Explicación Formal del Caso en el que un DAG tiene un Único Orden Topológico

Faiber Alonso Hernández Tavera
Bono para el parcial 2 del curso – Grafos
Diseño Y Análisis de Algoritmos
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia
Fecha de presentación: abril de 2023

Tabla de contenido

1. Objetivo del documento

Este documento tiene como finalidad lograr explicar usando teoría formal de grafos cuál es el caso y qué condiciones son necesarias para que un DAG (Grafo dirigido y acíclico) tenga un y solo un orden topológico. La explicación está acompañada de algunos ejemplos que verifican que lo descrito es cierto (aunque estos ejemplos no permiten demostrar que siempre se cumple) y de un contraejemplo, que tiene el objetivo de contribuir a la explicación por medio de un caso en el que no cumplir las condiciones señaladas resulta en un DAG con más de un orden topológico.

2. Introducción y Teoría

2.1 DAG

Un grafo dirigido y acíclico (DAG) corresponde a un tipo de gráfico particular que cumple con dos condiciones:

1. Sus aristas dirigen el ‘flujo’ de un nodo a otro de manera unidireccional, es decir, las conexiones entre todos los vértices del grafo, deben ser descritas por flechas con un solo cabezal, que indique un punto de partida y un punto de llegada.
2. No posee ciclos internos, es decir, no existe la posibilidad para ningún nodo del grafo que el flujo pueda salir de él y volver a llegar a él. La siguiente figura ilustra un grafo donde algunos de sus nodos forman un ciclo:

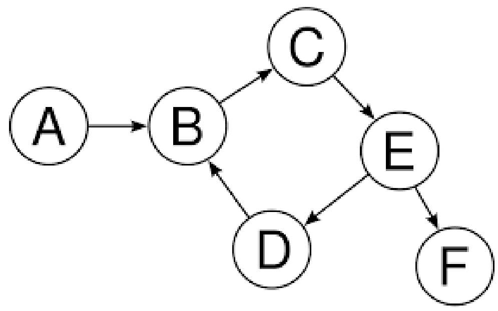


Figura 1. Ejemplo de grafo cíclico. Tomada de: https://study.com/academy/lesson/cyclic-acyclic-sparse-dense-graphs.html

Como se puede apreciar en la figura 1, los nodos B, C, D y E forman un ciclo en el grafo porque el flujo que sale de B, C, E o D, vuelve a llegar a ellos. Este grafo de la figura corresponde a un contraejemplo, donde no podría considerarse un Grafo dirigido y acíclico (DAG) porque solo cumple una de las dos condiciones (ser dirigido).

2.2 Orden Topológico

Un orden u ordenamiento topológico, consiste en un orden lineal de los vértices de un grafo de tal forma que, para cada arista dirigida: **(u, v)**, el vértice **u** viene antes de **v** en el ordenamiento (GeeksforGeeks, 2023).

Este ordenamiento puede no ser único, pues es válido desde que se cumplan las siguientes condiciones:

1. El **primer vértice** en el ordenamiento **SIEMPRE** es uno que no recibe flujo, es decir, cuyo **grado de entrada es 0.**
2. Un vértice solo puede mostrarse en una posición dada del ordenamiento si con anterioridad fueron puestos todos los nodos que permiten llegar hacia él por medio de aristas.
3. El grafo sobre el que se determina este orden no puede contener ciclos, pues no es posible definir un vértice predecesor y uno sucesor cuando el flujo forma circulos.
4. El grafo sobre el que se aplica debe ser dirigido, es decir, cada arista debe llevar el flujo hacia una sola dirección.

Las condiciones 3 y 4 son de alta relevancia, pues indican que, para aplicar el orden topológico, el grafo debe ser un **DAG.**

Los siguientes son ejemplos de todos los posibles órdenes topológicos que se pueden determinar sobre el grafo que se muestran en la siguiente figura:

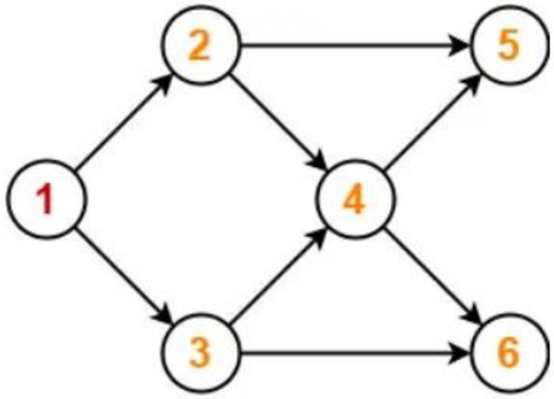


Figura 2. Ejemplo de un DAG para determinar sus órdenes topológicos. Tomada de: https://www.gatevidyalay.com/topological-sort-topological-sorting/

Posibles órdenes topológicos

- 1 2 3 4 5 6
- 1 2 3 4 6 5
- 1 3 2 4 5 6
- 1 3 2 4 6 5

3. ¿Cuándo un DAG tiene un Único Orden Topológico?

