PART 02

অনুশীলন Practice

স্কুল ও এসএসসি পরীক্ষায় সেরা প্রস্তুতির জন্য ১০০% সঠিক ফরম্যাট অনুসরণে শিখনফল এবং অনুচ্ছেদের ধারায় প্রশ্ন ও সমাধান

শিখন অর্জন যাচাই

- চিত্র দেখে বৃত্তের কেন্দ্র, ব্যাস, ব্যাসার্ধ, জ্যা ইত্যাদি চিনতে পারব।
- বৃত্তের ছেদক ও স্পর্শক আঁকতে পারব।
- প্রদত্ত উপাত্তের সাহায্যে বৃত্ত অঙ্কন করতে পারব।

শিখন সহায়ক উপকরণ

- স্কেল, পেন্সিল কম্পাস, ত্রিকোণী, কাটা কম্পাস।
- পাঠ্যবইয়ের ১৬৩ ও ১৬৪ পৃষ্ঠার ছবি।
- পাঠ্যবইয়ের সমস্যা ও কার্যাবলি।

অধ্যায় ৮ — অনুশীলনী ৮.১ বৃত্তের জ্যা ও ব্যাস সংক্রান্ত উপপাদ্য

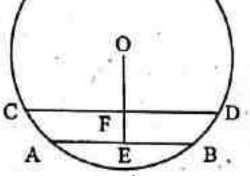
সাধারণ জ্যামিতিক অংশ — পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রিয় শিক্ষার্থী, পাঠ্যবইয়ে এ অধ্যায়ে অনুশীলনীতে বিভিন্ন ধরনের জ্যামিতিক প্রশ্ন দেওয়া আছে। প্রতিটি প্রশ্নের যথাযথ ও নির্ভুল সমাধান এ অংশে সংযোজন করা হলো। এসব প্রশ্ন ও সমাধানের অনুশীলন তোমাদের সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তরের ধারণা সমৃদ্ধকরণে সহায়তা করবে।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর জ্যামিতিক প্রশ্নের সমাধান

প্রশ্ন ১ ▸ প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যাদ্বয়ের ওপর লম্ব।

সমাধান : মনে করি, ABDC বৃত্তের কেন্দ্র O। AB ও CD দুইটি সমান্তরাল জ্যা। E এবং F যথাক্রমে AB ও CD-এর মধ্যবিন্দু। EF মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা। প্রমাণ করতে হবে যে, EF কেন্দ্রগামী এবং জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব।



অঙ্কন : O, F যোগ করি।

প্রমাণ : ধাপ ১. F, CD এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore OF \perp CD$ [বৃত্তের ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা-এর মধ্যবিন্দু এবং কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা-এর উপর লম্ব।]

এবং $\angle OFC$ = এক সমকোণ।

ধাপ ২. E, AB এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore OE \perp AB$ [একই কারণে]

এবং $\angle OEA$ = এক সমকোণ।

ধাপ ৩. $\angle OFC = \angle OEA$ [ধাপ (১) ও (২) থেকে]

ধাপ ৪. $AB \parallel CD$ [কল্পনা]

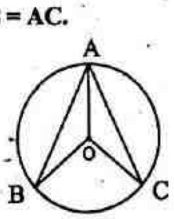
$\therefore \angle OFC$ ও $\angle OEA$ অনুরূপ কোণ।

$\therefore$ O, F, E একই সরলরেখায় অবস্থিত।

সুতরাং E ও F বিন্দুর সংযোজক রেখা কেন্দ্র O গামী এবং AB ও CD সমান্তরাল রেখা জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ২ ▸ কোনো বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, AB = AC.

সমাধান : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ও AC দুইটি জ্যা। O, A যোগ করি। AB ও AC জ্যাদ্বয় A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ OA এর সাথে সমান কোণ $\angle OAB$ ও $\angle OAC$ উৎপন্ন করে। অর্থাৎ $\angle OAB = \angle OAC$। প্রমাণ করতে হবে যে, AB = AC।



অঙ্কন : O, B এবং O, C যোগ করি।

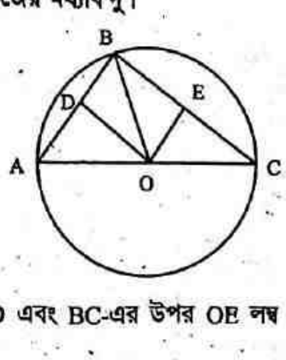
প্রমাণ :

ধাপ ১. $\triangle OAB$ এ $OA = OB$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\angle OBA = \angle OAB$	[ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় সমান]
ধাপ ২. আবার, $\triangle OAC$ এ $OA = OC$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\angle OCA = \angle OAC$	[ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় সমান]
ধাপ ৩. এখানে, $\angle OAB = \angle OAC$	
বা, $\angle OBA = \angle OCA$	[ধাপ (১) ও (২) হতে]
ধাপ ৪. $\angle AOB = 180° - (\angle OAB + OBA)$	
এবং $\angle AOC = 180° - (\angle OAC + \angle OCA)$	
$= 180° - (\angle OAB + \angle OBA)$	[ধাপ (৩) হতে]
$\therefore \angle AOB = \angle AOC$	
ধাপ ৫. এখন, $\triangle OAB$ এবং $\triangle OAC$ এ $OB = OC$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\angle AOB = \angle AOC$	[ধাপ (৪) হতে]
এবং $OA = OA$	[সাধারণ বাহু]
$\therefore \triangle OAB \cong \triangle OAC$	[বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

সুতরাং AB = AC. **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ৩ ▸ কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো দিয়ে যায়। দেখাও যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

সমাধান : মনে করি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। এর $\angle ABC$ = এক সমকোণ এবং AC অতিভুজ। A, B ও C শীর্ষ দিয়ে বৃত্তটি অতিক্রম করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের কেন্দ্র O, AC অতিভুজের মধ্যবিন্দু।



অঙ্কন : O হতে AB-এর উপর OD এবং BC-এর উপর OE লম্ব টানি। O, B যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. ΔAOD ও ΔBOD-এর মধ্যে

$AD = BD$ [OD, AB জ্যা-এর উপর লম্ব]

$OD = OD$ [সাধারণ বাহু]

এবং $\angle ADO = \angle BDO$ [উভয়েই এক সমকোণ]

$\Delta AOD \cong \Delta BOD$ [বাহু-কোণ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

$\therefore AO = BO$

ধাপ ২. অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $CO = BO$

সুতরাং, $AO = BO = CO$ [ধাপ (১) থেকে]

অতএব, O বৃত্তের কেন্দ্র।

ধাপ ৩. এখন, $AC = AO + CO$

$= AO + AO$ [(২) থেকে]

বা, $AC = 2AO$

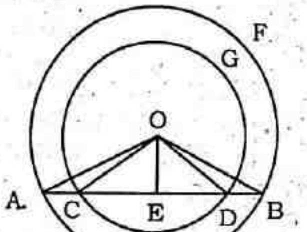
$\therefore AO = \frac{1}{2}AC$

অতএব, বৃত্তের কেন্দ্র O অতিভুজ AC-এর মধ্যবিন্দু। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ৪ ▸ দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের একটির জ্যা AB অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AC = BD.

সমাধান : মনে করি, ABF ও CDG বৃত্ত দুইটি সমকেন্দ্রিক এবং O এদের কেন্দ্র। AB, CDG বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC = BD$.

অঙ্কন : O হতে AB-এর উপর OE লম্ব টানি। O, A; O, B; O, C এবং O, D যোগ করি।



প্রমাণ :

ধাপ ১. AOE ও BOE সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে

অতিভুজ OA = অতিভুজ OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

$OE = OE$ [সাধারণ বাহু]

$\Delta AOE \cong \Delta BOE$ [অতিভুজ বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

$\therefore AE = BE$

ধাপ ২. অনুরূপভাবে COE ও DOE সমকোণী ত্রিভুজ নিয়ে প্রমাণ করা যায় যে, $CE = DE$ [ধাপ (১) থেকে]

ধাপ ৩. এখন, $AE = BE$

বা, $AC + CE = BD + DE$ [$\because AE = AC + CE$ এবং $BE = BD + DE$]

বা, $AC + DE = BD + DE$ [ধাপ (২) হতে]

$\therefore AC = BD$. [উভয়পক্ষ হতে সমান সমান অংশ বাদ দিয়ে]

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন ৫ ▸ বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে দেখাও যে, এদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।

সমাধান : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে দুইটি সমান জ্যা AB ও CD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাতে হবে যে, $PA = PD$ এবং $PB = PC$.

অঙ্কন : কেন্দ্র O থেকে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে OM ও ON লম্ব অঙ্কন করি। O, P যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. ΔMOP ও ΔNOP সমকোণী ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে $\angle OMP = \angle ONP$ = এক সমকোণ [$\because OM \perp AB$ এবং $ON \perp CD$]

$OM = ON$ [সমান সমান জ্যা কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী]

$OP = OP$ [সাধারণ বাহু]

$\therefore \Delta MOP \cong \Delta NOP$

$\therefore PM = PN$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু উপপাদ্য]

ধাপ ২. এখন, OM, AB এর উপর লম্ব হওয়ায়,

$AM = \frac{1}{2}AB$ [কেন্দ্র হতে অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

এবং ON, CD এর উপর লম্ব হওয়ায়,

$DN = \frac{1}{2}CD$ [কেন্দ্র হতে অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

ধাপ ৩. যেহেতু $AB = CD$ [কল্পনা]

$\therefore AM = DN$ [ধাপ-২]

$\therefore PM + AM = PN + DN$ [ধাপ-১]

সুতরাং $PA = PD$

ধাপ ৪. আবার, $AB = CD$

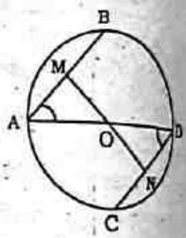
বা, $AB - PA = CD - PD$ [ধাপ ৩]

$\therefore PB = PC$

অতএব, $PA = PD$ এবং $PB = PC$. **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ৬ ▸ দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।

সমাধান : মনে করি, ABDC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AD ব্যাস। AB ও CD ব্যাসের বিপরীত দিকে দুইটি সমান সমান জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB \parallel CD$.



অঙ্কন : O হতে AB-এর উপর OM এবং CD-এর উপর ON লম্ব আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. ΔOAM এবং ΔODN-এর মধ্যে

$OM = ON$ [সমান সমান জ্যা কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী]

$OA = OD$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং $AM = DN$ [$OM \perp AB$, $ON \perp CD$ এবং সমান সমান জ্যা-এর মধ্যবিন্দু M ও N বলে]

অতএব, $\Delta OAM \cong \Delta ODN$ [বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য]

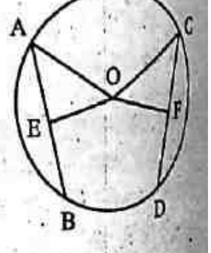
$\therefore \angle OAM = \angle ODN$

ধাপ ২. যেহেতু কোণদ্বয় একান্তর যেখানে AB ও CD এর ছেদক AD

$\therefore AB \parallel CD$. **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ৭ ▸ দেখাও যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা-এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যাটি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

সমাধান : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABDC একটি বৃত্ত। AB ও CD-এর দুইটি জ্যা এবং $AB > CD$. OE এবং OF কেন্দ্র থেকে যথাক্রমে AB ও CD এর উপর লম্ব।



প্রমাণ করতে হবে যে, $OE < OF$.

