# অধ্যায় ৯

## অনুশীলনী ৯.১

# ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ও অনুপাতের সম্পর্ক

## সাধারণ গাণিতিক অংশ

## পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রিয় শিক্ষার্থী, পাঠ্যবইয়ে এ অধ্যায়ে অনুশীলনীতে বিভিন্ন ধরনের ত্রিকোণমিতিক প্রশ্ন দেওয়া আছে। প্রতিটি প্রশ্নের যথাযথ ও নির্ভুল সমাধান এ অংশে সংযোজন করা হলো। এসব প্রশ্ন ও সমাধানের অনুশীলন তোমাদের সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তরের ধারণা সমৃদ্ধকরণে সহায়তা করবে।

### পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর ত্রিকোণমিতিক প্রশ্নাবলির সমাধান

**প্রশ্ন ১ ▸ নিচের গাণিতিক উক্তিগুলোর সত্য-মিথ্যা যাচাই কর। তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।**

(ক) $\tan A$ এর মান সর্বদা 1 এর চেয়ে কম

(খ) $\cot A$ হলো cot ও A এর গুণফল

(গ) A এর কোন একটি মানের জন্য $\sec A = \frac{12}{5}$

(ঘ) cos হলো cotangent এর সংক্ষিপ্ত রূপ

**সমাধান :**

(ক) $\tan A$ এর মান সর্বদা 1 এর চেয়ে কম উক্তিটি সত্য নয়। A এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $\tan A$ এর মান 1 এর চেয়ে কম বা সমান বা বেশি হতে পারে। যেমন $A = 30°, 45°, 60°$ মানের জন্য, $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$; যা 1 এর চেয়ে ছোট।

$\tan 45° = 1$; যা 1 এর সমান।

$\tan 60° = \sqrt{3}$; যা 1 এর চেয়ে বেশি।

অতএব, $\tan A$ এর মান সর্বদা 1 এর চেয়ে কম নয়। $\tan A$ এর মান 1 এর কম বা সমান বা বেশি হতে পারে।

(খ) $\cot A$ হলো cot ও A এর গুণফল উক্তিটি সঠিক নয়। এখানে $\cot A$ হলো ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এবং A হলো সমকোণী ত্রিভুজের যেকোনো একটি কোণের মান, যা cot এর সাথে যুক্ত হয়ে অর্থপূর্ণ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত প্রকাশ করে এবং ত্রিকোণমিতিক সমস্যা সমাধানে ব্যবহৃত হতে পারে। A বাদে cot আলাদা কোনো অর্থ বহন করে না।

(গ) দেওয়া আছে,

$\sec A = \frac{12}{5}$

বা, $\frac{1}{\cos A} = \frac{12}{5}$ $\left[\because \cos A = \frac{1}{\sec A}\right]$

বা, $\cos A = \frac{5}{12}$

বা, $\cos A = \cos 65.38°$

$\therefore$ $A = 65.38°$

সুতরাং A এর মান $65.38°$ জন্য $\sec A = \frac{12}{5}$.

(ঘ) cos হলো cotangent এর সংক্ষিপ্ত রূপ উক্তিটি সঠিক নয়। কারণ cotangent এর সংক্ষিপ্ত রূপ cot। cos হলো cosine এর সংক্ষিপ্ত রূপ।

**প্রশ্ন ২ ▸ $\sin A = \frac{3}{4}$ হলে, A কোণের অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় কর।**

**সমাধান :** দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{3}{4}$

অতএব, A কোণের বিপরীত বাহু = 3

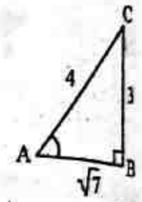
এবং অতিভুজ = 4

$\therefore$ সন্নিহিত বাহু $= \sqrt{4^2 - 3^2}$
$= \sqrt{16 - 9}$
$= \sqrt{7}$

সুতরাং, $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$, $\cot A = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\text{cosec } A = \frac{4}{3}$; $\sec A = \frac{4}{\sqrt{7}}$.




**প্রশ্ন ৩ ▸ দেওয়া আছে, $15 \cot A = 8$, $\sin A$ ও $\sec A$ এর মান বের কর।**

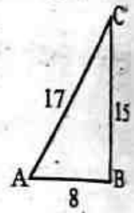
**সমাধান :** দেওয়া আছে, $15 \cot A = 8$

$\therefore$ $\cot A = \frac{8}{15}$

অতএব, A কোণের বিপরীত বাহু = 15

সন্নিহিত বাহু = 8

$\therefore$ অতিভুজ $= \sqrt{(15)^2 + 8^2} = 17$




সুতরাং $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{15}{17}$

এবং $\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{17}{8}$

নির্ণেয় মান $\frac{15}{17}$ এবং $\frac{17}{8}$.

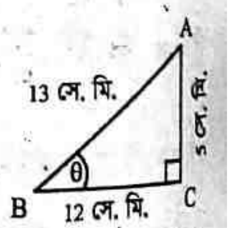
**প্রশ্ন ৪ ▸ ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, AB = 13 সে. মি., BC = 12 সে. মি. এবং $\angle ABC = \theta$ হলে, $\sin \theta$, $\cos \theta$ ও $\tan \theta$ এর মান বের কর।**

**সমাধান :** দেওয়া আছে, θ কোণের

সন্নিহিত বাহু, BC = 12 সে. মি.

অতিভুজ, AB = 13 সে. মি.

$\therefore$ বিপরীত বাহু, AC
$= \sqrt{13^2 - 12^2}$ সে. মি.
$= \sqrt{169 - 144}$ সে. মি.
$= \sqrt{25}$ সে. মি.
= 5 সে. মি.

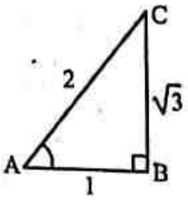



এখন, $\sin \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$, $\cos \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$ এবং $\tan \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$

নির্ণেয় মান, $\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, \frac{5}{12}$.

**প্রশ্ন ৫ ▸ ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ কোণটি সমকোণ। $\tan A = \sqrt{3}$ হলে, $\sqrt{3}\sin A\cos A = \frac{3}{4}$ এর সত্যতা যাচাই কর।**

সমাধান : দেওয়া আছে,
ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ সমকোণ এবং




$\tan A = \sqrt{3}$

বা, $\frac{BC}{AB} = \sqrt{3}$ $\left[\because \tan A = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}\right]$

বা, $\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

অতএব, $AB = 1$ এবং $BC = \sqrt{3}$

$\therefore\ AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$
$= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$
$= \sqrt{1+3}$
$= \sqrt{4} = 2$

এখানে, $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

এবং $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

সুতরাং $\sqrt{3}\sin A\cos A = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

অতএব, $\tan A = \sqrt{3}$ এর জন্য $\sqrt{3}\sin A\cos A = \frac{3}{4}$ সত্য।

প্রমাণ কর (৬ – ২০) :

**প্রশ্ন ৬ ▸ (ক) $\frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\csc^2 A} = 1$**

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\csc^2 A}$

$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 A}} + \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 A}}$

$\left[\because \sec A = \frac{1}{\cos A} \text{ এবং } \csc A = \frac{1}{\sin A}\right]$

$= \cos^2 A + \sin^2 A\ [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore\ \frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\csc^2 A} = 1.$ (প্রমাণিত)

**(খ) $\frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$**

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A}$

$= \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}$ $\left[\because \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}\right]$

$= \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A}$

$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A}$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore\ \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1.$ (প্রমাণিত)

**(গ) $\frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1$**

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A}$

$= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$ $\left[\because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}\right]$

$= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$

$= \frac{1 - \cos^2 A}{\sin^2 A}$

$= \frac{\sin^2 A}{\sin^2 A} = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore\ \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1.$ (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ৭ ▸ (ক) $\frac{\sin A}{\csc A} + \frac{\cos A}{\sec A} = 1$**

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{\sin A}{\csc A} + \frac{\cos A}{\sec A}$

$= \frac{\sin A}{\frac{1}{\sin A}} + \frac{\cos A}{\frac{1}{\cos A}}$

$= (\sin A \times \sin A) + (\cos A \times \cos A)$

$= \sin^2 A + \cos^2 A$

$= 1$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore\ \frac{\sin A}{\csc A} + \frac{\cos A}{\sec A} = 1.$ (প্রমাণিত)

**(খ) $\frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A} = 1.$**

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A}$

$= \sec A\left(\frac{1}{\cos A}\right) - \tan A\left(\frac{1}{\cot A}\right)$

$= \sec A \,.\, \sec A - \tan A \,.\, \tan A$

$= \sec^2 A - \tan^2 A$

$= 1\ [\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1]$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore\ \frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A} = 1.$ (প্রমাণিত)

**(গ) $\frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \csc^2 A} = 1$**

সমাধান : বামপক্ষ $= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \csc^2 A}$

$= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\sin^2 A}\right)}$

$= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{\frac{\sin^2 A + 1}{\sin^2 A}}$

$= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{\sin^2 A}{1 + \sin^2 A}$

$= \frac{1 + \sin^2 A}{1 + \sin^2 A}$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore\ \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \csc^2 A} = 1.$ (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ৮ ▸ (ক)** $\frac{\tan A}{1-\cot A}+\frac{\cot A}{1-\tan A}=\sec A \operatorname{cosec} A+1.$

সমাধান : বামপক্ষ $=\frac{\tan A}{1-\cot A}+\frac{\cot A}{1-\tan A}$

$$=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{1-\frac{\cos A}{\sin A}}+\frac{\frac{\cos A}{\sin A}}{1-\frac{\sin A}{\cos A}} \quad \left[\because \tan A=\frac{\sin A}{\cos A} \text{ এবং } \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}\right]$$

$$=\frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A-\cos A}{\sin A}}+\frac{\frac{\cos A}{\sin A}}{\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}}$$

$$=\left(\frac{\sin A}{\cos A}\times\frac{\sin A}{\sin A-\cos A}\right)+\left(\frac{\cos A}{\sin A}\times\frac{\cos A}{\cos A-\sin A}\right)$$

$$=\frac{\sin^2 A}{\cos A(\sin A-\cos A)}+\frac{\cos^2 A}{\sin A(\cos A-\sin A)}$$

$$=\frac{\sin^2 A}{\cos A(\sin A-\cos A)}-\frac{\cos^2 A}{\sin A(\sin A-\cos A)}$$

$$=\frac{\sin^3 A-\cos^3 A}{\sin A\cos A(\sin A-\cos A)}$$

$$=\frac{(\sin A-\cos A)(\sin^2 A+\sin A\cos A+\cos^2 A)}{\sin A\cos A(\sin A-\cos A)}$$

$$[\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)]$$

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+\sin A\cos A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{1+\sin A\cos A}{\sin A\cos A}\quad[\because \sin^2 A+\cos^2 A=1]$$

$$=\frac{1}{\sin A\cos A}+\frac{\sin A\cos A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{1}{\sin A}\cdot\frac{1}{\cos A}+1$$

$=\operatorname{cosec} A \,.\, \sec A+1$

= ডানপক্ষ

$\therefore \quad \frac{\tan A}{1-\cot A}+\frac{\cot A}{1-\tan A}=\sec A \operatorname{cosec} A+1.$ (প্রমাণিত)

**(খ)** $\frac{1}{1+\tan^2 A}+\frac{1}{1+\cot^2 A}=1$

সমাধান : বামপক্ষ $=\frac{1}{1+\tan^2 A}+\frac{1}{1+\cot^2 A}$

$$=\frac{1}{1+\tan^2 A}+\frac{1}{1+\frac{1}{\tan^2 A}}$$

$$=\frac{1}{1+\tan^2 A}+\frac{1}{\frac{\tan^2 A+1}{\tan^2 A}}$$

$$=\frac{1}{1+\tan^2 A}+\frac{\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$=\frac{1+\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$=1=$ ডানপক্ষ

$\therefore \quad \frac{1}{1+\tan^2 A}+\frac{1}{1+\cot^2 A}=1.$ (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ৯ ▸** $\frac{\cos A}{1-\tan A}+\frac{\sin A}{1-\cot A}=\sin A+\cos A$

সমাধান : বামপক্ষ $=\frac{\cos A}{1-\tan A}+\frac{\sin A}{1-\cot A}$

$$=\frac{\cos A}{1-\frac{\sin A}{\cos A}}+\frac{\sin A}{1-\frac{\cos A}{\sin A}}$$

$$\left[\because \tan A=\frac{\sin A}{\cos A} \text{ এবং } \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}\right]$$

$$=\frac{\cos A}{\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}}+\frac{\sin A}{\frac{\sin A-\cos A}{\sin A}}$$

$$=\frac{\cos A\,.\,\cos A}{\cos A-\sin A}+\frac{\sin A\,.\,\sin A}{\sin A-\cos A}$$

$$=\frac{\cos^2 A}{\cos A-\sin A}+\frac{\sin^2 A}{-(\cos A-\sin A)}$$

$$=\frac{\cos^2 A}{\cos A-\sin A}-\frac{\sin^2 A}{\cos A-\sin A}$$

$$=\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos A-\sin A}$$

$$=\frac{(\cos A+\sin A)(\cos A-\sin A)}{(\cos A-\sin A)}$$

$=\cos A+\sin A$

$=\sin A+\cos A$

= ডানপক্ষ

$\therefore \quad \frac{\cos A}{1+\tan^2 A}+\frac{\sin A}{1-\cot A}=\sin A+\cos A.$ (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ১০ ▸** $\tan A\sqrt{1-\sin^2 A}=\sin A$

সমাধান : বামপক্ষ $=\tan A\sqrt{1-\sin^2 A}$

$$=\frac{\sin A}{\cos A}\sqrt{\cos^2 A}$$

$$\left[\because \tan A=\frac{\sin A}{\cos A} \text{ এবং } 1-\sin^2 A=\cos^2 A\right]$$

$$=\frac{\sin A}{\cos A}\,.\,\cos A$$

$=\sin A=$ ডানপক্ষ

$\therefore \quad \tan A\sqrt{1-\sin^2 A}=\sin A.$ (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ১১ ▸** $\frac{\sec A+\tan A}{\operatorname{cosec} A+\cot A}=\frac{\operatorname{cosec} A-\cot A}{\sec A-\tan A}$

সমাধান : বামপক্ষ $=\frac{\sec A+\tan A}{\operatorname{cosec} A+\cot A}$

[লব ও হরকে $(\operatorname{cosec} A-\cot A)(\sec A-\tan A)$ দ্বারা গুণ করে]

$$\therefore \quad \frac{(\sec A+\tan A)(\sec A-\tan A)(\operatorname{cosec} A-\cot A)}{(\operatorname{cosec} A+\cot A)(\operatorname{cosec} A-\cot A)(\sec A-\tan A)}$$

$$=\frac{(\sec^2 A-\tan^2 A)(\operatorname{cosec} A-\cot A)}{(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)(\sec A-\tan A)}$$

$$=\frac{\operatorname{cosec} A-\cot A}{\sec A-\tan A}$$

= ডানপক্ষ

$\therefore \quad \frac{\sec A+\tan A}{\operatorname{cosec} A+\cot A}=\frac{\operatorname{cosec} A-\cot A}{\sec A-\tan A}.$ (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ১২ ▸** $\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A - 1} + \dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2 \sec^2 A$

