4
E	5	0	10	-5

DECISIÓN MULTICRITERIO



MÉTODO DE LAS PONDERACIONES

- Modelo (Gass y Saaty, 1955; Zadeh, 1963)

$$[\mathbf{P}(\boldsymbol{w})] \quad \text{Max} \quad \sum_{j=1}^{q} w_j z_j(x)$$

$$\text{s.a.} \qquad Ax \leq b$$

$$x \geq 0,\ \mathrm{w_j} \geq 0,\ \textstyle\sum_j \mathrm{w_j} = 1$$

- Si $w_j > 0\ \forall j$, o la solución es única, la solución óptima de P(w) es solución eficiente del problema multicriterio
- Si algún $w_j = 0$ y la solución es múltiple $\Rightarrow$ no todas las soluciones tienen porqué ser eficientes

GRUPO DECISIÓN MULTICRITERIO ZARAGOZA

1542 Universidad Zaragoza

RESULTADOS TEÓRICOS

Teorema 1.1: La solución del problema P[w] es óptimo Pareto débil.

Teorema 1.2: La solución del problema P[w] es óptimo Pareto si los coeficientes w_j j=1,…,q son positivos (condición suficiente).

Teorema 1.3: La solución única del problema P[w] es óptimo Pareto.

Teorema 1.4: En dominios convexos (PPMO), si $x^* \in S$ es solución óptimo Pareto, existe un vector de pesos ($w \geq 0$) tal que x^* es una solución del problema P[w]. De acuerdo con este resultado, toda solución eficiente de un PLMO puede obtenerse por el método de las ponderaciones.

Teorema 1.5: La solución del problema P[w] es óptimo Pareto si todos los pesos son positivos (condición suficiente). Si el dominio es convexo, esta condición también es necesaria.

- Los pesos no representan las preferencias del decisor. Juegan el papel de parámetros que se hacen variar arbitrariamente para generar soluciones eficientes del problema
- Este método sólo genera *soluciones eficientes* que sean *puntos extremos*
- No se garantiza la obtención de todos los puntos extremos eficientes
  - Escoger las ponderaciones con algún criterio sistemático, haciendo uso de la programación lineal paramétrica.

EJEMPLO 0:

$$\text{Max } Z_1 = 2x_1 - x_2$$

$$\text{Max } Z_2 = -x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.:}\quad & x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

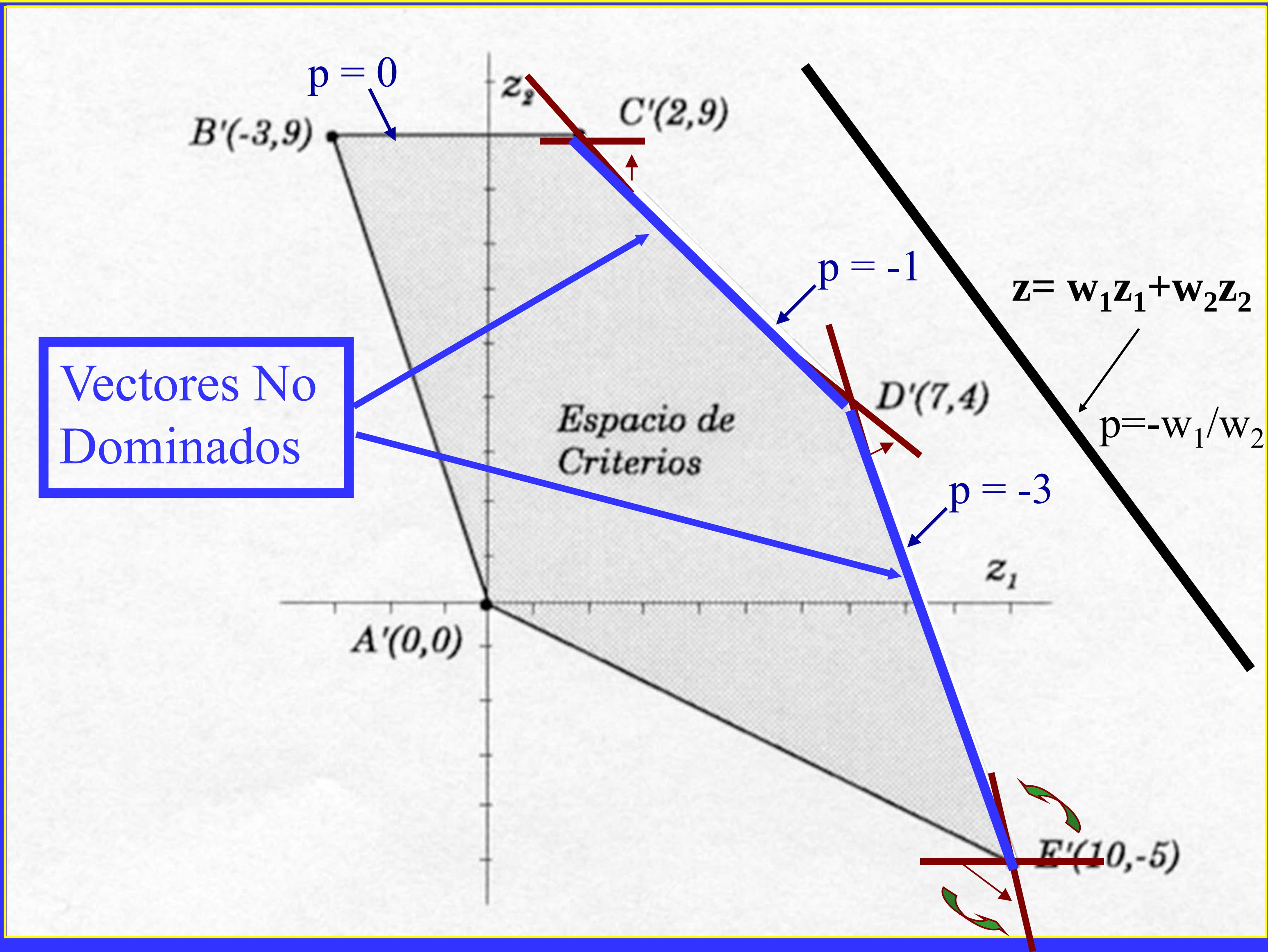
Si $Z(x_1,x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$

La pendiente de la recta es:

$$p = - c_1 / c_2$$

Pendiente	**Solución**
$-\infty < p < -3$	E'(10,-5)
$p = -3$	γ(D',E')
$-3 < p < -1$	D'(7, 4)
$p = -1$	γ(C',D')
$-1 < p < 0$	C'(2,9)

DECISIÓN MULTICRITERIO



MÉTODO DE LAS ε -RESTRICCIONES

- Modelo (Marglin, 1967)

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{[P(}\boldsymbol{\varepsilon}\textbf{)]} & \text{Max } z_j(x) & \\
& \text{s.a.} & z_k(x) \geq \varepsilon_k \quad k = 1,\ldots,p;\ k \neq j \\
& & Ax \leq b \\
& & x \geq 0
\end{array}
$$

- Si las restricciones asociadas a los objetivos son ACTIVAS (se cumplen con =), la solución de P(ε) es solución eficiente del problema multicriterio
- Si alguna de las restricciones asociadas a los objetivos no es activa, y existen óptimos alternativos ⇒ no todas las soluciones tienen porqué ser eficientes

RESULTADOS TEÓRICOS

Teorema 2.1: La solución del problema P[ε] es óptimo Pareto débil.

Teorema 2.2: La solución del problema P[ε] es óptimo Pareto si y sólo si es solución de P[ε] $\forall j=1,\ldots,q$ donde $\varepsilon_k = z_k(x^*)$, $k \neq j$.

Teorema 2.3: La solución única del problema P[ε], x^*, es óptimo Pareto si es la solución para algún j con $\varepsilon_k = z_k(x^*)$.$k=1,\ldots,q$, $k \neq j$.

- Pueden obtenerse *soluciones eficientes* que *no* sean *puntos extremos*
- No se garantiza la obtención de todas las soluciones eficientes
  - Escoger los niveles de las restricciones con algún criterio sistemático y utilizar programación lineal paramétrica
  - Los valores ideales y antiideales son una orientación para la selección de estos niveles de las restricciones
- Existe una relación entre las soluciones de los problema P[w] y P[ε].

