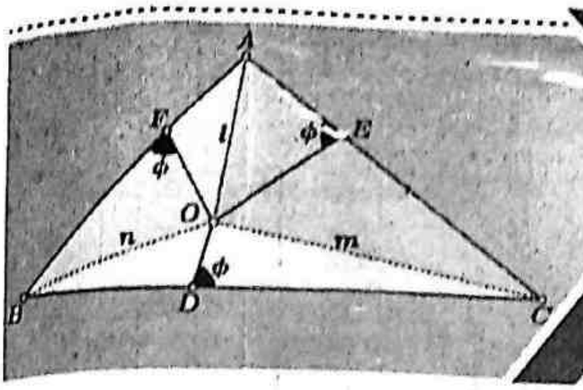
অধ্যায় ১৫

ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত উপপাদ্য ও সম্পাদ্য
Area Related Theorems and Constructions



এ অধ্যায়ে অনন্য A+ সংযোজন

শিখনফল ও বোর্ড প্রশ্নপত্র বিশ্লেষণ | পাঠ্যবইয়ের সূত্রসহ প্রশ্ন ও সমাধান | বোর্ড ও স্কুল প্রশ্ন ও সমাধান | সমন্বিত অধ্যায়ের প্রশ্ন ও সমাধান | যাচাই ও মূল্যায়ন

অধ্যায়ের সিলেবাস

• সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল • বহুভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের ধারণা • ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত উপপাদ্য যাচাই ও প্রমাণ • প্রদত্ত উপাত্ত ব্যবহার করে বহুভুজক্ষেত্র অঙ্কন ও অঙ্কনের যথার্থতা যাচাই • ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান চতুর্ভুজক্ষেত্র অঙ্কন • চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান ত্রিভুজক্ষেত্র অঙ্কন।

প্রাথমিক আলোচনা — Primary Discussion

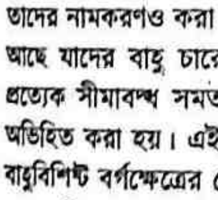
সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের আকৃতি বিভিন্ন রকম হতে পারে। সমতল ক্ষেত্র যদি চারটি বাহুদ্বারা সীমাবদ্ধ হয়, তবে তাকে আমরা চতুর্ভুজ বলে থাকি। এই চতুর্ভুজের আবার শ্রেণিবিভাগ আছে এবং আকৃতি ও বৈশিষ্ট্যের উপর ভিত্তি করে তাদের নামকরণও করা হয়েছে। এই সকল সমতল ক্ষেত্রের বাইরে অনেক ক্ষেত্র আছে যাদের বাহু চারের অধিক। আলোচিত এ সকল ক্ষেত্রই বহুভুজক্ষেত্র। প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতলক্ষেত্রের নির্দিষ্ট পরিমাপ আছে যাকে ক্ষেত্রফল বলে অভিহিত করা হয়। এই সকল ক্ষেত্রফল পরিমাপের জন্য সাধারণত এক একক বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ব্যবহার করা হয় এবং তাদের ক্ষেত্রফলকে বর্গ একক হিসেবে লেখা হয়। উপপাদ্য ও সম্পাদ্যের সাহায্যেও কোনো ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করা যেতে পারে।

ওয়েব লিংকড — তথ্য সংযোগ

শিখনফলের ধারাবাহিকতায় প্রশ্ন তৈরিতে এবং উত্তরকে তথ্যবহুল ও নির্ভুলতা নিশ্চিতকরণে বোর্ড বইয়ের পাশাপাশি নিম্নোক্ত ওয়েব লিংকের সহায়তা নেওয়া হয়েছে—

math.about.com › ... › Geometry › Pythagorean
en.wikipedia.org/wiki/Pappus's_centroid_theorem
www.mathwarehouse.com/geometry/circle/
www.math.utah.edu/lectures/math1210/29PostNotes.pdf

পরিচিতি ও অবদান — অধ্যায়ের বিষয়বস্তু সংশ্লিষ্ট শীর্ষস্থানীয় গণিতবিদ



জোহানেস কেপলার (Johannes Kepler)

