

**Fakultät für Physik und Astronomie  
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg**

Bachelorarbeit in Physik  
eingereicht von

**Patrick Fahner**

geboren in Mannheim (Deutschland)

**August 2013**

## About ...

This Bachelor Thesis has been carried out by XYZ at the  
ABC Institute in Heidelberg  
under the supervision of  
Prof. Max Mustermann



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Das LHCb-Experiment</b>	<b>9</b>
2.1	Aufgaben und Ziele des Experimentes . . . . .	9
2.2	Der LHCb-Detektor . . . . .	9
2.2.1	VeLo . . . . .	9
2.2.2	Spurrekonstruktion . . . . .	9
2.2.3	RICH-Detektoren . . . . .	9
2.2.4	Kalorimeter . . . . .	9
2.2.5	Myonkammern . . . . .	9
<b>3</b>	<b>CP-Verletzung in B-Meson-Systemen</b>	<b>11</b>
3.1	B-Mesonen und der Zerfallskanal $B_d^0 \rightarrow J/\Psi K_s^0$ . . . . .	11
3.1.1	Das Standardmodell der Teilchenphysik . . . . .	11
3.1.2	B-Mesonen und ihre Mischung . . . . .	12
3.1.3	Der Zerfallskanal $B_d^0 \rightarrow J/\Psi K_s^0$ . . . . .	12
3.2	Diskrete Symmetrietransformationen . . . . .	13
3.2.1	Scheinbare $\mathcal{CP}$ -Invarianz . . . . .	14
3.3	$\mathcal{CP}$ -Verletzung in der Mischung . . . . .	14
3.4	Direkte $\mathcal{CP}$ -Verletzung . . . . .	16
3.5	$\mathcal{CP}$ -Verletzung in der Interferenz . . . . .	16
3.6	CKM-Formalismus . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Datenselektion</b>	<b>19</b>
4.1	Bereitgestellter Datensatz . . . . .	19
4.2	Schnitte . . . . .	19
4.2.1	Trigger . . . . .	19
4.2.2	Downstream Spuren . . . . .	20
4.2.3	Stripping . . . . .	20
4.2.4	Zusätzliche Schnitte . . . . .	21
4.2.5	Geister-Wahrscheinlichkeit . . . . .	21
4.2.6	Bester Kandidat . . . . .	21
4.2.7	Fitbereiche . . . . .	22
4.3	Verwendeter Datensatz . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Analyse / Fit</b>	<b>23</b>
5.1	Maximum Likelihood Funktion . . . . .	23

5.2	Fitmethode sFit . . . . .	23
5.3	Bestimmung der sWeights - Massenfit . . . . .	24
5.4	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zerfallszeitverteilung . . . . .	25
5.4.1	Produktionsasymmetrie . . . . .	25
5.4.2	Bestimmung des Anfangszustandes der $B_d^0$ -Mesonen(Tagging) . . .	27
5.4.3	Zeitauflösung . . . . .	29
5.4.4	Endgültige p.d.f. . . . .	29
5.5	Fitergebnis . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Abschätzung systematischer Unsicherheiten</b>	<b>31</b>
6.1	Fitmethode . . . . .	31
6.2	Kalibration des Taggings . . . . .	32
6.3	Einfluss der zeitabhängigen Akzeptanz . . . . .	36
6.3.1	Bestimmung der Akzeptanzfunktion . . . . .	36
6.3.2	Bestimmung des Einflusses . . . . .	37
6.4	Korrelation zwischen Masse und Zerfallszeit . . . . .	37
6.5	Zeitauflösung . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>39</b>

# **1 Einleitung**





## **2 Das LHCb-Experiment**

### **2.1 Aufgaben und Ziele des Experimentes**

### **2.2 Der LHCb-Detektor**

#### **2.2.1 VeLo**

#### **2.2.2 Spurrekonstruktion**

#### **2.2.3 RICH-Detektoren**

#### **2.2.4 Kalorimeter**

#### **2.2.5 Myonkammern**



## 3 CP-Verletzung in B-Meson-Systemen

### 3.1 B-Mesonen und der Zerfallskanal $B_d^0 \rightarrow J/\Psi K_s^0$

#### 3.1.1 Das Standardmodell der Teilchenphysik

Im Standardmodell der Teilchenphysik gibt es 17 elementare Bausteine der Materie (siehe Abb. 3.1): 12 Fermionen, davon 6 Quarks (u, d, c, s, t, b), die sich im engeren Sinne zur Materie hadronisieren oder Mesonen bilden, und 6 Leptonen (e,  $\mu$ ,  $\tau$  sowie die jeweiligen Neutrinos  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$ ). Von diesen 12 Fermionen existieren jeweils noch Antiteilchen (gleiche Eigenschaften, aber entgegengesetzte Masse). Das Standardmodell enthält weiterhin 4 Eichbosonen (Photon, Gluon, Z- und  $W^\pm$ -Boson), die die 3 der 4 elementaren Kräfte übertragen: die elektromagnetische, starke und schwache Wechselwirkung. Das für die Gravitation postulierte Graviton konnte bislang nicht nachgewiesen werden. Ergänzt wird das Standardmodell, durch das Higgs-Boson, welches als Teil des Higgs-Mechanismus den Elementarteilchen seine Masse verleiht und Gegenstand aktueller Forschung ist. Mit hoher Wahrscheinlichkeit gelang jüngst der Nachweis des Higgs am CERN [3].

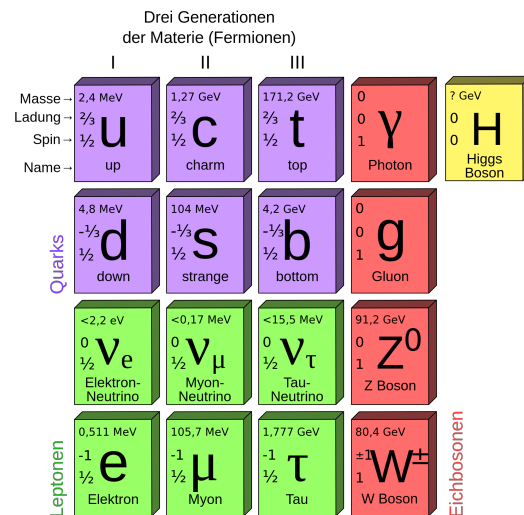


Abbildung 3.1: Das Standardmodell der Teilchenphysik [2]

### 3.1.2 B-Mesonen und ihre Mischung

Mesonen sind Paare aus Quarks und Antiquarks beliebigen Flavours. B-Mesonen insbesondere bestehen aus einem Anti-b-Quark ( $\bar{b}$ ) mit einem u-, d-, c- oder s-Quark beziehungsweise aus der Kombination der jeweiligen Antiteilchen (Anti-B-Mesonen).

Die in dieser Arbeit betrachteten  $B_d^0$ -Mesonen haben demnach die Quarkzusammensetzung  $|B_d^0\rangle = |\bar{b}d\rangle$  und sind elektrisch neutral. Solch neutrale Mesonen besitzen die Eigenschaft, dass sie sich in ihre Antiteilchen wandeln können und umgekehrt. Es findet folglich eine Oszillation zwischen  $B_d^0$  und  $\bar{B}_d^0$  statt, die man auch Mischung nennt. Abbildung 3.2 zeigt zwei mögliche Feynmangraphen für diesen Prozess. Innerhalb der Schleifen kann die Energieerhaltung kurzzeitig verletzt werden, sodass auch kurzerhand die deutlich schweren top-Quarks entstehen können. Zu diesem Mischungsprozess leisten sie sogar einen dominanten Beitrag. Präzise Messungen der  $B_d^0$ -Mischung erlauben Aussagen bspw. über die top-Masse und grenzen damit das Standardmodell ein, gleichzeitig erhofft man sich, durch noch präzisere Messungen Hinweise auf „neue Physik“ zu finden, die sich dann in kleinsten Korrekturen innerhalb der Schleife bemerkbar machen würden.

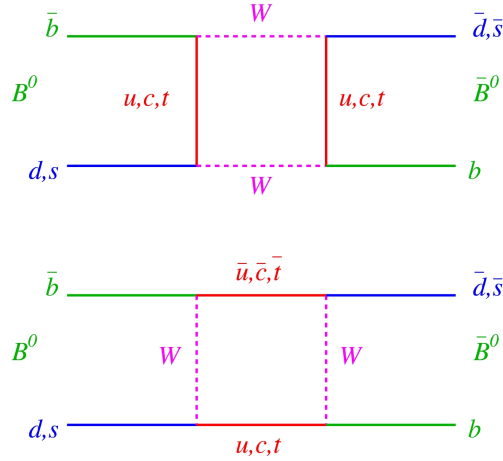


Abbildung 3.2: Feynmangraphen zur Mischung von  $B_d^0$ - und  $\bar{B}_d^0$ -Mesonen

### 3.1.3 Der Zerfallskanal $B_d^0 \rightarrow J/\Psi K_s^0$

In dieser Arbeit wird der Zerfallskanal  $B_d^0 \rightarrow J/\Psi K_s^0$  betrachtet. Abbildung 3.3 zeigt entsprechende Feynmangraphen. Jener Kanal ist auch als „goldener“ Zerfallskanal für die Messung der  $\mathcal{CP}$ -Verletzung bekannt. Hintergrund ist, dass der Endzustand  $|J/\Psi K_s^0\rangle$  ein  $\mathcal{CP}$ -Eigenzustand ist ( $\mathcal{CP} |J/\Psi K_s^0\rangle = -|J/\Psi K_s^0\rangle$ ). Die Teilchen  $J/\Psi$  und  $K_s^0$  haben die Flavoureigenzustände  $|J/\Psi\rangle = |c\bar{c}\rangle$  sowie  $|K_s^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|d\bar{s}\rangle - |s\bar{d}\rangle)$ . Diese Teilchen sind ebenfalls nicht stabil und zerfallen unter anderem weiter gemäß  $J/\Psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$  und

$K_s^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ , was zur Rekonstruktion der  $B_d^0$ -Mesonen im Detektor genutzt wird.

