Elementos de Teoría de la Computación
Clase: Álgebra de Boole

Depart. de Teoría de la Computación - Facultad de Informática
Universidad Nacional del Comahue

2021

Pablo Kogan
pablo.kogan@fi.uncoma.edu.ar

Contenido

¿Qué vimos?

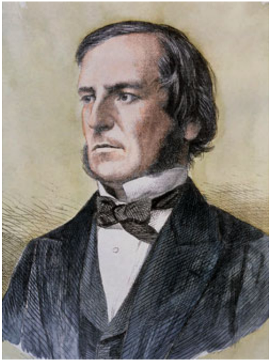
Estructuras Algebraicas:

- Operación Binaria
- Asociativa
- Elemento Identidad
- Inverso
- Conmutativa
  - Semigrupo
  - Monoide
  - Grupo: Subgrupos - Isomorfismo de grupos

HOY: Álgebra de Boole

¿Cuántas y qué tipo de compuertas lógicas son necesarias en un circuito electrónico?

Álgebra de Boole



George Boole
(2 de Noviembre de 1815 -
8 de Diciembre de 1864)

Matemático, lógico y filósofo inglés. Fue el precursor de una rama de las matemáticas que permite responder al interrogante planteado, entre muchos otros.

Inventó lo que ahora es conocido como *Lógica Booleana* que es la base de las actuales computadoras digitales. El trabajo de Boole es considerado fundamental para la electrónica de las computadoras actuales.

Álgebra de Boole

Definición

Un Álgebra de Boole es un conjunto B sobre el cual están definidas dos operaciones binarias: $+$ y $\cdot$, una operación unaria $'$, y se distinguen dos elementos: 0 y 1 tal que las siguientes propiedades se verifican para todo $x, y, z \in B$:

$1a.$	$x + y = y + x$	$1b.$	$x \cdot y = y \cdot x$	conmutativa
$2a.$	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$2b.$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	asociativa
$3a.$	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	$3b.$	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	distributiva
$4a.$	$x + 0 = x$	$4b.$	$x \cdot 1 = x$	identidad
$5a.$	$x + x' = 1$	$5b.$	$x \cdot x' = 0$	complemento

Álgebra de Boole

- La formalización de una estructura de álgebra de Boole nos ayuda a focalizarnos en las características esenciales comunes a todos los ejemplos de álgebra de Boole. Esto nos permite utilizar tales características para probar otras nuevas.

- Denotaremos a un álgebra de Boole mediante la notación

$$\left[B, +, \cdot, ', 0, 1\right]$$

Álgebra de Boole - Ejemplo

Sea $B = \{0, 1\}$ y definamos operaciones binarias $+$ y $\cdot$ sobre B como $a + b = max(a, b)$ y $a \cdot b = min(a, b)$.
Podemos ilustrar las operaciones mediante las siguientes tablas:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

La operación unaria $'$ puede ser definida mediante:

$'$	
0	1
1	0

La estructura $[B, +, \cdot, ', 0, 1]$ es un Álgebra de Boole.

Álgebra de Boole - Ejemplo (cont.)

La estructura $[B, +, \cdot, ', 0, 1]$ es un Álgebra de Boole.

Podemos verificar las 10 propiedades chequeando todos los casos posibles (algunas son más simples que otras, por ejemplo *conmutatividad* de las operaciones).

Para la propiedad 2b, la *asociatividad* de $\cdot$, podemos ver que:

$$
\begin{aligned}
(0 \cdot 0) \cdot 0 = 0 \cdot (0 \cdot 0) = 0 \\
(0 \cdot 0) \cdot 1 = 0 \cdot (0 \cdot 1) = 0 \\
(0 \cdot 1) \cdot 0 = 0 \cdot (1 \cdot 0) = 0 \\
(0 \cdot 1) \cdot 1 = 0 \cdot (1 \cdot 1) = 0 \\
(1 \cdot 0) \cdot 0 = 1 \cdot (0 \cdot 0) = 0 \\
(1 \cdot 0) \cdot 1 = 1 \cdot (0 \cdot 1) = 0 \\
(1 \cdot 1) \cdot 0 = 1 \cdot (1 \cdot 0) = 0 \\
(1 \cdot 1) \cdot 1 = 1 \cdot (1 \cdot 1) = 1
\end{aligned}
$$

Ejercicio: Verificar el resto de las propiedades.

Álgebra de Boole - Propiedades

Teorema

En todo álgebra de Boole se verifica la propiedad de idempotencia de la operación $+$:

$$x + x = x$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
x + x &= (x + x) \cdot 1 && \text{(identidad)} \\
&= (x + x) \cdot (x + x') && \text{(complemento)} \\
&= x + (x \cdot x') && \text{(distributiva)} \\
&= x + 0 && \text{(complemento)} \\
&= x && \text{(identidad)}
\end{aligned}$$

Álgebra de Boole - Propiedades

Importante

Aunque comparte muchas de las propiedades indicadas, la aritmética de los enteros (con suma y producto) **NO** es un álgebra de Boole.

