Spesifikasi Model

Ada tiga tahapan iterasi dalam pemodelan data deret waktu, yaitu:

1. Penentuan model tentatif (spesifikasi model) berdasarkan data contoh untuk mengidentifikasi nilai *p*, *d*, dan *q*.
2. Pendugaan parameter model ARIMA(*p*, *d*, *q*) yang diidentifikasi, yaitu penduga nilai ϕ, θ, dan σ_e^2.
3. Analisis diagnostik untuk melihat kelayakan model.

- Prosedur iterasi ini sering disebut **"Metode Box-Jenkins"**.
- Untuk model ARIMA(p, d, q), spesifikasi dilakukan untuk menentukan nilai p, d, dan q.
- Alat yang digunakan pada tahap identifikasi ini adalah **fungsi autokorelasi**.
- Fungsi autokorelasi ini diduga dari data contoh atau disebut fungsi autokorelasi contoh (*sample of autocorrelation function* atau SACF atau ACF saja).
- Disamping itu ada pula fungsi autokorelasi parsial (*sample of partial autocorrelation function* atau SPACF atau PACF saja)

KS - STK IPB

a. ACF

- $$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})^2}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$
- $$\bar{Y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_t}{n}$$
- r_k merupakan penduga bagi ρ_k

b. PACF

- PACF : ϕ_{kk} = Corr(Y_t, Y_{t-k} | Y_{t-1}, Y_{t-2}, …, Y_{t-k+1})
- Berdasarkan persamaan Yule-Walker:

  $\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \ldots + \phi_{kk}\rho_{j-k}$

  $j = 1, 2, \ldots, k$; Catatan: $\rho_j = \rho_{-j}$ dan $\rho_0 = 1$

  $\rho_k \rightarrow$ ACF; $\phi_{kk} \rightarrow$ PACF

  $\hat{\phi}_{kk} \rightarrow$ penduga bagi ϕ_{kk}

Contoh:

Misal diketahui data : 4, 2, 5, 1. Tentukan ACF (r_1, r_2) dan PACF ($\hat{\phi}_{11}, \hat{\phi}_{22}$)

Melalui persamaan $r_k = \dfrac{\sum_{t=1}^{n-k}(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})^2}, \quad k = 1, 2, \ldots.$

Dapat diperoleh penduga ACF : r_1 = -0.7 dan r_2 = 0.4

Berdasarkan persamaan Yule-Walker dapat diperoleh penduga PACF ϕ_{kk}:

$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \ldots + \phi_{kk}\rho_{j-k}$

Untuk k =1 → j = 1

$\rho_1 = \phi_{11}\rho_0$ → $\rho_1 = \phi_{11}(1)$ → $r_1 = \hat{\phi}_{11}$ = -0.7

Untuk k = 2 → j = 1, 2

$\rho_1 = \phi_{21}\rho_0 + \phi_{22}\rho_1$ → $\rho_1 = \phi_{21} + \phi_{22}\rho_1$

$\rho_2 = \phi_{21}\rho_1 + \phi_{22}\rho_0$ → $\rho_2 = \phi_{21}\rho_1 + \phi_{22}$

$(\rho_1)^2 = \phi_{21}\rho_1 + \phi_{22}(\rho_1)^2$ …… Pers(1)

$\rho_2 = \phi_{21}\rho_1 + \phi_{22}$ …….. Pers(2)

KS - STK IPB

Berdasarkan Pers(1) dan Pers(2) diperoleh:

$(\rho_1)^2 - \rho_2 = \phi_{22}(\rho_1)^2 - \phi_{22}$

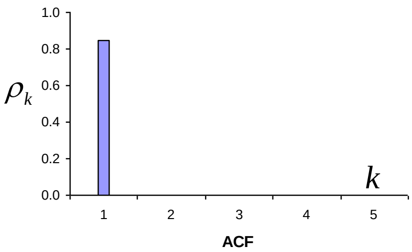
$\phi_{22} = \{(\rho_1)^2 - \rho_2\}/\{(\rho_1)^2 - 1\}$

