

指数函数的fpga实现及算法优化

刘 恒,钟 俊,刘 辉
(安徽职业技术学院,安徽 合肥 230011)

【摘 要】 采用切比雪夫多项式逼近指数函数,并用modelsim进行仿真验证。针对“积之和”的函数形式,采用分布式算法对计算过程进行优化,提高运算速度。用流水线方式实现运算过程。通过缩小LUT设计规模,减小芯片面积,采用并行运算进一步提高运算速度。

【关键词】 函数逼近;分布式算法(DA);并行运算;查找表(LUT)

Fpga Implementation and Algorithm Optimization of Exponential Function

Liu Heng, Zhong Jun, Liu Hui

(Anhui Vocational and Technical College, Hefei 230011, China)

【Abstract】 Exponential function is widely used. Chebyshev polynomial is used to approximate the exponential function, and the simulation is carried out with Modelsim. For the function form of "sum of products", the distributed algorithm is used to optimize the calculation process and improve the operation speed. Pipeline method is used to realize the operation process. By reducing the design scale of LUT, the chip area is reduced. The parallel algorithm is adopted to further improve the operation speed.

【Key words】 function approximation; distributed algorithm (DA); parallel operation; lookup table (LUT)

〔中图分类号〕X924.3

〔文献标识码〕A

〔文章编号〕1674-3229(2022)03-0039-03

0 引言

在超越函数中,指数函数的应用十分广泛。实现指数函数的方法有很多,包括查表法、旋转迭代、泰勒展开等^[1]。查表法需要较大存储空间,特别是高精度情况下,资源耗费比较明显。旋转迭代依赖于流水线技术,精度要求较高时,需要较多的时钟周期完成一次求解。泰勒展开涉及到大量的乘、除法器,运算速度不高。本文在切比雪夫多项式函数逼近的基础上进行优化设计,进一步减少fpga资源消耗,提高运算速度。

1 切比雪夫多项式和函数逼近

1.1 切比雪夫多项式

切比雪夫逼近以切比雪夫多项式为基础,切比

雪夫多项式可以写成如下形式^[2]:

$$Q_k(x) = \cos(k \times \arccos(x)) (-1 \leq x \leq 1) \quad (1)$$

虽然 $Q_k(x)$ 是类三角函数形式,但经过变形之后,可以将式(1)变为多项式的标准形式,部分多项式可以写成如下形式:

$$Q_0(x) = 1$$

$$Q_1(x) = x$$

$$Q_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$Q_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$Q_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$Q_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$Q_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

·

·

·

(2)

〔收稿日期〕2022-06-05

〔基金项目〕2020年度安徽高校自然科学研究项目“基于物联网技术下智能变电站测量设备的研究及应用”(KJ2020A1035)

〔作者简介〕刘恒(1982-),男,硕士,安徽职业技术学院讲师,研究方向:嵌入式技术、数字信号处理。

切比雪夫多项式符合如下迭代规则:

$$Q_k(x) = 2xQ_{k-1}(x) - Q_{k-2}(x) \quad \forall k \geq 2 \quad (3)$$

1.2 函数逼近

切比雪夫函数逼近可以写成:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c(k)Q_k(x) \quad (4)$$

所有切比雪夫多项式具有相互正交的特点,因此得到的双向变换都是独一无二的。使用式(4)切比雪夫函数逼近要明显优于使用泰勒函数逼近(式(5))。

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{N-1} p(k)(x - x_0)^k \quad (5)$$

原因如下:首先,式(4)是非常接近于(但不严格等于)函数逼近这一非常复杂问题的最优解,而且能够保证最大误差最小,也就是 l_∞ 范数的最大值 $\max(f(x) - \hat{f}(x)) \rightarrow \min$;其次,式(4)的剩余项 $M \ll N$ 的剪除多项式仍能给出最大/最小逼近,也就是说,如果从一开始就以 M 为目标计算,那么较短的和仍能给出切比雪夫逼近;最后,在同等精度的要求下,式(4)相比泰勒逼近能够用更少的系数进行计算。

用切比雪夫系数计算的16位多项式量化应采用如下的公式:

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &= 1.00002494 + 0.99875705x + \\ &0.50977984x^2 + 0.14027504x^3 + 0.06941551x^4 = \\ &(32769 + 32727x + 16704x^2 + 4597x^3 + 2275x^4)/32768 \end{aligned} \quad (6)$$

