УДК 519.168:519.852.33

О.Б. Цехан

Моделирование и алгоритмизация одной задачи планирования многопродуктовых перевозок с запрещенным транзитом

Рассматривается задача построения оптимального плана перевозок денежной наличности бригадой инкассаторов. Построена модель оптимизации (по критерию минимизации затрат на инкассацию) плана перевозок при условии запрета транзитных перевозок через подразделения. Показано, что ее можно рассматривать как модель многопродуктовой транспортной задачи с фиксированными доплатами особой структуры и запретными перевозками. Обоснованы точные алгоритмы нахождения оптимальных планов перевозок для частных случаев. В общем случае предложен эвристический алгоритм. Построена модель непрерывной транспортной задачи с запретными перевозками, решение которой позволяет получить приближенное решение исходной задачи для общего случая. Приведены примеры реализации предложенных алгоритмов и методов.

Ключевые слова: *задача инкассатора, транспортная задача, фиксированные доплаты, эвристический алгоритм.*

Введение. Задачи планирования перевозок относятся к широкому классу транспортных задач (ТЗ) [1]. Среди ТЗ можно выделить классы постановок, различающиеся условиями на перевозки (с запретными перевозками, с ограничениями на пропускные способности дорог, задачи в матричной и сетевой постановках), составом и структурой перевозимого груза (однопродуктовые и многопродуктовые, перевозка неделимых, неоднородных, взаимозаменямых продуктов), а также критериям оптимизации (минимизация затрат, расстояний, времени на перевозку). В терминах ТЗ можно сформулировать также многие другие задачи, не обязательно относящиеся к перевозкам (о кратчайшем пути, о назначениях, распределительная задача, задача выбора, задача расписаний и др.).

Для ряда классов ТЗ разработаны точные или приближенные методы решения. Вместе с тем во многих прикладных проблемах, сводящихся к моделям транспортного типа, налагаются такие требования, которые приводят к моделям специфической структуры. Это требует либо адаптации для решения таких задач известных моделей и методов, либо разработки новых.

Настоящая работа посвящена построению моделей и алгоритмов решения одной проблемы перевозки денежной наличности, возникающей в практике работы инкассаторской службы. Некоторые подходы к алгоритмизации частного случая такой проблемы предложены в [2].

Постановка задачи. Рассматривается банковская подсистема, состоящая из одного хранилища и n подразделений (далее пункты), обслуживаемых инкассаторской службой. Обозначим i – индекс подразделения, $i=\overline{1,n}$, $i=0$ – индекс хранилища. Для каждого подразделения i ($i=\overline{1,n}$) заданы величины $\sigma_i^k, k=1,2$, определяющие суммы денежной наличности двух типов валют ($k=1,2$) для инкассации. При этом $\sigma_i^k>0$ означает, что требуется вывоз денежной наличности в валюте k -го типа, $\sigma_i^k<0$ – требуется подкрепление подразделения i в валюте k -го вида. Имеется транспортная связь между всеми подразделениями, подразделениями и хранилищем. Передвижение денежной наличности между подразделениями банка и хранилищем осуществляется одной бригадой инкассаторов. Для каждого i -го подразделения наличность в объеме σ_i^k для k -го типа валюты надо полностью вывезти при $\sigma_i^k>0$, и полностью завезти при $\sigma_i^k<0$.

Центральное хранилище может принимать или выдавать наличность в неограниченном количестве. В машине возможна одновременная перевозка различных типов валют.

Процесс инкассации связан со следующими затратами: операционные затраты на подготовку наличности (отдельно при приеме из хранилища и вывозе наличности из подразделения), равные заданному проценту от суммы (может быть различным на подразделениях и хранилище), γ_h , γ_p – величина процента, задающая операционные затраты для хранилища и подразделений, соответственно; инкассационные затраты (заданная константа I за один подъезд бригады к подразделению или хранилищу (с ненулевой суммой); затраты на транспортировку - процент от вывезенной из пункта (подразделение или хранилище) денежной суммы, V – величина процента за транспортировку денежной суммы.

Требуется построить схему перемещения денежной наличности между подразделениями исходя из их потребности, используя для подкрепления наличность, предназначенную для вывоза из подразделений и наличность в хранилище, таким образом, чтобы сумма операционных, инкассационных затрат и затрат на перевозку была минимальна при условии удовлетворения потребности всех подразделений.

Заметим, что в описанной постановке расстояние между подразделениями не учитывается. Сформулированная выше проблема отличается от известных ранее постановок «задачи инкассатора» [3], в частности, своим критерием. В отличие от [2] в данной статье рассматривается два типа валют.

В работе построена математическая модель и предложены алгоритмы решения поставленной задачи при условии, что транзитные перевозки через подразделения запрещены.

Модель оптимизации перемещения денежной наличности для двух типов валют при условии недопустимости транзита через подразделения.

Замечание 1. Поскольку по постановке задачи при переезде между пунктами с нулевой суммой все затраты равны нулю, то для формирования маршрута бригады инкассаторов достаточно определить множество ненулевых перевозок денежных сумм между пунктами (с учетом хранилища), обеспечивающий вывоз и пополнение денежных средств на подразделениях в соответствии с их потребностями. Такое множество назовем *планом перевозок* денежной наличности. Из полученного множества затем можно сформировать маршрут передвижения инкассаторской бригады (при этом в сформулированных выше условиях порядок перевозок в маршруте не влияет на общие затраты).

Для построения математической модели определим множества: $S=\left\{i : i=\overline{1,n}\right\}$ – множество индексов всех подразделений, обслуживаемых инкассаторской бригадой, $S^{++}=\left\{i\in\overline{1,n} : \sigma_i^k \ge 0, k=1,2\right\}$ – подразделений, из которых возможен одновременный вывоз двух типов валют, $S^{--}=\left\{i\in\overline{1,n} : \sigma_i^k < 0, k=1,2\right\}$ – в которые возможен одновременный ввоз двух типов валют, $S^{+-}=\left\{i\in\overline{1,n} : \sigma_i^1 \ge 0, \sigma_i^2 < 0\right\}$, $S^{-+}=\left\{i\in\overline{1,n} : \sigma_i^1 < 0, \sigma_i^2 \ge 0\right\}$ – из/в которые невозможна одновременная перевозка валют двух типов, $S_0^{pm}=S^{pm}\bigcup\{0\}$, $p,m\in\{+,-\}$. Очевидно, что $S=S^{++}\bigcup S^{+-}\bigcup S^{-+}\bigcup S^{--}$.

Сформируем также $A^1=S^{++}\bigcup S^{+-}$, $A^2=S^{++}\bigcup S^{-+}$ – множества индексов всех подразделений, из которых надо вывезти валюту 1-го и 2-го типа, соответственно, $B^1=S^{--}\bigcup S^{-+}$, $B^2=S^{--}\bigcup S^{+-}$ – множества индексов подразделений, в которые надо завезти валюту 1-го и 2-го типов, соответственно,
$$A_0^k=\begin{cases} A^k\bigcup\{0\}, \textit{если } \sigma_0^k \ge 0, \\ A^k \textit{ в противном случае}, \end{cases} \quad B_0^k=\begin{cases} B^k\bigcup\{0\}, \textit{если } \sigma_0^k < 0, \\ B^k \textit{ в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим далее $a_i^k=\sigma_i^k \ge 0,\ i\in A^k$, $k=1,2$, – объем денежных средств валюты k-го типа, который надо вывезти из пункта i; $b_j^k=-\sigma_j^k \ge 0, j\in B^k$, $k=1,2$, – объем денежных средств валюты k-го типа, который надо ввезти в пункт j. Введем переменные $x_{ij}^k,\ i,j=\overline{0,n},\ k=1,2$ – объем денежных средств валюты k-го типа, планируемый к перевозке из пункта i в пункт j.

Сформируем ограничения задачи, характеризующие следующие требования.