MÉTODOS MIXTOS

- Es una mixtura entre el método de ponderaciones y el de restricciones
- Modelo

$$\text{Max} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j z_j(x)$$

$$\text{s.a.} \quad z_l(x) \geq \varepsilon_l \quad l = k+1,\ldots,q$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

- Restricciones fuertes: $Ax \leq b$; $x \geq 0$
- Restricciones débiles: $z_l(x) \geq \varepsilon_l$

[P] SOLUCIONES EFICIENTES [ε-restric.]

$$\begin{aligned}
&Max\ Z = \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2\\
&\qquad = \lambda_1(2x_1 + x_2) + \lambda_2(-x_1 + 3x_2)\\
&\qquad = (2\lambda_1 - \lambda_2)x_1 + (\lambda_1 + 3\lambda_2)x_2\\
&g_1(x):\quad x_1 + 2x_2 \le 11\\
&g_2(x):\quad -x_1 + 3x_2 \le 9\\
&g_3(x):\quad x_1 \le 5\\
&\qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

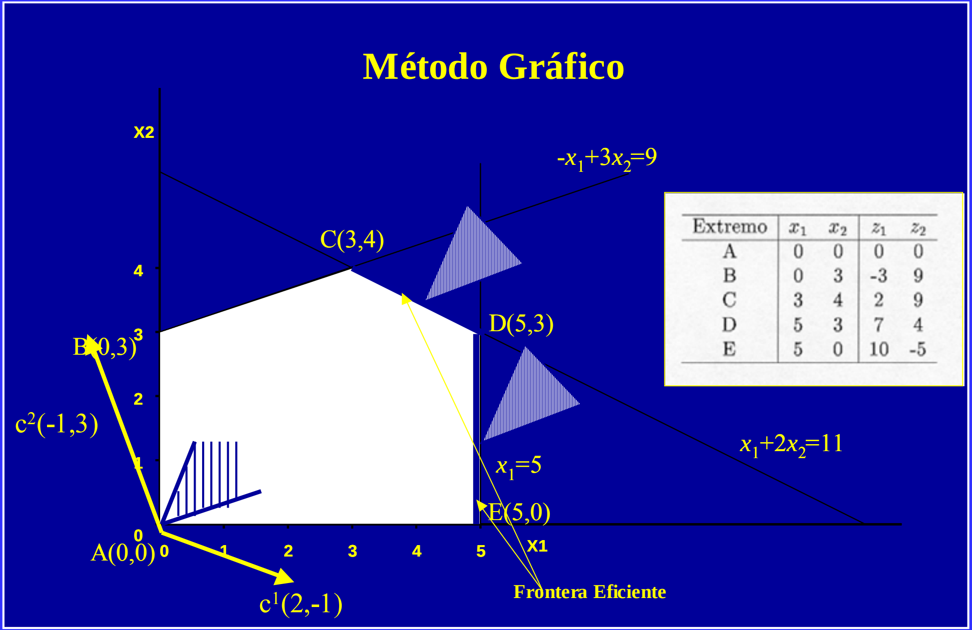
$$\begin{aligned}
&Max\quad Z_1\\
&\qquad Z_2 = -x_1 + 3x_2 \ge \varepsilon\\
&g_1(x):\quad x_1 + 2x_2 \le 11\\
&g_2(x):\quad -x_1 + 3x_2 \le 9\\
&g_3(x):\quad x_1 \le 5\\
&\qquad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\\
&\qquad \varepsilon = 1,2,\dots,9
\end{aligned}$$

	Ponderaciones		espacio soluciones		espacio criterios		
Pendiente	λ1	λ2	X1*	X2*	Z1*	Z2*	G(x)*
	1	0	5	0	10	-5	10
-2	2	1	5	3	7	4	18
-1.5	3	2	5	3	7	4	29
-1	1	1	3	4	2	9	11
-0.5	1	2	3	4	2	9	20

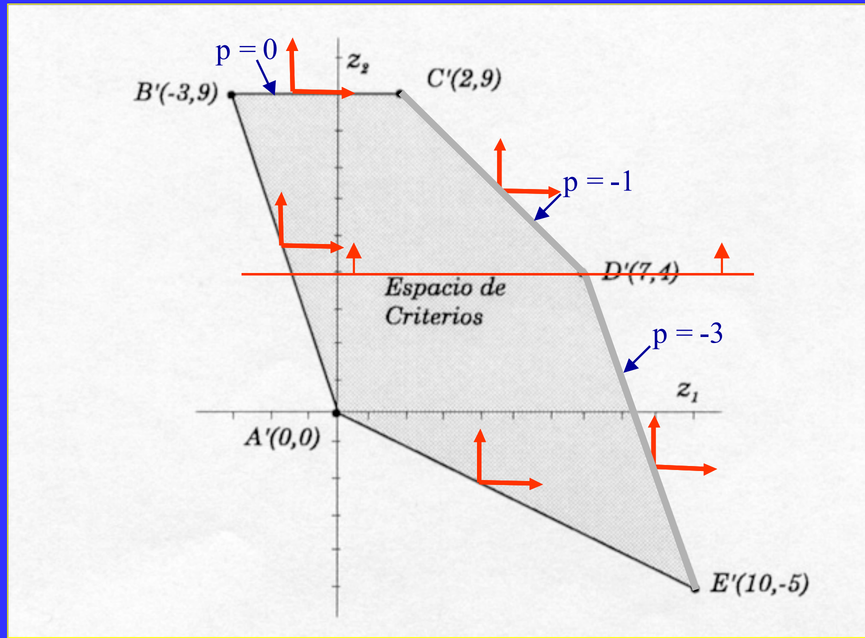
Z2=	X1	X2	Z1*	Z2*
1	5	2	8	1
2	5	2.33	7.67	2
3	5	2.67	7.33	3
4	5	3	7	4
5	4.6	3.2	6	5
6	4.2	3.4	5	6
7	3.8	3.6	4	7
8	3.4	3.8	3	8
9	3	4	2	9

ticr

SOLUCIONES EFICIENTES



Extremo	x_1	x_2	z_1	z_2
A	0	0	0	0
B	0	3	-3	9
C	3	4	2	9
D	5	3	7	4
E	5	0	10	-5



	Ponderaciones		espacio soluciones		espacio criterios		
Pendiente	λ1	λ2	X1*	X2*	Z1*	Z2*	G(x)*
	1	0	5	0	10	-5	10
-2	2	1	5	3	7	4	18
-1.5	3	2	5	3	7	4	29
-1	1	1	3	4	2	9	11
-0.5	1	2	3	4	2	9	20

ticr

Z2=	X1	X2	Z1*	Z2*
1	5	2	8	1
2	5	2.33	7.67	2
3	5	2.67	7.33	3
4	5	3	7	4
5	4.6	3.2	6	5
6	4.2	3.4	5	6
7	3.8	3.6	4	7
8	3.4	3.8	3	8
9	3	4	2	9

MODELOS DE SATISFACCIÓN Y COMPROMISO

1. Introducción
2. Búsqueda de Metas
   - Modelos de Satisfacción
   - Modelos de Compromiso
3. Programación por Compromiso
   - Planteamiento
   - Cálculo
   - Propiedades
4. Otros métodos basados en la minimización de distancias
   - TOPSIS
   - VIKOR
5. Programación por Metas
   - Planteamiento
   - Cálculo
   - Propiedades

APROXIMACIONES

- Consideración simultánea de los criterios (conjunto de soluciones eficientes).
- Utilizar otras aproximaciones (Búsqueda de Metas):
  - Modelos de Satisfacción
  - Modelos de Compromiso
- Utilización de una función valor/utilidad que permite transformar el problema multicriterio en uno unicriterio.

- **Modelos de Satisfacción**: Sea el PPMC

$$Opt\ z(x) = (z_1(x),\dots,z_q(x))$$
$$x \in X = \{x \in R^n, g(x) \le 0\}$$
$$g = (g_1,\dots,g_m)$$

- Considerando una serie de **r metas**, j=1,…,r, que vienen determinadas, respectivamente, por J_j **condiciones ($Gk_j(z) \geq 0$, k=1,.., J)**. El conjunto de soluciones satisfactorias para cada una de estas metas, S_j, viene dado por:

$$S_j = \{z \in Z \mid G_{k_j}(z) \ge 0,\ j = 1,\dots,r; k = 1,\dots,J\}$$

- **Teorema 1**: Sea $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_r$

$$S \bigcap Z \neq \phi \Leftrightarrow \exists j \ni S_j \bigcap Z \neq \phi$$

- **Teorema 2**: $S_j \cap Z \neq \phi \Leftrightarrow v_j = 0$ siendo v_j la solución del modelo

$$v_j = \min \sum_{k=1}^{J} d_k$$
$$G_{k_j}(z(x)) + d_k \geq 0, k = 1, \ldots, J$$
$$x \in X, d_k \geq 0$$

