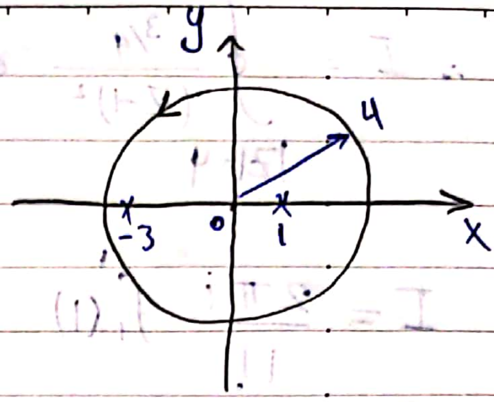
Subject : lec(6) Mode :

$$\oint_{|z|=4} \frac{z+2}{(z-1)^2(z+3)}\,dz$$



$(z-1)^2=0$ → $\boxed{z=1}$ | $z+3=0$ → $\boxed{z=-3}$

أصفار المقام

$$\frac{z+2}{(z-1)^2(z+3)} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{(z-1)} + \frac{C}{(z+3)}$$

← لو درجة البسط أعلى من درجة المقام ← هعمل قسمة مطولة

← لو " " أقل " " " " ← هعمل Partial Fraction

$$z+2 = A(z+3) + B(z-1)(z+3) + C(z-1)^2$$

محتاج ٣ قيم لـ z عشان عندي ٣ متغيرات (A, B, C) وأسهل قيم أخدها هي أصفار المقام (دي أول حاجة أخدها) هتسهل عليا الدنيا

at $\boxed{z=1} \longrightarrow 3=4A \Longrightarrow \boxed{A=\frac{3}{4}}$

at $\boxed{z=-3} \longrightarrow -1=16C \Longrightarrow \boxed{C=\frac{-1}{16}}$

at $\boxed{z=0} \longrightarrow 2=3\left(\frac{3}{4}\right)-3B-\frac{1}{16} \Longrightarrow \boxed{B=\frac{1}{16}}$

Date : Subject :

$$\therefore I = \oint_{|z|=4} \frac{3/4}{(z-1)^2}\, dz + \oint_{|z|=4} \frac{1/16}{(z-1)}\, dz + \oint_{|z|=4} \frac{-1/16}{z+3}\, dz$$

$$I = \frac{2\pi i}{1!} f_1'(1) + 2\pi i\, f_2(1) + 2\pi i\, f_3(-3)$$

$$f_1(z) = \frac{3}{4} \Longrightarrow f'(z) = 0 \Longrightarrow f'(1) = 0$$

$$f_2(z) = \frac{1}{16} \Longrightarrow f_2(1) = \frac{1}{16}$$

$$f_3(z) = \frac{-1}{16} \Longrightarrow f_3(-3) = \frac{-1}{16}$$

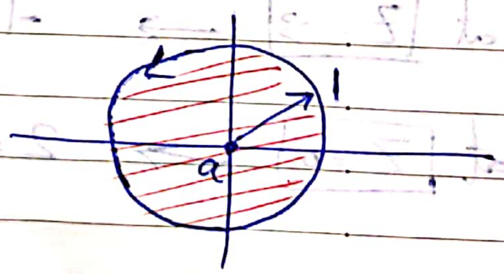
$$\therefore I = 0 + 2\pi i\left(\frac{1}{16}\right) - 2\pi i\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$\boxed{I = 0}$$

Taylor Expansion page (109) علشان أستخدم taylor لازم ال f(z) تكون analytic على مسارها

$f(z) = \cdots \qquad z = a$

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \cdots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(z-a)^n$$



$$|z-a| < 1$$

المركز بتاع الدايرة   نص القطر

Subject : Mode :

Maclauren expansion   Taylor هي حالة خاصة من

$f(z)$ → $z=0$

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}z^n + \dots$$

Example:- $f(z) = e^z$ Find taylor expansion in power of z

← أول حاجة بعملها ← بشوف الدالة دي analytic في أي حته بالضبط

$f(z)$ is analytic everywhere ∴ لو الدالة طلعت مش analytic at $\boxed{z<1}$

$f(z) = e^z \Longrightarrow f(0) = 1$

$f'(z) = e^z \Longrightarrow f'(0) = 1$ دي معناها ← إنه مينفعش أعوض في z

$f^n(z) = e^z \Longrightarrow f^n(0) = 1$ بأي قيمة أكبر من ال $\boxed{1}$

هنعوض في متسلسلة Maclauren

$$\therefore f(z) = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$f(z) = e^{-z}$

نفس اللي فوقها بالضبط بس بدل ال z ← $-z$

$$f(z) = e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} = \sum_{n=\infty} \frac{(-1)^n (z)^n}{n!}$$

baraka

Date : .... Subject : ....

example

- $f(Z) = \ln(1+Z)$ أوجد مفكوك الدالة دي باستخدام taylor in power of Z

Domain for $\ln(1+Z) \Rightarrow 1+Z \geq 0 \Rightarrow Z \geq -1$

∴ الدالة هتكون analytic في كل مكان ما عدا عند $\boxed{Z \leq -1}$

∴ $f(z)$ is analytic every where expect at $1+Z \leq 0$

$\boxed{Z \leq -1} \rightarrow \boxed{|Z| < 1}$

معناها ان القيم اللي أقدر أعوض بيها في Z لازم تكون $\leq \boxed{-1}$

$f(Z) = \ln(1+Z) \Rightarrow f(0) = 0$ (لازم تحقق المجال يعني)

$f'(z) = \frac{1}{1+Z} = (1+Z)^{-1} \Rightarrow f'(0) = \boxed{1}$

$f''(Z) = \frac{-1}{(1+Z)^2} = -(1+Z)^{-2} \Rightarrow f''(0) = \boxed{-1}$

$f'''(z) = \frac{2}{(1+Z)^3}$ $2 \rightarrow 2!$ $\Rightarrow f'''(0) = \boxed{2}$