Ограничения на вывоз валюты k-го типа. Из каждого пункта i с $\sigma_i^k \ge 0$ ($i\in A^k$) валюту k-го типа надо полностью вывезти, причем, так как транзит запрещен, то в сумме не более a_i^k. При этом валюту k-го типа *надо* вывезти из всех пунктов, принадлежащих множеству A^k, и *можно* (в условиях запрета транзита) вывозить только в пункты, принадлежащие множеству B_0^k:
$$\sum_{j\in B_0^k} x_{ij}^k=a_i^k,\ i\in A^k, k=1,2. \tag{1}$$

Аналогично, *ограничения на ввоз валюты k-го типа* имеют вид
$$\sum_{i\in A_0^k} x_{ij}^k=b_j^k,\ j\in B^k, k=1,2. \tag{2}$$

Очевидными являются ограничения неотрицательности перевозок:
$$x_{ij}^k \ge 0,\ \forall i,j,k\,, \tag{3}$$

а также запретные перевозки, вытекающие из условия запрета транзита через подразделения:
$$x_{ij}^k=0,\ (i,j)\in\{i\in A^m, j\in B^n, m\ne n,\ m,n=1,2\}\,. \tag{4}$$

Очевидно, что необходимым условием полного удовлетворения запросов всех подразделений является ввоз/вывоз в хранилище валюты k-го типа в объеме $\sigma_0^k=-\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^k, k=1,2$. С учетом того, что хранилище может принимать или выдавать наличность в неограниченном количестве, получаем условие баланса перевозок через хранилище
$$\sum_{j\in B^k} x_{0j}^k-\sum_{i\in A^k} x_{i0}^k=\sigma_0^k,\ k=1,2. \tag{5}$$

Сформируем *целевую функцию*. Суммарные операционные затраты равны

$$\sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{j\in B^k} x_{0j}^k\gamma_h+\sum_{i\in A^k,\, j\in B_0^k} x_{ij}^k\gamma_p\right). \tag{6}$$

Затраты на транспортировку всех денежных средств равны

$$\sum_{k=1}^{2} V\left(\sum_{j\in B^k} x_{0j}^k+\sum_{i\in A^k,\, j\in B_0^k} x_{ij}^k\right). \tag{7}$$

Суммарные инкассационные затраты, зависящие от количества переездов (с ненулевой суммой) между пунктами, составляют

$$\sum_{i\in S_0^{++},\, j\in S_0^{--}} I\operatorname{sign}\left(x_{ij}^1+x_{ij}^2\right)+\sum_{\substack{i\in A_0^1,\, j\in S^{-+}\\ i\in S^{+-},\, j\in S_0^{--}}} I\operatorname{sign}\, x_{ij}^1+\sum_{\substack{i\in A_0^2,\, j\in S^{+-}\\ i\in S^{-+},\, j\in S_0^{--}}} I\operatorname{sign}\, x_{ij}^2 . \tag{8}$$

Здесь $sign(x)=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x=0,\end{cases}$ $x_{00}^k \triangleq 0, k=1,2$.

В функции (8) первое слагаемое соответствует таким переездам, при которых возможна одновременная перевозка за одну поездку 2-х типов валют. Остальные слагаемые соответствуют перевозкам только одного типа валют.

Суммируя (6)–(8) после очевидных преобразований с учетом (1)–(4) получаем функцию, выражающую суммарные затраты на инкассацию всех подразделений:

$$z(X)=I\left(\sum_{i\in S_0^{++},\, j\in S_0^{--}}\operatorname{sign}\left(x_{ij}^1+x_{ij}^2\right)+\sum_{\substack{i\in A_0^1,\, j\in S^{-+}\\ i\in S^{+-},\, j\in S_0^{--}}}\operatorname{sign}\, x_{ij}^1+\sum_{\substack{i\in A_0^2,\, j\in S^{+-}\\ i\in S^{-+},\, j\in S_0^{--}}}\operatorname{sign}\, x_{ij}^2\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j\in B^k} x_{0j}^k\left(\gamma_h+V\right)+\left(\gamma_p+V\right)A\to\min_{x_{ij}^k} \tag{9}$$

где $A=\sum_{k=1}^{2}\sum_{i\in A_k} a_i^k = const$.

Объединяя (1)–(5), (9), а также отбрасывая константу в целевой функции, получаем математическую модель оптимизации (по критерию минимума затрат) плана перевозок денежной наличности для двух типов валют при условии недопустимости транзита через подразделения:

$$z(X)=I\left(\sum_{i\in S_0^{++},\, j\in S_0^{--}}\operatorname{sign}\left(x_{ij}^1+x_{ij}^2\right)+\sum_{\substack{i\in A_0^1,\, j\in S^{-+}\\ i\in S^{+-},\, j\in S_0^{--}}}\operatorname{sign}\, x_{ij}^1+\sum_{\substack{i\in A_0^2,\, j\in S^{+-}\\ i\in S^{-+},\, j\in S_0^{--}}}\operatorname{sign}\, x_{ij}^2\right)+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j\in B^k} x_{0j}^k\left(\gamma_h+V\right)\to\min_{x_{ij}^k} \tag{10}$$

$$\sum_{j\in B_0^k} x_{ij}^k=a_i^k,\ i\in A^k,\quad \sum_{i\in A_0^k} x_{ij}^k=b_j^k,\ j\in B^k, k=1,2, \tag{11}$$

$$\sum_{j\in B^k} x_{0j}^k-\sum_{i\in A^k} x_{i0}^k=\sigma_0^k,\ k=1,2, \tag{12}$$

$$x_{ij}^k\ge 0,\ \forall i,j,k,\ x_{ij}^k=0,\ (i,j)\in\{i\in A^m, j\in B^n, m\ne n,\ m,n=1,2\}. \tag{13}$$

Система (10)–(13) представляет собой задачу математического программирования с линейными ограничениями транспортного типа и целевой функцией с булевыми переменными. Она имеет вид много-продуктовой ТЗ [4, с.114; 5, с.72; 6, с. 203] с запретными перевозками [1, с.17] и фиксированными доплатами (ТЗФД) [5, с.51], в которой некоторые затраты на перевозку, пропорциональные объему перевозимой суммы, входят в целевую функцию с постоянными коэффициентами, равными нулю. В отличие от ТЗФД, рассмотренной в [5], первое слагаемое целевой функции имеет специфическую структуру, а именно содержит функцию знак числа от суммы переменных. Аналогично [1, с.73] несложно показать, что задача (10)-(13) разрешима. Решением задачи (10)–(13) является множество перевозок $X=\left\{x_{ij}^1, x_{ij}^2, \forall i,j\right\}$, задающих план перевозок денежной наличности с минимальными затратами.

Алгоритмы для частных случаев. Рассмотрим частный случай задачи, когда рассматривается один тип валют. В этом случае будем иметь $S^{+-}=S^{-+}=\varnothing$, $S^{++}\triangleq S^{+}$, $S^{--}\triangleq S^{-}$. Например, для валюты первого типа имеем $A^1=S^+$, $B^1=S^-$ и

$$z(X)=IZ\sum_{i\in A_0^1,\, j\in B_0^1}\operatorname{sign}\left(x_{ij}^1\right)+\sum_{j\in B^1} x_{0j}^1\left(\gamma_h+V\right)\to\min_{x_{ij}^1} \tag{14}$$

$$\sum_{j\in B_0^1} x_{ij}^1=a_i^1,\ i\in A^1,\ \sum_{i\in A_0^1} x_{ij}^1=b_j^1,\ j\in B^1,\ \ x_{ij}^1\ge 0,\ \forall i,j, \tag{15}$$

$$\sum_{j\in B^1} x_{0j}^1 - \sum_{i\in A^1} x_{i0}^1 = \sigma_0^1 . \tag{16}$$

Теорема 1. Для любого плана перевозок задачи (14)-(16) X в котором $\exists i \in A^1, j \in B^1 : x_{0j} \neq 0, x_{i0} \neq 0$ можно построить план перевозок $\overline{X}$, в котором $\forall \overline{x}_{0j} = 0$ или $\forall \overline{x}_{i0} = 0$ и $z\left(\overline{X}\right) < z\left(X\right)$.