অঙ্কন : O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. যেহেতু $OE \perp AB$ [কল্পনা]

সেহেতু $AE = \frac{1}{2}AB$ [E, AB এর মধ্যবিন্দু]

ধাপ ২. অনুরূপভাবে, $CF = \frac{1}{2}CD$

ধাপ ৩. এখন, সমকোণী ত্রিভুজ AOE-এ

$OA^2 = OE^2 + AE^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

ধাপ ৪. তদ্রূপ সমকোণী ত্রিভুজ COF-এ

$OC^2 = OF^2 + CF^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$\therefore \; OE^2 + AE^2 = OF^2 + CF^2$

ধাপ ৫. $AB > CD$

$\frac{1}{2} AB > \frac{1}{2} CD$

বা, $AE > CF$

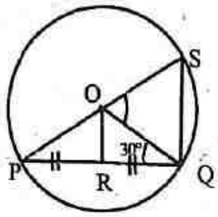
$\therefore \; AE^2 > CF^2$

সুতরাং, $OE^2 < OF^2$ [ধাপ (৪) থেকে]

$\therefore \; OE < OF$. (দেখানো হলো)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ৮ | O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে জ্যা $PQ = x$ সে.মি. এবং $OR \perp PQ$.



ক. $\angle QOS$ কোণের পরিমাণ কত?

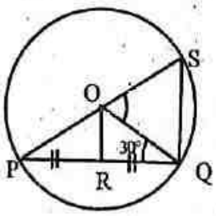
খ. প্রমাণ কর যে, PS জ্যা বৃত্তটির বৃহত্তম জ্যা।

গ. $OR = \left(\frac{x}{2} - 2\right)$ সে.মি. হলে x এর মান নির্ণয় কর।

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $\angle OQP = 30°$

অর্ধবৃত্তস্থ কোন বলে $\angle PQS = 90°$



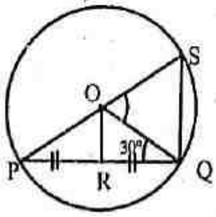
$\therefore \; \angle OQS = 90° - \angle OQP$
$= 90° - 30° = 60°$

আবার, $OP = OQ = OS$
[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore \; \angle OSQ = \angle OQS = 60°$ [সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ]

$\therefore \; \angle QOS = 180° - (\angle OQS + \angle OSQ)$
$= 180° - (60° + 60°)$
$= 180° - 120° = 60°$.

খ এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQS একটি বৃত্ত। PS ব্যাস বৃত্তটির O কেন্দ্রগামী জ্যা এবং PQ ও QS ব্যাসভিন্ন দুইটি জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, $PS > PQ$ এবং $PS > QS$ অর্থাৎ PS জ্যা বৃত্তটির বৃহত্তম জ্যা।



অঙ্কন : O, P; O, Q এবং O, S যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. $OP = OS = OQ$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এখন, ΔPOQ-এ

$OP + OQ > PQ$

[∵ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, $OP + OS > PQ$

অর্থাৎ, $PS > PQ$

ধাপ ২. আবার, ΔOQS-এ

$OQ + OS > QS$

[∵ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, $OP + OS > QS$

অর্থাৎ, $PS > QS$

$\therefore$ PS জ্যা, PQ ও QS প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর

সুতরাং, PS জ্যা বৃত্তটির বৃহত্তম জ্যা। (প্রমাণিত)

গ এখানে, $OR = \frac{x}{2} - 2$

$QR = \frac{1}{2} PQ = \frac{1}{2} x$ সে.মি.

এখন, ORQ সমকোণী ত্রিভুজে, $\tan 30° = \frac{OR}{QR}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{x}{2} - 2}{\frac{x}{2}}$

বা, $\frac{x}{2} - 2 = \frac{x}{2\sqrt{3}}$

বা, $\frac{x}{2} - \frac{x}{2\sqrt{3}} = 2$

বা, $x - \frac{x}{\sqrt{3}} = 4$

বা, $(\sqrt{3} - 1)x = 4\sqrt{3}$

বা, $x = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$

বা, $x = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$

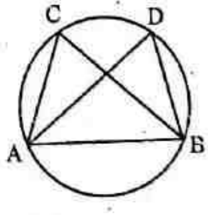
বা, $x = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = 2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) = 6 + 2\sqrt{3}$

নির্ণেয় মান : $x = 6 + 2\sqrt{3}$.

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর জ্যামিতিক প্রশ্নের সমাধান

প্রশ্ন ৯ ▶ প্রমাণ কর যে, দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তার একই পাশে অপর দুই বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করলে, বিন্দু চারটি সমবৃত্ত হবে।

সমাধান : মনে করি, দুইটি বিন্দু A ও B এর সংযোগ রেখাংশ AB তার একই পাশে অপর দুইটি বিন্দু C ও D তে সমান কোণ উৎপন্ন করে অর্থাৎ, $\angle ACB = \angle ADB$. প্রমাণ করতে হবে যে যে, A, B, C ও D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।



প্রমাণ :

ধাপ ১. $\angle ACB = \angle ADB$ [দেওয়া আছে]

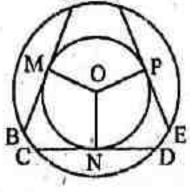
সুতরাং AB যে বৃত্তের চাপ সেই বৃত্তটি অবশ্যই C ও D বিন্দুগামী। অর্থাৎ, $\angle ACB$ এবং $\angle ADB$ একই চাপ AB এর উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ।

[∵ একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তংস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান]

অতএব, A, B, C এবং D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ১০ ▶ প্রমাণ কর যে, বৃত্তের সমান সমান জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলি সমবৃত্ত।

সমাধান : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB, CD এবং EF তিনটি পরস্পর সমান জ্যা। M, N ও P যথাক্রমে AB, CD ও EF এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, M, N ও P সমবৃত্ত।



অঙ্কন : O, M; O, N এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. M, AB এর মধ্যবিন্দু এবং OM কেন্দ্রগামী রেখাংশ

$\therefore OM \perp AB$ [বৃত্তের ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যায়ের উপর লম্ব]

অনুরূপভাবে, $ON \perp CD$ এবং $OP \perp EF$

ধাপ ২. যেহেতু $AB = CD = EF$

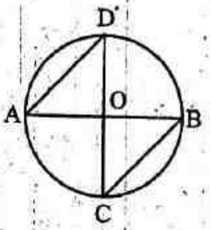
সেহেতু $OM = ON = OP$ [বৃত্তের সমান জ্যা কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী]

সুতরাং O কেন্দ্র করে OM বা ON বা OP এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি M, N ও P বিন্দু দিয়ে যাবে।

অতএব, M, N ও P সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ১১ ▸ দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা আঁকলে তারা সমান হয়।

সমাধান : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ব্যাস। AB ব্যাসের A ও B প্রান্ত হতে এর বিপরীত দিকে অঙ্কিত AD ও BC জ্যাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল। দেখাতে হবে যে, $AD = BC$.



অঙ্কন : O, D এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. $AD \parallel BC$ এবং AB এদের ছেদক

$\therefore \angle BAD = \angle ABC$ [একান্তর কোণ]

বা, $\angle OAD = \angle OBC$ [একান্তর কোণ]

ধাপ ২. ΔAOD ও ΔBOC-এ

$OA = OB$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$OD = OC$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

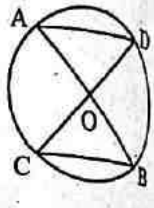
এবং $\angle OAD = \angle OBC$

$\therefore \Delta AOD \cong \Delta BOC$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য অনুসারে]

সুতরাং $AD = BC$. (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ১২ ▸ প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে এদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।

সমাধান : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD দুইটি জ্যা পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে। অর্থাৎ $AO = BO$ এবং $CO = DO$। প্রমাণ করতে হবে যে, O বিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র।



প্রমাণ :

ধাপ ১. ΔAOD ও ΔBOC-এ

$DO = CO$

এবং $AO = BO$ [$\because$ AB ও CD জ্যাদ্বয় O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়েছে]

$\angle AOD = \angle BOC$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore \Delta AOD \cong \Delta BOC$

$\therefore CO = AO$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$BO = DO$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore AO = BO = CO = DO$

অর্থাৎ O বিন্দু থেকে বৃত্তের পরিধিস্থ A, B, C, D বিন্দুর দূরত্ব সমান। তাই বলা যায় O বিন্দু থেকে বৃত্তের পরিধিস্থ যেকোনো বিন্দুর দূরত্ব সমান।

$\therefore$ O বিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র। (প্রমাণিত)

বহুনির্বাচনি অংশ — MCQ SECTION

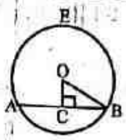
প্রিয় শিক্ষার্থী, বহুনির্বাচনি অংশে তোমাদের সেরা প্রস্তুতির জন্য এসএসসি পরীক্ষার প্রশ্নোত্তরের পাশাপাশি সেরা স্কুলের টেস্ট পরীক্ষার প্রশ্নোত্তর এবং মাস্টার ট্রেইনার প্যানেল কর্তৃক প্রণীত প্রশ্নোত্তর সংযোজন করা হয়েছে। অনুশীলনের সুবিধার্থে প্রশ্নের নিচে সঠিক উত্তরের সপক্ষে যুক্তি (তথ্য/ব্যাখ্যা) দেওয়া হয়েছে।

বোর্ড ও শীর্ষস্থানীয় স্কুলের টেস্ট পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও উত্তর — বিষয়বস্তুর ধারায় তথ্য/ব্যাখ্যা সংবলিত

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

বৃত্ত ▸ পাঠ্যবই; পৃষ্ঠা ১৫২

১.



O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে $OC = 3$ সে.মি. এবং $AB = 8$ সে.মি., বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত? [ব. বো. '২০]

ক 8 সে.মি. খ 6 সে.মি.
গ 5 সে.মি. ঘ 4 সে.মি.

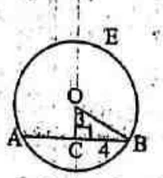
▸▸ তথ্য/ব্যাখ্যা : বৃত্তে, $AB = 8$ সে.মি.

$\therefore BC = \frac{8}{2} = 4$সে.মি.

$\therefore OB^2 = OC^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2$
$= 9 + 16 = 25$

$\therefore OB = \sqrt{25} = 5$ সে.মি.

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $OB = 5$ সে.মি.।



২. 5 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র থেকে কোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত

▸▸ তথ্য/ব্যাখ্যা : O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $OA = 5$ সে.মি. এবং $OC = 3$ সে.মি.

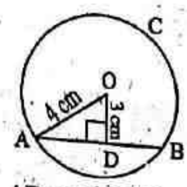
$\therefore OC^2 + AC^2 = OA^2$

বা, $AC^2 = OA^2 - OC^2 = 5^2 - 3^2 = 16$

$\therefore AC = \sqrt{16} = 4$ সে.মি.

$\therefore$ AB জ্যায়ের দৈর্ঘ্য $= 2AC = 2 \times 4$
$= 8$ সে.মি.।

৩.