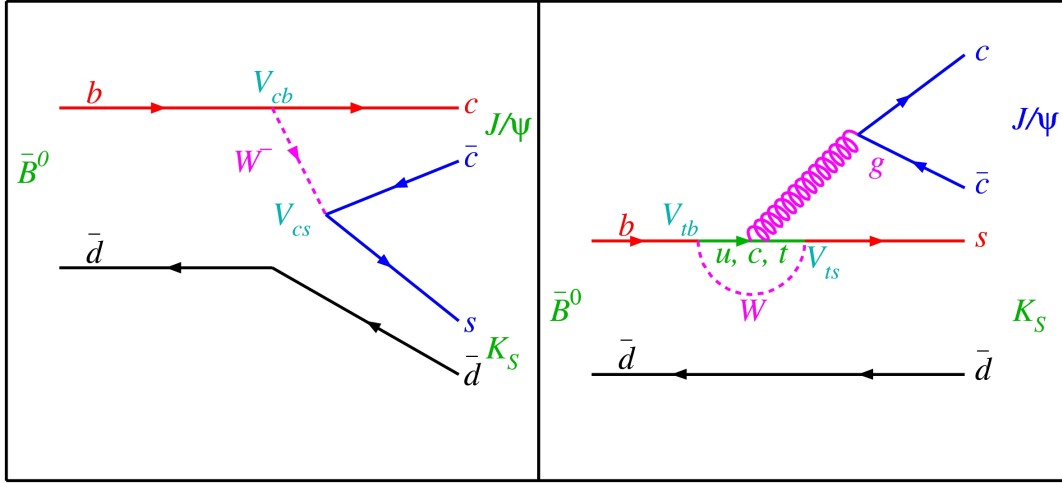


Abbildung 3.3: Feynmangraph zum Zerfall  $B_d^0 \rightarrow J/\psi K_s^0$ . Links: Baumdiagramm, rechts: Pinguindiagramm

### 3.2 Diskrete Symmetrietransformationen

Symmetrien sind in der Physik von zentraler Bedeutung. Gemäß dem Noether-Theorem existiert in der klassischen Physik zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eine Erhaltungsgröße. In quantenmechanischen Systemen können wir drei diskrete Symmetrietransformationen betrachten:

1. **Parität  $\mathcal{P}$ :**

Bei der Paritätsoperation wird das Vorzeichen der kartesischen Ortskoordinaten umgekehrt. Dies entspricht einer Punktspiegelung.

2. **Ladungskonjugation  $\mathcal{C}$ :**

Jedes Teilchen wird durch sein Antiteilchen ersetzt.

3. **Zeitumkehr  $\mathcal{T}$ :**

Das Vorzeichen auf der Zeitachse wird umgekehrt. Da in der vorliegenden Arbeit allerdings nur die CP-Verletzung gemessen werden soll, wird die Zeitumkehr im folgenden vernachlässigt.

Entgegen der klassischen Intuition konnte Wu 1956 nachweisen, dass die Parität im  $\beta$ -Zerfall und damit in der schwachen Wechselwirkung nicht erhalten ist. Weitere Experimente zeigen, dass die schwache Wechselwirkung die Parität maximal verletzt: Neutrinos, die nur schwach wechselwirken können, sind stets „linkshändig“ (Spin und Impuls antiparallel), Antineutrinos dagegen immer „rechtshändig“ (Spin und Impuls parallel).

### 3 CP-Verletzung in B-Meson-Systemen

Da der Spin im Gegensatz zum Impuls invariant unter  $\mathcal{P}$ -Transformation ist, würde diese Operation aus einem linkshändigen Neutrino ein rechtshändiges machen, was in der Natur nicht realisiert ist.

Damit ist offensichtlich, dass die schwache Wechselwirkung auch die Ladungskonjugation verletzt: Wendet man die  $\mathcal{C}$ -Transformation auf ein linkshändiges Neutrino an, so erhält man ein linkshändiges Antineutrino. Dieses existiert aber wie bereits erwähnt nicht. Analog gilt die Überlegung auch für Antineutrinos.

#### 3.2.1 Scheinbare $\mathcal{CP}$ -Invarianz

Wendet man nun aber die Transformationen  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{C}$  direkt hintereinander an, so ergibt sich zunächst kein Widerspruch zur Natur (siehe Abb. 3.4). Aus einem linkshändigen Neutrino wird ein rechtshändiges Antineutrino. Im Jahre 1964 wurde dann allerdings im Zerfall neutraler K-Mesonen erstmals  $\mathcal{CP}$ -Verletzung nachgewiesen. [4]

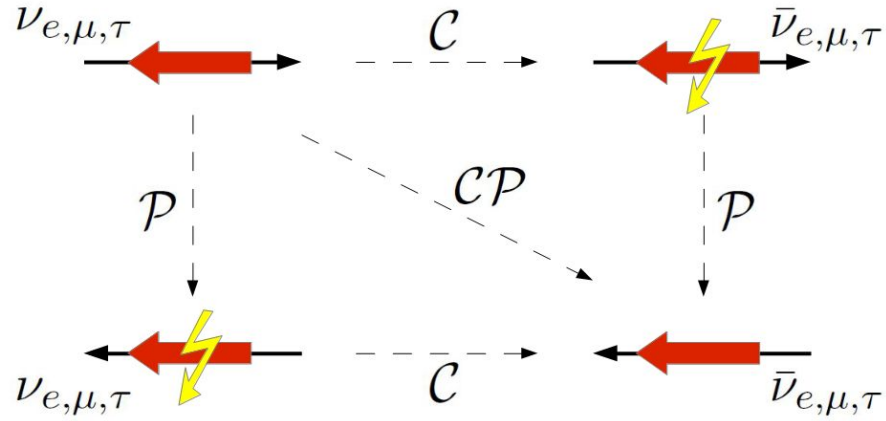


Abbildung 3.4: Scheinbare  $\mathcal{CP}$ -Invarianz: Während eine reine  $\mathcal{P}$ - oder  $\mathcal{C}$ -Transformation zu in der Natur nicht realisierten Zuständen führt, scheint es bei der kombinierten  $\mathcal{CP}$ -Transformation keinen Widerspruch zu geben (dünne Pfeile: Impulsausrichtung, dicke Pfeile: Spinausrichtung).

### 3.3 $\mathcal{CP}$ -Verletzung in der Mischung

Die Flavoureigenzustände  $|B^0\rangle = |\bar{b}d\rangle$  und  $|\overline{B^0}\rangle = |b\bar{d}\rangle$  entsprechen nicht den Masseneigenzuständen. Wir definieren daher die normierten Zustände

$$|B_h\rangle = p|B^0\rangle - q|\overline{B^0}\rangle \quad (3.1)$$

$$|B_l\rangle = p|B^0\rangle + q|\overline{B^0}\rangle \quad (3.2)$$

$$\text{mit } |p|^2 + |q|^2 = 1 \quad (3.3)$$

### 3.3 $\mathcal{CP}$ -Verletzung in der Mischung

welche eine definierte Masse und Zerfallsbreite besitzen. Sie sind auch Eigenzustände eines nicht-hermiteschen Hamiltonoperators (Nichthermitizität wegen des möglichen Zerfalls der Teilchens). Dieser setzt sich zusammen aus den hermiteschen Massenoperatoren  $M$  und  $\Gamma$ . Notieren wir die lineare Superposition der Zustände 3.1 und 3.2 als  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ , so nimmt die zeitabhängige Schrödingergleichung die Form

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \left( M - \frac{i}{2} \Gamma \right) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

an und führt zur folgenden zeitlichen Entwicklung der Zustände:

$$\begin{aligned} |B_{h/l}(t)\rangle &= e^{-im_{h/l}t - \frac{i}{2}\Gamma_{h/l}t} |B_{h/l}(0)\rangle \\ &= e^{-\gamma_{h/l}t} (p |B^0\rangle \mp q |\overline{B^0}\rangle) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\text{mit } \gamma_{h/l} = im_{h/l} + \frac{\Gamma_{h/l}}{2} \quad (3.6)$$

Hierbei ist  $\gamma_{h/l}$  so definiert, dass  $-i\gamma_{h/l} = m_{h/l} - \frac{i}{2}\Gamma_{h/l}$  die Eigenwerte des Hamiltonoperators  $\mathcal{H} := (M - \frac{i}{2}\Gamma)$  sind. Umgeschrieben auf die Flavoureigenzustände erhält man:

$$\begin{aligned} |B^0(t)\rangle &= \frac{1}{2p} (|B_h\rangle + |B_l\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \left[ (e^{-\gamma_h t} + e^{-\gamma_l t}) |B^0\rangle - \frac{q}{p} (e^{-\gamma_h t} - e^{-\gamma_l t}) |\overline{B^0}\rangle \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang eines  $|B^0\rangle$  (zum Zeitpunkt  $t = 0$ ) in ein  $|\overline{B^0}\rangle$  beträgt:

$$\begin{aligned} P(B^0 \rightarrow \overline{B^0})(t) &= |\langle \overline{B^0} | B^0(t) \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| \frac{q}{p} \right|^2 \left[ e^{-\Gamma_h t} + e^{-\Gamma_l t} - 2e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_h + \Gamma_l)t} \cos(\Delta m_d t) \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\text{mit } \Delta m_d = m_h - m_l \quad (3.9)$$

Analog gilt für die Übergangswahrscheinlichkeit eines  $|\overline{B^0}\rangle$  in ein  $|B^0\rangle$ :

$$P(\overline{B^0} \rightarrow B^0)(t) = \frac{1}{4} \left| \frac{p}{q} \right|^2 \left[ e^{-\Gamma_h t} + e^{-\Gamma_l t} - 2e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_h + \Gamma_l)t} \cos(\Delta m_d t) \right] \quad (3.10)$$

Es kommt daher in der Mischung zur  $\mathcal{CP}$ -Verletzung, wenn die Oszillation ungleichmäßig verläuft, anders ausgedrückt:

$$\mathcal{CP}\text{-Verletzung in der Mischung} \quad \Longleftrightarrow \quad \left| \frac{p}{q} \right| \neq 1 \quad (3.11)$$

### 3.4 Direkte $\mathcal{CP}$ -Verletzung

Die Zerfallsamplituden der neutralen  $B^0$ -Mesonen in einen Endzustand  $|f\rangle$  bzw. seinen  $\mathcal{CP}$ -konjugierten Zustand  $|\bar{f}\rangle$  sind definiert als

$$\begin{aligned} A_f &= \langle f | \mathcal{H} | B^0 \rangle, & A_{\bar{f}} &= \langle \bar{f} | \mathcal{H} | B^0 \rangle, \\ \overline{A_f} &= \langle f | \mathcal{H} | \overline{B^0} \rangle, & \overline{A_{\bar{f}}} &= \langle \bar{f} | \mathcal{H} | \overline{B^0} \rangle. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{H}$  einen Hamiltonoperator der schwachen Wechselwirkung. Ist  $\mathcal{CP}$  erhalten, dann sollten die Zerfallsraten, ergo auch die Zerfallsamplituden eines  $B^0$  nach  $f$  sowie eines  $\overline{B^0}$  nach  $\bar{f}$  gleich sein. Dies bedeutet:

$$\text{Direkte } \mathcal{CP}\text{-Verletzung} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|A_f|}{|\overline{A_f}|} \neq 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{|\overline{A_{\bar{f}}}|}{|A_{\bar{f}}|} \neq 1 \quad (3.13)$$

### 3.5 $\mathcal{CP}$ -Verletzung in der Interferenz

Die Zustände 3.1 und 3.2 haben eine nahezu gleiche Anzahl an Zerfällskanäle. Dies hat zur Folge, dass die Lebensdauern des schweren und leichten Zustands innerhalb weniger Prozent gleich sind:

$$\Gamma := \Gamma_h = \Gamma_l \quad (3.14)$$

Weiterhin sagt das Standard Modell nur eine kleine  $\mathcal{CP}$ -Verletzung in der  $B_d^0$ -  $\overline{B_d^0}$ -Mischung voraus, sodass

$$\left| \frac{p}{q} \right| = 1 \quad \text{in } \mathcal{O}(10^{-3}). \quad (3.15)$$