জোহানেস কেপলার (১৫৭১–১৬৩০) একাধারে জার্মান গণিতবিদ, জ্যোতির্বিজ্ঞানী ও জ্যোতিষী ছিলেন। কেপলারের গ্রহীয় গতিসূত্রের কারণে তিনি বিখ্যাত হয়ে আছেন। কেপলার মহাবিশ্ব নিয়ে গবেষণার সময় ক্ষেত্রফলের ধারণা দেন। তিনি অন্তঃবৃত্ত ও পরিবৃত্তের বিশ্লেষণীয় ধারণা প্রদান করেন। এছাড়া কোপার্নিকাসকে পৌরকেন্দ্রিক তত্ত্বের ধারণা উপস্থাপন করেছিলেন। কেপলার সেই ধারণার তিনটি গাণিতিক ব্যাখ্যা দেন তিনটি গাণিতিক সূত্রের সাহায্যে। তিনি প্রচলিত বৃত্তাকার কক্ষপথের পরিবর্তে উপবৃত্তাকার কক্ষপথ কল্পনা করে সাফল্য অর্জন করেন।

পিথাগোরাস (Pythagoras)

পিথাগোরাস (খ্রিস্টপূর্ব ৫৮২–৫০১) ছিলেন একজন গ্রিক দার্শনিক এবং গণিতবিদ। পিথাগোরাস সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর সম্পর্কের সূত্রের জন্য সারাবিশ্বে পরিচিত (যাকে বলা হয় পিথাগোরাসের সূত্র)। তিনি এমন একটি স্কুল প্রতিষ্ঠা করেন যেখানে গণিত, সঙ্গীত, বিজ্ঞান, দর্শন ও ধর্ম শিক্ষার ব্যবস্থা করা হয়। সংখ্যাতত্ত্ব এবং ত্রিমাত্রিক ও ক্ষেত্রফল সম্পর্কীয় জ্যামিতি শাস্ত্রে পিথাগোরাস অনেক বেশি অবদান রাখেন। পিথাগোরাস বিশ্বাস করতেন যে, "সকল বস্তুই সংখ্যা, গণিত হলো সবকিছুর ভিত্তি এবং জ্যামিতি গণিত চর্চার সর্বোৎকৃষ্ট পন্থা।"

PART 02

অনুশীলন Practice

স্কুল ও এসএসসি পরীক্ষায় সেরা প্রস্তুতির জন্য ১০০% সঠিক ফরম্যাট অনুসরণে শিখনফল এবং অনুচ্ছেদের ধারায় প্রশ্ন ও সমাধান

শিখন অর্জন যাচাই

- ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত উপপাদ্য ও সম্পাদ্য সম্পর্কে ধারণা লাভ করব।
- ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ও চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের কৌশল শিখতে পারব।
- প্রদত্ত উপাত্তের সাহায্যে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারব।

শিখন সহায়ক উপকরণ

- ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ আকৃতির বিভিন্ন বস্তুর ছবি।
- পাঠ্যবইয়ের ২৮৬ পৃষ্ঠার ছবি।
- পাঠ্যবইয়ের সমস্যা ও কার্যাবলি।

সাধারণ জ্যামিতিক অংশ

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রিয় শিক্ষার্থী, পাঠ্যবইয়ে এ অধ্যায়ে অনুশীলনীতে বিভিন্ন ধরনের জ্যামিতিক প্রশ্ন দেওয়া আছে। প্রতিটি প্রশ্নের যথাযথ ও নির্ভুল সমাধান এ অংশে সংযোজন করা হলো। এসব প্রশ্ন ও সমাধানের অনুশীলন তোমাদের সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তরের ধারণা সমৃদ্ধকরণে সহায়তা করবে।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও উত্তর

১। ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; নিচের কোন ক্ষেত্রে সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়?

ক 3 সে.মি., 4 সে.মি., 5 সে.মি.
খ 6 সে.মি., 8 সে.মি., 10 সে.মি.
গ 5 সে.মি., 7 সে.মি., 9 সে.মি.
ঘ 5 সে.মি., 12 সে.মি., 13 সে.মি.

▶▶ তথ্য/ব্যাখ্যা : সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে,
$(\text{ভূমি})^2 + (\text{লম্ব})^2 = (\text{অতিভুজ})^2$

(ক) এর ক্ষেত্রে, $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$; ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব

(খ) এর ক্ষেত্রে, $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = (10)^2$; ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব

(গ) এর ক্ষেত্রে, $5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74 = (\sqrt{74})^2 \neq 9^2$; ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব নয়।

(ঘ) এর ক্ষেত্রে, $5^2 + (12)^2 = 25 + 144 = 169 = (13)^2$; ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব।

২। সমতলীয় জ্যামিতিতে—

i. প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতলক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে
ii. দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম
iii. দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে তাদের ক্ষেত্রফল সমান

নিচের কোনটি সঠিক?