$AB =$ কত সে.মি.? [সকল বোর্ড ২০১৮]

ক $\sqrt{7}$ খ $2\sqrt{7}$
গ 7 ঘ 14

▸▸ তথ্য/ব্যাখ্যা : $AD = \sqrt{OA^2 - OD^2}$
$= \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$

অ ধ্যা য় ৮

অনুশীলনী ৮.২

বৃত্তচাপ, বৃত্তস্থ ও কেন্দ্রস্থ কোণ সংক্রান্ত উপপাদ্য

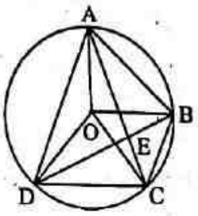
সাধারণ জ্যামিতিক অংশ

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রিয় শিক্ষার্থী, পাঠ্যবইয়ে এ অধ্যায়ে অনুশীলনীতে বিভিন্ন ধরনের জ্যামিতিক প্রশ্ন দেওয়া আছে। প্রতিটি প্রশ্নের যথাযথ ও নির্ভুল সমাধান এ অংশে সংযোজন করা হলো। এসব প্রশ্ন ও সমাধানের অনুশীলন তোমাদের সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তরের ধারণা সমৃদ্ধকরণে সহায়তা করবে।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর জ্যামিতিক প্রশ্নের সমাধান

প্রশ্ন ১ ▸ O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। AC, BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$.



সমাধান : বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ABCD বৃত্তের কেন্দ্র O এবং বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ ABCD। ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। O, A; O, B; O, C এবং O, D যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$.

প্রমাণ :

ধাপ ১. AB চাপের উপর অবস্থিত $\angle AOB = 2\angle ADB$
[বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

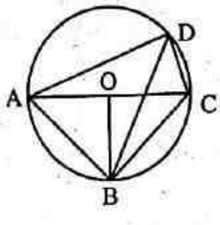
ধাপ ২. CD চাপের উপর অবস্থিত
$\angle COD = 2\angle DAC$ [একই কারণে]

ধাপ ৩. $\angle AOB + \angle COD$
$= 2(\angle ADB + \angle DAC)$ [ধাপ (১) ও (২) হতে]
$= 2(\angle ADE + \angle DAE)$

ধাপ ৪. ΔDAE এর বহিঃস্থ $\angle AEB =$ অন্তঃস্থ $(\angle ADE + \angle DAE)$
[ধাপ (৩) হতে]

$\therefore$ $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$. (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ২ ▸ O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। $\angle ADB + \angle BDC =$ এক সমকোণ। প্রমাণ কর যে, A, O, C এক সরলরেখায় অবস্থিত।



সমাধান : বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। B, D যোগ করি। $\angle ADB + \angle BDC =$ এক সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, A, O এবং C এক সরলরেখায় অবস্থিত।

অঙ্কন : O, A; O, B এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. যেহেতু কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ADB$ একই চাপ AB-এর উপর দণ্ডায়মান,
সেহেতু $\angle AOB = 2\ \angle ADB$ [একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ ২. অনুরূপভাবে, BC চাপের ওপর দণ্ডায়মান $\angle BOC = 2\ \angle BDC$

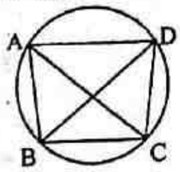
ধাপ ৩. $\angle AOB + \angle BOC = 2(\angle ADB + \angle BDC)$ [ধাপ (১) ও (২) হতে]
$= 2 \times 1$ সমকোণ [$\angle ADB + \angle BDC = 1$ সমকোণ]

$\therefore$ $\angle AOB + \angle BOC = 2$ সমকোণ।

যেহেতু $\angle AOB$ এবং $\angle BOC$ সন্নিহিত কোণ।

সুতরাং A, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত। (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ৩ ▸ দেখাও যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।



সমাধান : বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়াম। AB এবং CD এর দুইটি তির্যক বাহু। দেখাতে হবে যে, AB = CD.

অঙ্কন : A, C এবং B, D যোগ করি।

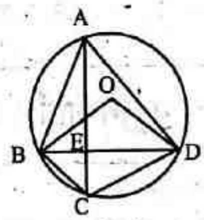
প্রমাণ :

ধাপ ১. AD ∥ BC এবং BD এদের ছেদক
$\therefore$ $\angle BDA = \angle CBD$ [একান্তর কোণ]

ধাপ ২. AB চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BDA$ এবং CD চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle CBD$
$\therefore$ চাপ AB = চাপ CD [সমান চাপ বৃত্তে সমান কোণ উৎপন্ন করে]
$\therefore$ AB = CD. (প্রমাণিত)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ৪ চিত্রে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং OB = 2.5 সে.মি..



ক. ABCD বৃত্তটির পরিধি নির্ণয় কর।

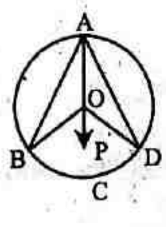
খ. প্রমাণ কর যে, $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$.

গ. AC ও BD পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$.

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = OB = 2.5 সে.মি.
$\therefore$ বৃত্তটির দৈর্ঘ্য = বৃত্তটির পরিধি
$= 2\pi r = 2 \times 3.1416 \times 2.5 = 15.708$ সে.মি.
$\therefore$ ABCD বৃত্তটির দৈর্ঘ্য 15.708 সে.মি.।

খ মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD একটি বৃত্ত এবং তার একই উপচাপ BCD এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BAD$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$.



প্রমাণ করতে হবে যে,
$\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$.

অঙ্কন : মনে করি, AD রেখাংশ কেন্দ্রগামী নয়। এক্ষেত্রে A বিন্দু দিয়ে কেন্দ্রগামী রেখাংশ AP আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. ΔAOB এর বহিঃস্থ কোণ

$\angle BOP = \angle BAO + \angle ABO$

[বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

ধাপ ২. ΔAOB-এ $OA = OB$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

অতএব, $\angle BAO = \angle ABO$ [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]

ধাপ ৩. $\angle BOP = 2\angle BAO$ [ধাপ (১) ও (২) হতে]

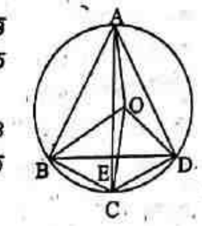
ধাপ ৪. একইভাবে ΔAOC থেকে $\angle DOP = 2\angle DAO$

ধাপ ৫. $\angle BOP + \angle DOP = 2\angle BAO + 2\angle DAO$ [ধাপ (৩) ও (৪) হতে]

অর্থাৎ, $\angle BOD = 2\angle BAD$

$\therefore \quad \angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$. (প্রমাণিত)

গ মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তে AC ও BD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। O, A এবং O, C যোগ করি। AB ও CD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যথাক্রমে $\angle AOB$ ও $\angle COD$ কোণ উৎপন্ন করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$.



প্রমাণ :

ধাপ ১. AB চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ADB$. [একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

সুতরাং $\angle AOB = 2\angle ADB = 2\angle ADE$

ধাপ ২. আবার, CD চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle COD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle CAD$ [একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

সুতরাং $\angle COD = 2\angle CAD = 2\angle EAD$

ধাপ ৩. কিন্তু ΔADE-এর অন্তঃস্থ $(\angle EAD + \angle ADE)$ = বহিঃস্থ $\angle AEB$ [যোগ করে]

ধাপ ৪. এখন, $\angle AOB + \angle COD = 2(\angle ADE + \angle EAD) = 2\angle AEB$

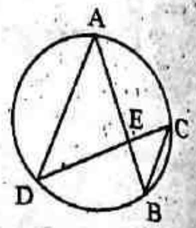
[বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

অতএব, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$. (প্রমাণিত)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর জ্যামিতিক প্রশ্নের সমাধান

প্রশ্ন ৫ ▶ ABCD বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুইটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে, ΔAED ও ΔBEC সদৃশকোণী।

সমাধান : দেওয়া আছে, ABCD বৃত্তের AB এবং CD জ্যা দুইটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। A, D এবং B, C যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔAED ও ΔBEC সদৃশকোণী।



প্রমাণ :

ধাপ ১. একই চাপ BD এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BAD$ এবং $\angle BCD$

$\therefore \angle BAD = \angle BCD$

[$\because$ একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান]

অর্থাৎ $\angle EAD = \angle ECB$

ধাপ ২. আবার, একই চাপ AC এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle ADC$ এবং $\angle ABC$

$\therefore \angle ADC = \angle ABC$

[একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান]

অর্থাৎ $\angle ADE = \angle CBE$

ধাপ ৩. এখন, ΔAED ও ΔBEC-এ,

$\angle EAD = \angle ECB$

$\angle ADE = \angle CBE$

এবং $\angle AED = \angle BEC$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore \Delta AED$ ও ΔBEC সদৃশকোণী। (প্রমাণিত)

বহুনির্বাচনি অংশ — MCQ SECTION

প্রিয় শিক্ষার্থী, বহুনির্বাচনি অংশে তোমাদের সেরা প্রস্তুতির জন্য এসএসসি পরীক্ষার প্রশ্নোত্তরের পাশাপাশি সেরা স্কুলের টেস্ট পরীক্ষার প্রশ্নোত্তর এবং মাস্টার ট্রেইনার প্যানেল কর্তৃক প্রণীত প্রশ্নোত্তর সংযোজন করা হয়েছে। অনুশীলনের সুবিধার্থে প্রশ্নের নিচে সঠিক উত্তরের সপক্ষে যুক্তি (তথ্য/ব্যাখ্যা) দেওয়া হয়েছে।

বোর্ড ও শীর্ষস্থানীয় স্কুলের টেস্ট পরীক্ষার বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও উত্তর — বিষয়বস্তুর ধারায় তথ্য/ব্যাখ্যা সংবলিত

বৃত্তচাপ ▶ পাঠ্যবই; পৃষ্ঠা ১৫৭

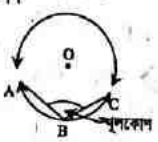
সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১. কোনো বৃত্তের উপচাপে অন্তর্লিখিত কোণ— [সি. বো. '২০; ব. বো. '১৬]

ক সূক্ষ্মকোণ   খ সমকোণ
গ স্থূলকোণ   ঘ প্রবৃদ্ধ কোণ

▶▶ তথ্য/ব্যাখ্যা : O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABC একটি উপচাপ

$\therefore$ ABC উপচাপে অন্তর্লিখিত কোণ $\angle ABC$ একটি স্থূলকোণ।



২.

O বৃত্তের কেন্দ্র

উপরের চিত্রে $\angle POQ = 88°$ হলে $\angle PRQ$ = কত? [সি. বো. '২০]

ক 44°   খ 88°
গ 92°   ঘ 136°

▶▶ তথ্য/ব্যাখ্যা :

চিত্রে, $\angle PSQ = \frac{1}{2}\angle POQ$

$= \frac{1}{2} \times 88° = 44°$

$\angle PRQ + \angle PSQ = 180°$

বা, $\angle PRQ = 180° - \angle PS$

$= 180° - 44° = 136°$.