Für das  $B$ -Meson-System bleibt daher nur die Möglichkeit der  $\mathcal{CP}$ -Verletzung in der Interferenz von Mischung und direktem Zerfall. Der in dieser Arbeit betrachtete Zerfallskanal  $B_d^0 \rightarrow J/\Psi K_s^0$  hat einen  $\mathcal{CP}$ -Eigenzustand als Endzustand ( $\mathcal{CP}|J/\Psi K_s^0\rangle = -|J/\Psi K_s^0\rangle$ ). In Anlehnung an 3.12 sind die Zerfallsamplituden hier definiert als

$$A_f := \langle f | B^0(t) \rangle, \quad \overline{A_f} := \langle f | \mathcal{H} | \overline{B^0} \rangle$$

Mit Blick auf die Zerfallsamplituden der Masseneigenzustände wird die komplexe Größe

$$\lambda_f := \frac{q\overline{A_f}}{pA_f} \quad (3.16)$$

definiert. Ausgehend von Gleichung 3.7 sowie mit Hilfe der Gleichungen (3.14), (3.15) und (3.16) gilt für die Zerfallsrate eines anfänglich reinen  $B_d^0$ -Zustands:

$$\begin{aligned} \Gamma(B^0 \rightarrow J/\Psi K_s^0) &= \frac{1}{4} \left| (e^{-\gamma_h t} + e^{-\gamma_l t}) A_f - \frac{q}{p} (e^{-\gamma_h t} - e^{-\gamma_l t}) \overline{A_f} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} |A_f|^2 e^{-\Gamma t} [1 + |\lambda_f|^2 + (1 - |\lambda_f|^2) \cos(\Delta m_d t) - 2\text{Im}(\lambda_f) \sin(\Delta m_d t)] \end{aligned} \quad (3.17)$$



Analog:

$$\Gamma(\overline{B}^0 \rightarrow J/\Psi K_s^0) = \frac{1}{2} |A_f|^2 e^{-\Gamma t} [1 + |\lambda_f|^2 - (1 - |\lambda_f|^2) \cos(\Delta m_d t) + 2\text{Im}(\lambda_f) \sin(\Delta m_d t)] \quad (3.18)$$

Damit kann die vom Standard Modell prognostizierte  $\mathcal{CP}$ -verletzende Asymmetrie

$$\mathcal{A}_{\mathcal{CP}} = \frac{\Gamma(\overline{B}^0 \rightarrow J/\Psi K_s^0) - \Gamma(B^0 \rightarrow J/\Psi K_s^0)}{\Gamma(\overline{B}^0 \rightarrow J/\Psi K_s^0) + \Gamma(B^0 \rightarrow J/\Psi K_s^0)} \quad (3.19)$$

$$= -\frac{1 - |\lambda_f|^2}{1 + |\lambda_f|^2} \cos(\Delta m_d t) + \frac{2\text{Im}(\lambda_f)}{1 + |\lambda_f|^2} \sin(\Delta m_d t) \quad (3.20)$$

$$=: C_{J/\Psi K_s^0} \cos(\Delta m_d t) + S_{J/\Psi K_s^0} \sin(\Delta m_d t) \quad (3.21)$$

berechnet werden und vereinfacht sich - da  $|J/\Psi K_s^0\rangle$  ein  $\mathcal{CP}$ -Eigenzustand ist, gilt  $|\lambda_f| = 1$  - hier zu

$$\mathcal{A}_{\mathcal{CP}} = \text{Im}(\lambda_f) \sin(\Delta m_d t). \quad (3.22)$$

Damit kann im B-Meson-System, insbesondere im Zerfall  $B_d^0 \rightarrow J/\Psi K_s^0$  durch Messung der Asymmetrie-Amplitude  $S_{J/\Psi K_s^0}$   $\mathcal{CP}$ -Verletzung in der Interferenz gemessen werden.

$$\mathcal{CP}\text{-Verletzung in der Interferenz} \quad \Longleftrightarrow \quad S_{J/\Psi K_s^0} = \text{Im}(\lambda) \neq 0 \quad (3.23)$$

### 3.6 CKM-Formalismus

Durch Austausch eines  $W^\pm$ -Bosons können Quarks ihren Flavour ändern. Dabei sind sie aber nicht an ihre jeweilige Generation gebunden, sondern können - wenn auch zum Teil stark unterdrückt - prinzipiell den Flavour einer jeden Generation annehmen. Ein kleines Beispiel: Der Eigenzustand  $|u\rangle$  der starken Wechselwirkung geht über den schwachen Prozess (Austausch eines  $W^\pm$ -Bosons) nicht in ein  $|d\rangle$  über, sondern vielmehr in eine Linearkombination aus  $|d\rangle$ ,  $|s\rangle$  und  $|b\rangle$ , die im folgenden mit  $|d'\rangle$  bezeichnet wird. Allgemein werden die möglichen Linearkombinationen durch die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (kurz: CKM-Matrix) beschrieben.

$$\begin{pmatrix} |d'\rangle \\ |s'\rangle \\ |b'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \\ |b\rangle \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Das Betragsquadrat eines jeden Matricelementes  $|V_{ij}|^2$  gibt dabei die Wahrscheinlichkeit für den Übergang eines Quarks  $|i\rangle$  in ein  $|j\rangle$  an. Da die  $V_{ij}$  prinzipiell komplex sein können, gibt es zunächst 18 freie Parameter, die zu bestimmen sind. Diese Zahl reduziert sich zum einen um 5 relative Quarkphasen, die physikalisch nicht beobachtbar sind.

### 3 CP-Verletzung in B-Meson-Systemen

Zum anderen reduziert die Forderung nach Unitarität der CKM-Matrix die Zahl der unabhängigen Parameter um 9, sodass am Ende 4 Parameter, 3 Euler Winkel sowie eine Phase, welche für die  $\mathcal{CP}$ -Verletzung verantwortlich ist, zu bestimmen sind. Die CKM-Matrix lässt sich näherungsweise durch die Wolfenstein-Parametrisierung darstellen:

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (3.25)$$

Für den Zerfall von  $B_d^0$ -Mesonen ist die Unitaritätsbedingung

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0 \quad (3.26)$$

von besonderer Bedeutung. Man kann die einzelnen Summanden nun in der  $(\rho, \eta)$ -Ebene auftragen und erhält dabei ein sogenanntes Unitaritätsdreieck. Es wird so normiert, dass die Unterseite bei  $(0,0)$  beginnt und bei  $(1,0)$  endet (siehe Abb. 3.5). Die obere Ecke liegt dann bei  $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$ , wobei  $\bar{\rho} = \rho(1 - \lambda^2/2)$  und  $\bar{\eta} = \eta(1 - \lambda^2/2)$  gemäß der Wolfenstein-Parametrisierung sind. Die Winkel des Dreiecks erhält man über

$$\alpha = \arg \left[ -\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*} \right], \quad \beta = \arg \left[ -\frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{td}V_{tb}^*} \right], \quad \gamma = \arg \left[ -\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \right]. \quad (3.27)$$

Abbildung 3.5: Unitaritätsdreieck

Das Standardmodell stellt für den hier untersuchten Zerfallskanal eine Beziehung zwischen dem Winkel  $\beta$  und der komplexen Größe  $\lambda_f$  aus Gleichung 3.16 her ([7], [8]):

$$\lambda_f = \underbrace{\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{td}^*V_{tb}}}_{\frac{q}{p}} \underbrace{\frac{V_{cd}^*V_{cb}}{V_{cd}V_{cb}^*}}_{\frac{\bar{A}_f}{A_f}} = e^{2i\beta} \quad (3.28)$$

$$\implies S_{J/\Psi K_s^0} = \text{Im}(\lambda_f) = \sin(2\beta). \quad (3.29)$$

Durch Messung der Amplitude der  $\mathcal{CP}$ -Asymmetrie kann man direkte Rückschlüsse auf den CKM-Winkel  $\beta$  ziehen.

## 4 Datenselektion

### 4.1 Bereitgestellter Datensatz

### 4.2 Schnitte

Um Signal besser vom Untergrund zu trennen, werden in mehreren Schritten diverse Schnitte angewandt.

#### 4.2.1 Trigger

Den erste Schritt bildet das Trigger-System, das schon während der Datennahme die Ereignisse sondiert. Der LHCb-Detektor verwendet dabei ein dreistufiges System: Der hardwarebasierte „L0 Trigger“ reduziert die Ereignisrate von 40MHz auf 1MHz. Im Anschluss folgt der zweiteilige, softwarebasierte „High Level Trigger“ (HLT), der die Ereignisrate schlussendlich auf 2kHz reduziert.[9]

Die in dieser Analyse verwendeten Trigger-Entscheidungen entsprechen denen der 2011 Analyse [1] und wurden wie folgt gewählt:

#### L0 Trigger

Hier wird keine spezielle Entscheidung benötigt.

#### High Level Trigger 1 (HLT1)

Hier wird die `HltDiMuonHighMassDecision` gewählt. Diese greift - wie der Name schon suggeriert - lediglich auf die Spuren der Myonen zurück, sodass nur das vom  $B_d^0$  ausgesandte  $J/\Psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$  für den Trigger verantwortlich ist. Es werden hierbei Schnitte auf die Qualität des  $J\Psi$ -Vertex, die Myonen-Spuren, sowie die Masse und den (Transversal)Impuls des  $J\Psi$  angewandt. Die `HltDiMuonHighMassDecision` erzeugt kein Bias auf die Lebensdauer des  $B_d^0$ -Mesons.

#### High Level Trigger 2 (HLT2)

In dieser Analyse werden zwei unterschiedliche Entscheidungen verwendet. Zur Bestimmung der Detektorauflösung wird die `Hlt2DiMuonJPsiDecision` verwendet, die ähnliche Variablen wie beim HLT1 verwendet und somit auch kein Bias erzeugt. Für die reguläre Analyse wird jedoch die `Hlt2DiMuonDetachedJPsiDecision` verwendet, die zusätzlich die Signifikanz der Zerfallszeit eines  $J/\Psi$  berücksichtigt. Dadurch kommt es jedoch zu

einem Bias der Lebensdauer. Der Vorteil dieser Triggerwahl liegt jedoch darin, dass mehr Statistik zur Verfügung steht.

#### 4.2.2 Downstream Spuren

Für die Rekonstruktion der  $J/\Psi$  werden ausschließlich sog. „Long“-Spuren verwendet. Diese passieren das gesamte Rekonstruktionssystem. Durch die relativ lange Lebensdauer des  $K_s^0$  kommt es in etwa 2/3 der Fälle vor, dass der VeLo dieses nicht mehr registriert. Hinterlassen Teilchen nur in den TT und T Stationen Spuren, so spricht man von „Downstream“-Spuren. Diese Analyse beschränkt sich auf ebenjene. Damit hat man im Vergleich zu  $K_s^0$  aus Long-Spuren mehr Statistik zur Verfügung, muss aber bei Qualität der Rekonstruktion Einbußen hinnehmen, da die Informationen des VeLo fehlen. Insbesondere leidet die Präzision der Impuls- und Positionsmessungen. Folglich dürfen die Schnitte bei Downstream-Spuren teilweise nicht so hart sein wie bei Long-Spuren. [?]

#### 4.2.3 Stripping

!!! Achtung !!! Anpassen !!! Welches Stripping wurde verwendet???