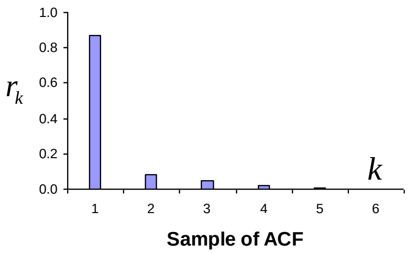
$\hat{\phi}_{22} = \{(r_1)^2 - r_2\}/\{(r_1)^2 - 1\} = 0.09/(-0.51) = -0.176$

Pengidentifikasian Model

Model MA: Misal MA(1) : $Y_t = e_t - \theta e_{t-1}$

$$\text{ACF :} \quad \rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta}{1+\theta^2}; & k = 1 \\ 0 \quad ; & k > 1 \end{cases}$$

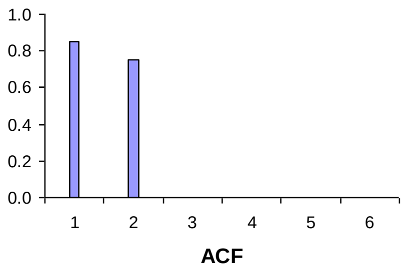


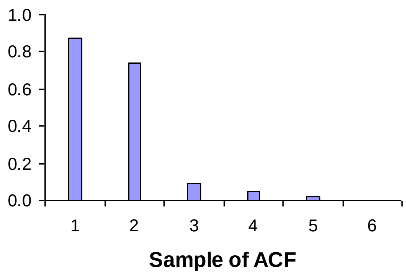


K IPB

MA(2) : $Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}$

$$\text{ACF}: \quad \rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & ;k=1 \\[2ex] \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & ;k=2 \\[2ex] 0 & ;k>2 \end{cases}$$





- Karena r_k berasal dari data contoh maka diperlukan galat baku bagi r_k yaitu S_{rk}.
- Sebagai nilai pendekatan : $S_{rk} = 1/\sqrt{n}$, dimana n adalah banyaknya data.
- Sehingga hipotesis H_0 : $\rho_k = 0$ ditolak jika $|\, r_k \,| > 2S_{rk}$ atau $|\, r_k \,| > 2/\sqrt{n}$.
- Misalnya, jika $|\, r_1 \,| > 2/\sqrt{n}$ dan $|\, r_k \,| < 2/\sqrt{n}$ untuk k = 2, 3, …, maka model tentatifnya adalah MA(1).

Model AR : Misalkan AR(1) : $Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t$

- ACF : $\rho_k = \phi^k$; $k = 1, 2, \ldots$
- Untuk model AR, ACF merupakan fungsi eksponensial sehingga ACF tidak dapat digunakan untuk menentukan nilai p dalam AR(p).
- PACF : untuk $k = 1 \rightarrow \rho_1 = \phi_{11}$

  untuk $k = 2 \rightarrow \rho_1 = \phi_{21} + \phi_{22}\rho_1$ .... (1)

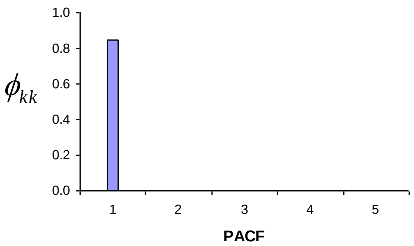
  $\rho_2 = \phi_{21}\rho_1 + \phi_{22}$ .... (2)

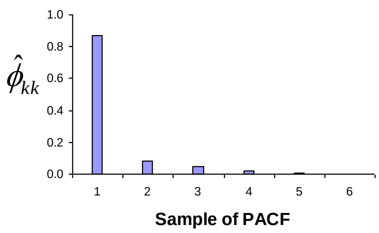
Berdasarkan persamaan (1) dan (2) $\rightarrow \phi_{22} = 0$.