**সমাধান :** বামপক্ষ $= \dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A - 1} + \dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A + 1}$

$$= \operatorname{cosec} A \left\{\frac{1}{\operatorname{cosec} A - 1} + \frac{1}{\operatorname{cosec} A + 1}\right\}$$

$$= \operatorname{cosec} A \left\{\frac{\operatorname{cosec} A + 1 + \operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec}^2 A - 1}\right\}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec} A \,.\, 2 \operatorname{cosec} A}{\cot^2 A} \quad [\because \operatorname{cosec}^2 A - 1 = \cot^2 A]$$

$$= \frac{2 \operatorname{cosec}^2 A}{\cot^2 A}$$

$$= 2\frac{\dfrac{1}{\sin^2 A}}{\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}}$$

$$\left[\because \operatorname{cosec}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A} \text{ এবং } \cot^2 A = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}\right]$$

$$= \frac{2}{\sin^2 A} \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{2}{\cos^2 A} = 2 \frac{1}{\cos^2 A}$$

$$= 2 \sec^2 A \quad \left[\because \frac{1}{\cos^2 A} = \sec^2 A\right]$$

= ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A - 1} + \dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2 \sec^2 A$. (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ১৩ ▸** $\dfrac{1}{1 + \sin A} + \dfrac{1}{1 - \sin A} = 2 \sec^2 A$

**সমাধান :** বামপক্ষ $= \dfrac{1}{1 + \sin A} + \dfrac{1}{1 - \sin A}$

$$= \frac{1 - \sin A + 1 + \sin A}{(1 + \sin A)(1 - \sin A)}$$

$$= \frac{2}{1 - \sin^2 A} \quad [\because (a + b)(a - b) = a^2 - b^2]$$

$$= \frac{2}{\cos^2 A} \quad [\because 1 - \sin^2 A = \cos^2 A]$$

$$= 2\frac{1}{\cos^2 A} = 2 \sec^2 A \quad \left[\because \frac{1}{\cos^2 A} = \sec^2 A\right]$$

= ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{1}{1 + \sin A} + \dfrac{1}{1 - \sin A} = 2 \sec^2 A$. (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ১৪ ▸** $\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A - 1} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2 \tan^2 A$

**সমাধান :** বামপক্ষ $= \dfrac{1}{\operatorname{cosec} A - 1} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

$$= \frac{\operatorname{cosec} A + 1 - \operatorname{cosec} A + 1}{(\operatorname{cosec} A - 1)(\operatorname{cosec} A + 1)}$$

$$= \frac{2}{\operatorname{cosec}^2 A - 1} \quad [\because \operatorname{cosec}^2 A - 1 = \cot^2 A]$$

$$= 2 \,.\, \frac{1}{\cot^2 A}$$

$$= 2 \tan^2 A \quad \left[\because \frac{1}{\cot^2 A} = \tan^2 A\right]$$

= ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{1}{\operatorname{cosec} A - 1} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2 \tan^2 A$. (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ১৫ ▸** $\dfrac{\sin A}{1 - \cos A} + \dfrac{1 - \cos A}{\sin A} = 2 \operatorname{cosec} A$

**সমাধান :** বামপক্ষ $= \dfrac{\sin A}{1 - \cos A} + \dfrac{1 - \cos A}{\sin A}$

$$= \frac{\sin A \,.\, \sin A + (1 - \cos A)(1 - \cos A)}{(1 - \cos A) \sin A}$$

$$= \frac{\sin^2 A + (1 - \cos A)^2}{(1 - \cos A) \sin A}$$

$$= \frac{\sin^2 A + 1 - 2 \cos A + \cos^2 A}{(1 - \cos A) \sin A} \quad [\because (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2]$$

$$= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A) + 1 - 2 \cos A}{(1 - \cos A) \sin A}$$

$$= \frac{1 + 1 - 2 \cos A}{(1 - \cos A) \sin A} \quad [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$$

$$= \frac{2 - 2 \cos A}{(1 - \cos A) \sin A}$$

$$= \frac{2(1 - \cos A)}{(1 - \cos A) \sin A}$$

$$= \frac{2}{\sin A} = 2 \,.\, \frac{1}{\sin A}$$

$$= 2 \operatorname{cosec} A \quad \left[\because \frac{1}{\sin A} = \operatorname{cosec} A\right]$$

= ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{\sin A}{1 - \cos A} + \dfrac{1 - \cos A}{\sin A} = 2 \operatorname{cosec} A$. (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ১৬ ▸** $\dfrac{\tan A}{\sec A + 1} - \dfrac{\sec A - 1}{\tan A} = 0$

**সমাধান :** বামপক্ষ $= \dfrac{\tan A}{\sec A + 1} - \dfrac{\sec A - 1}{\tan A}$

$$= \frac{\tan A \,.\, \tan A - (\sec A - 1)(\sec A + 1)}{(\sec A + 1) \tan A}$$

$$= \frac{\tan^2 A - (\sec^2 A - 1)}{(\sec A + 1) \tan A}$$

$$= \frac{\tan^2 A - \tan^2 A}{(\sec A + 1) \tan A} \quad [\because \sec^2 A - 1 = \tan^2 A]$$

$$= \frac{0}{(\sec A + 1) \tan A}$$

= 0 = ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{\tan A}{\sec A + 1} - \dfrac{\sec A - 1}{\tan A} = 0$. (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ১৭ ▸** $(\tan \theta + \sec \theta)^2 = \dfrac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}$

**সমাধান :**

বামপক্ষ $= (\tan \theta + \sec \theta)^2$

$$= \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta}\right)^2 \quad \left[\because \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ এবং } \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}\right]$$

$$= \left(\frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta}\right)^2 = \frac{(1 + \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{(1 + \sin \theta)(1 + \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta} \quad \left[\begin{array}{l}\because 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta \text{ এবং} \\ \because (a + b)^2 = (a + b)(a + b)\end{array}\right]$$

$$= \frac{(1 + \sin \theta)(1 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} \quad [\because (a + b)(a - b) = a^2 - b^2]$$

$$= \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \text{ডানপক্ষ}$$

$\therefore (\tan \theta + \sec \theta)^2 = \dfrac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}$. (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ১৮ ▸** $\dfrac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \,.\, \tan B$

সমাধান : বামপক্ষ $= \dfrac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A}$

$$= \dfrac{\cot A + \tan B}{\dfrac{1}{\tan B} + \dfrac{1}{\cot A}} = \dfrac{\cot A + \tan B}{\dfrac{\cot A + \tan B}{\tan B \cot A}}$$

$$= (\cot A + \tan B) \times \dfrac{\cot A \tan B}{(\cot A + \tan B)}$$

$= \cot A \tan B$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \,.\, \tan B.$ (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ১৯ ▸** $\sqrt{\dfrac{1 - \sin A}{1 + \sin A}} = \sec A - \tan A$

সমাধান : বামপক্ষ $= \sqrt{\dfrac{1 - \sin A}{1 + \sin A}}$

$$= \dfrac{\sqrt{1 - \sin A}}{\sqrt{1 + \sin A}}$$

$$= \dfrac{\sqrt{1 - \sin A} \times \sqrt{1 - \sin A}}{\sqrt{1 + \sin A} \times \sqrt{1 - \sin A}}$$

[লব ও হরকে $\sqrt{1 - \sin A}$ দ্বারা গুণ করে]

$$= \dfrac{\left(\sqrt{1 - \sin A}\right)^2}{\sqrt{(1 + \sin A)(1 - \sin A)}}$$

$= \dfrac{1 - \sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$ $[\because (a + b)(a - b) = a^2 - b^2]$