Die Schnitte, die hierbei angewandt wurden, sind in Tabelle 4.1 aufgeführt.

Tabelle 4.1: Im Stripping verwendete Schnitte zur Selektion von  $B_d^0$ ,  $J/\Psi$  und  $K_s^0$

Zerfall	Variable	Wert
$B_d^0 \rightarrow J/\Psi K_s^0$	$M(B_d^0)$	$\in [5150, 5550]\text{MeV}/c^2$
	$\frac{\chi_{vtx}^2}{\text{nDof}}(B_d^0)$	$< 10$
$J/\Psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$	$\frac{\chi_{track}^2}{\text{nDof}}(\mu^\pm)$	$< 3$
	$\Delta \ln \mathcal{L}_{\mu\pi}$	$> 0$
	$p_T(\mu^\pm)$	$> 500\text{MeV}/c$
	$\frac{\chi_{vtx}^2}{\text{nDof}}(J/\Psi)$	$< 16$
	$ M(\mu^+ \mu^-) - M(J/\Psi) $	$< 80\text{MeV}/c^2$
$K_s^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$p(\pi^\pm)$	$> 2000\text{MeV}/c$
	$\frac{\chi_{vtx}^2}{\text{nDof}}(K_s^0)$	$< 20$
	$\frac{\chi_{track}^2}{\text{nDof}}(\pi^\pm)$	$< 3$
	$ M(\pi^+ \pi^-) - M(K_s^0) $	$< 64\text{MeV}/c^2$
	$\frac{\chi_{IP}^2}{\text{nDof}}(\pi^\pm)$	$> 4$

Hierbei bezeichnen  $M$  die rekonstruierte Masse,  $p$  den Impuls sowie  $p_T$  den Transversalimpuls eines Teilchens. Zur Rekonstruktion werden Spuren an die Detektortreffer gefittet. Um eine Aussage über die Güte des Fits zu erhalten, betrachtet man hier das entsprechende auf die Zahl der Freiheitsgrade (nDoF) normierte  $\chi_{track}^2$ . Analog gilt dies für die Rekonstruktion der Vertices ( $\chi_{track}^2$ ). Je näher das reduzierte  $\chi^2$  der 1 kommt,

desto besser ist der Fit. !!! Impact Parameter !!!  $\Delta \ln \mathcal{L}_{\mu\pi}$  ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, ein Myon als Pion zu interpretieren.

#### 4.2.4 Zusätzliche Schnitte

Um den Datensatz noch besser vom Untergrund zu bereinigen, werden einige Schnitte aus den Stripping verschärft und weitere eingeführt (siehe Tab. 4.2). Diese wurden aus [1] übernommen.

Tabelle 4.2: Zusätzlich eingeführte Schnitte zur Untergrundbereinigung bzw. Selektion von  $B_d^0$ ,  $J/\Psi$  und  $K_s^0$

Zerfall	Variable	Wert
$B_d^0 \rightarrow J/\Psi K_s^0$	$M(B_d^0)$	$\in [5170, 5420] \text{ MeV}/c^2$
	$\tau(B_d^0)$	$> 0, 3 \text{ ps}$
	$\sigma_\tau(B_d^0)$	$< 0, 2 \text{ ps}$
	$\frac{\chi_{DTF(B+PV)}^2}{\text{nDof}}(B_d^0)$	$< 5$
	$\frac{\chi_{IP}^2}{\text{nDof}}(B_d^0)$	$< 20$
	$\frac{\chi_{IP}^2}{\text{nDof}}(B_d^0)$ des nächstbesten PV	$> 50$
$J/\Psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$	$\frac{\chi_{vtx}}{\text{nDof}}(J/\Psi)$	$< 11$
	$ M(\mu^+ \mu^-) - M(J/\Psi) $	$\in [3030, 3165] \text{ MeV}/c^2$
$K_s^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\frac{\tau}{\sigma_\tau}(K_s^0)$	$> 5$
	$\frac{x}{\sigma_x}(K_s^0)$	$> 5$
	$\sigma_{\vec{s}}^2$	
	$\frac{\chi_{track}}{\text{nDof}}(\pi^\pm)$	$< 3$
	$ M(\pi^+ \pi^-) - M(K_s^0) $	$\in [475, 520] \text{ MeV}/c^2$

Die neu eingeführten Größen sind hier die Zerfallszeit  $\tau$  und die Flugstrecke  $x$  sowie deren Unsicherheit  $\sigma_\tau$  und  $\sigma_x$ . Weiterhin gibt es noch einen kinematischen Fit des Zerfallsbaums („DecayTreeFit“- DTF). Um die Wirkung der einzelnen Schnitte zu untersuchen, werden alle Schnitte bis auf den zu untersuchenden angewandt und in der Massenverteilung das Signal-zu-Untergrund-Verhältnis bestimmt. Dieses wird dann mit den entsprechenden Werten bei Anwendung aller Schnitte verglichen.

!!! Muss fortgesetzt werden !!!

#### 4.2.5 Geister-Wahrscheinlichkeit

!!! Hier auch !!!

#### 4.2.6 Bester Kandidat

Es ist äußerst unwahrscheinlich, dass es mehrere  $B_d^0 \rightarrow J/\Psi K_s^0$ -Zerfälle in einem Ereignis gibt. Jedoch kann es vorkommen, dass es mehr als ein rekonstruiertes  $B_d^0$  im Ereignis gibt.

## 4 Datenselektion

Da aber nur ein  $B_d^0$  am Zerfall beteiligt ist, wird der beste Kandidat anhand des kleinsten  $\chi^2_{DTF}/\text{nDoF}$  des DecayTreeFit identifiziert. [1]

### 4.2.7 Fitbereiche

In den Analysen werden beim Fit die Massenbereiche zusätzlich eingeschränkt. Bei der Bestimmung der Detektorauflösung werden  $J/\Psi$  im Bereich  $[3035, 3160]\text{MeV}/c^2$  betrachtet, im regulären Fit wird nur  $B_d^0$ -Kandidaten im Bereich  $[5230, 5330]\text{MeV}/c^2$  berücksichtigt.

## 4.3 Verwendeter Datensatz

## 5 Analyse / Fit

Um aus einem Datensatz den „wahren“ Wert diverser Parameter abzuschätzen, gibt es verschiedene Möglichkeiten. In dieser Analyse wird die Methode sFit verwendet. Diese stellt eine modifizierte Variante des „Unbinned Maximum Likelihood“ Fits dar. Unbinned meint, dass das Fitergebnis nicht von der Wahl der Säulen (engl. bins) eines Histogramms abhängt. Die Modifikation des Fits besteht in der Verwendung der aus der *sPlot*-Technik bekannten sWeights. Dadurch ist es nicht nötig, den Untergrund zu modellieren, da dieser aus statistischen Gründen annulliert wird.

### 5.1 Maximum Likelihood Funktion

Die Maximum Likelihood Methode ist eine weit verbreitete Methode, um Parameter abzuschätzen. Für eine gegebene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF)  $\mathcal{P}(\vec{x}_e; \vec{\lambda})$  mit einem unbekannten Satz Parametern  $\vec{\lambda}$  und  $N$  unabhängigen Messungen  $\vec{x}_e$  ist die Likelihood-Funktion als

$$\mathcal{L}(\vec{\lambda}) = \prod_{i=1}^N \mathcal{P}(\vec{x}_e; \vec{\lambda}) \quad (5.1)$$

definiert. Der Satz an Parametern, der  $\mathcal{L}$  maximiert, gilt als beste Abschätzung von  $\vec{\lambda}$ . In der Praxis jedoch minimiert man äquivalent  $-\ln \mathcal{L}$ . Gewöhnlicherweise berücksichtigt man möglichen Untergrund, indem man die WDF in einen Signal- und Untergrundanteil aufteilt:

$$\mathcal{P}(\vec{x}_e; \vec{\lambda}) = f_{sig} \mathcal{P}_{sig}(\vec{x}_e; \vec{\lambda}) + (1 - f_{sig}) \mathcal{P}_{bkg}(\vec{x}_e). \quad (5.2)$$

$f_{sig}$  bezeichnet hierbei den Signalanteil,  $\mathcal{P}_{sig}$ ,  $\mathcal{P}_{bkg}$  die WDF des Signals bzw. Untergrunds. Die Schwierigkeit besteht nun darin, den Untergrund geeignet zu modellieren. Dazu bedarf es MonteCarlo-Studien oder der Verwendung separater Seitenbänder. [10]

### 5.2 Fitmethode sFit

Der sFit bietet nun eine Möglichkeit, ohne genaue Kenntnis des Hintergrunds die wahre Verteilung des Signalanteils von  $\vec{x}$  zu rekonstruieren. Dazu bedarf es einer weiteren Variable  $\vec{y}$ , die vollkommen unkorreliert ist, also sowohl für Signal als auch Untergrund. In dieser Analyse wird später  $\vec{y} = y = M(B_d^0)$  die rekonstruierte Masse der  $B_d^0$  sein,  $\vec{x}^T = (t, d, \eta)^T$ , die Variablen, die zur Bestimmung von  $S_{J/\Psi K_s^0}$  notwendig sind. Was diese im Einzelnen bedeuten wird später behandelt.

Sei  $N_s$  die Zahl an Signal- und  $N_b$  die Zahl an Untergrund-Ereignissen eines Datensatzes. Die Verteilungen von Signal und Untergrund seien mit  $F_s(y)$  bzw.  $F_b(y)$  bezeichnet und all diese vier Größen seien bekannt. Dann stellt die *sPlot*-Technik ([11]) mit den sogenannten „sWeights“

$$W_s(y) = \frac{V_{ss}F_s(y) + V_{sb}F_b(y)}{N_sF_s(y) + N_bF_b(y)} \quad (5.3)$$

einen Formalismus zur Verfügung, um durch Gewichtung der Ereignisse Signal vom Untergrund zu bereinigen. Die Matrix  $V_{ij}$  bezeichnet dabei das Inverse der Kovarianzmatrix

$$V_{ij}^{-1} = \sum_{e=1}^N \frac{F_i(y_e)F_j(y_e)}{(N_sF_s(y_e) + N_bF_b(y_e))^2}. \quad (5.4)$$

In der *sPlot*-Technik werden die Gewichte  $W_s(y_e)$  berechnet und anschließend ein Histogramm mit den Messungen  $x_e$  mit der entsprechenden Gewichtung gefüllt, um die wahre Verteilung von  $x$  zu erhalten. Beim sFit wird nun die Likelihood Funktion gemäß

$$\mathcal{L}_W(\vec{\lambda}) = \prod_{i=1}^N \mathcal{P}(x_e; \vec{\lambda})^{W_s(y_e)} \quad (5.5)$$

gewichtet. Die Erwartung ist, dass der Untergrundanteil auf statistischer Grundlage eliminiert wird und der wahren Wert von  $\vec{\lambda}$  durch Maximierung von  $\mathcal{L}_W(\vec{\lambda})$  abgeschätzt werden kann.

### 5.3 Bestimmung der sWeights - Massenfit

Wie bereits in Kapitel 5.2 erwähnt, wird die rekonstruierte Masse zur Berechnung der sWeights herangezogen. Dazu wird ein klassischer Maximum Likelihood durchgeführt, d.h. Signal und Untergrund werden gemäß Gleichung 5.2 gesondert beschrieben.

