А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов экономических специальностей вузов

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1978

517
К 89
УДК 681.3.06 (075.8)

Рецензенты: кафедра экономико-математических методов Киевского института народного хозяйства им. Д. С. Коротченко; кафедра экономической кибернетики Латвийского государственного университета им. П. Стучки.

Кузнецов А. В., Холод Н. И., Костевич Л. С.

К 89 Руководство к решению задач по математическому программированию.— Мн.: Вышэйш. школа, 1978.— 256 с., ил.

Учебное пособие соответствует программе курса «Математическое программирование» для экономических специальностей вузов. В основном используется аппарат жордановых исключений. Приводится теоретический материал, необходимый для решения практических задач. Различные приемы решения задач иллюстрируются примерами. Большое внимание уделено задачам производственного характера. Дано достаточное количество задач для самостоятельного решения. Все задачи снабжены ответами.

Предназначается для студентов экономических специальностей вузов.— Список лит. на с. 255.

К $\frac{20204-091}{М304(05)-78}$ 44—78 517

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие составлено в соответствии с действующей программой курса «Математическое программирование» и предназначено для студентов всех форм обучения по экономическим специальностям. Пособие будет особенно полезно лицам, занимающимся в заочной и вечерней системе, а также тем, кто самостоятельно изучает математическое программирование и желает приобрести необходимые навыки в решении задач, но не имеет повседневной квалифицированной помощи преподавателя.

В начале каждой главы приведены краткие теоретические сведения, необходимые для решения практических вопросов. Далее на большом количестве примеров иллюстрируются различные приемы решения задач. Значительное внимание уделено задачам производственного характера. Решения задач начинаются, как правило, с построения экономико-математических моделей. Для большинства задач проводится экономический анализ полученных результатов. Везде, где возможно, даны наглядные геометрические иллюстрации. В каждом параграфе приводится достаточное количество задач для самостоятельного решения. Вычислительные задачи снабжены ответами. Большинство задач носит условный характер, а числовые данные специально подобраны так, чтобы решения допускали «ручной» счет.

В конце § 9.3; 10.5; 10.6 приведены варианты однотипных задач, которые можно использовать при составлении контрольных заданий для студентов-заочников. Там же даны образцы решения таких задач.

Необходимо отметить, что для глубокого изучения математического программирования наряду с данным пособием нужно пользоваться каким-либо учебным пособием по теории предмета (см. список литературы).

При подготовке пособия работа между авторами была распределена следующим образом: А. В. Кузнецов написал главы 1—3, 9, параграфы 5.6; 5.7; 10.5; 10.6 и предисловие;

Н. И. Холод — главы 6, 7, 11 и параграфы 5.1—5.5; Л. С. Костевич — главы 4, 8 и параграфы 10.1—10.4.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам: докт. эконом. наук, профессору кафедры экономико-математических методов Киевского института народного хозяйства им. Д. С. Коротченко *Л. Л. Терехову*, канд. техн. наук, доценту той же кафедры *А. Д. Шарапову*, канд. эконом. наук, доценту кафедры экономической кибернетики Латвийского государственного университета им. П. Стучки *И. Л. Акуличу* и и. о. доцента той же кафедры *Д. Я. Клявинь* за ценные замечания, способствовавшие улучшению этого пособия.

Авторы просят все критические замечания и пожелания посылать по адресу: 220004, Минск, Парковая магистраль, 11, Дом книги, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

Глава 1. ЖОРДАНОВЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ

§ 1.1. Обыкновенные и модифицированные жордановы исключения

Рассмотрим одно алгебраическое преобразование, лежащее в основе удобного вычислительного аппарата, используемого в математическом программировании. Начнем с числового примера.

Пусть систему линейных функций y_1 и y_2

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - 5x_2 + 4x_3; \\ y_2 &= 8x_1 + 2x_2 - 3x_3, \end{aligned}\right\}$$

зависящих от x_1, x_2, x_3, требуется преобразовать так, чтобы какие-либо две переменные, например y_2 и x_3, поменялись ролями, т. е. y_2, являющаяся зависимой, после преобразования стала независимой, а x_3, которая в данной записи является независимой, стала зависимой.

Для решения поставленной задачи второе равенство надо разрешить относительно x_3, полученное выражение подставить вместо x_3 в первое равенство системы и после этого произвести упрощения:

$$\frac{1}{-3} y_2 = \frac{8}{-3} x_1 + \frac{2}{-3} x_2 + x_3,$$

откуда

$$x_3 = -\left(\frac{8}{-3} x_1 + \frac{2}{-3} x_2\right) + \frac{1}{-3} y_2.$$

Полученное выражение подставим в первое равенство и упростим:

$$y_1 = 2x_1 - 5x_2 + 4\left(-\frac{8}{-3} x_1 - \frac{2}{-3} x_2 + \frac{1}{-3} y_2\right) =$$

$$= \left(2 - \frac{4 \cdot 8}{-3}\right) x_1 + \left(-5 - \frac{4 \cdot 2}{-3}\right) x_2 + \frac{4}{-3} y_2.$$

Преобразованная система приняла следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{2\cdot(-3)-4\cdot 8}{-3}x_1+\frac{(-5)\cdot(-3)-4\cdot 2}{-3}x_2+\frac{4}{-3}y_2; \\ x_3 &= \left(-\frac{8}{-3}\right)x_1+\left(-\frac{2}{-3}\right)x_2+\frac{1}{-3}y_2. \end{aligned}\right\}$$

В дальнейшем все преобразования мы будем выполнять применительно к табличным записям систем. Представим поэтому данную и преобразованную системы в форме табл. 1.1 и 1.2.

Таблица 1.1

	x_1	x_2	x_3
$y_1=$	2	−5	4
$y_2=$	8	2	−3

Таблица 1.2

	x_1	x_2	y_2
$y_1=$	$\frac{2\cdot(-3)-4\cdot 8}{-3}$	$\frac{(-5)\cdot(-3)-4\cdot 2}{-3}$	$\frac{4}{-3}$
$x_3=$	$-\frac{8}{-3}$	$-\frac{2}{-3}$	$\frac{1}{-3}$

Рассмотренный пример с табличной записью данных и результатов преобразования поможет яснее понять сущность *шага жорданова исключения,* к изложению которого мы переходим.

Пусть дана система m линейных функций (форм) $y_1, \ldots, y_m$ от n неизвестных $x_1, \ldots, x_n$:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j, \tag{1.1}$$

где a_{ij} — постоянные величины $(i=\overline{1,\ m};\ j=\overline{1,\ n})$.

Представим систему (1.1) в форме таблицы (табл. 1.3),

Таблица 1.3

	x_1	. . .	x_j	. . .	x_s	. . .	x_n
$y_1=$	a_{11}	. . .	a_{1j}	. . .	a_{1s}	. . .	a_{1n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$y_i=$	a_{i1}	. . .	a_{ij}	. . .	a_{is}	. . .	a_{in}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$y_k=$	a_{k1}	. . .	a_{kj}	. . .	$\boxed{a_{ks}}$	. . .	a_{kn}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$y_m=$	a_{m1}	. . .	a_{mj}	. . .	a_{ms}	. . .	a_{mn}

которую в дальнейшем будем называть *жордановой*. От табличной записи легко перейти к обычной записи системы. Для этого надо умножить элементы a_{ij} i-й строки на соответствующие неизвестные x_j, стоящие в верхней заглавной строке, полученные произведения сложить и сумму приравнять y_i.

Выберем из системы (1.1) какое-либо уравнение, например k-е,

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \tag{1.2}$$

и предположим, что коэффициент при x_s в уравнении (1.2) отличен от нуля, т. е. $a_{ks} \neq 0$. Затем представим себе схематизированную алгебраическую операцию перераспределения ролей между зависимой переменной y_k и независимой x_s, т. е. операцию решения уравнения (1.2) относительно переменной x_s:

$$x_s = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} \frac{a_{kj}}{a_{ks}} x_j + \frac{1}{a_{ks}} y_k, \tag{1.3}$$

подстановки полученного выражения (1.3) во все остальные уравнения системы (1.1), приведения подобных членов и записи преобразованной таким образом системы в форме новой жордановой таблицы. Описанную операцию будем называть *шагом обыкновенного жорданова исключения*, произведенным над табл. 1.3 с разрешающим элементом a_{ks}, с k-й разрешающей строкой и s-м разрешающим столбцом.

Выясним, как преобразуются элементы табл. 1.3 в результате шага обыкновенного жорданова исключения. С этой целью значение x_s из выражения (1.3) подставим в остальные равенства системы (1.1) и выполним необходимые преобразования:

$$y_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} a_{ij}x_j + a_{is}x_s = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} a_{ij}x_j + a_{is}\left(-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} \frac{a_{kj}}{a_{ks}} x_j + \frac{1}{a_{ks}} y_k\right) =$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} \left(a_{ij} - \frac{a_{is}a_{kj}}{a_{ks}}\right) x_j + \frac{a_{is}}{a_{ks}} y_k. \tag{1.4}$$

Обозначим в системе (1.4)

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}\, a_{ks} - a_{is}\, a_{kj}}{a_{ks}} \quad (i \neq k,\ j \neq s). \tag{1.5}$$

Тогда система (1.4) запишется в виде

$$y_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} b_{ij} x_j + \frac{a_{is}}{a_{ks}} y_k \quad (i=1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, m). \qquad (1.6)$$

Преобразованную систему (1.3), (1.6) перепишем в форме жордановой таблицы (табл. 1.4). Сопоставляя табл. 1.3 и 1.4,

Таблица 1.4

	x_1	...	y_k	...	x_n
$y_1 =$	b_{11}	...	$\frac{a_{1s}}{a_{ks}}$	...	b_{1n}
...	...	...	...	...	...
$x_s =$	$-\frac{a_{k1}}{a_{ks}}$	...	$\frac{1}{a_{ks}}$	...	$-\frac{a_{kn}}{a_{ks}}$
...	...	...	...	...	...
$y_m =$	b_{m1}	...	$\frac{a_{ms}}{a_{ks}}$	...	b_{mn}

нетрудно заметить, что один шаг обыкновенного жорданова исключения с разрешающим элементом a_{ks} переводит табл. 1.3 в новую табл. 1.4 по схеме, состоящей из следующих четырех правил:

1) *разрешающий элемент заменяется обратной величиной;*

2) *остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент и меняют знаки;*

3) *остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент;*

4) *прочие элементы вычисляются по формуле* (1.5).

На практике при вычислении элементов по формуле (1.5) удобно пользоваться правилом прямоугольника. Чтобы выяснить его суть, рассмотрим фрагмент табл. 1.3, содержащий элементы, входящие в формулу (1.5):

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{is} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & a_{kj} & \ldots & \boxed{a_{ks}} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Они расположены в вершинах воображаемого «прямоугольника». Диагональ этого прямоугольника, на которой расположены разрешающий a_{ks} и преобразуемый a_{ij} элементы, назовем *главной*, а другую диагональ — *побочной*. Тогда из формулы (1.5) непосредственно следует, что *преобразованный элемент* b_{ij} *равен разности произведений элементов, рас-*

положенных на главной и побочной диагоналях, деленной на разрешающий элемент.

Сформулированного правила следует придерживаться независимо от того, в какой вершине прямоугольника расположен разрешающий элемент.

Из формулы (1.5) видно, что если в разрешающей строке некоторый элемент $a_{kj}=0$, то $b_{ij}=a_{ij}$, т. е. элементы столбца, в котором расположен нулевой элемент разрешающей строки, остаются после шага жорданова исключения без изменения. Аналогично: если в разрешающем столбце есть нулевой элемент ($a_{is}=0$), то соответствующая ему строка остается на данном шаге неизменной, так как $b_{ij}=a_{ij}$.

Пример 1.1. Преобразовать систему линейных функций

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - 7x_2 + 4x_3; \\ y_2 &= -x_1 + 5x_2 - 3x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

так, чтобы переменная x_3 стала зависимой, а переменная y_2 — независимой.

Решение. Запишем систему (1.7) в форме жордановой таблицы (табл. 1.5) и за разрешающий примем элемент (—3).

Таблица 1.5

	x_1	x_2	x_3
$y_1 =$	2	—7	4
$y_2 =$	—1	5	$\boxed{-3}$

Таблица 1.6

	x_1	x_2	y_2
$y_1 =$	2/3	—1/3	—4/3
$x_3 =$	—1/3	5/3	—1/3

Разрешающими будут вторая строка и третий столбец. Сделав шаг обыкновенного жорданова исключения по правилам 1—4, приходим к табл. 1.6. Возвращаясь к обычной записи, получаем систему

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2/3x_1 - 1/3x_2 - 4/3y_2; \\ x_3 &= -1/3x_1 + 5/3x_2 - 1/3y_2, \end{aligned}\right\}$$

в которой x_3 является зависимой, а y_2 — независимой переменной.

Вместо обыкновенных часто пользуются так называемыми *модифицированными жордановыми исключениями*, при которых система (1.1) записывается в форме жордановой таблицы вида 1.7, отличающейся от табл. 1.3 тем, что переменные в заглавной строке записаны со знаком минус.

Можно показать, что один шаг модифицированного жорданова исключения переводит табл. 1.7 в новую таблицу по следующим правилам:

1) *разрешающий элемент заменяется обратной величиной;*

2) *остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;*

Таблица 1.7

	$-x_1$	...	$-x_n$
$y_1 =$	$-a_{11}$	...	$-a_{1n}$
....	...	...	...
$y_m =$	$-a_{m1}$	...	$-a_{mn}$

3) *остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знаки;*

4) *прочие элементы вычисляются по формуле* (1.5).

В отличие от обыкновенных исключений в модифицированных незначительно изменились лишь правила 2 и 3.

Пример 1.2. Систему

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -2x_1 + 5x_2 + x_3; \\ y_2 &= -4x_1 \qquad\quad -3x_3; \\ y_3 &= \quad\; x_1 - 2x_2 + 6x_3 \end{aligned}\right\}$$

преобразовать так, чтобы x_1 стала зависимой, а y_2 — независимой.

Решение. Запишем систему в форме табл. 1.7 и над полученной табл. 1.8 произведем шаг модифицированного жорданова исключения с разрешающими второй строкой и первым столбцом. В результате приходим к табл. 1.9, из которой получаем преобразованную систему функций

Таблица 1.8

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$y_1 =$	2	−5	−1
$y_2 =$	$\boxed{4}$	0	3
$y_3 =$	−1	2	−6

Таблица 1.9

	$-y_2$	$-x_2$	$-x_3$
$y_1 =$	−1/2	−5	−5/2
$x_1 =$	1/4	0	3/4
$y_3 =$	1/4	2	−21/4

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \quad 1/2y_2 + 5x_2 + 5/2x_3; \\ x_1 &= -1/4y_2 \qquad\quad - 3/4x_3; \\ y_3 &= -1/4y_2 - 2x_2 + 21/4x_3. \end{aligned}\right\}$$

В этой системе по сравнению с данной переменные x_1 и y_2 поменялись ролями: x_1 стала зависимой, а y_2 — независимой.

Теоретической основой использования аппарата жордановых исключений в линейной алгебре и математическом программировании служит следующая

Теорема 1.1. *Если в жордановой таблице при $m \leqslant n$ все строки линейно независимы, то в результате m последовательных шагов жордановых исключений все y_i можно «перебросить» на верх таблицы.*

При решении задач можно пользоваться как обыкновенными, так и модифицированными исключениями. Мы будем применять главным образом модифицированные жордановы исключения и ради краткости в дальнейшем будем именовать их просто жордановыми исключениями.

§ 1.2. Решение систем линейных уравнений

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = a_{m0}. \end{array}\right\} \tag{1.8}$$

Пусть ранг матрицы коэффициентов $\|a_{ij}\|$ $(i=\overline{1, m};\ j=\overline{1, n})$ равен r. Перепишем уравнения системы (1.8) в форме нуль-равенств

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a_{10} + a_{11}(-x_1) + \ldots + a_{1n}(-x_n); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = a_{m0} + a_{m1}(-x_1) + \ldots + a_{mn}(-x_n) \end{array}\right\}$$

и полученную систему запишем в жорданову таблицу (табл. 1.10).

Таблица 1.10

	1	$-x_1$	...	$-x_n$
$0=$	a_{10}	a_{11}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...
$0=$	a_{m0}	a_{m1}	...	a_{mn}

Над табл. 1.10 можно произвести лишь r последовательных шагов жордановых исключений. В результате получится, например, таблица вида табл. 1.11.

Система (1.8) совместна тогда и только тогда, когда для некоторой совокупности значений $x_1, \ldots, x_n$ выполняются одновременно все равенства (1.8). Это возможно в том и только в том случае, если в табл. 1.11

$$b_{r+1,\,0} = \ldots = b_{m0} = 0.$$

Таблица 1.11

	1	0	...	0	$-x_{r+1}$	...	$-x_n$
$x_1 =$	b_{10}	b_{11}	...	b_{1r}	$b_{1,r+1}$	...	b_{1n}
...	...	...	...	...	...	...	...
$x_r =$	b_{r0}	b_{r1}	...	b_{rr}	$b_{r,r+1}$	...	b_{rn}
$0 =$	$b_{r+1,0}$	$b_{r+1,1}$	...	$b_{r+1,r}$	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...
$0 =$	b_{m0}	b_{m1}	...	b_{mr}	0	...	0

Если хотя бы один из свободных членов $b_{r+1,0}, \ldots, b_{m0}$ отличен от нуля, то система (1.8) несовместна.

В случае совместности системы из табл. 1.11 получаем общее решение системы (1.8):

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b_{10} - b_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - b_{1n}x_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b_{r0} - b_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - b_{rn}x_n. \end{array}\right\} \quad (1.9)$$

При практическом решении задач столбцы под переброшенными на верх таблицы нулями (а такими столбцами являются разрешающие) опускают за ненадобностью.

Придавая в равенствах (1.9) переменным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ произвольные числовые значения $x_{r+1} = \alpha_{r+1}, \ldots, x_n = \alpha_n$, вычисляют соответствующие значения остальных неизвестных:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b_{10} - b_{1,r+1}\alpha_{r+1} - \ldots - b_{1n}\alpha_n = \alpha_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b_{r0} - b_{r,r+1}\alpha_{r+1} - \ldots - b_{rn}\alpha_n = \alpha_r \end{array}\right\}$$

и тем самым получают частное решение $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ системы (1.8). Таким путем можно найти бесконечное множество решений системы (1.8).

В частном случае, когда $r = n$, через n шагов жордановых исключений все переменные $x_1, \ldots, x_n$ окажутся в левом заглавном столбце табл. 1.11, а их место на верху таблицы займут нули, поэтому система (1.8) будет иметь единственное решение: $x_1 = b_{10}, \ldots, x_n = b_{n0}$.

Итак, *для решения системы линейных уравнений ее надо записать в форме жордановой таблицы и проделать возможное число шагов жордановых исключений, вычеркивая после каждого шага разрешающий столбец и строки, если они целиком состоят из нулевых элементов. Если в ходе исключений поя-*

вится строка, все элементы которой, кроме свободного члена, равны нулю, то данная система несовместна. В противном случае система совместна. При этом она имеет бесчисленное множество решений, если в верхней заглавной строке последней жордановой таблицы останется хотя бы одна переменная, и единственное решение, если все переменные окажутся в левом заглавном столбце.

Пример 1.3. Найти решение системы

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 &= -3; \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 &= 0; \\ x_1 + x_3 - 2x_4 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Запишем систему в виде жордановой таблицы и сделаем два шага жордановых исключений (табл. 1.12—1.14). При этом разрешающими можно брать любые, отличные от нуля, элементы основной части таблицы (кроме элементов столбца свободных членов).

Таблица 1.12

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$0=$	-3	1	2	1	-6
$0=$	0	1	$\boxed{1}$	1	-4
$0=$	3	1	0	1	-2

Таблица 1.13

	1	$-x_1$	$-x_3$	$-x_4$
$0=$	-3	-1	-1	2
$x_2=$	0	1	1	-4
$0=$	3	$\boxed{1}$	1	-2

Таблица 1.14

	1	$-x_3$	$-x_4$
$0=$	0	0	0
$x_2=$	-3	0	-2
$x_1=$	3	1	-2

Из табл. 1.14 выпишем общее решение данной системы:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -x_3 + 2x_4 + 3; \\ x_2 &= 2x_4 - 3, \end{aligned}\right\}$$

где x_3 и x_4 могут принимать любые значения.

Пример 1.4. Найти решение системы

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 \phantom{{}+x_3} - x_4 &= 5; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 3; \\ x_1 \phantom{{}-3x_2} + 2x_3 - x_4 &= 3; \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Записав систему в виде табл. 1.15 и подвергнув ее четырем шагам жордановых исключений (табл. 1.15—

Таблица 1.15

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0=	5	1	4	0	—1
0=	3	2	—3	1	1
0=	3	$\boxed{1}$	0	2	—1
0=	3	0	2	—3	2

Таблица 1.16

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0 =	2	4	—2	0
0 =	—3	$\boxed{-3}$	—3	3
x_1=	3	0	2	—1
0 =	3	2	—3	2

Таблица 1.17

	1	$-x_3$	$-x_4$
0 =	—2	—6	4
x_2 =	1	1	—1
x_1 =	3	2	—1
0 =	1	—5	$\boxed{4}$

Таблица 1.18

	1	$-x_3$
0 =	—3	$\boxed{-1}$
x_2 =	5/4	—1/4
x_1 =	3/4	13/4
x_4 =	1/4	—5/4

Таблица 1.19

	1
x_3 =	3
x_2 =	2
x_1 =	1
x_4 =	4

1.19), видим, что система имеет единственное решение: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$.

Пример 1.5. Найти решение системы

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1; \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 2; \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 4. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Записав систему в таблицу и сделав два шага жордановых исключений (табл. 1.20—1.22), приходим к таблице, во второй строке которой свободный член отличен от нуля, а остальные элементы равны нулю. Система несовместна.

Таблица 1.20

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$0 =$	1	$\boxed{1}$	1	1
$0 =$	2	3	4	5
$0 =$	4	4	5	6

Таблица 1.21

	1	$-x_2$	$-x_3$
$x_1 =$	1	1	1
$0 =$	-1	1	2
$0 =$	0	$\boxed{1}$	2

Таблица 1.22

	1	$-x_3$
$x_1 =$	1	-1
$0 =$	-1	0
$x_2 =$	0	2

Упражнения

Решить следующие системы линейных уравнений:

1.1. $$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 17x_2 - 6x_3 - 5x_4 &= -17; \\ 43x_1 + 24x_2 - x_3 + 3x_4 &= 28; \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 9; \\ 2x_1 + x_2 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

1.2. $$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 14; \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 7. \end{aligned}\right\}$$

1.3. $$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= -2; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= 4. \end{aligned}\right\}$$

1.4. $$\left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2+5x_3+4x_4&=3;\\ 4x_1-4x_2-4x_3-16x_4&=-8;\\ 4x_1+x_2+4x_3&=2.\end{aligned}\right\}$$

1.5. $$\left.\begin{aligned} 2x_1-3x_2+5x_3+7x_4&=1;\\ 4x_1-6x_2+2x_3+3x_4&=2;\\ 2x_1-3x_2-11x_3-15x_4&=1.\end{aligned}\right\}$$

1.6. $$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5&=2;\\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5&=3;\\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5&=9;\\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5&=1.\end{aligned}\right\}$$

§ 1.3. Базисные решения системы линейных уравнений

Введем понятие базисного решения системы линейных уравнений. Рассмотрим m-мерные векторы, координаты которых равны коэффициентам при неизвестных и свободным членам уравнений системы (1.8):

$$\bar{a}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\ \cdots\\ a_{m1}\end{pmatrix};\ \ldots;\bar{a}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \cdots\\ a_{mn}\end{pmatrix};\quad \bar{a}_0=\begin{pmatrix}a_{10}\\ \cdots\\ a_{m0}\end{pmatrix}.$$

С помощью этих векторов систему (1.8) можно записать в виде

$$\bar{a}_1x_1+\ldots+\bar{a}_nx_n=\bar{a}_0.$$

На основании полученного соотношения можно заключить, что решение системы уравнений (1.8) сводится к нахождению коэффициентов разложения $x_1, \ldots, x_n$ вектора $\bar{a}_0$ по векторам $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$. В § 1.2 эти коэффициенты находились методом жордановых исключений.

В результате жордановых исключений расширенная матрица системы линейных уравнений (1.8)

$$\begin{pmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} & a_{10}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & \ldots & a_{mr} & a_{m,r+1} & \ldots & a_{mn} & a_{m0}\end{pmatrix}$$

приняла следующий вид:

$$\begin{pmatrix}1 & \ldots & 0 & b_{1,r+1} & \ldots & b_{1n} & b_{10}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & \ldots & 1 & b_{r,r+1} & \ldots & b_{rn} & b_{r0}\end{pmatrix},$$

т. е. векторы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r$ преобразовались в единичные. Из этого следует, что векторы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r$ линейно независимы и составляют базис системы векторов $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$. Систему r уравнений, в которой столбцы коэффициентов при r неизвестных являются единичными векторами, будем называть *приведенной к единичному базису.* Иногда систему в такой записи называют *приведенной к разрешенному виду.*

Переменные $x_1, \ldots, x_r$, соответствующие векторам базиса $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r$, называют *базисными*, а весь набор базисных переменных $x_1, \ldots, x_r$ — *базисом системы переменных* $x_1, \ldots, x_n$. Переменные $x_{r+1}, \ldots, x_n$, соответствующие векторам $\bar{a}_{r+1}, \ldots, \bar{a}_n$, называют *свободными* (им можно придавать в общем решении (1.9) произвольные числовые значения).

Если в общем решении (1.9) системы (1.8) свободным переменным придать нулевые значения, то полученное частное решение $x_1=b_{10}, \ldots, x_r=b_{r0}, x_{r+1}=0, \ldots, x_n=0$ или, в векторной записи $(b_{10}, \ldots, b_{r0}, 0, \ldots, 0)$, называется *базисным.*

Так, в примере 1.3 базисным будет решение: $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=0$, $x_4=0$, или $(3; -3; 0; 0)$.

Вообще говоря, из данной системы n векторов $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ можно выбрать максимально C_n^r различных базисов, где

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)]}{1\cdot 2\ldots r}.$$

Каждому такому базису будут отвечать базис системы переменных $x_1, \ldots, x_n$ и соответствующее базисное решение. Из сказанного следует, что максимально возможное число базисных решений C_n^r. Однако в действительности их может оказаться меньше, ибо некоторые группы по r векторов могут быть линейно зависимы и, следовательно, не будут образовывать базиса. Не будут образовывать базиса и соответствующие этим векторам переменные.

Чтобы найти базисные решения системы уравнений, нужно преобразовывать систему, последовательно переходя от одного единичного базиса к другому. Мы будем это делать с помощью жордановых исключений.

Пример 1.6. Найти базисные решения системы

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad &= 14; \\ 2x_1 \qquad - 3x_3 &= 7; \\ 2x_2 + x_3 &= 7. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Записав систему в таблицу и сделав два шага жордановых исключений, приходим к табл. 1.23, из которой

Таблица 1.23

	1	$-x_2$
$x_1 =$	14	3
$x_3 =$	7	$\boxed{2}$

Таблица 1.24

	1	$-x_3$
$x_1 =$	7/2	$\boxed{-3/2}$
$x_2 =$	7/2	1/2

Таблица 1.25

	1	$-x_1$
$x_2 =$	14/3	
$x_3 =$	—7/3	

при $x_2=0$ получаем $x_1=14$, $x_3=7$. Итак, в базисе x_1, x_3 базисное решение найдено: (14; 0; 7).

В табл. 1.23 содержится две строки, следовательно, ранг r данной системы уравнений равен 2, а $n=3$, поэтому система может иметь не более $C_3^2=3\cdot 2/1\cdot 2=3$ базисных решений. Другими базисами переменных могут быть группы: x_1, x_2 и x_2, x_3.

Преобразовав табл. 1.23 шагом жорданова исключения с разрешающим элементом 2, приходим к табл. 1.24, отвечающей базису x_1, x_2. Из этой таблицы выписываем еще одно базисное решение: (7/2; 7/2; 0).

Если теперь табл. 1.23 преобразовать шагом жорданова исключения с разрешающим элементом 3, то получим табл. 1.25, из которой находится и третье базисное решение, соответствующее базису x_2, x_3: (0; 14/3; —7/3).

Последнее базисное решение можно получить и иначе: преобразовав табл. 1.24 шагом жорданова исключения с разрешающим элементом —3/2.

Пример 1.7. Найти все базисные решения системы

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+x_2-9x_3 \qquad &= 4; \\ x_1 \qquad -3x_3+x_4 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Каждая из переменных x_2 и x_4 входит только в одно из уравнений системы. Это свидетельствует о том, что система приведена к единичному базису и переменные x_2 и x_4 составляют один из базисов системы переменных x_1, x_2, x_3, x_4. Поэтому при нулевых значениях свободных переменных x_1 и x_3 получаем одно из базисных решений: (0; 4; 0; 2).

В данном случае $r=2$, $n=4$, поэтому всего базисных решений может быть не более $C_4^2=4\cdot 3/1\cdot 2=6$. Другими базисами могут оказаться следующие группы переменных: x_1, x_2; x_1, x_3; x_1, x_4; x_2, x_3; x_3, x_4.

Представим данную систему в виде таблицы (табл. 1.26). Взяв разрешающим элемент $a_{21}=1$ и сделав с ним шаг жорданова исключения, перейдем от базиса x_2, x_4 к новому базису x_1, x_2 (табл. 1.27) и при $x_3=x_4=0$ получим еще одно базисное решение: (2; —2; 0; 0).

Таблица 1.26

	1	$-x_1$	$-x_3$
$x_2 =$	4	3	-9
$x_4 =$	2	$\boxed{1}$	-3

Таблица 1.27

	1	$-x_4$	$-x_3$
$x_2 =$	-2	-3	0
$x_1 =$	2	1	-3

Нетрудно заметить, что табл. 1.27 преобразовать шагом жорданова исключения с разрешающими первой строкой и вторым столбцом нельзя, так как элемент, стоящий на пересечении указанных строки и столбца, равен нулю. Значит, группа переменных x_1, x_3 составить базис не может.

Преобразовывая последовательно шагами жордановых исключений табл. 1.26 и 1.27, получаем табл. 1.28—1.30, в которых содержатся другие базисные решения: (4/3; 0; 0; 2/3); (0; —2; —2/3; 0); (0; 0; —4/9; 2/3). Итак, данная система имеет пять базисных решений.

Таблица 1.28

	1	$-x_2$	$-x_3$
$x_4 =$	2/3		
$x_1 =$	4/3		

Таблица 1.29

	1	$-x_4$	$-x_1$
$x_2 =$	-2		
$x_3 =$	$-2/3$		

Таблица 1.30

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_3 =$	$-4/9$		
$x_4 =$	2/3		

Таблица 1.31

	1	...	$-x_s$	...
...	...	...	...	...
$0 =$	a_{l0}	...	a_{ls}	...
...	...	...	...	...
$0 =$	a_{k0}	...	$\boxed{a_{ks}}$	...
...	...	...	...	...

В экономических задачах отрицательные значения переменных, как правило, не имеют реального смысла. Поэтому рассмотрим способ отыскания неотрицательных решений системы линейных уравнений, т. е. решений, среди компонентов которых нет отрицательных чисел. Примерами неотрицательных решений могут служить базисные решения (0; 4; 0; 2) и (4/3; 0; 0; 2/3), полученные нами из табл. 1.26 и 1.28.

Неотрицательные базисные решения занимают особое место в математическом программировании и называются *опорными решениями (планами)*.

Рассмотрим способ отыскания опорных решений. Предположим, что в табл. 1.10 все элементы столбца свободных членов неотрицательны. Выясним, как сохранить неотрицательность свободных членов в процессе жордановых исключений.

Пусть первый шаг жорданова исключения производится с разрешающим элементом a_{ks} (табл. 1.31). После сделанного шага свободный член в разрешающей строке

$$a_{k0}/a_{ks} \tag{1.10}$$

будет неотрицательным, если $a_{ks}>0$, т. е. если разрешающий элемент положителен ($a_{k0}\geqslant 0$ по предположению). Это первое требование к разрешающему элементу.

Пусть отношение (1.10) выполняется. Тогда после шага жорданова исключения свободный член произвольной (i-й) строки, равный

$$\frac{a_{i0}a_{ks}-a_{is}a_{k0}}{a_{ks}}=a_{i0}-\frac{a_{is}\,a_{k0}}{a_{ks}},$$

будет неотрицательным, если

$$a_{i0}\geqslant\frac{a_{is}\,a_{k0}}{a_{ks}}. \tag{1.11}$$

Так как $a_{i0}\geqslant 0$, $a_{k0}\geqslant 0$, $a_{ks}>0$, то неравенство (1.11) справедливо при любом отрицательном a_{is}.

Пусть теперь $a_{is}>0$, тогда неравенство (1.11) можно переписать в виде

$$\frac{a_{k0}}{a_{ks}}\leqslant\frac{a_{i0}}{a_{is}}.$$

Этим неравенством выражается второе требование к разрешающему элементу: отношение свободного члена разрешающей строки к разрешающему элементу должно удовлетворять условию минимальности, т. е. оно должно быть наименьшим из всех отношений свободных членов к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца.

Если такому требованию удовлетворяет сразу несколько отношений, то разрешающий элемент можно взять в любой строке, соответствующей одному из этих отношений.

Итак, *для отыскания опорного решения системы линейных уравнений ее нужно представить в виде жордановой таблицы так, чтобы все свободные члены были неотрицательны, а затем произвести возможное число шагов жордановых исключений,* *выбирая разрешающие элементы среди положительных чисел основной части таблицы по наименьшему отношению свободных членов к соответствующим положительным элементам столбца, выбранного разрешающим. Искомое опорное решение найдется приравниванием верхних (свободных) переменных нулю, а базисных (боковых) — свободным членам.*

Если в ходе жордановых исключений встретится 0-строка, в которой все элементы неположительны, а свободный член неотрицателен, то данная система не имеет неотрицательных (в частности, опорных) решений, хотя и является совместной.

Пример 1.8. Найти опорное решение системы

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3; \\ 2x_1 - x_2 \qquad + x_4 &= 2; \\ 3x_1 \qquad - x_3 - x_4 &= -1. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Запишем систему в виде таблицы, умножив предварительно третье уравнение на (—1) (напомним, что в исходной таблице все свободные члены должны быть неотрицательными) (табл. 1.32). В качестве разрешающего можно

Таблица 1.32

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0 =	3	2	—1	1	—1
0 =	2	2	—1	0	1
0 =	1	—3	0	$\boxed{1}$	1

Таблица 1.33

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_4$
0 =	2	$\boxed{5}$	—1	—2
0 =	2	2	—1	1
x_3=	1	—3	0	1

взять любой столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент. Возьмем, например, третий столбец. Разрешающую строку определим по наименьшему отношению свободных членов к положительным элементам третьего столбца: $\min(3/1;\ 1/1) = 1/1$. Меньшее из этих отношений (1/1) соответствует третьей строке, она и будет разрешающей. На пересечении третьей строки и третьего столбца находится разрешающий элемент 1, с которым и выполняется шаг жорданова исключения.

В табл. 1.33 разрешающим выбран первый столбец, а разрешающая строка найдена по наименьшему из отношений: $\min(2/5;\ 2/2) = 2/5$. Ею оказалась первая строка. С разрешающим элементом 5 выполнен очередной шаг жордановых исключений, приведший к табл. 1.34. В этой таблице разрешающим может быть лишь элемент 9/5 (других положительных элементов нет!), с которым и сделан последний шаг. В результате получилась табл. 1.35. Из нее при $x_2=0$ находим одно из опорных решений: (2/3; 0; 7/3; 2/3).

Таблица 1.34

	1	$-x_2$	$-x_4$
$x_1=$	2/5	−1/5	−2/5
$0=$	6/5	−3/5	$\boxed{9/5}$
$x_3=$	11/5	−3/5	−1/5

Таблица 1.35

	1	$-x_2$
$x_1=$	2/3	
$x_4=$	2/3	
$x_3=$	7/3	

Пример 1.9. Найти опорное решение системы

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+4x_2-8x_3&=-4;\\ x_1+2x_2-6x_3&=2.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Записав систему в табл. 1.36, преобразуем ее шагом жорданова исключения с разрешающим элементом 2. Он удовлетворяет обоим требованиям, предъявляемым к разрешающим элементам при отыскании опорных решений. В результате получим табл. 1.37, в первой строке которой все элементы отрицательны, а свободный член положителен.

