J05 Matrisealgebra

J05_Matrisealgebra.odt 05.11.2013

FORELØPIG

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}=10 \qquad \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\6 & 4 & 2\\9 & 6 & 3\end{bmatrix}$$

Definisjoner

$$F=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 0 & 2\\ 7 & 4\end{bmatrix}$$

En 3x2 matrise, 3 rader og 2 kolonner
Matrise F er den transponerte av matrise A: $F=A^T$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 7\\ 5 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

En 2x3 matrise, 2 rader og 3 kolonner
Matrise A er den transponerte av matrise F: $A=F^T$

$$H=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

En *diagonalmatrise*, elementer utenfor *hoveddiagonal* er null.

$$S=\begin{bmatrix}3 & 9 & 6\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

En *øvre triangulær* matrise, trappeform

$$K=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 5 & 2 & 0\\ 7 & 4 & 8\end{bmatrix}$$

En *triangulær* matrise

$$B=\begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 5 & 2 & -4\\ 7 & -4 & 8\end{bmatrix}$$

Symmetrisk, $B=B^T$

$$I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Enhetsmatrise, I_n

$$N=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Nullmatrise, **0**

$$P=\begin{bmatrix}3\\ 5\\ 7\end{bmatrix}$$

Kolonnevektor

$$Q=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6 & 8\end{bmatrix}$$

Radvektor

Trace = summen langs hoveddiagonal

trace(B) = 13

Matrisealgebra

Like matriser

har elementer som er parvis identiske $a_{ij}=b_{ij}$

Sum og differanse

av to matriser med samme form, $C=A\pm B$, får elementer $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$

Skalarprodukt

av en konstant k og en matrise A, får elementer $c_{ij}=k\cdot a_{ij}$

Skalarprodukt

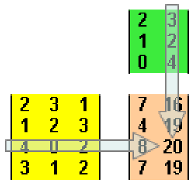
mellom to matriser A og B med samme form får elementer $c_{ij}=a_{ij}\cdot b_{ij}$

Matriseproduktet

av en matrise $A_{m\times n}$ og en matrise $B_{n\times p}$ blir en $m\times p$ matrise C med elementer

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}$$

$$A\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\1 & 2 & 3\\4 & 0 & 2\\3 & 1 & 2\end{bmatrix} * B\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\\0 & 4\end{bmatrix} = C\begin{bmatrix}7 & 16\\4 & 19\\8 & 20\\7 & 19\end{bmatrix}$$



$$c_{32}=a_{31}\cdot b_{12}+a_{32}\cdot b_{22}+a_{33}\cdot b_{32}=4\cdot 3+0\cdot 2+2\cdot 4=20$$

Regneregler

Kommutativ lov for addisjon

$$A+B=B+A$$

Kommutativ lov for multiplikasjon?

$$A\cdot B\neq B\cdot A$$

Assosiativ lov for addisjon

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

Assosiativ lov for multiplikasjon

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

Distributive lover

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$
$$(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$$

Nullmatriser

$$A+\mathbf{0}=A \quad \text{og} \quad \mathbf{0}+A=A$$

Enhetsmatriser

$$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{m}}\cdot A=A\cdot\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}=A \qquad (A:m\times n)$$

Transponerte av matriser

$$(A^T)^T=A \qquad (A+B)^T=A^T+B^T \qquad (A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$$

Ved kvadratisk A: A^T+A er symmetrisk, $A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$

Determinanter

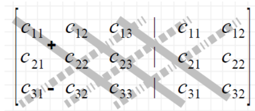
En determinant er et tall som beregnes av elementene i en kvadratisk matrise A, skrives $det(A)=|A|$.

Dersom det(A)≠0 så er A en invertibel, ikke-singulær matrise,
dersom det(A)=0 så er A ikke-invertibel, singulær og den inverse eksisterer ikke.