$= \dfrac{1 - \sin A}{\sqrt{\cos^2 A}}$ $[\because 1 - \sin^2 A = \cos^2 A]$

$$= \dfrac{1 - \sin A}{\cos A} = \dfrac{1}{\cos A} - \dfrac{\sin A}{\cos A}$$

$= \sec A - \tan A$

$[\because \sec A = \dfrac{1}{\cos A}$ এবং $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}]$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \sqrt{\dfrac{1 - \sin A}{1 + \sin A}} = \sec A - \tan A.$ (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ২০ ▸** $\sqrt{\dfrac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \cot A + \operatorname{cosec} A.$

সমাধান :

বামপক্ষ $= \sqrt{\dfrac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \dfrac{\sqrt{\sec A + 1}}{\sqrt{\sec A - 1}}$

$$= \dfrac{\sqrt{\sec A + 1} \times \sqrt{\sec A + 1}}{\sqrt{\sec A - 1} \times \sqrt{\sec A + 1}}$$

[লব ও হরকে $\sqrt{\sec A + 1}$ দ্বারা গুণ করে]

$$= \dfrac{\left(\sqrt{\sec A + 1}\right)^2}{\sqrt{(\sec A - 1)(\sec A + 1)}}$$

$= \dfrac{\sec A + 1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$ $[\because (a + b)(a - b) = a^2 - b^2]$

$= \dfrac{\sec A + 1}{\sqrt{\tan^2 A}}$ $[\because \sec^2 A - 1 = \tan^2 A]$

$$= \dfrac{\sec A + 1}{\tan A} = \dfrac{\sec A}{\tan A} + \dfrac{1}{\tan A} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos A}}{\dfrac{\sin A}{\cos A}} + \cot A$$

$[\because \sec A = \dfrac{1}{\cos A}, \tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ এবং $\dfrac{1}{\tan A} = \cot A]$

$$= \dfrac{1}{\cos A} \times \dfrac{\cos A}{\sin A} + \cot A$$

$$= \dfrac{1}{\sin A} + \cot A$$

$= \operatorname{cosec} A + \cot A$ $[\because \dfrac{1}{\sin A} = \operatorname{cosec} A]$

$= \cot A + \operatorname{cosec} A =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sqrt{\dfrac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \cot A + \operatorname{cosec} A.$ (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ২১ ▸** $\cos A + \sin A = \sqrt{2} \cos A$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos A - \sin A = \sqrt{2} \sin A.$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$\cos A + \sin A = \sqrt{2} \cos A$

বা, $\sin A = \sqrt{2} \cos A - \cos A$

বা, $\sin A = (\sqrt{2} - 1) \cos A$

বা, $\sin A = \dfrac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} + 1)} \cos A$

[ডান পক্ষে লব ও হরকে $\sqrt{2} + 1$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\sin A = \dfrac{2 - 1}{\sqrt{2} + 1} \cos A$

বা, $(\sqrt{2} + 1) \sin A = \cos A$ [বজ্রগুণন করে]

বা, $\sqrt{2} \sin A + \sin A = \cos A$

বা, $\cos A = \sqrt{2} \sin A + \sin A$

বা, $\cos A - \sin A = \sqrt{2} \sin A$ [পক্ষান্তর করে]

$\therefore$ $\cos A - \sin A = \sqrt{2} \sin A.$ (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ২২ ▸** যদি $\tan A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\tan A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

আমরা জানি, $\cot A = \dfrac{1}{\tan A} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$

$$= \dfrac{1 + \cot^2 A - (1 + \tan^2 A)}{1 + \cot^2 A + 1 + \tan^2 A}$$

$[\because 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$ এবং $1 + \tan^2 A = \sec^2 A]$

$$= \dfrac{1 + \cot^2 A - 1 - \tan^2 A}{1 + \cot^2 A + 1 + \tan^2 A} = \dfrac{\cot^2 A - \tan^2 A}{2 + \cot^2 A + \tan^2 A}$$

$= \dfrac{(\sqrt{3})^2 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{2 + (\sqrt{3})^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ [tan A ও cot A এর মান বসিয়ে]

$$= \dfrac{3 - \dfrac{1}{3}}{2 + 3 + \dfrac{1}{3}} = \dfrac{\dfrac{9 - 1}{3}}{\dfrac{6 + 9 + 1}{3}} = \dfrac{\dfrac{8}{3}}{\dfrac{16}{3}} = \dfrac{8}{3} \times \dfrac{3}{16} = \dfrac{1}{2}$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটির মান $= \dfrac{1}{2}.$

অধ্যায় ৮

**প্রশ্ন ২৩ ▸ $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{4}{3}$ হলে, $\operatorname{cosec} A + \cot A$ এর মান কত?**

সমাধান : দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{4}{3}$

বা, $(\operatorname{cosec} A - \cot A)(\operatorname{cosec} A + \cot A) = \frac{4}{3}(\operatorname{cosec} A + \cot A)$ [উভয়পক্ষে $(\operatorname{cosec} A + \cot A)$ গুণ করে]

বা, $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = \frac{4}{3}(\operatorname{cosec} A + \cot A)$

বা, $1 = \frac{4}{3}(\operatorname{cosec} A + \cot A)$ [$\because \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$]

বা, $\operatorname{cosec} A + \cot A = 1 \times \frac{3}{4}$

$\therefore$ $\operatorname{cosec} A + \cot A = \frac{3}{4}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটির মান $= \frac{3}{4}$.

**প্রশ্ন ২৪ ▸ $\cot A = \frac{b}{a}$ হলে, $\frac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A}$ এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান : দেওয়া আছে, $\cot A = \frac{b}{a}$

বা, $\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b}{a}$. [$\because \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$]

বা, $a \cos A = b \sin A$ [বজ্রগুণন করে]

বা, $\frac{a}{b} \cos A = \sin A$

বা, $\sin A = \frac{a}{b} \cos A$ [পক্ষান্তর করে]

এখন, $\frac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A}$

$= \frac{a \cdot \frac{a}{b} \cos A - b \cos A}{a \cdot \frac{a}{b} \cos A + b \cos A}$ [$\because \sin A = \frac{a}{b} \cos A$]

$= \frac{\frac{\cos A}{b}(a^2 - b^2)}{\frac{\cos A}{b}(a^2 + b^2)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটির মান $= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

## পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

**প্রশ্ন ২৫** $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{1}{x}$ হলে,

ক. $\operatorname{cosec} A + \cot A$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $\sec A = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

গ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$.

### ২৫নং প্রশ্নের সমাধান

**ক** দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{1}{x}$

বা, $\frac{(\operatorname{cosec} A - \cot A)(\operatorname{cosec} A + \cot A)}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \frac{1}{x}$

বা, $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \frac{1}{x}$

বা, $\frac{1}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \frac{1}{x}$

$\therefore$ $\operatorname{cosec} A + \cot A = x$

নির্ণেয় মান : x.