- **Ejemplo 5.1**: j=1,2,3 (r=3), $J_1=1$, $J_2=1$, $J_3=1$

$$S_1=\{z(x) \mid z_1(x) \geq 9\}$$

$$S_2=\{z(x) \mid z_2(x) \geq 9\}$$

$$S_3=\{z(x) \mid z_1(x) + z_2(x) \geq 15\}$$

- **Ejemplo 5.2**: j=1 (r=1), $J_1=2$

$$S_1=\{z(x) \mid z_1(x)\geq 145,\ z_2(x)\geq 50\}$$

ESP. SOL.					ESP. CRIT.
PUNTOS (X)	x_1	x_2	z_1	z_2	PUNTOS (Z)
X^1	14	0	140	14	Z^1
X^2	6	8	60	46	Z^2
X^3	5	8	50	45	Z^3
X^4	5	0	50	5	Z^4

$$Max\ z_1(x) = 10x_1$$

$$Max\ z_2(x) = x_1 + 5x_2$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 \leq 14$$

$$g_2(x) = x_1 \geq 5$$

$$g_3(x) = x_2 \leq 8$$

$$z_1(x) = 10x_1 \geq 145$$

$$z_2(x) = x_1 + 5x_2 \geq 50$$

CASO 1: DECISIÓN MULTICRITERIO CONTINUA

Una empresa familiar dispone de una maquina empaquetadora que, eliminando el periodo de mantenimiento, está operativa un máximo de 14 hs al día. La máquina es utilizada para embalajes por una empresa de transporte urgente de paquetería que paga al empresario un total de 10 unidades monetarias (um) por hora utilizada. Así mismo, la maquina es utilizada, sin coste alguno, por una comunidad religiosa dedicada a la atención de los marginados. Al empresario, de fuerte convicciones religiosas y espíritu solidario, cada hora de la máquina dedicada a preparar paquetes para la empresa de transporte le produce una “satisfacción” o “felicidad” de 1 unidad, mientras cada hora dedicada a la ayuda a los marginados le produce una satisfacción de 5 unidades. Para garantizar la subsistencia económica de la empresa se requiere alquilar la máquina al menos 5 horas a la empresa de transporte. Además no quiere dejar la máquina para “actividades solidarias” más de 8 hs. Si el individuo quiere maximizar simultáneamente su beneficio y su felicidad, se pide:

EJEMPLO 5.2

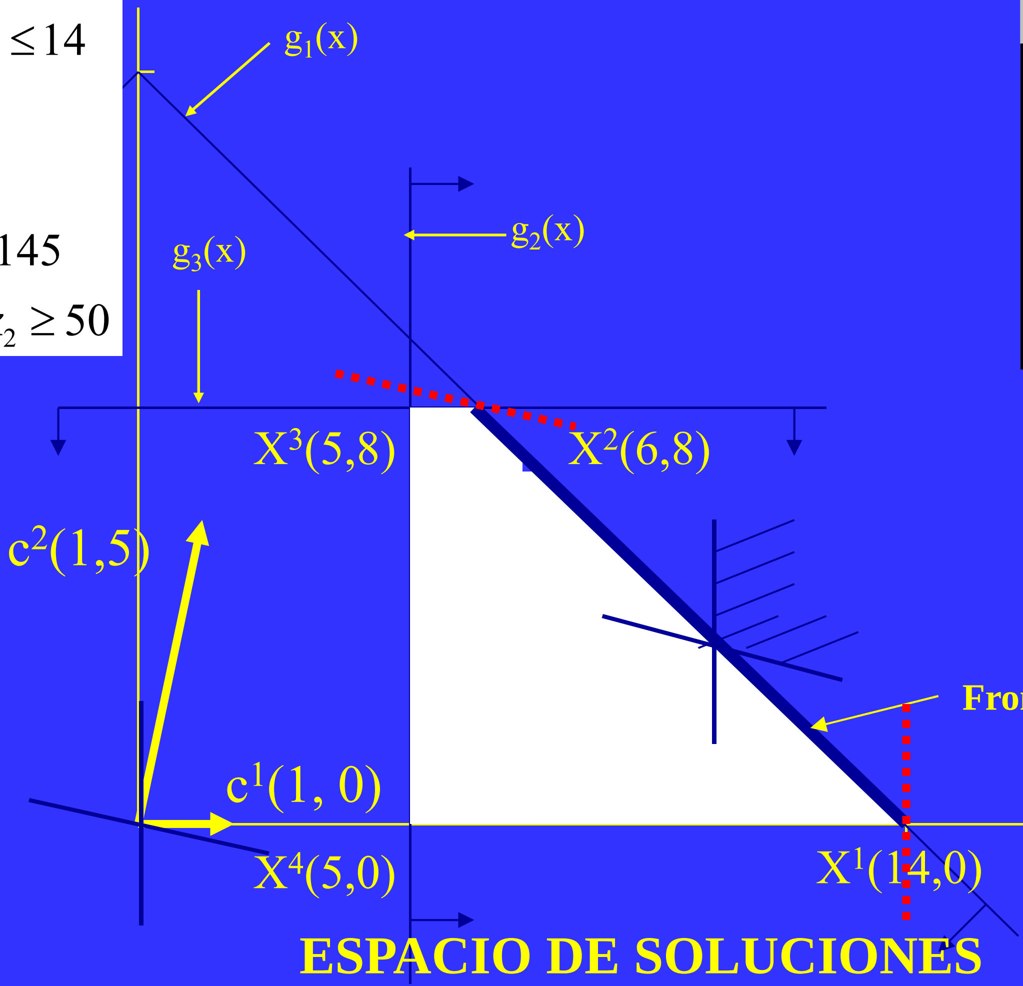
CASO 1: DECISIÓN MULTICRITERIO CONTINUA

A) Plantear gráficamente el problema, tanto en el espacio de soluciones como en el espacio de criterios.
B) Encontrar un conjunto de soluciones eficiente, utilizando el método de las ponderaciones.
C) Encontrar un conjunto de soluciones eficiente, utilizando el método de las ε-restricciones.
D) Encontrar la mejor solución eficiente utilizando la programación por compromiso en las normas p = 1, 2 e infinito.
E) ¿Puede el empresario alcanzar un beneficio de 145 um. y una satisfacción de 50? En caso contrario qué le sugerirías ¿Puede alcanzar un beneficio de 135 um. y una satisfacción de 16? ¿Cómo lo debería hacer?
F) Resolver los puntos D) y E) tanto con Solver como con Lingo.

EJEMPLO 5.2

$$Max\ z_1(x) = 10x_1$$
$$Max\ z_2(x) = x_1 + 5x_2$$
$$g_1(x) = x_1 + x_2 \leq 14$$
$$g_2(x) = x_1 \geq 5$$
$$g_3(x) = x_2 \leq 8$$
$$z_1(x) = 10x_1 \geq 145$$
$$z_2(x) = x_1 + 5x_2 \geq 50$$

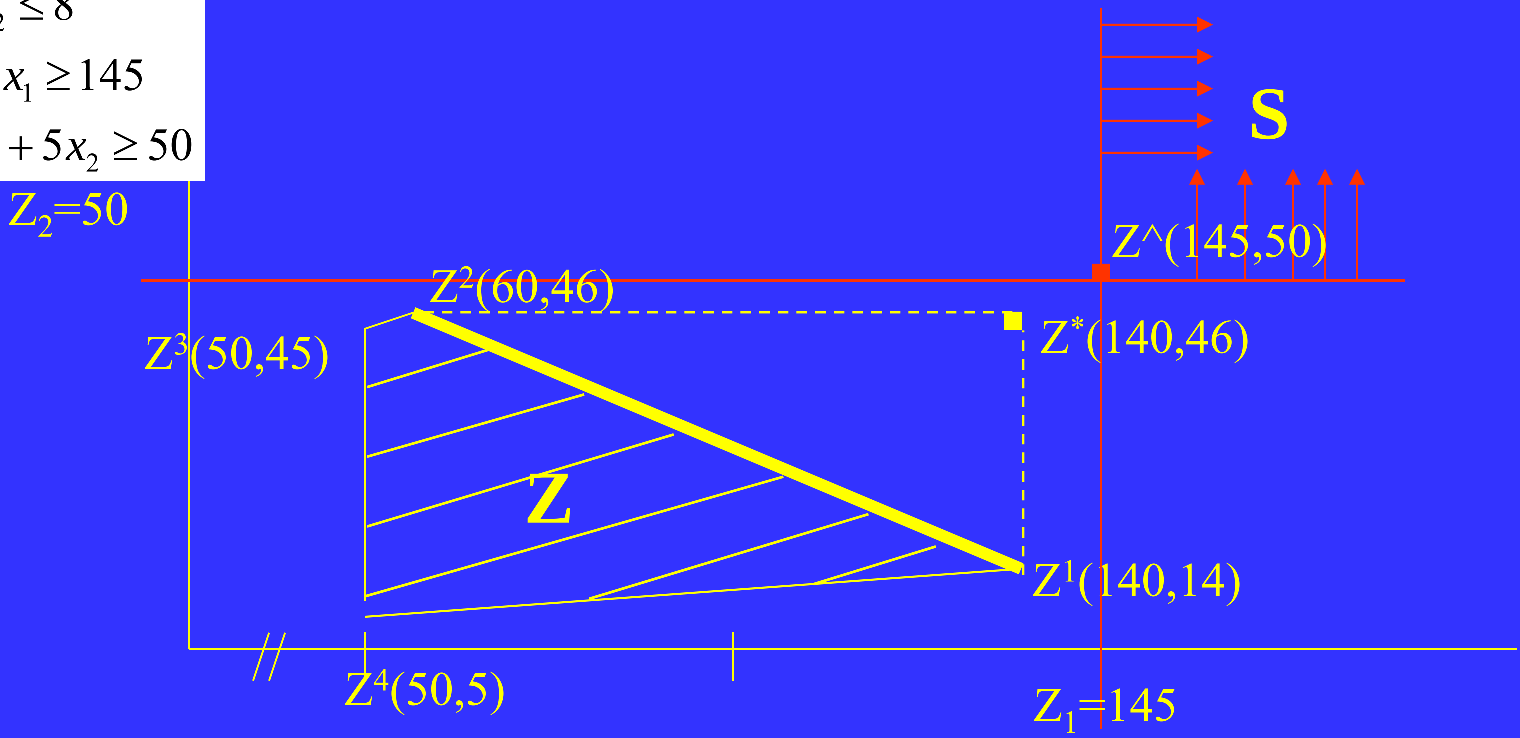
	X_1	X_2	Z_1	Z_2	
X^1	14	0	**140**	14	Z^1
X^2	6	8	60	**46**	Z^2
X^3	5	8	50	45	Z^3
X^4	5	0	50	5	Z^4