1×1 matrise $\quad A=[a_{11}] \quad |A|=a_{11}$

2×2 matrise $\quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad |A|=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$

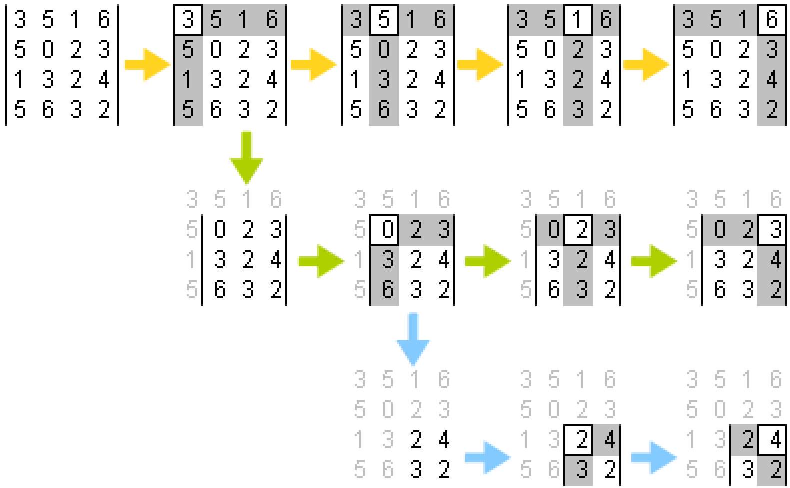
3×3 matrise $\quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad |A|=\begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \end{matrix}$



$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} \boxed{0} & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \boxed{2} & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & \boxed{3} \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$det=0(2\cdot 2-4\cdot 3)-2(3\cdot 2-4\cdot 6)+3(3\cdot 3-2\cdot 6)=27$$

Underdeterminanter - kofaktorer



Determinanten til en 4x4 matrise kan beregnes rekursivt som summen av 4x3x2 elementverdier multiplisert med sine kofaktorer.

Kofaktoren A_{ij} til element a_{ij} er $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det M_{ij}$

der $\det M_{ij}$ er determinanten til matrisa 'under' elementet a_{ij} .

Determinanten til en nxn matrise A er $\det(A) = \sum a_{ij} \cdot A_{ij}$.

Determinant – ekvivalente operasjoner

Determinanten er null hvis det er to like rader eller kolonner,

felles faktor i en rad eller kolonne kan trekkes utenfor determinanten,

fortegnet skifter dersom to rader eller kolonner bytter plass,

Summen av en rad (kolonne) og et multiplum av annen rad (kolonne) endrer ikke verdien,

sumregel - $|A+B| \neq |A|+|B|$

produktregel - $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

transponert - $|A^T| = |A|$

Eksempel 1

$$B=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Her er det gunstigst å utvikle etter 3. kolonne,
$\det(B)=(-1)^{2+3}\cdot 2\cdot(-2\cdot 5-4\cdot 2)=36$

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Determinanten til en triangulær matrise
er produktet av hoveddiagonalen.

$\det(A)=-2\cdot 3\cdot 1\cdot -4=24$

Inverse matriser

En $n \times n$ matrise B A^{-1} er den inverse av matrise A dersom $A \cdot B = B \cdot A = \boldsymbol{I}_n$, da er $B = A^{-1}$,

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n \quad .$$

En ikke-invertibel matrise kalles *singulær*, en invertibel matrise kalles *ikkesingulær*.

Matriseproduktet til to invertible matriser A og B er invertibelt,

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \qquad \text{(OBS! rekkefølge)}$$

Eksempel 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invers 2x2 matrise

Den inverse 2x2 matrisa til $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

beregnes av formelen $A^{-1} = \dfrac{1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

Invers matrise ved hjelp av enhetsmatrise

Utvide matrisa med en enhetsmatrise og gjør radoperasjoner til venstre halvdel blir en enhetsmatrise – og høyre halvdel får verdiene til den inverse matrisa,

$$A|I=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\2&1&3&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{bmatrix}\underset{R3=R3-R1}{\equiv}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\2&1&3&0&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{bmatrix}\underset{R2=R2-2R1}{\equiv}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\0&-1&1&-2&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\underset{R1=R1+R2}{\equiv}\begin{bmatrix}1&0&2&-1&1&0\\0&-1&1&-2&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{bmatrix}\underset{R1=R1-2R3}{\equiv}\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&-2\\0&-1&1&-2&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{bmatrix}\underset{*)}{\equiv}\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&-2\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&1&-1&0&1\end{bmatrix}$$