Таблица 1.36

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$0=$	4	−3	−4	8
$0=$	2	1	$\boxed{2}$	6

Таблица 1.37

	1	$-x_1$	$-x_3$
$0=$	8	−1	−4
$x_2=$	1	1/2	−3

Строке отвечает уравнение $x_1+4x_3+8=0$, не удовлетворяющееся ни при каких $x_1\geqslant 0$ и $x_3\geqslant 0$. Значит, данная система не имеет неотрицательных решений.

Пример 1.10. Найти все опорные решения системы

$$\left.\begin{aligned} -x_1+x_2+4x_3&=12;\\ 2x_1+x_3+x_4&=12.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Система уже приведена к базису переменных x_2, x_4. В этом базисе при $x_1=x_3=0$ сразу получаем одно опорное решение: (0; 12; 0; 12). Другие опорные решения будем искать, отправляясь от табл. 1.38, в виде которой представим систему. В этой таблице — две строки, поэтому ранг данной системы равен 2 и базисов может быть не более $C_4^2=6$.

Таблица 1.38

	1	$-x_1$	$-x_3$
$x_2=$	12	-1	4
$x_4=$	12	$\boxed{2}$	1

Кроме рассмотренного, другие базисы могут образовать следующие пары переменных: x_1, x_2; x_1, x_3; x_1, x_4; x_2, x_3; x_3, x_4.

Пара x_1, x_2 образует базис, и к нему можно перейти от базиса x_2, x_4, заместив в нем x_4 переменной x_1 посредством шага жорданова исключения с разрешающим элементом 2. А так как элемент 2 положителен и других отношений, кроме 12/2, для первого столбца нет, то в базисе x_1, x_2 будет существовать опорное решение, которое и получается из табл. 1.39: (6; 18; 0; 0).

Обратимся к следующей паре переменных: x_1, x_3. Подвергнем табл. 1.39 шагу жорданова исключения со вторым разрешающим столбцом (в нем есть положительные элементы!), а разрешающую строку выберем по минимальному из отношений: $min(18:9/2;\ 6:1/2)=18:9/2$. Оно отвечает первой строке; разрешающим будет элемент 9/2. После шага жорданова исключения получаем табл. 1.40, отвечающую базису

Таблица 1.39

	1	$-x_4$	$-x_3$
$x_2=$	18	1/2	$\boxed{9/2}$
$x_1=$	6	1/2	1/2

Таблица 1.40

	1	$-x_4$	$-x_2$
$x_3=$	4	1/9	2/9
$x_1=$	4	$\boxed{4/9}$	$-1/9$

x_1, x_3, в котором базисное решение (4; 0; 4; 0) является опорным.

Что касается пары x_1, x_4, то из табл. 1.38 видно, что перейти к базису x_1, x_4 можно, взяв за разрешающий элемент (-1). Но он отрицательный, значит, в базисе x_1, x_4 получится базисное решение, в котором не все компоненты положительны, а такие решения нас не интересуют.

Рассмотрим следующую пару переменных x_2, x_3. Она образует базис, в чем можно убедиться, преобразовав, например, табл. 1.38 шагом жорданова исключения с разрешающим элементом 1. Но этот элемент, будучи положительным, не удовлетворяет второму требованию: минимальности отношения свободного члена к разрешающему элементу. В самом деле, для элементов второго столбца табл. 1.38 упомянутые отношения равны 12/4 и 12/1. Меньшее из них соответствует первой строке, а не второй, в которой расположен элемент 1. Значит, в базисном решении, соответствующем базису x_2, x_3, некоторые компоненты будут отрицательными. Положение не изменится, если к базису x_2, x_3 перейти с помощью какой-нибудь другой таблицы, например табл. 1.39 или 1.40. В этом можно убедиться, проанализировав указанные таблицы.

Остается исследовать пару переменных x_3, x_4. Она образует базис, и к нему можно перейти от базиса x_1, x_3, преобразовав шагом жорданова исключения табл. 1.40. Элемент 4/9 этой таблицы удовлетворяет необходимым для получения опорного решения требованиям, и, сделав с ним шаг, приходим к табл. 1.41, содержащей последнее опорное решение системы: (0; 0; 3; 9).

Таблица 1.41

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_3=$	3		
$x_4=$	9		

Итак, данная система уравнений имеет четыре опорных решения: (0; 12; 0; 12), (6; 18; 0; 0), (4; 0; 4; 0), (0; 0; 3; 9).

Упражнения

Найти все базисные решения следующих систем линейных уравнений:

1.7. $$\left.\begin{aligned} 7x_1-4x_2-4x_3+x_4&=-1;\\ 5x_1\qquad\;\; -4x_3-x_4&=5;\\ -x_1+2x_2\qquad\;\; -x_4&=3.\end{aligned}\right\}$$

1.8. $$\left.\begin{aligned} 4x_1+x_2-12x_3+x_4&=6;\\ 2x_1+x_2-6x_3-x_4&=2.\end{aligned}\right\}$$

1.9. $$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3+x_4&=9;\\ -x_1+x_2-x_3+x_4&=3;\\ 3x_1-x_2+x_3-x_4&=1;\\ x_1-2x_2+3x_3+2x_4&=5.\end{aligned}\right\}$$

1.10. $$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3+x_4&=1;\\ 8x_1+12x_2-9x_3+8x_4&=3;\\ 4x_1+6x_2+3x_3-2x_4&=3;\\ 2x_1+3x_2+9x_3-7x_4&=3.\end{aligned}\right\}$$

Найти опорные решения следующих систем линейных уравнений:

1.11. $$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2-2x_3-x_4&=4;\\ 5x_2-2x_3-3x_4&=10;\\ -3x_1+x_2+2x_3\qquad&=-1.\end{aligned}\right\}$$

1.12. $$\left.\begin{aligned} 15x_1-10x_2+2x_3&=0;\\ 5x_2-4x_3&=15;\\ 5x_1\qquad\quad -2x_3&=10.\end{aligned}\right\}$$

1.13. $\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 9; \\ x_1 \quad\quad + x_3 + x_4 &= 7; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 13. \end{aligned}\right\}$

Найти все опорные решения следующих систем линейных уравнений:

1.14. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 16; \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 8. \end{aligned}\right\}$ **1.15.** $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= 24; \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$

1.16. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 &= 2; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$ **1.17.** $\left.\begin{aligned} x_1 - 7x_2 + x_3 + x_4 &= 28; \\ 5x_1 - 9x_2 - x_3 + x_4 &= 20. \end{aligned}\right\}$

§ 1.4. Эквивалентные преобразования систем линейных уравнений и неравенств

При решении задач математического программирования иногда приходится графически изображать множество решений системы неравенств. Напомним, что решением линейного неравенства с двумя неизвестными

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leqslant a \tag{1.12}$$

является бесконечное множество пар значений этих неизвестных, удовлетворяющих неравенству (1.12). В системе координат x_1Ox_2 неравенство (1.12) определяет полуплоскость с граничной прямой (рис. 1.1)

$$a_1x_1 + a_2x_2 = a.$$

Чтобы найти эту полуплоскость, нужно сначала построить граничную прямую, а затем взять какую-нибудь точку, лежащую по ту или другую сторону от граничной прямой, и определить, какому из неравенств

$$a_1x_1 + a_2x_2 < a;$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 > a$$

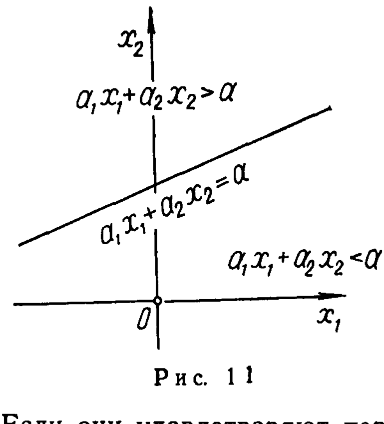

Рис. 1.1

удовлетворяют ее координаты. Если они удовлетворяют первому, то искомой будет полуплоскость, в которой находится взятая точка; если второму, то искомой будет полуплоскость, которой взятая точка не принадлежит.

Пример 1.11. Построить на плоскости x_1Ox_2 область допустимых решений, выделить область неотрицательных решений и найти координаты вершин этой области для следующих систем линейных неравенств:

а) $\left.\begin{aligned} 2x_1-5x_2 &\geqslant -10;\\ x_1 &\leqslant 3;\\ 3x_1+2x_2 &\leqslant 12;\\ x_1+2x_2 &\geqslant -2;\end{aligned}\right\}$ б) $\left.\begin{aligned} -x_1+x_2 &\leqslant 6;\\ 3x_1+5x_2 &\geqslant 15;\\ x_2 &\geqslant 1;\end{aligned}\right\}$

в) $\left.\begin{aligned} 3x_1-2x_2 &\leqslant -6;\\ -x_1+5x_2 &\leqslant 5;\\ x_1 &\geqslant 0;\\ x_2 &\geqslant 0.\end{aligned}\right\}$

Решение. а) Для построения области допустимых решений строим соответствующие данным неравенствам граничные прямые:

$$2x_1-5x_2=-10; \tag{1.13}$$

$$x_1 = 3; \tag{1.14}$$

$$3x_1+2x_2= 12; \tag{1.15}$$

$$x_1+2x_2=-2. \tag{1.16}$$

Или

$$\frac{x_1}{-5}+\frac{x_2}{2}=1;\ \frac{x_1}{3}=1;\ \frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{6}=1;\ \frac{x_1}{-2}+\frac{x_2}{-1}=1.$$

При такой записи уравнений сразу определяются величины отрезков, отсекаемых прямыми на осях координат (рис. 1.2, *а*).

Далее находим полуплоскости, в которых выполняются данные неравенства. Так, неравенство $2x_1-5x_2\geqslant-10$ определяет полуплоскость с граничной прямой (1.13), в которой расположена точка $O(0;\ 0)$ $(2\cdot0-5\cdot0=0>-10$, т. е. это неравенство удовлетворяется координатами точки $O)$.

Область допустимых решений определяется как общая часть четырех полуплоскостей, соответствующих данным неравенствам. Она представляет собой многоугольник $ABCD$.

Область неотрицательных решений расположена в первой четверти и является общей частью шести полуплоскостей, определяемых четырьмя данными неравенствами и неравенствами $x_1\geqslant0$ (правая координатная полуплоскость) и $x_2\geqslant0$ (верхняя координатная полуплоскость), выражающими условия неотрицательности переменных. Это многоугольник $OEBCF$.

Чтобы найти координаты вершин области неотрицательных решений, надо решить совместно уравнения прямых, пересекающихся в этих вершинах. Так, координаты точки B определим в результате совместного решения уравнений (1.13) и (1.15). Получаем: $x_1=40/19$; $x_2=54/19$; т. е. $B(40/19;\ 54/19)$. Другие вершины имеют координаты: $O(0;\ 0)$; $E(0;\ 2)$; $C(3;\ 3/2)$; $F(3;\ 0)$.

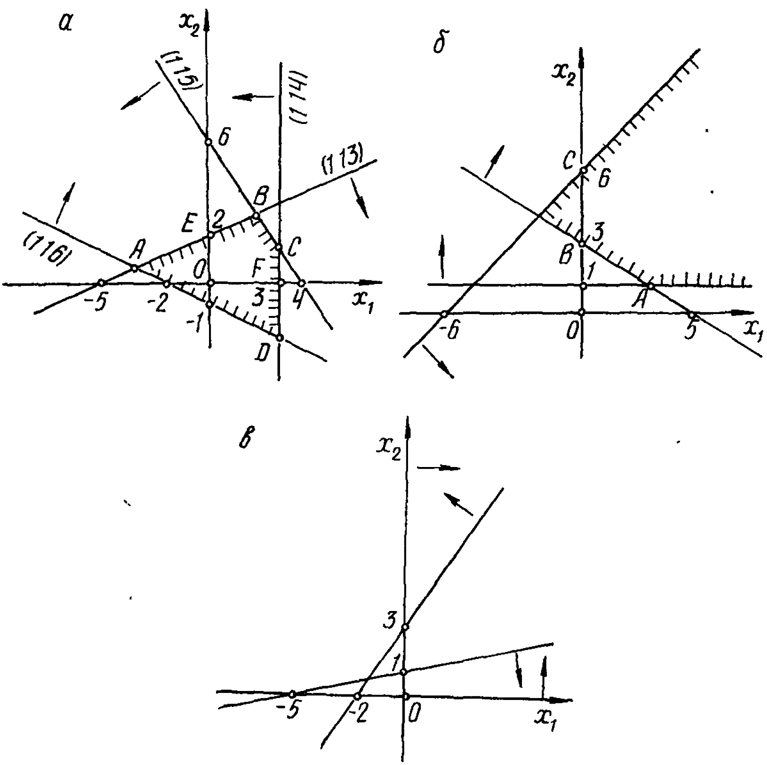

Рис. 1.2

б) Решение приведено на рис. 1.2, *б* и в пояснениях не нуждается. В данном случае область допустимых решений неограничена. Область неотрицательных решений имеет три вершины: $A(10/3;\ 1)$, $B(0;\ 3)$, $C(0;\ 6)$.

в) Из рис. 1.2, *в*, на котором приведено решение, видно, что множество решений пусто. Система неравенств несовместна.

Сложнее находить решения систем линейных неравенств или смешанных систем, состоящих из уравнений и неравенств с большим числом переменных. В этих случаях построить графическое изображение множества решений нельзя. Но задачу можно, оказывается, свести к решению эквивалентной системы, содержащей только линейные уравнения, а такие системы мы уже рассматривали. При этом используется следующая

Теорема 1.2. *Всякому решению* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *неравенства* $a_1x_1+\dots+a_nx_n\leqslant a$ *соответствует вполне определенное решение* $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ *уравнения* $a_1x_1+\dots+a_nx_n+x_{n+1}=a$, *в котором* $x_{n+1}\geqslant 0$.

Верна и обратная теорема.

На основании прямой теоремы говорят, что *неравенство* $a_1x_1+\dots+a_nx_n\leqslant a$ *эквивалентно уравнению* $a_1x_1+\dots+a_nx_n+x_{n+1}=a$ *и неравенству* $x_{n+1}\geqslant 0$.

Аналогично: *неравенство* $a_1x_1+\dots+a_nx_n\geqslant a$ *эквивалентно линейному уравнению* $a_1x_1+\dots+a_nx_n-x_{n+1}=a$, *в котором* $x_{n+1}\geqslant 0$. Переменную x_{n+1} называют *дополнительной (балансовой)*.

На основании теоремы 1.2 систему m линейных неравенств с n переменными

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leqslant a_{10}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leqslant a_{m0} \end{array}\right\} \qquad (1.17)$$

можно заменить эквивалентной системой m линейных уравнений с $n+m$ переменными

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad = a_{10}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} = a_{m0}, \end{array}\right\} \qquad (1.18)$$

где $x_{n+1}\geqslant 0, \dots, x_{n+m}\geqslant 0$, эквивалентной в том смысле, что всякому решению $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ системы линейных неравенств (1.17) соответствует определенное решение $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ системы линейных уравнений (1.18), причем дополнительные переменные $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ удовлетворяют условию неотрицательности.

Пример 1.12. Найти неотрицательное решение системы

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \qquad\quad + x_5 = 5; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 \qquad \leqslant 6; \\ \qquad\quad 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 8. \end{array}\right\}$$

Решение. В левую часть первого неравенства вводим дополнительную переменную x_6 со знаком плюс, а в левую часть второго — дополнительную переменную x_7 со знаком минус. Присоединяя условие неотрицательности для дополнительных переменных, получаем следующую систему, эквивалентную данной:

$$\left.\begin{aligned} -2x_1-2x_2+3x_3\qquad +x_5\qquad\quad &= 5;\\ 2x_1+x_2-x_3+4x_4\qquad +x_6\qquad &= 6;\\ 3x_2+2x_3+x_4+x_5\qquad -x_7 &= 8;\\ x_6\geqslant 0;\quad x_7\geqslant 0. & \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

Систему (1.19) записываем в жорданову таблицу и находим какое-либо опорное решение (табл. 1.42—1.43) (см. § 1.3). Поскольку переменная x_6 входит только во второе уравнение, причем с коэффициентом $+1$, ее можно отнести к базисным, и именно поэтому в табл. 1.42 второе уравнение записано не в форме 0-строки, а в виде, разрешенном относительно x_6.

Таблица 1.42

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_7$
0 =	5	−2	−2	3	0	$\boxed{1}$	0
$x_6=$	6	2	1	−1	4	0	0
0 =	8	0	3	2	1	1	−1

Таблица 1.43

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_7$
$x_5=$	5	−2	−2	3	0	0
$x_6=$	6	2	1	−1	4	0
0 =	3	$\boxed{2}$	5	−1	1	−1

Таблица 1.44

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_7$
$x_5=$	8				
$x_6=$	3				
$x_1=$	3/2				

Это позволило сократить запись решения примера на одну таблицу.

Из табл. 1.44 выписываем при нулевых значениях свободных переменных искомое неотрицательное решение данной смешанной системы уравнений и неравенств: $x_1=3/2$; $x_2=0$; $x_3=0$; $x_4=0$; $x_5=8$.

Пример 1.13. Найти неотрицательное решение системы линейных неравенств

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &\leqslant 6;\\ x_1+x_2+3x_3 &\geqslant 7;\\ x_1+3x_2+4x_3 &\geqslant -12. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Эквивалентная система уравнений имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2+3x_3+x_4 \qquad\qquad = 6; \\ x_1+\ x_2+\ x_3 \qquad -x_5 \qquad = 7; \\ -x_1-3x_2-4x_3 \qquad\qquad +x_6=12; \\ \qquad x_4 \geqslant 0;\ x_5 \geqslant 0;\ x_6 \geqslant 0. \end{array}\right\} \quad (1.20)$$

Составляя первую жорданову таблицу (табл. 1.45), учтем, что каждая из переменных x_4 и x_6 входит только в одно из уравнений системы (1.20), причем с коэффициентом $+1$, поэтому соответствующие уравнения впишем в таблицу в форме, разрешенной относительно x_4 и x_6. Второе уравнение нельзя записать в таблицу в виде, разрешенном относительно x_5, так как в этом случае его свободный член будет отрицательным (см. § 1.3).

Таблица 1.45

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_5$
$x_4 =$	6	$\boxed{1}$	2	3	0
$0 =$	7	1	1	1	-1
$x_6 =$	12	-1	-3	-4	0

Выберем разрешающим, например, первый столбец, тогда $\min(6/1;\ 7/1)=6/1$ и разрешающей будет первая строка. После шага жорданова исключения приходим к табл. 1.46,

Таблица 1.46

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_5$
$x_1 =$	6	2	3	0
$0 =$	1	-1	-2	-1
$x_6 =$	18	-1	-1	0

во второй строке которой свободный член положителен, а остальные элементы отрицательны. Строке соответствует равенство $0=1+x_2+2x_3+x_5$, не удовлетворяющееся неотрицательными значениями неизвестных. Значит, данная система неравенств не имеет неотрицательных решений. Таким образом, если в 0-строке с положительным свободным членом все остальные элементы неположительны, то система линейных неравенств не имеет неотрицательных решений.

Понимая эквивалентность линейных уравнений и неравенств в указанном выше смысле, можно рассмотреть и обратную задачу: переход от системы уравнений к эквивалентной системе неравенств.

Пусть система линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = a_{m0}, \end{array}\right\} \qquad (1.21)$$

имеющая ранг r, рассматривается в области неотрицательных значений неизвестных

$$x_1 \geqslant 0; \ldots ; x_n \geqslant 0. \qquad (1.22)$$

Преобразуем систему (1.21) к единичному базису (см. § 1.3):

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b_{10} - b_{1,r+1}\, x_{r+1} - \ldots - b_{1n}\, x_n; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_r = b_{r0} - b_{r,r+1}\, x_{r+1} - \ldots - b_{rn}\, x_n. \end{array}\right\} \qquad (1.23)$$

На основании теоремы, обратной теореме 1.2, каждое из уравнений системы (1.23) совместно с неравенством $x_i \geqslant 0$ ($i = \overline{1, r}$) эквивалентно соответствующему неравенству системы

$$\left.\begin{array}{l} b_{10} - b_{1,r+1}\, x_{r+1} - \ldots - b_{1n}x_n \geqslant 0; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{r0} - b_{r,r+1}\, x_{r+1} - \ldots - b_{rn}x_n \geqslant 0. \end{array}\right\} \qquad (1.24)$$

Кроме того, остались неиспользованными условия неотрицательности для следующих свободных переменных:

$$x_{r+1} \geqslant 0; \ldots ; x_n \geqslant 0. \qquad (1.25)$$

Системы (1.24) и (1.25) можно переписать в виде

$$\left.\begin{array}{l} b_{1,r+1}\, x_{r+1} + \ldots + b_{1n}\, x_n \leqslant b_{10}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{r,r+1}\, x_{r+1} + \ldots + b_{rn}\, x_n \leqslant b_{r0}; \end{array}\right\} \qquad (1.26)$$

$$x_{r+1} \geqslant 0; \ldots ; x_n \geqslant 0. \qquad (1.27)$$

Таким образом, система линейных уравнений (1.21) и неравенств (1.22) заменена на эквивалентную им систему неравенств (1.26), (1.27).

Пример 1.14. Привести систему линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 10 \end{aligned}\right\}$$

с условиями неотрицательности для переменных $x_1 \geqslant 0$, .. $x_4 \geqslant 0$ к эквивалентной системе неравенств.

Решение. Записав данную систему в виде таблицы сделав два шага жордановых исключений (табл. 1.47—1.49

Таблица 1.47

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0 =	5	$\boxed{1}$	−2	1	1
0 =	10	2	1	3	−1

Таблица 1.48

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$x_1 =$	5	−2	1	1
0 =	0	5	$\boxed{1}$	−3

Таблица 1.49

	1	$-x_2$	$-x_4$
$x_1 =$	5	−7	4
$x_3 =$	0	5	−3

выписываем из последней таблицы систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 5 + 7x_2 - 4x_4; \\ x_3 &= \quad -5x_2 + 3x_4. \end{aligned}\right\} \tag{1.28}$$

Опуская в равенствах (1.28) неотрицательные величины x_1 и x_3, приходим к системе неравенств

$$\left.\begin{aligned} 5 + 7x_2 - 4x_4 &\geqslant 0; \\ -5x_2 - 3x_4 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

Присоединяя к неравенствам (1.29) неиспользованные условия неотрицательности для переменных x_2 и x_4, получаем систему неравенств

$$\left.\begin{aligned} -7x_2 + 4x_4 &\leqslant 5; \\ 5x_2 - 3x_4 &\leqslant 0; \\ x_2 \geqslant 0; \quad x_4 &\geqslant 0, \end{aligned}\right\}$$

эквивалентную данной системе уравнений.

Упражнения

Построить на плоскости x_1Ox_2 области решений, выделить области не-ицательных решений и найти координаты вершин этих областей для дующих систем линейных неравенств:

1.18. $\left.\begin{aligned} -2x_1+3x_2 &\geqslant -6; \\ x_1+x_2 &\leqslant 6; \\ x_2 &\leqslant 4; \\ x_1 &\geqslant -3. \end{aligned}\right\}$

1.19. $\left.\begin{aligned} -5x_1+2x_2 &\leqslant 10; \\ x_2 &\geqslant 2; \\ x_1-x_2 &\leqslant 1. \end{aligned}\right\}$

Найти неотрицательные решения следующих систем линейных уравнений и неравенств:

1.20. $\left.\begin{aligned} -x_1+2x_2-3x_3 &\geqslant 1; \\ 3x_1+4x_3 &\geqslant -2; \\ 3x_1+x_2 &\leqslant 4: \end{aligned}\right\}$

1.21. $\left.\begin{aligned} x_1-2x_2+x_4 &= -3; \\ x_3-2x_4 &= 2; \\ 3x_2-x_4+x_5 &\leqslant 5; \\ x_2+x_5 &\geqslant -3: \end{aligned}\right\}$

Следующие системы линейных уравнений преобразовать в эквивалентные системы линейных неравенств:

1.22. $\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &= 4; \\ x_1+x_2+x_5 &= 2; \\ 2x_1+x_4+x_5 &= 3; \end{aligned}\right\}$

$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1,5})$.

1.23. $\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+5x_3-x_4 &= 4; \\ x_1-x_2-x_3+2x_4 &= 1; \end{aligned}\right\}$

$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1,4})$.

1.24. $\left.\begin{aligned} 5x_1-11x_2-2x_4+x_5 &= 10; \\ -x_1+x_2-x_3+x_4 &= 4; \\ 4x_1+x_2-x_4 &= 80; \end{aligned}\right\}$

$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1,5})$.

3 Зак. 704

Глава 2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 2.1. Примеры задач линейного программирования

Линейное программирование — область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т. е. равенств или неравенств, связывающих эти переменные.

Методы линейного программирования применяют к практическим задачам, в которых: 1) необходимо выбрать наилучшее решение (оптимальный план) из множества возможных; 2) решение можно выразить как набор значений некоторых переменных величин; 3) ограничения, накладываемые на допустимые решения специфическими условиями задачи, формулируются в виде линейных уравнений или неравенств; 4) цель выражается в форме линейной функции основных переменных. Значения целевой функции, позволяя сопоставлять различные решения, служат критерием качества решения.

Для практического решения экономической задачи математическими методами прежде всего ее следует записать с помощью математических выражений: уравнений, неравенств и т. п., т. е. составить *экономико-математическую модель*. Исходя из отмеченных выше особенностей задач линейного программирования можно наметить следующую общую схему формирования модели:

1) выбор некоторого числа переменных величин, заданием числовых значений которых однозначно определяется одно из возможных состояний исследуемого явления;

2) выражение взаимосвязей, присущих исследуемому явлению, в виде математических соотношений (уравнений, неравенств). Эти соотношения образуют систему ограничений задачи;

3) количественное выражение выбранного критерия оптимальности в форме целевой функции;

4) математическая формулировка задачи, как задачи отыскания экстремума целевой функции при условии выполнения ограничений, накладываемых на переменные.

Для иллюстрации приведенной схемы рассмотрим примеры.

Пример 2.1. Завод производит два вида продукции: велосипеды и мотоциклы. При этом цех по сборке велосипедов имеет мощность 100 тыс. штук в год, цех по сборке мотоциклов — 30 тыс. Механические цеха завода оснащены взаимозаменяемым оборудованием, и одна группа цехов может производить либо детали для 120 тыс. велосипедов, либо детали для 40 тыс. мотоциклов, либо любую комбинацию деталей, ограниченную этими данными. Другая группа механических цехов может выпускать детали либо для 80 тыс. велосипедов, либо для 60 тыс. мотоциклов, либо любую допустимую их комбинацию. В результате реализации каждой тысячи велосипедов завод получает прибыль в 2 тыс., а каждой тысячи мотоциклов — 3 тыс. руб.

Найти такое сочетание выпусков продукции, которое дает наибольшую сумму прибыли.

Решение. Обозначим через x_1 и x_2 соответственно количества велосипедов и мотоциклов, выпускаемые заводом в год (в тыс. шт.).

Учитывая возможности сборочных цехов, необходимо потребовать, чтобы

$$x_1 \leqslant 100; \tag{2.1}$$

$$x_2 \leqslant 30. \tag{2.2}$$

Переходя к анализу возможностей механических цехов, необходимо учитывать, что при выпуске обоих видов продукции должно выполняться условие пропорциональности количества продукции данного вида доле производственной мощности, занятой ее выпуском. Если предусматривается производство 1000 велосипедов (единицы продукции первого вида), то доля занятой производственной мощности механических цехов первой группы составит 1/120 всей их мощности, принимаемой в данном случае за единицу; на выпуск же x_1 тыс. велосипедов потребуется занять $1/120\,x_1$ всей мощности. Аналогично для производства x_2 тыс. мотоциклов необходимо выделить $1/40\,x_2$ всей мощности. Так что для реализации плана $(x_1;\ x_2)$ потребуется предусмотреть $(1/120\,x_1+1/40\,x_2)$ мощности механических цехов первой группы. Но в производственном процессе может быть использована не более чем вся наличная производственная мощность рассматриваемых цехов, следовательно,

$$1/120\,x_1+1/40\,x_2 \leqslant 1. \tag{2.3}$$

Точно так же получим ограничение по производственной мощности механических цехов второй группы:

$$1/80\,x_1+1/60\,x_2 \leqslant 1. \tag{2.4}$$

По смыслу задачи

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0. \qquad (2.5)$$

Любой план (x_1; x_2), удовлетворяющий ограничениям (2.1)—(2.5), будет допустимым и даст предприятию прибыль (в тыс. руб.)

$$f = 2x_1 + 3x_2. \qquad (2.6)$$

Соотношения (2.1)—(2.6) образуют математическую модель задачи.

Итак, математически задача отыскания оптимального плана производства велосипедов и мотоциклов сводится к определению таких x_1^* и x_2^*, удовлетворяющих линейным ограничениям (2.1)—(2.5), которые доставляют максимум линейной функции (2.6).

Пример 2.2. Для строительства домов на 100 строительных площадках выбраны 5 типовых проектов. По каждому из проектов известны длительность закладки фундаментов и строительства остальной части здания, а также жилая площадь дома (табл. 2.1). Параллельно можно вести закладку 10 фундаментов и строительство 15 зданий.

Таблица 2.1

Вид работы	Длительность выполнения (дни) для типового проекта				
	I	II	III	IV	V
Закладка фундамента	20	30	35	30	40
Остальные работы	40	20	60	35	25
Жилая площадь, м²	3000	2000	5000	4000	6000

Составить план строительства, максимизирующий ввод жилой площади в течение года (300 рабочих дней), при условии, что домов II типа должно быть построено не менее 10.

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 количество домов каждого типа, планируемых к строительству. По условию всего должно быть построено 100 домов. В принятых обозначениях этот факт можно выразить так:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100. \qquad (2.7)$$

Поскольку одновременно можно вести работы по закладке не более 10 фундаментов, то годовой фонд времени по этому виду работ ограничен величиной 300·10 рабочих дней. Для реализации плана ($x_1, \ldots, x_5$) только на закладку фундаментов потребуется $(20x_1+30x_2+35x_3+30x_4+40x_5)$ рабочих дней. Это количество не может превышать имеющегося фонда времени, предусмотренного для данного вида работ, поэтому должно выполняться неравенство

$$20x_1+30x_2+35x_3+30x_4+40x_5 \leqslant 3000. \qquad (2.8)$$

Фонд времени на строительство остальной части зданий составляет $300 \cdot 15=4500$ рабочих дней. На этот вид работ фактически будет потрачено $(40x_1+20x_2+60x_3+35x_4+25x_5)$ рабочих дней. Ясно, что это количество не может превышать имеющегося резерва, т. е.

$$40x_1+20x_2+60x_3+35x_4+25x_5 \leqslant 4500. \qquad (2.9)$$

И наконец, учитывая последнее условие задачи, приходим к неравенству

$$x_2 \geqslant 10. \qquad (2.10)$$

Остается присоединить естественное условие неотрицательности:

$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ x_3 \geqslant 0;\ x_4 \geqslant 0;\ x_5 \geqslant 0. \qquad (2.11)$$

В принятых обозначениях цель задачи — максимизировать вводимую в течение года жилую площадь — можно выразить в форме такой функции:

$$f=3x_1+2x_2+5x_3+4x_4+6x_5. \qquad (2.12)$$

(Здесь мы жилую площадь исчисляем в тыс. кв. м.) Соотношения (2.7)—(2.12) — математическая модель данной задачи.

Итак, задача сводится к нахождению решения $(\overset{*}{x}_1; \ldots; \overset{*}{x}_5)$ системы линейных уравнений и неравенств (2.7)—(2.11), обращающего в максимум линейную функцию (2.12).

Пример 2.3. При составлении суточного рациона кормления скота можно использовать свежее сено (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Рацион должен содержать не менее: 30 кормовых единиц, 1 кг белка, 100 г кальция и 80 г фосфора.

Таблица 2.2

Корм	Компоненты				Себестоимость, коп./кг
	количество кормовых единиц	белок, г/кг	кальций, г/кг	фосфор, г/кг	
Сено свежее	0,5	40	1,25	2	1,2
Силос	0,5	10	2,5	1	0,8

В табл. 2.2 приведены данные о содержании указанных компонентов в 1 кг каждого корма и себестоимость этих кормов.

Определить оптимальный рацион исходя из условия минимума его себестоимости.

Решение. Обозначим через x_1 и x_2 соответственно количество сена и силоса, которое предполагается включить в рацион. Из условия задачи сразу следуют два ограничения:

$$x_1 \leqslant 50; \tag{2.13}$$

$$x_2 \leqslant 85. \tag{2.14}$$

Количество кормовых единиц, содержащееся в рационе (x_1; x_2), можно выразить суммой: $0{,}5x_1+0{,}5x_2$. По условию эта величина не может быть меньше 30 единиц, т. е.

$$0{,}5x_1+0{,}5x_2 \geqslant 30. \tag{2.15}$$

Ограничения по содержанию в рационе (x_1; x_2) белка, кальция и фосфора примут следующий вид:

$$40x_1+10x_2 \geqslant 1000; \tag{2.16}$$

$$1{,}25x_1+2{,}5x_2 \geqslant 100; \tag{2.17}$$

$$2x_1+1x_2 \geqslant 80. \tag{2.18}$$

Естественно также, что

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0. \tag{2.19}$$

В принятых обозначениях себестоимость рациона можно выразить в виде следующей функции:

$$f=1{,}2x_1+0{,}8x_2. \tag{2.20}$$

Итак, задача сводится к определению таких значений x_1^* и x_2^*, удовлетворяющих линейным ограничениям (2.13) — (2.19), при которых линейная функция (2.20) достигает наименьшего значения.

Пример 2.4. Полосы листового проката длиной 200 см необходимо разрезать на заготовки трех типов: А, Б и В длиной соответственно 57, 82 и 101 см для производства 50 изделий. На каждое изделие требуется по 4 заготовки типов А и Б и 5 заготовок типа В. Известны пять способов раскроя одной полосы. Количество заготовок, нарезаемых из одной полосы при каждом способе раскроя, приведено в табл. 2.3.

Определить, какое количество полос проката нужно разрезать каждым способом для изготовления 50 изделий, чтобы отходы от раскроя были наименьшими.

Таблица 2.3

Способ раскроя	Количество заготовок типа		
	А	Б	В
I	3	—	—
II	2	1	—
III	1	—	1
IV	—	2	—
V	—	1	1

Решение. Обозначим через x_j количество полос, раскраиваемых j-м способом ($j=\overline{1, 5}$).

Для производства 50 изделий необходимо $4 \cdot 50=200$ заготовок типа А, 200 — типа Б и 250 — типа В. Если использовать все способы раскроя, то общее количество заготовок типа А при условии, что I способом раскроено x_1 полос, II — x_2 полос и т. д., можно выразить суммой $3x_1+2x_2+1x_3+0x_4+0x_5$. По условию эта сумма должна равняться 200:

$$3x_1+2x_2+x_3=200. \qquad (2.21)$$

Аналогично получаются условия выполнения задания по другим типам заготовок:

$$x_2+2x_4+x_5=200; \qquad (2.22)$$

$$x_3+x_5=250. \qquad (2.23)$$

По смыслу задачи

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=\overline{1, 5}). \qquad (2.24)$$

Чтобы составить целевую функцию, выражающую суммарную величину отходов, подсчитаем сначала величины отходов при раскрое одной полосы по каждому из способов. При I способе отходы от каждой полосы составят $200-57 \cdot 3=29$ (см); при II способе: $200-(57 \cdot 2+82)=4$ (см); при III, IV и V соответственно: 42, 36 и 17 (см).

Суммарную величину отходов можно выразить в виде

$$f=29x_1+4x_2+42x_3+36x_4+17x_5. \qquad (2.25)$$

Итак, задача заключается в нахождении решения (x_1^*; x_2^*; x_3^*; x_4^*; x_5^*) системы линейных уравнений и неравенств (2.21)—(2.24), доставляющего минимум линейной функции (2.25).

Пример 2.5. Найти оптимальное сочетание посевов пшеницы и кукурузы на участках различного плодородия площадью 100 и 200 га. Данные об урожайности приведены

Таблица 2.4

Культура	Урожайность участка, ц/га	
	I	II
Пшеница	20	15
Кукуруза	35	30

в табл. 2.4. По плану должно быть собрано не менее 1500 ц пшеницы и 4500 ц кукурузы. Цена 1 ц пшеницы 6 руб., кукурузы — 4 руб. Критерий оптимальности — максимум валовой продукции в денежном выражении.