Доказательство. В доказательстве с целью сокращения записей верхний индекс 1, указывающий на номер типа валюты, будем опускать.

Пусть построен план перевозок $X = \left\{x_{ij}, i \in A_0^1, j \in B_0^1\right\}$ задачи (14)-(16) и $\exists i \in A^1, \exists j \in B^1$ такие, что $x_{i0} \neq 0$ и $x_{0j} \neq 0$. Занумеруем элементы множества $A^1, |A^1| \triangleq m$, так, что

$$x_{i0} \neq 0, i = \overline{1, M}, x_{i0} = 0, i = \overline{M+1, m},$$

а элементы множества $B^1, |B^1| \triangleq n$ так, что

$$x_{0j} \neq 0, i = \overline{1, N}, x_{0j} = 0, i = \overline{N+1, n}.$$

Проведем доказательство для случая $\sigma_0 < 0$ и покажем существование плана перевозок $\overline{X}$, в котором $\forall \overline{x}_{0j} = 0$ и $z\left(\overline{X}\right) < z\left(X\right)$. Положим $a_0 = \sigma_0$. Обозначим через μ такой индекс, что

$$\sum_{i=1}^{\mu} x_{i0} \leq a_0, \sum_{i=1}^{\mu+1} x_{i0} > a_0 .$$

Определим величины $\delta_{ij}, i = \overline{\mu+1, M}, j = \overline{1, N}$ как неотрицательное базисное решение (с не более чем $M + N - \mu - 1$ ненулевой компонентой) системы линейных уравнений

$$\sum_{i=\mu+1}^{M} \delta_{ij} = x_{oj}, \forall j = \overline{1, N}, \quad \sum_{j=1}^{N} \delta_{ij} = x_{io}, \forall i = \overline{\mu+2, M}, \quad \sum_{j=1}^{N} \delta_{\mu+1, j} = \sum_{i=1}^{\mu+1} x_{io} - a_0. \tag{17}$$

Заметим, что систему (17) можно рассматривать как систему ограничений транспортной задачи с $M - \mu$ поставщиками и N потребителями, для которой выполнено условие баланса, откуда следует существование требуемого решения.

Зададим компоненты плана перевозок $\overline{X}$ следующим образом:

$$\overline{x}_{i0} = x_{i0}, \forall i = \overline{1, \mu}, \quad \overline{x}_{\mu+1,0} = a_0 - \sum_{i=1}^{\mu} x_{i0}, \quad \overline{x}_{0j} = 0, \forall j, \quad \overline{x}_{i0} = 0, i = \overline{\mu+2, m}. \tag{18}$$

$$\overline{x}_{ij} = x_{ij} + \delta_{ij}, \forall (i,j) \in \left\{(i,j) : i = \overline{\mu+1, M}, j = \overline{1, N}\right\} \triangleq \Omega, \quad \overline{x}_{ij} = x_{ij}, (i,j) - \textit{остальные}, \tag{19}$$

Подставляя (18)-(19) в (15),(16) путем несложных преобразований несложно убедиться, что построенный согласно (18)-(19) вектор $\overline{X} = \left\{\overline{x}_{ij}, i \in A_0^1, j \in B_0^1\right\}$ удовлетворяет (15),(16), а значит, является планом перевозок задачи (14)-(16).

Покажем теперь, что $z\left(X\right) > z\left(\overline{X}\right)$. Рассмотрим разность $z\left(X\right) - z\left(\overline{X}\right)$. С учетом (18)-(19) имеем:

$$z\left(X\right) - z\left(\overline{X}\right) = I\left(\sum_{i\in A^1, j\in B^1} \operatorname{sign}\left(x_{ij}\right) + \sum_{j\in B^1} \operatorname{sign}\left(x_{0j}\right) + \sum_{i\in A^1} \operatorname{sign}\left(x_{i0}\right)\right) + \sum_{j\in B^1} x_{0j}\left(\gamma_h + V\right) -$$

$$-\left(I\left(\sum_{i\in A^1, j\in B^1} \operatorname{sign}\left(\overline{x}_{ij}\right) + \sum_{j\in B^1} \operatorname{sign}\left(\overline{x}_{0j}\right) + \sum_{i\in A^1} \operatorname{sign}\left(\overline{x}_{i0}\right)\right) + \sum_{j\in B^1} \overline{x}_{0j}\left(\gamma_h + V\right)\right) =$$

$$= \sum_{j\in B^1} x_{0j}\left(\gamma_h + V\right) + I\left(\sum_{j\in B^1} \operatorname{sign}\left(x_{0j}\right) + \sum_{i=\mu+1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \left(\operatorname{sign}\left(x_{ij}\right) - \operatorname{sign}\left(x_{ij} + \delta_{ij}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\operatorname{sign}\left(x_{\mu+1,0}\right) - \sum_{i\in A^1} \operatorname{sign}\left(a_0 - \sum_{i=1}^{\mu} x_{i0}\right)\right) + \sum_{i=\mu+2}^{M} \operatorname{sign}\left(x_{i0}\right)\right) \geq \sum_{j\in B^1} x_{0j}\left(\gamma_h + V\right) > 0.$$

Предпоследнее неравенство справедливо, поскольку из (18)-(19) легко видеть, что

$$\sum_{j\in B^1} \operatorname{sign}\left(x_{0j}\right) = N,$$

$$\sum_{i=\mu+1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \left(\operatorname{sign}\left(x_{ij}\right) - \operatorname{sign}\left(x_{ij} + \delta_{ij}\right)\right) < 0 \text{ и } \left|\sum_{i=\mu+1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \left(\operatorname{sign}\left(x_{ij}\right) - \operatorname{sign}\left(x_{ij} + \delta_{ij}\right)\right)\right| \leq M + N - \mu - 1,$$

$$0 \leq \left(\operatorname{sign}\left(x_{\mu+1,0}\right) - \sum_{i\in A^1} \operatorname{sign}\left(a_0 - \sum_{i=1}^{\mu} x_{i0}\right)\right) \leq 1, \quad \sum_{i=\mu+2}^{M} \operatorname{sign}\left(x_{i0}\right) = M - \mu - 1.$$

Доказательство для случая $\sigma_0 \ge 0$ проводится аналогично с очевидными изменениями и приводит к построению плана перевозок $\overline{X}$, в котором $\forall \overline{x}_{i0} = 0$ и $z\left(\overline{X}\right) < z\left(X\right)$. Теорема доказана.

Следствие 1. В условиях одной валюты оптимальный план перевозок не допускает транзит через хранилище.

Не ограничивая общности, в случае одной валюты условие запрета транзита распространим и на хранилище.

Следствие 2. Не ограничивая общности в случае одной валюты хранилище можно рассматривать как пункт с $\sigma_0^k = -\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^k, k = 1,2$ и считать включенным в соответствующие множества A^1, B^1. В этом случае $\sum\limits_{j \in B^1} x_{0j}^1 \left(\gamma_h + V\right) = const$.

Из теоремы и следствий вытекает, что задача (14)-(16) эквивалентна задаче

$$z\left(X\right) = I \sum_{i \in A^1, j \in B^1} \operatorname{sign}\left(x_{ij}^1\right) \to \min_{x_{ij}^1} \tag{20}$$

$$\sum_{j \in B^1} x_{ij}^1 = a_i^1,\ i \in A^1,\ \sum_{i \in A^1} x_{ij}^1 = b_j^1,\ j \in B^1,\ \ x_{ij}^1 \ge 0,\ \forall i, j, \tag{21}$$

некоторые подходы к решению которой предложены в [2].

Покажем, что решение задачи для одной валюты (20)-(21) сводится к построению произвольного базисного плана ТЗ на двудольной сети (или, что то же самое – к ТЗ в матричной форме).

