ДВУХКРИТЕРИАЛЬНАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

DOI 10.24411/2072-8735-2018-10237

Носков Сергей Иванович,
Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Россия, **tonygpx@yandex.ru**

Рязанцев Антон Игоревич,
Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Россия, **tonygpx@yandex.ru**

Ключевые слова: *векторная оптимизация, многокритериальное линейное программирование, многокритериальный симплекс-метод, транспортная задача, целевая функция, множество Парето, точечная характеризация.*

Цель. **Рассматривается многокритериальная транспортная задача. Она представляет собой транспортную задачу с дополнительной целевой функцией и заключается в поиске плана перевозки однородной, взаимозаменяемой продукции из пунктов производства в пункты потребления. В качестве таких функций рассматриваются минимизация расходов в денежной форме на перевозку и максимизация степени важности в соответствии с приоритетами перевозок.** ***Результаты.*** **Многокритериальная транспортная задача представляется в виде задачи многокритериального линейного программирования. Для ее решения используется многокритериальный симплекс-метод. Он основывается на нахождении множества паретовских вершин и последующем построении множества Парето. Каждое решение из множества Парето равноправно по отношению к другим.** ***Заключение.*** **Показан способ решения многокритериальной транспортной задачи. Указывается способ, позволяющий оперировать "полномочным представителем" множества Парето, а именно, точечная характеризация множества Парето.**

Информация об авторах:
Носков Сергей Иванович, *д.т.н., профессор кафедры "Информационные системы и защита информации", Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Россия*
Рязанцев Антон Игоревич, *аспирант кафедры "Информационные системы и защита информации", Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Россия*

Для цитирования:
Носков С.И., Рязанцев А.И. Двухкритериальная транспортная задача // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2019. Том 13. №2. С. 59-63.

For citation:
Noskov S.I., Ryazantsev A.I. (2019). Two-criteria transport problem. *T-Comm*, vol. 13, no.2, pp. 59-63. (*in Russian*)

Введение

Транспортная задача – классическая задача линейного программирования [1-3]. Она подразумевает нахождение оптимального плана перевозки однородной, взаимозаменяемой продукции при условии минимизации затрат на перевозку. При добавлении дополнительных условий задачи она становится многокритериальной.

Основной целью данной статьи является описание способа решения транспортной задачи с дополнительной целевой функцией.

Постановка задачи

Рассмотрим многокритериальную транспортную задачу с двумя целевыми функциями [4]. В качестве таковых используются следующие: минимизация затрат на перевозки и максимизация степени важности перевозок, задаваемой экспертами.

Известны:

A_i – пункты производства продукции с объемами a_i ($i=\overline{1,m}$).

B_j – пункты потребления с величинами спроса b_j ($j=\overline{1,n}$).

Известны расходы на перевозку единицы продукта из i-ого пункта в j-ый – c_{ij}. Или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Известна также степень важности перевозки единицы продукта из i-ого пункта в j-ый – h_{ij}. Или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix}$$

Количество продукции, отправленное из i-ого пункта в j-ый – x_{ij}. Это неизвестная величина, которую требуется найти. Количество перевезенной продукции неотрицательно: $x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Представим многокритериальную транспортную задачу в виде задачи многокритериального линейного программирования и найдем ее решение, основываясь на работах [5, 6].

Требуется найти экстремальные значения показателей расходов и степени важности:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_{ij} \to \max. \tag{2}$$

Линейные ограничительные условия, накладываемые на элементы решения:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & (3) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & (4) \\ x_{ij} \ge 0. & (5) \end{cases}$$

$$i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$$

При таких ограничительных условиях объем продукции, имеющейся в пунктах производства, должен совпадать с объемом продукции, требуемым в продуктах потребления. Это соответствует замкнутой транспортной модели.

Открытые транспортные модели подразумевают условия следующего вида:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \\ x_{ij} \ge 0. \end{cases}$$

Либо:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge a_i, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \\ x_{ij} \ge 0. \end{cases}$$

$$i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$$

Эти ограничительные условия справедливы в двух случаях: когда в пунктах производства может остаться неотправленный товар и когда товара не хватает, чтобы обеспечить им пункты потребления в полном объеме.

Открытые транспортные модели могут быть приведены к замкнутой. Приведение основывается на введении фиктивного пункта потребления, либо фиктивного пункта производства [7].

Множество векторов x, удовлетворяющих условиям (3)-(5), обозначим через X.

Решение задачи

Введем обозначения:

$$L^1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$L^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_{ij} \to \max.$$

при ограничениях (3)-(5).