৩. কোনো বৃত্তে অধিচাপের অন্তর্লিখিত কোণ হচ্ছে— [ঢা. বো. '১৯]

ক সূক্ষ্মকোণ   খ সমকোণ
গ স্থূলকোণ   ঘ প্রবৃদ্ধকোণ

▶▶ তথ্য/ব্যাখ্যা :

অধিচাপ ABC

$\therefore \angle ABC$ = সূক্ষ্মকোণ।

উত্তরের শুদ্ধতা/ নির্ভুলতা যাচাই করো

১	গ	২	ঘ	৩	ক

অনুশীলনী ৮.৩

অধ্যায় ৮ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ও বৃত্ত সংক্রান্ত উপপাদ্য

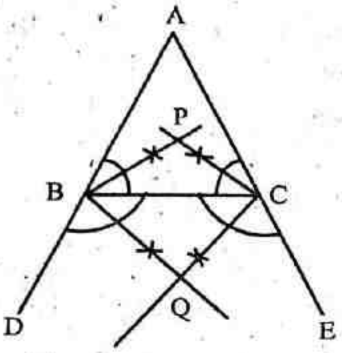
সাধারণ জ্যামিতিক অংশ — পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রিয় শিক্ষার্থী, পাঠ্যবইয়ে এ অধ্যায়ে অনুশীলনীতে বিভিন্ন ধরনের গাণিতিক প্রশ্ন দেওয়া আছে। প্রতিটি প্রশ্নের যথাযথ ও নির্ভুল সমাধান এ অংশে সংযোজন করা হলো। এসব প্রশ্ন ও সমাধানের অনুশীলন তোমাদের সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তরের ধারণা সমৃদ্ধকরণে সহায়তা করবে।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর জ্যামিতিক প্রশ্নের সমাধান

প্রশ্ন ১ ▸ Δ ABC-এ $\angle B$ ও $\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC-এর $\angle B$ ও $\angle C$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

প্রমাণ :

ধাপ ১. $\angle ABC + \angle CBD = 180°$ [সরল কোণ]

বা, $\frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle CBD = 90°$ [BP ও BQ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক]

বা, $\angle PBC + \angle CBQ = 90°$

বা, $\angle PBQ = 90°$

ধাপ ২. $\angle ACB + \angle BCE = 180°$ [সরলকোণ]

বা, $\frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle BCE = 90°$

বা, $\angle BCP + \angle BCQ = 90°$ [CP ও CQ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক]

বা, $\angle PCQ = 90°$

ধাপ ৩. $\angle PBQ + \angle PCQ = 90° + 90° = 180°$

[ধাপ (১) ও (২) হতে]

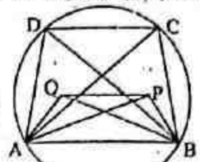
কিন্তু কোণদ্বয় চতুর্ভুজ BPCQ এর বিপরীত কোণ।

$\therefore$ BPCQ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore$ B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ২ ▸ ABCD একটি বৃত্ত। $\angle CAB$ ও $\angle CBA$-এর সমদ্বিখণ্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং $\angle DBA$ ও $\angle DAB$ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি বৃত্ত। A, B; B, C; C, D, D, A; A, C এবং B, D যোগ করি। $\angle CAB$ এবং $\angle CBA$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে AP ও BP পরস্পর P বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। আবার, $\angle DBA$ এবং $\angle DAB$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে BQ ও AQ পরস্পর Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, A, Q, P ও B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

প্রমাণ :

ধাপ ১. BP, $\angle CBA$-এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore \angle ABP = \frac{1}{2}\angle CBA$

ধাপ ২. AP, $\angle CAB$-এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore \angle BAP = \frac{1}{2}\angle CAB$

ধাপ ৩. এখন, ΔABP-এ

$\angle ABP + \angle BAP + \angle APB = 180°$ [$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

বা, $\frac{1}{2}\angle CBA + \frac{1}{2}\angle CAB + \angle APB = 180°$

বা, $\angle CBA + \angle CAB + 2\angle APB = 360°$ [ধাপ (১) ও (২) হতে]

বা, $\angle CBA + \angle CAB + \angle ACB + 2\angle APB = 360° + \angle ACB$ [উভয়পক্ষে $\angle ACB$ যোগ করে]

বা, $180° + 2\angle APB = 360° + \angle ACB$ [$\because$ ΔABC এ, $\angle CBA + \angle CAB + \angle ACB = 180°$]

বা, $2\angle APB = 360° - 180° + \angle ACB$

বা, $2\angle APB = 180° + \angle ACB$

বা, $\angle ACB = 2\angle APB - 180°$

অনুরূপভাবে, $\angle ADB = 2\angle AQB - 180°$ [ধাপ (৩) হতে]

ধাপ ৪. কিন্তু, $\angle ACB$ এবং $\angle ADB$ উভয়ই AB চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore \angle ACB = \angle ADB$

বা, $2\angle APB - 180° = 2\angle AQB - 180°$

বা, $2\angle APB = 2\angle AQB$

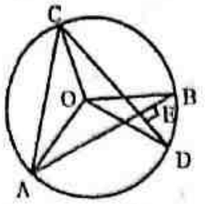
বা, $\angle APB = \angle AQB$

এখন, $\angle APB$ এবং $\angle AQB$ কোণদ্বয় A, B বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা AB এর একই পার্শ্বস্থ দুই বিন্দু P ও Q এ উৎপন্ন এবং সমান।

$\therefore$ A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ৩ ▸ O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, ∠AOD + ∠BOC = দুই সমকোণ।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত E বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ∠AOD + ∠BOC = দুই সমকোণ।

অঙ্কন : A, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. একই চাপ AD-এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ ∠AOD এবং বৃত্তস্থ ∠ACD

∴ ∠AOD = 2 ∠ACD

[একই চাপের উপর কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ ২. তদ্রূপ ∠BOC = 2 ∠BAC

ধাপ ৩. ∴ ∠AOD + ∠BOC = 2 (∠ACD + ∠BAC) [ধাপ (১) ও (২) হতে]

কিন্তু ΔAEC-এ, ∠AEC = 1 সমকোণ।

∴ ∠CAE + ∠ACE = 1 সমকোণ [কল্পনা]

বা, ∠CAB + ∠ACD = 1 সমকোণ

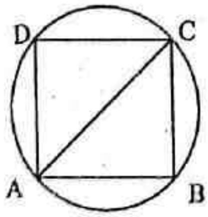
ধাপ ৪. ∠AOD + ∠BOC = 2 × 1 সমকোণ

∴ ∠AOD + ∠BOC = 2 সমকোণ [ধাপ (৩) হতে]

অতএব, ∠AOD + ∠BOC = দুই সমকোণ। (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ৪ ▸ ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা যদি ∠BAD-এর সমদ্বিখণ্ডক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, BC = CD.

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক অর্থাৎ ABCD একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। AC রেখা, ∠BAD-এর সমদ্বিখণ্ডক।

প্রমাণ করতে হবে যে, BC = CD.

প্রমাণ :

ধাপ ১. AC রেখা সমদ্বিখণ্ডক হওয়ায় ∠CAD = ∠CAB.

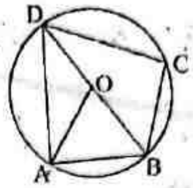
CD চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ ∠CAD, BC চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ ∠CAB উভয়ই সমান হওয়ায় চাপ CD = চাপ BC

[চাপদ্বয় সমান হলে চাপের উপর অবস্থিত জ্যাগুলো পরস্পর সমান]

∴ BC = CD. (প্রমাণিত)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ৫ ▸ O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 2.5 সে.মি., AB = 3 সে.মি. এবং BD, ∠ADC এর সমদ্বিখণ্ডক।



ক. AD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, ∠ADC + ∠ABC = 180°.

গ. প্রমাণ কর যে, AB = BC.

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্রে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলে, ∠A = 90°

∴ ABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

এখানে, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ, OA = OB = OD = 2.5 সে.মি.

এবং AB = 3 সে.মি.

∴ BD = 2 × OD সে.মি. = 2 × 2.5 সে.মি. = 5 সে.মি.

এখন, Δ ABD-এ,

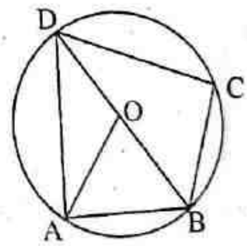
$BD^2 = AB^2 + AD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]

বা, $AD^2 = BD^2 - AB^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

বা, $AD = \sqrt{16} = 4$

নির্ণেয় AD এর দৈর্ঘ্য 4 সে. মি.।

খ মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে ABCD চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ∠ADC + ∠ABC = দুই সমকোণ।



অঙ্কন : O, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. একই চাপ ABC এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ ∠AOC = 2 (বৃত্তস্থ ∠ADC)

অর্থাৎ ∠AOC = 2∠ADC

[একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ ২. একই চাপ ADC এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ ∠AOC = 2 (বৃত্তস্থ ∠ABC)

অর্থাৎ, ∠AOC = 2∠ABC

[একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

∴ ∠AOC + প্রবৃদ্ধ কোণ ∠AOC = 2(∠ADC + ∠ABC)

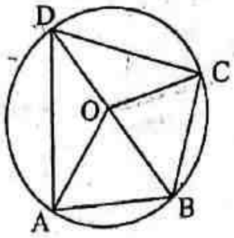
কিন্তু ∠AOC + প্রবৃদ্ধ কোণ ∠AOC = 360°

∴ 2(∠ADC + ∠ABC) = 360°

বা, $\angle ADC + \angle ABC = \frac{360°}{2} = 180°$

সুতরাং, ∠ADC + ∠ABC = 180°. (প্রমাণিত)

গ এখানে, ABCD চতুর্ভুজটি O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত বলে এর বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। BD, $\angle ADC$ এর সমদ্বিখণ্ডক।



প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = BC$.

প্রমাণ :

ধাপ ১. BD, $\angle ADC$ এর সমদ্বিখণ্ডক হওয়ায়,

$\angle BDA = \angle BDC$

AB চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BDA$

আবার, BC চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BDC$

কিন্তু বৃত্তস্থ কোণদ্বয় সমান হওয়ায়

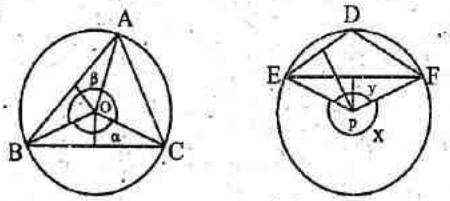
চাপ AB = চাপ BC [চাপদ্বয় সমান হলে চাপের উপর অবস্থিত জ্যাগুলো পরস্পর সমান]

$\therefore$ $AB = BC$. **(প্রমাণিত)**

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর জ্যামিতিক প্রশ্নের সমাধান

প্রশ্ন ৬ ▸ সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত যেকোনো দুইটি ত্রিভুজের শিরঃকোণদ্বয় সম্পূরক হলে, প্রমাণ কর যে, এদের পরিবৃত্তদ্বয় সমান হবে।

সমাধান :



বিশেষ নির্বাচন : মনে করি, $\triangle ABC$ এবং $\triangle DEF$ এর ভূমি BC ও EF পরস্পর সমান অর্থাৎ $BC = EF$ এবং শিরঃকোণ $\angle A$ ও $\angle D$ পরস্পর সম্পূরক অর্থাৎ $\angle A + \angle D = 2$ সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্তদ্বয় সমান।

অঙ্কন : AB ও BC এর লম্বদ্বিখণ্ডক আঁকি। লম্বদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। আবার, DE ও EF এর লম্বদ্বিখণ্ডক আঁকি। লম্বদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে ছেদ করে। O কে কেন্দ্র করে OB ব্যাসার্ধ নিয়ে এবং P কে কেন্দ্র করে EP ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্ত আঁকি। এই বৃত্তদ্বয়ই হবে ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্ত। O, B; O, C এবং P, E, P, F যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ-১. ABC বৃত্তের BC উপচাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle BOC = \angle\alpha$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BAC$.