Проанализируем 2 возможные ситуации. а) во множествах A^1, B^1 нельзя выделить такие подмножества индексов P^-, P^+, которые не совпадают с A^1, B^1 и $\sum_{i \in P^-}\left(\sigma_i\right) = \sum_{i \in P^+}\left(\sigma_i\right)$; б) такие подмножества выделить можно.

Рассмотрим ситуацию а). Графически эта ситуация изображена на рис. 1 (любой план перевозок задает связный граф).

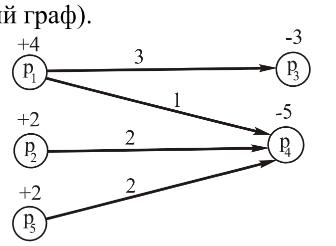

Рисунок 1. Связный граф

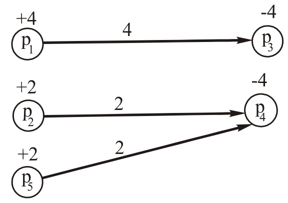

Рисунок 2. Граф не является связным

Этот случай соответствует ТЗ на двудольной сети (матричной ТЗ) с невырожденным множеством планов [1, стр.106]. Каждый базисный план такой задачи имеет ровно $|S^-| + |S^+| - 1 = q + r - 1$ ($q = |A^1|, r = |B^1|$) ненулевую перевозку и слагаемое $I\sum_{i \in A^1, j \in B^1} (\operatorname{sign} x_{ij}^1)$ в целевой функции (20) становится константой:

$$I \sum_{i \in A^1, j \in B^1} \operatorname{sign} x_{ij}^1 = I(q + r - 1)\,. \tag{22}$$

Для любого же небазисного плана целевая функция (20) примет значение не меньше, чем (22), так как количество ненулевых перевозок для небазисных планов не меньше $q + r - 1$. Поэтому в случае одной валюты, ситуация а), задача сводится к построению произвольного базисного плана ТЗ с множествами поставщиков A^1 и потребителей B^1.

На этом основан следующий алгоритм.

Алгоритм формирования оптимального плана перевозок наличности для одной валюты.

Любым из методов построения начального базисного плана для транспортной задачи [1, с.98, с.138] строится базисный план перевозок, по которому затем составляется маршрут, включающий все ненулевые перевозки (в произвольном порядке).

Алгоритм порождает оптимальный план для ситуации а).

Рассмотрим ситуацию б). Графически эта ситуация изображена на рис. 2 (можно построить такой план перевозок, что соответствующий граф имеет несколько связных компонент).

Ситуация б) характеризуется наличием среди множества всех базисных планов ТЗ вырожденных базисных планов [1, с.106]. В этом случае уменьшения количества переездов с ненулевыми суммами можно достичь, если предварительно формировать указанные выше множества P^-, P^+, а затем составлять маршрут отдельно по каждой паре таких подмножеств. Переезды между пунктами, принадлежащими разным парам соответствуют переездам с нулевой суммой и имеют стоимость 0, что уменьшает суммарные затраты на инкассацию по сравнению с маршрутом без формирования таких подмножеств.

Проблема выделения указанных выше пар подмножеств P^-, P^+ эквивалентна проблеме нахождения всех вырожденных базисных планов соответствующей ТЗ.

Заметим, что с ростом количества цифр в числах σ_i уменьшается вероятность того, что для заданных σ_i, $i=\overline{0,n}$ можно выделить P^-, P^+, не совпадающие с A^1, B^1. В реальных практических задачах такие ситуации будут крайне редки.

Легко видеть, что для задачи с одним типом валют в условиях, когда затраты на переезд с нулевой суммой валюты не учитываются (равны нулю), транзитные перевозки через подразделения будут «невыгодными».

Действительно, в силу следствия 1 любая сумма будет обязательно принята или вывезена (целиком или по частям) ровно один раз, поэтому операционные затраты не зависят от плана перевозок для фиксированного количества подразделений n и заданных величин σ_i^k, $i=\overline{1,n}, k=1,2$. Значит при сравнении эффективности различных планов перевозки по критерию суммарных затрат сравнивать надо лишь затраты на подъезд-отъезд (с ненулевыми суммами) и затраты на перевозку сумм.

Далее, любая сумма будет обязательно перевезена (целиком или по частям) по крайней мере, один раз в/из каждого пункта, при этом достаточно n переездов, чтобы полностью удовлетворить потребности всех подразделений. Каждая транзитная перевозка увеличивает затраты на перевозку и подъезд-отъезд, а значит любой план без транзита эффективнее плана с транзитом.

Таким образом, условие запрета транзита через подразделения в случае одной валюты не является ограничительным.

Пример 1. Для ситуации $a_1^1=4$, $a_2^1=1$, $b_3^1=5$ сравним два плана перемещения наличности: 1-ый план (с транзитом): $x_{12}^1=4, x_{23}^1=5$, 2-ой план (без транзита): $x_{13}^1=4, x_{23}^1=1$. Количество переездов с ненулевыми суммами в обоих случаях равно 2, затраты на подготовку и на принятие денежных средств одинаковы. Однако в первом случае при отправлении из p_2 дополнительно платим процент от вывезенной суммы, которую мы погрузили в p_1, что делает более выгодным второй план перевозок.

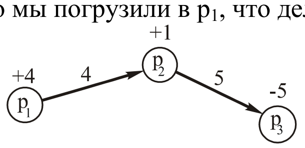

Рисунок 3. Перевозка транзитом

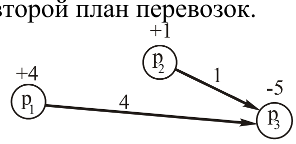

Рисунок 4. Перевозка без транзита

Рассмотрим теперь частный случай задачи (10)-(13) при $S^{++}=\varnothing$ или $S^{--}=\varnothing$. Пусть для определенности $S^{++}=\varnothing$. Тогда $A^1=S^{+-}$, $A^2=S^{-+}$, $B^1=S^{--}\bigcup S^{-+}$, $B^2=S^{--}\bigcup S^{+-}$ и модель (10)–(13) примет вид

$$z(X)=I\left(\sum_{i\in A_0^1, j\in B_0^1}\operatorname{sign} x_{ij}^1+\sum_{i\in A_0^2, j\in B_0^2}\operatorname{sign} x_{ij}^2\right)+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j\in B^k}x_{0j}^k\left(\gamma_h+V\right)\to\min_{x_{ij}^k} \tag{23}$$

$$\sum_{j\in B_0^k}x_{ij}^k=a_i^k,\ i\in A^k,\ \sum_{i\in A_0^k}x_{ij}^k=b_j^k,\ j\in B^k,\ \sum_{j\in B^k}x_{0j}^k-\sum_{i\in A^k}x_{i0}^k=\sigma_0^k,\ k=1,2, \tag{24}$$

$$x_{ij}^k\ge 0,\ \forall i,j,k\ \ x_{ij}^k=0,\ (i,j)\in\{i\in A^m, j\in B^n, m\ne n,\ m,n=1,2\}. \tag{25}$$

Поскольку ограничения (23)-(25) не связаны по переменным x_{ij}^1 и x_{ij}^2, а целевая функция (23) сепарабельна, то задача (23)-(25) декомпозируется на две подзадачи: по переменным x_{ij}^1 (для валюты первого типа):

$$z(X)=I\sum_{i\in A_0^1, j\in B_0^1}\operatorname{sign} x_{ij}^1+\sum_{j\in B^1}x_{0j}^1\left(\gamma_h+V\right)\to\min_{x_{ij}^1} \tag{26}$$

$$\sum_{j\in B_0^1}x_{ij}^1=a_i^1,\ i\in A^1,\quad \sum_{i\in A_0^1}x_{ij}^1=b_j^1,\ j\in B^1,\quad \sum_{j\in B^1}x_{0j}^1-\sum_{i\in A^1}x_{i0}^1=\sigma_0^1,\quad x_{ij}^1\ge 0,\ \forall i,j, \tag{27}$$

и аналогичную задачу по переменным x_{ij}^2 (для валюты второго типа), которая получается из (26)-(27), если индекс 1 заменить на индекс 2.