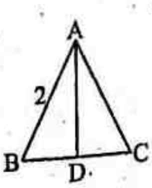
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

▶▶ তথ্য/ব্যাখ্যা : সমতলীয় জ্যামিতিতে,

১. প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে।
২. দুইটি ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয় না। দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হতে হলে এদের অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণগুলো সমান হতে হবে। ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান হলেও এরা সর্বসম নয়, কেননা এদের অনুরূপ বাহু এবং অনুরূপ কোণগুলো সমান নয়।
৩. দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে তাদের ক্ষেত্রফল সমান হবে।

সুতরাং i ও iii সঠিক।

■ পাশের চিত্রে, Δ ABC সমবাহু, AD ⊥ BC এবং AB = 2। উপর্যুক্ত তথ্যের ভিত্তিতে ৩ ও ৪নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



৩। BD = কত?

ক 1 খ $\sqrt{2}$
গ 2 ঘ 4

▶▶ তথ্য/ব্যাখ্যা : ABC সমবাহু ত্রিভুজে AB = BC = CA = 2
$\therefore\ BD = \frac{1}{2} \times BC = \frac{1}{2} \times 2 = 1.$

৪। ত্রিভুজটির উচ্চতা কত?

ক $\frac{4}{\sqrt{3}}$ খ $\sqrt{3}$
গ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ঘ $2\sqrt{3}$

▶▶ তথ্য/ব্যাখ্যা : ত্রিভুজটির উচ্চতা, $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$
$= \sqrt{2^2 - 1}$
$= \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$

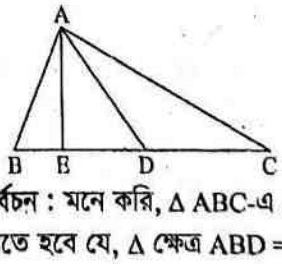
উত্তরের শুদ্ধতা/ নির্ভুলতা যাচাই করো

১	গ	২	খ	৩	ক	৪	খ

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর জ্যামিতিক প্রশ্নের সমাধান

প্রশ্ন ৫ ▸ প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, Δ ABC-এ AD একটি মধ্যমা। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র ABD = Δ ক্ষেত্র ACD.

অঙ্কন : A বিন্দু থেকে BC-এর উপর AE লম্ব আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : Δ ABC-এ AD মধ্যমা

BD = CD [AD মধ্যমা বলে, D, BC এর মধ্যবিন্দু]

Δক্ষেত্র ABD-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times BD \times AE$

[ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা]

ধাপ ২ : আবার, Δক্ষেত্র ACD-এর

ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times CD \times AE$ [ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা]

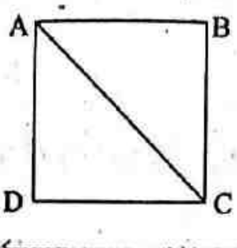
$= \frac{1}{2} \times BD \times AE$

ধাপ ৩ : Δ ক্ষেত্র ABD = Δ ক্ষেত্র ACD। [(১) ও (২) থেকে]

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন ৬ ▸ প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্র তার কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক।

সমাধান : বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। এর AC কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = \frac{1}{2} AC^2$.



প্রমাণ :

ধাপ ১ : Δ ABC-এ $\angle B$ = এক সমকোণ [বর্গক্ষেত্রের সকল কোণ সমকোণ]

$\therefore$ Δ ABC সমকোণী এবং AC এর অতিভুজ।

ধাপ ২ : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]

[বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলো পরস্পর সমান]

বা, $AC^2 = AB^2 + AB^2$

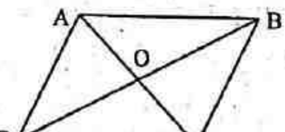
বা, $2AB^2 = AC^2$

$\therefore$ $AB^2 = \frac{1}{2} AC^2$. (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ৭ ▸ প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিকক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

সমাধান : বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক। এর AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AC ও BD কর্ণদ্বয় ABCD সামান্তরিক ক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।



অর্থাৎ Δ-ক্ষেত্র AOB এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র BOC এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র COD এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র AOD এর ক্ষেত্রফল।