ESPACIO DE SOLUCIONES

$$Max\ z_1(x) = 10x_1$$
$$Max\ z_2(x) = x_1 + 5x_2$$
$$g_1(x) = x_1 + x_2 \le 14$$
$$g_2(x) = x_1 \ge 5$$
$$g_3(x) = x_2 \le 8$$
$$z_1(x) = 10x_1 \ge 145$$
$$z_2(x) = x_1 + 5x_2 \ge 50$$

EJEMPLO 5.2



ESPACIO DE CRITERIOS

PROGRAMACIÓN POR COMPROMISO

- Sea $z^*=(z_1^*, z_2^*,\ldots, z_q^*)$ el punto ideal, con $z_j^* = \max_{x\in X} z_j(x)$, la distancia o pesar entre cualquier $z\in Z$ y el punto ideal z^* viene dada por:

$$d(z,z^*,p) = r(z,z^*) = \left[\sum_{j=1}^{q}\left(z_j^* - z_j(x)\right)^p\right]^{1/p}, \quad 1\leq p<\infty$$

$$d(z,z^*,\infty) = \max_j \left|z_j^* - z_j(x)\right|, \quad j=1,\ldots,q$$

- En la expresión anterior los criterios no han sido normalizados ni ponderados. Para ello se introducen unos pesos ω_j que suelen venir dados como $\omega_j = \lambda_j \delta_j$. Las expresiones anteriores quedan:

$$d(z,z^*,w,p) = r(z,z^*,w) = \left[\sum_{j=1}^{q} w_j^p\left(z_j^* - z_j(x)\right)^p\right]^{1/p}, \quad 1\leq p<\infty$$

$$d(z,z^*,w,\infty) = \max_j w_j\left|z_j^* - z_j(x)\right|, \quad j=1,\ldots,q$$

PROGRAMACIÓN POR COMPROMISO

- En la expresión general de la PPC los coeficientes λ_j y δ_j representan, respectivamente, la parte subjetiva y objetiva de la importancia de las diferencias. λ_j es la importancia relativa dada a las desviaciones (cada criterio) y δ_j el factor de normalización: $\delta_j = 1/ z_j^*$; $\delta_j = 1/ z_j^* - z_j^0$; …
- La solución del problema (PPC) se obtiene como el punto z^p (espacio de criterios) o x^p (espacio de soluciones) que minimizan, respectivamente:

$$\underset{z \in Z}{Min} \quad r(z, z^*, p) = r(z^p, z^*, p)$$

$$\underset{x \in X}{Min} \quad r(z(x), z^*, p) = r(z(x^p), z^*, p)$$

RESULTADOS TEÓRICOS

Teorema 5.1: La solución del problema L_p ($1 \leq p < \infty$) es óptimo Pareto

$$\underset{z \in Z}{Min} \quad r(z, z^*, p) = r(z^p, z^*, p)$$

$$\underset{x \in X}{Min} \quad r(z(x), z^*, p) = r(z(x^p), z^*, p)$$

$$d(z, z^*, p) = r(z, z^*) = \left[\sum_{j=1}^{q} \left(z_j^* - z_j(x) \right)^p \right]^{1/p}, \; 1 \leq p < \infty$$

$$d(z, z^*, \infty) = \max{}_j \left| z_j^* - z_j(x) \right|, \quad j = 1, \ldots, q$$

Corolario 5.1: Si Z es convexo, la solución del problema L_p ($1 < p < \infty$) es única

Teorema 5.2: La solución del problema de Tchebycheff es débilmente Pareto óptimo.

Corolario 5.2: Si la solución del problema de Tchebycheff es única, entonces es Pareto óptimo.

➢ Propiedades:

P1: Factibilidad. Las soluciones de compromiso (x^p y z^p) son factibles.

P2: Mínimo pesar del grupo

P3: No dictatorial

P4: Pareto Optimalidad

P5: Unicidad

P6: Simetría

P7: Independencia de alternativas irrelevantes.