需要保证 $0 \leq x \leq 1$,如果输入不在这一范围之内,就需要用恒等式 $e^{sx} = (e^x)^s$ 进行缩放。

其中 $s = 2^k$ 是2的幂,在完成指数计算后还要继续进行 k 次平方运算。

2 分布式算法及优化

2.1 分布式算法基础

在具体的硬件设计过程中,积之和可以采用分布式算法来实现^[3]。根据函数表达式,计算一个函数值需要 N 个mac(乘累加)。采用流水线技术能够加快运算速度,但是也十分有限。如果速度优先,可以采用并行乘法器,其代价是占用大量的乘法单元,造成资源浪费。如果已知每一项的系数,乘积项就可以写成常数乘法的形式。这是分布式算法

的实现基础。分布式算法实质上是用查找表取代乘法器。在速度与资源占用上,相比传统的乘法器实现方式,分布式算法更胜一筹^[4]。

分布式算法原理:

$$f = \langle h, x \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] \times x[n] = h[0]x[0] + h[1]x[1] + \dots + h[N-1]x[N-1] \quad (7)$$

假设 $h(n)$ 已知, $x[n]$ 未知。无符号分布式算法假设 $x[n]$ 可以写成下列表达式: $x[n] = \sum_{a=0}^{A-1} 2^a \times x_a[n]$, $x_a[n] \in [0, 1]$,其中 $x_a[n]$ 是 $x[n]$ 的第 a 位。

内积 f 可以表示为:

$$f = \langle h, x \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] \times \sum_{a=0}^{A-1} 2^a \times x_a[n] \quad (8)$$

改变求和顺序,可以表示为:

$$\begin{aligned} f &= h[0](x_{A-1}[0]2^{A-1} + x_{A-2}[0]2^{A-2} + x_0[0]2^0) \\ &\quad + h[1](x_{A-1}[1]2^{A-1} + x_{A-2}[1]2^{A-2} + x_0[1]2^0) \\ &\quad \dots \\ &\quad + h[N-1](x_{A-1}[N-1]2^{A-1} + x_{A-2}[N-1]2^{A-2} \\ &\quad + x_0[N-1]2^0) \\ &= (h[0]x_{A-1}[0] + h[1]x_{A-1}[1] + h[N-1]x_{A-1}[N-1])2^{A-1} \\ &\quad + (h[0]x_{A-2}[0] + h[1]x_{A-2}[1] + h[N-1]x_{A-2}[N-1])2^{A-2} \\ &\quad \dots \\ &\quad + (h[0]x_0[0] + h[1]x_0[1] + h[N-1]x_0[N-1])2^0 \end{aligned} \quad (9)$$

可以表示为:

$$f = \sum_{a=0}^{A-1} 2^a \times \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \times x_a[n] = \sum_{a=0}^{A-1} 2^a \times f(h(n), x_a(n)) \quad (10)$$

可以用一个LUT来实现 $f(h(n), x_a(n))$ 的相关运算。首先计算得到一个LUT, LUT由 2^N 个元素构成。当输入为一个 N 位的输入向量 $x_a = [x_a[0], x_a[1], \dots, x_a[N-1]]$ 时,可以用LUT查找到相应的输出,输出为 $f(h(n), x_a(n))$ 。每次查找的结果乘相应的权值并累加。在 N 次查询结束之后,得到函数值 f ,如图1所示。

2.2 分布式算法优化

(1) LUT简化设计

LUT的规模与输入系数 N 成指数关系^[5]。如果 N 过大,可以将单个 N 输入的LUT拆分成多个规模较小的查找表相加。这一改进可以极大地降低资

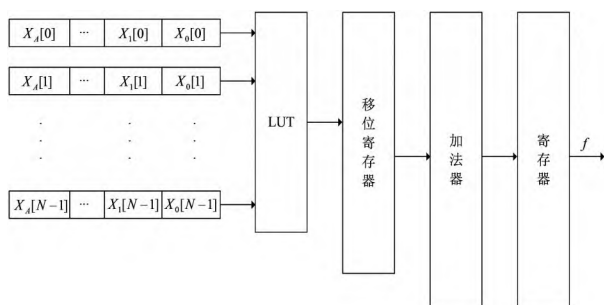


图1 无符号da原理图

源消耗,并且几乎没有影响运算速度。假定内积的长度为 LN , 可以表示为:

$$f = \langle h, x \rangle = \sum_{n=0}^{LN-1} h(n)x(n) \quad (11)$$

拆分 LN 项的和,变为 L 个独立并行的 N 阶DA的LUT,结果如下:

$$f = \langle h, x \rangle = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{N-1} h[Nl+n]x[Nl+n] \quad (12)$$