Для случая $S^{--}=\varnothing$ будем иметь подзадачи вида (26)-(27) с $A^1=S^{++}\bigcup S^{+-}$ $B^1=S^{-+}$, $A^2=S^{++}\bigcup S^{-+}$, $B^2=S^{+-}$. Каждая подзадача решается алгоритмом для одного типа валют.

Замечание 2. Поскольку в рассмотренных частных случаях множество оптимальных по критерию (10) планов перевозок будут состоять более чем из одного плана, то далее на этом множестве можно выполнить оптимизацию с учетом некоторых других критериев (например, транспортных затрат с учетом расстояний между пунктами).

Эвристический алгоритм планирования перевозок для двух типов валют.

Рассмотрим общий случай планирования перевозок двух типов валют при условии запрета транзита.

Предположим вначале, что транзит через хранилище также запрещен и хранилище с суммами денежной наличности для инкассации $\sigma_0^k = -\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^k, k = 1,2$ считаем включенным в соответствующие множества пунктов (индекс 0 у соответствующих множеств при этом опускаем).

1-ая фаза алгоритма (построение начального плана перевозок).

Аналогично методам построения начального базисного плана [1, стр.98,138] каждый этап алгоритма состоит в выборе дороги $i \to j$, планировании по ней перевозок $x_{ij}^k, k = 1,2$, корректировке запасов и потребностей a_i^k, b_j^k соответствующих пунктов, а также состава множеств из S. Будем говорить, что мы «занулили» позицию (i,k) (позицию (j,k)), если в ходе реализации алгоритма $a_i^k, i \in A^k$, стало равным нулю ($b_j^k, j \in B^k$, стало равным нулю). План перевозок будет построен, когда мы «занулим» все позиции.

Пусть уже спланировано некоторое количество перевозок $x_{ij}^k, k = 1,2$. При планировании очередной перевозки $i \to j$ с целью минимизации затрат необходимо так определять объем перевозки, чтобы выполнялось $x_{ij}^k = \min\left\{a_i^k, b_j^k\right\}, k = 1,2$. Действительно, только в этом случае полностью удовлетворяется потребность в привозе ($\min\left\{a_i^k, b_j^k\right\} = b_j^k$) или вывозе ($\min\left\{a_i^k, b_j^k\right\} = a_i^k$) валюты k-го типа для соответствующего пункта и количество пунктов, из/в которые еще надо планировать перевозки валюты k-го типа (количество «незануленных» позиций) уменьшится по крайней мере на один. При этом минимизации количества переездов можно добиться, если за один переезд $i \to j$ «зanулять» как можно больше позиций. Очевидно, что за один переезд можно занулить не более 4 позиций

1. Занулить 4 позиции возможно только по дорогам $S^{++} \to S^{--}$, если для соответствующих пунктов i, j выполнено $a_i^1 = b_j^1$ и $a_i^2 = b_j^2$, $i \in S^{++}, j \in S^{--}$. Например, в ситуации $a_i^1 = 4, b_j^1 = 4, a_i^2 = 2, b_j^2 = 2$ полагаем $x_{ij}^1 = 4, x_{ij}^2 = 2$ и в результате одного переезда $i \to j$ полностью удовлетворяются потребности двух пунктов по двум валютам (4 позиции). Пункты i, j исключаются из рассмотрения.

2. Занулить 3 позиции возможно только по дорогам $S^{++} \to S^{--}$, если для пунктов i, j, $i \in S^{++}, j \in S^{--}$, выполнено $a_i^1 = b_j^1$ или $a_i^2 = b_j^2$. Например, в ситуации $a_i^1 = 4, b_j^1 = 6, a_i^2 = 2, b_j^2 = 2$ полагаем $x_{ij}^1 = 4, x_{ij}^2 = 2$ и в результате одного переезда $i \to j$ полностью удовлетворяются потребности пункта i по двум валютам (2 позиции) и пункта j по 2-му типу валют (1 позиция). Пункт i исключается из рассмотрения, параметры пункта j и состав множеств из S корректируются.

3. Занулить 2 позиции возможно только по дорогам $S^{++} \to S^{--}$ ($\forall i \in S^{++}, j \in S^{--}$), $S^{+-} \to S^{--}$, $S^{+-} \to S^{-+}$, $S^{++} \to S^{-+}$ если для соответствующих пунктов i, j выполнено $a_i^1 = b_j^1$, а также по дорогам $S^{-+} \to S^{--}$, $S^{-+} \to S^{+-}$, $S^{++} \to S^{+-}$, если для соответствующих пунктов i, j выполнено $a_i^2 = b_j^2$. Например, при планировании перевозки $S^{++} \to S^{+-}$ в ситуации $a_i^1 = 4, a_j^1 = 6, a_i^2 = 2, b_j^2 = 2$ полагаем $x_{ij}^2 = 2$ и в результате одного переезда $i \to j$ полностью удовлетворяются потребности пункта i и пункта j по 2-му типу валют (2 позиции). Параметры пунктов i, j и состав множеств из S корректируются. При планировании перевозки $S^{++} \to S^{--}$ в ситуации $a_i^1 = 4, b_j^1 = 2, a_i^2 = 2, b_j^2 = 1$ полагаем $x_{ij}^1 = 2, x_{ij}^2 = 1$ и в результате одного переезда $i \to j$ полностью удовлетворяются потребности пункта j по двум типам валют (2 позиции). Параметры пункта i и состав множеств из S корректируются, пункт j исключается из рассмотрения.

Во всех остальных случаях зануляется не более одной позиции и соответствующие перевозки планируются как в алгоритме с одной валютой.

На основании вышеизложенного в предлагаемом эвристическом алгоритме на каждом этапе для планирования перевозки выбирается такая дорога $i \to j$, по которой возможно занулить как можно больше позиций. Алгоритм заканчивает работу, когда все позиции занулились.

Замечание 3. Для случая, если транзит через хранилище разрешен, алгоритм остается таким же, при этом полагаем $a_0^k = b_0^k = \infty$ и включаем пункт 0 в S^{++} и S^{--}.

Пример 2. Рассмотрим задачу инкассации для 9 подразделений с размерами денежной наличности для инкассации, указанными в таблице 1.

Таблица 1. Объемы денежной наличности для инкассации

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
σ_i^1	42	35	25	15	5	-6	-8	-7	-1
σ_i^2	0	-7	-1	40	15	0	8	4	-7

Таблица 2. Объемы запасов и потребностей пунктов

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
a_i^1	42	35	25	15	5	-	-	-	-	-
a_i^2	-	-	-	40	15	0	8	4	-	-
b_j^1	-	-	-	-	-	6	8	7	1	100
b_j^2	0	7	1	-	-	-	-	-	7	52

Для пункта 0 (хранилища) имеем $\sigma_0^1 = -100,\ \sigma_0^2 = -52$. Формируем множества $S^{++} = \{1,4,5\}$, $S^{--} = \{0,9\}$, $S^{+-} = \{2,3\}$, $S^{-+} = \{6,7,8\}$, $A^1 = \{1,4,5,2,3\}$, $A^2 = \{1,4,5,6,7,8\}$, $B^1 = \{0,9,6,7,8\}$, $B^2 = \{0,9,2,3\}$, и рассчитываем параметры $a_i^k, i \in A^k$, $b_j^k, j \in B^k, k = 1,2$ (таблица 2).