Решение. Обозначим через x_1 площадь, отводимую под посев пшеницы на I участке, через x_2 — на II, через x_3 и x_4 — площади, отводимые под посев кукурузы соответственно на I и II участках.

Величины площадей выражаются неотрицательными числами, т. е.

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=\overline{1,4}). \tag{2.26}$$

Так как на I участке планируется x_1 га засеять пшеницей и x_3 га — кукурузой, то должно выполняться равенство

$$x_1+x_3=100. \tag{2.27}$$

Для II участка аналогичное условие запишется так:

$$x_2+x_4=200. \tag{2.28}$$

С I участка предполагается собрать $20x_1$, а со II участка — $15x_2$ ц пшеницы. Всего же необходимо собрать не менее 1500 ц. Это требование можно выразить записью

$$20x_1+15x_2 \geqslant 1500. \tag{2.29}$$

Аналогичное требование к валовому сбору кукурузы приводит к неравенству

$$35x_3+30x_4 \geqslant 4500. \tag{2.30}$$

Стоимость пшеницы, которую предполагается собрать с обоих участков, составит $6(20x_1+15x_2)$ руб.; стоимость кукурузы — $4(35x_1+30x_4)$ руб., а общая стоимость валовой продукции выразится суммой

$$f=120x_1+90x_2+140x_3+120x_4. \tag{2.31}$$

Таким образом, задача свелась к нахождению решения (x_1^*; x_2^*; x_3^*; x_4^*) системы линейных уравнений и неравенств (2.26) — (2.30), максимизирующего линейную функцию (2.31).

Упражнения

Составить экономико-математические модели задач линейного программирования:

2.1. В сплав может входить не менее 4% никеля и не более 80% железа. Для составления сплава используются три вида сырья, содержащего никель, железо и прочие вещества. Стоимость различных видов сырья и процентное содержание в нем соответствующих компонентов сплава представлены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Компоненты сплава	Содержание компонентов для вида сырья, %		
	I	II	III
Железо	70	90	85
Никель	5	2	7
Прочие	25	8	8
Стоимость, коп./кг	6	4	5

Определить состав шихты таким образом, чтобы стоимость 1 кг сплава была минимальной.

2.2. Металлургический цех выпускает три вида продукции: А, Б и В. Прибыль от тонны произведенной продукции каждого вида составляет соответственно 35, 25 и 40 руб. Цех располагает необходимым оборудованием, каждый тип которого имеет свой фонд рабочего времени и производительность (табл. 2.6).

Таблица 2.6

Тип оборудования	Фонд времени, ч	Производительность (т/ч) вида продукции		
		А	Б	В
Печь обжига	2766	3,5	2,8	—
Травильный агрегат	624	0,083	0,083	0,104
Прокатный стан	416	0,067	0,1	0,083
Отделочный стан				
№ 1	250	1	—	—
№ 2	1250	—	1	—
№ 3	1500	—	—	1

Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимум прибыли.

2.3. Предприятию задан план производства по времени и номенклатуре: требуется за 6 единиц времени выпустить 30 единиц продукции $П_1$ и 96 единиц продукции $П_2$. Каждый из видов продукции может производиться машинами А и Б, значения мощностей которых и затраты, вызванные изготовлением каждого из видов продукции на той или иной машине, заданы табл. 2.7.

Таблица 2.7

Машина	Мощность машины для вида продукции		Затраты на производство продукции	
	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$
А	6	24	4	47
Б	13	13	13	26

Требуется составить оптимальный план работы машин, а именно: найти, сколько времени каждая из машин А и Б должна быть занята изготовлением каждого из видов продукции $П_1$ и $П_2$, чтобы стоимость всей продукции предприятия оказалась минимальной и в то же время был бы выполнен заданный план как по времени, так и по номенклатуре.

2.4. Совхоз отвел три земельных массива размерами в 5000, 8000 и 9000 га под посевы ржи, пшеницы и кукурузы. Средняя урожайность по массивам указана в табл. 2.8. За 1 ц ржи совхоз получает 2 руб. прибыли, за 1 ц пшеницы — 2,5 руб., за 1 ц кукурузы — 1,4 руб.

Таблица 2.8

Культура	Средняя урожайность массива, ц/га		
	I	II	III
Рожь	12	14	15
Пшеница	14	15	22
Кукуруза	30	35	25

Сколько гектаров и на каких массивах совхоз должен отвести под каждую культуру, чтобы получить максимальную прибыль, если по плану он обязан сдать не менее 1900 т ржи, 15 800 т пшеницы и 30 000 т кукурузы?

2.5. Три типа самолетов следует распределить между двумя авиалиниями. В табл. 2.9 заданы количество самолетов каждого типа, месячный объем перевозок каждым самолетом на каждой авиалинии и соответствующие эксплуатационные расходы.

Таблица 2.9

Тип самолета	Число самолетов	Месячный объем перевозок одним самолетом по авиалиниям		Эксплуатационные расходы на один самолет по авиалиниям	
		I	II	I	II
№ 1	50	15	10	15	20
№ 2	20	30	25	70	28
№ 3	30	25	50	40	70

Требуется распределить самолеты по авиалиниям так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных расходах перевезти по каждой из них соответственно не менее 300 и 200 единиц груза.

§ 2.2. Различные формы записи задач линейного программирования

Общей задачей линейного программирования, заданной в произвольной форме записи, называют задачу, в которой требуется максимизировать (минимизировать) линейную функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.32}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant a_{i0} \quad (i = \overline{1,s}); \tag{2.33}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i0} \quad (i = \overline{s+1,m}). \tag{2.34}$$

Функцию (2.32) называют *целевой*, а условия (2.33)—(2.34) — *ограничениями задачи.*

Задачей линейного программирования, заданной *в симметричной форме* записи, называют задачу, в которой требуется найти максимум функции (2.32) при условиях (2.33) и условиях

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{2.35}$$

Задачей линейного программирования в канонической форме записи называют задачу, в которой требуется найти максимум функции (2.32) при условиях (2.34), где $s=0$, и (2.35).

Набор чисел $\bar{x} = (x_1; \ldots; x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи линейного программирования, называется ее ***планом.*** План $\bar{x}^* = (x_1^*; \ldots; x_n^*)$, доставляющий максимум (минимум) функции (2.32), называется ***оптимальным.***

Поскольку $\min f = -\max(-f)$, то задачу минимизации функции f формально можно свести к задаче максимизации противоположной функции $(-f)$. Найдя максимальное значение функции $(-f)$, его знак нужно заменить на противоположный. Тем самым определится минимальное значение исходной функции f.

Переменную x_t, не подчиненную условию неотрицательности, заменяют парой неотрицательных переменных, приняв $x_t = x_t' - x_t''$.

Иногда требуется перейти от одной формы записи задачи к другой. Это всегда можно сделать, используя преобразования, рассмотренные в § 1.4 (см. примеры 1.12 и 1.14).

Пример 2.6. Привести к канонической форме записи задачу

$$f = x_1 + x_2 \text{ (max)};$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leqslant 1; \\ 2x_1 + x_2 &= 2; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0.$$

Решение. Переменная x_2 не подчинена условию неотрицательности, поэтому заменим ее разностью двух неотрицательных переменных x_2' и x_2'': $x_2 = x_2' - x_2''$.

Чтобы первое ограничение записать в форме равенства, введем в него неотрицательную переменную x_3. В результате данная задача примет каноническую форму:

$$f = x_1 + x_2' - x_2'' \text{ (max)};$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2' + x_2'' + x_3 &= 1; \\ 2x_1 + x_2' - x_2'' &= 2; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \ x_2' \geqslant 0; \ x_2'' \geqslant 0; \ x_3 \geqslant 0.$$

Пример 2.7. Свести к симметричной форме записи следующую задачу, заданную в канонической форме:

$$f = -2x_1 + x_2 - 5x_3 + 8x_4 - x_5 + 3x_6 - 7 \text{ (min)};$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 - 3x_6 &= 12; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 &= 16; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 - 5x_6 &= 19; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1,6}).$$

Решение. Прежде всего от данной функции f перейдем к функции $(-f)$ и тем самым от задачи минимизации f — к задаче максимизации $(-f)$:

$$(-f) = 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 8x_4 + x_5 - 3x_6 + 7.$$

Используя прием, рассмотренный в § 1.4, систему ограничительных уравнений приведем к разрешенной форме, выделив некоторый базис переменных. Затем, опустив базисные переменные, перейдем к эквивалентной системе неравенств (см. пример 1.14). Для завершения преобразований останется выразить целевую функцию через переменные, вошедшие в полученную систему неравенств.

Описанные преобразования системы ограничений в целевой функции удобней проводить одновременно, приписав к жордановой таблице снизу строку для целевой функции (f-строку). В процессе жордановых исключений эту строку не следует выбирать разрешающей, но преобразовывать ее элементы нужно по обычным правилам. В результате целевая функция, как и базисные переменные, окажется выраженной через свободные переменные (табл. 2.10—2.13).

Таблица 2.10

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$
$0=$	12	0	1	2	—4	—1	—3
$0=$	16	$\boxed{1}$	2	1	2	2	—3
$0=$	19	1	2	2	—1	3	—5
$-f=$	7	—2	1	—5	8	—1	3

Таблица 2.11

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$
$0=$	12	1	2	—4	—1	—3
$x_1=$	16	2	1	2	2	—3
$0=$	3	0	$\boxed{1}$	—3	1	—2
$-f=$	39	5	—3	12	3	—3

Таблица 2.12

	1	$-x_2$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$
$0=$	6	$\boxed{1}$	2	—3	1
$x_1=$	13	2	5	1	—1
$x_3=$	3	0	—3	1	—2
$-f=$	48	5	3	6	—9

Таблица 2.13

	1	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$
$x_2=$	6	2	—3	1
$x_1=$	1	1	7	—3
$x_3=$	3	—3	1	—2
$-f=$	18	—7	21	—14

В условиях данной задачи разрешающие элементы можно выбирать произвольно.

Учитывая неотрицательность базисных переменных x_1, x_2, x_3 в табл. 2.13, опускаем их и приходим к эквивалентной системе неравенств, а вместе с тем и к симметричной форме записи задачи:

$$(-f) = 7x_4 - 21x_5 + 14x_6 + 18 \text{ (max)};$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_4 - 3x_5 + x_6 &\leqslant 6; \\ x_4 + 7x_5 - 3x_6 &\leqslant 1; \\ -3x_4 + x_5 - 2x_6 &\leqslant 3; \end{aligned}\right\}$$

$$x_4 \geqslant 0;\ x_5 \geqslant 0;\ x_6 \geqslant 0.$$

Упражнения

2.6. Привести к канонической форме записи модели задач, рассмотренных в примерах 2.1; 2.2; 2.3.

2.7. Привести к симметричной форме записи модели задач, рассмотренных в примерах 2.4; 2.5.

§ 2.3. Свойства решений задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ (max)}; \tag{2.36}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i0} \quad (i = \overline{1,m}); \tag{2.37}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{2.38}$$

Можно доказать, *что множество K планов задачи (2.36)—(2.38) является выпуклым*, т. е. если $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ — планы задачи, то их выпуклая линейная комбинация $\bar{x} = \lambda\bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, также является планом задачи. Так как это множество определяется конечной совокупностью линейных ограничений (2.37) и (2.38), его граница состоит из кусков нескольких гиперплоскостей. Множество K может быть либо пустым множеством, либо выпуклым многогранником, либо выпуклой многогранной областью, уходящей в бесконечность. Важное значение имеет следующая

Теорема 2.1. *Линейная функция (2.36) задачи (2.36)—(2.38) достигает максимального значения в вершине многогранника планов. Если линейная функция принимает максимальное значение более чем в одной вершине, то она достигает такого же значения в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.*

Утверждение второй части теоремы 2.1 можно выразить следующей записью. Обозначим через $\bar{x}_1^*; \ldots ; \bar{x}_t^*$ вершины, в которых f достигает максимального значения, тогда любую точку $\bar{x}^*$, в которой f достигает такого же значения, можно представить в виде: $\bar{x}^* = \lambda_1 \bar{x}_1^* + \ldots + \lambda_t \bar{x}_t^*$, где $\lambda_k \geqslant 0$ $(k = \overline{1, t})$; $\sum_{k=1}^{t} \lambda_k = 1$; т. е. если f достигает максимального значения более чем в одной вершине, то она достигает такого же значения в любой точке ребра или грани, которые определяются этими вершинами.

Можно доказать, что *каждому опорному решению системы (2.37) соответствует вершина многогранника планов и, наоборот, каждой вершине многогранника планов соответствует опорное решение системы (2.37)*. Отсюда вытекает, что совокупность опорных планов задачи линейного программирования совпадает с системой вершин многогранника планов.

Так как число опорных решений у системы (2.37) всегда конечно (по крайней мере не больше, чем C_n^r), *многогранник планов будет иметь конечное число вершин*.

Указанные свойства позволяют наметить путь для решения задачи (2.36)—(2.38). Поскольку целевая функция достигает максимального значения при опорном плане множества планов, определяемого ограничениями (2.37)—(2.38), то нужно проверить все опорные планы этого множества и найти среди них тот, при котором f достигает максимума. Такой метод приемлем для задач с малым числом переменных и ограничений. Однако число опорных планов быстро растет с увеличением числа переменных и ограничений, и сплошная их проверка для многих практических задач оказывается непосильной даже для быстродействующих ЭВМ. Перебор опорных планов можно упорядочить, если при переходе от одного опорного плана к другому обеспечить возрастание f. Одним из методов упорядоченного перебора опорных планов является симплекс-метод, который рассматривается в следующей главе.

Пример 2.8. Построить на плоскости x_1Ox_2 область допустимых решений задачи

$$f = 10x_1 + 3x_2;$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 33; \\ x_1 + 6x_2 &\geqslant 14; \\ 5x_1 - 4x_2 &\geqslant 2; \\ x_1 - 2x_2 &\leqslant 6, \end{aligned}\right\}$$

найти все ее вершины и определить, в какой из них целевая функция достигает наименьшего, а в какой наибольшего значения.

Решение. Подобно тому, как это делалось в примере 1.11 (рис. 1.2, *а*, *б*, *в*), на рис. 2.1 построена область допустимых решений задачи $ABCD$. Затем найдены координаты вершин $A(2;\ 2)$; $B(6;\ 7)$; $C(12;\ 3)$; $D(8;\ 1)$. Значения целевой функции в найденных точках равны: $f(A)=f(2;\ 2)=10\cdot2+3\cdot2=26$; $f(B)=81$; $f(C)=129$; $f(D)=83$.

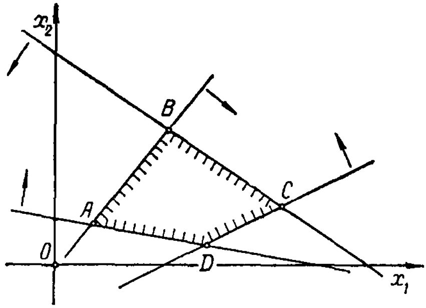

Рис 2.1

Итак, наименьшего значения, равного 26, функция f достигает в вершине $A(2;\ 2)$; наибольшего, равного 129,— в вершине $C(12;\ 3)$.

Пример 2.9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f=2x_1+3x_2-6x_3+8x_4+10,$$

определенной на множестве неотрицательных решений системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+\ 3x_2-\ x_3+\ x_4&=1;\\ 8x_1+12x_2-9x_3+8x_4&=3;\\ 4x_1+\ 6x_2+3x_3-2x_4&=3. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Найдем все опорные решения системы. Подобная задача нами уже рассматривалась в примерах 1.8—1.10. В данном случае система имеет три опорных решения: $\bar{x}_1=(0;\ 0;\ 5;\ 6)$; $\bar{x}_2=(3/5;\ 0;\ 1/5;\ 0)$; $\bar{x}_3=(0;\ 2/5;\ 1/5;\ 0)$. Значения целевой функции, соответствующие этим решениям: $f(\bar{x}_1)=28$; $f(\bar{x}_2)=10$; $f(\bar{x}_3)=10$. Наибольшего значения, равного 28, целевая функция достигает в вершине $\bar{x}_1=(0;\ 0;\ 5;\ 6)$. Наименьшее значение, равное 10, достигается в двух вершинах $\bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$. Значит, такого же значения функция f достигает в любой точке отрезка, соединяющего эти вершины.

Для аналитической записи любого оптимального решения нужно составить выпуклую линейную комбинацию опорных решений $\bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$: $\lambda\bar{x}_2+(1-\lambda)\bar{x}_3$, где $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, т. е. $\lambda(3/5;\ 0;\ 1/5;\ 0)+(1-\lambda)(0;\ 2/5;\ 1/5;\ 0)$. Итак, наименьшего значения, равного 10, функция f достигает в любой точке $(3/5\lambda;\ 2/5-2/5\lambda;\ 1/5;\ 0)$, где $0\leqslant\lambda\leqslant 1$.

Упражнения

2.8. Построить на плоскости область решений системы линейных неравенств и найти наименьшее и наибольшее значения линейной функции f в этой области:

а) $f = x_1 + x_2;$
$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &\geqslant 6; \\ 9x_1 + 8x_2 &\leqslant 157; \\ -3x_1 + 11x_2 &\geqslant 16; \end{aligned}\right\}$$

б) $f = 3x_1 + 2x_2;$
$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + 5x_2 &\leqslant 29; \\ 3x_1 - x_2 &\leqslant 14; \\ 5x_1 + 2x_2 &\geqslant 38. \end{aligned}\right\}$$

2.9. Найти наименьшее и наибольшее значения функции f в области, определяемой системой линейных уравнений и неравенств:

а) $f = 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4;$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5; \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 3; \end{aligned}\right\}$$
$x_j \geqslant 0\ (j=\overline{1,4});$

б) $f = x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4;$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 1; \end{aligned}\right\}$$
$x_j \geqslant 0\ (j=\overline{1,4}).$

§ 2.4. Графический способ решения задач линейного программирования

Графический способ целесообразно использовать для решения задач с двумя переменными, записанных в симметричной форме, а также для задач со многими переменными при условии, что в их канонической записи содержится не более двух свободных переменных.

1. Задачи с двумя переменными. В этом случае задачу можно записать в следующем виде:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 \quad (\max); \tag{2.39}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leqslant a_{10}; \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\leqslant a_{m0}; \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0. \tag{2.41}$$

Областью допустимых решений задачи (2.39)—(2.41) может быть либо выпуклый многоугольник (рис. 1.2, *а*), либо выпуклая многоугольная неограниченная область (рис. 1.2, *б*), либо пустая область (рис. 1.2, *в*), либо единственная точка.

Уравнение (2.39) определяет на плоскости x_1Ox_2 *семейство параллельных прямых*, каждой из которых отвечает определенное значение параметра f. Вектор $\bar{c}=(c_1, c_2)$, перпендикулярный * к этим прямым, указывает *направление наискорейшего возрастания* параметра f (функции (2.39), а противоположный вектор $(-\bar{c})$ — *направление наискорейшего убывания* (рис. 2.2).

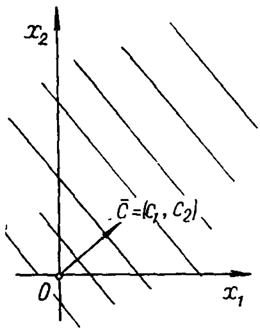

Рис. 22

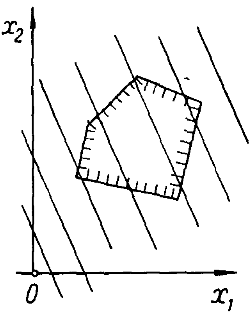

Рис 23

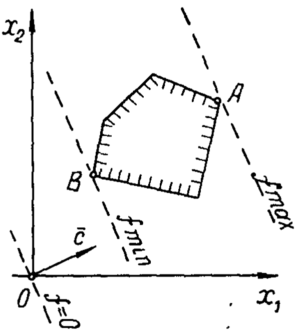

Рис. 24

Если в одной и той же системе координат изобразить область допустимых решений (2.40)—(2.41) и семейство прямых (2.39) (рис. 2.3), то задача определения точки максимума функции f сведется к нахождению в допустимой области точки, через которую проходит прямая семейства $f=\text{const}$, отвечающая наибольшему значению параметра f.

Для практического решения задачи (2.39)—(2.41) надо построить область допустимых решений, вектор $\bar{c}=(c_1, c_2)$ и перпендикулярно к нему одну из прямых семейства $f=\text{const}$, например $f=0$. Искомая точка A найдется параллельным перемещением вспомогательной прямой $f=0$ в направлении вектора $\bar{c}$. В противоположной вершине B допустимой области функция f достигает минимума (рис. 2.4). Координаты точки A (точки B) можно определить по чертежу либо решив совместно уравнения прямых, пересекающихся в этой точке.

В зависимости от характера области допустимых решений и взаимного расположения области и вектора $\bar{c}$ могут встретиться случаи, изображенные на рис. 2.5, *а*, *б*, *в*. На рис. 2.5, *а* функция достигает минимума в единственной точке A, а максимума — в любой точке отрезка BC; на рис. 2.5, *б* максимум

---

* При условии, что масштабы по осям координат одинаковы.

достигается в точке A, минимума функция не имеет ($f \to -\infty$); на рис. 2.5, *в* функция не имеет ни максимума ($f \to +\infty$), ни минимума ($f \to -\infty$).

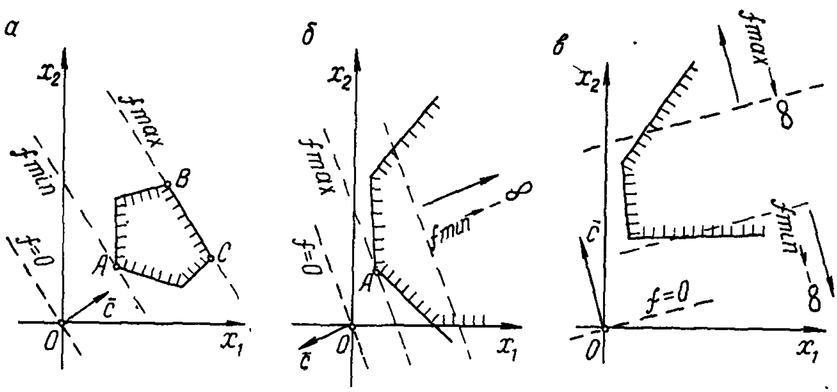

Рис. 2.5

Пример 2.10. Найти оптимальный план выпуска велосипедов и мотоциклов по условиям примера 2.1.

Решение. В математической записи (2.1)—(2.6) задача имеет вид:

$$f = 2x_1 + 3x_2 \quad (\max)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\leqslant 100; \\ x_2 &\leqslant 30; \\ 1/120x_1 + 1/40x_2 &\leqslant 1; \\ 1/80x_1 + 1/60x_2 &\leqslant 1; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

Построение области допустимых решений системы линейных неравенств подробно рассматривалось в примере 1.11 (рис. 1.1; 1.2, *а*, *б*, *в*). В нашем случае такой областью будет многоугольник $OABCD$ (рис. 2.6). Вектор $\bar{c}$ имеет координаты $c_1=2$, $c_2=3$. (Поскольку вектор $\bar{c}$ нам необходим лишь для выяснения направления, то, сообразуясь с масштабом чертежа, можно для большей наглядности построить вектор $\lambda\bar{c}$, ($\lambda>0$). В данном случае построен вектор $5\bar{c}$.)

Параллельным перемещением вспомогательной прямой $f=0$, перпендикулярной вектору $5\bar{c}$, находим точку C, в которой функция f достигает наибольшего значения. Решая совместно уравнения граничных прямых BC и CD: $1/120x_1 + 1/40x_2 = 1$ и $1/80x_1 + 1/60x_2 = 1$, находим координаты точки C: $x_1^* = 48$, $x_2^* = 24$; при этом $f_{\max} = 168$.

Итак, выпускать следует 48 тыс. велосипедов и 24 тыс. мотоциклов; максимальная прибыль завода по этим видам продукции составит 168 тыс. руб.

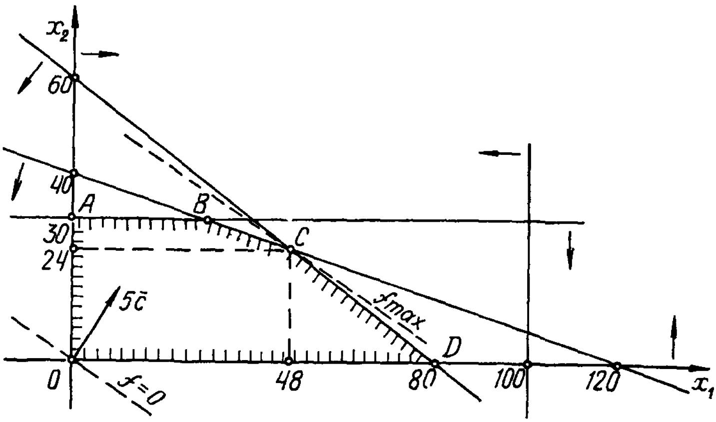

Рис. 2.6

Пример 2.11. Определить оптимальный суточный рацион кормления скота по условиям примера 2.3.

Решение. В примере 2.3 была составлена следующая математическая модель задачи (2.13)—(2.20):

$$f = 1{,}2x_1 + 0{,}8x_2 \quad (\min);$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &\leqslant 50; \\ x_2 &\leqslant 85; \\ 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 &\geqslant 30; \\ 40x_1 + 10x_2 &\geqslant 1000; \\ 1{,}25x_1 + 2{,}5x_2 &\geqslant 100; \\ 2x_1 + x_2 &\geqslant 80; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \; x_2 \geqslant 0.$$

Областью допустимых решений задачи является многоугольник $ABCDEF$ (рис. 2.7). Поскольку рассматривается задача минимизации, то построен вектор $(-25\bar{c})$, указывающий направление наискорейшего убывания значений f. Из рис. 2.7 видно, что последней в направлении вектора $(-25\bar{c})$ общей точкой области допустимых решений и прямой, параллельной вспомогательной прямой $f=0$, является точка C. Именно в этой точке f достигает наименьшего значения.

Координаты точки C можно найти, решая систему уравнений граничных прямых BC и CD, пересекающихся в этой точке:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 &= 30; \\ 2x_1 + \quad x_2 &= 80. \end{aligned}\right\}$$

В результате получаем $x_1^* = 20$, $x_2^* = 40$; при этом $f_{\min} = 56$.

Таким образом, в состав оптимального суточного рациона следует включить 20 кг сена и 40 кг силоса; стоимость рациона будет равна 56 коп.

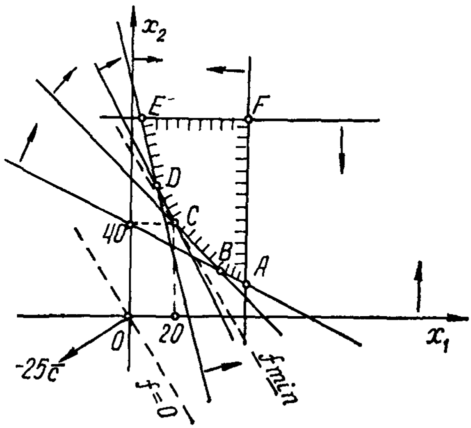

Рис. 2.7

2. Задачи со многими переменными. Как указывалось, задачу со многими переменными можно решить графически, если в ее канонической записи присутствует *не более двух свободных переменных*, т. е. $n - r \leqslant 2$, где n — число переменных, r — ранг матрицы системы ограничительных уравнений задачи. Чтобы решить такую задачу, систему ограничительных уравнений надо преобразовать к разрешенному виду, т. е. выделить некоторый базис переменных. Затем базисные переменные следует опустить и перейти к эквивалентной системе неравенств. Целевая функция также должна быть выражена только через свободные переменные. Полученную двухмерную задачу решают обычным графическим методом. Найдя две координаты оптимального решения, подставляют их в ограничительные уравнения исходной задачи и определяют остальные координаты оптимального решения.

Решая графически получившуюся двухмерную задачу, нужно помнить, что на каждой граничной прямой соответствующее неравенство обращается в равенство, поэтому опущенная при образовании этого неравенства базисная переменная равна нулю. В связи с этим в каждой из вершин области допустимых решений по крайней мере две переменные исходной задачи принимают нулевые значения.

Пример 2.12. Найти оптимальное сочетание посевов сельскохозяйственных культур по условиям примера 2.5.

Р е ш е н и е. Введением дополнительных переменных $x_5 \geqslant 0$ и $x_6 \geqslant 0$ преобразуем составленную ранее модель (2.26)—(2.31) в каноническую форму:

$$f = 120x_1 + 90x_2 + 140x_3 + 120x_4 + 0x_5 + 0x_6 \quad (\max);$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 100; \\ x_2 + x_4 &= 200; \\ 20x_1 + 15x_2 - x_5 &= 1500; \\ 35x_3 + 30x_4 - x_6 &= 4500; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,6}).$$

Теперь в системе ограничительных уравнений выделим какой-либо базис и убедимся, что число свободных переменных не превышает двух. Затем перейдем к эквивалентной системе неравенств. Такие преобразования мы подробно рассматривали в примерах 1.14 и 2.7, поэтому сразу запишем задачу в преобразованном виде:

$$\begin{aligned} f &= 38000 - 20x_1 - 30x_2 \quad (\max); \\ &\left.\begin{aligned} x_3 &= 100 - x_1; \\ x_4 &= 200 - x_2; \\ x_5 &= -1500 + 20x_1 + 15x_2; \\ x_6 &= 5000 - 35x_1 - 30x_2. \end{aligned}\right\} \end{aligned} \tag{2.42}$$

Опуская неотрицательные базисные переменные x_3, x_4, x_5 и x_6, приходим к двухмерной задаче, записанной в симметричной форме:

$$\left.\begin{aligned} f = -20x_1 - 30x_2 &+ 38000 \quad (\max); \\ x_1 &\leqslant 100; \\ x_2 &\leqslant 200; \\ 20x_1 + 15x_2 &\geqslant 1500; \\ 35x_1 + 30x_2 &\leqslant 5000; \\ x_1 \geqslant 0; \ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.43}$$

Решение задачи (2.43) приведено на рис. 2.8. Напомним, что на каждой граничной прямой одна из переменных исходной задачи обращается в нуль. Так, неравенству $20x_1+15x_2 \geqslant \geqslant 1500$ соответствует граничная прямая AB с уравнением $20x_1+15x_2=1500$. Но указанное неравенство образовано из третьего уравнения системы (2.42) путем отбрасывания переменной x_5, следовательно, на прямой AB $x_5=0$.

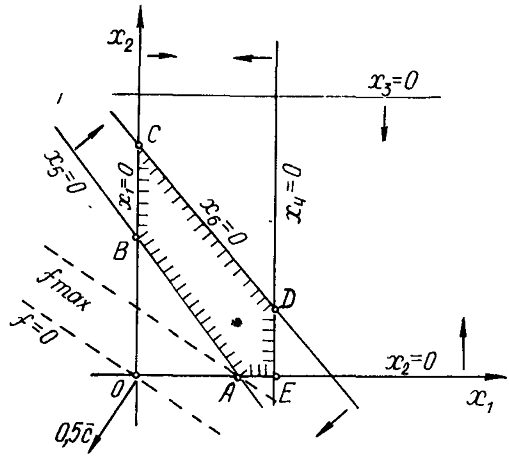

Рис. 2.8

Из рис. 2.8 видно, что наибольшего значения функция f достигает в точке A пересечения прямых AB и AE $(x_2=0)$, поэтому $x_1^*=75$, $x_2^*=0$. Одновременно в этой вершине $x_5^*=0$. Значения других компонент оптимального плана находим из уравнений (2.42): $x_3^*=100-75=25$; $x_4^*=200$; $x_6^*=2375$; при этом $f_{max}=36500$.

Итак, пшеницу следует посеять только на I участке и занять ею площадь в 75 га; кукурузу надо посеять на обоих участках, причем на I — 25, а на II — 200 га. Тогда валовая продукция достигнет (в денежном выражении) максимума и составит 36 500 руб.

Заметим в заключение, что дополнительные переменные x_5 и x_6, которые в канонической записи задачи соответственно равны: $x_5=(20x_1+15x_2)-1500$; $x_6=(35x_1+30x_2)-4500$, имеют вполне определенный экономический смысл: это превышение сбора пшеницы и кукурузы над плановым заданием. При найденном оптимальном сочетании посевов задание по сбору пшеницы будет выполнено $(x_5^*=0)$, а по кукурузе перевыполнено на 2375 ц $(x_6^*=2375)$.

Упражнения

Решить графически следующие задачи линейного программирования:

2.10. Трикотажная фабрика использует для производства свитеров и кофточек чистую шерсть, силон и нитрон, запасы которых составляют соответственно 900, 400 и 300 кг. Количество пряжи каждого вида (в кг), необходимой для изготовления 10 изделий, а также прибыль, получаемая от их реализации, приведены в табл. 2.14.

Таблица 2.14

Вид сырья	Затраты пряжи на 10 шт.	
	свитера	кофточки
Шерсть	4	2
Силон	2	1
Нитрон	1	1
Прибыль	6	5

Таблица 2.15

Химические вещества	Содержание вещества в единице веса удобрения	
	I	II
А	1	5
Б	12	3
В	4	4
Цена	5	2

Установить план выпуска изделий, максимизирующий прибыль.

2.11. При подкормке посева нужно внести на 1 га почвы не менее 8 единиц химического вещества А, 21 — вещества Б, 16 — вещества В. Совхоз закупает комбинированные удобрения двух видов I и II. В табл. 2.15 указаны содержание химических веществ и цена на единицу веса каждого вида удобрений. Минимизировать расходы по закупке необходимого совхозу количества удобрений.

2.12. Из Минска в Гродно необходимо перевезти оборудование трех типов: 84 единицы I типа, 80 единиц II типа и 150 единиц III типа. Для перевозки оборудования завод может заказать два вида транспорта А и Б. Количество оборудования каждого типа, вмещаемого на определенный вид транспорта, а также сменные затраты, связанные с эксплуатацией единицы транспорта (в руб.), приведены в табл. 2.16.

Таблица 2.16

Тип оборудования	Количество оборудования для вида транспорта	
	А	Б
I	3	2
II	4	1
III	3	13
Затраты	8	12

Спланировать перевозки так, чтобы транспортные расходы были минимальными.

2.13. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 20 тыс. руб. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 72 м². Предприятие может заказать оборудование двух видов: более мощные машины типа А стоимостью 5 тыс. руб, требующие производственную площадь 6 м² (с учетом проходов) и дающие 8 тыс. единиц продукции за смену, и менее мощные машины типа Б стоимостью 2 тыс. руб., занимающие площадь 12 м² и дающие за смену 3 тыс. единиц продукции.

Найти оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий максимум общей производительности нового участка.

Таблица 2.17

Наименование цехов и участков	Мощность по типам машин	
	А	Б
Подготовка производства автомобилей	130	180
Кузовной	100	220
Производство шасси	110	110
Производство двигателей	200	120
Сборочный	160	80
Участок испытаний	280	70

2.14. Автомобильный завод выпускает машины типов А и Б. Значения производственных мощностей отдельных цехов и участков приведены в табл. 2.17. Составить наиболее рентабельную производственную программу при условии, что прибыль от выпуска одной машины типов А и Б соответственно равна 2000 и 2400 руб.

Глава 3. СИМПЛЕКС-МЕТОД

§ 3.1. Основная идея симплекс-метода. Алгоритм симплекс-метода

Рассмотренный в § 2.4 графический способ применим к весьма узкому классу задач линейного программирования: эффективно им можно решать задачи, содержащие не более двух переменных. Одним из универсальных методов является *симплексный (симплекс-метод)*, называемый также *методом последовательного улучшения плана.*

Пусть задача записана в канонической форме:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (\max); \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i0} \quad (i = \overline{1,\ m}); \tag{3.2}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,\ n}). \tag{3.3}$$

В § 2.3 установлено, что если задача (3.1)—(3.3) разрешима, то ее оптимальный план совпадает по крайней мере с одним из опорных решений (планов) системы уравнений (3.2). Именно этот опорный план и отыскивается симплекс-методом в результате упорядоченного перебора опорных планов. Применительно к задаче (3.1)—(3.3) упорядоченность понимается в том смысле, что при переходе от одного опорного плана к другому соответствующие им значения целевой функции (3.1) возрастают (не убывают). Поэтому симплекс-метод называют методом последовательного улучшения плана. Поскольку общее число опорных планов не превышает C_n^r то через конечное число шагов либо будет найден оптимальный опорный план, либо установлена неразрешимость задачи.