প্রমাণ : ধাপ ১ : ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

সুতরাং AO = OC [সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

এবং BO = OD [সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

ধাপ ২ : Δ ABC-এর মধ্যমা BO [$\because$ AO = OC]

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র AOB এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র BOC এর ক্ষেত্রফল।

[ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে]

ধাপ ৩ : আবার, Δ BCD এর মধ্যমা OC [ধাপ (১) থেকে]

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র BOC এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র COD এর ক্ষেত্রফল

[ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে]

ধাপ ৪ : আবার, Δ ADC এর মধ্যমা DO [ধাপ (১) থেকে]

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র COD এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র AOD এর ক্ষেত্রফল

[ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে]

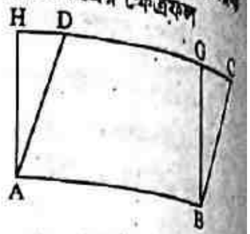
ধাপ ৫ : Δ ক্ষেত্র AOB = Δ ক্ষেত্র BOC = Δ ক্ষেত্র COD = Δ ক্ষেত্র AOD.

[ধাপ (২), (৩) এবং (৪) থেকে]

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন ৮ ▸ একটি সামান্তরিকক্ষেত্র এবং সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমির উপর এবং এর একই পাশে অবস্থিত। দেখাও যে, সামান্তরিকক্ষেত্রটির পরিসীমা আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

সমাধান : বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং ABGH একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান এবং একই ভূমি AB-এর উপর অবস্থিত। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD ক্ষেত্রের পরিসীমা ABGH ক্ষেত্রের পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।



প্রমাণ :

ধাপ ১ : ABCD সামান্তরিকক্ষেত্রের

পরিসীমা = 2(AB + BC) [সামান্তরিক ক্ষেত্রের পরিসীমা = 2 (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)]

ABGH আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা = 2(AB + BG) [আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা = 2 (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)]

ধাপ ২: উভয়ক্ষেত্রের পরিসীমা কমবেশি নির্ভর করে BC ও BG এর দৈর্ঘ্যের মানের উপর।

BG, CD এর উপর লম্ব হওয়ায় BGC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং BC অতিভুজ।

$\therefore$ $BC > BG$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বৃহত্তর বাহু]

বা, $AB + BC > AB + BG$ [উভয়পক্ষে AB যোগ করে]

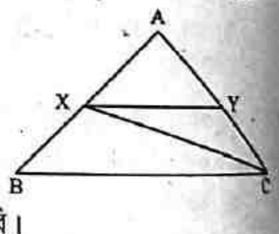
বা, $2(AB + BC) > 2(AB + BG)$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ ABCD সামান্তরিকক্ষেত্রের পরিসীমা > ABGH আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা। [ধাপ (১) হতে]

সুতরাং ABCD সামান্তরিকক্ষেত্রের পরিসীমা ABGH আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর। (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ৯ ▸ Δ ABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y. প্রমাণ কর যে, Δ AXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$ Δ ABC এর ক্ষেত্রফল।

সমাধান : বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, Δ ABC-এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y. প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)



অঙ্কন : C, X এবং X, Y যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : যেহেতু, X, AB-এর মধ্যবিন্দু। সেহেতু, CX, Δ ABC-এর মধ্যমা।

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র ACX $= \frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র ABC) [ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজকে সমান দুইটি অংশে বিভক্ত করে]

ধাপ ২: আবার, যেহেতু Δ ACX-এর AC বাহুর মধ্যবিন্দু Y.

সুতরাং XY, Δ ACX-এর মধ্যমা

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র AXY $= \frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র ACX) [ত্রিভুজের যে কোনো মধ্যমা ত্রিভুজকে সমান দুইটি অংশে বিভক্ত করে]

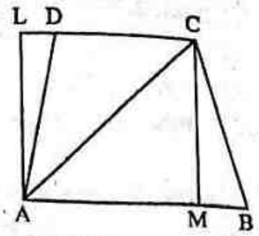
$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র ABC) [(১) থেকে]

$= \frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC)

অর্থাৎ Δ ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল).