$\therefore \angle\alpha = 2\angle BAC$ [$\because$ কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

আবার, DEF বৃত্তে EF অধিচাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle EPF = \angle x$ এবং বৃত্তস্থ $\angle EDF$.

$\therefore \angle x = 2\angle EDF$

এখন, $\angle\alpha + \angle x = 2\angle BAC + 2\angle EDF$

$= 2(\angle A + \angle D)$

$= 2 \times 2$ সমকোণ

$\therefore$ $\angle\alpha + \angle x = 4$ সমকোণ

ধাপ ২. O বিন্দুতে কোণের সমষ্টি, $\angle\alpha + \angle\beta = 4$ সমকোণ

অর্থাৎ $\angle\alpha + \angle\beta = \angle\alpha + \angle x$

বা, $\angle\beta = \angle x$

বা, BC অধিচাপের কেন্দ্রস্থ কোণ = EF অধিচাপের কেন্দ্রস্থ কোণ

$\therefore$ অধিচাপ BC = অধিচাপ EF

ধাপ ৩. P বিন্দুতে কোণের সমষ্টি, $\angle x + \angle y = 4$ সমকোণ

অর্থাৎ $\angle x + \angle y = \angle\alpha + \angle x$

বা, $\angle y = \angle\alpha$

বা, EF উপচাপের কেন্দ্রস্থ কোণ = BC উপচাপের কেন্দ্রস্থ কোণ

বা, উপচাপ EF = উপচাপ BC

$\therefore$ উপচাপ BC = উপচাপ EF

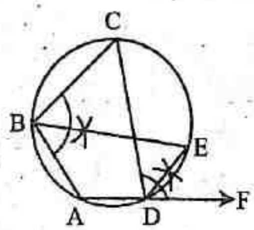
অধিচাপ BC + উপচাপ BC = অধিচাপ EF + উপচাপ EF

$\therefore$ O কেন্দ্রবিশিষ্ট পরিবৃত্তের পরিধি = P কেন্দ্রবিশিষ্ট পরিবৃত্তের পরিধি।

সুতরাং পরিবৃত্তদ্বয় সমান। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ৭ ▸ প্রমাণ কর যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যেকোনো কোণের সমদ্বিখণ্ডক ও তার বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের উপর ছেদ করে।

সমাধান :



বিশেষ নির্বাচন : মনে করি, ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $\angle B$ এর সমদ্বিখণ্ডক BE এবং $\angle D$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক DE পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, ছেদবিন্দু E বৃত্তস্থ।

প্রমাণ : (১) ABCD চতুর্ভুজে $\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ

আবার, $\angle ADC + \angle CDF = 2$ সমকোণ

[$\because \angle ADC + \angle CDF$ = এক সরলকোণ]

$\therefore$ $\angle ABC + \angle ADC = \angle ADC + \angle CDF$

বা, $\angle ABC = \angle CDF$

বা, $\frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle CDF$

$\therefore$ $\frac{1}{2}\angle ABC = \angle CDE$ [$\because \frac{1}{2}\angle CDF = \angle CDE$]

(২) $\angle ABE + \angle ADE = \angle ABE + \angle ADC + \angle CDE$

$= \frac{1}{2}\angle ABC + \angle ADC + \frac{1}{2}\angle ABC$

$= \angle ABC + \angle ADC$

$= 2$ সমকোণ

যেহেতু ABED চতুর্ভুজে $\angle ABE + \angle ADE = 2$ সমকোণ।

সেহেতু ABED চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ

সুতরাং E বিন্দুটি বৃত্তস্থ। **(প্রমাণিত)**

অধ্যায় ৮

অনুশীলনী ৮.৪
বৃত্তের ছেদক ও স্পর্শক

সাধারণ জ্যামিতিক অংশ — পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

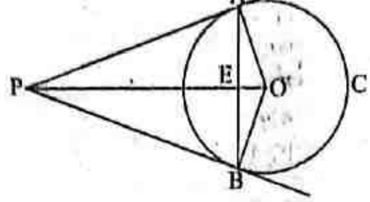
প্রিয় শিক্ষার্থী, পাঠ্যবইয়ে এ অধ্যায়ে অনুশীলনীতে বিভিন্ন ধরনের জ্যামিতিক প্রশ্ন দেওয়া আছে। প্রতিটি প্রশ্নের যথাযথ ও নির্ভুল সমাধান এ অংশে সংযোজন করা হলো। এসব প্রশ্ন ও সমাধানের অনুশীলন তোমাদের সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তরের ধারণা সমৃদ্ধকরণে সহায়তা করবে।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর জ্যামিতিক প্রশ্নের সমাধান

প্রশ্ন ১ ▸ O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা হল। প্রমাণ কর যে, OP সরলরেখা স্পর্শ জ্যা-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC বৃত্তের O কেন্দ্র এবং P বহিঃস্থ বিন্দু। P হতে অঙ্কিত PA ও PB স্পর্শক বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।



O, P এবং A, B যোগ করি। AB স্পর্শ জ্যা। OP, AB কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, OP, AB-এর লম্বদ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন : O, A এবং O, B যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. যেহেতু OA এবং OB উভয়ই স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। [PA ও PB, A ও B বিন্দুতে স্পর্শক]

সুতরাং, $\angle OAP$ = এক সমকোণ

এবং $\angle OBP$ = এক সমকোণ

সমকোণী ΔPAO ও সমকোণী ΔPBO-এর মধ্যে

PA = PB [বহিঃস্থ বিন্দু হতে স্পর্শকদ্বয় সমান]

OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং OP সাধারণ বাহু

$\therefore$ $\Delta PAO \cong \Delta PBO$

$\therefore$ $\angle POA = \angle POB$ বা, $\angle AOE = \angle BOE$

ধাপ ২. এখন ΔOAE ও ΔOBE-এর মধ্যে

OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

OE = OE [সাধারণ বাহু]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOE$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BOE$

অতএব, $\Delta OAE \cong \Delta OBE$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore$ AE = BE

এবং $\angle AEO = \angle BEO$

কিন্তু কোণদ্বয় সন্নিহিত বলে প্রত্যেকে এক সমকোণ।

সুতরাং OE, AB-এর লম্বদ্বিখণ্ডক

অর্থাৎ, OP, AB-এর লম্বদ্বিখণ্ডক। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ২ ▸ প্রমাণ কর যে, দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রিক হলে এবং বৃহত্তর বৃত্তটির কোনো জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে উক্ত জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

সমাধান : বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ও DPQ বৃত্ত দুইটি এককেন্দ্রিক অর্থাৎ উভয় বৃত্তের কেন্দ্র O। বৃত্ত ABC, বৃত্ত DPQ হতে বৃহত্তর। ABC বৃত্তের জ্যা AB, DPQ বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, P বিন্দুতে AB সমদ্বিখণ্ডিত হবে। অর্থাৎ PA = PB.

অঙ্কন : O, A; O, B এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. OP, DPQ বৃত্তের স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ এবং AB স্পর্শক।

সুতরাং, $\angle OPB$ = এক সমকোণ = $\angle OPA$।

সমকোণী ΔOPB ও সমকোণী ΔOPA-এর মধ্যে

OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

OP = OP [সাধারণ বাহু]

$\therefore$ $\Delta OPB \cong \Delta OPA$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

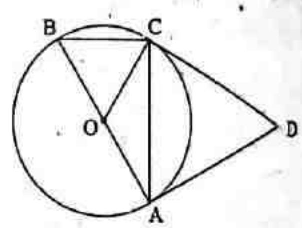
$\therefore$ PA = PB

অর্থাৎ AB, P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ৩ ▸ AB কোনো বৃত্তের ব্যাস এবং BC ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। যদি A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB ব্যাস। BC ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। A, C যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

অঙ্কন : O, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. ΔBOC-এ

OB = OC = BC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

অতএব, ΔBOC সমবাহু।

ধাপ ২. সুতরাং, $\angle OBC = 60° = \angle OCB$

[সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ 60°]

ধাপ ৩. এখন, $\angle AOC = \angle OBC + \angle OCB$

বা, $\angle AOC = 60° + 60° = 120°$ [ধাপ (২) থেকে]

আবার, AO এবং CO স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ হওয়ায়;

$\angle DAO$ = এক সমকোণ = $\angle DCA$

ধাপ ৪. এখন, ADCO চতুর্ভুজক্ষেত্রে $\angle D + \angle O$ = দুই সমকোণ

সুতরাং, $\angle ADC + \angle AOC = 180°$

বা, $\angle ADC = 180° - \angle AOC = 180° - 120° = 60°$ [ধাপ (৩) হতে]

আবার, AD = CD

সুতরাং, $\angle ACD = \angle DAC$

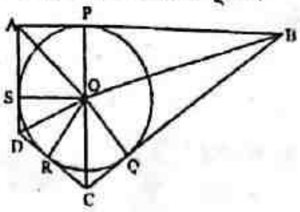
ধাপ ৫. এখন, ΔACD-এ, $\angle ADC = 60°$

$\therefore$ অপর কোণদ্বয় সমান হওয়ায় প্রত্যেকটি কোণ 60°।

অতএব, ΔACD সমবাহু। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ৪ ▸ প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ ধারণ করে, তারা পরস্পর সম্পূরক।

সমাধান : বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD চতুর্ভুজটি পরিলিখিত। AB কেন্দ্রে $\angle AOB$ এবং AB-এর বিপরীত বাহু CD কেন্দ্রে $\angle COD$ উৎপন্ন করেছে.



প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOB$ এবং $\angle COD$ পরস্পর সম্পূরক অর্থাৎ $\angle AOB + \angle COD$ = দুই সমকোণ।

অঙ্কন : AB, BC, CD ও DA বাহু বৃত্তটিকে যথাক্রমে P, Q, R ও S বিন্দুতে স্পর্শ করে। O, P; O, Q; O, R এবং O, S যোগ করি।

প্রমাণ : ধাপ ১. ΔPOB ও ΔBOQ-এ,

PB = QB, [একটি বহিঃস্থ বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় সমান]

OP = OQ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং OB = OB [সাধারণ বাহু]

$\therefore \Delta POB \cong \Delta BOQ$ [বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য]

সুতরাং, $\angle POB = \angle QOB$

ধাপ ২. অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$\angle AOP = \angle AOS$, $\angle SOD = \angle ROD$

এবং $\angle COQ = \angle COR$

ধাপ ৩. এখন, $\angle AOB + \angle COD + \angle AOD + \angle BOC$ = চার সমকোণ [ধাপ (২) হতে]

ধাপ ৪. কিন্তু $\angle AOD = \angle AOS + \angle DOS = \angle AOP + \angle DOR$ [ধাপ (১) ও (২) হতে]

ধাপ ৫. এবং $\angle BOC = \angle BOQ + \angle COQ = \angle BOP + \angle COR$ [ধাপ (৩), (৪) ও (৫) হতে]

ধাপ ৬. সুতরাং, $\angle AOB + \angle COD + \angle AOP + \angle DOR + \angle BOP + \angle COR$ = চার সমকোণ

[$\because \angle AOP + \angle BOP = \angle AOB$ এবং $\angle DOR + \angle COR = \angle COD$]

বা, $\angle AOB + \angle COD + (\angle AOP + \angle BOP) + (\angle DOR + \angle COR)$ = চার সমকোণ

বা, $\angle AOB + \angle COD + \angle AOB + \angle COD$ = চার সমকোণ

বা, $2(\angle AOB + \angle COD)$ = চার সমকোণ

$\therefore \angle AOB + \angle COD$ = দুই সমকোণ। (প্রমাণিত)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ৫ O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে বৃত্তে PA ও PB দুইটি স্পর্শক।

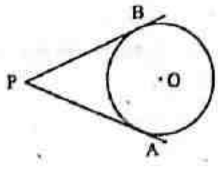
ক. উদ্দীপকের আলোকে চিত্র আঁক।

খ. প্রমাণ কর যে, PA = PB.