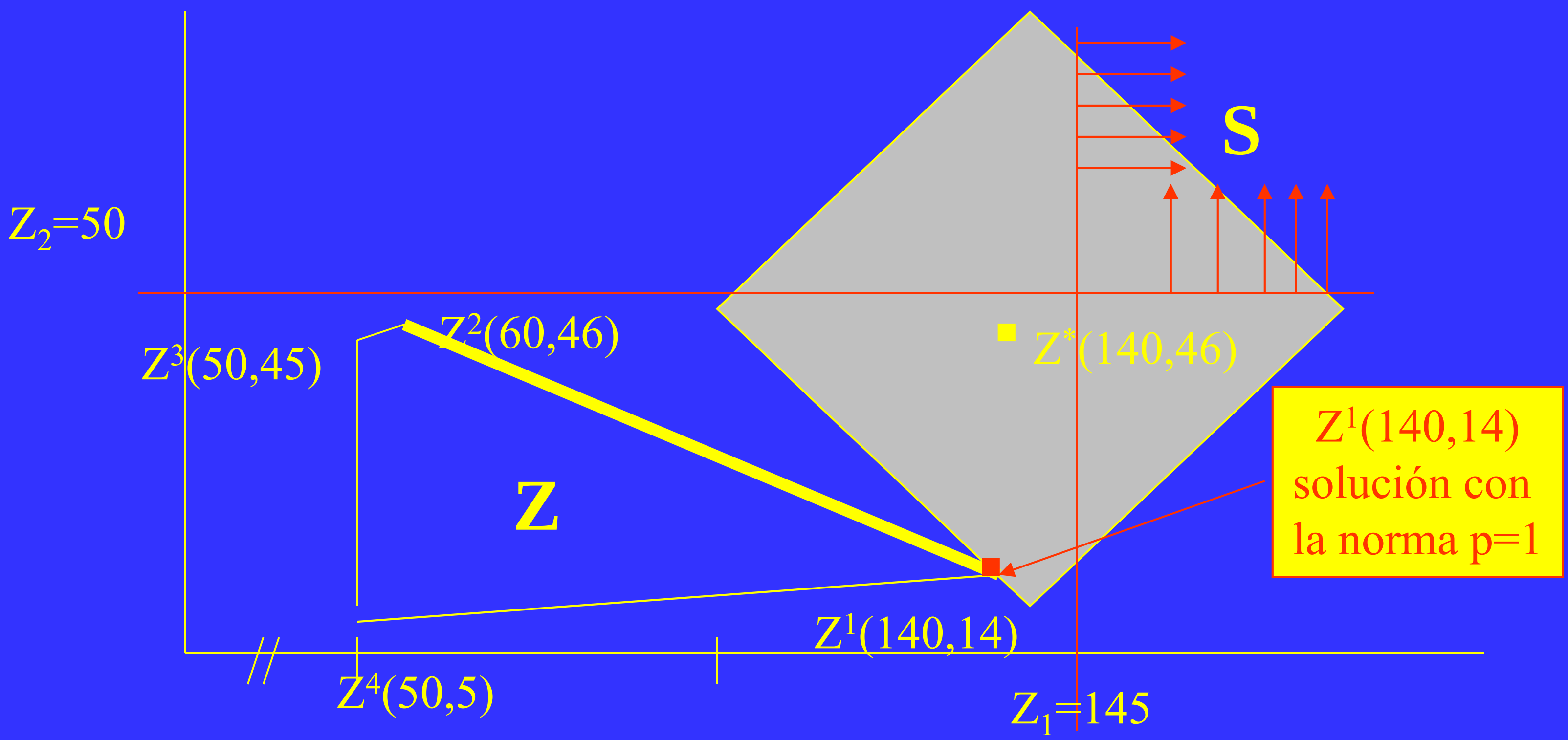
P8: Continuidad

P9: Monotonía en general

P10: Acotación

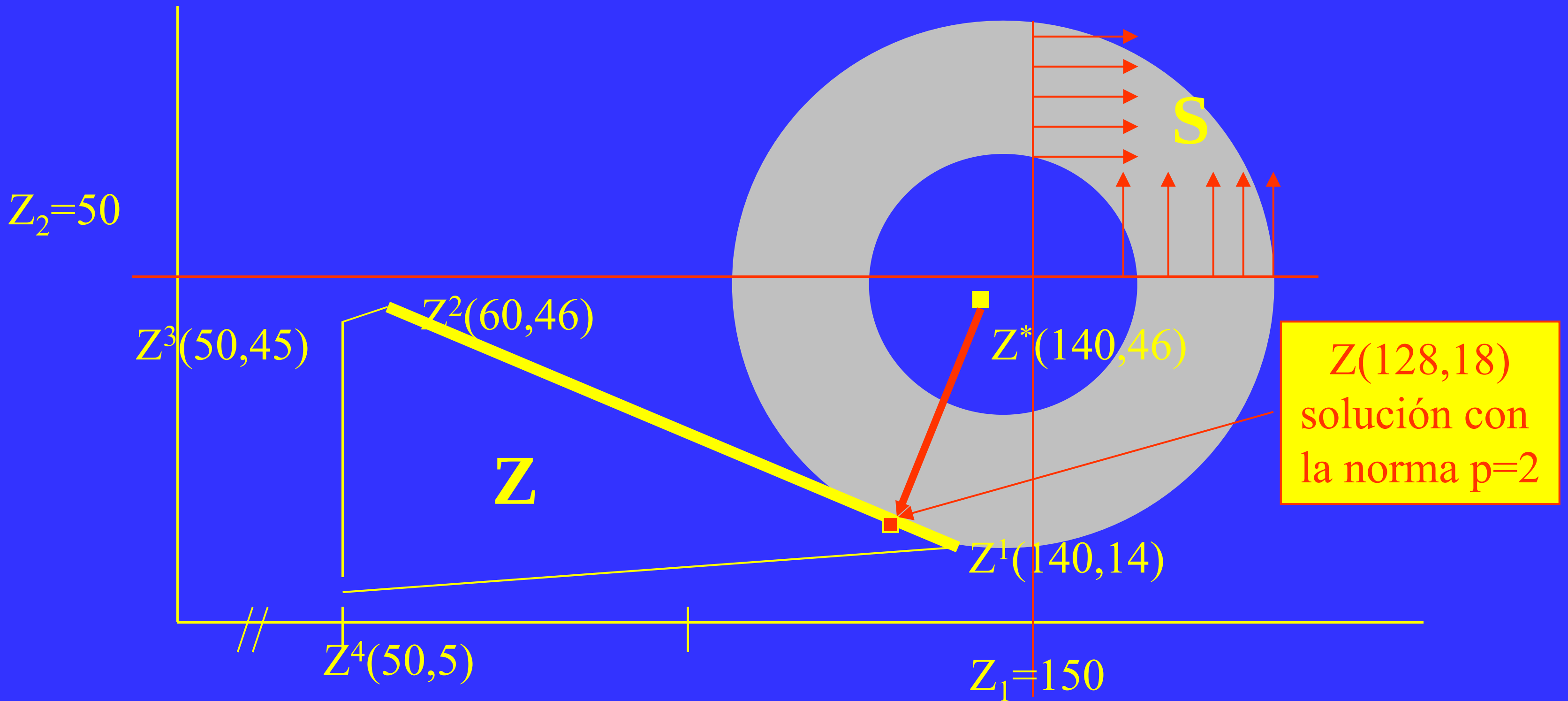
P11: Monotonía en dos criterios

EJEMPLO 5.2



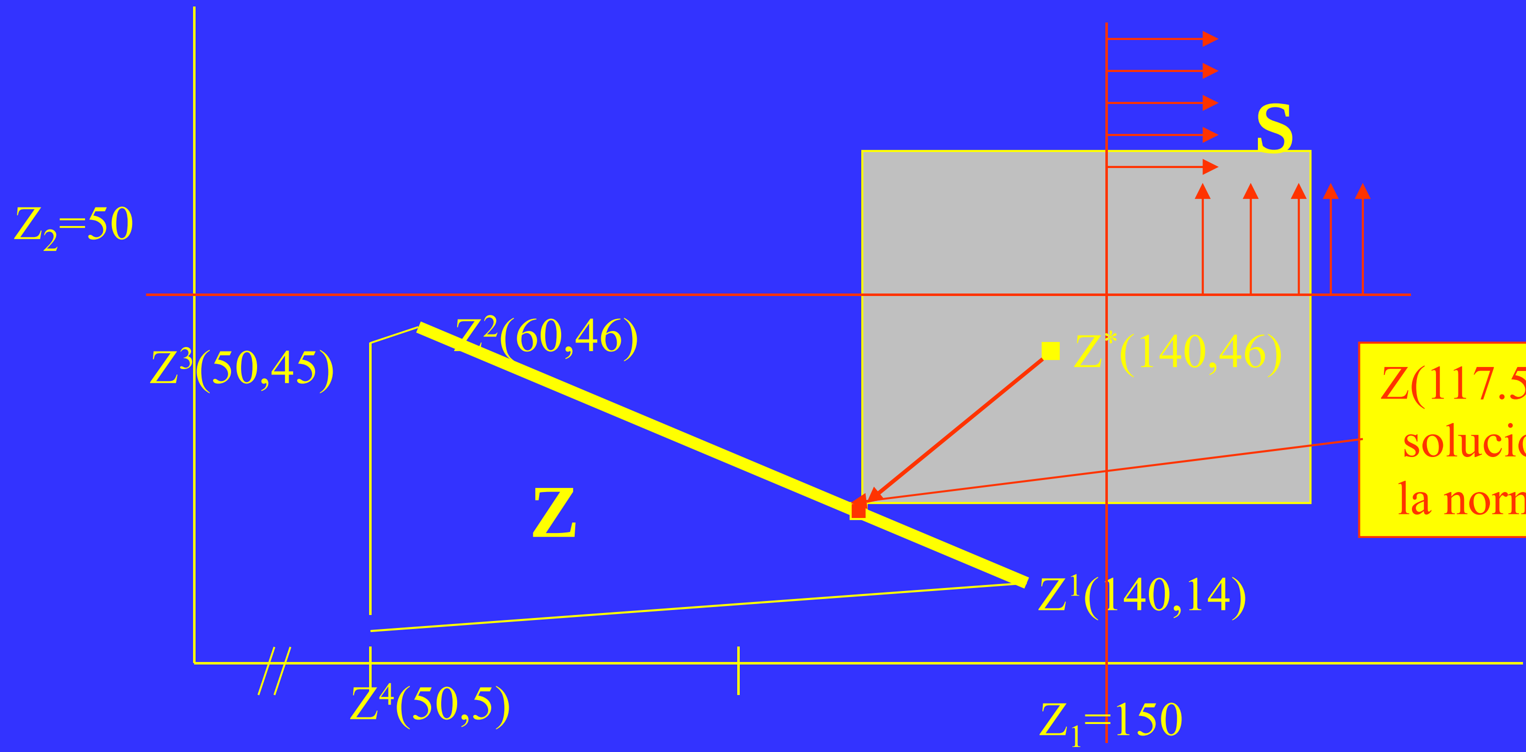
ESPACIO DE CRITERIOS

EJEMPLO 5.2



ESPACIO DE CRITERIOS

EJEMPLO 5.2



ESPACIO DE CRITERIOS

EJEMPLO 5.2 (CASO 1): Solver

Z1*-Z1(X)	Z2*-Z(X)	(Z1*-Z1(X))^2	(Z2*-Z(X))^2
11	27,5862069	121,76	760,998811

$$Min_{x\in X} \quad L_1 = \left(z_1^* - z_1(x)\right) + \left(z_2^* - z_2(x)\right) =$$
$$= \left(140 - 10x_1\right) + \left(46 - x_1 - 5x_2\right)$$

$$Min_{x\in X} \quad L_2 = \left[\left(z_1^* - z_1(x)\right)^2 + \left(z_2^* - z_2(x)\right)^2\right]^{1/2} =$$
$$= \left[\left(140 - 10x_1\right)^2 + \left(46 - x_1 - 5x_2\right)^2\right]^{1/2}$$

$$Min_{x\in X} \; Max_{j=1,2} \left(z_j^* - z_j(x)\right)$$
$$g_1(x): \quad x_1 + x_2 \quad \le 14$$
$$g_2(x): \quad x_1 \quad \ge 5$$
$$g_1(x): \quad x_2 \quad \le 8$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