**খ** দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{1}{x}$

বা, $\frac{1}{\sin A} - \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{x}$

বা, $\frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{1}{x}$

বা, $\left(\frac{1 - \cos A}{\sin A}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 - \cos A)^2}{\sin^2 A} = \frac{1}{x^2}$

বা, $\frac{(1 - \cos A)^2}{1 - \cos^2 A} = \frac{1}{x^2}$

বা, $\frac{(1 - \cos A)(1 - \cos A)}{(1 + \cos A)(1 - \cos A)} = \frac{1}{x^2}$

বা, $\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{1}{x^2}$

বা, $\frac{1 - \cos A + 1 + \cos A}{1 - \cos A - 1 - \cos A} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{-2 \cos A} = \frac{x^2 + 1}{-(x^2 - 1)}$

বা, $\frac{1}{\cos A} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$\therefore$ $\sec A = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. (দেখানো হলো)

**গ** দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{1}{x}$............. (1)

ক-হতে প্রাপ্ত, $\operatorname{cosec} A + \cot A = x$ .................. (2)

খ-হতে প্রাপ্ত, $\sec A = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

(2) নং হতে (1) নং বিয়োগ করে পাই,

$\operatorname{cosec} A + \cot A - \operatorname{cosec} A + \cot A = x - \frac{1}{x}$

বা, $2 \cot A = \frac{x^2 - 1}{x}$

বা, $\cot A = \frac{x^2 - 1}{2x}$

বা, $\frac{1}{\tan A} = \frac{x^2 - 1}{2x}$

বা, $\tan A = \frac{2x}{x^2 - 1}$

(1) নং এ $\cot A = \frac{x^2 - 1}{2x}$ বসিয়ে পাই,

$\operatorname{cosec} A - \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{1}{x}$

বা, $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{2 + x^2 - 1}{2x} = \frac{x^2 + 1}{2x}$

বামপক্ষ $= \tan A + \cot A$

$= \frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{x^2 - 1}{2x}$

$= \frac{4x^2 + x^4 - x^2 - x^2 + 1}{2x(x^2 - 1)} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{2x(x^2 - 1)}$

ডানপক্ষ $= \sec A \operatorname{cosec} A$

$= \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 + 1}{2x}$

$= \frac{x^4 + x^2 + x^2 + 1}{2x(x^2 - 1)}$

$= \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{2x(x^2 - 1)}$

$\therefore$ $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$. (প্রমাণিত)

# অধ্যায় ৯

## অনুশীলনী ৯.২
## বিভিন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

### সাধারণ গাণিতিক অংশ

### পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রিয় শিক্ষার্থী, পাঠ্যবইয়ে এ অধ্যায়ে অনুশীলনীতে বিভিন্ন ধরনের ত্রিকোণমিতিক প্রশ্ন দেওয়া আছে। প্রতিটি প্রশ্নের যথাযথ ও নির্ভুল সমাধান এ অংশে সংযোজন করা হলো। এসব প্রশ্ন ও সমাধানের অনুশীলন তোমাদের সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তরের ধারণা সমৃদ্ধকরণে সহায়তা করবে।

### পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ও উত্তর

১. $\cos\theta = \frac{1}{2}$ হলে $\cot\theta$ এর মান কোনটি?

ক $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ 1 গ $\sqrt{3}$ ঘ 2

▸▸ তথ্য/ব্যাখ্যা : $\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos 60°$

$\therefore \theta = 60°$

সুতরাং, $\cot\theta = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

২. $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{3}$ হলে, $\cos^4\theta - \sin^4\theta$ এর মান কত?

ক 3 খ 2 গ 1 ঘ $\frac{1}{3}$

▸▸ তথ্য/ব্যাখ্যা : $\cos^4\theta - \text{son}^4\theta = (\cos^2\theta)^2 - (\sin^2\theta)^2$

$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

৩. $\cot(\theta - 30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\sin\theta$ = কত?

ক $\frac{1}{2}$ খ 0 গ 1 ঘ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

▸▸ তথ্য/ব্যাখ্যা : $\cot(\theta - 30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\cot(\theta - 30°) = \cot 60°$

বা, $\theta - 30° = 60°$

$\therefore \theta = 60° + 30° = 90°$.

$\therefore \sin\theta = \sin 90° = 1$.

৪. $\tan(3A) = \sqrt{3}$ হলে, A = কত?

ক 45° খ 30° গ 20° ঘ 15°

▸▸ তথ্য/ব্যাখ্যা : $\tan(3A) = \sqrt{3} = \tan 60°$

বা, $3A = 60°$

$\therefore A = 20°$.

৫. $0° \le \theta \le 90°$ এর জন্য $\sin\theta$ এর সর্বোচ্চ মান কত?

ক −1 খ 0 গ $\frac{1}{2}$ ঘ 1

▸▸ তথ্য/ব্যাখ্যা : $0° \le \theta \le 90°$ এর জন্য $\sin\theta$ এর সর্বোচ্চ মান 1

৬. ABC সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ AC = 2, AB = 1

i. $\angle ACB = 30°$

ii. $\tan A = \sqrt{3}$

iii. $\sin(A + C) = 0$


নিচের কোনটি সঠিক?

ক i খ ii গ i ও ii ঘ ii ও iii

▸▸ তথ্য/ব্যাখ্যা : এখানে,

(i) $\sin\angle ACB = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} = \sin 30°$

$\therefore \angle ACB = 30°$ $\therefore$ i নং সঠিক।

(ii) $\angle A = 90° - \angle C = 90° - 30° = 60°$

$\therefore \tan A = \tan 60° = \sqrt{3}$

$\therefore$ ii নং সঠিক।

(iii) $\sin(A + C) = \sin(60° + 30°) = \sin 90° = 1$

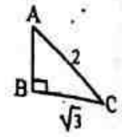
$\therefore$ iii নং সঠিক নয়।

৭. ABC সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ AC = 2, AB = 1

i. $\cos A = \sin C$

ii. $\cos A + \sec A = \frac{5}{2}$

iii. $\tan C = \frac{2}{\sqrt{3}}$




নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii গ i ও iii ঘ i, ii ও iii

▸▸ তথ্য/ব্যাখ্যা : (i) $AB = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 (\sqrt{3}^2)} = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$.

$\therefore \cos A = \sin C$ বা, $\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AC}$ বা, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

(ii) $\cos A + \sec A = \frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2} + \frac{2}{1} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$

(iii) $\tan C = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ সুতরাং, i ও ii সঠিক।

### উত্তরের শুদ্ধতা/ নির্ভুলতা যাচাই করো

| ১ | ক | ২ | ঘ | ৩ | গ | ৪ | গ | ৫ | ঘ | ৬ | গ | ৭ | ক |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

### পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর ত্রিকোণমিতিক প্রশ্নাবলির সমাধান

□ মান নির্ণয় কর (৮–১১) :

**প্রশ্ন ৮ ▸** $\frac{1 - \cot^2 60°}{1 + \cot^2 60°}$

**সমাধান :** আমরা জানি, $\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \frac{1 - \cot^2 60°}{1 + \cot^2 60°}$

$= \frac{1 - (\cot 60°)^2}{1 + (\cot 60°)^2}$

$= \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ [cot 60°-এর মান বসিয়ে]

$= \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{3-1}{3}}{\frac{3+1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

নির্ণেয় মান $\frac{1}{2}$.

**প্রশ্ন ৯ ▸** $\tan 45° . \sin^2 60° . \tan 30° . \tan 60°$

**সমাধান :** আমরা জানি, $\tan 45° = 1$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan 60° = \sqrt{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \tan 45° . \sin^2 60° . \tan 30° . \tan 60°$

$= (\tan 45°) . (\sin 60°)^2 . \tan 30° . (\tan 60°)$

$= (1) . \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 . \frac{1}{\sqrt{3}} . (\sqrt{3})$ [মান বসিয়ে]

$= 1 . \frac{3}{4} . 1 = \frac{3}{4}$

নির্ণেয় মান $\frac{3}{4}$.