*) R2=R2-R1, R2=-R2

Invers matrise beregnet med kofaktorer

Formelen er en generalisering av uttrykket for beregning av invers 2x2 matrise,

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}K^{T}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&\dots&k_{1n}\\k_{21}&k_{22}&\dots&k_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\k_{n1}&k_{n2}&\dots&k_{nn}\end{bmatrix}^{T}$$

(OBS! Transponert kofaktormatrise)

der matrisa *K* består av kofaktorene til *A*. De *n*x*n* kofaktorene beregnes for hver posisjon *ij* som produktet av en fortegnsfaktor, $(-1)^{i+j}$ og verdien av determinanten til undermatrisen til hvert enkelt element i *A*, $k_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot\det(M_{ij})$.

Eksempel 3

Vi skal finne den inverse matrise til $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

Determinanten beregnes til $\det(A)=1\cdot1\cdot2+1\cdot3\cdot1+1\cdot2\cdot1-1\cdot3\cdot1-1\cdot2\cdot2-1\cdot1\cdot1=-1$

Kofaktorene beregnes for hver av de 9 elementposisjonene,

$$k_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1 \qquad k_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1 \qquad k_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$k_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1 \qquad k_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1 \qquad k_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$k_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2 \qquad k_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1 \qquad k_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}K^T=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33}\end{bmatrix}^T=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Lineære likninger

$$\begin{aligned} 2x+3y+z&=-1\\ 3x-2y-2z&=1\\ -x+4y+3z&=0 \end{aligned}$$

På matrise-form:

$$\begin{bmatrix} 2x+3y+z \\ 3x-2y-2z \\ -x+4y+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Generelt,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

($\boldsymbol{b}=0$, inhomogent system)

($\boldsymbol{b}\neq 0$, homogent system)

Tilfelle 1, $\boldsymbol{b}\neq 0$ og $|\boldsymbol{A}|\neq 0$: $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ har *unik* løsning, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

Tilfelle 2, $\boldsymbol{b}=0$ og $|\boldsymbol{A}|\neq 0$: $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ har *triviell* løsning, $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

Tilfelle 3, $\boldsymbol{b}\neq 0$ og $|\boldsymbol{A}|=0$: $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ har *ingen* eller *uendelig antall* løsninger .

Tilfelle 4, $\boldsymbol{b}=0$ og $|\boldsymbol{A}|=0$: $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ har *uendelig antall* løsninger .

Dersom $\boldsymbol{A}$ er invertibel, dvs. $|\boldsymbol{A}|\neq 0$
har likningssystemet eksakt *en* løsning.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{-1}\cdot \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{x}&=\boldsymbol{A}^{-1}\mathbf{b}\\ \boldsymbol{I}\cdot\mathbf{x}&=\boldsymbol{A}^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{x}&=\boldsymbol{A}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Eksempel 4

Likningssystem	Matriseform	Determinant	Løsning	
$\begin{aligned} 2x+y&=5 \\ x-2y&=-5 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-5$	$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	(Tilfelle 1)
$\begin{aligned} 2x+y&=5 \\ x-2y&=-5 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-5$	$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	(Tilfelle 2)
$\begin{aligned} -3x+6y&=3 \\ x-2y&=-1 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=0$	$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 2t-1 \\ t \end{bmatrix}$	(Tilfelle 3a)
$\begin{aligned} -3x+6y&=2 \\ x-2y&=-1 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=0$	Ingen løsning!	(Tilfelle 3b)
$\begin{aligned} -3x+6y&=0 \\ x-2y&=0 \end{aligned}$	$\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=0$	$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}$	(Tilfelle 4)