PROGRAMACIÓN POR COMPROMISO	
Z1*	Z2*
140	46

Lp	*v*	X1	X2	Zp
p=1	38,62	14,00	0,00	32
p=2	882,76	12,8965519	1,10344911	29,71
p=infinito	22,86	11,71	2,29	22,86

Δ	22,8571429		
Z1*-Z1(X)	11	<	22,8571429
Z2*-Z(X)	27,5862069	<	22,8571429

$$Min_{x\in X} \; \Delta = Max_{j=1,2} \left(z_j^* - z_j(x)\right)$$
$$g_1(x): \quad x_1 + x_2 \quad \le 14$$
$$g_2(x): \quad x_1 \quad \ge 5$$
$$g_1(x): \quad x_2 \quad \le 8$$
$$\left(z_j^* - z_j(x)\right) \le \Delta$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

TOPSIS

- **TOPSIS** (**T**echnique for rder reference by imilarity to deal olution) considers the distances to the ideal and anti-ideal solutions using the **Euclidean norm** (Hwang and Yoon, 1981).

TRADITIONAL TOPSIS APPROACH

- A_i (i=1,…,m), C_j (j=1,…,n) and w_j ($w_j > 0$, $\Sigma_j w_j = 1$)

	w1	w2	…	wj		wn
	C1	**C2**	**…**	**Cj**	**…**	**Cn**
A1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}
…	…	…	…	…	…	…
Ai	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{in}
…	…	…	…	…	…	…
Am	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mj}	…	x_{mn}

- **Step 1**. Calculate the

$$n_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^{2}}}, \quad i = 1, \dots, m, \ \ j = 1, \dots, n$$

- **Step 2**. Calculate the **weighted normalized** decision matrix

$$v_{ij} = w_j \cdot n_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \ \ j = 1, \dots, n$$

- **Step 3** Determine the "**positive ideal**" and "**negative ideal**" alternatives

$$A^+ = \{v_1^+, \ldots, v_n^+\},\ \text{where } v_i^+ = \max_i v_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n,$$

$$A^- = \{v_1^-, \ldots, v_n^-\},\ \text{where } v_i^- = \min_i v_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n.$$

- **Step 4**. Calculate the **distances**

$$d_i^+ = \left(\sum_{j=1}^{n} \left|v_j^+ - v_{ij}\right|^2\right)^{1/2},\ i = 1, \ldots, m$$

$$d_i^- = \left(\sum_{j=1}^{n} \left|v_j^- - v_{ij}\right|^2\right)^{1/2},\ i = 1, \ldots, m$$

- **Step 5**. Calculate the **relative proximity** to the ideal solution:

$$R_i = \frac{d_i^+}{d_i^+ + d_i^-},\ i = 1, \ldots, m \qquad (0 \le R_i \le 1)$$

- **Step 6**. $(A_i \succ A_j \Leftrightarrow R_i < R_j)$

PROGRAMACIÓN POR METAS

- La **Programación Multiobjetivo** está orientada a la obtención de soluciones paretianas eficientes. Este enfoque tiene un gran problema, es casi imposible, no ya una representación exacta del conjunto eficiente, sino una buena aproximación.
- La **Programación por Compromiso** (PPC) introduce las preferencias del decisor de una manera realista e ingeniosa.
- La **Programación por Metas** (PPM) se aleja de la idea de optimización, centrándose en la de satisfacción (Simon, 1955).
- La PPM (Charnes y Cooper y Ferguson, 1955) constituye la dimensión operativa de la filosofía satisfacente. No fue hasta mediados de los 70 cuando se desarrollaron y popularizan (Ijiri, 1965; Lee, 1972; Ignizio, 1976).

PROGRAMACIÓN POR METAS

- La **Programación por Metas** (PPM) introduce un conjunto de nuevas restricciones (débiles) que reflejan las metas perseguidas.

$$z_j(x) + d_j^- - d_j^+ = \hat{z}_j, \quad j = 1, \dots, r$$

- El modelo que resuelve la PPM es:

$$Min_x \quad \sum_{j=1}^{r} w_j (d_j^- + d_j^+)$$

$$z_j(x) + d_j^- - d_j^+ = \hat{z}_j, \quad j = 1, \dots, r$$

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x \geq 0, d_j^- \geq 0, d_j^+ \geq 0.$$

- Es es un caso particular de la PPC con p=1, en el que se han incluidos como restricciones débiles las metas.

METAS PONDERADAS

- La minimización de las desviaciones expresadas **directamente carece de sentido** ya que las desviaciones consideradas están evaluadas en diferentes unidades (su suma no tiene significado)
- Para obviar este inconveniente se puede **normalizar** cada desviación con el valor del término independiente.
- Para poder ser tomada como un subrogado de las preferencias, el decisor debe incorporar sus preferencias sobre las desviaciones (distinta importancia) ponderándolas.

$$Min \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (d_j^- + d_j^+) / \hat{z}_j$$

METAS LEXICOGRÁFICAS

- En este caso los logros son inconmensurablemente preferidos P1>>P2 >>…>>Pr. En el caso de minimización lexicográfica se traduce en el siguiente vector

$$\textbf{Lex min a} = [h_1\,(d^-,d^+), \ldots, h_r\,(d^-,d^+)]$$

o de manera más abreviada con $a_j = h_j\,(d^-,d^+)$.

$$\textbf{Lex min a} = [a_1, \ldots, a_r]$$

- Puede ocurrir que dos objetivos estén medidos en las mismas unidades aunque las aspiraciones sean diferentes por lo que deberían normalizarse. Al igual que sucede con los modelos de metas ponderados, en los modelos jerarquizados, los análisis pueden enriquecerse sometiendo a un análisis de sensibilidad.

RESULTADOS TEÓRICOS

Teorema 5.3: La solución del problema PPM ponderado o lexicográfico es óptimo Pareto si se cumple que los niveles de aspiración son un punto de referencia óptimo Pareto, o que todas las variables d_i^+, para funciones que deben minimizarse, o d_i^-, para funciones que deben maximizarse, tienen valores positivos en el óptimo.

Miettinen, K.(1999): *Nonlinear multiobjective optimization*. KAP.

- Resolución:
  - **Método gráfico** (Lee 1972, Ignizio 1976)
  - **Método secuencial** (Dauer y Krueger 1977; Ignizio, 1978)
  - **Multifase** (Lee 1972, Ignizio, 1976).
- Ejemplo **Método Gráfico**:
- El **Método Secuencial** exige resolver una secuencia de programas lineales cuyo número máximo coincide con el número de niveles de prioridad que tenga el modelo. El número de problemas lineales se reducirá, cuando al resolver uno de ellos no se detecte la existencia de óptimos alternativos, en tal caso, el proceso de cálculo se detiene.
- Si se desea realizar un análisis de sensibilidad el método secuencial no es el más apropiado utilizándose **el método del simplex modificado (multifase**, Lee 1972, Ignizio, 1976).

- Para resolver los modelos de metas lexicográficas por el **método secuencial** se resuelven los siguientes modelos:

Modelo 1 :

$$Min_x \quad a_1 = h_1(d_1^-, d_1^+)$$
$$\boxed{z_1(x) + d_1^- - d_1^+ = \hat{z}_1,}$$
$$\boxed{g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m}$$
$$x \ge 0, d_1^- \ge 0, d_1^+ \ge 0.$$

Modelo 2 :

$$Min_x \quad a_2 = h_2(d_2^-, d_2^+)$$
$$\boxed{z_2(x) + d_2^- - d_2^+ = \hat{z}_2,}$$
$$\boxed{z_1(x) + (d_1^-)^* - (d_1^+)^* = \hat{z}_1}$$
$$\boxed{g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m}$$
$$x \ge 0, d_2^- \ge 0, d_2^+ \ge 0.$$

Modelo k :

$$Min_x \quad a_k = h_k(d_k^-, d_k^+)$$
$$\boxed{z_k(x) + d_k^- - d_k^+ = \hat{z}_k,}$$
$$\boxed{z_j(x) + (d_j^-)^* - (d_j^+)^* = \hat{z}_j}, \quad j = 1, \ldots, k-1$$
$$\boxed{g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m}$$
$$x \ge 0, d_k^- \ge 0, d_k^+ \ge 0.$$

k=1,…,r

EJEMPLO 5.3: PLANIFICACIÓN DE LA PRODUCCIÓN (PPM)

Una empresa fabrica dos tipos de piezas A y B. Cada una de ellas requiere para su fabricación las cantidades de materia prima M1 y M2 que se indican en la siguiente tabla:

Materia Prima\ Piezas	A	B	Disponibilidad
M1	2	1	200
M2	4	3	450
Beneficio	5	3	

La empresa desea saber cuál es el número de piezas que debe fabricar para cada tipo si se fijan las siguientes metas con prioridades jerarquizadas (P1>>P2>>P3):

P1: Obtener un beneficio no inferior a 450 u.m.