Согласно эвристическому алгоритму порядок планирования перевозок будет следующим. Поскольку не существует таких i, j, k, для которых $a_i^k = b_j^k$, то занулить одновременно 4 или 3 позиции невозможно. Занулить 2 позиции можно только перевозками по дорогам $S^{++} \to S^{--}$. Планируем последовательно перевозки по дорогам $4 \to 0$, $5 \to 0$, а затем остальные перевозки по алгоритму для одной валюты. В результате будет построен план перевозок с 13 ненулевыми перевозками.

$$X = \left\{ \begin{array}{l} x_{10}^1 = 42, x_{40}^1 = 15, x_{50}^1 = 5, x_{20}^1 = 35, x_{30}^1 = 3, x_{39}^1 = 1, x_{36}^1 = 6, x_{37}^1 = 8, x_{38}^1 = 7, \\ x_{40}^2 = 40, x_{50}^2 = 12, x_{59}^2 = 3, x_{72}^2 = 7, x_{73}^2 = 1, x_{89}^2 = 4, x_{ij}^k = 0 \ \text{\textit{для остальных}}\ i, j, k \end{array} \right\}.$$

Общие затраты для построенного плана перевозок составят $13I + 189(\gamma_p + V)$.

2-ая фаза алгоритма (оптимизация плана перевозок за счет транзита через хранилище).

Покажем, что после реализации 1-ой фазы эвристического алгоритма в условиях возможности транзита через хранилище возможно в некоторых случаях улучшение построенного плана перевозок (т.е. снижение затрат). В случае двух валют транзитные перевозки ($i \to 0 \to j$) могут оказаться выгоднее прямых перевозок x_{ij}^k ($i \to j$).

Пример 3. Будем считать валюты равностоящими. Рассмотрим случай $a_1^1 = 1, a_1^2 = 4$, $b_0^1 = 1,\ a_0^2 = 5$, $a_2^1 = 0, b_2^2 = 9$, $V = 0.01$, $I = 1$, $\gamma_h = \gamma_p = 0.05$. Сравним два плана перевозок наличности.

1-ый план (с транзитом): $x_{10}^1 = 1, x_{10}^2 = 4, x_{02}^2 = 9$. Затраты по дороге $1 \to 0$ состоят из затрат на транспортировку $0.01(+1+4)$, операционных затрат (вывоз из подразделения) $0.05(+1+4)$ и переезд с ненулевой суммой 1 (итого $(0.01+0.05)(+1+4)+1=1.3$), затраты по дороге $0 \to 2$ состоят из затрат на транспортировку 0.01 (+4+5), операционных затрат (прием из хранилища) 0.05 (+5) и переезд с ненулевой суммой 1 (итого 0.01 (+4+5)+ 0.05 (+5)+1=1.34). Всего по плану с транзитом затраты составят 2.64.

2 план (без транзита): $x_{10}^1 = 1, x_{12}^2 = 4, x_{02}^2 = 5$. Затраты по дороге $1 \to 0$ состоят из затрат на транспортировку (+1)*0.01, операционных затрат (вывоз из подразделения) 0.05(+1) и переезд с ненулевой суммой 1 (итого (0.01+0.05)(+1) +1=1.06), затраты по дороге $0 \to 2$ состоят из затрат на транспортировку 0.01(+5), операционных затрат (прием из хранилища) 0.05 (+5) и переезд с ненулевой суммой 1 (итого (0.01+0.05) (+5)+1=1.3), затраты по дороге $1 \to 2$ состоят из затрат на транспортировку 0.01 (+4) операционных затрат (вывоз из подразделения) (0.05+4) и переезд с ненулевой суммой 1 (итого (0.01+0.05)(+4) +1=1.24. Всего по плану 2 без транзита затраты составят 1.06+1.3+1.24=3.35, что больше, чем по плану 1 (с транзитом).

Таким образом, в некоторых случаях возможна оптимизация плана перевозок за счет транзита через хранилище. В связи с этим после того, как в результате 1-ой фазы эвристического алгоритма построен начальный план перевозок, во второй фазе проверяем, когда замена прямых перевозок на транзитные через хранилище выгодна и заменяем такие прямые перевозки на транзитные.

Получим условия, при которых транзит выгоднее прямых перевозок. Рассчитаем изменение затрат при замене прямой перевозки $x_{ij}^k \neq 0, k = 1,2$ на транзит через хранилище. Во-первых, дополнительно появляются операционные затраты при приеме из хранилища, что составит $\gamma_h(x_{0j}^1 + x_{0j}^2)$, и затраты на дополнительную перевозку транзитной суммы $V(x_{ij}^1 + x_{ij}^2)$. Затраты на инкассацию ненулевой суммы по дороге $i \to j$ уменьшаются на величину I, однако в зависимости от плана, построенного после первой фазы, могут добавиться затраты на инкассацию при переезде с ненулевой суммой к/от хранилища. После выполнения первой фазы могло сложиться несколько ситуаций.

1. $x_{i0}^1 = x_{i0}^2 = 0$. Тогда дополнительные затраты на инкассацию составят I, в противном случае – 0, т.е. дополнительные затраты равны $\left(1 - sign(x_{i0}^1 + x_{i0}^2)\right) \times I$.

2. $x_{0j}^1 = x_{0j}^2 = 0$. Аналогично дополнительные затраты на инкассацию составят еще $\left(1 - sign(x_{0j}^1 + x_{0j}^2)\right) \times I$.

Обобщая вышеизложенные соображения, убеждаемся, что справедливо утверждение.

Теорема 2. Транзит через хранилище выгоднее прямой перевозки, если

$$I > \left(2 - sign(x_{i0}^1 + x_{i0}^2) - sign(x_{0j}^1 + x_{0j}^2)\right) \times I + (x_{ij}^1 + x_{ij}^2)(\gamma_h + V). \tag{28}$$

На теореме 2 основан алгоритм 2-ой фазы.

Алгоритм 2-ой фазы алгоритма (улучшение плана за счет транзита через хранилище).

Для каждой пары пунктов $i, j, i \in A^k, j \in B^k$, для которой после первой фазы для некоторого k верно $x_{ij}^k \neq 0$, проверяем выполнение условия (28). Если (28) выполнено, то заменяем прямую перевозку транзитом, полагая $x_{i0}^k := x_{i0}^k + x_{ij}^k$, $x_{0j}^k := x_{oj}^k + x_{ij}^k$, $x_{ij}^k = 0$, $k = 1,2$. В противном случае транзит не выгоднее прямой перевозки, переходим к следующей паре i, j.

Для примера 1 в построенном после 1-ой фазы плане перевозок ситуаций, для которых выполнено условие (28), нет.

Сведение к непрерывной транспортной задаче в матричной форме (приближенное решение). Для приближенного решения задачи построения плана перевозок двух валют по модели (10)–(13) можно применить подход, изложенный в [7, с.300] для решения ТЗФД. С этой целью вначале построим эквивалентную (10)–(13) частично целочисленную задачу.

Обозначим $M_{ij} = \min\left\{a_i^1, b_j^1\right\} + \min\left\{a_i^2, b_j^2\right\}, i \in S_0^{++}, j \in S_0^{--}$, $M_{ij}^k = \min\left\{a_i^k, b_j^k\right\}, i \in A_0^k, j \in B_0^k$, $y_{ij}^k = sign\ x_{ij}^k\ \forall i, j, k$, $w_{ij} = sign\left(x_{ij}^1 + x_{ij}^2\right)$, $i \in S_0^{++}, j \in S_0^{--}$. Здесь M_{ij}^k – максимальная сумма денежных средств валюты k-го типа, которая может быть перевезена по дороге $i \to j$, M_{ij} – максимальная сумма денежных средств валют обоих типа, которая может быть одновременно перевезена по дороге $i \to j$. При этом полагаем $a_0^k = b_0^k = \infty$.