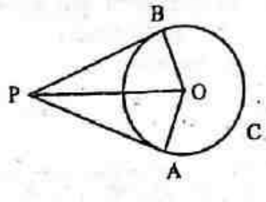
গ. প্রমাণ কর যে, OP রেখাংশ স্পর্শ জ্যা AB এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের P একটি বহিঃস্থ বিন্দু এবং PA ও PB রশ্মিদ্বয় বৃত্তের A ও B বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক।



খ মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের P একটি বহিঃস্থ বিন্দু এবং PA ও PB রশ্মিদ্বয় বৃত্তের A ও B বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে যে, PA = PB।



অঙ্কন : O, A; O, B এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. যেহেতু PA স্পর্শক এবং OA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ, সেহেতু $PA \perp OA$. [স্পর্শক স্পর্শকবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব]

$\therefore \angle PAO$ = এক সমকোণ।

অনুরূপে $\angle PBO$ = এক সমকোণ

$\therefore \Delta PAO$ এবং ΔPBO উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।

ধাপ ২. এখন, ΔPAO ও ΔPBO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে

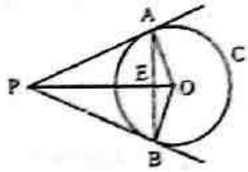
অতিভুজ PO = অতিভুজ PO [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং OA = OB [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা]

$\therefore \Delta PAO \cong \Delta PBO$.

$\therefore$ PA = PB. (প্রমাণিত)

গ মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের P একটি বহিঃস্থ বিন্দু। P হতে অঙ্কিত PA ও PB স্পর্শক বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। O, P এবং A, B যোগ করি। AB স্পর্শ জ্যা। OP, AB কে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, OP, AB-এর লম্বদ্বিখণ্ডক।



অঙ্কন : O, A এবং O, B যোগ করি।

প্রমাণ : ধাপ ১. যেহেতু OA এবং OB উভয়ই স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

সুতরাং $\angle OAP$ = এক সমকোণ [PA ও PB, A ও B বিন্দুতে স্পর্শক]

এবং $\angle OBP$ = এক সমকোণ

সমকোণী ΔPAO ও সমকোণী ΔPBO-এর মধ্যে PA = PB [বহিঃস্থ বিন্দু হতে স্পর্শকদ্বয় সমান]

OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore \Delta PAO \cong \Delta PBO$ [অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

$\therefore \angle POA = \angle POB$

ধাপ ২. এখন ΔOAE ও ΔOBE-এর মধ্যে

OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং OE = OE [সাধারণ বাহু]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOE$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BOE$

অতএব, $\Delta OAE \cong \Delta OBE$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore$ AE = BE

এবং $\angle AEO = \angle BEO$

কিন্তু কোণদ্বয় সন্নিহিত বলে প্রত্যেকে এক সমকোণ।

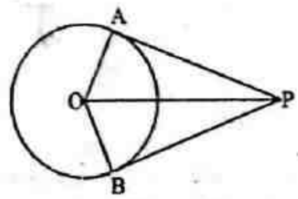
সুতরাং OE, AB-এর লম্বদ্বিখণ্ডক।

অর্থাৎ OP, AB-এর লম্বদ্বিখণ্ডক। (প্রমাণিত)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর জ্যামিতিক প্রশ্নের সমাধান

প্রশ্ন ৬ ▸ দেওয়া আছে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PA ও PB স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ কর যে, PO, $\angle APB$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সমাধান : বিশেষ নির্বাচন : দেওয়া আছে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PA ও PB স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, PO, $\angle APB$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



অঙ্কন : O, A এবং O, B যোগ করি।

প্রমাণ : ধাপ ১. ΔAOP এবং ΔBOP-এ

OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

PA = PB [বহিঃস্থ কোনো বিন্দু হতে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় সমান]

এবং OP = OP [সাধারণ বাহু]

$\therefore \Delta AOP \cong \Delta BOP$

$\therefore \angle APO = \angle BPO$

$\therefore$ PO, $\angle APB$ কে সমদ্বিখণ্ডক করে। (প্রমাণিত)

অধ্যায় ৮

অনুশীলনী ৮.৫
বৃত্ত সম্পর্কীয় সম্পাদ্য ও বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন

সাধারণ জ্যামিতিক অংশ
পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রিয় শিক্ষার্থী, পাঠ্যবইয়ে এ অধ্যায়ে অনুশীলনীতে বিভিন্ন ধরনের জ্যামিতিক প্রশ্ন দেওয়া আছে। প্রতিটি প্রশ্নের যথাযথ ও নির্ভুল সমাধান এ অংশে সংযোজন করা হলো। এসব প্রশ্ন ও সমাধানের অনুশীলন তোমাদের সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তরের ধারণা সমৃদ্ধকরণে সহায়তা করবে।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও উত্তর

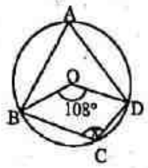
১। কোনো বৃত্তের অধিচাপে অন্তর্লিখিত কোণ–

ⓚ সূক্ষ্মকোণ ⓚ স্থূলকোণ
ⓖ সমকোণ ⓖ পূরক কোণ

▸▸ তথ্য/ব্যাখ্যা : কোনো বৃত্তের অধিচাপে অন্তর্লিখিত কোণ সূক্ষ্মকোণ।

২। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে x-এর মান কত?

ⓚ $126°$ ⓚ $108°$
ⓖ $72°$ ⓖ $54°$



▸▸ তথ্য/ব্যাখ্যা : $x =$ বৃত্তস্থ $\angle BCD$

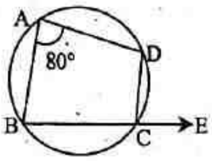
$= \frac{1}{2} \times$ কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle BOD$

$= \frac{1}{2} \times (360° - 108°)$

$= 126°$.

৩। পাশের চিত্রে $\frac{1}{2}\ \angle ECD =$ কত ডিগ্রি?

ⓚ $40°$ ⓚ $50°$
ⓖ $80°$ ⓖ $100°$



▸▸ তথ্য/ব্যাখ্যা : $\frac{1}{2}\angle ECD = \frac{1}{2} \times (180° - \angle BCD)$

$= \frac{1}{2}\angle BAD$

$= \frac{1}{2} \times 80°$

$= 40°$.

৪। দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে। তাদের একটির ব্যাস 8 সে.মি. এবং অপরটির ব্যাসার্ধ 4 সে.মি. হলে, এদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত সে.মি. হবে?

ⓚ 0 ⓚ 4
ⓖ 8 ⓖ 12

▸▸ তথ্য/ব্যাখ্যা : এখানে,

উভয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 সে.মি. ও $\frac{8}{2} = 4$ সে.মি.

যেহেতু বৃত্তদ্বয় বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করেছে। অতএব কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= (4 + 4)$ বা, 8 সে.মি.।

৫। O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক PQ ও PR টানা হলে ΔPQR হবে–

i. সমদ্বিবাহু
ii. সমবাহু
iii. সমকোণী

নিচের কোনটি সঠিক?

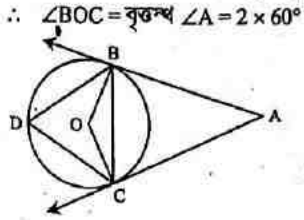
ⓚ i ⓚ i ও ii
ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

৬। ABC সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O হলে, $\angle BOC =$ কত ডিগ্রি?

ⓚ $30°$ ⓚ $60°$
ⓖ $90°$ ⓖ $120°$

▸▸ তথ্য/ব্যাখ্যা : ABC সমবাহু ত্রিভুজে, $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

$\therefore\ \angle BOC =$ বৃত্তস্থ $\angle A = 2 \times 60° = 120°$.



AB ও AC রেখাদ্বয় BCD বৃত্তের স্পর্শক। বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $\angle BAC = 60°$.
এই তথ্যের আলোকে ৭ ও ৮নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৭। $\angle BOC$ এর মান কত?

ⓚ $300°$ ⓚ $270°$
ⓖ $120°$ ⓖ $90°$

▸▸ তথ্য/ব্যাখ্যা : এখানে,
AB ও AC স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ, $\angle BAC = 60°$
$\therefore \angle BOC = 180° - 60° = 120°$.

৮। D, BDC চাপের মধ্যবিন্দু হলে–

i. $\angle BDC = \angle BAC$
ii. $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$
iii. $\angle BOC = \angle DBC + \angle BCD$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

উত্তরের শুদ্ধতা/ নির্ভুলতা যাচাই করো

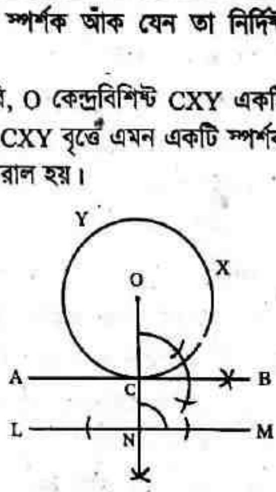
১	ক	২	ক	৩	ক	৪	গ	৫	ক	৬	ঘ	৭	গ	৮	ঘ

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর জ্যামিতিক প্রশ্নের সমাধান

প্রশ্ন ৯ ▸ কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়।

সমাধান : বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট CXY একটি বৃত্ত। LM একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। CXY বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক অঙ্কন করতে হবে যা LM এর সমান্তরাল হয়।

অঙ্কন :



১. বৃত্তের কেন্দ্র O হতে LM রেখার উপর ON লম্ব আঁকি। ON বৃত্তকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

২. OC রেখার C বিন্দুতে CB লম্ব টানি এবং একে বিপরীত দিকে A পর্যন্ত বর্ধিত করি।

তাহলে AB স্পর্শকই LM এর সমান্তরাল অঙ্কিত হল।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, ON, LM এর উপর লম্ব।