$f^{4}(z) = \frac{-6}{(1+Z)^4}$ $-6 \rightarrow -3!$ $\Rightarrow f''''(0) = \boxed{-6}$

$f^{(n)}(Z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+Z)^n}$ $n = 1, 2, 3, 4, ----$

$\Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

هعوض في القانون بتاع Maclauren

$\ln(1+Z) = \frac{1}{1!}Z - \frac{1}{2!}Z^2 + \frac{2}{3!}Z^3 - \frac{6}{4!}Z^4 + ------$

$= Z - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{3} - \frac{Z^4}{4} + \frac{Z^5}{5} - ------$

$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^{n+1}}{n+1}}$ $, |Z| < 1$

Subject : Mode :

Ex $f(z)=\ln(1-z) \longrightarrow$ نفس حل $f(z)=\ln(1+z)$
ولكن هستبدل الـ z بـ $-z$

$$\ln(1-z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-z)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(z)^{n+1}}{n+1}$$

Ex $f(z)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(1+z)-\ln(1-z)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}\right]$$

بأخذ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}$ مشترك

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n+1\right)\frac{z^{n+1}}{n+1}\right]$$

$$=z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}+\cdots$$

$$=\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}}$$

Ex $f(z)=\sin z$

$$=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$f(z)=\cos(z)$ $=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

نفس فكرة الـ sin ولكن كل الاشارات موجبة

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$f(z) = (1+z)^m$$

$$= 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} z^3 + \cdots$$

$$\cancel{\neq \sum} \qquad f(z) = \frac{1}{(1+z)^N}$$

$$= 1 - Nz + \frac{N(N+1)}{2!} z^2 - \frac{N(N+1)(N+2)}{3!} z^3 + \cdots$$

الحاجات اللي فاتت دي كلها حفظ.

Ex $F(Z) = \dfrac{1}{1-Z}$ Find taylor expansion in power of Z

$\dfrac{1}{1-Z}$

in power of a

$\dfrac{1}{1-a}$

$f(Z) = (1 - Z)^{-1}$

سالب سالب

هيبقى كل الاشارات موجب لما أجي أفك

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n = 1 + Z + Z^2 + Z^3 + \dots \quad , |Z| < 1$$

Ex $f(Z) = \tan^{-1}(Z) = \displaystyle\int \frac{1}{1+Z^2}\, dZ$

$$\frac{1}{1+Z^2} = \frac{1}{1-(-Z^2)} = 1 + (-Z^2) + (-Z^2)^2 + (-Z^2)^3 + \dots$$

$$= 1 - Z^2 + Z^4 - Z^6 + \dots \quad , |Z| < 1$$

تكامل

$$f(Z) = \tan^{-1}(Z) = Z - \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^5}{5} \pm \frac{Z^7}{7} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n Z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Date : .... Subject : ....

ex $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+2)}$

$f(z)$ is analytic every where expect at $\boxed{z=1}$ and $\boxed{z=-2}$

$\dfrac{z}{(z-1)(z+2)}$ درجة البسط أقل من درجة المقام

← partial Fraction

$\dfrac{z}{(z-1)(z+2)} = \dfrac{A}{(z-1)} + \dfrac{B}{(z+2)} \Rightarrow z = A(z+2) + B(z-1)$

at $z=1 \Longrightarrow \boxed{A = 1/3}$

at $z=-2 \Longrightarrow \boxed{B = 2/3}$

$f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+2)} = \dfrac{1/3}{(z-1)} + \dfrac{2/3}{(z+2)}$

$\dfrac{1}{1-\text{حاجة}}$ هنخلي كل جزء منهم

هام

$f(z) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{z}{2}}\right)$

خلي بالك من تحط ال 1 طالما في البسط مينفعش أجمع أو أطرح حاجة معاها z لـ بضرب أو أقسم فقط

$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})}\right)$

$|z|<1$ $\quad$ $\left|\frac{z}{2}\right|<1$

$= -\frac{1}{3}\left[1+z+z^2+z^3+\cdots\right] + \frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{-z}{2}\right)+\left(\frac{-z}{2}\right)^2+\left(\frac{-z}{2}\right)^3+\cdots\right]$

$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{n=\infty} z^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{2}\right)^n$

$= \frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) z^n\right]$

Scanned with CamScanner

Subject :   Mode :

Ex $f(Z) = \dfrac{Z - \sin Z}{Z^3}$ Domain = $R - \{0\}$

ده معناه ان الدالة متصلة على كل الخط

ما عدا الصفر ← بروح أجيب قيمة

الدالة عند الصفر

وده اسمه إعادة تعريف الدالة

$$\lim_{Z \to 0} f(Z) = \lim_{Z \to 0} \frac{1 - \cos Z}{3Z^2}$$

لوبتال

$$= \lim_{Z \to 0} \frac{\sin Z}{6Z}$$

$$= \lim_{Z \to 0} \frac{\cos Z}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$f(Z) = \frac{Z - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, Z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{Z^3}$$

$$f(Z) = \frac{1}{3!} - \frac{Z^2}{5!} + \frac{Z^4}{7!} + \cdots$$

$$= \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} Z^{2n-2}} \quad , |Z| < 1$$

$f(Z) = \dfrac{2Z^2 + 9Z + 5}{Z^3 + Z^2 - 8Z - 12}$ in Power of $(Z-1)$

$$-\frac{8}{9} - \frac{31}{54}(Z-1) - \frac{23}{108}(Z-1)^2 - \frac{275}{1944}(Z-1)^3 + \cdots$$

الإجابة النهائية

baraka