**প্রশ্ন ১০ ▸ $\frac{1-\cos^2 60^\circ}{1+\cos^2 60^\circ}+\sec^2 60^\circ$**

**সমাধান :** আমরা জানি, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ এবং $\sec 60^\circ = 2$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \frac{1-\cos^2 60^\circ}{1+\cos^2 60^\circ}+\sec^2 60^\circ$

$= \frac{1-(\cos 60^\circ)^2}{1+(\cos 60^\circ)^2}+(\sec 60^\circ)^2$

$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+(2)^2$

$= \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}+4 = \frac{\frac{4-1}{4}}{\frac{4+1}{4}}+4$

$= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}+4 = \frac{3}{4}\times\frac{4}{5}+4 = \frac{3}{5}+4 = \frac{3+20}{5} = \frac{23}{5}$

নির্ণেয় মান $\frac{23}{5}$.

**প্রশ্ন ১১ ▸ $\cos 45^\circ.\cot^2 60^\circ.\text{cosec}^2 30^\circ$**

**সমাধান :** আমরা জানি, $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\text{cosec } 30^\circ = 2$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \cos 45^\circ . \cot^2 60^\circ . \text{cosec}^2 30^\circ$

$= \cos 45^\circ . (\cot 60)^2 . (\text{cosec } 30^\circ)^2$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} . \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 . 2^2$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{1}{3} . 4 = \frac{2.\sqrt{2}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

নির্ণেয় মান $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

☐ **দেখাও যে (১২–১৭) :**

**প্রশ্ন ১২ ▸ $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$**

**সমাধান :**

বামপক্ষ $= \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = (\cos 30^\circ)^2 - (\sin 30^\circ)^2$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $[\because \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}]$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ডানপক্ষ $= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $[\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2}]$

$\therefore \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$. (দেখানো হলো)

**প্রশ্ন ১৩ ▸ $\sin 60^\circ . \cos 30^\circ + \cos 60^\circ . \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$**

**সমাধান :**

বামপক্ষ $= \sin 60^\circ.\cos 30^\circ + \cos 60^\circ.\sin 30^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} . \frac{1}{2}$

$[\because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ এবং $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}]$

$= \frac{(\sqrt{3})^2}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 = \sin 90^\circ =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$. (দেখানো হলো)

**প্রশ্ন ১৪ ▸ $\cos 60^\circ . \cos 30^\circ + \sin 60^\circ . \sin 30^\circ = \cos 30^\circ$**

**সমাধান :** বামপক্ষ $= \cos 60^\circ . \cos 30^\circ + \sin 60^\circ.\sin 30^\circ$

$= \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{1}{2}$

$[\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}]$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ডানপক্ষ $= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $[\because \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\therefore \cos 60^\circ.\cos 30^\circ + \sin 60^\circ.\sin 30^\circ = \cos 30^\circ$. (দেখানো হলো)

**প্রশ্ন ১৫ ▸ $\sin 3A = \cos 3A$ যদি $A = 15^\circ$ হয় ।**

**সমাধান :** বামপক্ষ $= \sin 3A$

$= \sin (3 \times 15^\circ)$ $[\because A = 15^\circ]$

$= \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $[\because \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}]$

ডানপক্ষ $= \cos 3A$

$= \cos (3 \times 15^\circ)$ $[\because A = 15^\circ]$

$= \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $[\because \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}]$

$\therefore$ $\sin 3A = \cos 3A$. (দেখানো হলো)

**প্রশ্ন ১৬ ▸ $\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1+\tan^2 A}$ যদি $A = 45^\circ$ হয় ।**

**সমাধান :**

বামপক্ষ $= \sin 2A$

$= \sin (2 \times 45^\circ)$ $[\because A = 45^\circ]$

$= \sin 90^\circ = 1$ $[\because \sin 90^\circ = 1]$

ডানপক্ষ $= \frac{2 \tan A}{1+\tan^2 A} = \frac{2 \tan A}{1+(\tan A)^2}$

$= \frac{2 \tan 45^\circ}{1+(\tan 45^\circ)^2}$ $[\because A = 45^\circ]$

$= \frac{2.1}{1+(1)^2}$ $[\because \tan 45^\circ = 1]$

$= \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$

$\therefore$ $\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1+\tan^2 A}$. (দেখানো হলো)

**প্রশ্ন ১৭ ▸ $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1-\tan^2 A}$ যদি $A = 30^\circ$ হয় ।**

**সমাধান :** বামপক্ষ $= \tan 2A$

$= \tan (2 \times 30^\circ)$ $[\because A = 30^\circ]$

$= \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ $[\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}]$

ডানপক্ষ $= \frac{2 \tan A}{1-\tan^2 A}$

$= \frac{2 \tan A}{1-(\tan A)^2}$

$= \frac{2 \tan 30^\circ}{1-(\tan 30^\circ)^2}$ $[\because A = 30^\circ]$

$= \frac{2 . \frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$ $[\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}]$

$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3-1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\therefore$ $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1-\tan^2 A}$. (দেখানো হলো)

**প্রশ্ন ১৮ ▸ $2\cos(A+B) = 1 = 2\sin(A-B)$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে দেখাও যে, $A = 45°, B = 15°$.**

সমাধান : দেওয়া আছে,

$2\cos(A+B) = 1$

বা, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$

বা, $\cos(A+B) = \cos 60°$ [$\because \cos 60° = \frac{1}{2}$]

$\therefore A + B = 60°$ ................ (1)

আবার, $2\sin(A-B) = 1$

বা, $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$

বা, $\sin(A-B) = \sin 30°$ [$\because \sin 30° = \frac{1}{2}$]

$\therefore A - B = 30°$ ................ (2)

এখন, সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে পাই,

$A + B + A - B = 60° + 30°$

বা, $2A = 90°$

$\therefore A = 45°$

আবার, সমীকরণ (1) থেকে সমীকরণ (2) বিয়োগ করে পাই,

$A + B - A + B = 60° - 30°$

$2B = 30°$

$\therefore B = 15°$

$\therefore A = 45°$ এবং $B = 15°$. (দেখানো হলো)

**প্রশ্ন ১৯ ▸ $\cos(A-B) = 1$, $2\sin(A+B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান : দেওয়া আছে, $\cos(A-B) = 1$

বা, $\cos(A-B) = \cos 0°$

$\therefore A - B = 0°$................. (1)

আবার, $2\sin(A+B) = \sqrt{3}$

বা, $\sin(A+B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin(A+B) = \sin 60°$

$\therefore A + B = 60°$.............. (2)

এখন সমীকরণ (1) ও (2) নং যোগ করে পাই,

$2A = 60°$

$\therefore A = 30°$

এখন, সমীকরণ (2) থেকে সমীকরণ (1) বিয়োগ করে পাই,

$2B = 60°$

$\therefore B = 30°$

নির্ণেয় মান : $A = 30°$ এবং $B = 30°$.

**প্রশ্ন ২০ ▸ সমাধান কর : $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$**

সমাধান : এখানে, $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$\therefore \frac{\cos A - \sin A + \cos A + \sin A}{\cos A - \sin A - \cos A - \sin A} = \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\cos A}{-2\sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{-2}$

বা, $-\frac{\cos A}{\sin A} = -\sqrt{3}$

বা, $\frac{\cos A}{\sin A} = \sqrt{3}$ [উভয়পক্ষকে (–1) দ্বারা গুণ করে]

বা, $\cot A = \sqrt{3}$ [$\because \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$]

বা, $\cot A = \cot 30°$

$\therefore A = 30°$

নির্ণেয় সমাধান : $A = 30°$.