P2: Fabricar al menos 120 piezas

P3: Fabricar el mayor número de piezas posible de B

Calcular:

1. La solución del problema anterior mediante el Método Gráfico
2. La solución mediante el Método Secuencial (Solver)
3. La solución mediante el Método Multifase (QSB)

EJEMPLO 5.3

Modelización:

- Sean x_1 y x_2 el número de unidades de A y B fabricadas (v's decisión)
- Las restricciones fuertes del modelo son:

  [g1] $2x_1 + 1x_2 \leq 200$

  [g2] $4x_1 + 3x_2 \leq 450$

  No negatividad son $x_j \geq 0$

- Las restricciones débiles (metas) son:

  [P1] (beneficio ≥ 450) $5x_1 + 3x_2 + d1- \geq 450$

  [P2] (piezas fab. ≥ 120) $x_1 + x_2 + d2- \geq 120$

  [P3] (maximizar x2, M>>0) $x_2 + d3- = M=150$

- La Función Objetivo es:

  Lex Min a = [a1, a2, a3] = [d1-, d2-, d3-]

EJEMPLO 5.3

➢ Resolución Ejemplo 3

- **Método Gráfico**
- **Método Secuencial**
- **Método Multifase**

➢ Método Secuencial

- **Paso 1: a_1*=o** **Paso 2: a_2*=o** **Paso 3: a_3*=o**

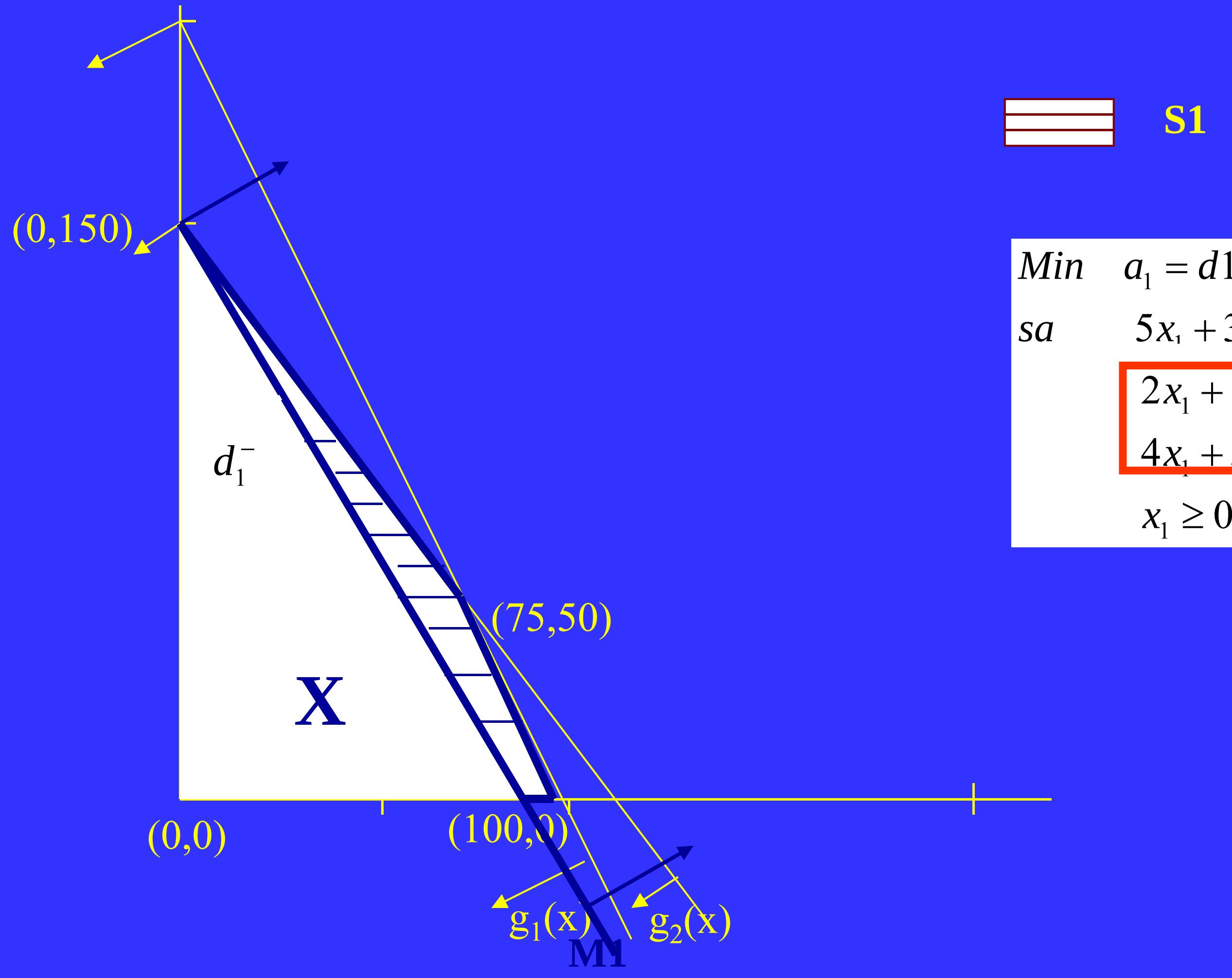
$$
\begin{array}{ll}
Min & a_1 = d1- \\
sa & 5x_1 + 3x_2 + d1- \geq 450 \\
 & 2x_1 + x_2 + \quad \leq 200 \\
 & 4x_1 + 3x_2 + \quad \leq 450 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
Min & a_2 = d2- & \\
sa & x_1 + x_2 + d2- \geq 120 & \\
 & 5x_1 + 3x_2 \quad \geq 450 & (P1) \\
 & 2x_1 + x_2 \quad \leq 200 & \\
 & 4x_1 + 3x_2 \quad \leq 450 & \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
Min & a_3 = d3- & \\
sa & x_2 + d3- \leq 150 & \\
 & x_1 + x_2 \quad \geq 120 & (P2) \\
 & 5x_1 + 3x_2 \quad \geq 450 & (P1) \\
 & 2x_1 + x_2 \quad \leq 200 & \\
 & 4x_1 + 3x_2 \quad \leq 450 & \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

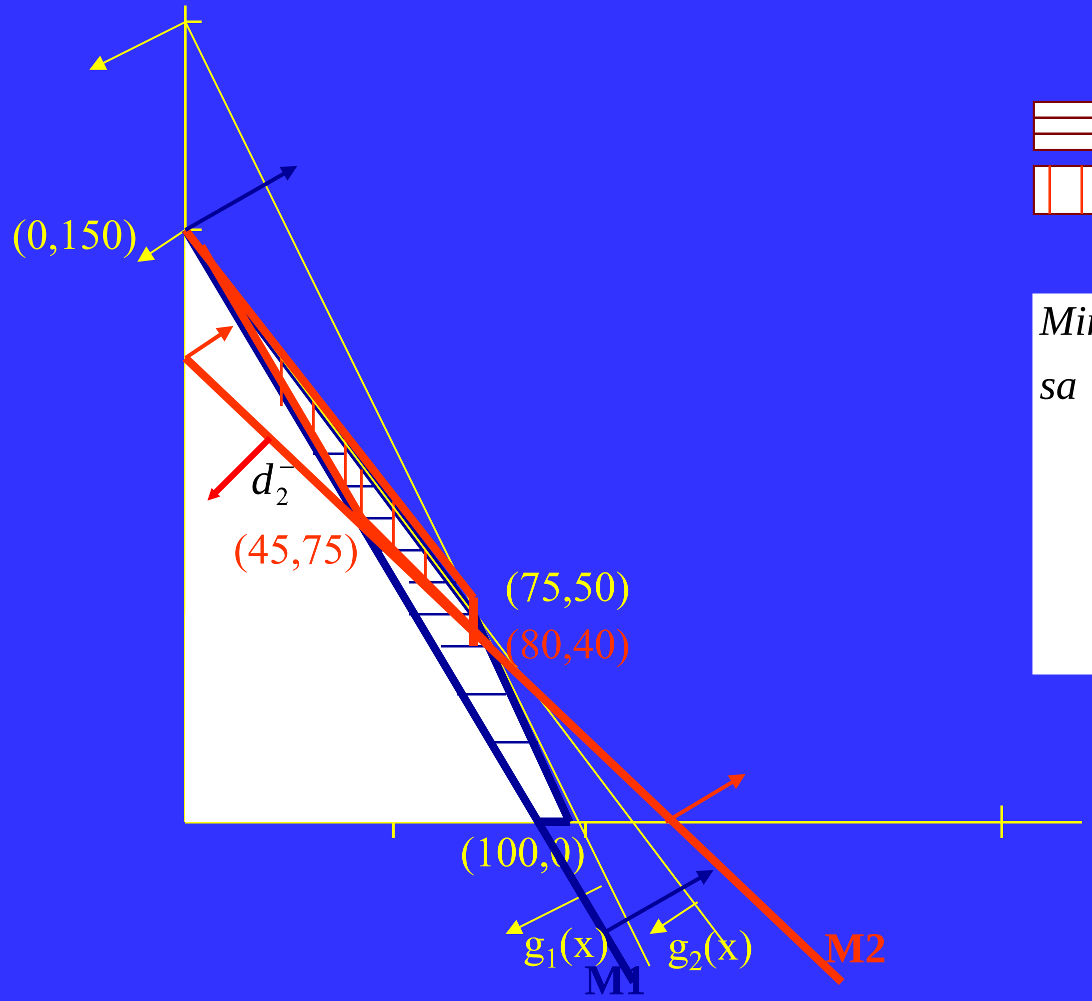
- **Solución: x_1=0 y x_2=150 con a*=[0,0,0]**