Так же как в [7] несложно показать, что задача (10)–(13) эквивалентна следующей частично целочисленной задаче:

$$I\left(\sum_{i \in S_0^{++},\, j \in S_0^{--}} w_{ij} + \sum_{i \in A_0^1, j \in S^{-+}} y_{ij}^1 + \sum_{i \in S^{+-}, j \in S_0^{--}} y_{ij}^1 + \sum_{i \in A_0^2, j \in S^{+-}} y_{ij}^2 + \sum_{i \in S^{-+}, j \in S_0^{--}} y_{ij}^2\right) + \sum_{k=1}^{2} \sum_{j \in B^k} x_{0j}^k \left(\gamma_h + V\right) \to \min_{x_{ij}^k} \tag{29}$$

$$\sum_{j \in B_0^k} x_{ij}^k = a_i^k,\ i \in A^k,\ \sum_{i \in A_0^k} x_{ij}^k = b_j^k,\ j \in B^k,\quad \sum_{j \in B^k} x_{0j}^k - \sum_{i \in A^k} x_{i0}^k = \sigma_0^k,\ k = 1,2, \tag{30}$$

$$x_{ij}^k \geq 0,\ \forall i, j, k,\ x_{ij}^k = 0, y_{ij}^k = 0,\ (i, j) \in \{i \in A^m, j \in B^n, m \neq n,\ m, n = 1,2\}, \tag{31}$$

$$x_{ij}^k \leq M_{ij}^k y_{ij}^k,\ \forall i, j, k,\ x_{ij}^1 + x_{ij}^2 \leq M_{ij} w_{ij}, i \in S_0^{++}, j \in S_0^{--} \tag{32}$$

$$0 \leq y_{ij}^k \leq 1,\ \forall i, j, k \text{, целые,}\quad 0 \leq w_{ij} \leq 1,\ \forall i \in S_0^{++}, j \in S_0^{--} \text{, целые.} \tag{33}$$

Рассмотрим (29)–(33) с отброшенным условием целочисленности.

Теорема 3. Пусть $\left(X^*, Y^*, W^*\right) = \left(x_{ij}^{k*}, y_{ij}^{k*}, k = 1,2, w_{ij}^*, \forall i, j\right)$ – оптимальный план задачи (29)–(33) без условия целочисленности. Тогда

$$x_{ij}^{k*} = M_{ij}^k y_{ij}^{k*},\ \forall i, j, k \tag{34}$$

$$x_{ij}^{1*} + x_{ij}^{2*} = M_{ij} w_{ij}^*, \forall i \in S_0^{++}, j \in S_0^{--}. \tag{35}$$

Доказательство. (Проводится аналогично доказательству теоремы 3.1. [7, с.304]). Если $y_{ij}^{k*} = 0,\ w_{ij}^* = 0$, то в силу (32) и $x_{ij}^{1*} = x_{ij}^{2*} = 0$, т.е. (34) также выполняются. Пусть $y_{ij}^{k*} > 0$, но $x_{ij}^k < M_{ij}^k y_{ij}^k$.

Тогда y_{ij}^{k*} можно уменьшить до тех пор, пока не будет выполняться (34). Ограничения (30)-(33) при этом нарушаться не будут, а значение целевой функции (29) уменьшится. Следовательно, план $\left(X^*, Y^*, W^*\right)$ не является оптимальным. Аналогично рассуждаем для (35). Теорема доказана.

Из теоремы 3 следует, что при поиске оптимального плана задачи (29)–(33) без условия целочисленности y_{ij}^k, w_{ij} из (34), (35) можно выразить y_{ij}^k, w_{ij} через x_{ij}^k:

$$y_{ij}^k = \frac{x_{ij}^k}{M_{ij}^k},\ w_{ij} = \frac{x_{ij}^1 + x_{ij}^2}{M_{ij}},$$

и прийти тем самым к задаче минимизации линейной формы

$$I\left(\sum_{i\in S_0^{++},\ j\in S_0^{--}} \frac{x_{ij}^1 + x_{ij}^2}{M_{ij}} + \sum_{\substack{i\in A_0^1,\ j\in S^{-+}\\ i\in S^{+-},\ j\in S_0^{--}}} \frac{x_{ij}^1}{M_{ij}^1} + \sum_{\substack{i\in A_0^2,\ j\in S^{+-}\\ i\in S^{-+},\ j\in S_0^{--}}} \frac{x_{ij}^2}{M_{ij}^2}\right) + \sum_{k=1}^{2}\sum_{j\in B^k} x_{0j}^k\left(\gamma_h + V\right) \to \min_{x_{ij}^k}. \quad (36)$$

Введем обозначения

$$c_{ij}^k = \frac{I}{M_{ij}^k},\ \left(\left(i\in A_0^1,\ j\in S^{-+}\right)\vee\left(i\in S^{+-},\ j\in S_0^{--}\right),\ k=1\right)\vee\left(\left(i\in A_0^2,\ j\in S^{+-},\right)\vee\left(i\in S^{-+},\ j\in S_0^{--}\right),\ k=2\right),$$

$$c_{0j}^k = \frac{I}{M_{0j}} + \gamma_h + V,\ j\in S^{--}, k=1,2,\quad c_{ij}^k = \frac{I}{M_{ij}},\ i\in S^{++},\ j\in S_0^{--}, k=1,2, \quad (37)$$

$$c_{0j}^1 = \frac{I}{M_{0j}^1} + \gamma_h + V,\ j\in S^{-+},\ c_{0j}^2 = \frac{I}{M_{0j}^2} + \gamma_h + V,\ j\in S^{+-},\ c_{ij}^k = \infty \textit{ остальные.}$$

Переписывая целевую функцию (36) с учетом (37), получаем двухпродуктовую ТЗ на сети с запретами, эквивалентную задаче (29)–(33) без условия целочисленности:

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{\forall i,\forall j} c_{ij}^k x_{ij}^k \to \min_{x_{ij}^k} \quad (38)$$

$$\sum_{j\in B_0^k} x_{ij}^k = a_i^k,\ i\in A^k,\ \sum_{i\in A_0^k} x_{ij}^k = b_j^k,\ j\in B^k,\ \sum_{j\in B^k} x_{0j}^k - \sum_{i\in A^k} x_{i0}^k = \sigma_0^k,\ k=1,2, \quad (39)$$

$$x_{ij}^k = 0,\ (i,j)\in\{i\in A^m, j\in B^n, m\neq n,\ m,n=1,2\}. \quad (40)$$

Так же как для задачи (23)-(25) возможна декомпозиция задачи (38)-(40) на две (отдельно для каждой валюты) ТЗ на сети, которые можно решить методом потенциалов.

Замечание 4. В случае запрета транзита через хранилище метод получения приближенного решения остается прежним, при этом для хранилища полагаем $\sigma_0^k = -\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^k, k=1,2$, а условия (39) примут вид

$$\sum_{j\in B_0^k} x_{ij}^k = a_i^k,\ i\in A_0^k,\ \sum_{i\in A_0^k} x_{ij}^k = b_j^k,\ j\in B_0^k,\quad k=1,2. \quad (41)$$

Замечание 5. После построения приближенного решения целесообразно выполнить 2-ую фазу эвристического алгоритма.

Замечание 6. Без принципиальных изменений описанный подход построения приближенного решения можно применить для построения плана перевозок с учетом транспортных затрат.

Пример 4. Рассмотрим задачу инкассации для 3 подразделений с параметрами $\sigma_1^1 = 3$, $\sigma_2^1 = -6$, $\sigma_3^1 = 5$, $\sigma_1^2 = -2$, $\sigma_2^2 = -1$, $\sigma_3^2 = 2$ $V = 0.01$, $I = 1$, $\gamma_h = 0.1$. Формируем множества $S^{++} = \{3\}$, $S^{--} = \{2\}$, $S^{+-} = \{1\}$, $S^{-+} = \varnothing$, $A^1 = \{1,3\}$ $A^2 = \{3\}$, $B^1 = \{2\}$, $B^2 = \{1,2\}$, и рассчитываем параметры $a_1^1 = 3,$ $a_3^1 = 5,$ $a_3^2 = 2,$ $b_2^1 = 6$, $b_1^2 = 2$, $b_2^2 = 1$, $M_{02} = M_{30} = M_{32} = 7$, $M_{10}^1 = M_{12}^1 = 3$, $M_{01}^2 = 3, M_{31}^2 = 2$. Матрица тарифов приближенной непрерывной задачи приведена в таблице 3.