প্রশ্ন ১০ ▶ ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। এর AB ও CD বাহু দুইটি সমান্তরাল। ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। এর AB ও CD বাহু দুইটি সমান্তরাল। ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।



অঙ্কন : A বিন্দু হতে CD এর উপর (বর্ধিতাংশের ওপর) ও C বিন্দু হতে AB এর উপর যথাক্রমে AL ও CM লম্ব টানি। A ও C যোগ করি।

ধাপ ১ : ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল।

[ট্রাপিজিয়ামের কর্ণ ট্রাপিজিয়ামকে দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে]

ধাপ ২ : Δ ক্ষেত্র ABC এর

ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times CM$ [ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা]

ধাপ ৩ : Δ ক্ষেত্র ACD এর

ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times CD \times AL$ [ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা]

ধাপ ৪ : ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times AB \times CM + \frac{1}{2} \times CD \times AL$ [ধাপ (১), (২) ও (৩) হতে]

$= \frac{1}{2} \times AB \times CM + \frac{1}{2} \times CD \times CM)$

[ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দূরত্ব সমান]

$= \frac{1}{2} \times CM(AB + CD$

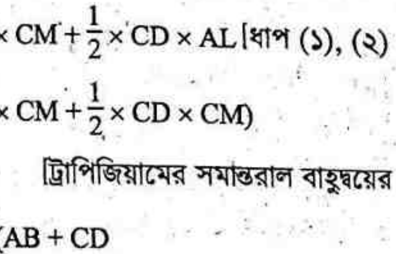
$= \frac{1}{2} \times (AB + CD) \times CM$

$= \frac{1}{2} \times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি $\times$ উচ্চতা

এটিই ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল।

প্রশ্ন ১১ ▶ সামান্তরিক ABCD এর অভ্যন্তরে P যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, Δ PAB এর ক্ষেত্রফল + Δ PCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল)।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ABCD সামান্তরিকের অভ্যন্তরে P যেকোনো একটি বিন্দু। P, A; P, B; P, C এবং P, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ PAB এর ক্ষেত্রফল + Δ PCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (সামান্তরিক ক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল)।

অঙ্কন : P বিন্দু হতে AB-এর উপর PF লম্ব টানি। FP কে E পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন তা CD কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : যেহেতু AB $\parallel$ CD এবং EF তাদের ছেদক।

$\therefore \angle DEF = \angle EFB =$ এক সমকোণ [একান্তর কোণ এবং EF $\perp$ AB বলে]

$\therefore$ ABCD সামান্তরিকের উচ্চতা EF [যেহেতু সামান্তরিকক্ষেত্র = ভূমি $\times$ উচ্চতা]

সুতরাং সামান্তরিক ক্ষেত্র ABCD = AB $\times$ EF [$\because \angle PFB =$ এক সমকোণ তাই PF উচ্চতা]

$\therefore \Delta$ PAB এ ভূমি AB এবং উচ্চতা PF.

Δ PAB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times PF$

ধাপ ২ : অনুরূপভাবে,

Δ PCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times CD \times PE$ [$\because \angle PED =$ এক সমকোণ তাই PE উচ্চতা]

$= \frac{1}{2} \times AB \times PE$ [সামান্তরিকের বিপরীত বাহু পরস্পর সমান]

ধাপ ৩ : Δ PAB এর ক্ষেত্রফল + Δ PCD এর ক্ষেত্রফল

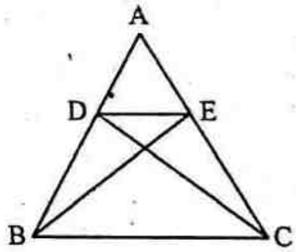
$= \frac{1}{2} \times AB \times PF + \frac{1}{2} \times AB \times PE$ [(১) ও (২) থেকে]

$= \frac{1}{2} AB (PF + PE) = \frac{1}{2} AB \,.\, EF$ [$\because PF + PE = EF$]

$= \frac{1}{2}$ (সামান্তরিক ক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল). (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ১২ ▶ Δ ABC এ BC ভূমির সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\Delta DBC = \Delta EBC$ এবং $\Delta DBE = \Delta CDE$.

সমাধান : বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, Δ ABC-এর ভূমি BC-এর সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta DBC = \Delta EBC$ এবং $\Delta DBE = \Delta CDE$.