$\therefore \angle ONM$ = এক সমকোণ

CB, OC এর উপর লম্ব

$\therefore \angle OCB$ = এক সমকোণ

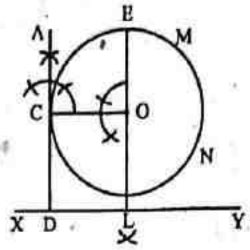
C বৃত্তের স্পর্শ বিন্দু।

$\angle ONM = \angle OCB$ কোণ দুইটি অনুরূপ।

সুতরাং CB বা AB || LM

সুতরাং AB নির্ণেয় স্পর্শক।

প্রশ্ন ১০ ▸ কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব হয়।



সমাধান : বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট MNC একটি বৃত্ত এবং XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। MNC বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁকতে হবে যা XY এর ওপর লম্ব হয়।

অঙ্কন :

১. MNC বৃত্তের কেন্দ্র O হতে XY সরলরেখার উপর OL লম্ব আঁকি।

২. OL রেখার O বিন্দুতে OC লম্ব আঁকি। এ লম্ব বৃত্তকে C বিন্দুতে স্পর্শ করে।

৩. OC রেখার C বিন্দুতে CA লম্ব আঁকি এবং তাকে বিপরীত দিকে বর্ধিত করি। বর্ধিত AC রেখা XY কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে AD রেখাই নির্ণেয় স্পর্শক যা XY এর উপর লম্ব।

প্রমাণ : LO কে বর্ধিত করি। যেন তা বৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

অঙ্কন অনুসারে, $\angle COL$ = এক সমকোণ

সুতরাং, $\angle COE$ = এক সমকোণ

আবার, $\angle COE = \angle OLD$

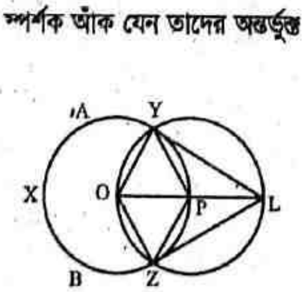
সুতরাং, $OC \parallel XY$

$\angle OCA$ = অনুরূপ $\angle YDC$ [AD ছেদক]

অর্থাৎ, AD, XY এর উপর লম্ব এবং C বৃত্তের স্পর্শক বিন্দু।

সুতরাং AD-ই নির্ণেয় স্পর্শক।

প্রশ্ন ১১ ▸ কোনো বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁক যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।



সমাধান : বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABX একটি বৃত্ত। ABX বৃত্তে এরূপ দুইটি স্পর্শক আঁকতে হবে যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।

অঙ্কন :

১. ABX বৃত্তের পরিধির উপর P যেকোনো একটি বিন্দু নিই। O, P যোগ করি এবং OP কে L পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন OP = PL হয়।

২. P কে কেন্দ্র করে OP বা PL এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। এ বৃত্তটি ABX বৃত্তকে Y ও Z বিন্দুতে ছেদ করে। Y, L এবং Z, L যোগ করি।

তাহলে, YL এবং ZL উদ্দীষ্ট স্পর্শকদ্বয় যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°।

প্রমাণ : O, Y; Y, P; P, Z এবং O, Z যোগ করি।

অঙ্কন অনুসারে, $\angle OYL$ = এক সমকোণ = $\angle OZL$ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]

ΔOPY-এ $OP = PY = OY$ [সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

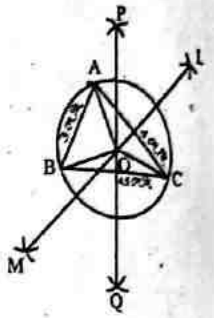
$\therefore \Delta OPY$-এ $\angle POY = 60°$

তাহলে, OYL সমকোণী ত্রিভুজে $\angle YLO = 30°$

অনুরূপভাবে, OZL সমকোণী ত্রিভুজে $\angle ZLO = 30°$

$\therefore \angle YLZ = \angle YLO + \angle ZLO = 30° + 30° = 60°$.

প্রশ্ন ১২ ▸ 3 সে. মি., 4 সে. মি. ও 4.5 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁক এবং এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।



সমাধান : বিশেষ নির্বচন : মনে করি, কোনো ত্রিভুজ ABC এর তিনটি বাহু AB = 3 সে. মি., AC = 4 সে. মি. এবং BC = 4.5 সে. মি. দেওয়া আছে। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন :

১. BC বাহুর লম্বদ্বিখণ্ডক PQ এবং AC বাহুর লম্বদ্বিখণ্ডক LM অঙ্কন করি। PQ ও LM পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

২. O কে কেন্দ্র করে OC বা OB বা OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। বৃত্তটি A, B, C বিন্দু দিয়ে যাবে।

অতএব, নির্ণেয় বৃত্তটি ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত।

প্রমাণ : A, O; B, O ও C, O যোগ করি। O বিন্দুটি BC এর লম্বদ্বিখণ্ডক PQ এর ওপর অবস্থিত।

$\therefore \quad OB = OA$

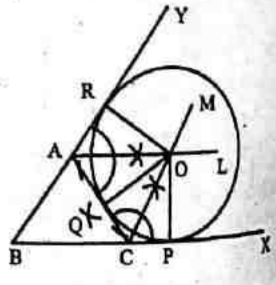
একইভাবে, OA = OC

$\therefore \quad OA = OB = OC$

সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু তিনটি দিয়ে যাবে। সুতরাং এই বৃত্তটিই ΔABC এর পরিবৃত্ত।

ব্যাসার্ধ নির্ণয় : স্কেলের সাহায্যে মেপে পাই, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 2.3 সে.মি.।

প্রশ্ন ১৩ ▸ 5 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর AC বাহুকে স্পর্শ করিয়ে একটি বহির্বৃত্ত আঁক।



সমাধান : বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। এর প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে. মি.। AC বাহুকে স্পর্শ করে একটি বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. BA বাহুকে Y এবং BC বাহুকে X পর্যন্ত বর্ধিত করি।

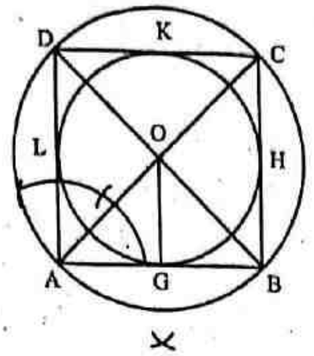
২. $\angle ACX$ এর সমদ্বিখণ্ডক CM এবং $\angle CAY$ এর সমদ্বিখণ্ডক AL আঁকি। AL এবং CM পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দু হতে BX এর উপর OP লম্ব আঁকি।

৩. O কে কেন্দ্র করে OP এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। এটি ΔABC এর AC বাহুকে Q বিন্দুতে স্পর্শ করে। সুতরাং অঙ্কিত বৃত্তই ΔABC এর বহির্বৃত্ত।

প্রমাণ : $\triangle COQ$ এবং $\triangle COP$ সর্বসম।
অতএব, $OP = OQ$
একইভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $OQ = OR$
O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OP এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকলে এটি P, Q, R বিন্দু দিয়ে যাবে।
∴ বৃত্তটি AY, CX এবং AC কে স্পর্শ করবে।

প্রশ্ন ১৪ ▸ একটি বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁক।

সমাধান : বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। ABCD বর্গক্ষেত্রের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।



অঙ্কন :

১. A, C ও B, D যোগ করি। AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। AC ও BD কর্ণ O বিন্দুতে পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

২. O হতে AB এর উপর OG লম্ব টানি।

৩. এখন O কে কেন্দ্র করে OG এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। বৃত্তটি AB, BC, CD ও DA বাহুকে যথাক্রমে G, H, K ও L বিন্দুতে স্পর্শ করে। তাহলে GHKL বৃত্তই ABCD বর্গক্ষেত্রের অন্তর্বৃত্ত।

৪. আবার O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।
এই বৃত্ত ABCD বর্গক্ষেত্রের নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

প্রমাণ : বর্গক্ষেত্রের কর্ণ কোণগুলোকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। সুতরাং O বিন্দু AB, BC, CD এবং DA বাহু থেকে সমদূরবর্তী।
অর্থাৎ G, H, K ও L বিন্দু হতে সমদূরবর্তী। বৃত্তটি বর্গের ভেতরে অবস্থিত। সুতরাং GHKL নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত।
আবার, কর্ণ দুইটি O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।
অতএব, $OA = OB = OC = OD$
সুতরাং OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত A, B, C, D শীর্ষবিন্দু দিয়ে যায়। বৃত্তটি বর্গের বাইরে অবস্থিত।
সুতরাং ABCD বৃত্তই নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

প্রশ্ন ১৫ ▸ O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে,

$$\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC).$$

সমাধান : বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD একটি বৃত্ত। AB ও CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে,
$\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$.

অঙ্কন : O, A; O, D; O, B; O, C এবং C, B যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. একই চাপ BD-এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BCD$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$
∴ $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BOD$ [বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক]

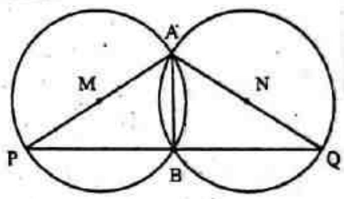
ধাপ ২. একই চাপ AC-এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle ABC$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$
∴ $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$ [বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক]

ধাপ ৩. অতএব, $\angle BCD + \angle ABC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$ [(১) ও (২) থেকে]
বা, $\angle BCE + \angle EBC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$

ধাপ ৪. $\triangle BEC$-এর বহিঃস্থ $\angle AEC = \angle BCE + \angle EBC$
[বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]
সুতরাং $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$. **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ১৬ ▸ দুইটি সমান ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তের সাধারণ জ্যা AB। B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা যদি বৃত্ত দুইটির সাথে P ও Q বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\triangle PAQ$ সমদ্বিবাহু।

সমাধান : বিশেষ নির্বচন : মনে করি, M ও N কেন্দ্রবিশিষ্ট সমান ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা AB।
B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত রেখা বৃত্ত দুইটির সাথে P ও Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। A, P ও A, Q যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে, $\triangle PAQ$ সমদ্বিবাহু।

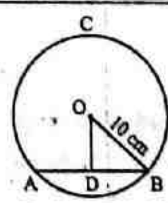


প্রমাণ :

ধাপ ১. M কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB চাপের উপর অবস্থিত $\angle APB$ এবং N কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB চাপের উপর অবস্থিত $\angle AQB$.
সুতরাং $\angle APB = \angle AQB$ [সমান সমান কোণের বিপরীত বাহু পরস্পর সমান]
∴ $AP = AQ$
অর্থাৎ, $\triangle PAQ$ সমদ্বিবাহু **(প্রমাণিত)**

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ১৭ O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে জ্যা $AB = x$ সে. মি., $OD \perp AB$। পাশের চিত্র অনুযায়ী নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

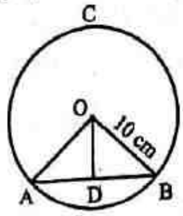


ক. বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
খ. দেখাও যে, D, AB এর মধ্যবিন্দু।
গ. $OD = \left(\frac{x}{2} - 2\right)$ সে. মি. হলে, x এর মান নির্ণয় কর।

১৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গএকক
এখানে, ব্যাসার্ধ, $r = 10$ সে. মি.
∴ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= 3.1416 \times (10)^2$ বর্গ সে. মি.
$= 314.16$ বর্গ সে. মি. (প্রায়)

খ মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে জ্যা AB, $OD \perp AB$। প্রমাণ করতে হবে যে, D, AB এর মধ্যবিন্দু।



অঙ্কন : O, A যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. $OD \perp AB$ হওয়ায়,

$\angle ODA = \angle ODB =$ এক সমকোণ

অতএব, ΔODA ও ΔODB উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।

ধাপ ২. এখন, ΔODA ও ΔODB সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OB [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং $OD = OD$ [সাধারণ বাহু]

$\therefore \Delta ODA \cong \Delta ODB$

[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]

অতএব, $AD = BD$

অর্থাৎ, D, AB এর মধ্যবিন্দু। (দেখানো হলো)

গ ΔODB সমকোণী ত্রিভুজে, $OB^2 = OD^2 + BD^2$

[পিথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে]

এখানে, $OB = 10$ সে. মি.