EJEMPLO 5.3



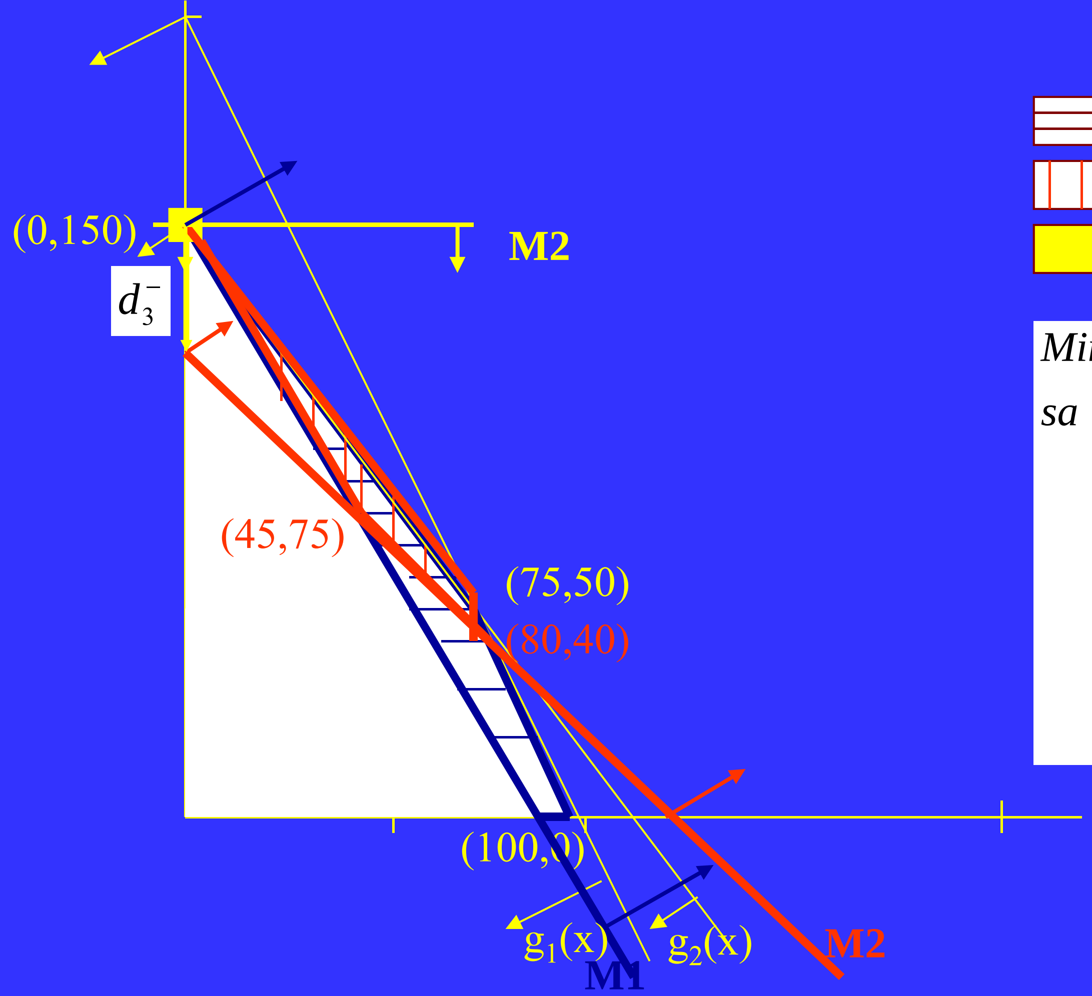
$$
\begin{array}{ll}
Min & a_1 = d1- \\
sa & 5x_1 + 3x_2 + d1- \geq 450 \\
 & 2x_1 + x_2 + \quad \leq 200 \\
 & 4x_1 + 3x_2 + \quad \leq 450 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

EJEMPLO 5.3



$$
\begin{array}{lll}
Min & a_2 = d2- & \\
sa & x_1 + x_2 + d2- \geq 120 & \\
 & \boxed{5x_1 + 3x_2 \qquad \geq 450} & (P1) \\
 & 2x_1 + x_2 \qquad \leq 200 & \\
 & 4x_1 + 3x_2 \qquad \leq 450 & \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

EJEMPLO 5.3



$$
\begin{array}{lll}
Min & a_3 = d3- & \\
sa & x_2 + d3- \le 150 & \\
 & \boxed{\begin{array}{ll} x_1 + x_2 & \ge 120 \\ 5x_1 + 3x_2 & \ge 450 \end{array}} & \begin{array}{l}(P2)\\(P1)\end{array} \\
 & \boxed{\begin{array}{ll} 2x_1 + x_2 & \le 200 \\ 4x_1 + 3x_2 & \le 450 \end{array}} & \\
 & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 &
\end{array}
$$

X*=(0,150)

EJEMPLO 5.4: TRANSPORTE MULTICRTERIO

Sea el problema de transporte correspondientes a la primera tabla (cij). Se quiere determinar su política de transporte de forma que simultáneamente reduzca el coste total, los desperfectos y la emisión de gases, siendo los desperfectos (d_{ij}) y los gases emitidos (e_{ij}) por unidad los dados en las siguientes tablas:

c_{ij}	D1	D2	D3	Oferta
O1	20	18	25	24
O2	12	11	33	6
O3	17	17	44	11
Dem.	15	10	10	

d_{ij}	D1	D2	D3
O1	6	6	10
O2	4	3	14
O3	5	8	16

e_{ij}	D1	D2	D3
O1	2	6	4
O2	8	2	5
O3	6	10	9

Determinar la política de transporte óptima mediante PPC según las normas p=1, 2,∞, sabiendo que los desperfectos por unidad que permanece en el almacén son 2.

EJEMPLO 5.4

- Resolución Ejemplo 4

Tabla de óptimos individualizados			
	Z1	Z2	Z3
S1	**651**	237	190
S2	655	**233**	150
S3	673	239	**126**
minimo	651	233	126
maximo	919	324	220
Recorrido	268	91	94

S1*(Xij)	D1	D2	D3	D4	Envios
O1	0	8	10	6	24
O2	4	2	0	0	6
O3	11	0	0	0	11
Llegadas	15	10	10	6	z1*=651

S2*(Xij)	D1	D2	D3	D4	Envios
O1	4	4	10	6	24
O2	0	6	0	0	6
O3	11	0	0	0	11
Llegadas	15	10	10	6	z2*=233

S3*(Xij)	D1	D2	D3	D4	Envios
O1	10	4	10	0	24
O2	0	6	0	0	6
O3	5	0	0	6	11
Llegadas	15	10	10	6	z3*=126

Normas

p=1	p=2	p=infinito
0.1480236	0.09927693	0.0851064

x_{ij}(p=1)	D1	D2	D3	D4
O1	10	4	10	0
O2	0	6	0	0
O3	5	0	0	6
		d(z,z*, 1)=		0.148

x_{ij}(p=2)	D1	D2	D3	D4
O1	9	4	10	1
O2	0	6	0	0
O3	6	0	0	5
		d(z,z*, 2)=		0.09928

x_{ij}(p=inf)	D1	D2	D3	D4
O1	8	4	10	2
O2	0	6	0	0
O3	7	0	0	4
		d(z,z*, inf)=		0.0851