প্রমাণ :

ধাপ ১ : Δ DBC ও Δ EBC-উভয়ই একই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BC ও DE এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore \Delta DBC = \Delta EBC$ [$\because$ একই ভূমির উপর একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সকল ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান]

ধাপ ২ : Δ DBE ও Δ CDE-উভয়ই একই ভূমি DE এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BC ও DE এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore \Delta DBE = \Delta CDE$ [$\because$ একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সকল ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান।]

ধাপ ৩: $\Delta DBC = \Delta EBC$

এবং $\Delta DBE = \Delta CDE$. [ধাপ (১) ও (২) হতে]

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন ১৩ ▶ ABC ত্রিভুজের $\angle A =$ এক সমকোণ। D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$.

সমাধান :

বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের $\angle A =$ এক সমকোণ এবং D, AC-এর উপরস্থ একটি বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$.

প্রমাণ :

ধাপ ১ : যেহেতু, ABC সমকোণী ত্রিভুজে

$\angle A$ = এক সমকোণ [কল্পনা]

এবং BC অতিভুজ।

$\therefore \quad BC^2 = AB^2 + AC^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]

ধাপ ২ : অনুরূপভাবে, ABD সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ BD.

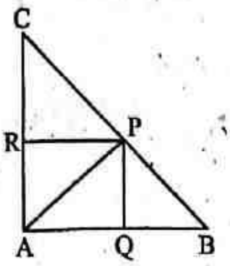
$AB^2 + AD^2 = BD^2$

বা, $AD^2 = BD^2 - AB^2$

ধাপ ৩ : $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$. (প্রমাণিত) [(১) ও (২) থেকে]

প্রশ্ন ১৪ ▸ ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ এবং P, BC এর উপর যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$.

সমাধান : বিশেষ নির্বচন : ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ এবং P, BC এর ওপর যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$.



অঙ্কন : P বিন্দু হতে AB ও AC বাহুর উপর PQ ও PR লম্ব আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : ΔABC এ $\angle A = 90°$, $\angle B = 45°$, $\angle C = 45°$

[$\because \Delta ABC$ সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ]

ধাপ ২ : PBQ সমকোণী ত্রিভুজে,

PB অতিভুজ এবং $\angle PBQ = \angle BPQ = 45°$ [$\because \angle PQB$ = এক সমকোণ]

$\therefore \quad PQ = BQ$

একই কারণে $PR = CR$

PBQ সমকোণী ত্রিভুজে,

$PB^2 = PQ^2 + BQ^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$= PQ^2 + PQ^2$

$= 2PQ^2$

ধাপ ৩ : PCR সমকোণী ত্রিভুজে,

$PC^2 = PR^2 + CR^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$= PR^2 + PR^2$

$= 2PR^2$ [ধাপ (২) হতে, $PR = CR$]

ধাপ ৪ : AQPR একটি আয়তক্ষেত্র

[$\because$ PQ, AB এর উপর এবং PR, AC এর উপর লম্ব]

সুতরাং $PR = AQ$ [আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]

ধাপ ৫ : $PB^2 + PC^2 = 2PQ^2 + 2PR^2$ [ধাপ (২) ও (৩) হতে]

$= 2(PQ^2 + PR^2)$

ধাপ ৬ : কিন্তু APQ সমকোণী ত্রিভুজের

$PQ^2 + AQ^2 = PA^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

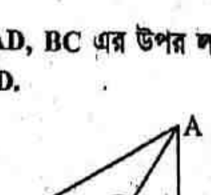
বা, $PQ^2 + PR^2 = PA^2$ [ধাপ (৪) হতে]

বা, $2(PQ^2 + PR^2) = 2PA^2$

$\therefore \quad PB^2 + PC^2 = 2PA^2$. [ধাপ (৫) হতে] (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ১৫ ▸ ΔABC এর $\angle C$ স্থূলকোণ। AD, BC এর উপর লম্ব। দেখাও যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$.

সমাধান : বিশেষ নির্বচন : ABC এর $\angle C$ স্থূলকোণ AD, BC এর ওপর লম্ব। দেখাতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$.



প্রমাণ :

ধাপ ১ : ΔACD এ $\angle D = 90°$ এবং AC = অতিভুজ [$\because AD \perp BD$]

ধাপ ২ : ΔACD সমকোণী ত্রিভুজে,

$AC^2 = AD^2 + CD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $AD^2 = AC^2 - CD^2$

ধাপ ৩ : আবার, ΔABD ত্রিভুজের অতিভুজ AB

[$\because \angle ADB$ = এক সমকোণ]

ΔABD সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$\therefore \quad AB^2 = AD^2 + BD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$= AD^2 + (BC + CD)^2$

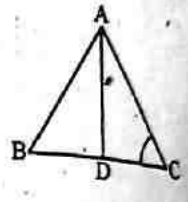
$= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC.CD$ [$\because BD = BC + CD$]

$= AC^2 - CD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC.CD$ [ধাপ (২) হতে]

$\therefore \quad AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$. (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ১৬ ▸ ΔABC এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ। AD, BC এর উপর লম্ব। দেখাও যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$.