Una vez comprendida la teoria sobre los DAG y los ordenamientos topológicos, será más sencillo pensar en el particular caso donde un grafo dirigido y acíclico solo posee un orden topológico.

3.1 Respuesta y explicación

A un DAG se le puede determinar un único orden topológico en el caso en el que sobre ese grafo se pueda determinar un solo **camino Hamiltoniano**, el cual implica que sobre ese grafo se puede apreciar la propiedad de **Orden Estricto Total** en relación con el orden de precedencia de sus vértices. Un grafo sobre el que aplica la propiedad de Orden Estricto Total (Strict Total Order Relation), hace referencia a un grafo que permite definir sobre sus vértices un orden lineal a partir de una comparación basada en su orden de precedencia (cuál debe ir antes y cuál después) dentro del grafo.

Además, si se cumple que un grafo tiene un único camino hamiltoniano y, por lo tanto, un único orden topológico, se cumple que si se toma un par de vértices **(u, v)** existirá solo un camino en una dirección para llegar de **u a v ó de v a u**.

Para comprender mejor cómo la Relación Estricta de Orden Total aplica en el caso de un DAG y entender qué es un camino Hamiltoniano, a continuación, se va a presentar una profundización en estos temas.

Camino Hamiltoniano

Corresponde a un camino (path) de un grafo (compuesto por vértices y aristas) entre dos vértices diferentes cuya característica fundamental es que visita cada nodo del grafo exactamente una vez (Weisstein, s.f.). Un grafo que posee un camino hamiltoniano se considera un ‘grafo trazable’.

Encontrar un camino hamiltoniano en un grafo se clasifica como un problema NP-completo, pues la única forma de lograrlo es realizar una búsqueda exhaustiva sobre el grafo y se puede reducir a un problema NP en tiempo polinomial (P).

En el contexto de esta explicación, no es importante indagar en la forma en que se determina el camino hamiltoniano sino de qué forma se puede identificar este camino en un grafo dirigido y acíclico que contiene un único orden topológico.

Para entender de manera gráfica lo que es un camino hamiltoniano, considerese el siguiente grafo:

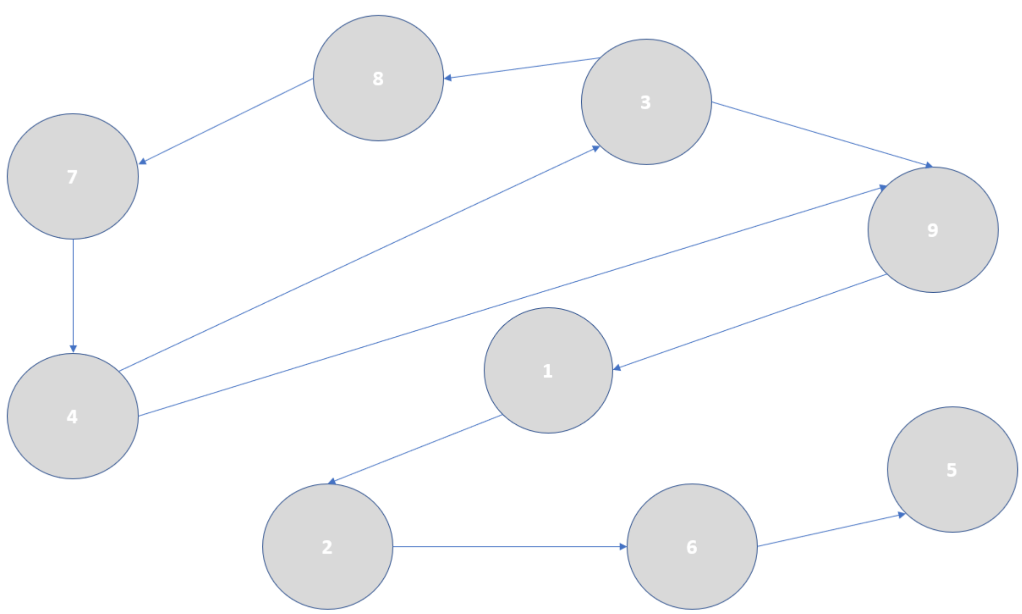


Figura 3. Ejemplo de grafo. Elaboración propia

Este grafo cuenta con la cualidad de ser dirigido y los siguientes son los posibles caminos hamiltonianos que se le pueden determinar:

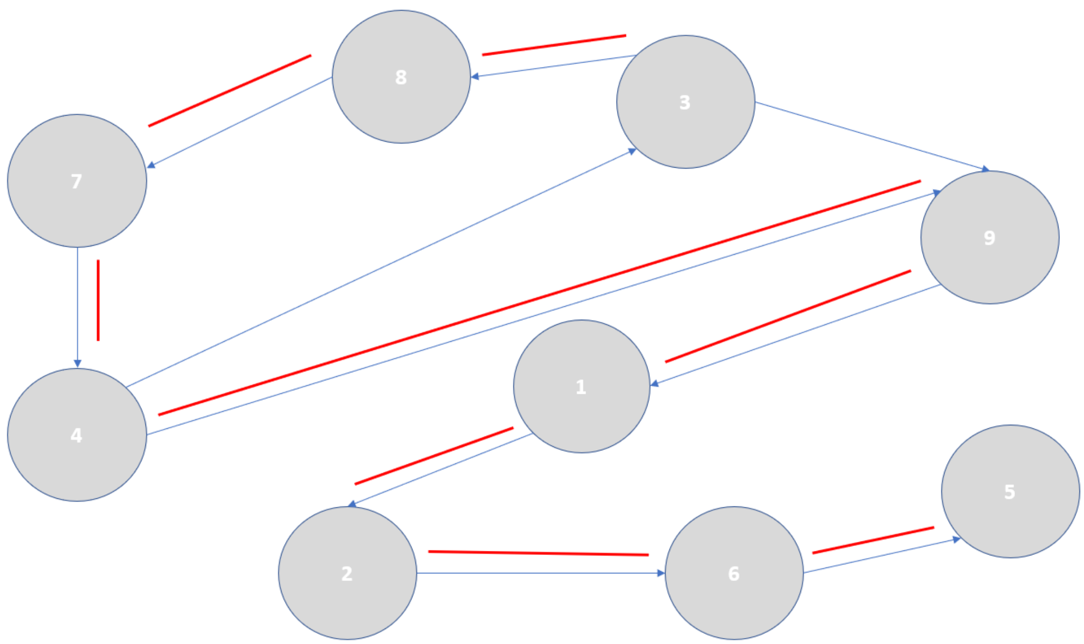


Figura 4. Ejemplo de camino hamiltoniano sobre el grafo. Elaboración propia

En este caso, el camino hamiltoniano estaría conformado por los nodos:

$$\mathbf{3 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 5}$$

Y se considera camino hamiltoniano porque visita todos los vértices del grafo exactamente una vez.

El segundo camino hamiltoniano posible es el siguiente:

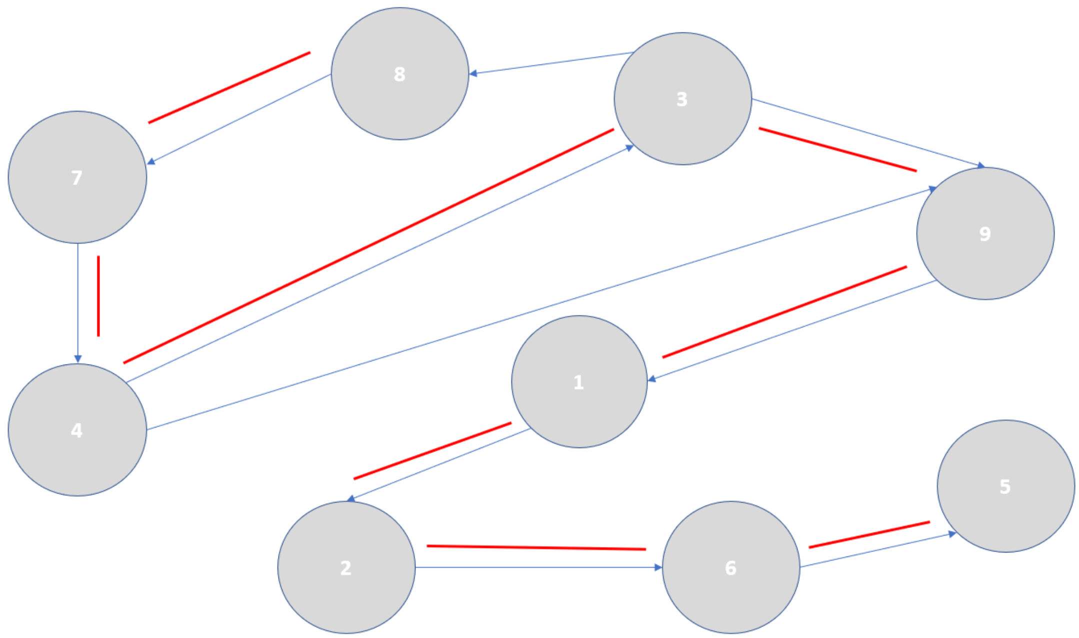


Figura 5. Otro camino hamiltoniano sobre el grafo. Elaboración propia

En este caso, el camino hamiltoniano estaría conformado por los nodos:

$$\mathbf{8 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 9 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 5}$$

Y se considera camino hamiltoniano porque visita todos los vértices del grafo exactamente una vez.