$OD = \frac{x}{2} - 2$ সে. মি.

$BD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}x$ সে. মি. $= \frac{x}{2}$ সে. মি.

$\therefore \quad OB^2 = OD^2 + BD^2$

বা, $(10)^2 = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$

বা, $100 = \frac{x^2}{4} - 2.\frac{x}{2}.2 + 4 + \frac{x^2}{4}$

বা, $100 = 2 \times \frac{x^2}{4} - 2x + 4$

বা, $100 = \frac{x^2}{2} - 2x + 4$

বা, $100 = \frac{x^2 - 4x + 8}{2}$

বা, $x^2 - 4x + 8 = 200$

বা, $x^2 - 4x + 8 - 200 = 0$

বা, $x^2 - 4x - 192 = 0$

বা, $x^2 - 16x + 12x - 192 = 0$

বা, $x(x - 16) + 12(x - 16) = 0$

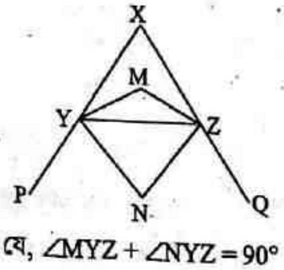
বা, $(x - 16)(x + 12) = 0$

হয়, $x - 16 = 0$ | অথবা, $x + 12 = 0$

$\therefore \quad x = 16$ | $\therefore \quad x = -12$ [এটি গ্রহণযোগ্য নহে]

$\therefore \quad x = 16$ সে. মি.

প্রশ্ন ১৮ চিত্রে YM ও ZM যথাক্রমে $\angle Y$ ও $\angle Z$ এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং YN ও ZN যথাক্রমে $\angle Y$ ও $\angle Z$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক।



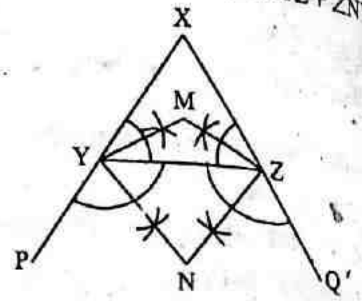
ক. দেখাও যে, $\angle MYZ + \angle NYZ = 90°$

খ. প্রমাণ কর যে, $\angle YNZ = 90° - \frac{1}{2}\angle X$.

গ. প্রমাণ কর যে, Y, M, Z ও N বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

১৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, ΔXYZ এর $\angle Y$ ও $\angle Z$ এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক যথাক্রমে YM ও ZM পরস্পর M বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডক YN ও ZN পরস্পর N বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। দেখাতে হবে যে, $\angle MYZ + \angle NYZ = 90°$



প্রমাণ :

ধাপ ১. $\angle XYZ + \angle ZYP = 180°$ [$\because$ এক সরলকোণ $= 180°$]

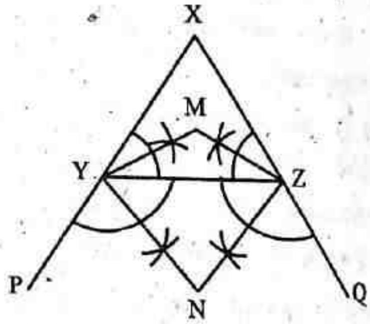
বা, $\frac{1}{2}\angle XYZ + \frac{1}{2}\angle ZYP = 90°$

$\therefore \quad \angle MYZ + \angle NYZ = 90°$

[$\angle Y$ এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক যথাক্রমে YM ও YN]

(দেখানো হলো)

খ এখানে, ΔXYZ এর $\angle Y$ ও $\angle Z$ এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক যথাক্রমে YM ও ZM পরস্পর M বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডক YN ও ZN পরস্পর N বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle YNZ = 90° - \frac{1}{2}\angle X$



প্রমাণ : ধাপ ১. ΔXYZ-এ,

$\angle X + \angle Y + \angle Z = 180°$ [ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $180°$]

$\angle PYZ = \angle X + \angle Z$ [ত্রিভুজের যেকোনো বহিঃস্থ কোণ উহার অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

এবং $\angle QZY = \angle X + \angle Y$ [একই কারণে]

ধাপ ২. ΔYNZ-এ

$\angle YNZ + \angle NYZ + \angle NZY = 180°$

বা, $\angle YNZ + \frac{1}{2}\angle PYZ + \frac{1}{2}\angle QZY = 180°$

বা, $\angle YNZ + \frac{1}{2}(\angle X + \angle Z) + \frac{1}{2}(\angle X + \angle Y) = 180$

বা, $\angle YNZ + \frac{1}{2}(\angle X + \angle Y + \angle Z + \angle X) = 180°$

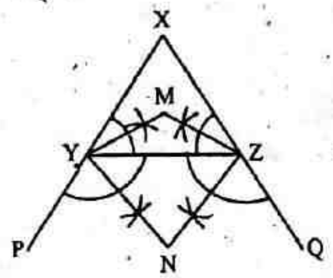
বা, $\angle YNZ + \frac{1}{2}(180° + \angle X) = 180°$

বা, $\angle YNZ + 90° + \frac{1}{2}\angle X = 180°$

বা, $\angle YNZ = 180° - 90° - \frac{1}{2}\angle X$

$\therefore \quad \angle YNZ = 90° - \frac{1}{2}\angle X$. (প্রমাণিত)

গ এখানে, ΔXYZ এর $\angle Y$ ও $\angle Z$ এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক যথাক্রমে YM ও ZM পরস্পর M বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডক যথাক্রমে YN ও ZN পরস্পর N বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, Y, M, Z ও N বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।



প্রমাণ :

ধাপ ১. ΔXYZ-এ,

$\angle X + \angle Y + \angle Z = 180°$ [ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

$\angle PYZ = \angle X + \angle Z$ [ত্রিভুজের যেকোনো বহিঃস্থ কোণ উহার অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

এবং $\angle QZY + \angle X + \angle Y$ [একই কারণে]

ধাপ ২. YMZN চতুর্ভুজে,

$$\angle MYN + \angle MZN = \angle MYZ + \angle NYZ + \angle MZY + \angle NZY$$
$$= \frac{1}{2}\angle Y + \frac{1}{2}\angle PYZ + \frac{1}{2}\angle Z + \frac{1}{2}\angle QZY$$
$$= \frac{1}{2}\angle Y + \frac{1}{2}(\angle X + \angle Z) + \frac{1}{2}\angle Z + \frac{1}{2}(\angle X + \angle Y)$$
$$= (\frac{1}{2}\angle X + \frac{1}{2}\angle X) + (\frac{1}{2}\angle Y + \frac{1}{2}\angle Y) + (\frac{1}{2}\angle Z + \frac{1}{2}\angle Z)$$
$$= \angle X + \angle Y + \angle Z = 180°$$

$\therefore \angle MYN + \angle MZN = 180°$

অর্থাৎ $\angle MYN + \angle MZN =$ দুই সমকোণ

যেহেতু YMZN চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ।

$\therefore$ Y, M, Z ও N বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ১৯ একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে. মি., 5 সে. মি. ও 6 সে. মি.।

উপরের তথ্য অনুযায়ী নিম্নের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

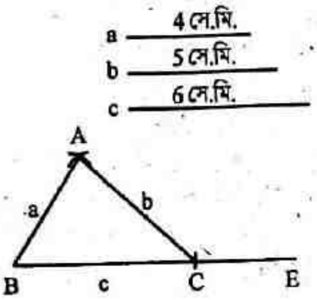
ক. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ. ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

গ. ত্রিভুজের পরিবৃত্তের বাহিরে যেকোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করে দেখাও যে, স্পর্শকদ্বয়ের দূরত্ব সমান।

১৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a = 4 সে. মি., b = 5 সে. মি. এবং c = 6 সে. মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



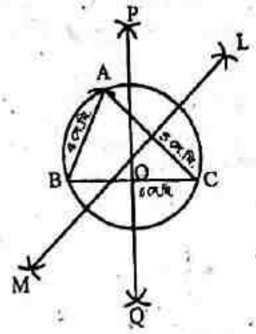
অঙ্কন :

১. যেকোনো রশ্মি BE থেকে c এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC অংশ কেটে নিই।

২. BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে a ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে B ও C এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করেছে।

৩. A, B ও A, C যোগ করি। তাহলে, ΔABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

খ মনে করি, কোনো ত্রিভুজ ABC এর তিনটি বাহু AB = 4 সে. মি., AC = 5 সে. মি. এবং BC = 6 সে. মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।



অঙ্কন :

১. BC বাহুর লম্বদ্বিখণ্ডক PQ এবং AC বাহুর লম্বদ্বিখণ্ডক LM অঙ্কন করি। PQ ও LM পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

২ এখন, O কে কেন্দ্র করে OC বা OB বা OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। বৃত্তটি A, B, C বিন্দু দিয়ে যাবে।

তাহলে নির্ণেয় বৃত্তটি ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত।

প্রমাণ : BC এর লম্বদ্বিখণ্ডক O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

$\therefore$ OB = OC

আবার, AC এর লম্বদ্বিখণ্ডক LM এর উপর O বিন্দু অবস্থিত।

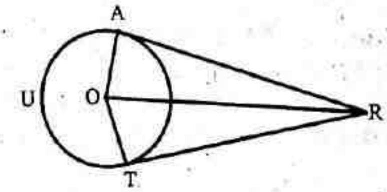
$\therefore$ OC = OA

সুতরাং OB = OC = OA

অতএব, O কে কেন্দ্র করে এবং OB ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে তা A, B, C বিন্দু দিয়ে যাবে।

সুতরাং অঙ্কিত বৃত্তটিই ΔABC এর পরিবৃত্ত।

গ মনে করি, খ-এ অঙ্কিত পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ OA এর সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট ATU একটি বৃত্ত। বৃত্তটির বাইরে R যেকোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং RA ও RT রশ্মিদ্বয় পরিবৃত্তের A ও T বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে যে, RA = RT.



অঙ্কন : O, R যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. যেহেতু RA স্পর্শক এবং OA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ, সেহেতু $RA \perp OA$. [স্পর্শক স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর লম্ব]

$\therefore \angle RAO =$ এক সমকোণ

অনুরূপভাবে, $\angle RTO =$ এক সমকোণ

ধাপ ২. এখন, ΔRAO ও ΔRTO

সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

অতিভুজ OR = অতিভুজ OR এবং

OA = OT [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore \Delta RAO \cong \Delta RTO$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা]

$\therefore$ RA = RT. (দেখানো হলো)