Problemas de Optimización: una Introducción

Programación Matemática a Gran Escala

Ing. Fabio A. González, PhD

Departamento de Ing de Sistemas e Industrial

Universidad Nacional de Colombia

Resolución de Problemas

- G. Polya, **"How to Solve It"**, 2nd ed., Princeton University Press, 1957.
- Cuatro pasos para resolver un problema:
  - Understanding the problem
  - Devising a plan
  - Carrying out the plan
  - Looking back.

Understanding The Problem

- **First.** You have to *understand* the problem.
- What is the unknown? What are the data? What is the condition?
- Is it possible to satisfy the condition? Is the condition sufficient to determine the unknown? Or is it insufficient? Or redundant? Or contradictory?
- Draw a figure. Introduce suitable notation.
- Separate the various parts of the condition. Can you write them down?

Devising A Plan (1)

- **Second.** Find the connection between the data and the unknown. You may be obliged to consider auxiliary problems if an immediate connection cannot be found. You should obtain eventually a *plan* of the solution.

- Have you seen it before? Or have you seen the same problem in a slightly different form?

- *Do you know a related problem?* Do you know a theorem that could be useful?

- *Look at the unknown!* And try to think of a familiar problem having the same or a similar unknown.

Devising A Plan (2)

- *Here is a problem related to yours and solved before. Could you use it?* Could you use its result? Could you use its method? Should you introduce some auxiliary element in order to make its use possible?

- Could you restate the problem? Could you restate it still differently? Go back to definitions. If you cannot solve the proposed problem try to solve first some related problem.

- Did you use the whole condition? Have you taken into account all essential notions involved in the problem?

Carrying Out The Plan

- **Third.** *Carry out* your plan.
- Carrying out your plan of the solution, *check each step* . Can you see clearly that the step is correct? Can you prove that it is correct?

Looking Back

- **Fourth.** *Examine* the solution obtained.
- Can you *check the result?* Can you check the argument?
- Can you derive the solution differently? Can you see it at a glance?
- Can you use the result, or the method, for some other problem?

Por qué algunos problemas son difíciles de resolver?

- Tamaño del espacio de búsqueda
- Modelado
- Ruido y variabilidad
- Restricciones
- Estrategia adecuada

Problema de Búsqueda

- Dado un conjunto S y un predicado $P(s)$, encontrar $s_0 \in S$ tal que $P(s_0)$.

- Ejemplos:
    - Problema de satisfactibilidad (SAT)
    - Problemas de planeación
    - Camino hamiltoniano

Problemas de Optimización

- Problema de optimización general:

  Dado $f: S \to \Re$, encontrar $x \in S$ tal que $G(x)$ y

  $\forall\ y \in S,\ G(y)\ =>\ f(x) \leq f(y)$

- Ejemplo:

  – Problema general de programación no lineal:

  $$\text{minimizar } f(x)$$

  $$\text{sujeto a}\ :\ g_i(x) \geq 0 \quad i = 1,...,m$$

  $$h_j(x) = 0 \quad j = 1,...,p$$

Optimo Global y Local

- x^* es un óptimo global si:
    - $\forall \, y \in G(S), \; f(x^*) \leq f(y)$

    ($G(S)$ corresponde a la región factible y se define como:
    $G(S)=\{x \in S : G(x)=1\}$)

- x^* es un óptimo local si:
    - Existe una vecindad $N(x^*)$ tal que $\forall \, y \in N(x^*)$, $f(x^*) \leq f(y)$

Planteando un Problema de Optimización (búsqueda)

- Escoger una buena representación
  - S: espacio de búsqueda
- Definir el objetivo
  - $f: S \rightarrow \Re$
- Definir las restricciones
  - $G: S \rightarrow \{0,1\}$
- Definir una función de evaluación
  - $f': S \rightarrow \Re$
- Definir una función de búsqueda local (vecindad)
  - $N: S \rightarrow 2^S$

Clasificación de Problemas de Optimización

- Optimización continua:

  El espacio de búsqueda corresponde a $\Re^n$

- Optimización discreta (combinatoria):

  El espacio de búsqueda corresponde a un conjunto finito o posiblemente contable infinito. Ejemplo: enteros, conjuntos, permutación, grafo, etc.

Optimización Continua

- No restringida:
  - Una variable
  - Varias variables
- Restringida:
  - Programación lineal
  - Programación no lineal
  - Programación cuadrática
  - Programación convexa

Optimización discreta

- Programación entera
- Optimización en grafos:
  - Minimal spanning tree
  - Camino más corto
  - Problema del agente viajero
  - Matching
  - Flujo máximo
- Programación dinámica
- Scheduling