Eksempel 5

Avgjør hvilke tilfeller av løsninger som finnes for likningssystemene. Bruk kalkulator for å finne løsninger.

a)
$$\begin{aligned} x+y+z&=6 \\ -x+y-2z&=-3 \\ x-2y+z&=0 \end{aligned}$$

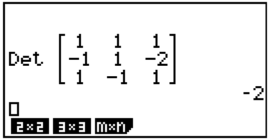
b)
$$\begin{aligned} x+y+z&=6 \\ -x+y-2z&=-3 \\ 2x-2y+4z&=6 \end{aligned}$$

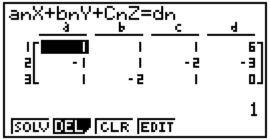
c)
$$\begin{aligned} x+y+z&=6 \\ -x+y-2z&=-3 \\ 2x+2y+2z&=6 \end{aligned}$$

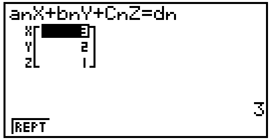
d)
$$\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ -x+y-2z&=0 \\ x-2y+z&=0 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ -x+y-2z&=0 \\ 2x-2y+4z&=0 \end{aligned}$$

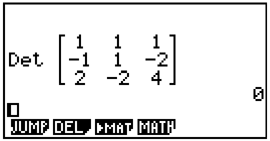
a) Finner determinanten = Tilfelle 1, har unik løsning

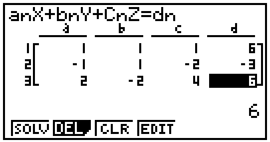


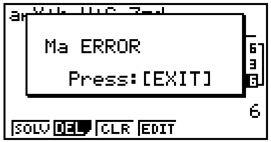




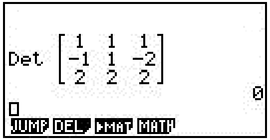
b) Finner determinanten = Tilfelle 3, ingen eller uendelig antall løsninger (= uendelig!?)

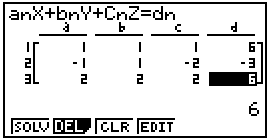




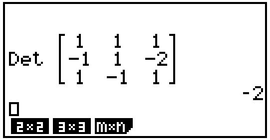


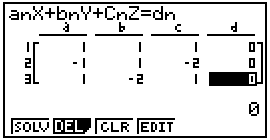
c) Finner determinanten = Tilfelle 3, ingen eller uendelig antall løsninger (= ingen!?)

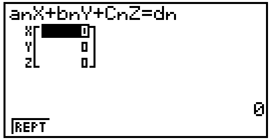




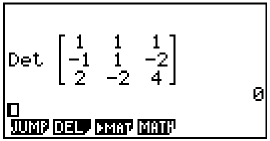
d) Finner determinanten = Tilfelle 2, triviell løsning