¿Por qué?

La propiedad de idempotencia $x + x = x$ no se verifica para los enteros, excepto para el 0.

Álgebra de Boole - Propiedades

Cada propiedad en la definición de álgebra de Boole tiene su propiedad dual.

La propiedad dual se obtiene intercambiando $+$ y $\cdot$, y 1 con 0.

Por lo tanto, cada vez que es probada una nueva propiedad P sobre álgebra de Boole, inmediatamente sabemos que la propiedad dual de P también se verifica.

Por ejemplo, la propiedad dual de la idempotencia de la operación $+$:

$$x \cdot x = x$$

también se verifica en toda álgebra de Boole.

Álgebra de Boole - Propiedades

Teorema

En todo álgebra de Boole se verifica la propiedad de idempotencia de la operación $\cdot$:

$$x \cdot x = x$$

Demostración: Queda como ejercicio.. ;-)

Ayuda: la prueba es similar a la prueba de la idempotencia de la operación $+$.

Álgebra de Boole - Propiedades

Para todo elemento x de un álgebra de Boole B, el elemento x' es llamado el complemento de x. El complemento de x satisface:

$$x + x' = 1 \quad \text{y} \quad x \cdot x' = 0$$

De hecho, x' es el único elemento con estas dos propiedades..

Teorema sobre la Unicidad de los Complementos

Para todo x de un álgebra de Boole, si existe un elemento x_1 tal que

$$x + x_1 = 1 \quad \text{y} \quad x \cdot x_1 = 0$$

entonces $x_1 = x'$

Álgebra de Boole - Más Propiedades

Propiedades

Sea $[B, +, \cdot, ', 0, 1]$ un álgebra de Boole. Para todo $x, y \in B$ se verifica que:

$(x')' = x$	(doble negación)
$(x + y)' = x' \cdot y'$	(ley de De Morgan)
$(x \cdot y)' = x' + y'$	(ley de De Morgan)

Álgebra de Boole - Ejemplo

Para cualquier conjunto S, $\wp(S)$ bajo las operaciones de unión, intersección y complemento constituye un álgebra de Boole.

Formalmente,

$$\left[\wp(S), \cup, \cap, ', \varnothing, S\right]$$

es un álgebra de Boole.

Ejercicio: Sea $S = \{1, 2\}$, entonces $\wp(S) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Definir las operaciones $\cup$, $\cap$ y $'$ que constituyen el álgebra de Boole $[\wp(\{1, 2\}), \cup, \cap, ', \varnothing, \{1, 2\}]$

Un poco de humor...

Álgebra de Boole y Reticulados

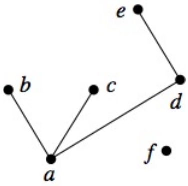
Un álgebra de Boole también puede definirse como un conjunto parcialmente ordenado con ciertas propiedades adicionales.

¿Se acuerdan de Reticulados? Ahora los volveremos a visitar..

Cotas Inferiores y Cotas Superiores - Recordatorio

Definición

Sea $(B, \preccurlyeq)$ un orden parcial. Para todo par de elementos $x, y \in B$, definimos como la Menor Cota Superior de x e y a un elemento z tal que $x \preccurlyeq z$, $y \preccurlyeq z$ y si existe algún elemento z^* con $x \preccurlyeq z^*$ e $y \preccurlyeq z^*$, entonces $z \preccurlyeq z^*$.

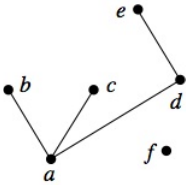


- $MCS(d, e) = e$
- $MCS(a, d) = d$
- $MCS(c, d) =$ No existe
- $MCS(f, f) = f$

Cotas Inferiores y Cotas Superiores - Recordatorio

Definición

Sea $(B, \preccurlyeq)$ un orden parcial. Para todo par de elementos $x, y \in B$, definimos como la Mayor Cota Inferior de x e y a un elemento w tal que $w \preccurlyeq x$, $w \preccurlyeq y$ y si existe algún elemento w^* con $w^* \preccurlyeq x$ y $w^* \preccurlyeq y$, entonces $w^* \preccurlyeq w$.