Demikian juga $\phi_{33} = \phi_{44} = \ldots = 0$.

Sehingga PACF AR(1): $\phi_{kk} = \begin{cases} \rho_1 & ; \; k = 1 \\ 0 & ; \; k > 1 \end{cases}$

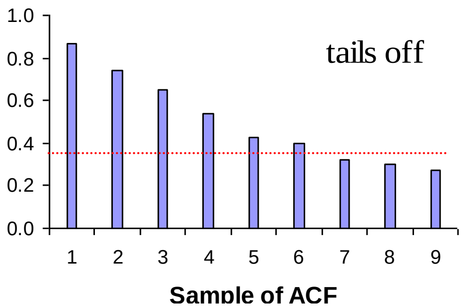
- Dengan demikian PACF dapat digunakan sebagai penentu nilai p dalam model AR(p).

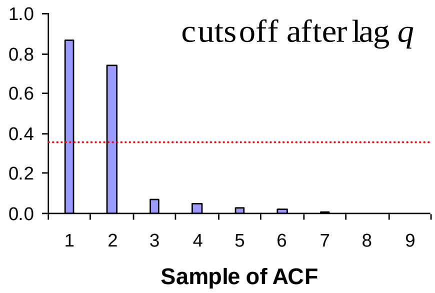




- Hipotesis $H_0 : \phi_{kk} = 0$ ditolak jika $|\hat{\phi}_{kk}| > 2/\sqrt{n}$.

Pengidentifikasian nilai *p* dan *q*



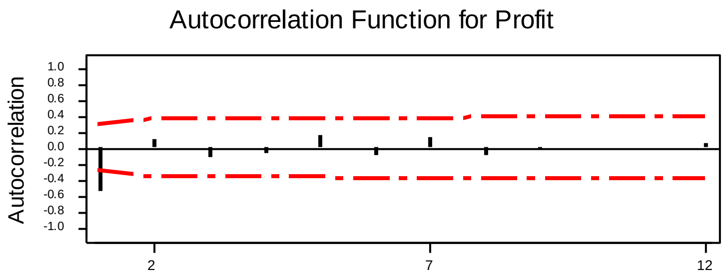


Identifikasi *p* dan *q* melalui nilai ACF dan PACF

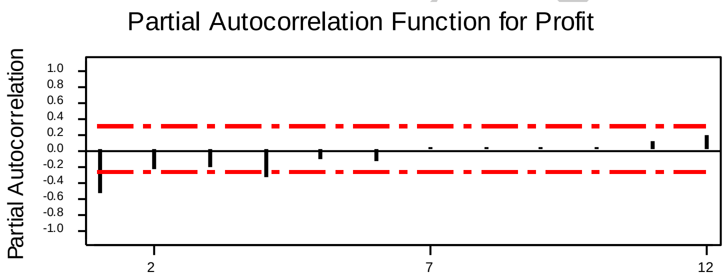
ACF	PACF	Model Tentatif
Cuts off after lag q	Tails off	MA(q)
Tails off	Cuts off after lag p	AR(p)
Cuts off after lag q	Cuts off after lag p	MA(q) atau AR(p), pilih model terbaik
Tails off	Tails off	ARMA(p, q) Cek pada berbagai kombinasi p dan q. Misal ARMA(1, 1), ARMA(1, 2), dsb. Kemudian pilih model terbaik.
Tails off (slowly)		Model tidak stasioner. Perlu proses pembedaan (*differencing*) terlebih dahulu hingga data menjadi stasioner.