Für den Signalteil der Massenverteilung wird ein doppelter Gauß der Form

$$\mathcal{P}_{m;S}(m; \vec{\lambda}_{m;S}) = f_{S,m} \mathcal{G}(m; m_{B_d^0}, \sigma_{m,1}) + \mathcal{G}(m; m_{B_d^0}, \sigma_{m,2}) \quad (5.6)$$

mit gemeinsamen Mittelwert  $m_{B_d^0}$ , unterschiedlichen Breiten  $\sigma_{m,1}$  und  $\sigma_{m,2}$  sowie dem relativen Beitrag  $f_{S,m}$  der beiden Gauß-Kurven angenommen. Die Normierung ist dabei bereits in  $\mathcal{G}$  enthalten.

Der Untergrund wird durch die Exponentialfunktion

$$\mathcal{P}_{m;B}(m; \vec{\lambda}_{m;B}) = \frac{1}{\mathcal{N}_{m;B}} e^{-\alpha_m m} \quad (5.7)$$

modelliert.  $\mathcal{N}_{m;B}$  bezeichnet dabei die Normierung auf den im Fit verwendeten Massenbereich  $m \in [5230, 5330] \text{ MeV}/c^2$ . Damit lautet die gesamte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Massenverteilung

$$\mathcal{P}_m(m; \vec{\lambda}_m) = f_{sig} \mathcal{P}_{m;S}(m; \vec{\lambda}_{m;S}) + (1 - f_{sig}) \mathcal{P}_{m;B}(m; \vec{\lambda}_{m;B}), \quad (5.8)$$



## 5.4 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zerfallszeitverteilung

wobei  $f_{sig}$  den Anteil des Signals angibt.

Der Fit liefert für den Parametersatz  $\lambda_m^T = (f_{sig}, f_{S,m}, m_{B_d^0}, \sigma_{m,1}, \sigma_{m,2}, \alpha_m)^T$  die in Tabelle 5.1 aufgeführten Resultate. Alle Parameter wurden dabei im Fit laufen gelassen.

Tabelle 5.1: Ergebnisse des Massenfits zur Bestimmung der sWeights

Parameter	Wert	
$f_{sig}$	$0,676 \pm 0,047$	
$f_{S,m}$	$0,804 \pm 0,050$	
$m_{B_d^0}$	$(5281,53 \pm 0,14)$	MeV/ $c^2$
$\sigma_{m,1}$	$(8,86 \pm 0,37)$	MeV/ $c^2$
$\sigma_{m,2}$	$(21,0 \pm 9,2)$	MeV/ $c^2$
$\alpha_m$	$(0,00158 \pm 0,00071)$	(MeV/ $c^2$ ) $^{-1}$

Des Weiteren zeigt Abbildung 5.1 die Massenverteilung mit Fit, die dazugehörigen Pulls sowie die berechneten sWeights. Pulls sind die auf den Fehler des Messwerts normierten Residuen. Für eine beliebige Messgröße  $y$  werden sie berechnet über

$$pull(x) = \frac{y_{gemessen} - y_{gefittet}}{\sigma_y}. \quad (5.9)$$

## 5.4 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zerfallszeitverteilung

In diesem Abschnitt soll nun die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion entwickelt werden, die letztendlich zur Bestimmung der Asymmetrie-Amplitude  $S_{J/\Psi K_s^0}$  verwendet wird. Aus den Gleichungen 3.17 und 3.18 geht für  $|\lambda_f| = 1$  die theoretische Zerfallszeitverteilung für ein  $B_d^0$  bzw.  $\overline{B}_d^0$  hervor:

$$\mathcal{P}_{\text{wahr}}(t, d_{\text{wahr}}) = \frac{1}{\mathcal{N}_t} e^{-t/\tau} [1 - d_{\text{wahr}} S_{J/\Psi K_s^0} \sin(\Delta m_d t)]. \quad (5.10)$$

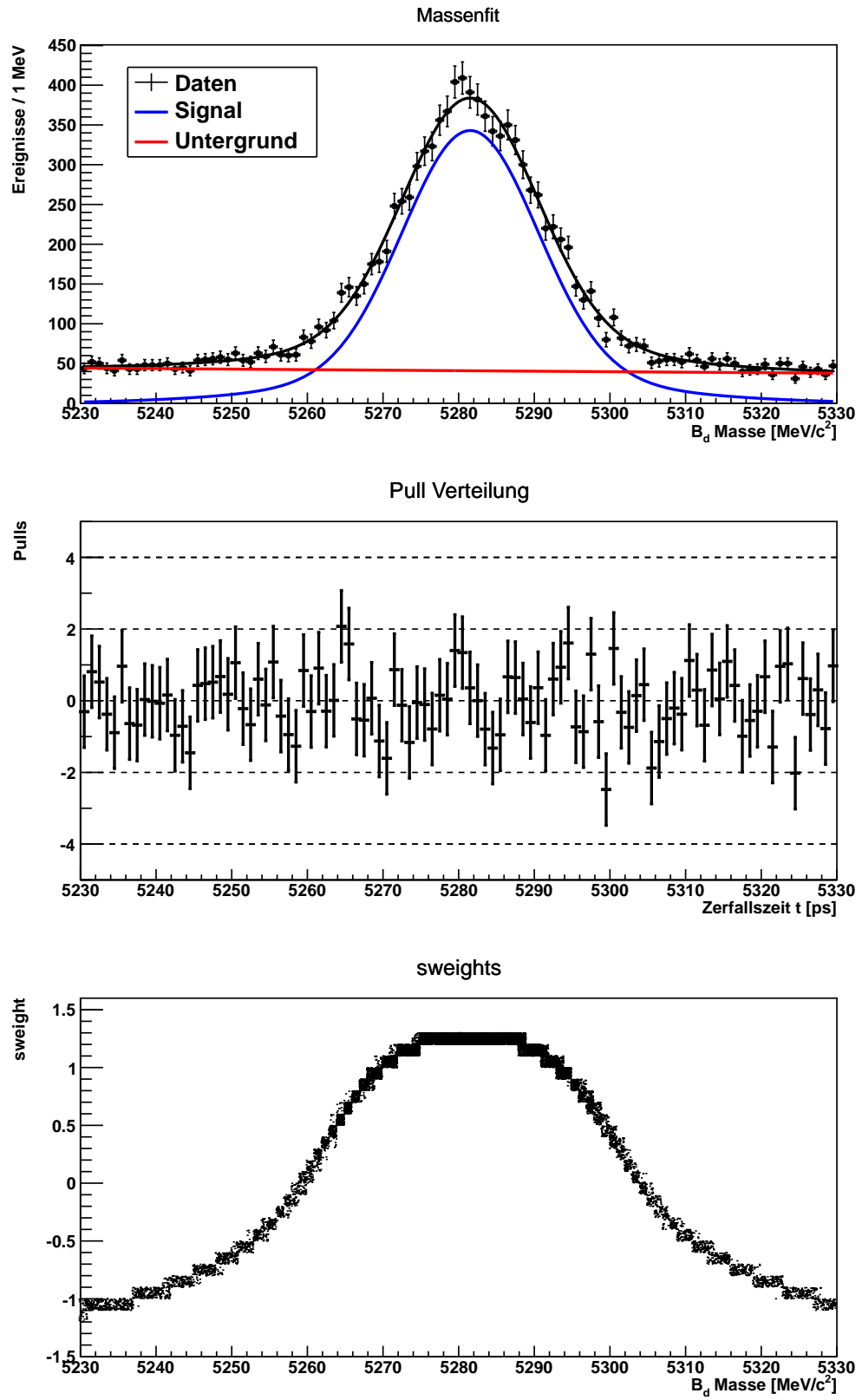
Durch die Einführung des wahren Tags  $d_{\text{wahr}}$  wurden beide Verteilungen zu einer zusammengefasst. Ein anfängliches  $B_d^0$  wird dabei durch  $d_{\text{wahr}} = 1$  beschrieben, ein  $\overline{B}_d^0$  durch  $d_{\text{wahr}} = -1$ . Die Normierung ist so gewählt, dass die Bedingung

$$\sum_{d_{\text{wahr}}} \int_{t_{\text{min}}}^{t_{\text{max}}} dt \mathcal{P}_{\text{wahr}}(t, d_{\text{wahr}}) = 1 \quad (5.11)$$

erfüllt wird. Aufgrund zahlreicher detektorbedingten Effekte muss  $\mathcal{P}_{\text{wahr}}(t, d_{\text{wahr}})$  modifiziert werden.

### 5.4.1 Produktionsasymmetrie

Der Detektor produziert  $B_d^0$ - und  $\overline{B}_d^0$ -Mesonen nicht in exakt gleicher Zahl. Über die Produktionsraten  $R_{\overline{B}_d^0}$  für ein  $\overline{B}_d^0$  bzw.  $R_{B_d^0}$  für ein  $B_d^0$  ist die Produktionsasymmetrie



## 5.4 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zerfallszeitverteilung

definiert durch:

$$\mu = A_P = \frac{R_{\overline{B}_d^0} - R_{B_d^0}}{R_{\overline{B}_d^0} + R_{B_d^0}}. \quad (5.12)$$

Anhand dieser Definition muss der Anteil an  $B_d^0$  bzw.  $\overline{B}_d^0$  an der gesamten WDF gewichtet werden. Unter Verwendung des Kronecker-Deltas  $\delta_{ij}$  lässt sich die WDF daher schreiben als:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_{\text{wahr}}(t, d_{\text{wahr}}) &= \delta_{d_{\text{wahr}},1}(1 - \mu)\mathcal{P}_{\text{wahr}}(t, 1) + \delta_{d_{\text{wahr}},-1}(1 + \mu)\mathcal{P}_{\text{wahr}}(t, -1) \\ &= (1 - d_{\text{wahr}}\mu)\mathcal{P}_{\text{wahr}}(t, d_{\text{wahr}}) \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}_t} e^{-t/\tau} [1 - d_{\text{wahr}}\mu - (d_{\text{wahr}} - \mu)S_{J/\Psi K_s^0} \sin(\Delta m_d t)]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

### 5.4.2 Bestimmung des Anfangszustandes der $B_d^0$ -Mesonen(Tagging)

Die Messung der indirekten  $\mathcal{CP}$ -Verletzung setzt voraus, dass der anfängliche Flavour des  $B_d^0$ -Mesons bekannt ist. Den Vorgang zu entscheiden, ob ein rekonstruierter Signalkandidat ein  $b$  oder  $\bar{b}$  Quark enthält, nennt man „Flavour Tagging“. Hierzu werden sogenannte Tagging Algorithmen angewandt, die allerdings keine perfekten Ergebnisse liefern. Von  $N$  Kandidaten kann bei  $N_U$  Kandidaten kein Anfangsflavour zugeordnet werden, bei  $N_W$  ist er falsch und bei  $N_R$  ist er richtig. Ein Maß für die Güte des Algorithmus ist die Tagging Effizienz

$$\epsilon_{\text{tag}} = \frac{N_R + N_W}{N_R + N_W + N_U} \quad (5.14)$$

und die Fehlerwahrscheinlichkeit

$$\omega = \frac{N_W}{N_R + N_W}, \quad (5.15)$$

die die Wahrscheinlichkeit angibt, den Signalkandidaten den falschen Flavour zuzuordnen. Die Größe die es bei solchen Algorithmen zu maximieren gilt, ist die effektive Tagging Effizienz