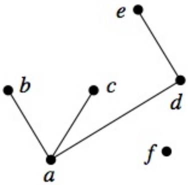


- $MCI(a, d) = a$
- $MCI(e, d) = d$
- $MCI(e, c) = a$
- $MCI(c, f) =$ No existe

Reticulados - Recordatorio

Definición

Un Reticulado es un conjunto parcialmente ordenado donde todo par de elementos x e y tienen una *Menor Cota Superior*, denotada mediante $x + y$ y una *Mayor Cota Inferior*, denotada mediante $x \cdot y$.



- ¿Es un Reticulado? NO.
- Por ejemplo, no existe $a \cdot f$ ni $b + c$, entre otros casos.

Reticulados - Recordatorio

Observación

- La *Menor Cota Superior* es también conocida como Supremo.
- La *Mayor Cota Inferior* es también conocida como Ínfimo.

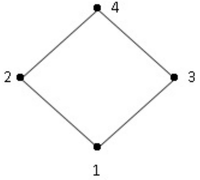
Por lo tanto, una definición alternativa de Reticulado es:

Definición

Un Reticulado es un conjunto parcialmente ordenado donde todo par de elementos x e y tiene un *Supremo*, denotado mediante $x + y$ y tiene un *Ínfimo*, denotado mediante $x \cdot y$.

Reticulados - Ejemplo

El siguiente diagrama de Hasse representa un reticulado



Para comprobarlo, deberíamos verificar que todo par de elementos tiene Ínfimo (denotado '$\cdot$') y Supremo (denotado '$+$').

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
4	1	2	3	4

$+$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	4	4
3	3	4	3	4
4	4	4	4	4

Reticulados - Propiedades

Recordemos algunas propiedades de interés de los Reticulados:

Propiedad

En todo reticulado se verifica que:

- $x \cdot y = x$ *si y solo si* $x \preccurlyeq y$.
- $x + y = y$ *si y solo si* $x \preccurlyeq y$.

Reticulados - Propiedades

Recordemos más propiedades de los Reticulados:

Propiedades

Sea L un reticulado y sean $a, b, c \in L$. Entonces

$1a.$	$a + a = a$	$1b.$	$a \cdot a = a$
$2a.$	$a + b = b + a$	$2b.$	$a \cdot b = b \cdot a$
$3a.$	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$3b.$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
$4a.$	$a + (a \cdot b) = a$	$4b.$	$a \cdot (a + b) = a$

Observemos la similitud con algunas de las propiedades del Álgebra de Boole..

Reticulados Distributivos

Recordemos que también vimos Reticulados Distributivos..

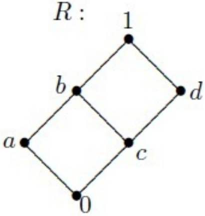
Definición

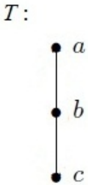
Decimos que L es un Reticulado Distributivo si cualesquiera sean $x, y, z \in L$ se verifica que:

- D1 $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
- D2 $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

Reticulados Distributivos - Recordatorio

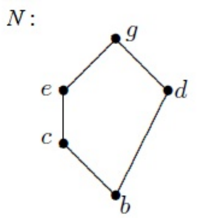
Los siguientes son ejemplos de Reticulados Distributivos

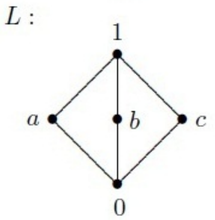




Reticulados No Distributivos

Los siguientes son ejemplos de Reticulados NO Distributivos





L no es distributivo ya que:

$$\begin{array}{rcccl} a \cdot (b + c) & = & a \cdot 1 & = & a \\ (a \cdot b) + (a \cdot c) & = & 0 + 0 & = & 0 \end{array}$$

y, por lo tanto, $a \cdot (b + c) \neq (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Ejercicio: Analizar por qué *N* no es distributivo.

Reticulados y Álgebra de Boole

¿Ya tenemos todas las propiedades necesarias para un Álgebra de Boole?

NO

Reticulados Complementados

Nos faltaría capturar la noción de *complemento* presente en el Álgebra de Boole..

Definición

Decimos que L es un Reticulado Complementado si existe un *mínimo elemento* 0 y un *máximo elemento* 1 y para todo $x \in L$ existe $x' \in L$ tal que:

$$x + x' = 1 \quad \text{y} \quad x \cdot x' = 0$$

Reticulados y Álgebra de Boole

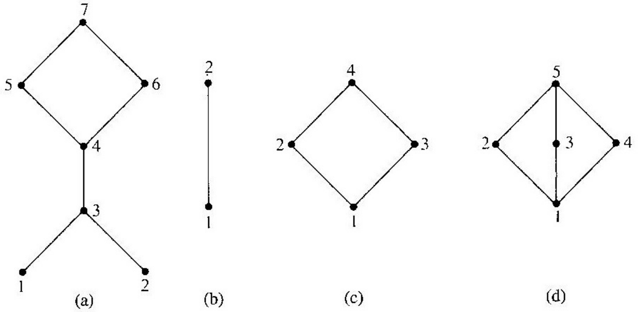
Ahora sí podemos establecer la conexión entre Álgebra de Boole y Reticulados..