**প্রশ্ন ২১ ▸ A ও B সূক্ষ্মকোণ এবং $\cot(A+B) = 1$, $\cot(A-B) = \sqrt{3}$ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান : এখানে,

$\cot(A+B) = 1$

বা, $\cot(A+B) = \cot 45°$ [$\because \cot 45° = 1$]

$\therefore A + B = 45°$ ................ (1)

আবার, $\cot(A-B) = \sqrt{3}$

বা, $\cot(A-B) = \cot 30°$ [$\because \cot 30° = \sqrt{3}$]

$\therefore A - B = 30°$ ............... (2)

সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে পাই, $2A = 75°$

বা, $A = \frac{75°}{2} = 37\frac{1}{2}^{\circ}$

আবার, সমীকরণ (1) নং হতে (2) নং বিয়োগ করে পাই,

$2B = 15°$

বা, $B = \frac{15°}{2} = 7\frac{1}{2}^{\circ}$

নির্ণেয় মান : $A = 37\frac{1}{2}^{\circ}$ এবং $B = 7\frac{1}{2}^{\circ}$.

**প্রশ্ন ২২ ▸ দেখাও যে, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$; যদি $A = 30°$ হয়।**

সমাধান : বামপক্ষ $= \cos 3A$

$= \cos(3 \times 30°)$ [$\because A = 30°$]

$= \cos 90° = 0$ [$\because \cos 90° = 0$]

ডানপক্ষ $= 4\cos^3 A - 3\cos A$

$= 4(\cos A)^3 - 3\cos A$

$= 4(\cos 30°)^3 - 3\cos 30°$ [$\because A = 30°$]

$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ [$\because \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$]

$= 4\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3})^2}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$

$\therefore \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$. (দেখানো হলো)

**প্রশ্ন ২৩ ▸ সমাধান কর : $\sin\theta + \cos\theta = 1$; যখন $0° \le \theta \le 90°$**

সমাধান : এখানে, $\sin\theta + \cos\theta = 1$

বা, $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = (1)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 1$

বা, $1 + 2\sin\theta\cos\theta = 1$ [$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

বা, $2\sin\theta\cos\theta = 0$

$\therefore \sin\theta \cdot \cos\theta = 0$

দুইটি রাশির গুণফল শূন্য হলে রাশি দুইটির অন্তত যেকোনো একটির মান শূন্য হতে হবে।

হয়, $\sin\theta = 0$

বা, $\sin\theta = \sin 0°$ [$\because \sin 0° = 0$]

$\therefore \theta = 0°$

আবার, $\cos\theta = 0$

বা, $\cos\theta = \cos 90°$ [$\because \cos 90° = 0$]

$\therefore \theta = 90°$

নির্ণেয় সমাধান : $\theta = 0°, 90°$.

**প্রশ্ন ২৪ ▸ সমাধান কর : $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$ যখন θ সূক্ষ্মকোণ।**

সমাধান : এখানে, $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$

বা, $\cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = 2 - 5\cos\theta$ [$\because \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$]

বা, $\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta - 2 + 5\cos\theta = 0$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $2\cos^2\theta + 5\cos\theta - 3 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 6\cos\theta - \cos\theta - 3 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 3) - 1(\cos\theta + 3) = 0$

বা, $(\cos\theta + 3)(2\cos\theta - 1) = 0$

দুইটি রাশির গুণফল শূন্য হলে তাদের অন্তত যেকোনো একটির মান শূন্য হবে।

হয়, $2\cos\theta - 1 = 0$
বা, $2\cos\theta = 1$
বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$
বা, $\cos\theta = \cos 60°$ [$\because \cos 60° = \frac{1}{2}$]
$\therefore \theta = 60°$

আবার, $\cos + 3 = 0$
বা, $\cos\theta = -3$
কিন্তু এটা গ্রহণযোগ্য নয়
$-1 \le \cos\theta \le 1$

নির্ণেয় সমাধান : $\theta = 60°$.

**প্রশ্ন ২৫ ▸ সমাধান কর : $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$; $\theta$ সূক্ষ্মকোণ।**

সমাধান : দেওয়া আছে, $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$
বা, $2(1-\cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0$ [$\because \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$]
বা, $2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$
বা, $-2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0$
বা, $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$ [উভয়পক্ষকে (–1) দ্বারা গুণ করে]
বা, $2\cos^2\theta - 2\cos\theta - \cos\theta + 1 = 0$
বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 1) - 1(\cos\theta - 1) = 0$
বা, $(\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta - 1 = 0$
বা, $\cos\theta = 1$
বা, $\cos\theta = \cos 0°$
$\therefore \theta = 0°$
[গ্রহণযোগ্য নয় কারণ $\theta$ সূক্ষ্মকোণ]

অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$
বা, $2\cos\theta = 1$
বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$
বা, $\cos\theta = \cos 60°$
$\therefore \theta = 60°$

নির্ণেয় সমাধান : $\theta = 60°$.

**প্রশ্ন ২৬ ▸ সমাধান কর : $\tan^2\theta - (1+\sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$**

সমাধান : দেওয়া আছে, $\tan^2\theta - (1+\sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$
বা, $\tan^2\theta - \tan\theta - \sqrt{3}\tan\theta + \sqrt{3} = 0$
বা, $\tan\theta(\tan\theta - 1) - \sqrt{3}(\tan\theta - 1) = 0$
বা, $(\tan\theta - 1)(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

দুইটি রাশির গুণফল শূন্য। অতএব, তাদের অন্তত একটি রাশির মান শূন্য হবে।

হয়, $\tan\theta - 1 = 0$
বা, $\tan\theta = 1$
বা, $\tan\theta = \tan 45°$ [$\because \tan 45° = 1$]
$\therefore \theta = 45°$

আবার, $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$
বা, $\tan\theta = \sqrt{3}$
বা, $\tan\theta = \tan 60°$
$\therefore \theta = 60°$ [$\because \tan 60° = \sqrt{3}$]

নির্ণেয় সমাধান : $\theta = 45°$ এবং $60°$.

**প্রশ্ন ২৭ ▸ মান নির্ণয় কর :**

**$3\cot^2 60° + \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2 30° + 5\sin^2 45° - 4\cos^2 60°$**

সমাধান : $3\cot^2 60° + \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2 30° + 5\sin^2 45° - 4\cos^2 60°$

$= 3(\cot 60°)^2 + \frac{1}{4}(\operatorname{cosec} 30°)^2 + 5(\sin 45°)^2 - 4(\cos 60°)^2$

[$\because \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}, \operatorname{cosec} 30° = 2, \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 60° = \frac{1}{2}$]

$= 3.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{4}.2^2 + 5.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= 3.\frac{1}{3} + 1 + 5.\frac{1}{2} - 4.\frac{1}{4}$

$= 1 + 1 + \frac{5}{2} - 1 = 1 + \frac{5}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$

নির্ণেয় মান : $\frac{7}{2}$.

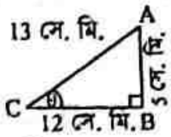
## পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

**প্রশ্ন ২৮ | $\Delta ABC$ এর $\angle B = 90°$, AB = 5 সে.মি., BC = 12 সে.মি.।**

ক. AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
খ. $\angle C = \theta$ হলে $\sin\theta + \cos\theta$ এর মান নির্ণয় কর।
গ. উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে,
$\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A = \sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A$.

**২৮নং প্রশ্নের সমাধান**

ক) দেওয়া আছে, $\Delta ABC$ এর
$\angle B = 90°$
AB = 5 সে.মি.
BC = 12 সে.মি.




অতএব, $\theta$ কোণের বিপরীত বাহু, AB = 5 সে.মি.
সন্নিহিত বাহু, BC = 12 সে.মি.
অতিভুজ, AC $= \sqrt{(12)^2 + 5^2}$ সে.মি.
$= \sqrt{144+25}$ সে.মি. $= \sqrt{169}$ সে.মি. = 13 সে.মি.
$\therefore$ AC এর পরিমাণ 13 সে.মি.।

খ) (ক) হতে পাই, $\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}$

এবং $\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13}$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta = \frac{5}{13} + \frac{12}{13} = \frac{5+12}{13} = \frac{17}{13}$

নির্ণেয় মান $\frac{17}{13}$.