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_{\text{tag}}(1 - 2\omega)^2. \quad (5.16)$$

Bei dem in dieser Arbeit verwendeten Algorithmus handelt es sich um einen sog. Opposite Side Tagger (OST). Dieser nutzt aus, dass die meisten  $b$  Quarks in Quark-Antiquark Paaren erzeugt werden. Dabei rekonstruiert der OST die Ladung der Zerfallsreste des entsprechenden Quark-Partners des  $B_d^0$ -Mesons. Der Algorithmus berechnet aus kinematischen und geometrischen Daten eine Fehlerwahrscheinlichkeit  $\eta^{OS} \in [0; 0,5]$  für seine Flavour-Zuweisung (oder auch Tagging Entscheidung genannt), die im folgenden mit  $d^{OS}$  bezeichnet wird. [1]

Die vorhergesagte Fehlerwahrscheinlichkeit  $\eta^{OS}$  muss allerdings noch auf diversen Zerfallskanälen kalibriert nehmen. Dies ist allerdings nicht Bestandteil dieser Arbeit, sondern wurde auch [12] entnommen. Die Kalibrationsfunktion lautet:

$$\omega(\eta^{OS}) = p_1 (\eta^{OS} - \langle \eta^{OS} \rangle) + p_0. \quad (5.17)$$

$\langle \eta^{OS} \rangle$  steht dabei für das arithmetische Mittel der  $\eta^{OS}$ -Verteilung. Aus [12] erhält man

$$p_0 = 0,382 \pm 0,003 \quad (5.18)$$

$$p_1 = 0,981 \pm 0,024 \quad (5.19)$$

$$\langle \eta^{OS} \rangle = 0,382 \quad (5.20)$$

Die im Algorithmus verwendeten geladenen Teilchen wie zum Beispiel ein  $K^\pm$  können je nach Ladung zum Teil sehr unterschiedlich mit dem Detektormaterial reagieren. Daher kommt es auch zu unterschiedlichen Rekonstruktionseffizienzen für  $B_d^0$  und  $\overline{B}_d^0$ . Entsprechend müssen zwei Kalibrationsfunktionen

$$\omega^{B_d^0}(\eta^{OS}) = p_1(B_d^0) (\eta^{OS} - \langle \eta^{OS} \rangle) + p_0(B_d^0), \quad (5.21)$$

$$\omega^{\overline{B}_d^0}(\eta^{OS}) = p_1(\overline{B}_d^0) (\eta^{OS} - \langle \eta^{OS} \rangle) + p_0(\overline{B}_d^0) \quad (5.22)$$

berücksichtigt werden. Für die Differenzen der Kalibrationsparameter liefert [12]

$$\Delta p_0 = p_0(B_d^0) - p_0(\overline{B}_d^0) = 0,0045 \pm 0,0053 \quad (5.23)$$

$$\Delta p_1 = p_1(B_d^0) - p_1(\overline{B}_d^0) = 0,001 \pm 0,05. \quad (5.24)$$

Während  $p_1$  für  $B_d^0$  und  $\overline{B}_d^0$  sehr gut übereinstimmen, muss man das bei  $p_0$  differenzierter betrachten. Auch hier ist man zwar im  $1\sigma$ -Bereich kompatibel, anderen Studien der LHCb-Gruppe zeigen jedoch, dass die Tagging Asymmetrie  $\Delta p_0$  berücksichtigt werden sollte, was auch hier geschieht. Dazu werden *omega* und  $\Delta p_0$  so umdefiniert, dass

$$\Delta p_0 = \omega^{B_d^0} - \omega^{\overline{B}_d^0}, \quad (5.25)$$

$$\omega^{B_d^0} = \omega + \frac{\Delta p_0}{2}, \quad (5.26)$$

$$\omega^{\overline{B}_d^0} = \omega - \frac{\Delta p_0}{2} \quad (5.27)$$

gilt. Aufgrund der Fehlerwahrscheinlichkeit beim Tagging weicht die gemessene Zerfallszeitverteilung von der tatsächlichen deutlich ab. Bei einem gemessenen  $B_d^0(d^{OS} = 1)$  handelt es sich in  $(1 - \omega^{B_d^0})\%$  der Fälle auch tatsächlich um ein  $B_d^0(d_{wahr} = 1)$ , in  $\omega^{\overline{B}_d^0}$  der Fälle jedoch um ein wahres  $\overline{B}_d^0(d_{wahr} = -1)$ . Damit nimmt die Wahrscheinlichkeits-

dichtefunktion der gemessenen Verteilung die Form

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{P}}_{\text{gem.}}(t, d^{OS}, \omega) &= \delta_{d^{OS}, 1} \left[ (1 - \omega^{B_d^0}) \tilde{\mathcal{P}}_{\text{wahr}}(t, d_{\text{wahr}} = 1) + \omega^{\overline{B_d^0}} \tilde{\mathcal{P}}_{\text{wahr}}(t, d_{\text{wahr}} = -1) \right] \\
&\quad + \delta_{d^{OS}, -1} \left[ (1 - \omega^{\overline{B_d^0}}) \tilde{\mathcal{P}}_{\text{wahr}}(t, d_{\text{wahr}} = -1) + \omega^{B_d^0} \tilde{\mathcal{P}}_{\text{wahr}}(t, d_{\text{wahr}} = 1) \right] \\
&= \frac{1}{\mathcal{N}_t} e^{-t/\tau} \{ 1 - d\mu(1 - 2\omega) - d\Delta p_0 \\
&\quad - [d(1 - 2\omega) - \mu(1 - d\Delta p_0)] S_{J/\Psi K_s^0} \sin(\Delta m_d t) \}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

In der letzten Zeile wurde für eine übersichtlichere Schreibweise  $d := d^{OS}$  verwendet.

### 5.4.3 Zeitauflösung

### 5.4.4 Endgültige p.d.f.

$$xxx \tag{5.29}$$

## 5.5 Fitergebnis

Wir erhalten schließlich:

$$S_{J/\Psi K_s^0} = xxx \pm xxx \tag{5.30}$$



## 6 Abschätzung systematischer Unsicherheiten

Der Fitter liefert uns zwar eine statistische Unsicherheit auf  $S_{J/\Psi K_s^0}$ , allerdings ist eine Betrachtung der Systematik unerlässlich. Im Folgenden wird daher der Einfluss einiger Effekte auf das Fitergebnis untersucht und anschließend der systematische Fehler abgeschätzt.

### 6.1 Fitmethode

Die hier verwendete Maximum-Likelihood-Methode hat zwar den schönen Vorteil, dass das Fitergebnis nicht vom Binning abhängt, es ist jedoch nicht von vornherein ausgeschlossen, dass sie das Ergebnis verfälscht (einen sog. Bias produziert). Daher wird eine Toy Monte Carlo - Studie (kurz: Toy MC) durchgeführt. Dabei werden Daten zufällig nach einer Verteilung mit den gewünschten Parametern generiert und im Anschluss gefittet. Für eine gute Abschätzung des Bias dienen die Ergebnisse des Daten-Fits aus Tabelle xxxxxxxx als Anhaltspunkt. Es werden pro Toy 20000 Teilchen generiert mit einem Signalanteil von 42,3%.

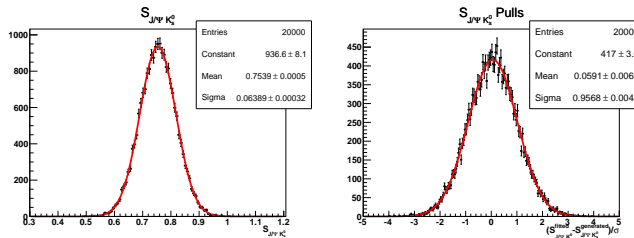


Abbildung 6.1: Verteilung der aus der Toy MC Studie erhaltenen Amplituden  $S_{J/\Psi K_s^0}$  (links) sowie die dazugehörigen Pulls (rechts)

Abbildung 6.1 zeigt sowohl die Verteilung der gefitteten Amplitude und die Pulls, die sich mittels  $\frac{S_{J/\Psi K_s^0}^{\text{gefittet}} - S_{J/\Psi K_s^0}^{\text{generiert}}}{\sigma_{\text{gefittet}}}$  berechnen. Es lassen sich hierbei zwei Dinge beobachten:

1. An der Verschiebung des Pull-Mittelwertes  $\mu = 0,059 \pm 0,007$  von der Null sieht man deutlich, dass es einen kleinen, aber signifikanten Bias gibt. Indem wir diesen Bias mit der statistischen Unsicherheit aus unserem Fitergebnis (siehe Gl. 5.31) multiplizieren erhalten wir eine Abschätzung der aus der Fitmethode resultierenden

Unsicherheit:

$$\delta S_{J/\Psi K_s^0}^{Fit} = 0,059 \cdot 0,07 = 0,00413 \quad (6.1)$$

2. Mit einem  $\sigma = 0,957 \pm 0,005$  ist die Pull-Verteilung signifikant zu schmal. Dies bedeutet, dass der Fit den statistischen Fehler überschätzt. Das Problem tritt auf, sobald man in den Toys Untergrund miteinbezieht. Es ist bekannt, dass die verwendete SFit-Methode die Fehlerpropagation (gerade bei Untergrund) nicht korrekt ausführt. Es wurde daher eine Fehlerkorrektur implementiert, aber auch dieser handelt es sich nur um eine Näherung.

**Ursachen des Bias** Weitere Toy MC Studien zeigen, dass die Behandlung des Untergrundes zu einem Bias führt. Generiert man nämlich nur Signal, ist der Mittelwert kompatibel zur Null (siehe Abb. 6.2).

Abbildung 6.2: Toy MC Studie mit reinem Signal ohne Untergrund. Es kommt zu keinem signifikanten Bias. Links: Verteilung der erhaltenen Amplitude, Rechts: Pull-Verteilung.

Die Vermutung ist, dass zu wenig Statistik im Fit die eigentliche Ursache für den Bias ist. Daher wurden weitere Toy MC Studien mit unterschiedlicher Anzahl an Teilchen pro Toy durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.1 aufgeführt und in Abbildung 6.3 nochmals visualisiert. Man sieht, dass sich der Fit Bias mit erhöhter Statistik deutlich reduzieren lässt. Allerdings lässt das Ergebnis Zweifel aufkommen, ob er sich mit noch mehr Statistik gänzlich verschwindet.

Tabelle 6.1: Toy MC Studien mit unterschiedlicher Anzahl an generierten Events pro Toy. Genannt wird der Mittelwert  $\mu$  der  $S_{J/\Psi K_s^0}$ -Pull-Verteilung

Teilchen pro Toy	$\mu$
20000	$0,059 \pm 0,007$
50000	$0,036 \pm 0,007$
100000	$0,020 \pm 0,007$
200000	$0,022 \pm 0,007$

## 6.2 Kalibration des Taggings

Im Fit wird bei den Parametern der Tagging Kalibration nur der statistischen Fehler berücksichtigt. Es soll nun an dieser Stelle der Einfluss der statistischen Unsicherheiten abgeschätzt werden.