সমাধান : বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ; AD, BC এর ওপর লম্ব। দেখাতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$.



প্রমাণ :

ধাপ ১ : ΔABD ও ΔADC উভয়ই সমকোণী [$\because$ AD, BC এর উপর লম্ব]

ধাপ ২ : ADC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$AC^2 = AD^2 + CD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $AC^2 - CD^2 = AD^2$

$\therefore \quad AD^2 = AC^2 - CD^2$

ধাপ ৩ : আবার, ABD সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$= AC^2 - CD^2 + BD^2$ [ধাপ (২) হতে]

$= AC^2 - CD^2 + (BC - CD)^2$ [$\because BD = BC - CD$]

$= AC^2 - CD^2 + BC + CD^2 - 2BC.CD$

$\therefore \quad AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$. (দেখানো হলো)

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ১৭ ΔPQR এ QD একটি মধ্যমা।

ক. উদ্দীপকের আলোকে আনুপাতিক চিত্র আঁক।

খ. প্রমাণ কর, $PQ^2 + QR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$.

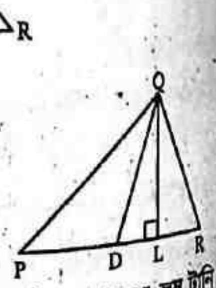
গ. যদি $PQ = QR = PR$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর, $4QD^2 = 3PQ^2$.

১৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক চিত্রে ΔPQR-এ QD একটি মধ্যমা।

খ ΔPQR এর PR বাহুর মধ্যমা QD। প্রমাণ করতে হবে যে,

$QP^2 + QR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$.



অঙ্কন : Q বিন্দু থেকে PR এর বা এর বর্ধিতাংশের ওপর QL লম্ব টানি।

প্রমাণ :

ধাপ ১ : Δ QDL সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ QD [∵ ∠QLD = এক সমকোণ]

Δ QDL সমকোণী ত্রিভুজে,

$QL^2 + LD^2 = QD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $QL^2 = QD^2 - LD^2$

ধাপ ২ : QPL সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$QP^2 = QL^2 + PL^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$= QD^2 - LD^2 + PL^2$ [ধাপ (১) হতে]

$= QD^2 - LD^2 + (PD + LD)^2$ [$\because PL = PD + DL$]

$= QD^2 - LD^2 + PD^2 + LD^2 + 2PD.\,LD$

$= QD^2 + PD^2 + 2PD.\,LD$

$\therefore\ QP^2 = QD^2 + PD^2 + 2PD.\,LD$

ধাপ ৩ : আবার, QLR সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$QR^2 = QL^2 + LR^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$= QD^2 - LD^2 + LR^2$ [ধাপ (১) হতে]

$= QD^2 - LD^2 + (DR - LD)^2$ [$\because LR = DR - LD$]

$= QD^2 - LD^2 + (PD - LD)^2$

$= QD^2 - LD^2 + PD^2 - 2LD.PD + LD^2$

$= QD^2 + PD^2 - 2LD.PD$

[∵ D, PR এর মধ্যবিন্দু; সেহেতু PD = RD]

$\therefore\ QR^2 = QD^2 + PD^2 - 2PD.LD.$

ধাপ ৪ : $QP^2 + QR^2 = QD^2 + PD^2 + 2PD.LD + QD^2 + PD^2 - 2PD.\,LD$ [ধাপ (২) ও (৩) হতে]

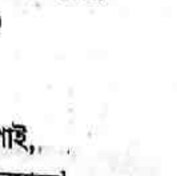
বা, $QP^2 + QR^2 = 2QD^2 + 2PD^2$

সুতরাং $QP^2 + QR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$. (প্রমাণিত)

গ এখানে, Δ PQR এ PQ = QR = PR

এবং PR এর উপর মধ্যমা QD।

প্রমাণ করতে হবে যে, $4QD^2 = 3PQ^2$.