Приведем критерии к однородному виду, путем преобразования критерия L^1 [7]:

$$\widetilde{L}^1 = -L^1.$$

Как правило, не существует элемента x^*, такого, что

$$\widetilde{L}^1(x^*) \geq \widetilde{L}^1(x), L^2(x^*) \geq L^2(x), \forall x \in X.$$

Это соответствует условию эффективности по Парето и позволяет решение исходной задачи представить, как множество Парето-оптимальных решений $Q \subseteq X$. Решения из множества Парето являются равнозначными, т.к. решение из множества Парето-оптимальных решений нельзя улучшить по одной из целевых функций так, чтобы не ухудшить его по другой [8-10]:

$$x^* \in Q \Leftrightarrow (\forall x \in X, x \neq x^*)\neg((L^k(x) \geq L^k(x^*)) \wedge (\exists_k L^k(x) > L^k(x^*)),$$
$$k = \overline{1,l},$$

где l – количество целевых функций в задаче.

Чтобы получить множество Парето в двухкритериальной транспортной задаче, будем использовать многокритериальный симплекс-метод [6].

Многокритериальный симплекс-метод основан на следующем:

1. S – множество паретовских вершин многогранника X. Справедлива теорема: множество паретовских вершин S связно.
2. R – паретовская выпуклая комбинация паретовских вершин (грань многогранника X). Множество Парето Q является их объединением.
3. Алгебраический метод – программа отсутствия мажорирования:

Пусть $x^* \in X$:

$$x^* \in Q \Leftrightarrow f = 0,$$

$$x^* \in X \setminus Q \Leftrightarrow f > 0,$$

где

f – решение задачи линейного программирования:

$$f = \max_{\widetilde{X}} \sum_{i=1}^{l} p_i, \text{ или,}$$

при $l = 2$:

$$f = p_1 + p_2 \to \max_{\widetilde{X}},$$

где

$$\widetilde{X} = \{(x,l) \in R^{n+l} \mid x \in X, L^k(x) - p_k \geq L^k(x^*), p_k \geq 0\},$$
$$k = \overline{1,l}.$$

Алгоритм многокритериального симплекс-метода [2-4]:

1. Формирование пустого множества паретовских вершин S.
2. Нахождение первой паретовской вершины $x^1 \in S$. x^1 – решение задачи линейного программирования с целевой функцией:

$$\widetilde{L}^1(x) + L^2(x) \to \max.$$

3. Проверка на паретовость всех соседних к x^1 точек в соответствии с программой отсутствия мажорирования.
4. Точки, оказавшиеся паретовскими, включаются в множество паретовских точек S и, в свою очередь, на паретовость проверяются точки, соседние к ним.
5. В работе [6] также показан способ построения множества паретовских точек S путем перебора узлов η-мерной ε-сети на интервале (0, 1):

$$\mu \in R^{\eta},$$
$$\mu_z \in (0,1),$$
$$0 < \mu_1 < \ldots < \mu_{\eta} < 1,$$
$$z = \overline{1,\eta}.$$

Решение задачи линейного программирования

$$\max L^{\mu}(x) = \max(\mu\widetilde{L}^1(x) + (1-\mu)L^2(x))$$

для каждого из узлов μ_z представляет собой паретовскую вершину.

6. Формирование множества Парето Q на основе множества паретовских вершин S. Множество Парето можно представить в критериальном пространстве $L(Q)$. Пусть ν – количество найденных паретовских точек, т.е. точек, входящих во множество S. Упорядочим их по первой компоненте: $L(S) = (L_1, L_2, \ldots, L_{\nu})$.

Множество Q, представленное в пространстве $L(Q)$ ограничено минимальной выпуклой оболочкой паретовских вершин $L(X)$:

$$L(Q) = \bigcup_{t=1}^{\nu-1} U(L_t, L_{t+1}),$$

где $U(L_t, L_{t+1})$ — выпуклая оболочка векторов L_t, L_{t+1}.

Минимальная выпуклая оболочка включает ребра $U(L_t, L_{t+1})$, прообразами которых являются множества векторов $x \in X$, удовлетворяющих ограничениям:

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \lambda L_t^1 + (1-\lambda)L_{t+1}^1, \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_{ij} = \lambda L_t^2 + (1-\lambda)L_{t+1}^2, \\ \lambda \geq 0,\ \lambda \leq 1. \end{cases}$$

Объединим эти условия с линейными ограничительными условиями, накладываемыми на элементы решения замкнутой транспортной модели:

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \lambda L_t^1 + (1-\lambda)L_{t+1}^1, \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_{ij} = \lambda L_t^2 + (1-\lambda)L_{t+1}^2, \\ \lambda \geq 0,\ \lambda \leq 1, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

где

$$i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$$

Пусть O^t – множество векторов $x \in R^n$, которые удовлетворяют полученному набору условий.

Тогда множество Q можно в общем виде записать, как:

$$Q = \bigcup_{t=1}^{v-1} O^t$$

Множество Парето предполагает равнозначность найденных решений. Для выделения единственного решения из множества Парето может быть использован способ точечной характеризации [5].

При выделении единственного решения учитывается паретовское множество Q целиком. Точечная характеризация $\tilde{x}$ отражает конфигурацию множества Парето Q.