Решение задачи (3.1)—(3.3) складывается из двух этапов: *на первом находят какой-либо начальный опорный план $\bar{x}_0$; на втором — по специальным правилам переходят от начального плана $\bar{x}_0$ к другому, более близкому к оптимальному,* *опорному плану $\bar{x}_1$, затем к следующему $\bar{x}_2$ и так до тех пор, пока задача не будет решена.*

С геометрической точки зрения перебор опорных планов можно толковать как *переход по ребрам из одной вершины многогранника планов в другую по направлению к вершине $\bar{x}^*$,*

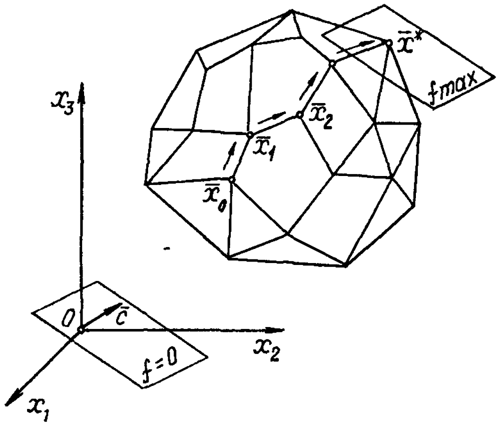

Рис. 3.1

в которой целевая функция достигает максимального значения (рис. 3.1).

1. Нахождение начального опорного плана. В примерах 1.8—1.10 мы подробно рассмотрели, как находятся опорные решения системы линейных уравнений, так что первый этап решения задачи (3.1)—(3.3) нам, в сущности, знаком.

Для компактности и единообразия вычислительной процедуры здесь к исходной жордановой таблице приписывают строку для целевой функции (табл. 3.1). В результате после приведения системы ограничительных уравнений к единичному базису целевая функция, как и базисные переменные, окажется выраженной через свободные переменные. Такой прием мы уже использовали при решении примера 2.7 (табл. 2.10—2.13).

Таблица 3.1

	1	$-x_1$	...	$-x_n$
$0=$	a_{10}	a_{11}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...
$0=$	a_{m0}	a_{m1}	...	a_{mn}
$f=$	0	$-c_1$	...	$-c_n$

Итак, для нахождения начального опорного плана задачи (3.1)—(3.3) можно предложить следующий алгоритм:

1) записать задачу в форме жордановой таблицы так, чтобы все элементы столбца свободных членов были неотрицательными, т. е. выполнялось неравенство $a_{i0} \geqslant 0$ $(i=\overline{1, m})$. Те уравнения системы (3.2), в которых свободные члены отрицательны, предварительно умножаются на (—1). Табл. 3.1 называют *симплексной;*

2) табл. 3.1 преобразовывать шагами жордановых исключений, замещая нули в левом столбце соответствующими x. При этом на каждом шаге разрешающим может быть выбран любой столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент. Строка целевой функции на выбор разрешающих столбцов на данном этапе никакого влияния не оказывает. Разрешающая строка определяется по наименьшему из отношений свободных членов к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца (такие отношения будем называть *симплексными*).

В ходе жордановых исключений столбцы под «переброшенными» на верх таблицы нулями (разрешающие столбцы) можно вычеркивать. Подлежат вычеркиванию и строки, состоящие из одних нулей.

Если в процессе исключений встретится 0-строка, все элементы которой нули, а свободный член отличен от нуля, то система ограничительных уравнений решений не имеет.

Если же встретится 0-строка, в которой, кроме свободного члена, других положительных элементов нет, то система ограничительных уравнений не имеет неотрицательных решений.

Таблица 3.2

	1	$-x_{r+1}$	$\dots$	$-x_n$
$x_1=$	b_{10}	b_{11}	$\dots$	$b_{1,n-r}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_r=$	b_{r0}	b_{r1}	$\dots$	$b_{r,n-r}$
$f=$	b_{00}	b_{01}	$\dots$	$b_{0,n-r}$

Если система ограничительных уравнений совместна, то через некоторое число шагов все нули в левом столбце будут замещены x и тем самым получен некоторый базис, а следовательно, и отвечающий ему опорный план (табл. 3.2) (см. § 1.3). Чтобы выписать из таблицы компоненты опорного плана, нужно положить равными нулю свободные переменные, тогда базисные переменные будут равны соответствующим свободным членам: $x_1=b_{10}, \dots, x_r=b_{r0}, x_{r+1}=0, \dots, x_n=0$ или $\bar{x}_0=(b_{10}, \dots, b_{r0}, 0, \dots, 0)$. Отвечающее опорному плану $\bar{x}_0$ значение функции f равно свободному члену b_{00}, т. е. $f(\bar{x}_0)=b_{00}$.

В пункте 1 алгоритма предполагается, что все элементы столбца свободных членов неотрицательны. Это требование не обязательно, но если оно выполнено, то все последующие жордановы исключения производятся только с положительными разрешающими элементами, а это удобно при вычислениях.

В случае, когда в столбце свободных членов имеются отрицательные числа, выбор разрешающего элемента производят следующим образом:

1) просматривают строку, отвечающую какому-либо отрицательному свободному члену, например t-строку, и выбирают в ней какой-либо отрицательный элемент, а соответствующий ему столбец принимают за разрешающий (мы предполагаем, что ограничения задачи совместны);

2) составляют отношения элементов столбца свободных членов к соответствующим элементам разрешающего столбца, имеющим одинаковые знаки (симплексные отношения);

3) из симплексных отношений выбирают наименьшее. Оно и определит разрешающую строку. Пусть ею будет, например, p-строка;

4) на пересечении разрешающих столбца и строки находят разрешающий элемент, с которым и делают шаг жорданова исключения.

Если разрешающим оказался элемент t-строки, то преобразованный свободный член этой строки станет положительным. В противном случае после сделанного шага вновь обращаются к t-строке. Если задача разрешима, то через некоторое число шагов в столбце свободных членов не останется отрицательных элементов.

Пример 3.1. Найти какой-либо опорный план задачи

$$f = 3x_1 - x_2 + 5 \qquad (\max);$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \phantom{{}+x_5} &= -4; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \phantom{{}-x_4} - x_5 &= -7; \\ 2x_1 - x_2 \phantom{{}-x_3} + x_4 + x_5 &= 7; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1,5}).$$

Решение. Задача записана в канонической форме, но два свободных члена отрицательны, поэтому, перед тем как записать задачу в форме таблицы, умножим первое и второе уравнения на (-1). В результате все свободные члены в исходной симплексной табл. 3.3 положительны.

А теперь будем перебрасывать нули из левого столбца на верх таблицы. Для первого шага жорданова исключения возьмем разрешающим, например, четвертый столбец (в нем есть положительные элементы!). Разрешающая строка определится по минимальному из отношений: $4/1$ и $7/1$. В данном случае $\min(4/1;\ 7/1) = 4/1$ и соответствует первой строке, она и будет

Таблица 3.3

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
$0=$	4	-1	-1	1	$\boxed{1}$	0
$0=$	7	-1	2	1	0	1
$0=$	7	2	-1	0	1	1
$f=$	5	-3	1	0	0	0

Таблица 3.4

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_5$
$x_4=$	4	-1	-1	1	0
$0=$	7	-1	2	1	1
$0=$	3	3	0	-1	$\boxed{1}$
$f=$	5	-3	1	0	0

Таблица 3.5

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$x_4=$	4	-1	-1	1
$0=$	4	-4	2	$\boxed{2}$
$x_5=$	3	3	0	-1
$f=$	5	-3	1	0

Таблица 3.6

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_4=$	2	$\boxed{1}$	-2
$x_3=$	2	-2	1
$x_5=$	5	1	1
$f=$	5	-3	1

разрешающей. Сделав еще два шага жордановых исключений (табл. 3.4—3.6), приходим к табл. 3.6, в левом столбце которой уже нет нулей: базис выделен. Ему соответствует начальный опорный план: $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=2$; $x_4=2$; $x_5=5$ или $\bar{x}_0=(0;\ 0;\ 2;\ 2;\ 5)$; $f(\bar{x}_0)=5$.

Мы нашли опорный план в базисе x_3, x_4, x_5. Если табл. 3.3 преобразовывать с другими разрешающими элементами, то получится, вообще говоря, другой базис, а следовательно, и другой опорный план.

Пример 3.2. Найти какой-нибудь опорный план задачи

$$f = x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 5 \quad (\max);$$

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 2; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3; \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 1; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=\overline{1,4}).$$

Решение. Записав задачу в симплекс-таблицу и сделав два шага жордановых исключений (табл. 3.7—3.9), замечаем, что во второй строке табл. 3.9 все элементы, кроме свободного члена, нули; получаем $0=2$. Следовательно, система ограничительных уравнений несовместна. Задача неразрешима.

Таблица 3.7

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$0=$	2	4	-2	-2	3
$0=$	3	2	-1	1	-1
$0=$	1	$\boxed{2}$	-1	5	-6
$f=$	5	-1	3	2	1

Таблица 3.8

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$0=$	0	0	-12	$\boxed{15}$
$0=$	2	0	-4	5
$x_1=$	1/2	$-1/2$	5/2	-3
$f=$	11/2	5/2	9/2	-2

Таблица 3.9

	1	$-x_2$	$-x_3$
$x_4=$	0	0	$-4/5$
$0=$	2	0	0
$x_1=$	1/2	$-1/2$	1/10
$f=$	11/2	5/2	29/10

2. Нахождение оптимального опорного плана. Начальный опорный план $\bar{x}_0$ исследуется на оптимальность:

1) если в f-строке нет отрицательных элементов (не считая свободного члена) — план оптимален.

В самом деле, из табл. 3.2 видно, что

$$f=b_{00}-(b_{01}x_{r+1}+\ldots+b_{0,\,n-r}x_n),$$

откуда следует, что при $b_{01}\geqslant 0, \ldots, b_{0,\,n-r}\geqslant 0$ увеличение любой из свободных переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ вызывает уменьшение f. Следовательно, наибольшего значения f достигает при $x_{r+1}=\ldots=x_n=0$ (отрицательными они быть не могут в силу условия (3.3)), т. е. при $\bar{x}_0$.

Если в f-строке нет также и нулевых элементов, то оптимальный план единственный; если же среди элементов есть хотя бы один нулевой, то оптимальных планов бесконечное множество;

2) если в f-строке есть хотя бы один отрицательный элемент, а в соответствующем ему столбце нет положительных, то целевая функция неограничена в допустимой области ($f\to\infty$). Задача неразрешима;

3) если в f-строке есть хотя бы один отрицательный элемент, а в каждом столбце с таким элементом есть хотя бы один положительный, то можно перейти к новому опорному плану, более близкому к оптимальному. Для этого столбец с отрица-

тельным элементом в f-строке берут за разрешающий (если в f-строке отрицательных элементов несколько, разрешающим выбирают столбец с наибольшим по абсолютной величине отрицательным элементом); определяют по минимальному симплексному отношению разрешающую строку и делают шаг жорданова исключения. Полученный опорный план вновь исследуют на оптимальность.

Описанный процесс повторяется до тех пор, пока не будет найден оптимальный опорный план либо установлена неразрешимость задачи.

Замечание. Поскольку $\min f = -\max(-f)$, задачу минимизации можно формально заменить задачей максимизации функции $(-f)$. Но можно этого и не делать. Признаком оптимальности опорного плана задачи минимизации является отсутствие положительных элементов в f-строке симплекс-таблицы, содержащей опорный план. Вся остальная вычислительная процедура остается прежней.

Пример 3.3. Найти оптимальный опорный план задачи из примера 3.1.

Решение. Найденный нами в табл. 3.6 опорный план неоптимален, так как в f-строке присутствует отрицательный элемент (-3). В соответствующем ему столбце имеются положительные элементы, поэтому есть возможность улучшить план. Для получения нового опорного плана табл. 3.6 преобразуем шагом жорданова исключения с первым разрешающим столбцом. Разрешающей будет первая строка, ибо $\min(2/1;\ 5/1) = 2/1$ соответствует именно ей. В результате получаем табл. 3.10, содержащую новый опорный план $\bar{x}_1 = (2;\ 0;\ 6;\ 0;\ 3)$, которому отвечает большее, чем прежнему, значение целевой функции: $f(\bar{x}_1) = 11$. Однако и этот план неоптимален, так как в f-строке присутствует отрицательный элемент (-5). Сделав еще один шаг со вторым разрешающим столбцом, получаем табл. 3.11, в f-строке которой нет отрицательных элементов. Признак оптимальности выполнен. Значит, содержащийся в табл. 3.11 опорный план является оптимальным. Итак, $\bar{x}^* = (4;\ 1;\ 9;\ 0;\ 0)$, $f_{\max} = 16$. Задача решена.

Таблица 3.10

	1	$-x_4$	$-x_2$
$x_1 =$	2	1	-2
$x_3 =$	6	2	-3
$x_5 =$	3	-1	$\boxed{3}$
$f =$	11	3	-5

Таблица 3.11

	1	$-x_4$	$-x_5$
$x_1 =$	4		
$x_3 =$	9		
$x_2 =$	1		
$f =$	16	4/3	5/3

Полезно сопоставить приведенное аналитическое решение задачи с графическим (рис. 3.2). Такое сопоставление позволяет наглядно проследить за поиском оптимального опорного плана и проникнуть в геометрическую суть симплекс-процесса.

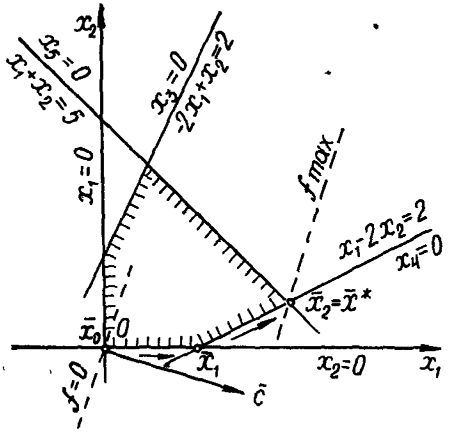

Рис. 3.2

На рис. 3.2 начальному опорному плану $\bar{x}_0=(0;\ 0;\ 2;\ 2;\ 5)$ отвечает точка $\bar{x}_0$ пересечения прямых $x_1=0$ и $x_2=0$. Шагу жорданова исключения, преобразующему табл. 3.6 в табл. 3.10 и приводящему к новому опорному плану $\bar{x}_1=(2;\ 0;\ 6;\ 0;\ 3)$, соответствует переход в новую вершину $\bar{x}_1$ области допустимых решений. При этом мы остаемся на прямой $x_2=0$, но вместо прямой $x_1=0$ попадаем на прямую $x_4=0$. В результате следующего шага жорданова исключения получили опорный план $\bar{x}_2=(4;\ 1;\ 9;\ 0;\ 0)$, который оказался оптимальным (в f-строке нет отрицательных элементов). Этот же вывод следует и из рис. 3.2: прямая f_{max}, параллельная прямой $f=0$, пересекает допустимую область в точке $\bar{x}_2=\bar{x}^*$, в которой f достигает максимума. Процесс улучшения плана, приведенный в табл. 3.6, 3.10, 3.11, графически означает движение из одной вершины многоугольника решений в другую по направлению на оптимальную вершину $\bar{x}^*$: $\bar{x}_0\to\bar{x}_1\to\bar{x}^*$.

Пример 3.4. Решить задачу

$$f=2x_1+3x_2 \quad (\max);$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2-x_3 &= 84; \\ 3x_1+13x_2-x_4 &= 150; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j\geqslant 0 \quad (j=\overline{1,4}).$$

Решение. Записав задачу в симплекс-таблицу и сделав два шага жордановых исключений с разрешающими элементами, выбранными среди положительных чисел основной части таблиц и соответствующих минимальным симплексным отношениям (табл. 3.12—3.14), получаем начальный опорный план: $\bar{x}_0=(24;\ 6;\ 0;\ 0)$. План этот неоптимален, так как в f-строке содержащей его табл. 3.14 имеются отрицательные элементы.

Таблица 3.12

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$0=$	84	$\boxed{3}$	2	-1	0
$0=$	150	3	13	0	-1
$f=$	0	-2	-3	0	0

Таблица 3.13

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$x_1=$	28	2/3	$-1/3$	0
$0=$	66	$\boxed{11}$	1	-1
$f=$	56	$-5/3$	$-2/3$	0

Таблица 3.14

	1	$-x_3$	$-x_4$
$x_1=$	24	$-13/33$	2/33
$x_2=$	6	$\boxed{1/11}$	$-1/11$
$f=$	66	$-17/33$	$-5/33$

Таблица 3.15

	1	$-x_2$	$-x_4$
$x_1=$	50	13/3	$-1/3$
$x_3=$	66	11	-1
$f=$	100	17/3	$-2/3$

Для очередного шага разрешающим возьмем первый столбец, так как в f-строке ему соответствует наибольший по абсолютной величине отрицательный элемент $(-17/33)$. В этом столбце только один положительный элемент, он и будет разрешающим. В результате шага получаем табл. 3.15 с новым опорным планом $\bar{x}_1=(50;\ 0;\ 66;\ 0)$. При этом в f-строке один из элементов имеет отрицательный знак. Однако в столбце над этим элементом нет ни одного положительного. Это говорит о неограниченности функции в области допустимых решений. Задача решена. На рис. 3.3 приведено ее графическое решение. Начальный опорный план (24; 6; 0; 0) соответствует на рис. 3.3 вершине $\bar{x}_0$ области допустимых решений. В ней $f=66$. После шага жорданова исключения получен новый опорный план (50; 0; 66; 0), которому на рисунке отвечает следующая вершина $\bar{x}_1$. В этой вершине значение функции f возросло до $f=100$. Но и этот опорный план, как видно из рисунка, не является наилучшим, ибо вспомогательную прямую $f=0$ можно смещать в направлении вектора $\bar{c}$ (в направлении возрастания значений f) как угодно далеко, поскольку область допустимых решений неограничена.

Продемонстрируем на примерах решения задач с производственным содержанием наиболее часто используемые в практике приемы преобразования моделей и способы рационализации расчетов.

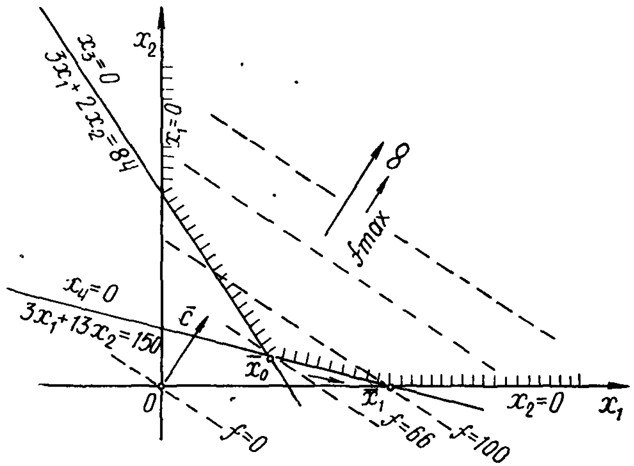

Рис 3.3

Пример 3.5. Найти оптимальный план раскроя листового материала по данным примера 2.4.

Решение. В примере 2.4 была составлена экономико-математическая модель (2.21)—(2.25):

$$f = 29x_1+4x_2+42x_3+36x_4+17x_5 \quad (\min);$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1+2x_2+x_3 = 200; \\ x_2+2x_4+x_5 = 200; \\ x_3+x_5 = 260; \end{array}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1,5}).$$

Модель имеет каноническую форму, и все свободные члены положительны, поэтому никаких предварительных преобразований не требуется. Записав задачу в симплекс-таблицу типа 3.1, известным способом (см. пример 3.1) находим начальный опорный план (табл. 3.16). Он неоптимален, так как в f-строке имеются положительные элементы (напомним, что рассматривается задача минимизации!). Выберем разрешающим, например, второй столбец. Разрешающим элементом в нем будет 3/2, так как min(200:2; 75:3/2) = 75:3/2. После шага жорданова исключения приходим к табл. 3.17, содержащей опорный план $\bar{x}_1^* = (0;\ 50;\ 100;\ 0;\ 150)$. Этот план оптимален, ибо в f-строке нет положительных элементов.

Таблица 3.16

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_3 =$	200	3	2
$x_4 =$	75	3/2	$\boxed{3/2}$
$x_5 =$	50	—3	—2
$f =$	11950	100	100

Таблица 3.17

	1	$-x_1$	$-x_4$
$x_3 =$	100	1	—4/3
$x_2 =$	50	$\boxed{1}$	2/3
$x_5 =$	150	—1	4/3
$f =$	6950	0	—200/3

Таблица 3.18

	1	$-x_2$	$-x_4$
$x_3 =$	50		
$x_1 =$	50		
$x_5 =$	200		
$f =$	6950	0	—200/3

Но в f-строке присутствует нулевой элемент. Это свидетельствует о том, что существует еще один опорный оптимальный план. Найти его можно, преобразовав шагом жорданова исключения табл. 3.17 с разрешающим столбцом, содержащим нулевой элемент f-строки. Разрешающая строка определяется, как обычно, по минимальному симплексному отношению. Второй опорный оптимальный план (табл. 3.18) имеет вид: $\bar{x}_2^* = (50;\ 0;\ 50;\ 0;\ 200)$. Но в таком случае любая выпуклая линейная комбинация опорных планов $\bar{x}_1^*$ и $\bar{x}_2^*$: $\bar{x}^* = \lambda\bar{x}_1^* + (1-\lambda)\bar{x}_2^* = \lambda(0;\ 50;\ 100;\ 0;\ 150) + (1-\lambda)(50;\ 0;\ 50;\ 0;\ 200) = (50-50\lambda;\ 50\lambda;\ 50+50\lambda;\ 0;\ 200-50\lambda)$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, также будет представлять собой оптимальный план.

Наличие не единственного оптимального плана с практической точки зрения очень удобно, так как имеется возможность выбрать параметр λ с учетом других показателей, характеризующих план, но не нашедших отражения в целевой функции. По смыслу нашей задачи компоненты оптимального плана должны выражаться целыми числами, и это следует помнить при выборе λ.

Пример 3.6. Найти оптимальный план выпуска велосипедов и мотоциклов по условиям примера 2.1.

Решение. Прежде всего модель задачи (2.1)—(2.6) приводим к канонической форме:

$$f = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \quad (\max);$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 100; \\ x_2 + x_4 &= 30; \\ 1/120x_1 + 1/40x_2 + x_5 &= 1; \\ 1/80x_1 + 1/60x_2 + x_6 &= 1; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1,6}).$$

Поскольку каждая из дополнительных переменных $x_3, \ldots, x_6$ входит только в одно из уравнений, причем с коэффициентом $+1$, их можно считать базисными, а переменные x_1 и x_2 — свободными. Поэтому при $x_1 = x_2 = 0$ сразу получается начальный опорный план: $\bar{x}_0 = (0;\ 0;\ 100;\ 30;\ 1;\ 1)$, и симплекс-таблицы потребуются лишь для выполнения второго этапа симплекс-процесса: поиска оптимального опорного плана. Таким образом, в данном примере в отличие от предыдущих нет необходимости записывать систему ограничительных уравнений в форме 0-строк. Ее следует записать в виде, разрешенном относительно базисных переменных; целевая функция также выражена через свободные переменные (табл. 3.19).

Таблица 3.19

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_3 =$	100	1	0
$x_4 =$	30	0	$\boxed{1}$
$x_5 =$	1	1/120	1/40
$x_6 =$	1	1/80	1/60
$f =$	0	-2	-3

Таблица 3.20

	1	$-x_5$	$-x_6$
$x_3 =$	52		
$x_2 =$	24		
$x_1 =$	48		
$x_4 =$	6		
$f =$	168	24	16

Далее задача решается обычным путем. В результате приходим к табл. 3.20 с оптимальным планом $(48;\ 24;\ 52;\ 6;\ 0;\ 0)$, $f_{\max} = 168$.

Итак, выпускать следует 48 тыс. велосипедов и 24 тыс. мотоциклов. Максимальная прибыль будет равна 168 тыс. руб.

Пример 3.7. Найти оптимальный план строительства жилых домов по условиям примера 2.2.

Решение. После приведения к канонической форме модель задачи (2.7)—(2.12) примет следующий вид:

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 \ (\max);$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100; \\ 20x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 30x_4 + 40x_5 + x_6 = 3000; \\ 40x_1 + 20x_2 + 60x_3 + 35x_4 + 25x_5 + x_7 = 4500; \\ x_2 - x_8 = 10; \end{array}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1,8}).$$

Поскольку переменные x_6 и x_7 входят в систему ограничительных уравнений только по одному разу и с коэффициентом $+1$, их можно отнести к базисным. Что же касается переменной x_8, то она хоть и входит только в четвертое уравнение, но с коэффициентом (-1), а потому не может быть включена в базис, ибо при нулевых значениях остальных переменных получим $-x_8=10$ или $x_8=-10$, а это недопустимое значение. Следовательно, четвертое уравнение, как и первое, следует записать в исходную симплекс-таблицу в форме 0-строки (табл. 3.21).

Таблица 3.21

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_8$
$0 =$	100	1	1	1	1	1	0
$x_6 =$	3000	20	30	35	30	40	0
$x_7 =$	4500	40	20	60	35	25	0
$0 =$	10	0	$\boxed{1}$	0	0	0	—1
$f =$	0	—3	—2	—5	—4	—6	0

Таблица 3.22

	1	$-x_3$	$-x_4$	$-x_6$	$-x_8$
$x_1 =$	45				
$x_5 =$	45				
$x_7 =$	1375				
$x_2 =$	10				
$f =$	425	1/4	1/2	3/20	5/2

Далее при помощи известных преобразований нужно найти начальный базис с опорным планом, а после этого перебором опорных планов определить оптимальный. В результате преобразований получим табл. 3.22. Из нее следует, что по оптимальному плану надлежит построить 45 домов I типа, 45 домов V типа и 10 домов II типа. Дома III и IV типов строить не следует ($x_3^* = x_4^* = 0$). При этом общая жилая площадь составит 425 тыс. м².

Дополнительные переменные x_6 и x_7 означают неиспользованное в оптимальном плане рабочее время, предусмотренное на закладку фундаментов и выполнение других работ. Из табл. 3.22 видно, что фонд времени на закладку фундаментов израсходован полностью ($x_6^* = 0$), но не использовано 1375 рабочих дней на выполнение остальных работ ($x_7^* = 1375$).

Упражнения

Решить симплекс-методом задачи 3.1—3.4 и дать геометрическую иллюстрацию процесса решения.

3.1. $f = 8x_1 + 6x_2$ (max);

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 20; \\ 6x_1 + 12x_2 + x_4 &= 72; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,4}).$$

3.2. $f = 4x_4 + x_5$ (max);

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= 13; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 5; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_4 - 2x_5 &= 5; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,5}).$$

3.3. $f = x_3 - 2x_4 - 3x_5$ (min);

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 15x_5 &= 4; \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 3; \\ 2x_1 + x_3 + 5x_4 &= 7; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,5}).$$

3.4. $f = 2x_1 + 3x_2$ (max);

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5; \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 9; \\ x_1 + x_5 &= 4; \\ x_1 + 2x_2 + x_6 &= 8; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,6}).$$

Следующие задачи решить симплекс-методом:

3.5. $f=2x_1+x_2-x_3-x_4$ (min);

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3-x_4&=2;\\ 2x_1+x_2-3x_3+x_4&=6;\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=7;\end{aligned}\right\}$$

$x_j\geqslant 0\quad (j=\overline{1,4})$.

3.6. $f=2x_1-6x_2+3x_5$ (max);

$$\left.\begin{aligned} -2x_1+x_2+x_3+x_5&=20;\\ -x_1-2x_2+x_4+3x_5&=24;\\ 3x_1-x_2-12x_5+x_6&=18;\end{aligned}\right\}$$

$x_j\geqslant 0\quad (j=\overline{1,6})$.

3.7. $f=2x_1+8x_2-5x_3+15x_4$ (max);

$$\left.\begin{aligned} 3x_1-x_2+x_3+10x_4&\leqslant 25;\\ x_1+2x_2+x_3+5x_4&\leqslant 10;\\ 2x_1+10x_2+2x_3-5x_4&\leqslant 26;\end{aligned}\right\}$$

$x_j\geqslant 0\quad (j=\overline{1,4})$.

3.8. $f=x_1+x_2-x_3-2x_5$ (min);

$$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2+x_4&=-3;\\ x_3-2x_4&=2;\\ 3x_2-x_4+x_5&\leqslant 5;\\ x_2+x_5&\geqslant -3;\end{aligned}\right\}$$

$x_j\geqslant 0\quad (j=\overline{1,5})$.

3.9. Найти оптимальный состав рациона по условиям примера 2.3, используя математическую модель (2.13)—(2.20).

3.10. Найти оптимальное сочетание посевов сельскохозяйственных культур по условиям примера 2.5, используя математическую модель (2.26)—(2.31).

§ 3.2. Метод искусственного базиса

Решение задачи линейного программирования симплекс-методом начинается с нахождения какого-либо опорного плана. До сих пор такой план находился приведением системы ограничительных уравнений к единичному базису. Рассмотрим другой метод построения начального плана.

Наряду с задачей (3.1)—(3.3), которую будем называть *исходной*, рассмотрим *расширенную* задачу, составленную на основе задачи (3.1)—(3.3) следующим образом. Предполагая в (3.2) $a_{i0}\geqslant 0$ $(i=\overline{1,m})$, введем в каждое из уравнений по одной неотрицательной переменной $x_{n+i}\geqslant 0$ $(i=\overline{1,m})$, которые будем называть *искусственными*, а из линейной формы (3.1) вычтем сумму искусственных переменных, умноженную на как угодно большое положительное число M. В результате получим так называемую *М-задачу:*

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \quad (\max); \qquad (3.4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = a_{i0} \quad (i = \overline{1,\ m}); \qquad (3.5)$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,\ n+m}). \qquad (3.6)$$

В системе (3.5) переменные x_{n+i} $(i=\overline{1, m})$ образуют базис, называемый *искусственным.* При $x_1=\ldots=x_n=0$ из (3.5) получаем начальный опорный план $\bar{x}_0 = (0; \ldots; 0; a_{10}; \ldots; a_{m0})$ M-задачи.

Получение оптимального опорного плана исходной задачи основано на следующих утверждениях.

Если в оптимальном плане М-задачи все искусственные переменные $x_{n+i} = 0$ $(i = \overline{1,\ m})$, т. е. $\bar{x}^* = (x_1^*; \ldots; x_n^*; 0; \ldots; 0)$, *то план* $\bar{x}^* = (x_1^*; \ldots; x_n^*)$ *является оптимальным планом исходной задачи.*

Если в оптимальном плане М-задачи по крайней мере одна из искусственных переменных положительна при любом большом М, то исходная задача не имеет ни одного плана.

Если М-задача не имеет решения, то и исходная задача неразрешима.

При решении задачи линейного программирования методом искусственного базиса искусственные переменные следует вводить лишь в те уравнения, которые не разрешены относительно «естественных» базисных переменных.

Как видно из равенства (3.4), функция F состоит из двух слагаемых $\sum_{1}^{n} c_j x_j = f$ и $M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$, поэтому в симплексных таблицах для нее удобней отводить две строки: одну — для f, другую — для $M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$. Если преобразования выполняются с двумя строками, то признак оптимальности проверяется сначала по второй строке. По ней же определяется переменная, подлежащая включению в базис. Процесс жордановых преобразований продолжают до тех пор, пока из базиса не будут исключены все искусственные переменные. По мере исключения из базиса этих переменных соответствующие им столбцы элементов можно опускать. Объясняется это тем, что искусственные переменные обратно в базис не возвращают, а поэтому отвечающие им столбцы больше не потребуются. После исключения из базиса всех искусственных переменных процесс отыскания оптимального плана продолжают с использованием первой строки целевой функции.

Если в исходной задаче нам нужно целевую функцию минимизировать, то в M-задаче целевая функция будет иметь вид

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}$$

и также минимизируется.

Пример 3.8. Решить задачу методом искусственного базиса

$$f = -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 \quad (\max);$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 &= 3; \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 &= 6; \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 1; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1,5}).$$

Решение. Составляем M-задачу. Первое уравнение разрешено относительно «естественной» базисной переменной x_1, поэтому вводить в него искусственную переменную нет смысла. Во второе и третье уравнения введем искусственные переменные x_6 и x_7 соответственно. Целевая функция M-задачи будет иметь вид: $F = f - M(x_6 + x_7)$. В результате приходим к следующей M-задаче:

$$F = -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 - M(x_6 + x_7) \quad (\max);$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 \qquad\qquad &= 3; \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 + x_6 \qquad &= 6; \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \qquad + x_7 &= 1; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1,7}).$$

В данном случае получилась задача с неполным искусственным базисом. Если бы мы ввели искусственную переменную и в первое уравнение, то это только удлинило бы решение.

Прежде чем составлять первую симплекс-таблицу, выразим функцию F через свободные переменные x_2, x_3, x_4, x_5. Для этого из ограничительных уравнений найдем x_1, x_6 и x_7 и полученные выражения подставим в функцию F. После упрощений будем иметь

$$F=-14x_2+9x_3-11x_4+14x_5-6-$$
$$-M(-2x_2+4x_3-5x_4+6x_5+7).$$

Теперь M-задачу можно записать в таблицу. Предусмотрим для F две строки. При этом общий множитель M элементов второй строки вынесем за ее пределы (табл. 3.23). Если нам потребуется объединить эти две строки, то суммарный коэффициент b_{0j} при x_j в функции F будет равен сумме элемента b'_{0j} первой строки и элемента b''_{0j} второй строки, умноженного на M: $b_{0j}=b'_{0j}+M\,b''_{0j}$. Из этой записи видно, что знак элемента b_{0j} определяется знаком b''_{0j}, ибо M — достаточно большое число. Поэтому, пока $b''_{0j}\neq 0$, разрешающий столбец можно выбирать только по элементам второй строки целевой функции. Лишь после того, как все элементы этой строки станут равными нулю, разрешающие столбцы выбирают по первой строке. Исходя из этих соображений, разрешающий элемент в табл. 3.23 выбран (по минимальному симплексному отношению) в столбце с элементом (—5) во второй строке целевой функции. После шага жорданова исключения из базиса выводится искусственная переменная x_7, в связи с чем она исключается из дальнейших расчетов, а соответствующий ей столбец опускается (табл. 3.24). В этой таблице еще содержится решение M-задачи: (8; 0; 0; 1; 0; 2; 0) и значение функции F, отвечающее этому решению: $F=-17-2M$.

Таблица 3.23

		1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
$x_1=$		3	—4	2	—5	9
$x_6=$		6	1	—3	4	—5
$x_7=$		1	1	—1	$\boxed{1}$	—1
$F=$		—6	14	—9	11	—14
	M	—7	—2	4	—5	6

Преобразовав табл. 3.24 шагом жорданова исключения с разрешающими вторым столбцом и второй строкой, выводим из базиса и вторую искусственную переменную x_6 (табл. 3.25). При этом все элементы второй строки целевой функции становятся равными нулю и таблица соответствует исходной задаче:

Таблица 3.24

		1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_5$
$x_1=$		8	1	-3	4
$x_6=$		2	-3	$\boxed{1}$	-1
$x_4=$		1	1	-1	-1
$F=$		-17	3	2	-3
	M	-2	3	-1	1

в ней содержится опорное решение этой задачи (14; 0; 2; 3; 0) и значение целевой функции $f=-21$. Как видно из f-строки, это решение не оптимальное, поэтому сделан еще шаг жорданова исключения (табл. 3.26). В f-строке полученной таблицы все элементы положительны, следовательно, содержащееся в ней опорное решение является оптимальным. Итак, $\bar{x}^*=(0;\ 0;\ 16;\ 31;\ 14)$, $f_{\max}=-7$.

Таблица 3.25

	1	$-x_2$	$-x_5$
$x_1=$	14	-8	$\boxed{1}$
$x_3=$	2	-3	-1
$x_4=$	3	-2	-2
$f=$	-21	9	-1

Таблица 3.26

	1	$-x_2$	$-x_1$
$x_5=$	14		
$x_3=$	16		
$x_4=$	31		
$f=$	-7	1	1

Характерные особенности задач линейного программирования и общие соображения по формированию экономико-математических моделей таких задач приведены в § 2.1. Дополнительные переменные, которые приходится вводить в модели задач с практическим содержанием в процессе преобразования моделей к канонической форме, всегда имеют определенный экономический смысл (см. примеры 2.12, 3.7). Рассмотрим еще одну задачу производственного планирования и в ходе ее решения методом искусственного базиса выясним экономический смысл искусственных переменных и величины M.