如图2所示,实现1个 $4N$ 的DA设计,还需要3个加法器。表的规模从1个 $2^{4N} \times A$ 的LUT缩小为4个 $2^N \times A$ 的表。考虑到fpga硬件资源,取 $L=2$, $N=3$, 或 $L=1$, $N=6$ 。

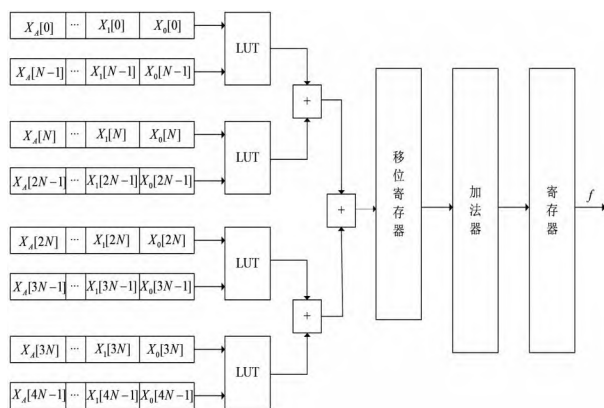


图2 简化LUT原理图

(2)并行运算

采用并行计算可以加快DA体系结构的运算速度,这一改进必然会占用更多的资源^[6]。DA体系结构如果按照串行方式进行运算,在每个时钟周期只能完成1bit数据的接收处理。采用并行计算可以同时接收处理 M bit数据,运算速度能够加快 M 倍。图3为实现最大速度所需的字并行体系结构。最大速度要求为每个位向量 $x_a[n]$ 准备一个单独的LUT(各个LUT完全一样)。速度提升 M 倍的代价是资源同等程度翻倍。在fpga硬件实现过程中,如果 N 为4个或8个,这一改进就极具意义。

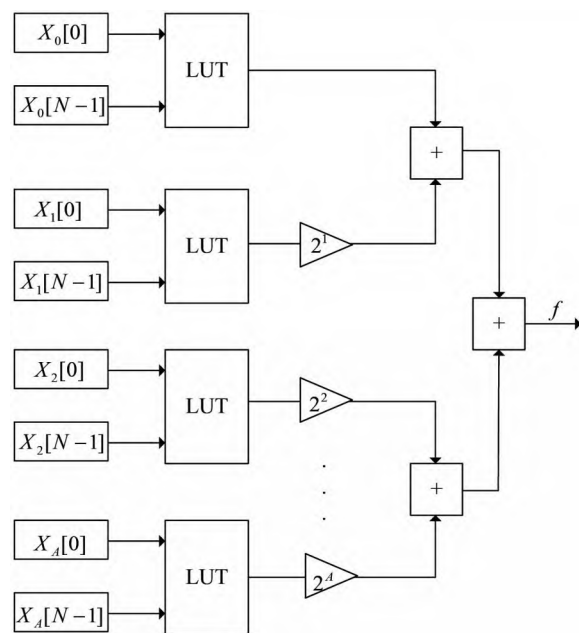


图3 并行运算原理图

3 优化仿真结果

在本实验中,采用quartus12.0进行综合验证,芯片为altera公司的CYCLONE系列。利用Modelsim 6.5软件进行Verilog仿真。优化结果如表1所示。Modelsim仿真如图4所示。

表1 优化前后性能比较(量化位数16bit)

	LE		频率(MHz)		Gatecount	
	优化前	优化后	优化前	优化后	优化前	优化后
1	2140	1740	90.18	138.92	13689	10190
2	1864	1324	92.09	158.72	14299	10608



图4 Modelsim仿真结果

4 结语

本文用切比雪夫多项式对指数函数进行了函数逼近,并用Modelsim对结果进行了仿真验证。在函数的实现过程中,采用分布式算法进行优化。在优化过程中,通过采用多个低维度查找表和并行运算,达到减少芯片面积和提高运算速度的效果。这一方法同样适用于其他超越函数的实现过程,具有普遍意义。

(下转第51页)

4 总结

对煤矿主井井架建立 ANSYS 模型进行模态分析,在模态分析基础上施加工作载荷和按八级抗震场地要求转换后的 EL Centro 波,为研究其抗震性能,将 EL Centro 波分别单独施加于 X 方向、Y 方向及按 1:0.85:0.65 比例综合施加于 X、Y、Z 方向。