Таблица 3. Матрица тарифов приближенной непрерывной задачи

k		1		2		
	i\j	**0**	**2**	**0**	**1**	**2**
1	**0**	∞	177/700	∞	∞	∞
	1	1/3	1/3	∞	∞	∞
	3	1/7	1/7	∞	∞	∞
2	**0**	∞	∞	∞	122/200	177/700
	3	∞	∞	1/7	1/2	1/7

После декомпозиции получаем задачу для первой валюты со множеством пунктов-поставщиков A^1, пунктов-потребителей B^1, транзитным пунктом 0 и тарифами $c_{ij}^1, i \in A_0^1, j \in B_0^1$, а также задачу для второй валюты со множеством пунктов-поставщиков A^2, пунктов-потребителей B^2 транзитным пунктом 0 и тарифами $c_{ij}^2, i \in A_0^2, j \in B_0^2$.

Решая эти две задачи методом потенциалов на сети [1] можно получить два альтернативных оптимальных плана задачи (38)-(40) со значением целевой функции (38) равным 2.967143 и ненулевыми перевозками $\tilde{X}^1 = \left\{x_{10}^1 = 2, x_{12}^1 = 1, x_{32}^1 = 5, x_{02}^2 = 1, x_{31}^2 = 2\right\}$ и $\tilde{X}^2 = \left\{x_{10}^1 = 1, x_{12}^1 = 2, x_{30}^1 = 1, x_{32}^1 = 4, x_{02}^2 = 1, x_{31}^2 = 2\right\}$. Планы $\tilde{X}^1, \tilde{X}^2$ являются приближенными оптимальными планами исходной задачи. При этом общие затраты составят $z(\tilde{X}^1) = 5I + \gamma_h + V$, $z(\tilde{X}^2) = 6I + \gamma_h + V$, соответственно

Заметим, что применение эвристического алгоритма также позволяет построить план перевозок $X^{Э1} = \left\{x_{10}^1 = 2, x_{12}^1 = 1, x_{32}^1 = 5, x_{02}^2 = 1, x_{31}^2 = 2\right\}$ с общими затратами, равными $z(X^{Э1}) = 5I + \gamma_h + V$. После применения второй фазы можно построить план $X^{Э2} = \left\{x_{10}^1 = 3, x_{12}^1 = 1, x_{02}^1 = 1, x_{02}^2 = 1, x_{31}^2 = 2\right\}$ с общими затратами $z(X^{Э2}) = 4I + 2(\gamma_h + V)$. В случае $2I > \gamma_h + V$ план $X^{Э2}$ оказывается лучше плана $X^{Э1}$.

Заключение. Построенная в работе модель задачи нахождения оптимального плана перевозок бригадой инкассаторов денежной валюты двух типов представляет собой многопродуктовую транспортную задачу с фиксированными доплатами особой структуры и запретными перевозками. Наличие специфического слагаемого в целевой функции не позволяет непосредственно применять для решения этой задачи известные методы. В работе для некоторых частных случаев построены алгоритмы точного нахождения оптимального (по критерию стоимости) плана перевозок, в общем случае предложен эвристический алгоритм, а также способ нахождения приближенного решения.

Предложенные в работе подходы можно использовать для разработки методов построения оптимальных планов перевозок денежной наличности с возможностью транзита через подразделения, с учетом расстояний между подразделениями и других требований.

Литература

1. *Гольштейн, Е.Г.* Задачи линейного программирования транспортного типа / Е.Г.Гольштейн, Д.Б.Юдин. – М.: Наука, 1969. – 384с.

2. *Цехан, О.Б.* Алгоритмизация решения одной задачи инкассации // О.Б.Цехан, А.Г. Дичковский. Informational systems and technologies (IST'2010): материалы VI Междунар. конф. (Минск, 24-25 нояб. 2010 г.) / редкол. : А.Н. Курбацкий (отв. ред.) [и др.] – Минск: А.Н. Вараксин, 2010. Стр.527-530.

3. *Бабаев, А.А.* Формализация и метод решения «задачи инкассатора» // Вестник СПбГУ. Сер. 5. 2010. Вып.1. Стр.134–142.

4. *Михалевич, В.С.* Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: Модели, методы, алгоритмы / В.С.. Михалевич, В.А.Трубин, Н.З Шор. – М.: Наука, 1986. – 264с.

5. *Бахтин, А.Е.* Дискретные задачи производственно-транспортного типа / А.Е.Бахтин, А.А.Колоколов, З.В.Коробкова. – Новосибирск. Наука, 1978. – 160с.

6. *Грешилов А.А.* Прикладные задачи математического программирования: учеб. пособие. – 2-ое изд. / А.А.Грешилов. М.:Логос, 2006. – 288 с.

7. *Корбут, А. А.* Дискретное программирование / А.А. Корбут, Ю.Ю. Финкельштейн; под ред. Д.Б. Юдина.– М. : Наука, 1969. – 368 с.

The model of search optimum (by criterion of minimisation of expenses) circuit designs of moving of a monetary cash by a team of collectors under condition of an interdiction of transit conveyances is builted. The model can be observed as model of a multigrocery transport problem with the fixed surcharges of specific structure. Exact algorithms of a finding of optimum circuit designs of moving of a monetary cash for special cases are proved. The heuristic algorithm for the general case is offered. The model of the transport problem which solution allows to gain an approximate solution of an initial problem for the general case is builted. Results of experiments are discussed with model and algorithms.

Цехан Ольга Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического и информационного обеспечения экономических систем ГрГУ им. Я. Купалы
Гродно, ул. Дзержинского, д.157.кв.8
контактный телефон (8-0152) 76-71-23, (8-029) 16-314-48

материалы представлены к публикации впервые

УДК 519.168:519.852.33

О.Б. Цехан

Моделирование и алгоритмизация одной задачи планирования многопродуктовых перевозок с запрещенным транзитом

Рассматривается задача построения оптимального плана перевозок денежной наличности бригадой инкассаторов. Построена модель оптимизации (по критерию минимизации затрат на инкассацию) плана перевозок при условии запрета транзитных перевозок через подразделения. Показано, что ее можно рассматривать как модель многопродуктовой транспортной задачи с фиксированными доплатами особой структуры и запретными перевозками. Обоснованы точные алгоритмы нахождения оптимальных планов перевозок для частных случаев. В общем случае предложен эвристический алгоритм. Построена модель непрерывной транспортной задачи с запретными перевозками, решение которой позволяет получить приближенное решение исходной задачи для общего случая. Приведены примеры реализации предложенных алгоритмов и методов.

Ключевые слова: задача инкассатора, транспортная задача, фиксированные доплаты, эвристический алгоритм

The model of search optimum (by criterion of minimisation of expenses) circuit designs of moving of a monetary cash by a team of collectors under condition of an interdiction of transit conveyances is builted. The model can be observed as model of a multigrocery transport problem with the fixed surcharges of specific structure. Exact algorithms of a finding of optimum circuit designs of moving of a monetary cash for special cases are proved. The heuristic algorithm for the general case is offered. The model of the transport problem which solution allows to gain an approximate solution of an initial problem for the general case is builted. Results of experiments are discussed with model and algorithms.

Keywords: collector problem, transport problem, a fixed surcharge, heuristic algorithm

Цехан Ольга Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического и информационного обеспечения экономических систем ГрГУ им. Я. Купалы
Гродно, ул. Дзержинского, д.157.кв.8
контактный телефон (8-0152) 76-71-23, (8-029) 16-314-48

Tsekhan Volha

Цэхан Вольга Барысаўна

tsekhan@grsu.by