প্রমাণ :

ধাপ ১: Δ QPR এ PQ = PR = QR [∵ Δ QPR সমবাহু ত্রিভুজ]

এবং $PD = DR = \frac{1}{2} PR$

[QD লম্বের পাদ বিন্দু D, PR কে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

ধাপ ২ : এখন Δ QPD এ ∠QDP = 90° এবং PQ = অতিভুজ [∵QD, PR এর উপর লম্ব]

∴ Δ QPD সমকোণী ত্রিভুজ।

ধাপ ৩ : QPD সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$PQ^2 = QD^2 + PD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $PQ^2 - PD^2 = QD^2$

বা, $QD^2 = PQ^2 - \left(\frac{1}{2}PR\right)^2$ [ধাপ (১) হতে]

বা, $QD^2 = PQ^2 - \frac{PR^2}{4}$

বা, $QD^2 = \frac{4PQ^2 - PR^2}{4}$ [$\because PQ = PR = RQ$]

বা, $4QD^2 = 4PQ^2 - PQ^2$ [ধাপ (১) হতে]

$\therefore\ 4QD^2 = 3PQ^2$. (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ১৮ ▸ ABCD সামান্তরিকের AB = 5 সে.মি., AD = 4 সে.মি. এবং ∠BAD = 75°। অপর একটি সামান্তরিক APML এর ∠LAP = 60°। Δ AED এর ক্ষেত্রফল ও APML সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল, ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।

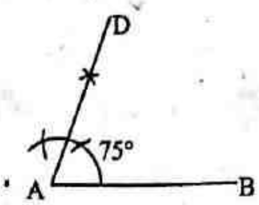
ক. পেন্সিল, কম্পাস ও স্কেল ব্যবহার করে ∠BAD আঁক।

খ. Δ AED অঙ্কন কর। (অঙ্কন চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক।)

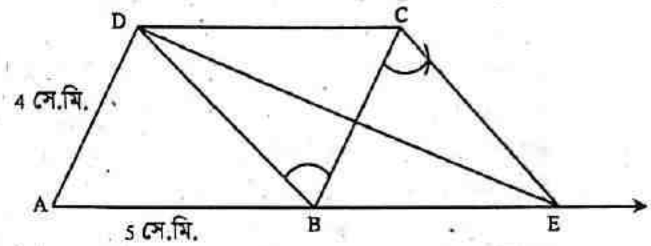
গ. APML সামান্তরিকটি অঙ্কন কর। (অঙ্কন চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক।)

১৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক পেন্সিল, কম্পাস ও স্কেল ব্যবহার করে ∠BAD = 75° আঁকা হলো।

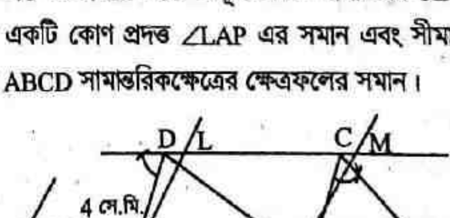


খ মনে করি, ABCD সামান্তরিক ক্ষেত্রের AB = 5 সে.মি., AD = 4 সে.মি. এবং ∠BAD = 75°। এরূপ একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ABCD সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



অঙ্কন : D, B যোগ করি। C বিন্দু দিয়ে CE ∥ DB টানি। মনে করি, তা AB বাহুর বর্ধিতাংশক E বিন্দুতে ছেদ করে। D, E যোগ করি। তাহলে, Δ AED-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

গ মনে করি, ABCD সামান্তরিকের AB = 5 সে.মি., AD = 4 সে.মি., ∠BAD = 75° এবং ∠x = 60° এরূপ একটি সামান্তরিক APML আঁকতে হবে যার একটি কোণ প্রদত্ত ∠LAP এর সমান এবং সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ABCD সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



অঙ্কন : B, D যোগ করি। C বিন্দু দিয়ে CF ∥ DB টানি এবং মনে করি, CF, AB বাহুর বর্ধিতাংশকে F বিন্দুতে ছেদ করে। AF রেখাংশের মধ্যবিন্দু P নির্ণয় করি। AP রেখাংশের A বিন্দুতে ∠x এর সমান ∠LAP আঁকি এবং P বিন্দু দিয়ে PM ∥ AL টানি। D বিন্দু দিয়ে DLCM ∥ AP টানি এবং মনে করি, তা AL ও PM কে যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, APML-ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।