Пример 3.9. На месторождениях А и Б может добываться сырье для двух заводов, расположенных в разных пунктах. Себестоимость добычи единицы сырья на месторождении А и доставки его на оба завода одинакова и равна 200 руб.; себестоимость добычи и доставки сырья месторождения Б составляет 300 руб. для завода № 1 и 400 руб. для завода № 2.

При перевозке сырья с месторождения А к любому заводу и при перевозках с месторождения Б на завод № 2 приходится использовать участок железнодорожной сети с ограниченной пропускной способностью: количество перевозимого через этот участок сырья не должно превышать за планируемый период (например, за год) 150 единиц.

Для обеспечения добычи сырья на месторождении А требуется 2 тыс. руб. капиталовложений на каждую единицу сырья; удельные капиталовложения на единицу сырья на месторождении Б составляют 3 тыс. руб. Общая сумма капиталовложений в организацию добычи сырья не должна превышать 600 тыс. руб.

Завод № 1 изготовляет 400 единиц продукции за планируемый период, завод № 2 — 500. При этом из единицы сырья с месторождения А можно изготовить 3 единицы продукции как на заводе № 1, так и на заводе № 2. Качество сырья с месторождения Б несколько выше: из единицы этого сырья можно изготовить 4 единицы продукции на заводе № 1 или 5 единиц на заводе № 2.

Требуется определить, сколько сырья следует добывать на каждом месторождении для каждого из заводов, чтобы полностью обеспечить их потребности и свести при этом до минимума сумму издержек на добычу и доставку сырья.

Решение. Обозначим через x_1 и x_2 количество сырья, добываемого на месторождении А соответственно для заводов № 1 и № 2; через x_3 и x_4 — количество сырья, добываемого на месторождении Б для тех же заводов. Ясно, что

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=\overline{1,4}). \tag{3.7}$$

Ограниченность пропускной способности одного из участков железнодорожной сети означает, что количество сырья, перевозимого с месторождения А на оба завода и с месторождения Б на завод № 2, не должно превышать 150 единиц, т. е.

$$x_1+x_2+x_4 \leqslant 150. \tag{3.8}$$

Ограниченность капиталовложений (не более 600 тыс. руб.) при заданных удельных капиталовложениях на единицу добываемого сырья (2 тыс. руб. для месторождения А и 3 тыс. руб. для месторождения Б) требует соблюдения следующего неравенства (в тыс. руб.):

$$2(x_1+x_2)+3(x_3+x_4) \leqslant 600. \tag{3.9}$$

Условия выполнения заводами производственной программы при заданных нормах выхода продукции из единицы сырья можно записать так:

$$3x_1+4x_3=400; \qquad (3.10)$$

$$3x_2+5x_4=500. \qquad (3.11)$$

Требование минимизации суммарных издержек на добычу и доставку сырья определяет целевую функцию. Расходы на добычу и перевозки сырья месторождения А составляют (в сотнях руб.): $2x_1+2x_2$, а месторождения Б: $3x_3+4x_4$. Требуется, следовательно, минимизировать

$$f=2x_1+2x_2+3x_3+4x_4. \qquad (3.12)$$

Итак, необходимо найти такие значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4, которые удовлетворяли бы ограничениям (3.7)—(3.11) и доставляли минимум функции (3.12).

Прежде всего введением дополнительных переменных x_5 и x_6 модель задачи (3.7)—(3.12) приведем к канонической форме:

$$f = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \ (\min);$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &= 150;\\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_6 &= 600;\\ 3x_1 + 4x_3 &= 400;\\ 3x_2 + 5x_4 &= 500; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1,6}).$$

Составим теперь M-задачу. Первое и второе уравнения разрешены относительно «естественных» базисных переменных x_5 и x_6, а в третье и четвертое введем искусственные переменные x_7 и x_8. В результате придем к следующей M-задаче.*

$$F = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + M(x_7 + x_8) \ (\min);$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &= 150;\\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_6 &= 600;\\ 3x_1 + 4x_3 + x_7 &= 400;\\ 3x_2 + 5x_4 + x_8 &= 500; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1,8}).$$

* При ненулевых x_7 и x_8 любая система значений x_1, x_2, x_3, x_4, удовлетворяющая последним двум уравнениям модели, не будет удовлетворять уравнениям (3.10) и (3.11). В этом существенное отличие введения искусственных переменных от введения дополнительных переменных.

В условиях рассматриваемой задачи под x_5 следует понимать неиспользованную при том или ином варианте плана снабжения пропускную способность участка железнодорожной сети, а под x_6 — неиспользованные капиталовложения. Что касается искусственных переменных, то под x_7 можно понимать часть продукции завода № 1, а под x_8 — часть продукции завода № 2, не обеспеченные сырьем. Под M надо понимать убыток, вызываемый невозможностью из-за недостатка сырья произвести единицу продукции на заводе № 1 или № 2. Предполагаемый убыток настолько велик, что выгоднее пойти на любые расходы по добыче и доставке сырья, чем примириться с малейшей его нехваткой.

Переходя к поиску оптимального плана, видим, что переменные x_5, x_6, x_7, x_8 составляют начальный базис. С помощью третьего и четвертого равенств выражаем функцию F через свободные переменные $x_1, \ldots, x_4$:

$$F=2x_1+2x_2+3x_3+4x_4+M(-3x_1-3x_2-4x_3-5x_4+900).$$

Теперь можно составить первую симплекс-таблицу (табл. 3.27), содержащую начальный опорный план (0; 0; 0; 0; 150; 600; 400; 500). Этот план неоптимален, так как во второй строке целевой функции присутствуют положительные элементы. В результате последовательного улучшения плана приходим к табл. 3.28, содержащей оптимальное решение задачи. Из этой таблицы видно, что на месторождении А следует добывать 33,33 единиц сырья для завода № 1 и 41,67 единиц для завода № 2; на месторождении Б следует добывать по 75 единиц сырья для каждого из заводов.

Таблица 3.27

		1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$x_5=$		150	1	1	0	1
$x_6=$		600	2	2	3	3
$x_7=$		400	3	0	4	0
$x_8=$		500	0	3	0	5
$F=$		0	−2	−2	−3	−4
	M	900	3	3	4	5

Таблица 3.28

	1	$-x_5$	$-x_6$
$x_1=$	100/3		
$x_2=$	125/3		
$x_3=$	225/3		
$x_4=$	225/3		
$f=$	675	−1/2	−1

Из табл. 3.28 видно, кроме того, что при оптимальном плане снабжения заводов сырьем полностью используются и пропускная способность железнодорожной сети ($x_5^* = 0$), и лимит капиталовложений ($x_6^* = 0$), а сумма производственных и транспортных расходов составляет 675 тыс. руб.

Упражнения

Задачи 3.11—3.15 решить методом искусственного базиса:

3.11. $f = 8x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 2x_4 \quad (\max);$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 &= 16; \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= 20; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,4}).$$

3.12. $f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \quad (\max);$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2; \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 &= 24; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,4}).$$

3.13. $f = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \quad (\min);$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_4 + 6x_6 &= 9; \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 &= 2; \\ x_1 + 2x_2 + x_5 + 2x_6 &= 6; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,6}).$$

3.14. $f = x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \quad (\min);$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 2; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 &= 3; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,5}).$$

3.15. $f = x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \quad (\max);$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 + x_6 &= 6; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_6 &= 2; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,6}).$$

Решить следующие задачи линейного программирования:

3.16. Цех выпускает три вида изделий. Суточный плановый выпуск: 90 единиц изделия I, 70 единиц изделия II и 60 единиц изделия III. Суточные ресурсы: 780 единиц производственного оборудования (станки, машины и т. п.), 850 единиц сырья (металл и т. п.) и 790 единиц электроэнергии. Их расход на одно изделие указан в табл. 3.29. Стоимость изделия I — 8 руб., изделия II — 7 руб., изделия III — 6 руб.

Сколько надо производить изделий каждого вида, чтобы стоимость продукции, выпущенной сверх плана, была максимальной?

Таблица 3.29

Ресурсы	Расход ресурсов на изделие		
	I	II	III
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

3.17. Для грузовых перевозок создается автоколонна. На приобретение автомашин выделено 600 тыс. руб. Можно заказать машины трех марок — А, Б и В, характеризующиеся данными, приведенными в табл. 3.30. Количество машин не должно превышать 30, а общее число водителей в автоколонне должно быть не больше 144 человек.

Таблица 3.30

Марка автомашины	Стоимость машины, тыс. руб.	Количество водителей, обслуживающих машину за смену	Число рабочих смен в сутки	Производительность машины за смену, т/км
А	10	1	3	2100
Б	20	2	3	3600
В	23	2	3	3780

Сколько автомашин каждой марки следует заказать, чтобы автоколонна имела максимально возможную производительность (т/км) в расчете на одни сутки? Считать, что каждая машина будет использоваться в течение всех трех смен, а водители будут работать по одной смене в сутки.

3.18. Найти оптимальное сочетание посевов трех культур: пшеницы, гречихи и картофеля. Эффективность возделывания названных культур (в расчете на 1 га) характеризуется показателями, значения которых приведены в табл. 3.31. Производственные ресурсы: 6000 га пашни, 5000 чел.-дней труда механизаторов, 9000 чел.-дней конно-ручного труда. Критерий оптимальности — максимум прибыли.

Таблица 3.31

Показатели	Пшеница	Гречиха	Картофель
Урожайность, ц	20	10	100
Затраты труда механизаторов, чел.-дней	0,5	1	5
Затраты конно-ручного труда, чел.-дней	0,5	0,5	20
Прибыль от реализации 1 ц продукции, руб.	4	10	3

3.19. Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 480 тыс. л бензина прямой перегонки и 200 тыс. л изопентона. В результате смешения этих четырех компонентов в отношении 2:3:5:2 образуется бензин А стоимостью 120 руб. за 1 тыс. л; в отношении 3:1:2:1 — бензин Б стоимостью 100 руб. за 1 тыс. л; в отношении 2:2:1:3 — бензин В стоимостью 150 руб. за 1 тыс. л.

Составить план, при котором стоимость всей выпущенной продукции будет максимальной.

3.20. Для изготовления обуви четырех моделей на фабрике используются два сорта кожи. Ресурсы рабочей силы и материала, затраты труда и материала для изготовления каждой пары обуви, а также прибыль от реализации единицы продукции приведены в табл. 3.32.

Таблица 3.32

Ресурсы	Запас ресурсов	Затраты ресурсов на одну пару обуви по моделям			
		№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Рабочее время, чел.-ч	1000	1	2	2	1
Кожа 1-го сорта	500	2	1	0	0
Кожа 2-го сорта	1200	0	1	4	1
Прибыль, руб.		2	40	10	15

Составить план выпуска обуви по ассортименту, максимизирующему прибыль.

3.21. Решить задачи: а) 2.1; б) 2.2; в) 2,3; г) 2.4; д) 2.5.

Глава 4. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

§ 4.1. Постановка двойственной задачи

Каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие задачу, называемую *двойственной к исходной.*

Пусть дана общая задача линейного программирования (исходная задача)

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ (\max); \tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i = \overline{1,\ m_1},\ m_1 \leqslant m); \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{m_1 + 1,\ m}); \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1,\ n_1},\ n_1 \leqslant n), \tag{4.3}$$

где x_j произвольного знака при $j = \overline{n_1 + 1,\ n}$.

Двойственная к ней задача имеет вид

$$\tilde{f}(u) = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \,(\min); \tag{4.4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geqslant c_j \quad (j = \overline{1,\ n_1},\ n_1 \leqslant n); \\ &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i = c_j \quad (j = \overline{n_1 + 1,\ n}); \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

$$u_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1,\ m_1},\ m_1 \leqslant m), \tag{4.6}$$

где u_i произвольного знака при $i = \overline{m_1 + 1,\ m}$.

Задача (4.4)—(4.6), двойственная к задаче (4.1)—(4.3), строится по следующим правилам:

1) *упорядочивается запись исходной задачи, т. е. если целевая функция задачи максимизируется, то ограничения-неравенства должны быть вида $\leqslant$, если минимизируется, то вида $\geqslant$. Выполнение этих условий достигается умножением соответствующих ограничений на (—1);*

2) *если исходная задача является задачей максимизации, то двойственная будет задачей минимизации. При этом вектор, образованный из коэффициентов при неизвестных целевой функции исходной задачи, совпадает с вектором констант в правых частях ограничений двойственной задачи. Аналогично связаны между собой векторы, образованные из коэффициентов при неизвестных целевой функции двойственной задачи, и константы в правых частях ограничений исходной задачи;*

3) *каждой переменной u_i двойственной задачи соответствует i-е ограничение исходной задачи, и, наоборот, каждой переменной x_j прямой задачи соответствует j-е ограничение двойственной задачи;*

4) *матрица из коэффициентов при неизвестных двойственной задачи A^T образуется транспонированием матрицы $A=\|a_{ij}\|_{m\times n}$, составленной из коэффициентов при неизвестных исходной задачи;*

5) *если на j-ю переменную исходной задачи наложено условие неотрицательности, то j-е ограничение двойственной задачи будет неравенством, в противном случае j-е ограничение будет равенством; аналогично связаны между собой ограничения исходной задачи и переменные двойственной.*

Так как двойственная задача по отношению к двойственной является исходной, то задачи (4.1)—(4.3) и (4.4)—(4.6) образуют *пару взаимно двойственных задач.* Дадим экономическую интерпретацию пары двойственных задач. Рассмотрим задачу рационального использования ресурсов. Пусть предприятие располагает ресурсами $b_1, b_2, \ldots, b_m$, которые могут использоваться для выпуска n видов продукции. Пусть также известны стоимость единицы j-го вида продукции c_j $(j=\overline{1,n})$ и норма потребления i-го ресурса $(i=\overline{1,m})$ на производство единицы j-й продукции — a_{ij}.

Требуется определить объем производства продукции каждого вида x_j $(j=\overline{1,n})$, максимизирующий суммарную стоимость

$$f=c_1x_1+\ldots+c_nx_n. \tag{4.7}$$

При этом расход ресурсов не должен превышать их наличия:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leqslant b_m. \end{array}\right\} \qquad (4.8)$$

Все неизвестные по своему экономическому смыслу неотрицательны

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, n}). \qquad (4.9)$$

По исходным данным сформулируем другую экономическую задачу (двойственную).

Предположим, что некоторая организация может закупить все ресурсы, которыми располагает предприятие. Необходимо определить оптимальные цены (оценки) u_i^* $(i = \overline{1, m})$ на эти ресурсы исходя из естественного условия, что покупающая организация стремится минимизировать общую оценку ресурсов. Нужно, однако, учитывать и тот факт, что за ресурсы покупающая организация должна уплатить сумму, не меньшую той, которую может выручить предприятие при организации собственного производства продукции.

Математическая модель задачи имеет вид

$$\tilde{f} = b_1u_1 + \ldots + b_mu_m \ (\min); \qquad (4.10)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}u_1 + \ldots + a_{m1}u_m \geqslant c_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}u_1 + \ldots + a_{mn}u_m \geqslant c_n; \end{array}\right\} \qquad (4.11)$$

$$u_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, m}). \qquad (4.12)$$

Здесь $\tilde{f}$ — общая оценка ресурсов. Каждое j-е ограничение из системы (4.11) представляет собой неравенство, левая часть которого равна оценке всех ресурсов, расходуемых на производство единицы j-го вида продукции, а правая — стоимости единицы этой продукции.

Заметим, что задачи (4.7)—(4.9) и (4.10)—(4.12) образуют *симметричную* пару взаимно двойственных задач.

Пример 4.1. Построить двойственную задачу к следующей задаче, заданной в общей форме:

$$f = 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \quad (\min);$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \leqslant 8; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leqslant 5; \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + 3x_5 \geqslant 7; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \ x_2 \geqslant 0; \ x_4 \geqslant 0.$$

Решение. Упорядочим запись исходной задачи. Так как требуется найти минимум целевой функции, то неравенства в системе ограничений должны быть записаны с помощью знака $\geqslant$. Умножив первое и третье неравенства на (-1), приведем систему ограничений к виду

$$\left.\begin{aligned} -3x_1+2x_2-x_3-x_4+x_5 &\geqslant -8;\\ x_1+3x_2+x_3+3x_4-2x_5 &= 6;\\ -x_1-x_2-x_3+x_4 &\geqslant -5;\\ 2x_1-5x_2+x_4+3x_5 &\geqslant 7. \end{aligned}\right\}$$

Двойственная задача будет иметь четыре переменные, так как прямая задача содержит четыре ограничения.

В соответствии с указанным выше правилом запишем двойственную задачу:

$$\tilde{f} = -8u_1+6u_2-5u_3+7u_4 \ (\max);$$

$$\left.\begin{aligned} -3u_1+u_2-u_3+2u_4 &\leqslant 2;\\ 2u_1+3u_2-u_3-5u_4 &\leqslant -1;\\ -u_1+u_2-u_3 &= 1;\\ -u_1+3u_2+u_3+u_4 &\leqslant 1;\\ u_1-2u_2+3u_4 &= -2; \end{aligned}\right\}$$

$$u_1\geqslant 0;\quad u_3\geqslant 0;\quad u_4\geqslant 0.$$

Третье и пятое ограничения двойственной задачи записаны в виде равенства, так как на соответствующие им переменные x_3 и x_5 в исходной задаче не наложено условие неотрицательности. На переменные u_1, u_3 и u_4 наложено условие неотрицательности в связи с тем, что в исходной задаче им соответствуют ограничения в виде неравенств.

Пример 4.2. Построить двойственную задачу к следующей задаче, заданной в канонической форме:

$$f = 2x_2+x_4 \ (\max);$$

$$\left.\begin{aligned} x_2+x_3+3x_4 &= 9;\\ 3x_2-2x_4+x_5 &= 5;\\ x_1+2x_2+x_4 &= 6; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j\geqslant 0 \quad (j=\overline{1,5}).$$

Решение. Существуют два способа построения двойственной задачи.

I способ. Введем три переменные u_1, u_2, u_3 и по общему правилу запишем двойственную задачу:

$$\tilde{f} = 9u_1 + 5u_2 + 6u_3 \quad (\min);$$

$$\left.\begin{array}{l} u_3 \geqslant 0; \\ u_1 + 3u_2 + 2u_3 \geqslant 2; \\ u_1 \geqslant 0; \\ 3u_1 - 2u_2 + u_3 \geqslant 1; \end{array}\right\}$$

$$u_2 \geqslant 0.$$

II способ. Отбросив в первом, втором и третьем уравнениях базисные переменные x_1, x_3 и x_5, приведем задачу к симметричной форме:

$$f = 2x_2 + x_4 \quad (\max);$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 + 3x_4 \leqslant 9; \\ 3x_2 - 2x_4 \leqslant 5; \\ 2x_2 + x_4 \leqslant 6; \end{array}\right\}$$

$$x_2 \geqslant 0; \; x_4 \geqslant 0.$$

Записав для нее двойственную задачу, получим тот же результат, что и при первом способе построения.

Пример 4.3. Построить задачу, двойственную к задаче линейного программирования, заданной в симметричной форме записи

$$f = x_1 + x_2 + x_3 \quad (\min);$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 9; \\ 2x_1 + x_3 \geqslant 4; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0; \quad x_3 \geqslant 0.$$

Решение. Двойственная задача будет иметь две переменные u_1 и u_2, так как исходная задача содержит два ограничения. Используя общее правило записи двойственной задачи, получим:

$$\tilde{f} = 9u_1 + 4u_2 \quad (\max);$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 + 2u_2 \leqslant 1; \\ 2u_1 \leqslant 1; \\ u_1 + u_2 \leqslant 1; \end{array}\right\}$$

$$u_1 \geqslant 0; \quad u_2 \geqslant 0.$$

Упражнения

Исходя из общего правила, составить задачи, двойственные к задачам 4.1—4.6:

4.1. $f = 2x_1 + 10x_2 - 2x_3$ (max);

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &\geqslant 1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\leqslant 3; \end{aligned}\right\}$$

$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, 3})$.

4.2. $f = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$ (min);

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &\geqslant 7; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\geqslant 9; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &\leqslant 5; \end{aligned}\right\}$$

$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, 3})$.

4.3. $f = x_1 + x_2 + 2x_3$ (max):

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 4; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6; \\ 2x_1 + x_3 &= 5; \end{aligned}\right\}$$

$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, 3})$.

4.4. $f = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4$ (min);

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 7; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 8. \end{aligned}\right\}$$

4.5. $f = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5$ (max);

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &\leqslant 8; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 &\leqslant 9; \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 &\geqslant 4; \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \geqslant 0; \quad x_3 \geqslant 0$.

4.6. $f = 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4$ (min);

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &\geqslant 12; \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &\leqslant 10; \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_4 &= 7; \end{aligned}$$

$x_2 \geqslant 0; \quad x_3 \geqslant 0$.

4.7. Показать, что задача, двойственная по отношению к двойственной в примере 4.1, будет совпадать с исходной.

§ 4.2. Принцип двойственности

Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение $\overline{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, то и другая имеет оптимальное решение $\overline{u}^* = (u_1^*, \ldots, u_m^*)$. При этом экстремальные значения целевых функций задач совпадают, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i^*.$$

Если целевая функция одной из задач двойственной пары не ограничена, то другая задача не имеет решения.

Из этого утверждения, являющегося в сущности теоремой двойственности, следует, что: 1) *для разрешимости одной из двойственных задач необходимо и достаточно, чтобы каждая из задач имела хотя бы одно решение;* 2) *для того чтобы планы* $\bar{x}=(x_1, \dots, x_n)$ *и* $\bar{u}=(u_1, \dots, u_m)$ *являлись оптимальными решениями пары двойственных задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i.$$

Проиллюстрируем утверждения примером.

Пример 4.4. Найти максимум функции

$$f=4x_1+2x_2$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 6; \\ x_1 \quad &\leqslant 4; \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 12; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

Решение. Двойственная задача имеет вид:

$$\tilde{f} = 6u_1 + 4u_2 + 12u_3 \quad (\min);$$

$$\left.\begin{aligned} u_1 + u_2 + 2u_3 &\geqslant 4; \\ u_1 \qquad + u_3 &\geqslant 2; \end{aligned}\right\}$$

$$u_i \geqslant 0 \quad (i=\overline{1, 3}).$$

Приведя ограничительные неравенства задач к эквивалентным уравнениям и разрешив их относительно базисных переменных, получим

для прямой

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= -\ \ x_1 - x_2 + 6 \geqslant 0; \\ x_4 &= -\ \ x_1 \qquad + 4 \geqslant 0; \\ x_5 &= -2x_1 - x_2 + 12 \geqslant 0; \end{aligned}\right\}$$

для двойственной

$$\left.\begin{aligned} u_4 &= u_1 + u_2 + 2u_3 - 4 \geqslant 0; \\ u_5 &= u_1 \qquad + u_3 - 2 \geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

Чтобы решить задачи, поместим их в жордановы таблицы: исходную — в табл. 4.1, двойственную — в табл. 4.2, где С. П. означает свободные переменные, а Б. П.— базисные.

Таблица 4.1

С.П. / Б.П.	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_3 =$	6	1	1
$x_4 =$	4	1	0
$x_5 =$	12	2	1
$f =$	0	—4	—2

Таблица 4.2

С.П. / Б.П.	1	u_1	u_2	u_3
$u_4 =$	—4	1	1	2
$u_5 =$	—2	1	0	1
$\tilde{f} =$	0	6	4	12

Из таблиц видно, что они содержат одни и те же данные, следовательно, их можно объединить. Для этого дополним табл. 4.1 заглавной строкой, где поместим базисные переменные двойственной задачи, и заглавным столбцом, в котором запишем свободные переменные.

Клетку, находящуюся на пересечении заглавной строки и столбца свободных членов, отведем под запись функции $\tilde{f}$, а в симметричной ей клетке поставим единицу (табл. 4.3).

Таблица 4.3

С.П. (двойств.) / Б.П. (двойств.)	Б.П. (двойств.) →	$\tilde{f} =$	$u_4 =$	$u_5 =$
С.П.	С.П. / Б.П.	1	$-x_1$	$-x_2$
u_1	$x_3 =$	6	1	1
u_2	$x_4 =$	4	1	0
u_3	$x_5 =$	12	2	1
1	$f =$	0	—4	—2

Из табл. 4.3 видно, что любая базисная переменная двойственной задачи равна сумме произведений коэффициентов отвечающего ей столбца на соответствующие переменные, стоящие в левом заглавном столбце. Например,

$$u_4 = 1u_1 + 1u_2 + 2u_3 - 4.$$

Аналогично вычисляется и значение функции.

Табл. 4.3 (двойственная таблица) позволяет легко установить соответствие между переменными прямой и двойственной задач. Так, базисным переменным x_3, x_4, x_5 исходной задачи соответствуют свободные переменные u_1, u_2 и u_3 двойственной задачи. Аналогично свободным переменным x_1 и x_2 прямой задачи соответствуют базисные переменные u_4, u_5 двойственной задачи.

Опустив расчеты, приведем оптимальное решение задачи в табл. 4.4.

Таблица 4.4

С.П. \ Б.П.	Б.П.	$\tilde{f} =$	$u_1 =$	$u_2 =$
С.П.	С.П. \ Б.П.	1	$-x_3$	$-x_4$
u_5	$x_2 =$	2		
u_4	$x_1 =$	4		
u_3	$x_5 =$	2		
1	$f =$	20	2	2

Максимальное значение функции $f = 20$ исходной задачи достигается при следующих значениях переменных: $x_1^* = 4$; $x_2^* = 2$; $x_3^* = 0$; $x_4^* = 0$; $x_5^* = 2$.

Значения свободных переменных двойственной задачи равны нулю ($u_3^* = u_4^* = u_5^* = 0$), а значение базисных переменных читаем в последней строке таблицы ($u_1^* = 2$, $u_2^* = 2$). При этом значение функции $\tilde{f} = 20$ минимально и равно значению функции прямой задачи.

В этом примере мы решали исходную задачу и, используя принцип соответствия между переменными, нашли решение двойственной задачи. В некоторых случаях удобнее поступать наоборот.

Пример 4.5. Найти оптимальное решение задачи

$$f = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad (\min);$$

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - x_3 &\geqslant 4; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &\geqslant 6; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, 3}).$$

Решение. Двойственная задача имеет вид

$$\tilde{f} = 4u_1 + 6u_2 \quad (\max);$$

$$\left.\begin{aligned} 4u_1 + 5u_2 &\leqslant 4; \\ 3u_1 + u_2 &\leqslant 2; \\ -u_1 + 2u_2 &\leqslant 3; \end{aligned}\right\}$$

$$u_1 \geqslant 0; \quad u_2 \geqslant 0.$$

Решение задачи приведено в табл. 4.5 и 4.6.

Таблица 4.5

Б.П \ С.П.	1	$-u_1$	$-u_2$
$u_3 =$	4	4	$\boxed{5}$
$u_4 =$	2	3	1
$u_5 =$	3	—1	2
$\tilde{f} =$	0	—4	—6

Таблица 4.6

Б.П. \ С.П.	1	$-u_1$	$-u_3$
$u_2 =$	4/5		
$u_4 =$	6/5		
$u_5 =$	7/5		
$\tilde{f} =$	24/5	4/5	6/5

Оптимальное решение двойственной задачи: $\tilde{f}^*(u) = 24/5$; $u_1^* = 0$; $u_2^* = 4/5$; $u_3^* = 0$; $u_4^* = 6/5$; $u_5^* = 7/5$.

На основании соответствия между переменными запишем оптимальное решение исходной задачи: $f^*(x) = 24/5$; $x_1^* = 6/5$; $x_2^* = x_3^* = 0$; $x_4^* = 4/5$; $x_5^* = 0$.

Заметим, что для решения исходной задачи симплекс-методом потребовалось бы выполнить не менее двух итераций. Решение же двойственной задачи найдено за одну итерацию.

При решении двойственных задач могут встретиться следующие случаи: а) обе задачи разрешимы (имеют планы); б) области допустимых решений обеих задач пустые; в) одна задача имеет неограниченную область допустимых решений, вторая — пустую.

Пример 4.6.

$$f = 6x_1 + 4x_2 \ (\max);$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leqslant 8; \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 6; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

Решение. Двойственная задача имеет вид:

$$\tilde{f} = 8u_1 + 6u_2 \ (\min);$$

$$\left.\begin{aligned} 2u_1 + 2u_2 &\geqslant 6; \\ 4u_1 + u_2 &\geqslant 4; \end{aligned}\right\}$$

$$u_1 \geqslant 0; \quad u_2 \geqslant 0.$$

Графическое решение исходной задачи приведено на рис. 4.1, *а*, а двойственной — на рис. 4.1, *б*. Максимальное значение функции $f = 56/3$ исходной задачи достигается в точке $\bar{x}^*(8/3;\ 2/3)$, т. е. при $x_1^* = 8/3$ и $x_2^* = 2/3$. Минимальное зна-

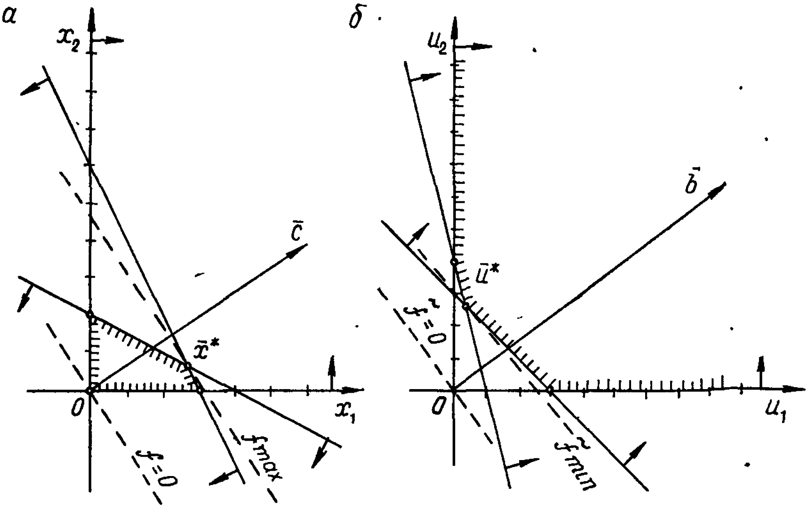

Рис. 4.1

чение функции $\tilde{f} = 56/3$ двойственной задачи достигается в точке $\bar{u}^*(1/3;\ 8/3)$, т. е. при $u_1^* = 1/3$ и $u_2^* = 8/3$.

Пример 4.7.

$$f = 6x_1 + 3x_2 \ (\min);$$

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 - x_2 &\geqslant 3; \\ -2x_1 + x_2 &\leqslant -2; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

Решение. Прежде чем записать условие двойственной задачи, второе неравенство исходной задачи умножим на (—1), после чего система ограничений будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 - x_2 &\geqslant 3; \\ 2x_1 - x_2 &\geqslant 2. \end{aligned}\right\}$$

Теперь запишем двойственную задачу:

$$\tilde{f} = 3u_1 + 2u_2 \ (\max);$$

$$\left.\begin{aligned} -3u_1 + 2u_2 &\leqslant 6; \\ -u_1 - u_2 &\leqslant 3; \end{aligned}\right\}$$

$$u_1 \geqslant 0; \quad u_2 \geqslant 0.$$

Область решений исходной задачи пустая, так как система ограничений противоречива (рис. 4.2, *а*). В самом деле, вычитая из первого неравенства второе, имеем $x_1 \leqslant -1/5$, что противоречит последнему условию $x_1 \geqslant 0$.

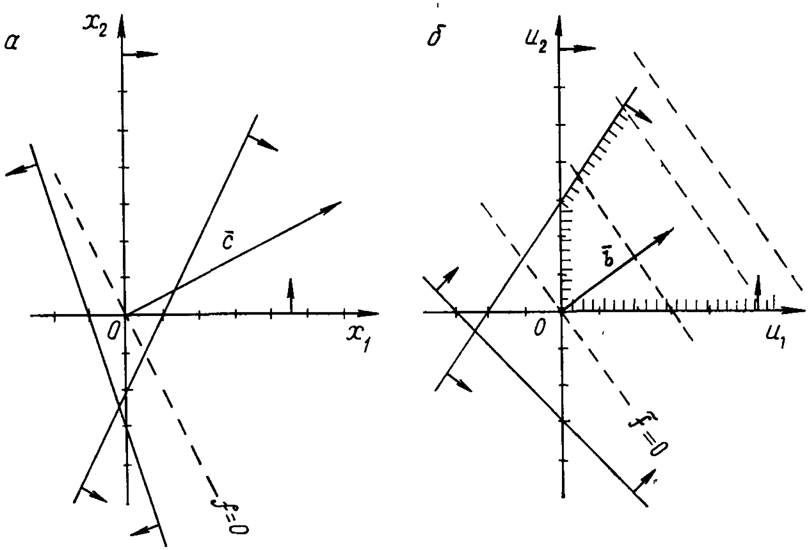

Рис. 4.2

Графическое решение двойственной задачи представлено на рис. 4.2, *б*. Максимальное значение функции $\tilde{f}=3u_1+2u_2$ не определено, так как область допустимых решений неограниченная.

Пример 4.8. Исходная задача имеет вид

$$f = 6x_1 + 2x_2 \ (\max);$$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &\leqslant 3; \\ x_1 - 3x_2 &\leqslant -6; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

К этой задаче необходимо построить двойственную и найти оптимальные решения задач.

Решение. Введем две переменные u_1 и u_2 и запишем двойственную задачу:

$$\tilde{f} = 3u_1 - 6u_2 \ (\min);$$

$$\left.\begin{aligned} -u_1 + u_2 &\geqslant 6; \\ 3u_1 - 3u_2 &\geqslant 2; \end{aligned}\right\}$$

$$u_1 \geqslant 0; \ u_2 \geqslant 0.$$

Графическая интерпретация исходной и двойственной задач дана на рис. 4.3, *а*, *б*, откуда видно, что области допустимых решений систем ограничений задач пустые (задачи планов не имеют).

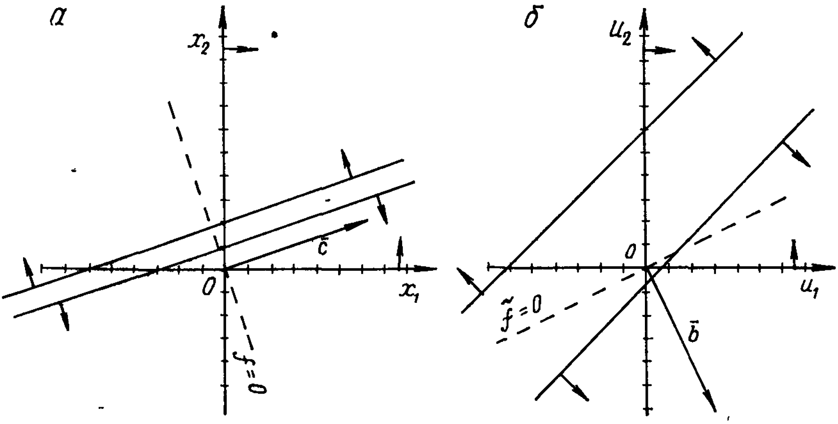

Рис. 4.3

Рассмотрим важное следствие, вытекающее из принципа двойственности, которое в литературе формулируется в виде теоремы о дополнительной нежесткости.

Теорема 4.1. *Если какая-то переменная x_j^* ($j=\overline{1,\ n}$) оптимального плана положительна, то j-е ограничение двойственной задачи ее оптимальным планом обращается в строгое равенство.*

Если оптимальное решение исходной задачи обращает какое-то i-е ($i=\overline{1,\ m}$) ограничение в строгое неравенство, то в оптимальном плане двойственной задачи переменная u_i равна нулю.

Эта теорема справедлива для задач симметричной двойственной пары. Для задач в канонической и общей форме она справедлива только при ограничениях, имеющих вид неравенств, и при неотрицательности переменных.