Estos dos son caminos hamiltonianos posibles sobre el grafo, sin embargo, hay que notar que este grafo **no es un DAG**, pues contene un ciclo generado por los vértices 3, 8, 7 y 4

Ahora, considerese una modificación al grafo descrito anteriormente:

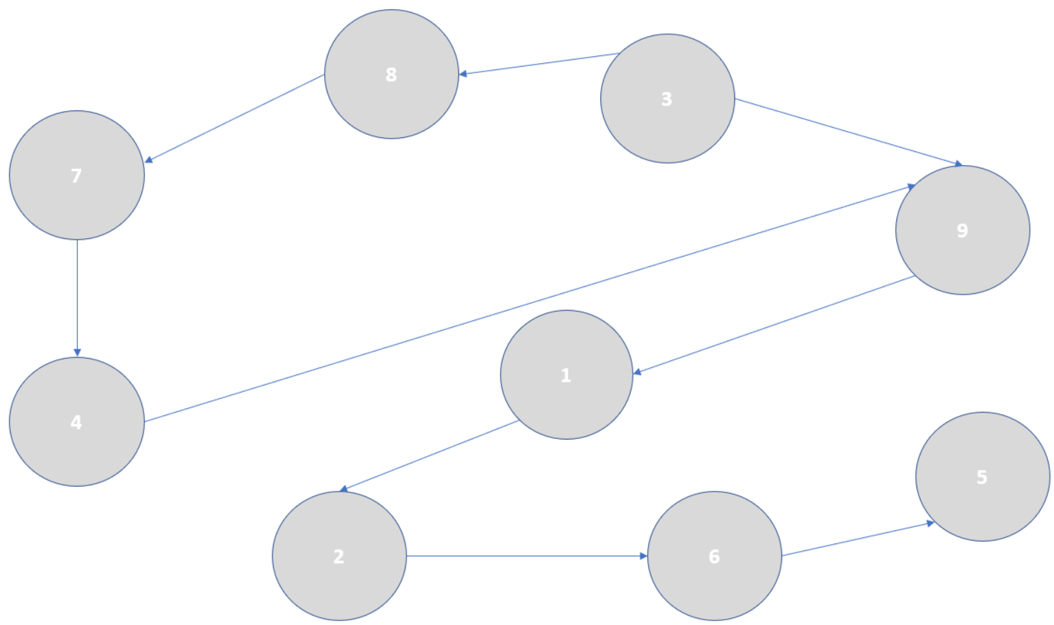


Figura 6. Modificación hecha al grafo. Elaboración propia

En este grafo, ya no existen ciclos y aún sigue siendo dirigido, por lo tanto, podría considerarse un DAG. Ahora, si se intenta hallar todos los posibles caminos hamiltonianos, la única posibilidad será:

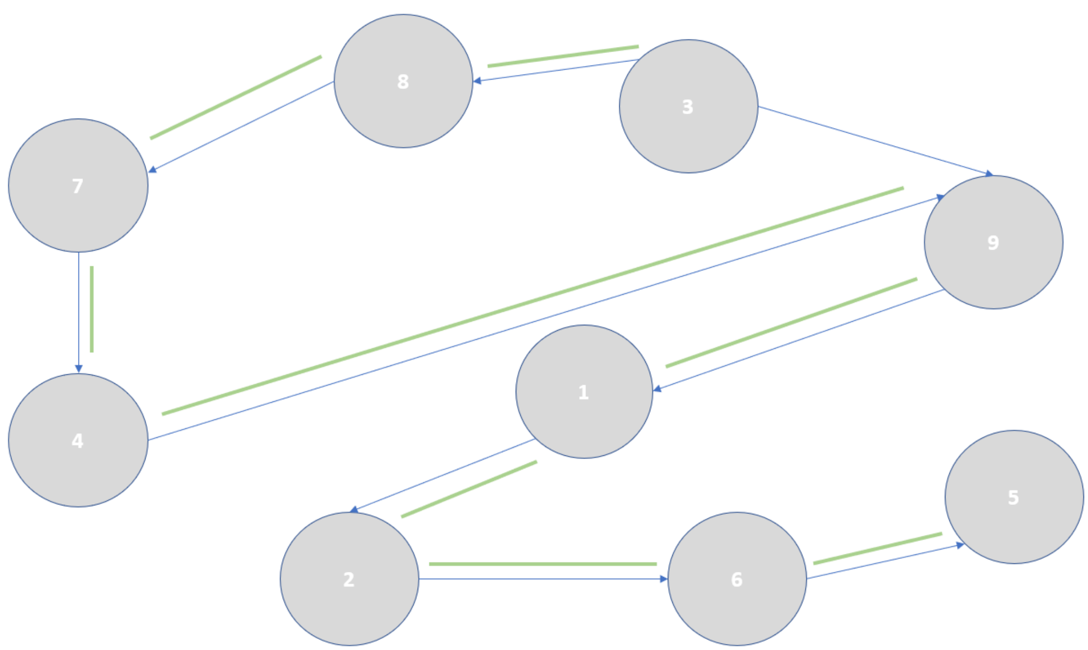


Figura 7. Único camino hamiltoniano posible en el grafo. Elaboración propia

Pues, es la única forma existente de visitar todos los vértices del grafo exactamente una vez es seguir el siguiente orden topológico:

$$\mathbf{3 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 5}$$

Y aunque no todos los vértices tienen un solo predecesor (el 9 tiene 2), aún así solo se puede determinar un orden topológico que termina por corresponder a un camino hamiltoniano según las cualidades que lo caracterizan.