Die Korrekturparameter  $p_0$  und  $p_1$  für die Fehlerwahrscheinlichkeit des OST sind gegeben



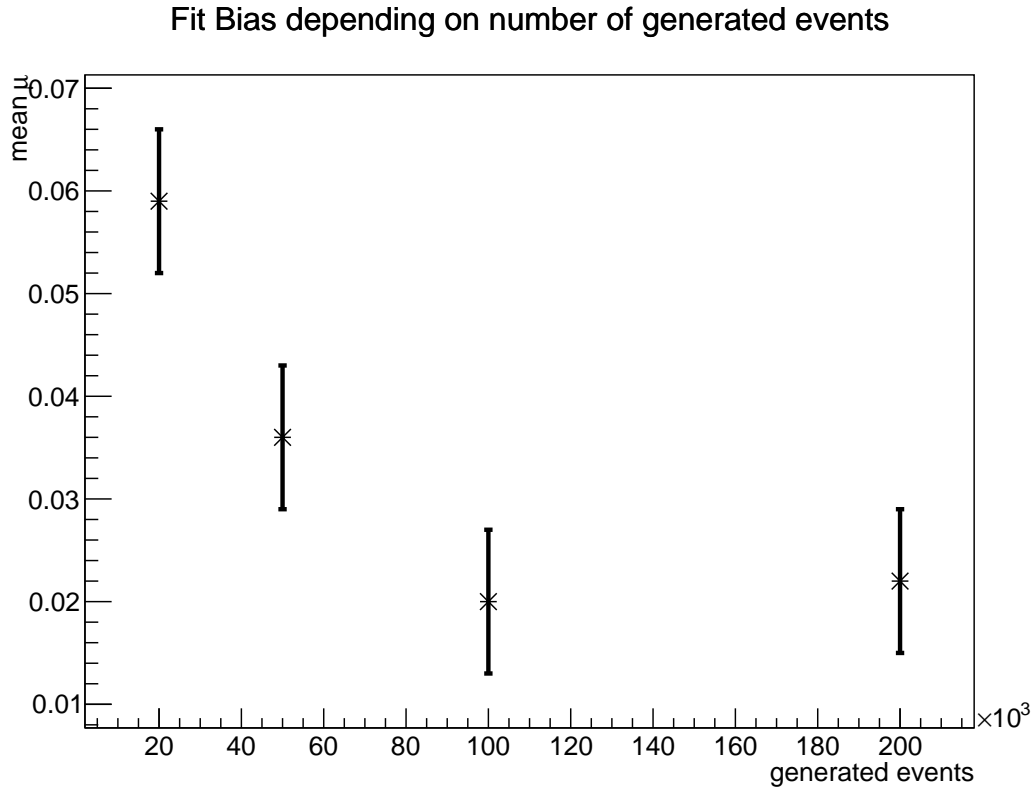


Abbildung 6.3: Toy MC Studien mit unterschiedlicher Anzahl an generierten Events pro Toy. Als Maß für den Fit Bias dient der Mittelwert  $\mu$  der  $S_{J/\Psi K_s^0}$ -Pull-Verteilung

## 6 Abschätzung systematischer Unsicherheiten

durch

$$p_0 = 0,392 \pm 0,0017 \text{ (stat.)} \pm 0,0076 \text{ (syst.)} \quad (6.2)$$

$$p_1 = 1,035 \pm 0,021 \text{ (stat.)} \pm 0,0076 \text{ (syst.)}. \quad (6.3)$$

**Variation der Parameter in den Daten** !!! Wichtig !!! - Dieser Abschnitt muss nochmal überarbeitet werden. (Werte anpassen)

Zunächst werden die Startwerte der Parameter  $p_0$  und  $p_1$  variiert, indem man jeweils den systematischen Fehler der Parameter addiert bzw. subtrahiert und dann den Fit auf die Daten durchführt. Für alle vier Kombinationen wird dann die Abweichung vom regulären Fitergebnis für  $S_{J/\Psi K_s^0}$  berechnet. Der Referenzwert aus dem Fit beträgt

$$S_{J/\Psi K_s^0} = 0,625 \pm 0,069 \quad (6.4)$$

Tabelle 6.2: Variation des Fitergebnisses für  $S_{J/\Psi K_s^0}$  bei Veränderung der Startwerte für  $p_0$  und  $p_1 \pm$  ihrer statistischen Unsicherheiten

$p_0$	$p_1$	$S_{J/\Psi K_s^0}$	$\Delta S_{J/\Psi K_s^0}$
$0,3783 - 0,0028$	$0,950 - 0,028$	$0,7623 \pm 0,0005$	$0,0093 \pm 0,0007$
$0,3783 + 0,0028$	$0,950 - 0,028$	$0,7368 \pm 0,0005$	$-0,0171 \pm 0,0007$
$0,3783 - 0,0028$	$0,950 + 0,028$	$0,7729 \pm 0,0005$	$0,0190 \pm 0,0007$
$0,3783 + 0,0028$	$0,950 + 0,028$	$0,747 \pm 0,001$	$-0,007 \pm 0,001$

Die Ergebnisse sind Tabelle 6.2 zu entnehmen. Die größte Abweichung beträgt hier  $\Delta S_{J/\Psi K_s^0} = 0,0190$ .

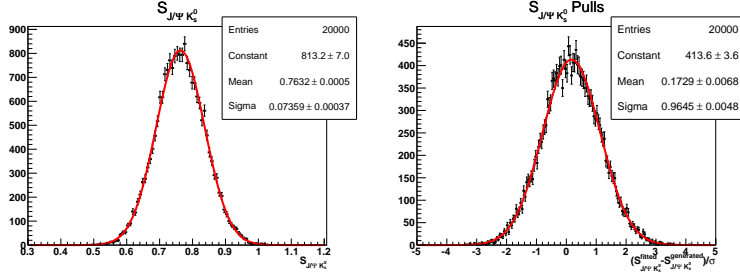
**Variation der Parameter in Toy MC** Eine weitere Möglichkeit der Abschätzung besteht darin, sich entsprechende Toys zu generieren und diese dann zu fitten. Im Folgenden werden bei der Toy Generierung die Parameter  $p_0$  und  $p_1$  um ihre statistischen Unsicherheiten variiert (systematische Fehler auf die Kalibration liegen leider noch nicht vor), der Fit dann allerdings mit den ursprünglichen Parameterwerten durchgeführt. Als Referenzwert dient die aus dem Fit Bias (siehe Kapitel 6.1) erhaltene Amplitude, da hier mit den regulären Parametern  $p_0$  und  $p_1$  generiert und gefittet wurde:

$$S_{J/\Psi K_s^0} = 0,7539 \pm 0,0005 \quad (6.5)$$

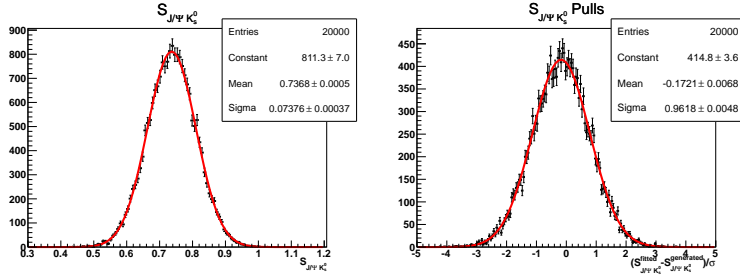
Die Ergebnisse sind Tabelle 6.3 zu entnehmen, diese wurde aus den Plots in Abbildung 6.4. Die größte Abweichung beträgt hier  $\Delta S_{J/\Psi K_s^0} = 0,0190$ . Daher wird der systematische Fehler durch die Tagging Kalibrierung wie folgt abgeschätzt:

$$\delta S_{J/\Psi K_s^0}^{\text{TaggingKalibration}} = 0,0190. \quad (6.6)$$

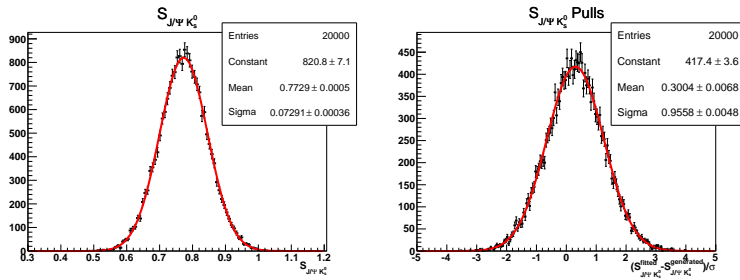
## 6.2 Kalibration des Taggings



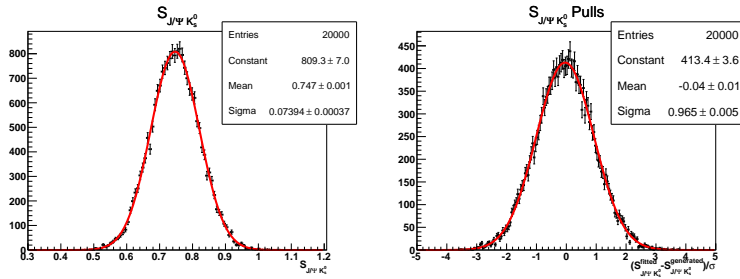
(a)  $p_0 - \Delta p_0, p_1 - \Delta p_1$



(b)  $p_0 + \Delta p_0, p_1 - \Delta p_1$



(c)  $p_0 - \Delta p_0, p_1 + \Delta p_1$



(d)  $p_0 + \Delta p_0, p_1 + \Delta p_1$

Abbildung 6.4: Toy MC Studie zur Abschätzung der Systematik durch die Tagging Kalibration. Bei der Generation wurden die Taggingparameter  $p_0 = 0,3783$  und  $p_1 = 0,950$  um ihre statischen Unsicherheiten  $\Delta p_0 = 0,0028$  bzw.  $\Delta p_1 = 0,028$  variiert, der Fit wurde dann mit den ursprünglichen Werten  $p_0$  und  $p_1$  durchgeführt.

Tabelle 6.3: Variation des Fitergebnisses für  $S_{J/\Psi K_s^0}$  bei Veränderung der Parameterwerte  $p_0$  und  $p_1 \pm$  ihrer statistischen Unsicherheiten bei der Generierung von Toys

$p_0$	$p_1$	$S_{J/\Psi K_s^0}$	$\Delta S_{J/\Psi K_s^0}$
0,3783 - 0,0028	0,950 - 0,028	0,7623 $\pm$ 0,0005	0,0093 $\pm$ 0,0007
0,3783 + 0,0028	0,950 - 0,028	0,7368 $\pm$ 0,0005	-0,0171 $\pm$ 0,0007
0,3783 - 0,0028	0,950 + 0,028	0,7729 $\pm$ 0,0005	0,0190 $\pm$ 0,0007
0,3783 + 0,0028	0,950 + 0,028	0,747 $\pm$ 0,001	-0,007 $\pm$ 0,001

### 6.3 Einfluss der zeitabhängigen Akzeptanz

In der Analyse wurde der Einfluss einer zeitabhängigen Detektorakzeptanz vernachlässigt. Nimmt man an, dass sich die Akzeptanz von  $B_d^0$ - und  $\overline{B}_d^0$ -Mesonen nicht unterscheiden, so hat die Akzeptanz keinen Einfluss auf die Asymmetrie, da sie sich hier herauskürzt. Beim Fit der Amplitude nach Gleichung ?? ist dies aber nicht zwangsläufig so. Um hiesiges Vorgehen zu rechtfertigen, wird zunächst eine Bestimmung der Akzeptanz durchgeführt und anschließend mit einer Toy MC Studie ihr Einfluss überprüft.