Алгоритм точечной характеризации состоит в следующем:

1. Получение выпуклой комбинации всех точек из множества паретовских вершин S с равными весами:

$$x_0 = \frac{1}{v}\sum_{x \in S} X$$

2. Получение искомой точки $\tilde{x}$ из множества Парето Q, максимально улучшающей выпуклую комбинацию x_0, используя программу отсутствия мажорирования [4]:

$$x^* \in Q \Leftrightarrow f = 0,$$

где

f – решение задачи линейного программирования:

$$f = \max_{X^*} \sum_{i=1}^{l} p_i$$, или, имея $l = 2$:

$$f = p_1 + p_2 \to \max_{X^*}$$

при

$$X^* = \{(x,l) \in R^{n+l} \mid L^k(x) - p_k \geq L^k(x^*), p_k \geq 0\},$$
$$k = \overline{1,l}.$$

Результат решения задачи — искомая характеризация $\tilde{x}$.

Заключение

Для транспортной задачи с двумя критериями (минимизация затрат на перевозки и максимизация степени важности перевозок) показан способ решения и способ выделения «полномочного представителя» из множества Парето.

Литература

1. *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969. 384 с.
2. *Штойер Р.* Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992. 504 с.
3. *Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.* Линейное программирование (теория, методы и приложения). М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969. 424 с.
4. *Кошкин Б.П., Носков С.И., Оленцевич В.А., Рязанцев А.И.* О многокритериальной транспортной задаче // Фундаментальные исследования. 2017. № 7. С. 35-38.
5. *Носков С.И.* Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных. Иркутск.: РИЦ ГП "Облинформпечать", 1996. 320 с.
6. *Yu L., Zeleny M.* The set of all nondominated solutions in linear cases and multycriteria sim-plex method // J. of Math. Anal. and Applic. 1975. Vol. 45, № 2, pp. 430-468.
7. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 340 с.
8. *Лотов А.В., Поспелова И.И.* Многокритериальные задачи принятий решений. М.: МАКС Пресс, 2008. 197 с.
9. *Ногин В.Д.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 144 с.
10. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 256 с.

TWO-CRITERIA TRANSPORT PROBLEM

Sergey I. Noskov, *Irkutsk state transport university, Irkutsk, Russia,* **tonygpx@yandex.ru**
Anton I. Ryazantsev, *Irkutsk state transport university, Irkutsk, Russia*

Abstract
Purpose. A multicriteria transport problem is considered. It is a transport problem with an additional objective function, which consists in searching the most economical plan for transportation of homogenous, interchangeable products from points of production to points of consumption. As such functions, minimization of total transportation costs and maximization of the importance of transportation are considered. ***Results.*** Multicriteria transport problem is represented as multicriteria linear programming problem. Is used the multicriteria simplex method to solve the problem. It is based on finding a set of Pareto points and construction of the Pareto set. Every solution from the Pareto set is equivalent to each other. ***Conclusion.*** A method of solving a multicriteria transport problem is shown. Point characterization of the Pareto set is shown as a way to operate the "plenipotentiary" representative of the Pareto set.

Keywords: *vector optimization, multi-criteria linear programming, multi-criteria simplex method, transport problem, objective function, Pareto set, point characterization.*

References

1. Gol'shtein E.G., Yudin D.B. (1969). *Problems of linear programming of trans-port type*. Moscow: Nauka. Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury. 384 p.
2. Shtoyer R. (1992). *Multi-criteria optimization*. Moskow: Radio i svyaz'. 504 p.
3. Yudin D.B., Gol'shtein E.G. (1969). *Linear programming (theory, methods and applications).* Moscow: Nauka. Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury. 424 p.
4. Koshkin B.P., Noskov S.I., Olentsevich V.A., Ryazantsev A.I. (2017). About multi-criteria transport problem. *Fundamental'nye issledovaniya.* No. 7.
5. Noskov S.I. (1996). *Technology of modeling objects with unstable functioning and uncertainty in the data*. Irkutsk: RIC GP "Oblonformpechat". 320 p.
6. Yu L., Zeleny M. (1975). The set of all nondominated solutions in linear cases and multycriteria simplex methodю *J. of Math. Anal. and Applic.* Vol. 45. No. 2.
7. Ashmanov S.A. (1981). *Linear programming*. Moscow: Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury. 340 p.
8. Lotov A.V., Pospelova I.I. (2008). *Multi-criteria decision-making tasks.* Moscow: MARS Press. 197 p.
9. Nogin V.D. (2002). *Decision-making in a multicriteria environment: a quantitative approach.* Moscow: Fizmatlit. 144 p.
10. Podinovskiy V.V., Nogin V.D. (1982). *Pareto-optimal solutions of multicrite-ria problems*. Moscow: Nauka. Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury. 256 p.

Information about authors:

Sergey I. Noskov, *doctor of technical sciences, professor of the department "Information Technologies and Information Security", Irkutsk state transport university, Irkutsk, Russia*
Anton I. Ryazantsev, *postgraduate of the department "Information Technologies and Information Security", Irkutsk state transport university, Irkutsk, Russia*