Con el ejemplo mostrado, es posible entender cómo se ve un camino hamiltoniano sobre un grafo dirigido y acíclico y también se puede comprender que <u>cuando solo existe un camino hamiltoniano sobre un DAG, es porque solo existe un orden topológico sobre él</u>.

En caso que se pudiera hallar más de un camino hamiltoniano distinto en un DAG, sería porque no existe una forma única de recorrer todos los vértices del grafo respetando el orden de precedencia que un orden topológico requiere.

Orden Total Estricto

Para entender el concepto, se va a plantear un caso puntual sobre una relación:

Un orden total estricto se cumple en una relación '<' (menor que) sobre un conjunto S si la relación satisface las siguientes características:

1. Es Irreflexiva: $a < a$ no se cumple para ningún: $a \in S$
2. Es asimétrica: $si\ a < b$, entonces: $b < a$ no se cumple
3. Es Transitiva: $a < b$ y: $b < c$ implica que: $a < c$

Además, sobre esa relación se cumple que exactamente una de las siguientes tres posibilidades se puede cumplir:

- $a < b$
- $b < a$
- $a = b$

(Esta información teórica fue tomada como referencia de la página Wolfram MathWorld, al final del documento se encuentra referenciada.)

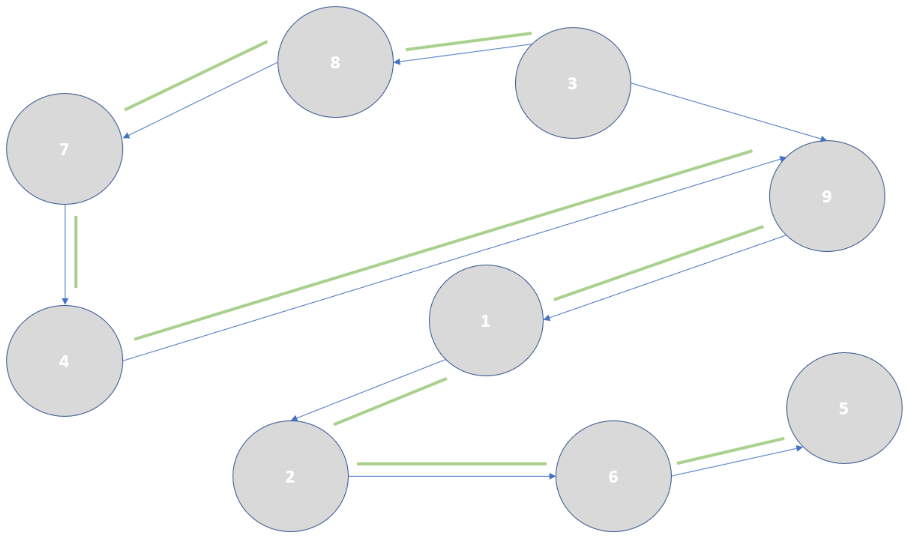
Esta descripción de lo que es un orden total sobre una relación menor que, se puede extrapolar a cualquier tipo de relación aplicada sobre un conjunto.

En el caso de esta explicación, se considera que el conjunto S hace referencia a todos los vértices de un DAG dado.

¿Cómo se ve el Orden Total Estricto en un DAG?

Teniendo en cuenta la teoría descrita, un Orden Total Estricto se puede ver en un DAG como la **desigualdad estricta en el orden topológico** de cada uno de sus vértices, es decir, como la posibilidad de tomar cualquier par de vértices diferentes en ese grafo y ser capaz de compararlos para decir si uno va antes o después del otro sin posibilidad que tengan el mismo orden de precedencia.

Recordemos el ejemplo descrito anteriormente:



Si tomamos dos vértices, por ejemplo, el 2 y el 5, se puede establecer una comparación en cuanto a su orden de precedencia dentro del grafo. En este caso:

$$2 < 5$$

Pues el orden de precedencia del vértice 2 es menor al del vértice 5, es decir, el vértice 2 es visitado primero en el camino hamiltoniano y en el único orden topológico posible. Al ser una relación total estricta, quiere decir que siempre un conjunto de vértices del grafo podrá ser comparado en cuanto a su precedencia y esta precedencia no puede ser igual para ningún par.

El orden lineal estricto sobre el único orden topológico del grafo sería el siguiente:

$$\mathbf{3 < 8 < 7 < 4 < 9 < 1 < 2 < 6 < 5}$$

3.2 Ejemplos y Contraejemplo

Ejemplo 1:

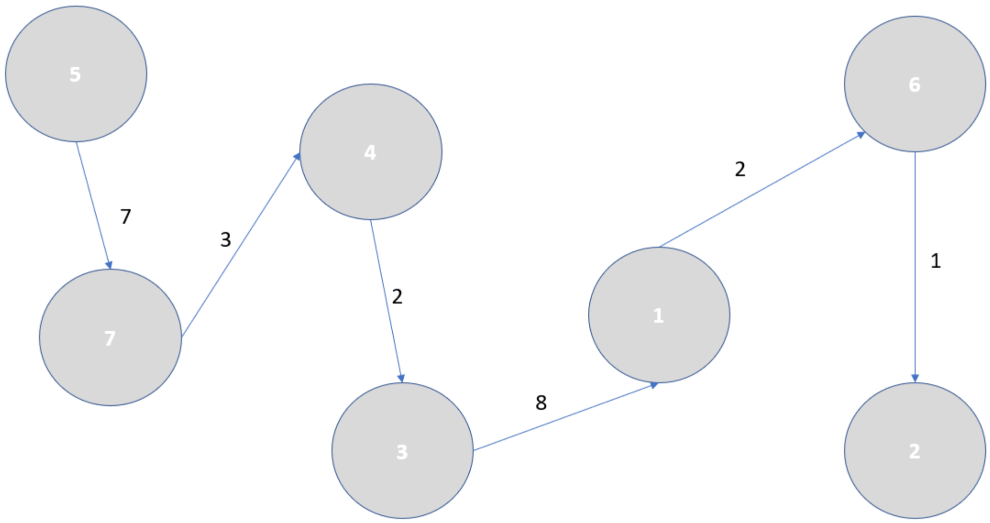


Figura 8. Ejemplo de grafo 1 (G1). Elaboración propia

Este primer ejemplo de grafo (G1) nos permite visualizar la particularidad descrita para el caso de los DAG que tienen solo un orden topológico, para entenderlo mejor, se va a determinar el único orden topológico posible.

Orden topológico para G1

En este caso, la única forma que existe de ordenar de manera lineal los vertices del grafo, de tal forma que para cada arista (u, v) el vértice u vaya primero que el vértice v es la siguiente:

$$5 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 2$$

Este orden topológico cumple con describir también el único camino hamiltoniano que existe para el grafo. En el caso hipotético de añadir más aristas, por ejemplo, una del vértice 4 al 6 o del 4 al 1, todavía habría solo un camino hamiltoniano y por lo tanto un único orden topológico sobre el DAG.

Ejemplo 2:

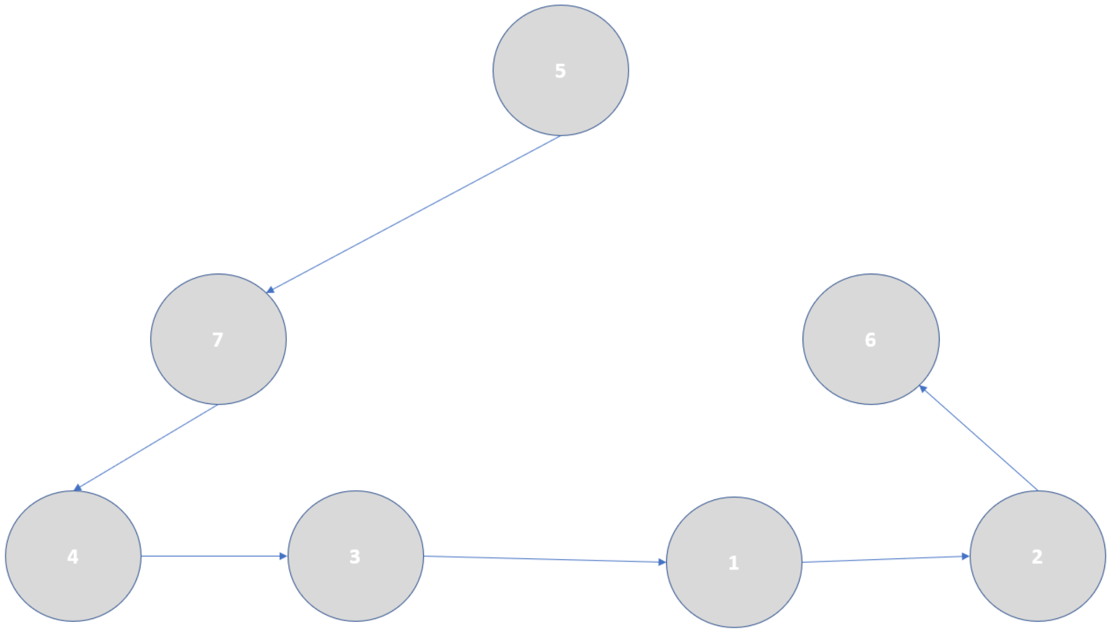


Figura 9. Ejemplo de grafo 2 (G2). Elaboración propia

Orden topológico para G2

En este caso, la única forma que existe de ordenar de manera lineal los vertices del grafo, de tal forma que para cada arista (u, v) el vértice u vaya primero que el vértice v es la siguiente:

$$5 \rightarrow \mathbf{7} \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 6$$

Nuevamente se puede apreciar que este DAG cumple la propiedad de contar con un solo orden topológico debido a que solo se puede determinar un camino hamiltoniano sobre él. Si se añaden más aristas con el cuidado de no formar ciclos y aún así solo hay un camino posible para pasar exactamente una vez por cada vértice, es porque existe solo un camino hamiltoniano y, por tanto, un único orden topológico.