Пример 4.9. Показать взаимосвязь между значениями переменных и ограничениями следующих задач:

$$f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ (\max); \quad \tilde{f}=\sum_{i=1}^{m} b_i u_i \ (\min);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \ (i=\overline{1,\ m}); \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i \geqslant c_j \ (j=\overline{1,\ n});$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1,\ n}); \quad u_i \geqslant 0 \ (i=\overline{1,\ m}).$$

Решение. Приведем ограничения неравенства задач к эквивалентным уравнениям:

для исходной

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \quad (i = \overline{1,\ m});$$

для двойственной

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i - u_{m+j} = c_j \quad (j = \overline{1,\ n}).$$

Записав условия обеих задач в двойственную таблицу, найдем их оптимальные решения. Пусть после некоторого числа шагов модифицированных жордановых исключений применительно к прямой задаче найдено оптимальное решение (табл. 4.7).

Таблица 4.7

	Б.П.	$\tilde{f} =$	$u_1 = \ \dots \ u_{m+j} = \ \dots \ u_{m+n} =$
С.П.	С.П. / Б.П.	1	$-x_{n+1} \ \dots \ -x_j \ \dots \ -x_n$
u_{m+1}	$x_1 =$	β_1	
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
u_i	$x_{n+i} =$	β_i	
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
u_m	$x_{n+m} =$	β_m	
1	$f =$	Q	$q_1 \ \dots \ q_j \ \dots \ q_n$

Из табл. 4.7 видно, что переменная x_1 положительна ($x_1 = \beta_1$). Следовательно, первое ограничение двойственной задачи выполняется как строгое равенство ($u_{m+1} = 0$).

В оптимальном плане двойственной задачи $(m+j)$-я и $(m+n)$-я дополнительные переменные положительны ($u_{m+j} = q_j$, $u_{m+n} = q_n$). Это значит, что j-е и n-е ограничения выполняются как строгие неравенства. Следовательно, в исходной задаче соответствующие основные переменные равны нулю ($x_j = x_n = 0$).

В оптимальном плане исходной задачи дополнительные переменные x_{n+i} и x_{n+m} положительны ($x_{n+i} = \beta_i$, $x_{n+m} = \beta_m$), значит, i-е и m-е ограничения выполняются как строгие неравенства. Следовательно, в двойственной задаче основные переменные u_i и u_m равны нулю ($u_i = u_m = 0$).

Пример 4.10. Найти решение задачи

$$f = -6x_1 - 12x_2 + 3x_3 - x_4 \quad (\max);$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 6; \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad &= 12; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,\ 4})$$

путем графического анализа двойственной.

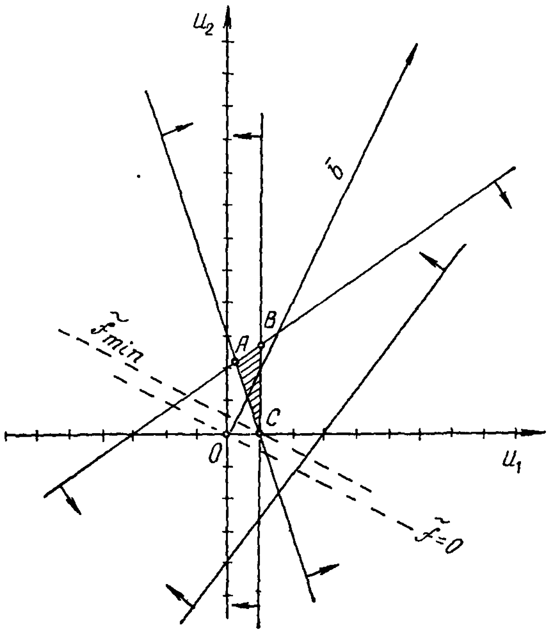

Рис. 4.4

Решение. Запишем условие двойственной задачи:

$$\tilde{f} = 6u_1 + 12u_2 \ (\min);$$

$$\left.\begin{aligned} 2u_1 - 3u_2 &\geqslant -6; \\ -4u_1 + 3u_2 &\geqslant -12; \\ 3u_1 + u_2 &\geqslant 3; \\ -u_1 \qquad &\geqslant -1; \end{aligned}\right\}$$

u_1 и u_2 — любые.

Графическое решение этой задачи представлено на рис. 4.4. Область допустимых решений ограниченная ($\triangle ABC$). Оптимальное решение достигается в точке $C(1, 0)$ и $\bar{f}_{\min}=6$. Этим решением первое и второе ограничения удовлетворяются как строгие неравенства ($2-0=2>-6$ и $-4+0=-4>-12$), следовательно, соответствующие им переменные исходной задачи x_1 и x_2 должны обращаться в нуль. Тогда, подставляя в исходную систему ограничений значения переменных $x_1=$ $=x_2=0$, получаем

$$\left.\begin{aligned} 3x_3 - x_4 &= 6; \\ x_3 \qquad &= 12, \end{aligned}\right\}$$

откуда находим, что $x_3=12$, $x_4=30$. Следовательно, оптимальное решение исходной задачи $\bar{x}^*=(0;\ 0;\ 12;\ 30)$. При этом $f_{\max}=3\cdot 12-1\cdot 30=6$. Так как $f=\bar{f}=6$, то вычисления выполнены правильно.

§ 4.3. Двойственный симплекс-метод

Рассмотрим задачу линейного программирования: найти

$$f=c_1x_1+\ldots+c_nx_n+c \quad (\min)$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \geqslant 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+m} &= a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m \geqslant 0; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=\overline{1, n}).$$

Занесем данные задачи в таблицу для обыкновенных жордановых исключений (табл. 4.8).

Таблица 4.8

Б.П. \ С.П.	1	$x_1 \ \ldots \ x_n$
$x_{n+1}=$ . . . . . $x_{n+m}=$	b_1 . . . b_m	$a_{11} \ \ldots \ a_{1n}$ . . . . $a_{m1} \ \ldots \ a_{mn}$
$f=$	c	$c_1 \ \ldots \ c_n$

Для решения задачи применим обыкновенные жордановы исключения. При использовании двойственного симплекс-метода ее решение находится в два этапа: на первом добиваются неотрицательности коэффициентов f-строки и на втором — неотрицательности свободных членов.

Алгоритм двойственного симплекс-метода сводится к следующему:

Этап 1

1. Просматривают коэффициенты f-строки; если все они неотрицательны, то переходят к пункту 1 этапа 2.

2. Если в f-строке имеется отрицательный коэффициент, то выделяют столбец, содержащий этот коэффициент.

3. В выделенном столбце отыскивают отрицательное число и содержащую его строку берут разрешающей. Если в выделенном столбце нет отрицательных чисел, то задача не имеет решения.

4. Вычисляют двойственные отношения (отношения элементов f-строки к элементам разрешающей строки). Наименьшее из отношений определяет разрешающий столбец.

5. С найденным разрешающим элементом делают шаг обыкновенных жордановых исключений. Анализ новой таблицы начинают с пункта 1.

Этап 2

1. Просматривают столбец свободных членов; если все элементы столбца неотрицательны, то оптимальное решение достигнуто.

2. Если в столбце свободных членов есть отрицательные элементы, то среди них находят наименьший. Этот элемент определяет разрешающую строку.

3. Разрешающий элемент находят по наименьшему двойственному отношению. Если в разрешающей строке нет положительных элементов, то задача не имеет решения.

4. С найденным разрешающим элементом делают один шаг обыкновенных жордановых исключений. Анализ полученной таблицы начинают с пункта 1 этапа 2.

Примечание. Чтобы найти максимум функции, нужно произвести в задаче замену $F(x)=-f(x)$ и искать минимум полученной функции. Искомый максимум функции $f(x)$ равен свободному члену, находящемуся в F-строке симплексной таблицы, взятому с обратным знаком.

Пример 4.11. Найти двойственным симплекс-методом минимум функции

$$f=4x_1-4x_2$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \quad 2x_1 - 2x_2 + \ 8 \geqslant 0; \\ x_4 &= - \ x_1 + 4x_2 + 10 \geqslant 0; \\ x_5 &= \quad 2x_1 + 2x_2 - 12 \geqslant 0; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

Решение. Занесем условие задачи в таблицу (табл. 4.9).

Таблица 4.9

Б.П. \ С.П.	1	x_1	x_2
$x_3 =$	8	2	$\boxed{-2}$
$x_4 =$	10	−1	4
$x_5 =$	−12	2	2
$f =$	0	4	−4

Таблица 4.10

Б.П. \ С.П.	1	x_1	x_3
$x_2 =$	4	1	−1/2
$x_4 =$	26	3	−2
$x_5 =$	−4	$\boxed{4}$	−1
$f =$	−16	0	2

Так как в f-строке имеется отрицательный элемент (—4), то второй столбец считаем выделенным. В этом столбце находим отрицательное число (—2) и содержащую его первую строку считаем разрешающей. Вычисляем наименьшее двойственное отношение:

$$\min(4/2;\ -4/-2) = 2.$$

Из двух одинаковых отношений выберем второе. Оно определяет разрешающий элемент (—2). Делаем один шаг обыкновенных жордановых исключений и заносим результат в табл. 4.10.

В f-строке все элементы неотрицательные, однако в столбце свободных членов есть отрицательное число (—4), следовательно, план, записанный в таблице, не является допустимым. Принимаем третью строку за разрешающую. Так как в f-строке есть нуль, имеем случай вырождения. В столбце над нулем в разрешающей строке находится положительный элемент (4), следовательно, разрешающим будет первый столбец.

С разрешающим элементом 4 делаем следующий шаг. Найденный новый план (табл. 4.11) является оптимальным.

Таблица 4.11

Б.П. \ С.П.	1	x_5	x_3
$x_2 =$	5		
$x_4 =$	29		
$x_1 =$	1		
$f =$	—16	0	2

Значение функции $f(x)_{\min} = -16$ при $x_1^* = 1$, $x_2^* = 5$, $x_3^* = x_5^* = 0$, $x_4^* = 29$.

Пример 4.12. Применяя двойственный симплекс-метод, найти максимум функции

$$f = 4x_1 + 2x_2$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 6; \\ x_1 \quad &\leqslant 3; \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 10; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

Решение. После изменения направления оптимизации функции $F(x) = -f(x)$ и приведения системы ограничений к эквивалентной системе уравнений получим следующую задачу: найти минимум функции

$$F = -4x_1 - 2x_2$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= -\ x_1 - x_2 + 6 \geqslant 0; \\ x_4 &= -\ x_1 \qquad + 3 \geqslant 0; \\ x_5 &= -2x_1 - x_2 + 10 \geqslant 0; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

Занесем условие задачи в табл. 4.12.

В F-строке имеем два отрицательных элемента (—4) и (—2), следовательно, можно выделить любой из столбцов. Выделим столбец, в котором находится элемент (—4). Здесь три отрицательных элемента, поэтому в качестве разрешающей можно взять любую строку. Пусть разрешающей будет первая. Вычисляем наименьшее двойственное отношение:

$$\min\left(\frac{-4}{-1}; \frac{-2}{-1}\right) = 2.$$

Таблица 4.12

С.П. / Б.П.	1	x_1	x_2
$x_3 =$	6	-1	$\boxed{-1}$
$x_4 =$	3	-1	0
$x_5 =$	10	-2	-1
$F =$	0	-4	-2

Таблица 4.13

С.П. / Б.П.	1	x_1	x_3
$x_2 =$	6	-1	-1
$x_4 =$	3	$\boxed{-1}$	0
$x_5 =$	4	-1	1
$F =$	-12	-2	2

Разрешающий столбец соответствует переменной x_2. С разрешающим элементом (-1) делаем шаг жордановых исключений. В результате получим табл. 4.13. Преобразовав ее, придем к табл. 4.14.

Таблица 4.14

С.П. / Б.П.	1	x_4	x_3
$x_2 =$	3		
$x_1 =$	3		
$x_5 =$	1		
$F =$	-18	2	2

В столбце свободных членов и F-строке табл. 4.14 нет отрицательных элементов, следовательно, получен оптимальный план: $x_1^* = x_2^* = 3$; $x_3^* = x_4^* = 0$; $x_5^* = 1$ и $F_{\min} = -18$. Поменяв знак в значении функции, имеем $f_{\max} = 18$.

Упражнения

Применяя двойственный симплекс-метод, решить задачи 4.8—4.12 и, используя соответствие между переменными, найти оптимальные решения двойственных к ним задач.

4.8. $f = x_1 + x_2$ (min);

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \geqslant 1; \\ -x_1 + x_2 \geqslant 2; \\ -x_1 + x_2 \geqslant -3; \end{array}\right\}$$

$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$

4.9. $f = 16x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 6x_4$ (max);

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + x_2 + 3x_4 \leqslant 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leqslant 3; \end{array}\right\}$$

$x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1,4}).$

4.10. $f = 88x_1 + 80x_2 + 148x_3$ (max);

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\leqslant 12; \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &\leqslant 10; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1,3}).$$

4.11. $f = 270x_1 + 300x_2 + 320x_3$ (min);

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\geqslant 4; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\geqslant 5; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1,3}).$$

4.12. $f = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ (max);

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &\leqslant 5; \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 &\leqslant 7; \\ x_1 \qquad + x_3 + 2x_4 &\leqslant 3; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1,4}).$$

§ 4.4. Анализ решения задач линейного программирования

В математическом программировании доказывается следующая теорема двойственности (теорема об оценках):

Теорема 4.2. *В оптимальном решении двойственной задачи значения переменных u_i^* (оценок) численно равны частным производным $\partial f_{\max}/\partial b_i$ для исходной задачи.*

Отсюда при малых изменениях Δb_i свободных членов b_i следует приближенное равенство

$$\Delta f_{\max} \approx \bar{u}^* \, \Delta b = \sum_i u_i^* \, \Delta b_i.$$

Некоторые аспекты применения двойственных оценок оптимального плана для его экономико-математического анализа рассмотрим на примере задачи рационального использования ресурсов по критерию максимума прибыли.

В матричной форме задача записывается следующим образом:

исходная задача	двойственная задача
$\bar{p}\bar{x}$ (max);	$\bar{b}\bar{u}$ (min);
$A\bar{x} \leqslant \bar{b}$;	$A^T\bar{u} \geqslant \bar{p}$;
$\bar{x} \geqslant 0$;	$\bar{u} \geqslant 0$,

где A — матрица из коэффициентов при неизвестных — норм потребления ресурсов; $\bar{b}$ — вектор ограничений по ресурсам; $\bar{p}$ — вектор прибыли продукции; $\bar{x}$ — искомый вектор — план производства продукции; $\bar{u}$ — вектор оценок ресурсов.

Анализ задач линейного программирования может проводиться путем сопоставления различных вариантов решений; при помощи анализа внутренней структуры каждого из полученных решений, базирующегося на следующих свойствах двойственных оценок.

Двойственные оценки являются: 1) *показателем дефицитности ресурсов и продукции.* Это их свойство вытекает из теоремы 4.1. Величина u_i^* является оценкой i-го ресурса. Чем больше значение оценки u_i^*, тем выше дефицитность ресурса. Для недефицитного ресурса $u_i^* = 0$;

2) *показателем влияния ограничений на значение целевой функции.* Ранее было отмечено, что $u_i^* = \frac{\partial f_{\max}}{\partial b_i}$. При незначительном приращении Δb_i является точной мерой влияния ограничений на целевую функцию. Поэтому представляет практический интерес определение предельных значений ограничений (нижней и верхней границы), в которых величины оценок остаются неизменными;

3) *показателем эффективности производства отдельных видов продукции с позиций критерия оптимальности.* Это свойство вытекает из теоремы 4.1. Его сущность заключается в том, что в оптимальный план может быть включена лишь та продукция j-го вида, для которой выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* < p_j;$$

4) *инструментом сопоставления суммарных условных затрат и результатов.* Это свойство следует из принципа двойственности, в котором устанавливается связь между значениями функций прямой и двойственной задач.

Из ранее данной экономической интерпретации двойственных задач следует, что равенство значений целевых функций при оптимальных планах означает, что оценка всех затрат производства должна равняться оценке производственного продукта.

Для целей анализа большое значение имеет матрица $A^{-1} = \| d_{ij} \|$, обратная к матрице базиса оптимального плана $A = \| a_{ij} \|$.

Двойственные оценки можно использовать для экономического анализа решения при условии, что ограничения на ресурсы изменяются лишь в определенных пределах. В этой связи говорят о *допустимом интервале устойчивости оценок.* Интервал устойчивости оценок по отношению к i-му ограничению имеет вид

$$[b_i - \Delta b_i^{\text{н}};\ b_i + \Delta b_i^{\text{в}}]\ (i = \overline{1, m}), \qquad (4.13)$$

где $\Delta b_i^{н}$ называют *нижним пределом уменьшения*, а $\Delta b_i^{в}$ — *верхним пределом увеличения* и вычисляют по формулам

$$\Delta b_i^{н} = \min_{d_{ij}^l > 0} \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\}; \ \Delta b_i^{в} = \max_{d_{ij}^l < 0} \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\}. \tag{4.14}$$

Целесообразность включения в план новых видов продукции оценивается характеристикой

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i - p_j. \tag{4.15}$$

Если $\Delta_j < 0$, то данный вид продукции после введения в план улучшает его. При $\Delta_j > 0$ включение в план продукции нецелесообразно.

Пусть имеется возможность приобрести дополнительно i-й ресурс в объеме $\Delta b_i^{в}$. Эта величина находится в пределах устойчивости двойственных оценок. Цена единицы ресурса равна c_i. Следовательно, приращение прибыли $\Delta f_{i\,\max} = \Delta b_i^{в} u_i^*$, в то время как затраты на приобретение ресурса составляют $\Delta c_i = \Delta b_i^{в} c_i$. Данное мероприятие будет эффективным, если оно обеспечит дополнительную прибыль, т. е. если $\Delta p_i > 0$, где

$$\Delta p_i = \Delta f_{i\,\max} - \Delta c_i. \tag{4.16}$$

Пример 4.13. Для изготовления четырех видов продукции: А, Б, В и Г используются три вида ресурсов: I, II, III. Наличие ресурсов, нормы их расхода на единицу продукции и получаемая прибыль от единицы продукции заданы в табл. 4.15.

Таблица 4.15

Вид ресурса	Наличие ресурса	Норма расхода на единицу продукции			
		А	Б	В	Г
I	240	2	1	1	3
II	60	1	0	2	1
III	300	1	2	1	0
Прибыль		4	2	3	5

Необходимо: а) найти оптимальные решения прямой и двойственной задач; б) определить изменение максимальной прибыли при изменении ресурсов: I вида — на —10, II — на +60, III — на +30 единиц. Оценить раздельное и суммарное влияния этих изменений на величину максимальной прибыли; в) оценить целесообразность введения в план пятого вида продукции Д, нормы затрат ресурсов на единицу которого соответственно равны 2, 4, 2, а прибыль — 15; г) оценить целесообразность закупки 100 единиц ресурса III вида по цене $c_3=0{,}5$.

Решение. Математическая модель задачи имеет вид:

$$f = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \ (\max);$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &\leqslant 240; \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &\leqslant 60; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leqslant 300; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,4}).$$

а) Решаем задачу симплекс-методом (опуская подробности, приведем сразу оптимальное решение в табл. 4.16).

Таблица 4.16

С.П. / Б.П.	1	$-x_4$	$-x_5$	$-x_7$	$-x_6$
$x_1 =$	60	11/5	4/5	—2/5	—1/5
$x_2 =$	120	—4/5	—1/5	3/5	—1/5
$x_3 =$	0	—3/5	—2/5	1/5	3/5
$f =$	480	2/5	8/5	1/5	3/5

Значения целевой функции и неизвестных величин оптимального плана следующие: $f^* = 480$, $x_1^* = 60$, $x_2^* = 120$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = x_5^* = x_6^* = x_7^* = 0$.

Базисными неизвестными, входящими в оптимальный план, являются x_1, x_2 и x_3. Выпишем матрицу из коэффициентов при базисных неизвестных:

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Из табл. 4.16 выпишем матрицу, обратную к матрице A,

$$A^{-1} = \|d_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} 4/5 & -1/5 & -2/5 \\ -1/5 & -1/5 & 3/5 \\ -2/5 & 3/5 & 1/5 \end{matrix} \right\|.$$

Используя соответствие между переменными исходной и двойственной задач, запишем оптимальное решение двойственной задачи: $u_1^* = 8/5$, $u_2^* = 3/5$, $u_3^* = 1/5$, $u_4^* = u_5^* = u_6^* = 0$, $u_7^* = 2/5$, $f(u)_{\min} = 480$. Как показывает величина оценок, наиболее дефицитным является ресурс I, так как $u_1^* = 8/5$, а наименее дефицитным — ресурс III, так как $u_3^* = 1/5$.

Чтобы определить изменение максимальной прибыли при изменении ресурсов, необходимо найти интервалы устойчивости двойственных оценок, в пределах которых они точно измеряют влияние ограничений на целевую функцию.

Определим интервал устойчивости оценок по отношению к ограничению по ресурсу I вида. Используя формулы (4.14), находим

$$\Delta b_1^{\text{н}} = \min_j \left\{ \frac{x_j^*}{d_{ij}} \right\} = \min \left\{ \frac{60}{4/5} \right\} = 75;$$

$$\Delta b_1^{\text{в}} = \max_j \left\{ \frac{x_j}{d_{ij}} \right\} = \left| \max \left\{ \frac{120}{-1/5};\ \frac{0}{-2/5} \right\} \right| = 0.$$

В соответствии с (4.13) интервал устойчивости оценок по отношению к первому ограничению принимает вид:

$$[b_1 - \Delta b_1^{\text{н}};\ b_1 + \Delta b_1^{\text{в}}] = [240 - 75;\ 240 + 0] = [165;\ 240].$$

Аналогичным образом находим интервалы устойчивости оценок по отношению к ограничениям по двум другим видам ресурсов: по ресурсу II — [60; 360], по ресурсу III — [300; 450].

б) Так как изменения ресурсов находятся в пределах устойчивости оценок, то их раздельное влияние на величину прибыли $\Delta f_{i\max}$ определяется произведением оценки u_i^* и величины изменения Δb_i. Таким образом,

$$\Delta f_{1\max} = u_1^* \Delta b_1 = \frac{8}{5} \cdot (-10) = -16;$$

$$\Delta f_{2\max} = u_2^* \Delta b_2 = 3/5 \cdot 60 = 36;$$

$$\Delta f_{3\max} = u_3^* \Delta b_3 = 1/5 \cdot 30 = 6.$$

Суммарное влияние

$$\Delta f_{\max} = \Delta f_{1\max} + \Delta f_{2\max} + \Delta f_{3\max} = -16 + 36 + 6 = 26.$$

в) Оценим целесообразность введения в план пятого вида продукции Д. Для этого по формуле (4.15) вычислим характеристику

$$\Delta_5 = \sum_{i=1}^{3} a_{i5}u_i^* - p_5 = (2\cdot 8/5 + 4\cdot 3/5 + 2\cdot 1/5) - 15 = -9 < 0.$$

Так как прибыль превышает затраты, то введение в план пятого вида продукции выгодно.

г) Приращение третьего ресурса на величину $\Delta b_3^{в} = 100$ находится в пределах устойчивости двойственных оценок. Следовательно, $\Delta f_{3\max} = \Delta b_3^{в} u_3^* = 100\cdot 1/5 = 20$, в то время как затраты на приобретение 100 единиц ресурса III вида составят $\Delta c = \Delta b_3^{в}\cdot c_3 = 100\cdot 0{,}5 = 50$. Поскольку величина Δp дополнительной прибыли (4.16) отрицательна ($\Delta p_3 = \Delta f_3 - \Delta c_3 = 20 - 50 = -30$), закупать ресурс III вида нецелесообразно.

Упражнения

4.13. Имеются три вида ресурсов: I, II, III, которые используются для производства трех видов продукции А, Б и В. Нормы расхода ресурсов на единицу продукции каждого вида приведены в табл. 4.17.

Таблица 4.17

Ресурс	Норма расхода на единицу продукции		
	А	Б	В
I	1	2	0
II	2	1	0
III	0	1	1

В распоряжении предприятия находятся 500 единиц ресурса I, 550 — ресурса II и 200 — ресурса III. Прибыль от реализации единицы продукции А составляет 3 руб., продукции Б — 4 руб., продукции В — 1 руб.

а) Определить оптимальный план производства продукции по критерию максимума прибыли;

б) составить и решить двойственную задачу;

в) оценить целесообразность закупки 250 единиц ресурса II вида по цене $c_2 = 0{,}7$ руб. за единицу;

г) оценить целесообразность введения в план четвертого вида продукции Г, нормы затрат ресурсов на единицу которого равны 3, 1 и 2, а прибыль от его реализации 5 руб.;

д) определить изменение максимальной прибыли при изменении ресурсов: I — на +70, II — на +200, III — на −40 единиц. Оценить раздельное и суммарное влияния этих изменений.

4.14. По данным задачи 4.13 необходимо:

а) найти оптимальные решения исходной и двойственной задач; нормы расхода ресурсов на единицу продукции каждого вида приведены в табл. 4.18;

Таблица 4.18

Ресурс	Норма расхода на единицу продукции		
	А	Б	В
I	2	1	0
II	0	2	1
III	0	1	0

б) определить интервалы устойчивости двойственных оценок;

в) определить изменение максимальной прибыли при изменении ресурса I на −150, ресурса III — на +70 единиц.

4.15. По данным задачи 4.13 необходимо:

а) найти оптимальные решения исходной и двойственной задач, если предприятие имеет в наличии 575 единиц ресурса I, 1000 — ресурса II и 150 — ресурса III;

б) сравнить значения двойственных переменных в решениях задач 4.13 и 4 15. Объяснить, почему значения переменных величин совпадают, а значения функций не равны между собой.

Глава 5. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

§ 5.1. Постановка транспортной задачи в матричной форме

Приведем простейшую формулировку *транспортной задачи* по критерию стоимости.

В m пунктах производства $A_1, \ldots, A_m$ находится однородный продукт (сахар, уголь, картофель и т. д.) в количествах соответственно $a_1, \ldots, a_m$, который должен быть доставлен n потребителям $B_1, \ldots, B_n$ в количествах $b_1, \ldots, b_n$. Известны транспортные издержки c_{ij} (расходы), связанные с перевозкой единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j.

Требуется составить такой план перевозок, который обеспечивал бы при минимальных транспортных издержках удовлетворение спроса всех пунктов потребления за счет распределения всего продукта, произведенного всеми пунктами производства.

Для разрешимости поставленной задачи необходимо и достаточно, чтобы сумма запасов равнялась сумме спроса всех пунктов, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Для наглядности транспортную задачу представим в виде таблицы, которая называется *распределительной* (табл. 5.1).

Здесь количество груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, равно x_{ij}, запас груза в i-м пункте отправления измеряется величиной $a_i \geqslant 0$, а потребность j-го пункта назначения в грузе равна $b_j \geqslant 0$. Поскольку отрицательные перевозки не имеют реального смысла для данной задачи (обратная перевозка от пунктов назначения в пункты отправления), будем предполагать, что $x_{ij} \geqslant 0$.

Матрица $(c_{ij})_{m \times n}$ называется *матрицей тарифов (издержек* или *транспортных расходов)*, а числа c_{ij} — *тарифами.*

Планом транспортной задачи называется матрица $X = (x_{ij})_{m \times n}$, *где каждое число* x_{ij} *обозначает количество единиц груза, которое надо доставить из* i*-го пункта отправления*

Таблица 5.1

Поставщик	Потребитель				Запасы груза
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность в грузе	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

в j-й пункт назначения. Матрицу X называют еще *матрицей перевозок.*

Общие суммарные затраты, связанные с реализацией плана перевозок, можно представить целевой функцией

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + \\ + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}. \qquad (5.1)$$

Переменные x_{ij} должны удовлетворять ограничениям по запасам, по потребностям и условиям неотрицательности. В математической форме эти ограничительные условия компактно можно представить так:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i\,(i = \overline{1, m}); \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j\,(j = \overline{1, n}); \end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

$$x_{ij} \geqslant 0\,(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}). \qquad (5.3)$$

Условия (5.2) образуют систему ограничений. Любой план, компоненты которого удовлетворяют этой системе, будет допустимым.

Таким образом, математически транспортная задача ставится так. *Даны система ограничений* (5.2) *при условии* (5.3) *и целевая функция* (5.1), *требуется среди множества решений системы найти такой неотрицательный план перевозок, который минимизирует целевую функцию* (5.1).

Система ограничений задачи содержит $m+n$ уравнений с mn переменными x_{ij}.

Для транспортной задачи важное значение имеет следующая

Теорема 5.1. *Ранг матрицы транспортной задачи на единицу меньше числа уравнений, т. е.* $r=m+n-1$.

Из теоремы 5.1 следует, что каждый опорный план имеет $m+n-1$ базисных переменных и $mn-(m+n-1)=(m-1)\times\times(n-1)$ свободных переменных, равных нулю.

План перевозок транспортной задачи будем отыскивать непосредственно в матрице перевозок. Прежде всего заметим, что если переменная x_{ij} принимает значение $\alpha_{ij}\neq 0$, то в соответствующую клетку (i, j) будем записывать это значение, если же $x_{ij}=0$, то клетку (i, j) оставляем свободной. Согласно теореме 5.1, в каждой матрице перевозок опорный план должен содержать $m+n-1$ занятых клеток, а остальные — свободные.

Транспортные задачи будем решать с помощью общего приема последовательного улучшения планов, состоящего из следующих основных этапов: 1) определения исходного опорного плана; 2) оценки этого плана; 3) перехода к следующему плану путем однократного замещения одной базисной переменной на свободную.

§ 5.2. Определение исходного опорного плана

1. Правило «северо-западного угла». Для составления исходного плана перевозок удобно пользоваться *правилом «северо-западного угла»*, которое состоит в следующем.

Будем заполнять таблицу начиная с левого верхнего (северо-западного) угла, двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз. Занесем в клетку (1, 1) меньшее из чисел a_1 и b_1, т. е.

$$x_{11}=\min(a_1;\ b_1).$$

Если $a_1>b_1$, то $x_{11}=b_1$ и первый столбец «закрыт» для заполнения остальных его клеток, т. е. $x_{i1}=0$ для $i=2, 3, \ldots, m$ (потребности первого потребителя удовлетворены полностью). Двигаясь далее по первой строке, записываем в соседнюю клетку (1, 2) меньшее из чисел a_1-b_1 и b_2, т. е.

$$x_{12}=\min(a_1-b_1;\ b_2).$$

Если $b_1 > a_1$, то аналогично «закрывается» первая строка, т. е. $x_{1k}=0$ для $k=2, 3, \ldots, n$. Переходим к заполнению соседней клетки (2, 1), куда заносим $x_{21}=\min(a_2; b_1-a_1)$.

Заполнив вторую клетку (1, 2) или (2, 1), переходим к заполнению следующей, третьей клетки либо по второй строке, либо по второму столбцу. Будем продолжать этот процесс до полного исчерпания груза у поставщиков или полного удовлетворения потребителей. Последняя заполненная клетка (m, n) окажется лежащей в последнем n-м столбце и в последней m-й строке.

План, полученный по правилу «северо-западного угла», будет опорным планом системы ограничений задачи.

Пример 5.1. Найти опорный план транспортной задачи по правилу «северо-западного угла» (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Поставщик	Потребитель				Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150
A_3	3	10	20	1	50
Потребность в грузе	75	80	60	85	300

Таблица 5.3

Поставщик	Потребитель				Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6 75	7 25	3	5	100
A_2	1	2 55	5 60	6 35	150
A_3	3	10	20	1 50	50
Потребность в грузе	75	80	60	85	300

Р е ш е н и е. Тарифы перевозок разместим в правом верхнем углу каждой клетки табл. 5.3, а количество распределяемого груза — в левом нижнем.

2. Правило «минимального элемента». Исходный опорный план, построенный по правилу «северо-западного угла», обычно оказывается весьма далеким от оптимального, так как при его определении игнорируются величины затрат c_{ij}. Поэтому в дальнейших расчетах потребуется много операций для достижения оптимального плана. Число итераций можно сократить, если исходный план строить по более усовершенствованному *правилу «минимального элемента»*. Сущность его состоит в том, что на каждом шаге осуществляется максимально возможная поставка в клетку с минимальным тарифом c_{ik}. Заполнение таблицы начинаем с клетки, которой соответствует наименьший элемент c_{ik} из всей матрицы тарифов. Затем остаток по столбцу или строке помещаем в клетку того же столбца или строки, которой соответствует следующее по величине значение c_{ik}, и т. д. Иными словами, последовательность заполняемых клеток определяется по величине c_{ik}, а помещаемые в этих клетках величины x_{ik} как и в правиле «северо-западного угла».

Пример 5.2. Найти опорный план задачи 5.1 по правилу «минимального элемента».

Р е ш е н и е. Выбираем наименьший тариф из табл. 5.2. Наименьшие тарифы соответствуют клеткам (2, 1), (3, 4): $c_{21}=c_{34}=1$. Поместим необходимое количество груза, например, в клетку (2, 1) $\to x_{21}=75$, остаток груза помещаем в клетку (2, 2), для которой тариф $c_{22}=2$; $x_{22}=\min(80;\ 75)=75$. Второму потребителю еще необходимо 5 единиц груза (80 — 75). В клетку (1, 2) от поставщика A_1 помещаем

$$x_{12}=\min(5;\ 100)=5 \text{ единиц груза.}$$

Далее по первой строке в клетку (1, 3), для которой тариф относительно невысок по сравнению с занятой клеткой, заносим необходимое количество груза

$$x_{13}=\min(60;\ 95)=60 \text{ единиц груза.}$$

Остаток груза от поставщика A_1 заносим в клетку (1, 4), т. е.

$$x_{14}=\min(85;\ 35)=35 \text{ единиц груза.}$$

Спрос четвертого потребителя удовлетворен не полностью, по столбцу в клетку (3, 4) от поставщика A_3 помещаем необходимое количество груза $x_{34}=50$ единиц.

В результате распределения получаем опорный план (табл. 5.4).

Таблица 5.4

Поставщик	Потребитель				Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7 5	3 60	5 35	100
A_2	1 75	2 75	5	6	150
A_3	3	10	20	1 50	50
Потребность в грузе	75	80	60	85	300

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 60 & 35 \\ 75 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Может оказаться, что при построении опорного плана занятых клеток будет меньше чем $m+n-1$. В этом случае задача называется *вырожденной* Тогда в свободную клетку (обычно в ту, которой соответствует наименьший тариф) заносится «базисный» нуль, и эта клетка считается занятой.

3. Метод Фогеля. Опорный план можно получить по *методу Фогеля*, сущность которого состоит в следующем. По каждой строке и каждому столбцу определяем разность между двумя наименьшими тарифами и записываем ее. Из этих разностей выбираем наибольшую и отмечаем знаком □.

В строке или в столбце, где имеется наибольшая разность, заносим в клетку с минимальным тарифом максимально возможную поставку. После этого записываем остаток груза по строкам и столбцам. В строках и столбцах с нулевыми остатками груза прочеркиваем все незанятые клетки. Занятые и прочеркнутые клетки не учитываются на следующих этапах. Все делается в одной таблице. Полученный план близок к оптимальному (обычно — оптимальный). Метод Фогеля применяется для получения плана, приближенного к оптимальному, и используется при решении задач вручную, когда число поставщиков и потребителей незначительно.

Пример 5.3. По методу Фогеля найти опорный план транспортной задачи табл. 5.5.

Таблица 5.5

Поставщик	Потребитель B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы груза
A_1	4	5	1	2	40
A_2	3	4	7	8	20
A_3	2	6	9	3	30
Потребность в грузе	20	25	30	15	

Решение. Расчет по методу Фогеля производим в одной таблице (табл. 5.6).

Таблица 5.6

					Запасы груза	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
	4	5	1 30	2 10	40, 10, 0	1	$\boxed{2}$		
	3	4 20	7	8	20	1	1	1	1
	2 20	6 5	9	3 5	30, 25, 5	1	1	1	$\boxed{4}$
Потребность в грузе	20	25	30	15, 5					
Расчетные ходы № 1	1	1	$\boxed{6}$	1					
№ 2	1	1		1					
№ 3	1	2		$\boxed{5}$					
№ 4	1	2							

После хода № 4 остался только один свободный столбец. Очевидно, в клетку (2, 2) нужно поместить груз в количестве $x_{22}=20$ единиц, а в клетку (3, 2) — $x_{32}=5$ единиц. В результате получен опорный план

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 & 10 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

§ 5.3. Решение транспортной задачи распределительным методом

Распределительный метод представляет собой разновидность симплексного, так как основан на аналогичном общем принципе расчета: вначале строится исходный опорный план перевозок по одному из вышеизложенных правил, а затем последовательно производится его улучшение до получения оптимального. Для этого для каждой свободной клетки строят замкнутый цикл.