গ) দেওয়া আছে, $\Delta ABC$ এর $\angle B = 90°$, AB = 5 সে.মি.
BC = 12 সে.মি., এবং AC = 13 সে.মি. ['ক' নং হতে প্রাপ্ত]

এখন, $\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{13}{5}$

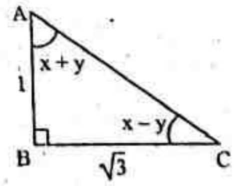
এবং $\operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC} = \frac{13}{12}$

বামপক্ষ $= \sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A$
$= \left(\frac{13}{5}\right)^2 + \left(\frac{13}{12}\right)^2$
$= \frac{169}{25} + \frac{169}{144} = \frac{24336 + 4225}{3600} = \frac{28561}{3600}$.

ডানপক্ষ $= \sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A$
$= \left(\frac{13}{5}\right)^2 \times \left(\frac{13}{12}\right)^2 = \frac{169}{25} \times \frac{169}{144} = \frac{28561}{3600}$.

$\therefore \sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A = \sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A$. (দেখানো হলো)

**প্রশ্ন ২৯ |**




প্রদত্ত চিত্রের আলোকে,

ক. AC এর পরিমাণ কত?
খ. $\tan A + \tan C$ এর মান নির্ণয় কর।
গ. x ও y এর মান নির্ণয় কর।

**২৯নং প্রশ্নের সমাধান**

ক) চিত্র হতে পাই, $\angle B$ = 1 সমকোণ
$\angle A = x + y$; $\angle C = x - y$
অতএব, C বা $(x-y)$ কোণের বিপরীত বাহু, AB = 1
সন্নিহিত বাহু, BC $= \sqrt{3}$
অতিভুজ, AC $= \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

**গ** (ক) হতে পাই, $\tan C = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

আবার, A বা $(x+y)$ কোণের বিপরীত বাহু, $BC = \sqrt{3}$

সন্নিহিত বাহু, $AB = 1$

$\therefore \quad \tan A = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত ভূমি}} = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

এখন, $\tan A + \tan C = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} = \frac{3+1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

নির্ণেয় মান, $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

**ঘ** (খ) হতে পাই,

$\tan A = \tan(x+y) = \sqrt{3}$

বা, $\tan(x+y) = \tan 60°$ বা, $x+y = 60°$

$\therefore \quad x+y = 60°$ .................... (1)

আবার, $\tan C = \tan(x-y) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan(x-y) = \tan 30°$

বা, $x-y = 30°$ .................... (2)

এখন, (1)নং ও (2)নং যোগ করে পাই,

$x+y+x-y = 60° + 30°$

বা, $2x = 90°$

বা, $x = \frac{90°}{2} = 45°$

আবার, (1) থেকে (2) বিয়োগ করে পাই,

$x+y-x+y = 60° - 30°$

বা, $2y = 30°$

বা, $y = \frac{30°}{2} = 15°$

অতএব, নির্ণেয় মান $x = 45°$ এবং $y = 15°$.

**প্রশ্ন ৩০** $\sin\theta = p$, $\cos\theta = q$, $\tan\theta = r$, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।

ক. $r = \sqrt{(3)^{-1}}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $p+q = \sqrt{2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\theta = 45°$.

গ. $7p^2 + 3q^2 = 4$ হলে দেখাও যে, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

**৩০নং প্রশ্নের সমাধান**

**ক** দেওয়া আছে, $\tan\theta = r$

এখন, $r = \sqrt{(3)^{-1}}$ হলে, $\tan\theta = \sqrt{(3)^{-1}}$

বা, $\tan\theta = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$

$\therefore \quad \theta = 30°$

নির্ণেয় মান : $\theta = 30°$.

**খ** দেওয়া আছে, $\sin\theta = p$ এবং $\cos\theta = q$

$p+q = \sqrt{2}$ হলে, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta = \sqrt{2} - \cos\theta$

বা, $\sin^2\theta = (\sqrt{2} - \cos\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\sin^2\theta = (\sqrt{2})^2 - 2.\sqrt{2}.\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $\sin^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $1 - \cos^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta = 1$ বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\theta = \cos 45°$

$\therefore \quad \theta = 45°$. (প্রমাণিত)

**গ** দেওয়া আছে, $\sin\theta = p$ এবং $\cos\theta = q$

$7p^2 + 3q^2 = 4$ হলে, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

বা, $7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) = 4$

বা, $7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 4$

বা, $4\sin^2\theta + 3 = 4$

বা, $4\sin^2\theta = 4 - 3$

বা, $4\sin^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$

বা, $\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = \sin 30°$

$\therefore \quad \theta = 30°$

বামপক্ষ $= \tan\theta = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \quad \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. (দেখানো হলো)

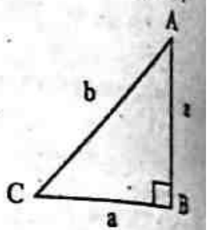
## পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনীর ত্রিকোণমিতিক প্রশ্নাবলির সমাধান

**প্রশ্ন ৩১** ▸ ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B =$ এক সমকোণ এবং $AB = BC$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{BC\cos C - AC\cos B}{BC\cos B - AC\cos A} + \cos C = 0$

সমাধান : এখানে, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B =$ এক সমকোণ এবং $AB = BC$.

ধরি, $AB = BC = a$ এবং $AC = b$

এখন, চিত্র হতে,



$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{b}$

$\cos B = \cos 90° = 0$

এবং $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$

বামপক্ষ $= \frac{BC\cos C - AC\cos B}{BC\cos B - AC\cos A} + \cos C$

$= \frac{a.\frac{a}{b} - b.0}{a.0 - b.\frac{a}{b}} + \frac{a}{b}$

$= \frac{\frac{a^2}{b}}{-a} + \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b} \times \frac{1}{-a} + \frac{a}{b} = -\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 0 =$ ডানপক্ষ

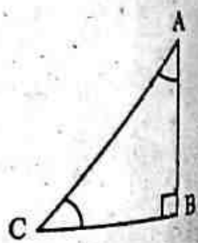
$\therefore \frac{BC\cos C - AC\cos B}{BC\cos B - AC\cos A} + \cos C = 0$. (প্রমাণিত)

**প্রশ্ন ৩২** ▸ ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B =$ এক সমকোণ এবং $\cot A + \cot B = 2\cot C$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 + BC^2 = 2AB^2$ হবে।

সমাধান : এখানে, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B =$ এক সমকোণ $= 90°$

$\therefore \quad \cot A = \frac{AB}{BC}$ এবং $\cot C = \frac{BC}{AB}$

এখন, $\cot A + \cot B = 2\cot C$



বা, $\frac{AB}{BC} + \cot 90° = 2.\frac{BC}{AB}$

বা, $\frac{AB}{BC} + 0 = \frac{2BC}{AB}$

বা, $\frac{AB}{BC} = \frac{2BC}{AB}$ বা, $AB^2 = 2BC^2$

বা, $AB^2 = BC^2 + BC^2$

বা, $AB^2 = BC^2 + AC^2 - AB^2$

[∵ ABC সমকোণী ত্রিভুজে, $AC^2 = AB^2 + BC^2$]

বা, $AB^2 + AB^2 = AC^2 + BC^2$

বা, $2AB^2 = AC^2 + BC^2$

$\therefore \quad AC^2 + BC^2 = 2AB^2$. (প্রমাণিত)