Ejemplo 3:

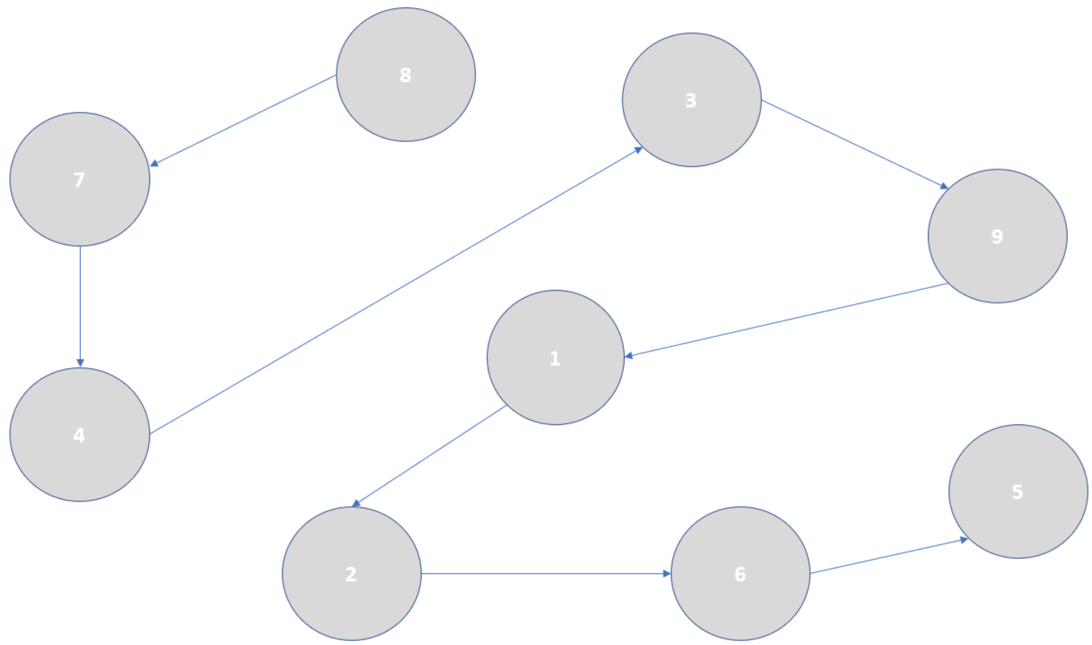


Figura 10. Ejemplo de grafo 3 (G3). Elaboración propia

En este ejemplo, de nuevo es sencillo poder visualizar el único camino que pasa por cada vértice una vez y, por tanto, el único orden topológico presente. Sin embargo, aún si se añaden las aristas que se quieran, si se conservan las características de un DAG y no se generan más caminos hamiltonianos, es porque seguirá habiendo un solo orden topológico.

Contraejemplo:

Considerese un grafo compuesto por los nodos: A, B, C, D, E.

Y tengase en cuenta las siguientes proposiciones:

p: El grafo es un DAG

q: Existe un solo camino Hamiltoniano sobre el grafo

El resultado a la pregunta: **¿Existe un único orden topológico sobre el DAG?** se responde luego de realizar la operación lógica:

$$p \wedge q$$

Consideremos un primer caso:

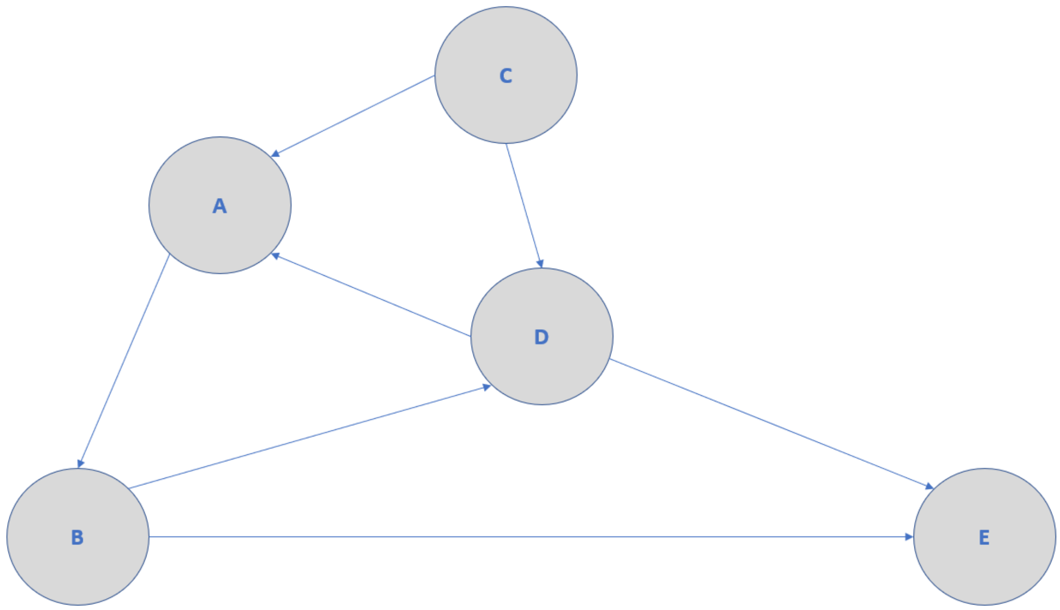


Figura 11. Ejemplo de grafo. Elaboración propia

Si se pudieran describir diferentes caminos para llegar de C a E estos serían:

1. **C → A → B → D → E**
2. **C → D → A → B → D → E**

Sin embargo, estos dos caminos no son hamiltonianos porque en el camino 2, el vértice D es visitado 2 veces. Por tanto, el camino 2 tampoco sería un orden topológico porque se debe respetar el orden de precedencia y, por ejemplo, el vértice A no puede ir antes y después del vértice D a la vez.

Se podría pensar que, porque el camino 1 es hamiltoniano y es el único posible, solo existe un camino topológico, pero hay que notar que se incumple la condición ***p*** porque los vértices A, B, D forman un ciclo y, por tanto, el grafo no es un DAG.

Si se quita el ciclo al revertir la dirección de la arista (B, D), el grafo correspondería a un DAG:

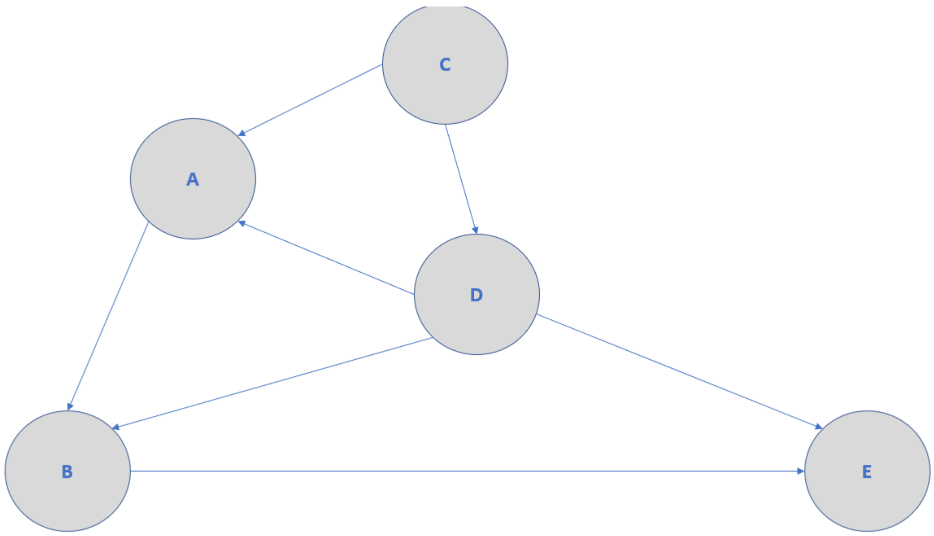


Figura 12. Ejemplo de grafo modificado. Elaboración propia

y el único camino hamiltoniano sería el siguiente:

$$\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{E}$$

Por tanto, se cumplen las condiciones p, q y el resultado de operar $p \wedge q$ es: **True,** es decir**, sí existe un único orden topológico.**

Análisis del contraejemplo

Si se intenta buscar una forma de generar más de un camino hamiltoniano en el último ejemplo, no será posible sin que se forme un ciclo entre los vértices del grafo. Incluso si se añaden más vértices y más aristas, si se desea que haya más de una forma de recorrer los nodos en un DAG, no será posible sin visitar más de una vez un mismo nodo. <u>Esto demuestra que, si se quiere hallar un solo orden topológico en un DAG, es imprescindible que todos sus vértices puedan ser recorridos una sola vez cada uno por un solo camino posible (Camino Hamiltoniano).</u>

4. Conclusión

Para concluir este documento, es importante retomar la idea principal que se basa en explicar en qué caso un DAG tiene un único orden topológico. La respuesta a esa pregunta implica dos conceptos matemáticos: El Camino Hamiltoniano y el Orden Total Estricto de una relación sobre un conjunto. En específico, para que un DAG tenga un único orden topológico, se necesita que un único Camino Hamiltoniano (Hamiltonian path) pueda ser determinado sobre él y que la relación de precedencia de los nodos pueda cumplir con la propiedad de ser un Orden Total Estricto, el cual considera como conjunto, todos los vértices del grafo.

5. Referencias consultadas

GeeksforGeeks. (2023). Topological Sorting. *GeeksforGeeks*. Tomado el 26 de abril de 2023 de https://www.geeksforgeeks.org/topological-sorting/

Weisstein, Eric W. (s.f.). *Hamiltonian Path*. Wolfram MathWorld. Tomado el 26 de abril de 2023, de https://mathworld.wolfram.com/HamiltonianPath.html

Sakharov, A. (s.f.). *Strict Order*. Tomado el 29 de abril de2023, de https://mathworld.wolfram.com/StrictOrder.html