#### 6.3.1 Bestimmung der Akzeptanzfunktion

$B_d^0$ -Mesonen haben eine relativ lange Lebensdauer. Um sie von kurzlebigen Untergrund zu unterscheiden, befinden sich auf den Triggern und dem Stripping entsprechende Cuts auf die Flugzeiten. Dies hat zur Folge, dass für kleine Flugzeiten ( $ct \lesssim 0,3\text{ps}$ ) kaum  $B_d^0$ -Mesonen im Detektor registriert werden und es zu einem sog. „Turn-On-Effekt“ kommt. Es hat sich herausgestellt ([1]), dass dieser gut durch die Funktion

$$\epsilon_1(t) = \frac{2}{\pi} \arctan[t \cdot \exp(at + b)] \quad (6.7)$$

parametrisiert wird.

Je länger ein  $B_d^0$ -Meson lebt, desto schwieriger wird es, die Zerfallsprodukte im Detektor auf Grund seiner begrenzten Länge nachzuweisen. Daher nimmt die Akzeptanz zu großen Zeiten hin wieder ab. Zur Parametrisierung fällt die Wahl auf eine lineare Funktion

$$\epsilon_2(t) = 1 + \beta t \quad (\beta < 0). \quad (6.8)$$

Die entsprechende gesamte Akzeptanzfunktion lautet demnach:

$$\epsilon(t) = \epsilon_1(t) \cdot \epsilon_2(t) = \frac{2}{\pi} \arctan[t \cdot \exp(at + b)](1 + \beta t) \quad (6.9)$$

Zur Bestimmung der Parameter wird die Trennung von  $B_d^0$ - und  $\overline{B}_d^0$ -Mesonen aufgehoben, sodass lediglich ein exponentieller Zerfall zu beobachten ist. Des weiteren wird

der Cut auf die Lebensdauer bei 0,3ps nicht angewandt, sodass der Turn-On-Effekt auch richtig sichtbar wird. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für den Fit lautet somit:

$$\mathcal{P}_{acc}(t) \propto \epsilon(t) \cdot e^{-t/\tau} = e^{-t/\tau} \cdot \frac{2}{\pi} \arctan[t \cdot \exp(at + b)](1 + \beta t) \quad (6.10)$$

Die beiden Parameter  $\tau$  und  $\beta$  sind stark miteinander korreliert. Für eine geeignete Bestimmung der Parameter der Akzeptanz-Funktion wird daher die Lebensdauer auf den PDG-Wert  $\tau = 1,519 \pm 0,007\text{ps}$  [5] constraint, die anderen Parameter fließen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.4 aufgeführt, die entsprechenden Plots in Abbildung 6.5.

Tabelle 6.4: Ergebnis des Fits zur Bestimmung der zeitlichen Akzeptanz

Parameter	Ergebnis
$\tau$	$1,519 \pm 0,007$
$a$	$44,1 \pm 5,7$
$b$	$-7,4 \pm 1,1$
$\beta$	$-0,0056 \pm 0,0085$

### 6.3.2 Bestimmung des Einflusses

Durch den Cut auf die Lebensdauer bei  $t = 0,3\text{ps}$  in der Datenselektion spielt der Turn-On-Effekt im hier verwendeten Datensatz eigentlich keine Rolle. Dies wird dadurch deutlich, dass die Akzeptanzfunktion  $\epsilon(0,3\text{ps}) = 0,992$  und damit fast Eins ist. Auch am Ende des Analysebereichs beträgt die Akzeptanz noch  $\epsilon(14\text{ps}) = 0,905$ . Daher liegt die Vermutung nahe, dass sich die Akzeptanz nicht gravierend auf das Fitergebnis auswirkt. Mit den in Kapitel 6.3.1 bestimmten Parametern wird die zeitliche Akzeptanz bei der Erzeugung der Toys berücksichtigt, der anschließende Fit aber ohne Akzeptanzfunktion durchgeführt. Die zur Erzeugung verwendeten Parameter entsprechen ansonsten denen in Kapitel 6.1.

Der Mittelwert der Pulls  $\mu = 0,063 \pm 0,007$  (siehe Abb. 6.6) ist kompatibel mit dem aus dem Fit Bias erhaltenen  $\mu = 0,059 \pm 0,007$  und erzeugt dementsprechend keinen signifikanten zusätzlichen Bias. Damit ist die Vernachlässigung der zeitlichen Akzeptanz im Fit gerechtfertigt.

## 6.4 Korrelation zwischen Masse und Zerfallszeit

### 6.5 Zeitauflösung

## 6 Abschätzung systematischer Unsicherheiten

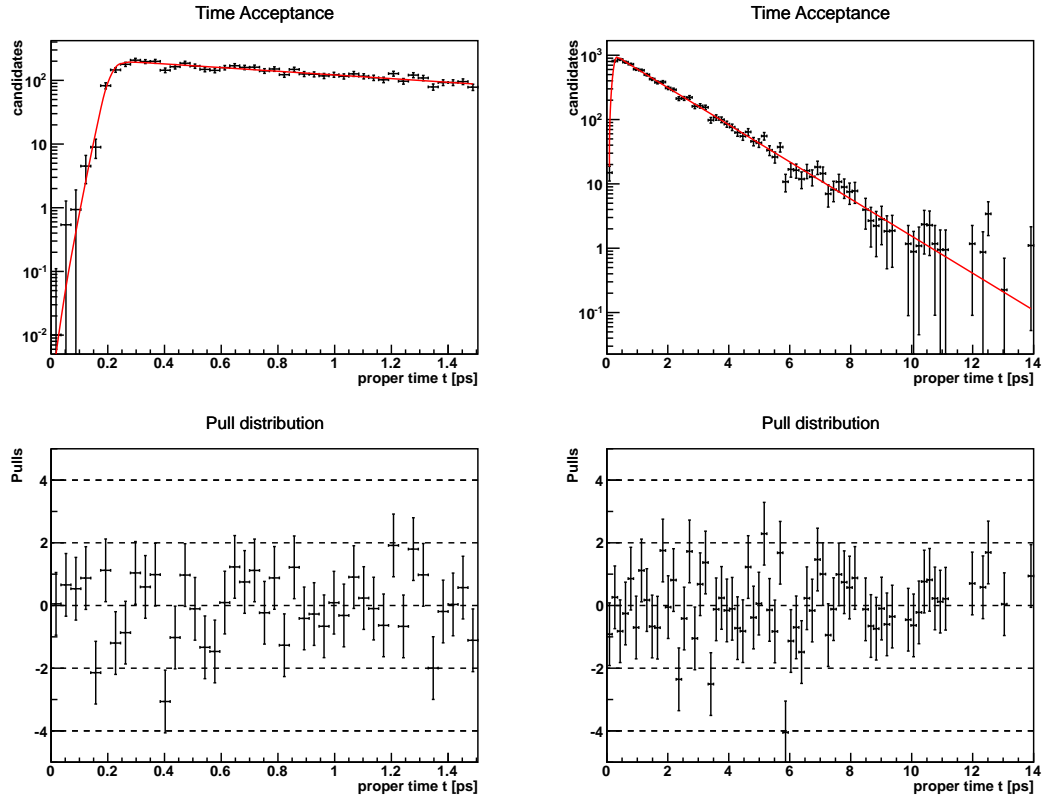


Abbildung 6.5: Fit an die Flugzeit-Verteilung aller  $B_d^0$ -Mesonen mit eingeschlossener Akzeptanzfunktion (oben) sowie die entsprechende Pull-Verteilung (unten). Links: kurzlebiger Zeitbereich ( $t < 1,5\text{ps}$ ), Rechts: gesamtes Flugzeit-spektrum ( $0\text{ps} < t < 14\text{ps}$ )

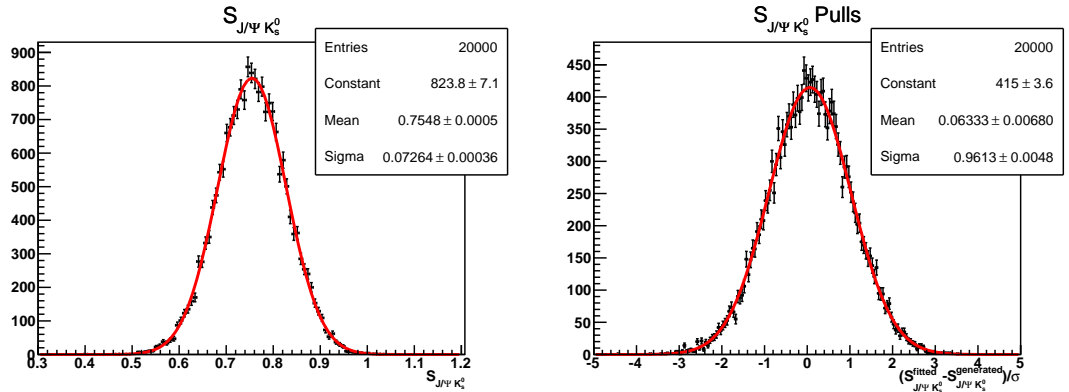


Abbildung 6.6: Untersuchung des Einflusses einer zeitlichen Akzeptanz: Verteilung der aus der Toy MC Studie erhaltenen Amplituden  $S_{J/\Psi K_s^0}$  (links) sowie die dazugehörigen Pulls (rechts)

## **7 Zusammenfassung**





# Literaturverzeichnis

- [1] LHCb-Analyse, ...
- [2] [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standard\\_Model\\_of\\_Elementary\\_Particles-de.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standard_Model_of_Elementary_Particles-de.svg) (Stand: 07.07.2013)
- [3] <http://press.web.cern.ch/press-releases/2013/03/new-results-indicate-particle-discovered-cern-higgs-boson>
- [4] K. Kleinknecht, Uncovering ...
- [5] PDG-Wert für Tau  
<http://pdglive.lbl.gov/popupblockdata.brl?nodein=S042T&inscript=Y&fsizein=1&clumpin0=> (Stand: 02.07.2013)
- [6] [http://www-zeus.physik.uni-bonn.de/~brock/feynman/vtp\\_ss06/](http://www-zeus.physik.uni-bonn.de/~brock/feynman/vtp_ss06/)
- [7] Nir, Heavy Flavour Physics
- [8] Noguchi, ...
- [9] <http://lhcb-trig.web.cern.ch/lhcb-trig/>
- [10] <http://arxiv.org/pdf/0905.0724v1.pdf>
- [11] <http://arxiv.org/pdf/physics/0402083v3.pdf>
- [12] Stefania Vecchi, OS combination for Reco14



# Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den ...,