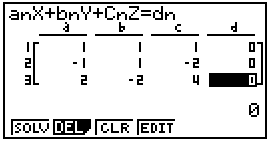


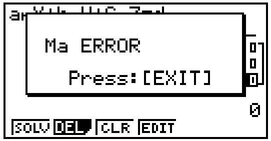




e) Finner determinanten = Tilfelle 4, uendelig antall løsninger







Løsning med eliminasjon

Likningssett som skal løses

$$\begin{aligned} x+2y&=4 \quad ① \\ 2x+y&=5 \quad ② \end{aligned}$$

Likn. ② legges sammen med – 2 ganger likn.①

$$\begin{aligned} x+2y&=4 \quad ① \\ -3y&=-3 \quad ② \end{aligned}$$

Likn. ② divideres med −3

$$\begin{aligned} x+2y&=4 \quad ① \\ y&=1 \quad ② \end{aligned}$$

$$x=4-2\cdot 1=2$$

$$\begin{aligned} x+y\quad\;&=3 \\ 2x+y+z&=7 \\ x+2y+3z&=14 \end{aligned}$$

Skriver om til matriseform

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

- og gjør tillatte radoperasjoner

> Rad 3 = Rad 3 – Rad 1 >

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

> Rad 2 = Rad 2 – 2 ˣ Rad 1 >

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

> Rad 3 = Rad 3 + Rad 2 >

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 12 \end{bmatrix}$$

> Rad 3 = Rad 3 / 3 >

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

> Rad 2 = –Rad 2 + Rad 3 >

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

> Rad 1 = Rad 1 – Rad 2 >

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Løsning med eliminasjon - 2

$$2x+3y+z=-1$$
$$3x-2y-2z=1$$
$$-x+4y+3z=0$$

Koeffisientmatrise

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Totalmatrise

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Tillatte radoperasjoner:

$$Rekke_a = k \cdot Rekke_a$$
$$Rekke_a \rightleftarrows Rekke_b$$
$$Rekke_a = Rekke_a + k \cdot Rekke_b$$

Total-matrisa reduseres:

Trappeform, Redusert trappeform

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 13 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Løsning er i høyre kolonne:

$$1\,\mathbf{x}+0\,y+0\,z=\mathbf{1}$$
$$0\,x+1\,\mathbf{y}+0\,z=\mathbf{-2}$$
$$0\,x+0\,y+1\,\mathbf{z}=\mathbf{3}$$

Gausseliminasjon (redusert echelon form)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & : & a_{3n} & b_3 \\ : & : & : & : & : & : \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & * & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & : & * & * \\ \mathbf{:} & : & : & : & : & : \\ \mathbf{0} & * & * & \dots & * & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & * & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & : & * & * \\ \mathbf{:} & \mathbf{:} & : & : & : & : \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & \dots & * & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & * & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \dots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & : & * & * \\ \mathbf{:} & \mathbf{:} & \mathbf{:} & : & : & : \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{1} & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 13 \\ 4 & -2 & 3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 4 & -1 & -6 & -20 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 11 & -8 & 1 & -13 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 4 & -1 & -6 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 11 & -8 & 1 & -13 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & -13 & -42 & -152 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 11 & -8 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 62 & 28 & 208 \\ 0 & 0 & -13 & -42 & -152 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 11 & -8 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 62 & 28 & 208 \\ 0 & 0 & 0 & -2240 & -6720 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1 & 1/2 & 9/2 \\ 0 & 1 & -8/11 & 1/11 & -13/11 \\ 0 & 0 & 1 & 14/31 & 104/31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$w=3$ og tilbakesubstituering:

$z=104/31-14/31\cdot 3=2$

$y=-13/11-1/11\cdot 3+8/11\cdot 2=0$

$x=9/2-1/2\cdot 3-1\cdot 2+3/2\cdot 0=1$

Eksempel 6

Løs likningssettet $\begin{matrix} 4x+2y+z=7 \\ 2x+y-z=5 \\ x+2y+2z=3 \end{matrix}$ med Gauss-Jordan redusering.

Totalmatrise

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R_3= \\ R_2-2R_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R_2= \\ 2R_2-R_1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow R_2 <-> R_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R_3= \\ -R_3/3 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R_1= \\ R_1+R_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R_2= \\ R_2+5R_3 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R_1= \\ R_1+2R_2/3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R_1=R_1/4 \\ R_2=-R_2/3 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad x=1 \ , \quad y=2 \ , \quad z=-1$$

En, ingen eller mange løsninger

Nedenfor er 3 sett med lineære likninger der det er foretatt en Gausseliminasjon på den utvidede matrisa.

Først et eksempel som gir akkurat *en* løsning.