Definición

Sea L un reticulado Complementado y Distributivo. Entonces L constituye un Álgebra de Boole.

Reticulados y Álgebra de Boole - Ejemplos

¿Cuáles de los siguientes diagramas de Hasse de órdenes parciales NO representan álgebras de Boole?



- (a) no es reticulado y (d) es reticulado no distributivo.
- Ejercicio: Definir las operaciones necesarias para mostrar que (b) y (c) son álgebras de Boole.

La estructura de las estructura :)

Álgebra Universal

Un álgebra A es un par $[S, F]$, donde S es un conjunto no vacío de elementos y F es un conjunto de operaciones $f_i^{a_i}$, donde $f_i^{a_i} : S^{a_i} \rightarrow S$, siendo a_i un entero no negativo. $f_i^{a_i}$ asigna a cada tupla $(x_1, \ldots x_{a_i})$ de elementos de S, un valor $f_i^{a_i}(x_1, \ldots x_{a_i})$.

Observaciones:

- F puede tener más de una operación.
- Si $a_i = 1$ la operación f_i^1 se dice unaria.
- Si $a_i = 2$ la operación f_i^2 se dice binaria.
- Si $a_i = 3$ la operación f_i^3 se dice ternaria.
- Si $a_i = 0$ la operación f_i^0 se considera constante y es un elemento de S.

Bibliografía

Mathematical Structures for Computer Science. Capítulo 7.
J. Gersting
Sixth edition
2007

Estructuras de Matemáticas Discretas para la Computación. Capítulo 7.
B. Kolman, A. Busby and S. Ross
3ra. Edición
1997

¿Preguntas?
Algunos AVISOS

F.A.Q. Finales-Coloquio

- ¿Cuál es la diferencia entre un final y un coloquio?
  La cantidad preguntas pero no la CALIDAD en las preguntas.
- ¿Qué tomamos en un final o coloquio?
  Definiciones formales, que deben ser ejemplificadas con casos positivos y negativos. Demostraciones dadas o dejadas como ejercicio para el lector. Desafíos.
- ¿Cuándo se rinde el coloquio?
  Cuando se toma el recuperatorio del Segundo Parcial.
- ¿Cuántas veces se puede rendir un coloquio?
  Solamente una vez. Si desaprueban el coloquio, luego rinden el final regular.
- ¿Cuál es la modalidad de los finales y coloquios virtuales?
  Escrito 2h + Oral 30')

F.A.Q. Finales-Coloquio

- ¿Es necesario Tener el Final de Elemnetos de Álgebra?
  Es requisito para anotarse en el Final. Es requisito para pasarles la nota del Coloquio. Si promocionan les guardamos la nota hasta la última mesa de marzo del 2021.
- ¿Es necesario ir a las CONSULTAS?
  ¡¡¡SIIIIIIII!!!
- ¿Cómo es la metodología para las mesas a demanda en ETC?
  El estudiante se contacta con la cátedra. El estudiante viene a la MAYORIA de las consultas para rendir la materia. La cátedra anota a los estudiantes al final SOLAMENTE si vinieron a las consultas.
- ¿Más Preguntas?

F.A.Q. Condicionales

Condicionales

Quienes no tengan el cursado de Elementos de álgebra y cursan o promocionan. Les mantenemos el cursado hasta Marzo (o comienzo primer cuatrimestre) de 2021. Es importante que sepan que,

- Tienen que aprobar el final de Álgebra antes, y se tienen que anotar al final de ETC en calidad de Libres.
- El cursado de la materia es necesario para cursar *Estructura de Datos* (2do. año - 1er. cuatrim.) y *Teoría de la Computación I* (2do. año - 1er. cuatrim.)
- El final de la materia es necesario para cursar *Teoría de la Computación II* (2do. año - 2do. cuatrim.)

AVISOS

- Por favor, completen la encuesta. Es anónima. NO hay PREMIOS, pero nos va a ayudar a mejorar :) http://encuestas.fi.uncoma.edu.ar/ (cuando esté disponible)
- El parcial está programado para el Martes 17 de Noviembre a las 14hs.
- El coloquio y el recuperatorio están programados para el Martes 1ro de Diciembre a las 14hs.
- Generalmente ponemos carteles en la página con los horarios de consulta para los finales. Alternativamente, pueden escribir a: pablo.kogan@fi.uncoma.edu.ar

Rindan pronto el final :)