分析结果发现,地震波单独施于 X 方向时,应力结果最大值为 17.3Mpa,位移为 5.3mm,最大位移方向为 X 方向。加载于 Y 方向得到的应力结果最大值为 21.7Mpa,位移为 9.4mm,最大位移方向为 Y 方向。地震波在 Y、X、Z 方向按 1:0.85:0.65 综合施加于井架结构,得到应力值最大为 23.8Mpa,位移最大值为 7.4mm,最大位移方向为 X 方向。井架设计安全,抗震性能强。

通过地震波单独施加于 X 和 Y 方向上结果比较,单独施加于 Y 方向时,应力和位移都比单独施加于 X 方向上结果大,从井架结构分析,井架结构在 X 方向轴对称,Y 方向不对称且不平衡。综合施加于 X、Y、Z 方向应力结果比单独施加于 X、Y 方向大,但相比材料屈服应力结果较小,井架设计安全,安全系数高。但在本研究中,井架地脚支撑设为固定全约束,在分析中没有考虑地震波对地面的影响及对井架地脚稳定性影响。本研究验证了井架结构抗震性能的安全性,但井架安全系数过大。本结果可为井架简化设计提供参考,也为下一步进行缩比例尺寸实体抗震实验提供参考。

[参考文献]:

- [1] 战玉宝,杨永腾,宋庆军,等.井架结构力学性能的有限元分析[J].煤矿机械,2006,27(11):60-62.
- [2] 田利,董旭,周梦瑶,等.输电塔—线体系抗震研究综述[J].世界地震工程,2020,36(3):202-212.
- [3] 孙引忠,王巍.主井井架的可靠性校核及强化措施[J].煤矿机械,2013,34(2):178-179.
- [4] 李春广,神会存.煤矿立井井架力学行为有限元分析[J].煤矿机械,2007,28(8):61-62.
- [5] 董小庆.基于 ANSYS 的石油钻机井架冲击载荷响应分析[J].机电工程技术,2019,48(7):76-77.
- [6] 刘中胜,杨阳,李春,等.基于 TMD 控制的风力机结构抗震研究[J].机械强度,2019,41(4):785-791.
- [7] 许仁波,段晶晶,邓荆江,等.K 型井架有限元仿真分析及检测方案优化[J].石油机械,2014,42(1):14-17.
- [8] 曹万林,武海鹏,周建龙.钢-混凝土组合巨型框架柱抗震研究进展[J].哈尔滨工业大学学报,2019,51(12):1-12.
- [9] 刘国庆.强震工况下矿山井架动力学机理研究与抗震分析[D].淮南:安徽理工大学,2014.
- [10] 中华人民共和国建设部主编.GB50011-2010[S].建筑抗震设计规范.北京:中国计划出版社,2005,12.
- [11] 邢磊,贾宝新,邢锐.地震作用下钢框架高层结构中的抗震性能研究[J].地震工程学报,2019,41(6):1482-1487.
- [12] 杨璐,陈红,岳永志,等.反映谱法与时程分析法抗震分析对比[J].沈阳工业大学学报,2016,38(3):331-336.
- [13] 李晓莉,邹雨鹤,王东升.强震下拱式体系桥梁震害特征及抗震研究[J].西北地震学报,2018,34(2):33-43.
- [14] 李娟,刘国庆.煤矿主井井架结构动力学研究[J].煤矿机械,2014,35(6):50-51.

(上接第 41 页)

[参考文献]

- [1] 吉立新.基于组合-移位的指数运算 FPGA 实现方法[J].信息工程大学学报,2011,12(5):569-573.
- [2] 于苗.基于双曲切比雪夫逼近的聚类方法研究及应用[D].太原:太原科技大学,2021.
- [3] 姜恩华,陈得宝,窦德召.数字信号处理课程中的卷积运算教学探索[J].廊坊师范学院学报(自然科学版),2015,15(1):123-125.

- [4] 姜恩华,朱旋,陈东华.基于 CCS 软件的线性卷积研究及其应用[J].廊坊师范学院学报(自然科学版),2021,21(3):21-25.
- [5] 凌春丽,刘云飞,姜黎黎,等.二维滤波器分布式算法结构的改进与实现[J].中北大学学报,2012,33(2):154-158.
- [6] 朱效效.基于优化 DA 算法的高阶滤波器的设计及其 FPGA 实现[D].淮南:安徽理工大学,2016.