Eksempel 7

$$\begin{aligned} x+y+z&=3\\ 2x-y-2z&=7\\ 5x-y-2z&=18 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & -2 & 7\\ 5 & -1 & -2 & 18 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -3 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x+y+z&=3\\ -3y-4z&=1\\ z&=1 \end{aligned}$$

Setter inn for *z*, $-3y-4\cdot 1=1$, $y=\frac{-5}{3}$

og for *z* og *y*, $x-\frac{5}{3}+1=3$, $x=\frac{-11}{3}$

Og så et eksempel der den siste raden viser umuligheten $0x+0y+0z=1$,

Eksempel 8

$$\begin{aligned} x+y+z&=3\\ 2x-y-2z&=7\\ 5x-y-3z&=18 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & -2 & 7\\ 5 & -1 & -3 & 18 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -3 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{!! Ingen løsning}$$

Her er et eksempel som gir *uendelig* mange løsninger,

Eksempel 9

$$\begin{aligned} x+y+z&=3 \\ 2x-y-2z&=7 \\ 5x-y-3z&=17 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 17 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Uendelig mange løsninger}$$

Den siste raden oppfylles for alle verdier av *x*, *y* og *z*. For å se sammenhengen mellom løsningene velges $z=t$ som parameter slik at den siste matrisa kan erstattes med

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \boldsymbol{t} \end{bmatrix} \quad \text{med likninger} \quad \begin{aligned} x+y+z&=3 \\ -3y-4z&=1 \\ \boldsymbol{z}&=\boldsymbol{t} \end{aligned}$$

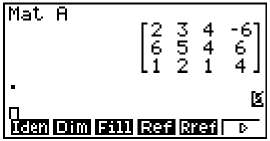
og ved å sette inn $z=t$ i de to øverste radne blir løsningene

$$z=t \quad , \quad y=-\frac{4}{3}t-\frac{1}{3} \quad , \quad x=\frac{10}{3}+\frac{1}{3}t$$

Trappeform – redusert trappeform

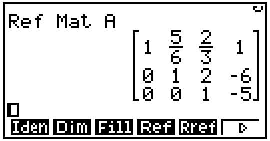
Matrise
- lin. likning

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -6 \\ 6 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$



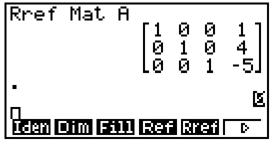
Trappeform
Rad echelon form (Ref)

$$\begin{bmatrix} 1 & 5/6 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$



Redusert trappeform
Redusert rad echelon form (Rref)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$



Eksempler på reduser trappeform

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 5 & 7 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Alle rader har minst ett nullelement mer enn raden ovenfor,
- det første ikke-null element i en rad ligger til høyre for det første ikke-null element i rad ovenfor,
- rad med bare nuller samles nederst.

Løsningstyper

Likningssystemet forenkles med gyldige radoperasjoner,

et *inhomogent* lineært likningssystem har

- ingen løsning (systemet er inkonsistent) dersom det er minst en likning med alle koeffisienter foran de ukjente lik null og konstantledd forskjellig fra null,
- èn eller uendelig mange løsninger (konsistent system),
  - eksakt èn løsning dersom antall likninger er lik antall ukjente,
  - uendelig mange løsninger dersom antall likninger er mindre enn antall ukjente

et *homogent* lineært likningssystem har

- den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$ vil passe, systemet er alltid konsistent
- systemet har uendelig mange ikke-trivielle løsninger dersom antall likninger er mindre enn antall ukjente.

Egenverdier og egenvektorer

Egenverdiene til matrisa A er de tallene λ som oppfyller $A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ for vektorer $\mathbf{v} \neq 0$.

Vektorene $\mathbf{v}$ er egenvektorer til egenverdiene λ .

Ved å ta utgangspunkt i likheten $A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ kan vi beregne egenverdier og egenvektorer,

- Finn nullpunktene i den karakteristiske likninga
  $$\det(A - \lambda \cdot I) = 0 \quad .$$
  Nullpunktene er egenverdiene.

- Sett inn egenverdiene etter tur i likninga
  $$A - \lambda \cdot I = 0$$
  og løs denne ved å utføre Gausseliminasjon.
  Løsningene er egenvektorene.

Eksempel 10

Vis at matrisa $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ har $\lambda_1=2$ og $\lambda_2=3$ som egenverdier

med tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$.