KS - STK IPB

Output Minitab (*sample of* ACF, *sample of* PACF)



Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ
1	-0.53	-3.74	14.90	8	-0.09	-0.50	20.35
2	0.12	0.67	15.67	9	-0.00	-0.02	20.35
3	-0.10	-0.56	16.23	10	0.00	0.02	20.35
4	-0.07	-0.41	16.54	11	0.02	0.13	20.38
5	0.16	0.89	18.05	12	0.07	0.35	20.68
6	-0.10	-0.54	18.63				
7	0.14	0.75	19.81				

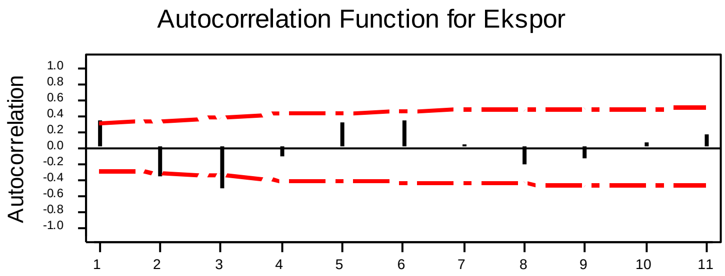


Lag	PAC	T	Lag	PAC	T
1	-0.53	-3.74	8	0.05	0.34
2	-0.23	-1.62	9	0.03	0.23
3	-0.22	-1.51	10	0.03	0.24
4	-0.34	-2.36	11	0.10	0.72
5	-0.13	-0.88	12	0.19	1.32
6	-0.13	-0.94			
7	0.03	0.22			

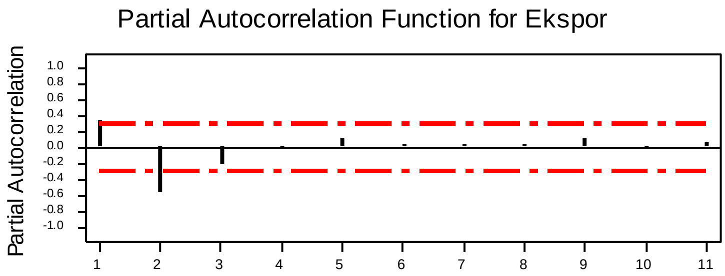
Kandidat Model untuk Data Profit :

Berdasarkan ACF → ARIMA(0, 0, 1)

Berdasarkan PACF → ARIMA(1, 0, 0)



Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ
1	0.34	2.33	5.79	8	-0.21	-0.91	42.76
2	-0.38	-2.33	13.08	9	-0.13	-0.55	43.77
3	-0.52	-2.88	27.08	10	0.06	0.23	43.96
4	-0.12	-0.56	27.81	11	0.15	0.64	45.43
5	0.32	1.53	33.49				
6	0.34	1.55	40.03				
7	0.04	0.16	40.11				



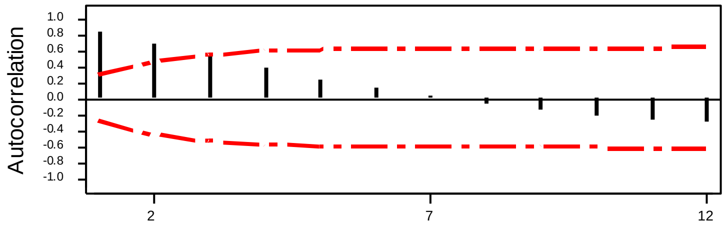
Lag	PAC	T	Lag	PAC	T
1	0.34	2.33	8	0.03	0.20
2	-0.56	-3.82	9	0.11	0.77
3	-0.21	-1.44	10	-0.00	-0.03
4	-0.00	-0.01	11	0.05	0.35
5	0.10	0.71			
6	0.04	0.27			
7	0.04	0.25			

Kandidat Model untuk Data Ekspor :

Berdasarkan ACF → ARIMA(0, 0, 3)