Набор клеток матрицы перевозок, в котором две и только две клетки расположены в одной строке или одном столбце и последняя клетка набора лежит в той же строке или столбце, что и первая, называется замкнутым циклом.

Этот набор, или совокупность, клеток можно представить так:

$$(i_1, j_1)\to(i_1, j_2)\to(i_2, j_2)\to\ldots\to(i_s, j_s)\to(i_s, j_1).$$

Графически замкнутый цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, звено которой проходит либо только по строке, либо только по столбцу. Каждое звено соединяет две клетки цикла.

Допустимый план транспортной задачи является опорным тогда и только тогда, когда из занятых этим планом клеток нельзя образовать ни одного цикла.

Пример 5.4. Определить, является ли план перевозок опорным для транспортной задачи табл. 5.7.

План перевозок табл. 5.7

$$X=\begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & 10 & 30 & 0 \end{pmatrix}$$

не является опорным, так как занятые клетки (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2) образуют цикл.

Таблица 5.7

Поставщик	Потребитель				Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 20	4 5	3	5	25
A_2	5	7 5	8 10	9 15	30
A_3	10	4 10	5 30	6	40
Потребность в грузе	20	20	40	15	

Если в матрице перевозок содержится опорный план, то для каждой свободной клетки можно образовать и притом только один замкнутый цикл, содержащий эту свободную клетку и некоторую часть занятых клеток.

Пример 5.5. Для задачи 5.4 построить опорный план и замкнутые циклы свободных клеток.

Решение. Построим опорный план, например, по правилу «северо-западного угла» (табл. 5.8).

Таблица 5.8

	20	20	40	15
25	1 20	4 5	5	5
30	5	7 15	8 15	9
40	10	4	5 25	6 15

Получим опорный план перевозок

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 15 \end{pmatrix}.$$

Свободные клетки: (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 2). Замкнутым циклом для клетки (1, 3) будет цикл, включающий клетки (1, 3)→(2, 3)→(2, 2)→(1, 2), графически это представлено на рис. 5.1. Аналогично построим замкнутые циклы для остальных клеток.

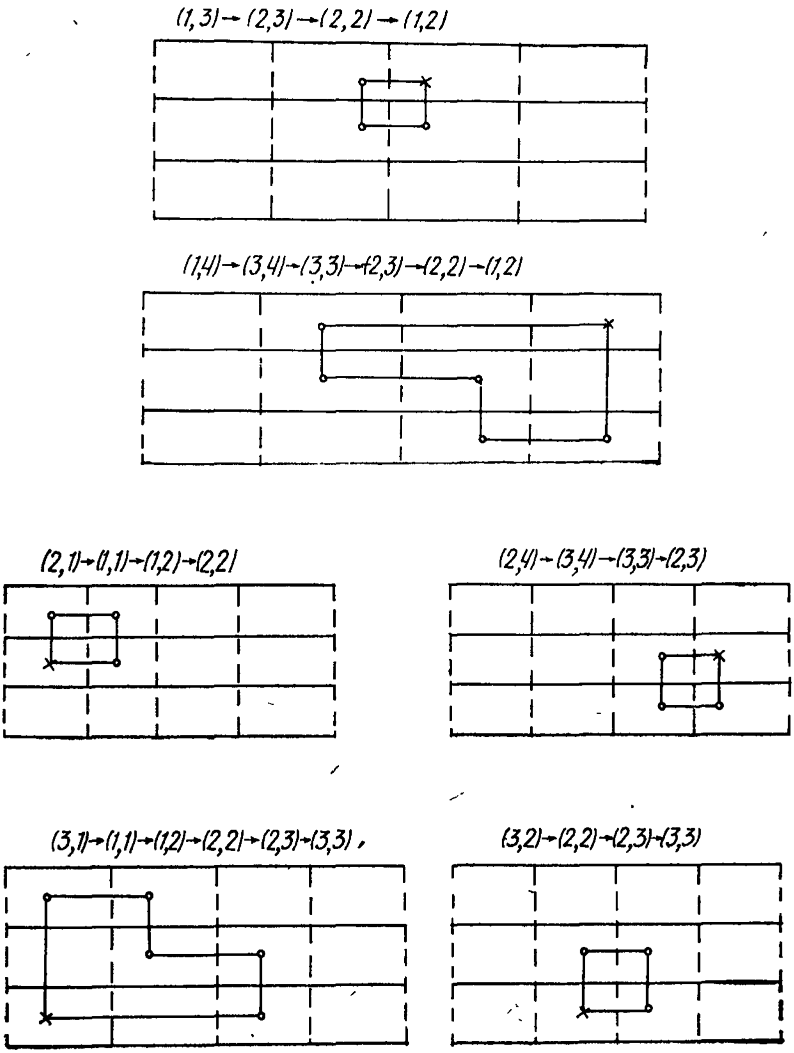

Рис. 5.1

Тарифы в клетках, находящихся в нечетных вершинах цикла, берем со знаком плюс, а в четных — со знаком минус. По каждому циклу подсчитываем алгебраическую сумму тарифов.

Если замкнутый цикл имеет вид

$$(i, j) \to (k, j) \to (k, l) \to (t, l) \to \ldots \to (u, v) \to (i, v),$$

то

$$s_{ij} = c_{ij} - c_{kj} + c_{kl} - c_{tl} + \ldots + c_{uv} - c_{iv},$$

где (i, j) — свободная клетка.

Если алгебраическая сумма s_{ij} отрицательна, то путем изменения значений, стоящих в клетках замкнутого цикла, можно получить план с меньшим значением линейной формы.

Критерием оптимальности при нахождении минимума функции служит неотрицательность алгебраических сумм s_{ij}. Если указанное требование не соблюдено, план не оптимален и подлежит улучшению.

Вычисления при решении транспортной задачи распределительным методом ведутся по следующему алгоритму:

1) *исходные данные задачи располагают в распределительной таблице;*

2) *строят исходный опорный план по правилу «северо-западного угла», или по правилу «минимального элемента», или методом Фогеля; при этом должны оказаться занятыми $r = m + n - 1$ клеток;*

3) *производят оценку первой свободной клетки путем построения замкнутого цикла и вычисления по этому циклу величины s_{ij}. Если $s_{ij} < 0$, то переходят к следующему пункту алгоритма;*

4) *перемещают по циклу количество груза, равное наименьшему из чисел, размещенных в четных клетках цикла. Далее возвращаются к пункту 3. Если $s_{ij} \geqslant 0$, то оценивают следующую свободную клетку, и т. д., пока не обнаружат клетку с отрицательной оценкой. Среди всех клеток с оценкой меньше нуля нужно найти клетку с наибольшим нарушением оптимальности.*

Если, наконец, оценки всех свободных клеток окажутся неотрицательными, то оптимальное решение найдено.

Замечания: 1. При появлении вырожденных опорных решений для сохранения числа занятых клеток $r = m + n - 1$ неизменным оставляют свободной только одну клетку, а во всех остальных освободившихся клетках помещают «базисные» нули, полагая в дальнейшем эти клетки занятыми.

2. На каждом этапе построения нового опорного плана при выполнении пункта 3 алгоритма целесообразно испытывать не все свободные клетки подряд, а выбирать для оценок в первую очередь клетки, имеющие относительно малые тарифы.

Пример 5.6. Решить транспортную задачу (табл. 5.9) распределительным методом.

Решение. Исходный опорный план получим, например, по правилу «северо-западного угла» (табл. 5.10).

Таблица 5.9

Поставщик	Потребитель			Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	
A_1	4	5	1	10
A_2	6	3	4	8
A_3	1	2	4	12
Потребность в грузе	6	14	10	30

Таблица 5.10

	6	14	10
10	4 6	5 − 4	1 +
8	6	3 8	4
12	1	2 + 2	4 − 10

Свободные клетки: (1, 3); (2, 1); (2, 3); (3, 1). Наименьший тариф для клеток (1, 3) и (3, 1):

$$s_{13}=1-4+2-5=-6;$$

$$s_{31}=1-4+5-2=0;$$

$$f_1=4\cdot6+5\cdot4+3\cdot8+2\cdot2+4\cdot10=112.$$

Так как оценка s_{13} отрицательна, то план можно улучшить за счет загрузки клетки (1, 3). Наименьшее количество груза в отрицательных вершинах цикла min(4; 10)=4. К положительным вершинам цикла прибавляем по 4 единицы, а от отрицательных вершин вычитаем по 4 единицы груза. В результате общее равновесие плана не будет нарушено, т. е. заданные в условии итоги по строкам и столбцам не изменятся, однако получится новый план перевозок (табл. 5.11).

Таблица 5.11

	6	14	10
10	− 4 / 6	5	+ 1 / 4
8	6	3 / 8	4
12	+ 1	2 / 6	− 4 / 6

Свободные клетки: (1, 2); (2, 1); (2, 3); (3, 1). Наименьший тариф для клетки (3, 1):

$$s_{31}=1-4+1-4=-6;$$

$$f_2=4\cdot 6+1\cdot 4+3\cdot 8+2\cdot 6+4\cdot 6=88.$$

Клетка (3, 1) перспективная, загружая ее, план можно улучшить (табл. 5.12). Число занятых клеток в табл. 5.12 не удовлетворяет условию $r=m+n-1=3+3-1=5$. Получен вырожденный план. В одну из свободных клеток помещаем нуль, например в клетку (2, 3) табл. 5.12. Далее опять проверяем план перевозок (табл. 5.12) на оптимальность.

Таблица 5.12

	6	14	10
10	4	5	1 / 10
8	6	3 / 8	4 / 0
12	1 / 6	2 / 6	4

Свободные клетки (1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 3) имеют оценки:

$$s_{11}=4-1+4-3+2-1=5>0;$$

$$s_{12}=5-1+4-3=5>0;$$

$$s_{21}=6-3+2-1=4>0;$$

$$s_{33}=4-2+3-4=1>0.$$

Так как эти оценки положительны, получен оптимальный план:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 8 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

со значением целевой функции

$$f_{\min}=1\cdot 10+3\cdot 8+4\cdot 0+1\cdot 6+2\cdot 6=52.$$

§ 5.4. Решение транспортной задачи методом потенциалов

При решении транспортной задачи распределительным методом подсчет алгебраических сумм стоимостей по циклам пересчета является одной из трудоемких операций. Этого недостатка лишен *алгоритм метода потенциалов,* или *модифицированного распределительного метода (метод МОДИ).*

Сущность метода потенциалов состоит в следующем. После того как найден исходный опорный план перевозок, каждому поставщику A_i (каждой строке) ставится в соответствие некоторое число u_i $(i=\overline{1,m})$, а каждому потребителю B_j (каждому столбцу) — некоторое число v_j. Числа u_i и v_j называются *потенциалами* соответственно поставщика A_i и потребителя B_j и выбираются так, чтобы в любой загруженной клетке их сумма равнялась тарифу этой клетки, т. е. $u_i+v_j=c_{ij}$. Так как всех потенциалов $m+n$, а занятых клеток $m+n-1$, то для определения чисел u_i и v_j придется решать систему из $m+n-1$ уравнений $u_i+v_j=c_{ij}$ с $m+n$ неизвестными. В этом случае одной из неизвестных можно придать произвольное значение, и тогда система будет иметь единственное решение, т. е. все остальные $m+n-1$ неизвестных определятся однозначно. Затем для проверки оптимальности плана просматриваются свободные клетки (i, j) и для каждой из них вычисляется разность s_{ij} между тарифом c_{ij} и суммой u_i+v_j потенциалов строки и столбца. План оптимален, когда для каждой свободной клетки (i, j) разность s_{ij} есть величина неотрицательная, т. е. $s_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)\geqslant 0$.

Полученные разности называются *оценками (характеристиками) свободных клеток.* Отрицательные оценки указывают на перспективность клеток, загрузка их приведет к улучшению плана. Положительные и нулевые оценки исключают возможность улучшения полученного плана. Переход к новому плану осуществляется по общим правилам распределительного метода. Для наиболее перспективной клетки строится замкнутый контур, вершинам которого приписываются чередующиеся знаки (свободной клетке приписывается положительный знак). В клетках, соответствующих отрицательным вершинам, отыскивается наименьший груз, который и «перемещается» по клеткам замкнутого цикла, т. е. прибавляется к клеткам со знаком плюс, включая свободную, и вычитается из клеток со знаком минус.

В новом плане вновь определяются потенциалы строк и столбцов и вычисляются оценки для всех свободных клеток. Когда среди оценок не окажется отрицательных, полученный план будет оптимальным.

Итак, чтобы решить транспортную задачу методом потенциалов, необходимо:

1) *построить опорный план перевозок по одному из вышеизложенных правил;*

2) *вычислить потенциалы u_i и v_j соответственно поставщиков и потребителей;*

3) *вычислить суммы потенциалов (косвенные тарифы) для свободных клеток $u_i + v_j = c'_{ij}$;*

4) *проверить разность $s_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}$.*

Если все $s_{ij} \geqslant 0$ для свободных клеток, полученный план оптимален. Если хотя бы одна оценка $s_{ij} < 0$, в число занятых вводят клетку, для которой оценка минимальна, и получают новый план перевозок. Процесс продолжают до тех пор, пока не будет получен план, для которого все оценки $s_{ij} \geqslant 0$.

Алгебраическая сумма s_{ij} стоимостей по циклу пересчета свободной клетки (i, j) равна разности между стоимостью c_{ij} и суммой потенциалов u_i и v_j, т. е.

$$s_{ij} = c_{ij} - c'_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j).$$

Пример 5.7. Решить методом потенциалов транспортную задачу, условие которой представлено табл. 5.13.

Таблица 5.13

Поставщик	Потребитель				Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	40
A_3	3	2	4	4	20
Потребность в грузе	30	25	35	20	110

Р е ш е н и е. Опорный план перевозок найдем, например, по правилу «минимального элемента» (табл. 5.14). Полученный план невырожденный. Число занятых клеток $r=m+n-1=3+4-1=6$, что соответствует распределению.

Таблица 5.14

	30	25	35	20	
50	3 25	2 5	4	1 20	0
40	2 5	3	1 35	5	—1
20	3	2 20	4	4	
	3	2	2	1	

Значение целевой функции

$$f_1=3\cdot 25+2\cdot 5+1\cdot 20+2\cdot 5+1\cdot 35+2\cdot 20=190.$$

Определяем потенциалы u_i и v_j:

$$u_1+v_1=3; \qquad u_2+v_1=2;$$
$$u_1+v_2=2; \qquad u_2+v_3=1;$$
$$u_1+v_4=1; \qquad u_3+v_2=2.$$

Полагая, например, $u_1=0$, находим остальные потенциалы: $v_1=3$, $v_2=2$, $v_3=2$, $v_4=1$, $u_2=-1$, $u_3=0$.

Определяем косвенные тарифы c'_{ij}:

$$c'_{13}=u_1+v_3=\quad 0+2=2;$$
$$c'_{22}=u_2+v_2=-1+2=1;$$
$$c'_{24}=u_2+v_4=-1+1=0;$$
$$c'_{31}=u_3+v_1=\quad 0+3=3;$$
$$c'_{33}=u_3+v_3=\quad 0+2=2;$$
$$c'_{34}=u_3+v_4=\quad 0+1=1.$$

Определяем разности s_{ij} для свободных клеток:

$$s_{13}=c_{13}-c'_{13}=4-2=2;$$
$$s_{22}=c_{22}-c'_{22}=3-1=2;$$
$$s_{24}=c_{24}-c'_{24}=5-0=5;$$

$$s_{31} = c_{31} - c'_{31} = 3 - 3 = 0;$$
$$s_{33} = c_{33} - c'_{33} = 4 - 2 = 2;$$
$$s_{34} = c_{34} - c'_{34} = 4 - 1 = 3.$$

Полученный план перевозок

$$\begin{pmatrix} 25 & 5 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является оптимальным, так как все разности s_{ij} положительны.

Пример 5.8. Совхозы A_1, A_2, A_3 выделяют соответственно 30, 40 и 20 ц молока для ежедневного снабжения пунктов B_1, B_2, B_3, B_4. Стоимость перевозки и потребности пунктов даны в табл. 5.15.

Таблица 5.15

Совхоз	Потребитель				Предназначено для вывоза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	15 2	3	15 5	4	30
A_2	5 3	25 2	4	10 1	40
A_3	4	3	20 2	6	20
Потребность	20	25	35	10	90

Требуется организовать снабжение таким образом, чтобы полностью обеспечить потребителей молоком и чтобы транспортные расходы были минимальными.

Решение. Опорный план получим, например, по правилу «минимального элемента» (табл. 5.16).

Таблица 5.16

	20	25	35	10	
30	2 + 15	3	5 − 15	4	0
40	3 5 −	2 25	4 +	1 10	1
20	4	3	2 20	6	-3
	2	1	5	0	

Полученный план невырожденный. Вычисление потенциалов можно производить непосредственно в таблице. Пусть потенциал первого поставщика $u_1=0$, тогда остальные потенциалы определятся однозначно (нижняя строка, правый столбец табл. 5.16).

Проверяем план на оптимальность:

$$s_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)\geqslant 0;$$
$$s_{12}=3-(0+1)=2>0;$$
$$s_{14}=4-(0+0)=4>0;$$
$$s_{23}=4-(1+5)=-2<0;$$
$$s_{31}=4-(-3+2)=5>0;$$
$$s_{32}=3-(-3+1)=5>0;$$
$$s_{34}=6-(-3+0)=9>0.$$

Клетка (2, 3) — перспективная. Строим для нее замкнутый цикл; он выделен в табл. 5.16. Загружая эту клетку наименьшим количеством груза, стоящего в отрицательных вершинах цикла, получим новый план (табл. 5.17).

Таблица 5.17

2 20	3	5 10	4	0
3	2 25	4 5	1 10	—1
4	3	2 20	6	—3
2	3	5	2	

Он также невырожденный. Положим потенциал $u_1=0$, тогда остальные потенциалы определятся однозначно.

Проверяем план на оптимальность:

$$s_{12}=3-(0+3)=0; \qquad s_{31}=4-(-3+2)=5>0;$$
$$s_{14}=4-(0+2)=2>0; \qquad s_{32}=3-(-3+3)=3>0;$$
$$s_{21}=3-(-1+2)=2>0; \qquad s_{34}=6-(-3+2)=7>0.$$

Все оценки $s_{ij}\geqslant 0$. Полученный план оптимален:

$$\begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 25 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Транспортные расходы по оптимальному плану

$$f_{\min}=2\cdot20+5\cdot10+2\cdot25+4\cdot5+1\cdot10+2\cdot20=210.$$

§ 5.5. Решение транспортной задачи с открытой моделью

Если суммарная производственная мощность поставщиков превышает спрос потребителей или спрос потребителей больше фактической суммарной мощности поставщиков, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j \text{ или } \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

то имеем *транспортную задачу с открытой моделью.*

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то в математическую модель транспортной задачи вводится фиктивный $(n+1)$-й пункт потребления. Тогда в матрице задачи добавится столбец, для которого потребность равна разности между суммарной мощностью поставщиков и фактическим спросом потребителей,

$$b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m} a_i-\sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Все тарифы на доставку груза в пункт B_{n+1} будем считать равными нулю. Очевидно, что для такой транспортной задачи уже окажется выполнимым условие $\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j+b_{n+1}$. Здесь следует иметь в виду, что грузы, которые должны быть перевезены в пункт назначения B_{n+1}, следует оставить в пунктах отправления. Однако с помощью введения дополнительного столбца задача преобразуется в закрытую. Для новой задачи функционал будет тот же, так как цены на дополнительные перевозки равны нулю. Иными словами, введение фиктивного потребителя обеспечивает совместность системы ограничений.

Если же $\sum_{j=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_i$, то вводится фиктивный $(m+1)$-й пункт отправления, для которого запас груза

$$a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n} b_j-\sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Тарифы на доставку грузов от фиктивного A_{m+1} поставщика полагаем равными нулю. В матрице задачи добавится одна строка, причем на целевой функции это не отразится, а система ограничений станет совместной, т. е. станет возможным отыскание оптимального плана.

Пример 5.9. Решить транспортную задачу с открытой моделью (табл. 5.18) методом потенциалов.

Таблица 5.18

Поставщик	Потребитель				Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	1	5	2	25
A_2	4	6	7	3	25
A_3	2	8	4	5	15
Потребность в грузе	9	20	16	25	65<70

Решение. Поскольку спрос потребителей превышает запасы поставщиков, то вводится фиктивный поставщик, запас которого

$$a_4=\sum_{j=1}^{4} b_j-\sum_{i=1}^{3} a_i=70-65=5.$$

Транспортная задача с введением фиктивного поставщика A_4, для которого все тарифы равны нулю, будет иметь вид табл. 5.19.

Опорный план перевозок получим, например, по правилу «минимального элемента». В первую очередь просматриваем тарифы исходной задачи. Наименьший тариф имеет клетка (1, 2). Начиная распределение груза из этой клетки, получим опорный план (табл. 5.20). Он невырожденный. Число занятых клеток $r=m+n-1=4+4-1=7$.

Определяем потенциалы непосредственно в таблице, полагая потенциал первого поставщика $u_1=0$. Остальные определяются однозначно по формуле $u_i+v_j=c_{ij}$ (сумма потенциалов, на пересечении которых расположена занятая клетка, равна тарифу клетки). Значения потенциалов: $u_1=0$, $u_2=1$, $u_3=1$, $u_4=-5$, $v_1=3$, $v_2=1$, $v_3=5$, $v_4=2$.

Таблица 5.19

Поставщик	Потребитель				Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	1 20	5	2 5	25
A_2	4 5	6	7	3 20	25
A_3	2 4	8	4 11	5	15
A_4	0	0	0 5	0	5
Потребность в грузе	9	20	16	25	70=70

Таблица 5.20

	9	20	16	25	
25	3	1 20	5	2 5	0
25	4 5	6	7	3 20	1
15	2 4	8	4 11	5	—1
5	0	0	0 5	0	—5
	3	1	5	2	

Проверяем план на оптимальность:

$s_{11}=3-(0+3)=0;$

$s_{13}=5-(0+5)=0;$

$s_{22}=6-(1+1)=4>0;$

$s_{23}=7-(1+5)=1>0;$

$s_{32}=8-(1-1)=8>0;$

$s_{34}=5-(2-1)=4>0;$

$s_{41}=0-(3-5)=2>0;$

$s_{42}=0-(1-5)=4>0;$

$s_{44}=0-(2-5)=3>0.$

Все оценки $s_{ij} \geqslant 0$. Полученный план оптимален:

$$\begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 20 \\ 4 & 0 & 11 & 0 \end{pmatrix}.$$

Транспортные издержки составят

$$f_{\min} = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 11 = 162.$$

По оптимальному плану спрос третьего потребителя не удовлетворяется на $x_{43} = 5$ единиц груза.

Упражнения

5.1. Найти методом Фогеля план перевозок транспортной задачи (табл. 5.21).

Таблица 5.21

Поставщик	Потребитель				Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	7	3	9	115
A_2	2	1	8	5	70
A_3	7	9	6	1	68
Потребность в грузе	95	38	50	70	253

5.2. Найти оптимальный план для следующих транспортных задач (в верхней строке таблиц указаны потребности в грузе пунктов B_j; в левом столбце — запасы груза в пунктах A_i; в остальных клетках — тарифы c_{ij}):

а)

A_i \ B_j	30	60	45	25
50	4	7	1	3
70	5	9	6	2
40	8	2	9	11

б)

A_i \ B_j	110	120	80	50	70
150	7	2	11	5	9
170	8	4	3	6	1
110	3	5	10	7	8

в)

A_i \ B_j	8	5	15	18	12	14	6	10
50	2	1	3	6	5	7	9	8
38	10	11	5	7	4	2	3	1

г)

A_i \ B_j	75	125	64	65	60
85	7	1	4	5	2
112	13	4	7	6	3
72	3	8	0	18	12
120	9	5	3	4	7

д)

A_i \ B_j	80	93	56	100	125	98	73
135	7	5	3	4	2	1	8
270	9	4	5	10	3	6	5
120	6	2	8	7	1	4	3

е)

A_i \ B_j	18	10	20	37	10	38
28	3	7	6	1	4	9
30	8	2	5	10	7	3
40	4	9	10	3	6	5
35	2	4	7	8	3	1

ж)

A_i \ B_j	35	40	40	30
40	3	2	4	1
50	2	3	1	5
30	3	2	4	4

з)

A_i \ B_j	8	10	12
20	1	3	2
15	2	1	3

§ 5.6. Усложненные постановки задачи транспортного типа

Мы рассмотрели наиболее простой вариант транспортной задачи. В народнохозяйственной практике такие задачи встречаются редко. Обычно при составлении экономико-математической модели задачи транспортного типа приходится вводить целый ряд дополнительных ограничений, отчего поиск оптимального решения усложняется.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся случаи.

Нередко целесообразно минимизировать суммарные затраты на производство и транспортировку продукции. С подобной задачей можно столкнуться при решении вопросов, связанных с оптимальным размещением производственных объектов. Здесь может оказаться экономически более выгодным доставлять сырье из более отдаленного источника, но зато при меньшей его себестоимости. В таких задачах критерием оптимальности служит сумма затрат на производство единицы груза и на его перевозку.

Часто необходимо вводить ограничения, согласно которым отдельные поставки от определенного поставщика определенному потребителю должны быть исключены (из-за отсутствия достаточного количества транспорта или необходимых условий хранения груза, чрезмерной перегрузки коммуникаций и т. п.). Значит, в матрице перевозок, содержащей оптимальный план, определенные клетки должны остаться свободными. Это достигается искусственным завышением показателей c_{ij} в клетках, перевозки через которые следует запретить, завышением до таких значений, которые будут заведомо больше всех, с которыми их придется сравнивать в процессе решения задачи.

Иногда приходится учитывать ограничения по пропускной способности некоторых маршрутов. Если, например, по маршруту A_kB_s можно провезти не более d единиц груза, то B_s-й столбец матрицы перевозок разбивается на два: B_s' и B_s''. В первом спрос принимается равным разности между действительным спросом b_s и ограничением d, во втором — равным ограничению d. Тарифы c_{ij} в обоих столбцах одинаковы и равны данным, но в первом, в клетке, соответствующей ограничению, вместо истинного тарифа c_{ks} ставится искусственно завышенный тариф M (клетка блокируется). Затем задача решается обычным способом.

Может случиться, что некоторые поставки по определенным маршрутам обязательны и должны войти в оптимальный план независимо от того, выгодно это или нет в условиях всей задачи. Тогда соответственно уменьшают запасы груза у поставщиков и спрос у потребителей и решают задачу относительно тех поставок, которые не обязательны.

Многие задачи, по физическому смыслу не являющиеся транспортными, в математическом отношении подобны транспортной, так как описываются аналогичной моделью (об оптимальном распределении производства изделий между предприятиями, о наиболее рациональном закреплении механизмов за определенными видами работ, об оптимальном распределении посевных площадей между сельскохозяйственными культурами, об оптимальном использовании автотранспорта за счет сокращения порожнего пробега, об оптимальных назначениях и др.). Следовательно, для их решения можно использовать, например, метод потенциалов и применять указанные в начале параграфа приемы.

Во многих задачах транспортного типа целевая функция максимизируется. Поэтому при составлении начального опорного плана в первую очередь стараются заполнять клетки с наиболее высокими значениями показателя критерия оптимальности. Выбор клетки, подлежащей заполнению при переходе от одного опорного плана к другому, должен производиться не по отрицательной, а по положительной оценке. Оптимальным будет опорный план, которому в распределительной таблице сопутствуют свободные клетки с неположительными оценками (все $s_{ij} \leqslant 0$).

Пример 5.9. На четырех ткацких станках с объемом рабочего времени 200, 300, 250 и 400 станко-часов за 1 ч можно изготовить соответственно 260, 200, 340 и 500 м ткани трех артикулов I, II, III. Составить оптимальную программу загрузки станков, если прибыль (в руб.) от реализации 1 м ткани i-го артикула при ее изготовлении на j-м станке характеризуется элементами матрицы

$$\begin{pmatrix} 2{,}5 & 2{,}2 & — & 2{,}8 \\ 1{,}6 & 1{,}0 & 1{,}9 & 1{,}2 \\ 0{,}8 & 1{,}0 & 0{,}6 & 0{,}9 \end{pmatrix},$$

а суммарная потребность в ткани каждого из артикулов равна 200, 100 и 150 тыс. м, учитывая, что ткань I артикула не может производиться на третьем станке.

Решение. Требуется установить, какое количество ткани каждого артикула должно изготовляться на каждом станке, чтобы общая прибыль от реализации готовой продукции была максимальной.

На первом станке можно изготовить $260 \cdot 200 = 52$ тыс. м ткани, на втором — 60, на третьем — 85, на четвертом — 200, а всего — 397 тыс. м. Поскольку суммарная потребность в ткани всех трех артикулов составляет 450 тыс. м, то на 53 тыс. м спрос удовлетворить не удастся.

Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_{ij} количество ткани (в тыс. м) i-го артикула, изготовленной на j-м станке, а через $f(x_{11}, \ldots, x_{34})$ — общую прибыль, тогда решение задачи сведется к максимизации функции

$$f = 2{,}5x_{11} + \ldots + 0{,}9x_{34} \tag{5.5}$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} \qquad\quad + x_{14} &\leqslant 200; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leqslant 100; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leqslant 150; \end{aligned}\right\} \qquad (5.6)$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 52; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 60; \\ x_{23} + x_{33} &= 85; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 200; \end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \; (i = \overline{1,3};\; j = \overline{1,4}). \qquad (5.8)$$

Коэффициенты функции (5.5) характеризуют прибыль (в тыс. руб.) от реализации каждой тысячи метров ткани; неравенства (5.6) свидетельствуют о неполном удовлетворении потребности в ткани; равенства (5.7) — о полном использовании производственных мощностей. Из соотношений (5.5)—(5.8) видно, что рассматриваемая задача относится к задачам транспортного типа и имеет открытую модель. «Поставками» в данном случае мы считаем объем выпуска ткани, а «тарифами» — прибыль от реализации каждой тысячи метров ткани каждого из артикулов.

Для преобразования модели (5.5)—(5.8) в закрытую следует ввести в рассмотрение фиктивный пятый станок, который позволит «выпустить» недостающие для удовлетворения спроса 53 тыс. м ткани. «Прибыль» от реализации ткани, «выпускаемой» фиктивным станком, естественно положить равной нулю. Преобразованная модель примет вид:

$$f = 2{,}5x_{11} + \ldots + 0{,}9x_{34} + \ldots + 0\tilde{x}_{35} \;(\max);$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} \qquad\quad + x_{14} + \tilde{x}_{15} &= 200; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + \tilde{x}_{25} &= 100; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + \tilde{x}_{35} &= 150; \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 52; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 60; \\ x_{23} + x_{33} &= 85; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 200; \\ \tilde{x}_{15} + \tilde{x}_{25} + \tilde{x}_{35} &= 53; \end{aligned}\right\}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \; (i = \overline{1,3};\; j = \overline{1,5}),$$

где $\tilde{x}_{15}$, $\tilde{x}_{25}$, $\tilde{x}_{35}$ — «выпуск» ткани I, II, III артикула пятым станком.

В табл. 5.22 содержится начальный опорный план загрузки станков. При его составлении станки загружались в первую очередь изготовлением тканей наиболее прибыльных артикулов. За очередностью заполнения клеток таблицы можно проследить по индексам, которыми снабжены величины x_{ij}. По условию задачи на третьем станке ткань I артикула изготовлять нельзя. В связи с этим клетку (1, 3) в табл. 5.22 пришлось

Таблица 5.22

Артикул ткани	Станок № 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	Потребность в ткани	u_i
I	2,5 0_2	2,2 $\boxed{-1}$	M $\boxed{-}$	2,8 200_1	0 $\boxed{-2,2}$	200	2,2
II	1,6 52_3	1 $\boxed{-1,3}$	1,9 48_4	1,2 $\boxed{-0,7}$	0 $\boxed{-1,3}$	100	1,3
III	0,8 $\boxed{0,5}$	1 60_6	0,6 37_5	0,9 $\boxed{0,3}$	0 53_7	150	0
Производственная мощность	52	60	85	200	53		
v_j	0,3	1	0,6	0,6	0		

заблокировать, приписав ей показатель M, равный очень большому по абсолютной величине отрицательному числу («отрицательная» прибыль!). С практической точки зрения это можно истолковать таким образом, что загрузка клетки (1, 3) причинила бы производству очень большой ущерб. Поскольку всегда $|M|>|u_1+v_3|$, то при любом плане загрузки станков оценка клетки (1, 3): $s_{13}=M-(u_1+v_3)$ будет отрицательна, а поэтому клетка останется незанятой, что и требуется.

Для исследования плана на оптимальность вычисление потенциалов в табл. 5.22 начато с $u_3=0$. То, что свободные клетки (3, 1) и (3, 4) имеют положительные оценки, говорит о неоптимальности плана. Заполнение клетки (3, 1) числом

$\lambda = \min\limits_{\text{четн.}} (52;\ 37) = 37$ способствовало увеличению прибыли при новом плане (табл. 5.23) на $0{,}5 \cdot 37 = 18{,}5$ тыс. руб.

Таблица 5.23

						u_i
	2,5 0	2,2 $\boxed{-0{,}5}$	M $\boxed{-}$	2,8 200	0 $\boxed{-1{,}7}$	1,7
	1,6 15	1 $\boxed{-0{,}8}$	1,9 85	1,2 $\boxed{-0{,}7}$	0 $\boxed{-0{,}8}$	0,8
	0,8 37	1 60	0,6 $\boxed{-0{,}5}$	0,9 $\boxed{-0{,}2}$	0 53	0
v_j	0,8	1	1,1	1,1	0	

Новый план оказался оптимальным, так как оценки всех свободных клеток отрицательные.

Итак, все 200 тыс. м ткани I артикула следует изготовлять на четвертом станке, на что потребуется $200:0{,}5 = 400$ станко-часов; ткань II артикула — на первом (15 тыс. м) и третьем (85 тыс. м) станках, для чего потребуется соответственно $15:0{,}26 = 57{,}69$ и $85:0{,}34 = 250$ станко-часов; ткань III артикула — на первом (37 тыс. м) и втором (60 тыс. м) станках, и на это потребуется соответственно $37:0{,}26 = 142{,}31$ и $60:0{,}2 = 300$ станко-часов. Общая прибыль составит 835,1 тыс. руб. Неудовлетворенным останется спрос на 53 тыс. м ткани III артикула.

Упражнения

5.3. Три судна доставили в порт 6000 т чугуна, 4000 т железной руды и 3000 т апатитов. Разгрузка судов может быть осуществлена или непосредственно в железнодорожные вагоны, или на склады. В первом случае можно разгрузить 8000 т, а остаток (5000 т) придется направить на склад. Стоимость выгрузки 1 т в вагоны составляет соответственно 4,30; 5,25 и 2,20, а при отправке на склад — 7,80; 6,40 и 3,25. Спланировать разгрузку с минимальными затратами, учитывая при этом, что поданные в порт вагоны не приспособлены для перевозки апатитов.

5.4. Найти оптимальное распределение трех видов механизмов, имеющихся в количествах 45, 20 и 35, между четырьмя участками работ, потребности которых соответственно равны 10, 20, 30 и 40, при следующей матрице производительности каждого из механизмов на соответствующем участке работы:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Нулевые элементы означают, что данный механизм не может быть использован на данном участке работы.

5.5. В городе имеются четыре хлебозавода, которые снабжаются мукой тремя мелькомбинатами. Все необходимые данные приведены в табл. 5.24. В ней же указано распределение поставок муки.

Таблица 5.24

Мелькомбинат	Хлебозавод				Суточная производительность, т
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
№ 1	4 15	2	4 10	7	25
№ 2	7	6	6 2	8 18	20
№ 3	2 15	2 20	3	6	35
Суточная потребность в муке, т	30	20	12	18	

Возможно ли путем перераспределения поставок уменьшить затраты, и если возможно, то на сколько?

5.6. Четыре различных предприятия могут выпускать любой из четырех видов продукции. Производственные мощности предприятий позволяют обеспечить выпуск продукции каждого вида в количествах 50, 70, 100 и 30 тыс. шт., а плановое задание составляет соответственно 30, 80, 20 и 100 тыс. шт. Матрица

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \\ 6 & 4 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix},$$

характеризует себестоимость единицы i-го вида продукции при производстве его на j-м предприятии. Найти оптимальное распределение планового задания между предприятиями.