Dette kan testes ved å regne ut $A\cdot\mathbf{v}$ og $\lambda\cdot\mathbf{v}$ og sammenlikne for likhet:

$$A\cdot\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1\\ 2\cdot(-1)+4\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 2\end{bmatrix} \qquad d_1\cdot\mathbf{v}_1=2\cdot\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot(-1)\\ 2\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 2\end{bmatrix}$$

$$A\cdot\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot(-1)+(-1)\cdot 2\\ 2\cdot(-1)+4\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ 6\end{bmatrix} \qquad d_2\cdot\mathbf{v}_2=3\cdot\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot(-1)\\ 3\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ 6\end{bmatrix}$$

Her ser vi at $A\cdot\mathbf{v}_1=\lambda_1\cdot\mathbf{v}_1$ og , $A\cdot\mathbf{v}_2=\lambda_1\cdot\mathbf{v}_2$ men legg merke til at om det ble satt inn de samme egenvektorene multiplisert med en konstant, $s\cdot\mathbf{v}_1$ og $t\cdot\mathbf{v}_2$ så vil fortsatt venstre og høyre side være like, altså er det egentlig snakk om et *egenvektorsett*.

Eksempel 11

Vis at matrisa $M=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&2&1\\3&2&2\end{bmatrix}$ har $d_1=1$, $d_2=-1$ og $d_3=6$ som egenverdier

med egenvektorer $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$.

Dette kan testes ved å regne ut $M\cdot\mathbf{v}$ og $\lambda\cdot\mathbf{v}$ og sammenlikne for likhet:

$$M\cdot\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&2&1\\3&2&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-4+3\\1-4+1\\3-4+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\qquad d_1\cdot\mathbf{v}_1=1\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$$M\cdot\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&2&1\\3&2&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+0+3\\-1+0+1\\-3+0+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\qquad d_2\cdot\mathbf{v}_2=-1\cdot\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$$M\cdot\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&2&1\\3&2&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+2+6\\2+2+2\\6+2+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\6\\12\end{bmatrix}\qquad d_3\cdot\mathbf{v}_3=6\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\6\\12\end{bmatrix}$$

Eksempel 12

Finn egenverdier og egenvektorer til matrisa $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Vi setter opp matrisa $A - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$ og beregner determinanten,

$$\det(A - \lambda \cdot I) = (1-\lambda)(4-\lambda) - (-2) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) \quad , \quad \lambda_1 = 2 \text{ og } \lambda_2 = 3 \; .$$

1) Finner egenvektoren til $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ 2 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Gausseliminasjon: } \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 = R_2 + 2 \cdot R_1]{} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 = -R_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Den matrisa vi nå er kommet til er venstresiden i likninga $A - \lambda_1 \cdot I = 0$ og rad 2 viser at alle verdier av x_1 eller x_2 oppfyller likninga, men de er lineært avhengige. Setter x_2 som parameter, $x_2 = s$.

Rad 1 gir at $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = x_1 + s = 0$ som ordnes til $x_1 = -s$.

Disse to løsningene settes opp som en vektor, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Egenvektoren som hører til egenverdien $\lambda_1 = 2$ er $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, vi sløyfer altså parameteren s.

2) Finner egenvektoren til $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 1-3 & -1 \\ 2 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$ og foretar Gausseliminasjon,

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{R_2 = R_2 + R_1}{\rightarrow} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{R_1 = -R_1}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Velger å sette x_2 som parameter, $x_2 = t$.

Rad 1 gir at $2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 2 \cdot x_1 + s = 0$ som ordnes til $x_1 = -\dfrac{t}{2}$.

Disse to løsningene settes opp som en vektor, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{t}{2} \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Egenvektoren som hører til egenverdien $\lambda_2 = 3$ er $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

La du merke til at t ble byttet ut mot en likeverdig parameter t' ?
Vi sløyfer uansett parameteren.