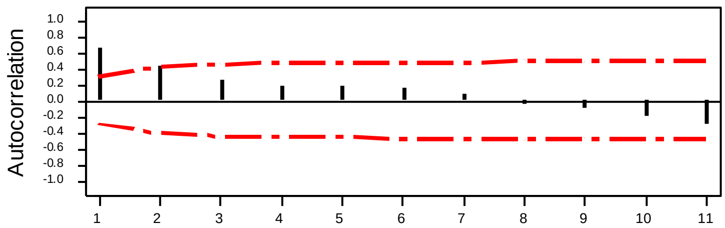
Berdasarkan PACF → ARIMA(2, 0, 0)

Autocorrelation Function for Impor



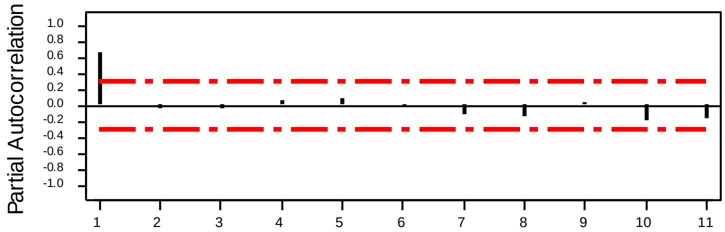
Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ
1	0.86	5.92	37.34	8	-0.06	-0.19	90.62
2	0.70	3.07	62.62	9	-0.14	-0.47	91.86
3	0.54	2.00	77.93	10	-0.23	-0.73	95.06
4	0.38	1.31	85.79	11	-0.28	-0.90	100.04
5	0.25	0.83	89.22	12	-0.30	-0.94	105.86
6	0.14	0.46	90.32				
7	0.04	0.13	90.41				

Autocorrelation Function for Impor(Lag1)



Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ
1	0.68	4.67	23.21	8	-0.05	-0.20	42.37
2	0.44	2.16	33.02	9	-0.09	-0.38	42.87
3	0.26	1.16	36.48	10	-0.19	-0.79	45.09
4	0.18	0.80	38.25	11	-0.28	-1.15	50.04
5	0.18	0.80	40.12				
6	0.17	0.74	41.79				
7	0.09	0.37	42.24				

Partial Autocorrelation Function for Impor(Lag1)



Lag	PAC	T	Lag	PAC	T
1	0.68	4.67	8	-0.14	-0.99
2	-0.05	-0.33	9	0.05	0.31
3	-0.04	-0.29	10	-0.19	-1.30
4	0.07	0.46	11	-0.17	-1.15
5	0.10	0.68			
6	-0.00	-0.00			
7	-0.11	-0.77			

Kandidat Model untuk Data Impor (Setelah Differencing):

Berdasarkan ACF → ARIMA(0, 1, 2)

Berdasarkan PACF → ARIMA(1, 1, 0)

Pustaka

1. Cryer, J.D. and Chan, K.S. 2008. *Time Series Analysis with Application in R*. Springer
2. Montgomery, D.C., et.al. 2008. *Forecasting Time Series Analysis* 2^{nd}. John Wiley
3. Abraham, B. and Ledolter, J. 2005. *Statistical Methods for Forecasting*. John Wiley
4. Pustaka lain yang relevan.

Latihan untuk Praktikum:

Bandingkan antara hasil penghitungan manual dengan output komputer:

1. Diketahui data : 3, 6, 2, 5, 4. Tentukan ACF (r_1, r_2, r_3) dan PACF ($\hat{\phi}_{11}, \hat{\phi}_{22}, \hat{\phi}_{33}$).
2. Diketahui data : 5, 2, 9, 7, 12, 17. Lakukan proses pembedaan ordo pertama pada data tersebut. Untuk data yang telah mengalami proses pembedaan tersebut tentukan ACF (r_1, r_2, r_3) dan PACF ($\hat{\phi}_{11}, \hat{\phi}_{22}, \hat{\phi}_{33}$).
3. Dari 100 data pengamatan diketahui bahwa r_1 = 0.39, r_2 = -0.31, r_3 = 0.18, r_4 = -0.15, dan r_5 = 0.13. Tentukan model ARIMA tentatif yang mungkin.

KS - STK IPB