Eksempel 13

Finn egenverdier og egenvektorer til $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

```
AmdI =
[2-d,   2,   3]
[  1, 2-d,   1]
[  3,   2, 2-d]
```

```
>> det(AmdI)
ans = - d^3 + 6*d^2 + d - 6
>> factor(ans)
ans = -(d - 6)*(d - 1)*(d + 1)
```

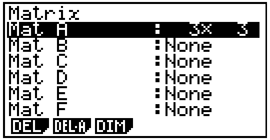
$$d_1 = 1 \qquad A - dI = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad v_1 = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

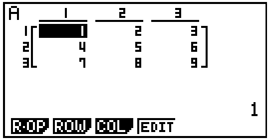
$$d_2 = -1 \qquad A - dI = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$d_3 = 6 \qquad A - dI = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Kalkulator og matriser

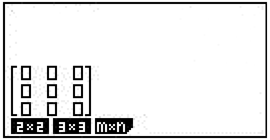
Taste inn matrise med matriseeditor, MENU > RUN.MAT > ▶MAT

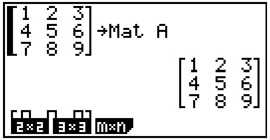




Matrisene lagres med en bokstav som navn

Taste inn matrise med mal, MENU > RUN.MAT > MATH > MAT





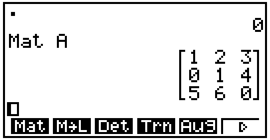
Matrisene får ikke navn automatisk, bruk matriselagring, →Mat A

Taste inn direkte med parenteser, [[1,2][3,4]]

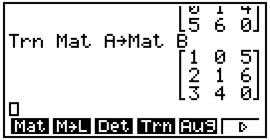
Matrisene får ikke navn automatisk, bruk matriselagring, →Mat A

CASIO behandler matriser under 3 menyvalg

- RUN-MAT >MAT — Her taster du inn matriser i en mal
- RUN-MAT >MATH >MAT — Her kan du også taste inn matriser
- RUN-MAT >Optn >MAT — Her kan du invertere, redusere, finne determinant og andre operasjoner

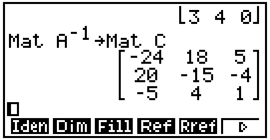


Matrise A er tastet inn.

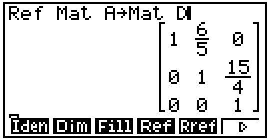


Den transponerte av A beregnes og resultatet legges i matriseminne B.

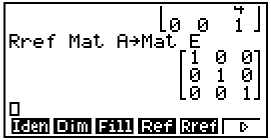
Beregner determinant til A.



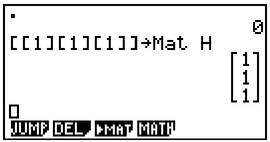
Den inverse av A beregnes og resultatet legges i matriseminne C.



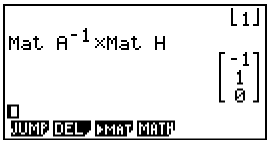
Matrise A reduseres til 'Redusert echelon form'.



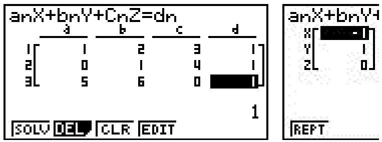
Matrise A reduseres til 'Rad redusert echelon form'.



Kolonnevektor H tastes inn.



Løser likningsettet A X =H



Løser likningsettet med EQUA > Simultaneous .

MATLAB

```
>> A=[1 2 3; 0 1 4; 5 6 0]
A =
     1     2     3
     0     1     4
     5     6     0
>> B=A'                       % Transponert
B =
     1     0     5
     2     1     6
     3     4     0
```

Taster inn matrise A og transponerer den.

```
>> E=rref(A)
E =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

Reduserer til Redusert echelon form.

```
>> det(A)
ans =
    1.0000

>> C=inv(A)             % evt. A^(-1)
C =
  -24.0000   18.0000    5.0000
   20.0000  -15.0000   -4.0000
   -5.0000    4.0000    1.0000
```

Determinant til A beregnes og A inverteres.

```
>> H=[1; 1; 1]
H =
     1
     1
     1
>> X=inv(A)*H
X =
   -1.0000
    1.0000
   -0.0000
```

Løser likningen $A \cdot X = H$