5.7. Имеются 4 трактора марки А, 20 — марки Б, 10 — марки В и 4 — марки Г. Распределить сельскохозяйственные работы по маркам тракторов таким образом, чтобы общие затраты на выполнение работ были минимальными. При этом необходимо учесть, что на культивации пропашных и сенокошении нельзя использовать трактор марки А, на культивации пропашных — трактор марки Б. Все необходимые данные приведены в табл. 5.25.

5.8. Заводы № 1, 2 и 3 производят однородную продукцию в количествах соответственно 490, 450 и 470 единиц. Себестоимость производства единицы продукции на заводе № 1 составляет 25, на заводе № 2—20, на заводе № 3—23. Продукция отправляется в пункты А, Б и В, потребности кото-

Таблица 5.25

Вид работ	Объем работ, га условной пахоты	Себестоимость 1 га работ (руб.) для марки трактора			
		А	Б	В	Г
Культивация пара	3300	0,8	1	0,9	0,9
Пахота пара	6000	2,4	3	3,4	3,2
Культивация пропашных	1250	—	—	1	0,95
Боронование в один след	1600	0,2	0,27	0,25	0,27
Сенокошение	1850	—	0,8	0,75	0,85
Сезонная норма выработки на каждый трактор, га условной пахоты		500	385	310	300

рых соответственно равны 300, 340 и 360 единицам. Стоимости перевозок единицы продукции задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составить оптимальный план перевозки продукции с учетом ее себестоимости при условии, что коммуникации между заводом № 2 и пунктом А не позволяют пропускать в рассматриваемый период более 200 единиц продукции. Установить, во что обошлось ограничение пропускной способности указанного маршрута.

5.9. Составить план посева зерновых культур по участкам различного плодородия, максимизирующий прибыль. Все необходимые данные приведены в табл. 5.26.

Таблица 5.26

Зерновые культуры	Урожайность по участкам, ц/га				Посевная площадь, га	Закупочные цены, руб.	Затраты средств на на 1 га по участкам, руб.			
	I	II	III	IV			I	II	III	IV
Пшеница	35	25	20	15	2400	6,5	50	40	40	40
Кукуруза на зерно	60	40	30	50	1700	5,0	90	90	70	65
Ячмень	30	20	15	15	350	4,3	50	40	40	45
Рожь	25	30	20	15	250	7,0	50	50	45	40
Просо	40	20	15	10	100	7,2	60	50	50	50
Размеры участков, га	3000	1000	300	500	4800					

5.10. Завод имеет три цеха А, Б и В и четыре склада № 1, 2, 3 и 4 Цех А производит 30, цех Б — 40, цех В — 20 тыс изделий. Пропускная способность складов за то же время характеризуется следующими показателями: склад № 1 — 25, склад № 2 — 30, склад № 3 — 35, склад № 4 — 15 тыс. изделий. Стоимость перевозки из цеха А соответственно в склады № 1, 2, 3 и 4 одной тысячи изделий равна 2; 3; 0,5 и 4 руб.; из цеха Б — 3; 2; 5 и 1 руб.; а из цеха В — 4; 3; 2 и 6 руб. Составить план перевозки изделий в склады, минимизирующий транспортные расходы. При этом необходимо учесть, что на складах № 1 и 4 созданы лучшие условия для хранения готовой продукции, а поэтому их следует загрузить полностью.

5.11. Для контроля за работой космической ракеты установлены датчики четырех типов $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$ и $Д_4$ в количестве 20, 40, 50 и 40 шт. соответственно. Каждый датчик определяет одну из характеристик (температуру, давление и т. п) и результат передает по отдельному каналу связи любому из трех типов наземных автоматических регистрирующих устройств P_1, P_2 и P_3, количество которых соответственно равно 70, 90 и 60 шт. Затраты времени на включение соответствующего канала связи определяются элементами матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

где 4, например, время, затрачиваемое на включение канала связи датчика $Д_2$ с регистратором P_3

Как закрепить датчики за регистрирующими устройствами, чтобы суммарные затраты времени на переключение каналов связи были минимальными?

5.12. В резерве трех железнодорожных станций А, Б и В находятся соответственно 60, 80 и 70 вагонов. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к четырем пунктам погрузки зерна, если пункту № 1 требуется 40, пункту № 2 — 60, пункту № 3 — 80, а пункту № 4 — 60 вагонов. При этом следует учесть, что в пунктах № 2 и 3 нет условий для длительного хранения зерна, а поэтому его необходимо вывезти из этих пунктов полностью.

Стоимость перегона одного вагона со станции А в указанные пункты соответственно равна 11; 12; 15 и 14 руб, со станции Б — 14; 13; 12 и 11 руб., со станции В — 15; 12; 14 и 16 руб

5.13. На заводах № 1, 2 и 3 производится однородная продукция в количестве соответственно 500, 700 и 600 единиц. При этом затраты на производство единицы продукции на указанных заводах составляют 10, 3 и 6. Для четырех потребителей требуется соответственно 400, 800, 200 и 500 единиц продукции. Расходы по перевозке единицы продукции с i-го завода j-му потребителю задаются элементами матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для полного удовлетворения потребителей необходимо составить оптимальный план расширения производства продукции, если имеются следующие возможности: 1) расширить мощность завода № 1 с дополнительными затратами на единицу продукции, равными 3; 2) расширить мощность завода № 2 с дополнительными затратами на единицу продукции, равными 2; 3) построить новый завод с затратами на производство единицы продукции, равными 5, и расходами по перевозке единицы продукции, равными соответственно 7; 6; 5 и 9.

§ 5.7. Транспортная задача в сетевой постановке

Если условия транспортной задачи заданы в виде карто-схемы, на которой условно изображены поставщики, потребители и связывающие их дороги, указаны величины запасов груза и потребностей в нем, а также числа c_{ij}, являющиеся показателями принятого в задаче критерия оптимальности (тарифы, расстояния и т. п.), то говорят, что транспортная задача поставлена в *сетевой форме* (рис. 5.2; 5.3).

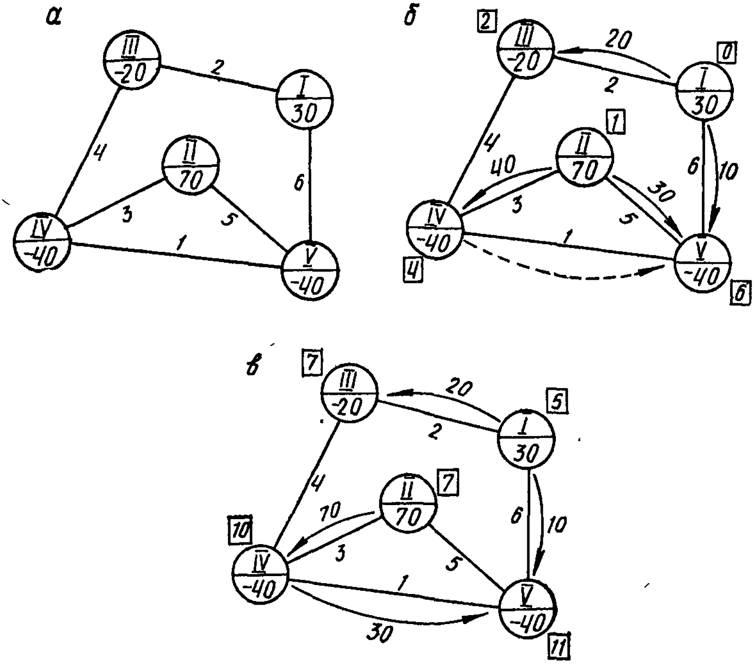

Рис. 52

Описанную карто-схему будем называть *транспортной сетью.* Пункты расположения поставщиков и потребителей будем изображать кружками и называть *вершинами* (*узлами*) сети, запасы груза будем записывать в кружках *положительными*, а потребности — *отрицательными* числами. Дороги, связывающие пункты расположения и потребления груза и другие пункты, будем изображать линиями и называть *ребрами* (*дугами, звеньями*) сети. При изображении транспортной сети реальный масштаб не соблюдается. На сети могут быть изображены вершины, в которых нет ни поставщиков, ни потребителей. Наличие таких вершин не повлияет на способ решения, если считать, что запасы (потребности) груза в них равны нулю. Такие вершины называют нулевыми (см. вершину II на рис. 5.3). Различия между транспортными задачами в матричной и сетевой формах весьма незначительны, так как методы их решения основаны на одних и тех же идеях. Далее мы будем использовать уже известный (см. § 5.4) метод потенциалов.

Решение задачи на сети начинается с построения начального опорного плана. Последовательность решения задачи рассмотрим на конкретном примере (рис. 5.2, *а*). Поставки груза из вершины в вершину будем обозначать стрелками с указанием величин поставок.

Опорный план должен удовлетворять следующим требованиям: 1) все запасы должны быть распределены, а потребности удовлетворены; 2) к каждой вершине должна подходить или выходить из нее хотя бы одна стрелка; 3) общее количество стрелок должно быть на единицу меньше числа вершин; 4) стрелки не должны образовывать замкнутый контур.

План распределения груза на рис. 5.2, *б* отвечает этим требованиям.

Далее следует проверить план на оптимальность. Для этого вычислим потенциалы. Одной из вершин (например, вершине I) присвоим некоторое значение потенциала (например, равное 0). (Для большей наглядности потенциалы будем заключать в рамки.) После этого, двигаясь по стрелкам, определяем потенциалы остальных вершин, руководствуясь правилом: *если стрелка выходит из вершины, то к потенциалу этой вершины прибавляем показатель c_{ij} критерия оптимальности, если же направление стрелки противоположно, то c_{ij} вычитаем.*

В нашем примере потенциал вершины III равен: $0+2=2$ (стрелка выходит из вершины I); потенциал вершины V: $0+6=6$ (стрелка выходит из вершины I); потенциал вершины II: $6-5=1$ (стрелка входит в вершину V); потенциал вершины IV: $1+3=4$ (стрелка выходит из вершины II).

После вычисления потенциалов находят характеристики ребер без стрелок по правилу: *из большего потенциала вычитается меньший, а разность вычитается из показателя c_{ij}, отвечающего данному ребру.*

Если все ребра без стрелок имеют неотрицательные характеристики, то составленный план является оптимальным.

Вычислим характеристики ребер без стрелок в нашем примере: $s_{34}=4-(4-2)=2$; $s_{45}=1-(6-4)=1-2=-1$. Итак, ребро IV—V обладает отрицательной характеристикой. Значит, план неоптимален.

Для улучшения плана надо «загрузить» то ребро без стрелки, которому соответствует отрицательная характеристика.

Если таких ребер несколько, то выбирается ребро с наибольшей по абсолютной величине отрицательной характеристикой и к нему подрисовывается новая стрелка. При этом образуется замкнутый контур из стрелок. *Новая стрелка направляется от вершины с меньшим потенциалом к вершине с большим потенциалом.*

В нашем примере новая стрелка направлена от вершины IV к вершине V (на рис. 5.2, *б* она показана штриховой линией).

Для определения величины поставки для «загружаемого» ребра рассматриваются все стрелки образовавшегося контура (если на сети — опорный план, то такой контур всегда существует и причем только один!), имеющие направление, противоположное направлению новой стрелки, и среди них находится стрелка с наименьшей поставкой λ. Выбранная таким образом величина прибавляется ко всем поставкам в стрелках, имеющих то же направление, что и новая стрелка, и вычитается из поставок в стрелках, имеющих противоположное направление. Поставки в стрелках, не входящих в контур, сохраняются неизменными. Стрелка, по которой выбрано число λ, ликвидируется, и общее число стрелок остается прежним.

Преобразованный описанным способом опорный план приведен на рис. 5.2, *в*. Новый опорный план исследуется на оптимальность, подобно предыдущему. Практически удобней вести расчеты с положительными числами, поэтому значение первого (выбираемого произвольно) потенциала лучше брать равным не нулю, а какому-либо положительному числу. Пусть потенциал вершины IV равен, например, 10, тогда после вычисления остальных потенциалов для ребер без стрелок получим такие характеристики: $s_{34}=4-(10-7)=1$; $s_{25}=5-(11-7)=1$. Они положительны, значит, опорный план на рис. 5.2, *в* оптимален. Остается определить значение целевой функции:

$$f_{\min}=20\cdot 2+10\cdot 6+30\cdot 1+70\cdot 3=340.$$

Вырождение плана транспортной задачи в сетевой постановке внешне проявляется в том, что при полном использовании запасов и полном удовлетворении потребностей количество стрелок оказывается меньше, чем $n-1$, *где* n *— общее число вершин (включая и нулевые!).*

Способ преодоления вырождения весьма прост: дополнительно вводится нужное количество стрелок с нулевыми поставками. Направления стрелок выбираются произвольно, однако они не должны образовывать замкнутый контур.

В случае открытой модели вводят фиктивного потребителя (поставщика) со спросом, равным небалансу. Фиктивный потребитель (поставщик) соединяется ребрами непосредственно со всеми поставщиками (потребителями). При этом показатели c_{ij} ребер, соединяющих фиктивного потребителя (поставщика) с поставщиками (потребителями), следует брать одинаковыми и сравнительно большими. Делается так для того, чтобы исключить возможность использования фиктивной вершины в качестве промежуточного пункта.

Для примера решим задачу, условия которой представлены на рис. 5.3, *а*. В данном случае суммарные запасы груза

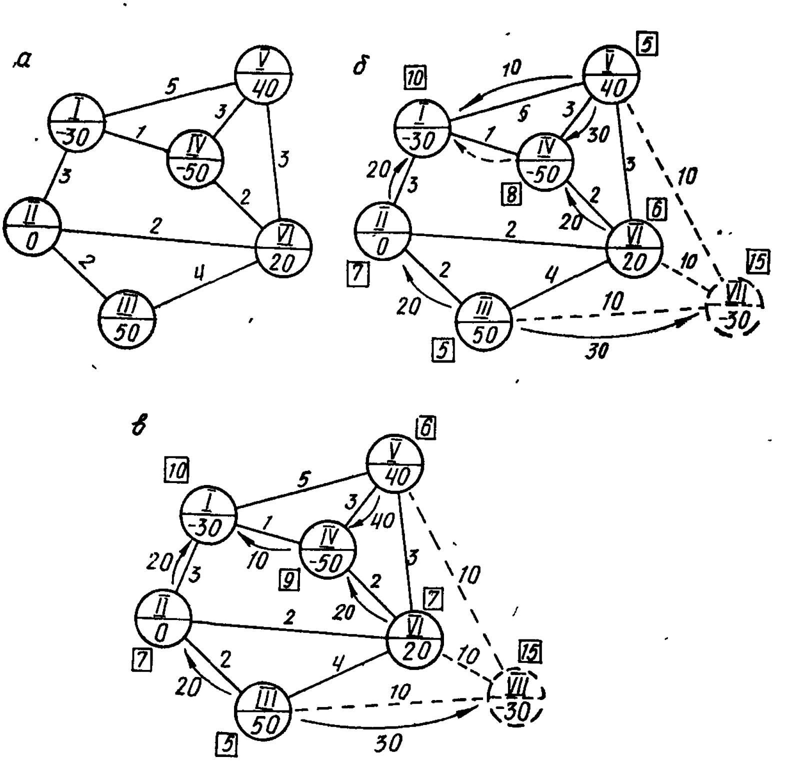

Рис. 53

(110 единиц) превышают суммарные потребности (80 единиц), поэтому нужно ввести фиктивного потребителя со спросом, равным 110—80=30 единицам. На рис. 5.3, *б* этому потребителю соответствует новая «фиктивная» вершина VII, соединенная со всеми поставщиками «фиктивными» ребрами с показателями, равными 10.

Распределив поставки, устанавливаем потенциалы, а по ним характеристики ребер без стрелок. Одно из них (I—IV) имеет отрицательную характеристику: $s_{14}=1-(10-8)=-1$.

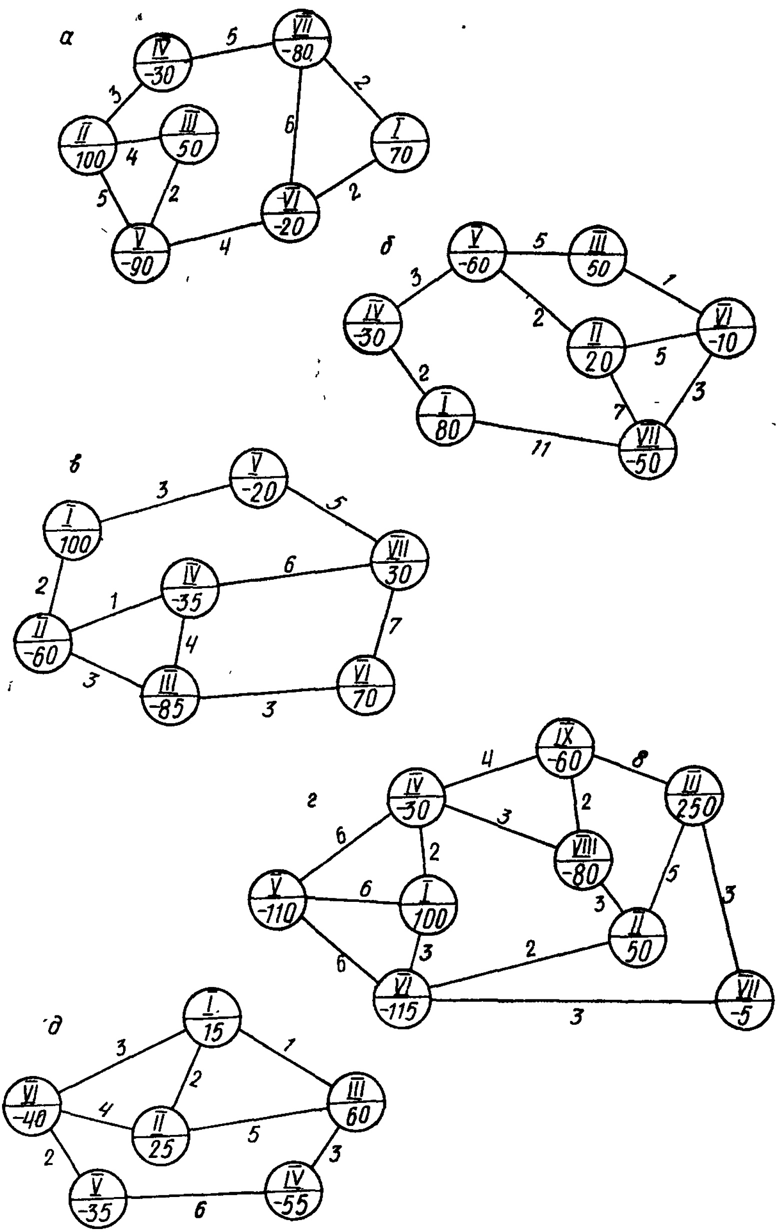

Рис. 5.4

10 Зак. 704

План неоптимален, и ребро I—IV следует «загрузить». Из рис. 5.3, *б* видно, что $\lambda=10$.

Транспортная сеть с новым опорным планом изображена на рис. 5.3, *в*. Там же указаны потенциалы. По ним можно убедиться в оптимальности содержащегося на сети плана перевозок. Минимальные транспортные затраты составляют 270 ед.

Упражнения

5.14. Решить транспортные задачи, заданные в сетевой форме (рис. 5.4, *а* — *д*).

Глава 6. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 6.1. Постановка и решение задачи

При решении многих задач на искомые переменные по их физическому смыслу необходимо наложить дополнительные ограничения целочисленности. Иными словами, переменные в оптимальном плане должны принимать только целые значения. Это имеет место, например, когда искомыми величинами являются неделимые объекты (машины, комплекты оборудования, предприятия и т. д.).

В этом случае к обычной формулировке задачи необходимо добавить условие целочисленности переменных, и мы получим *задачу целочисленного программирования.* Она может быть как линейной, так и нелинейной. Линейная задача целочисленного программирования в общем виде математически формулируется так: дана система ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}) \tag{6.1}$$

при условии

$$x_j = 0, \text{ или } 1, \text{ или } 2, \text{ или } 3, \ldots \tag{6.2}$$

Найти максимальное значение целевой функции

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{6.3}$$

Наиболее известным методом решения задач целочисленного программирования является *алгоритм Р. Гомори.*

При решении задач целочисленного программирования методом Гомори вначале целочисленность игнорируется и симплекс-методом отыскивается оптимальный план. Затем, если среди значений переменных в оптимальном плане есть дробные, составляется дополнительное ограничение, как бы «отсекающее» дробную часть решения, но оставляющее в силе прочие условия, которым должен удовлетворять оптимальный план. Дополнительное ограничение присоединяется к ограничениям нецелочисленного оптимального плана, и получается расширенная задача. К ней вновь применяется обычный алгоритм симплекс-метода. Если и на этот раз оптимальное решение окажется нецелочисленным, то добавляется еще одно дополнительное ограничение, и процесс вычислений повторяется.

В методе Гомори используются понятия конгруэнтности чисел и дробной части числа.

Число a конгруэнтно числу b, если разность $a-b$ есть целое число.

Конгруэнтность обозначается тремя горизонтальными черточками ($\equiv$).

Например, $6/5\equiv 1/5$, так как $6/5-1/5=1$.

Все целые числа конгруэнтны между собой и конгруэнтны нулю.

Дробная часть числа a определяется как наименьшее неотрицательное число, конгруэнтное числу a. Дробную часть числа a будем обозначать символом $\{a\}$:

$$\{6/5\}=1/5,\ 6/5-1/5=1.\ 6/5\equiv 1/5.$$

Дробные части всех целых чисел, очевидно, равны нулю.

Свойства конгруэнтности чисел:

1) *если $a\equiv b$, то $\{a\}\equiv\{b\}$;*
2) $\{a+b\}\equiv\{a\}+\{b\}$;
3) *если n — целое число, то для любого a*

$$na\equiv\{na\}\equiv n\{a\}.$$

Алгоритм Гомори позволяет за конечное число шагов прийти к оптимальному целочисленному решению (если оно существует). На практике это длительный и трудоемкий процесс.

Итак, задача (6.1) — (6.3) решается, как обычная задача линейного программирования (требование целочисленности игнорируется). Если полученное оптимальное решение $\bar{x}^* = (x_1^*;\ \ldots;\ x_i^*;\ \ldots;\ x_n^*) = (b_1;\ \ldots;\ b_i;\ \ldots;\ b_n)$ нецелочисленно, то выбирается базисная переменная x_i, которой в оптимальном плане соответствует число с наибольшей дробной частью. Составляется уравнение, в котором переменная x_i выражена через постоянную часть и линейную функцию свободных переменных x_j:

$$x_i = b_i' + \sum_j a_{ij}' x_j,$$

где b_i', a_{ij}' — преобразованные величины b_i и a_{ij}.

Обозначая соответствующие переменные в целочисленном решении через x'_i и x'_j, можем записать

$$x'_i = b'_i + \sum_j a'_{ij} x'_j.$$

Поскольку x'_i — целое число, то целым является и выражение в правой части уравнения, следовательно, величина правой части данного уравнения конгруэнтна нулю

$$0 \equiv b'_i + \sum_j a'_{ij} x'_j$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} (-a'_{ij}) x'_j \equiv b'_i.$$

Учитывая приведенные выше свойства конгруэнтности и то, что x'_j — целые числа, это выражение можно преобразовать в следующее:

$$\sum_{j=1}^{n} \{-a'_{ij}\} x'_j \equiv \{b'_i\}.$$

Так как x'_j — целые и неотрицательные числа, то последнее выражение можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} \{-a'_{ij}\} x'_j \geqslant \{b'_i\}.$$

Это неравенство служит дополнительным ограничением, которое добавляется к исходным ограничениям нецелочисленного оптимального плана.

Пример 6.1. Найти максимальное значение целевой функции

$$f = x_1 + 2x_2$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leqslant 7; \\ x_1 + 3x_2 &\leqslant 7; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0;$$

$$x_1, \ x_2 \text{ — целые.}$$

Решение. Составляем исходную жорданову таблицу (табл. 6.1).

Таблица 6.1

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_3 =$	7	3	1
$x_4 =$	7	1	$\boxed{3}$
$f =$	0	-1	-2

Проделав шаг модифицированных жордановых исключений с разрешающими второй строкой и вторым столбцом, получим табл. 6.2.

Таблица 6.2

	1	$-x_1$	$-x_4$
$x_3 =$	14/3	8/3	$-1/3$
$x_2 =$	7/3	1/3	1/3
$f =$	14/3	$-1/3$	2/3

В f-строке имеется отрицательный элемент $-1/3$, следовательно, план можно улучшить.

Проделав шаг модифицированных жордановых исключений с разрешающим элементом 8/3, придем к табл. 6.3.

Таблица 6.3

	1	$-x_3$	$-x_4$
$x_1 =$	7/4	3/8	$-1/8$
$x_2 =$	7/4	$-1/8$	3/8
$f =$	21/4	1/8	5/8

Получен оптимальный план $\bar{x}^* = (x_1^*;\ x_2^*) = (7/4;\ 7/4)$ со значением целевой функции $f_{\max} = 21/4$. Он не удовлетворяет условиям целочисленности. Составляем дополнительное ограничение:

$$x_1 = -3/8x_3 + 1/8x_4 + 7/4 \text{ или } -3/8x_3 + 1/8x_4 + 7/4 \equiv 0;$$
$$3/8x_3 - 1/8x_4 \equiv 7/4;$$
$$\{3/8\}x_3 + \{-1/8\}x_4 \equiv 3/4 \text{ или } 3/8x_3 + 7/8x_4 \geqslant 3/4.$$

С помощью дополнительной переменной $x_5 \geqslant 0$ запишем это ограничение в виде

$$3/8x_3+7/8x_4-x_5=3/4;$$

$$x_5=3/8x_3+7/8x_4-3/4.$$

С учетом этого ограничения составляем расширенную задачу (табл. 6.4). Содержащийся в табл. 6.4 план не является опорным (в столбце свободных членов имеется отрицательный элемент —3/4). Поэтому прежде всего строим опорный план. Первый столбец выбираем за разрешающий. Определяем наименьшее симплексное отношение:

$$\min[7/8:3/8;\ -3/4:(-3/8)]=\min(14/3;\ 2)=2.$$

Таблица 6.4

	1	$-x_3$	$-x_4$
$x_1=$	7/4	3/8	−1/8
$x_2=$	7/4	−1/8	3/8
$x_5=$	−3/4	$\boxed{-3/8}$	−7/8
$f=$	21/4	1/8	5/8

Разрешающий элемент равен —3/8, что соответствует x_5. Проделав шаг модифицированных жордановых исключений с разрешающим элементом —3/8, получим новый план (табл. 6.5).

Найденный план $\bar{x}^*=(x_1^*;\ x_2^*)=(1;\ 2)$ со значением целевой функции $f_{\max}=5$ является оптимальным и целочисленным.

Таблица 6.5

	1	$-x_5$	$-x_4$
$x_1=$	1		
$x_2=$	2		
$x_3=$	2		
$f=$	5	1/3	1/3

Приведем графическое решение этой задачи (рис. 6.1):

$$f = x_1 + x_2 \text{ (max)};$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leqslant 7; \\ x_1 + 3x_2 &\leqslant 7; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1;\ x_2 = 0, \text{ или } 1, \text{ или } 2, \text{ или } 3, \ldots$$

Здесь дополнительное ограничение $3/8x_3 + 7/8x_4 \geqslant 3/4$ (табл. 6.4) относительно переменных x_1 и x_2 имеет вид $2x_1 + 3x_2 \leqslant 8$. Получаем это дополнительное ограничение относительно системы координат x_1Ox_2 так: из табл. 6.4 выписываем $x_5 = 3/8x_3 + 7/8x_4 - 3/4$. Поскольку $x_5 \geqslant 0$, тогда и $3/8x_3 + 7/8x_4 - 3/4 \geqslant 0$ или $3/8x_3 + 7/8x_4 \geqslant 3/4$.

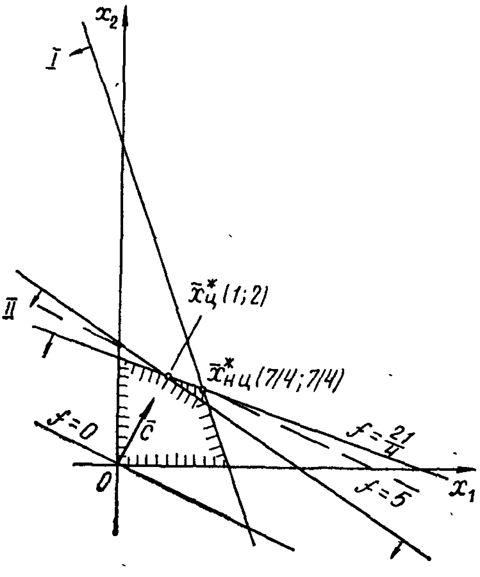

Рис. 6.1

Умножая обе части неравенства на 8, получим $3x_3 + 7x_2 \geqslant 6$. Подставляя значения x_3 и x_4 из табл. 6.1: $x_3 = (-3x_1 - x_2 + 7)$, $x_4 = (-x_1 - 3x_2 + 7)$, получим:

$$3 \cdot (-3x_1 - x_2 + 7) + 7 \cdot (-x_1 - 3x_2 + 7) \geqslant 6;$$

$$-9x_1 - 3x_2 + 21 - 7x_1 - 21x_2 + 49 \geqslant 6;$$

$$16x_1 + 24x_2 \leqslant 64;\quad 2x_1 + 3x_2 \leqslant 8.$$

Дополнительное ограничение «отсекает» часть допустимой области вместе с нецелочисленной вершиной $\bar{x}^*_{\text{н ц}}$ (на рис. 6.1 заштрихована), не затрагивая целочисленных точек области.

Пример 6.2. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделена 21 тыс. руб. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 37 м². Предприятие может заказать оборудование двух видов: более мощные машины типа А стоимостью 3 тыс. руб., требующие производственную площадь 6 м² (с учетом проходов) и обеспечивающие производительность 7 тыс. единиц продукции за смену, и менее мощные машины типа Б стоимостью 2 тыс. руб., занимающие площадь 3 м² и дающие за смену 4 тыс. единиц продукции.

Требуется рассчитать оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий при данных ограничениях максимум общей производительности участка.

Р е ш е н и е. Пусть x_1 — количество приобретаемых машин типа А, x_2 — типа Б. Задача математически сформулируется так: при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 21; \\ 6x_1 + 3x_2 &\leqslant 37; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ x_1, x_2 \text{ — целые числа;}$$

найти максимальное значение целевой функции

$$f = 7x_1 + 4x_2.$$

Составляем исходную жорданову таблицу (табл. 6.6).

Таблица 6.6

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_3 =$	21	3	2
$x_4 =$	37	$\boxed{6}$	3
$f =$	0	−7	−4

Проделав шаг модифицированных жордановых исключений с разрешающим элементом 6, придем к табл. 6.7.

Полученный план еще не оптимальный, ибо в f-строке имеется отрицательный элемент $(-1/2)$, план можно улучшить.

Таблица 6.7

	1	$-x_4$	$-x_2$
$x_3=$	5/2	$-1/2$	$\boxed{1/2}$
$x_1=$	37/6	1/6	1/2
$f=$	259/6	7/6	$-1/2$

Проделав шаг модифицированных жордановых исключений с разрешающим элементом 1/2, получим новый план (табл. 6.8).

Таблица 6.8

	1	$-x_4$	$-x_3$
$x_2=$	5	-1	2
$x_1=$	11/3	2/3	-1
$f=$	137/3	2/3	1

Все элементы f-строки неотрицательны. Критерий оптимальности выполняется.

Получили оптимальный план $\bar{x}^*=(x_1^*;\ x_2^*)=(11/3;\ 5)$ со значением целевой функции $f_{\max}=137/3$.

Однако решение не удовлетворяет условию целочисленности. Для переменной x_1, получившей нецелочисленное значение в плане, составляем уравнение, непосредственно вытекающее из табл. 6.8:

$$x_1=-2/3x_4+x_3+11/3.$$

Это уравнение, очевидно, должно быть справедливо и для целочисленного решения задачи.

Поскольку x_1 — целое число, то целым является и выражение в правой части уравнения, следовательно, величина правой части данного уравнения конгруэнтна нулю:

$$-2/3x_4+x_3+11/3\equiv 0$$

или

$$2/3x_4-x_3\equiv 11/3.$$

Учитывая свойства конгруэнтности, а также то, что x_3 и x_4 — целые числа, это выражение можно преобразовать в следующее:

$$\{2/3\}x_4+\{-1\}x_3\equiv\{11/3\}.$$

Отсюда получаем: $2/3x_4\equiv 2/3$. Поскольку x_4 — неотрицательное число, $2/3x_4=2/3$, или $4/3$, или $6/3$, ..., следовательно, $2/3x_4\geqslant 2/3$.

Полученное неравенство преобразуем в уравнение, которое добавляем к ограничениям задачи, получим так называемую расширенную задачу (табл. 6.9).

Таблица 6.9

	1	$-x_4$	$-x_3$
$x_2=$	5	-1	2
$x_1=$	11/3	2/3	-1
$x_5=$	$-2/3$	$\boxed{-2/3}$	0
$f=$	137/3	2/3	1

Повторив процесс решения задачи симплекс-методом применительно к расширенной задаче, получим новый оптимальный план (табл. 6.10).

Таблица 6.10

	1	$-x_5$	$-x_3$
$x_2=$	6		
$x_1=$	3		
$x_4=$	1		
$f=$	45	1	1

План $\bar{x}^*=(x_1;\ x_2)=(3,\ 6)$ со значением целевой функции $f_{max}=45$ является оптимальным и целочисленным. При данных ограничениях задачи максимум производительности производственного участка составляет $f_{max}=45$ тыс. единиц изделий и обеспечивается это приобретением 3 машин типа А и 6 машин типа Б, $x_4=1$ указывает на неиспользованную производственную мощность.

Графическое решение задачи представлено на рис. 6.2. Дополнительное ограничение $2/3x_4 \geqslant 2/3$ или $x_4 \geqslant 1$, отсекаю-

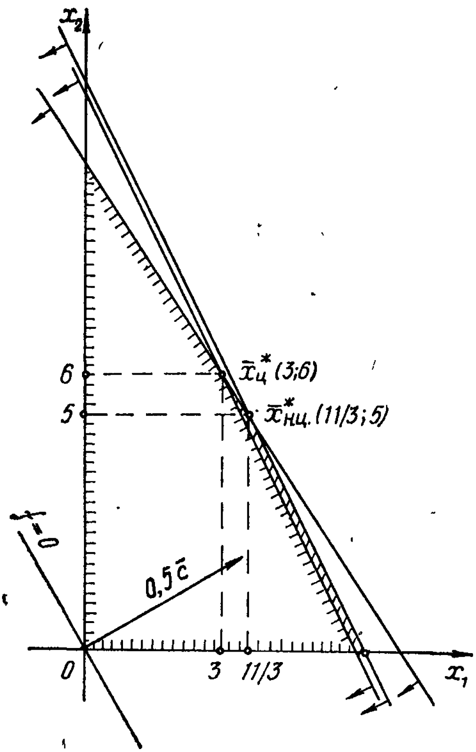

Рис. 6.2

щее дробную часть, относительно переменных x_1 и x_2 (см. табл. 6.6) имеет вид

$$-6x_1-3x_2+37 \geqslant 1$$

или

$$2x_1+x_2 \leqslant 12.$$

Отсеченная часть допустимой области на рис. 6.2 заштрихована.

Упражнения

Найти оптимальное целочисленное решение задач 6.1—6.8.

6.1. $f = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ (max);

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leqslant 25; \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 15; \end{aligned}\right\}$$

$x_j = 0$, или 1, или 2, ... $(j = \overline{1,3})$.

6.2. $f = 110x_1 + 90x_2$ (max);

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leqslant 10; \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 8; \\ x_2 &\leqslant 5; \end{aligned}\right\}$$

$x_j = 0$, или 1, или 2, ... $(j = \overline{1,2})$.

6.3. $f = x_1 + 2x_2 + x_3$ (min);

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\geqslant 3; \\ 2x_1 + x_2 &\geqslant 1; \\ 2x_2 + 3x_3 &\geqslant 4; \end{aligned}\right\}$$

$x_j = 0$, или 1, или 2, ... $(j = \overline{1,3})$.

6.4. $f = x_1 - x_2$ (max);

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1; \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 3; \end{aligned}\right\}$$

$x_j = 0$, или 1, или 2, ... $(j = \overline{1,4})$.

6.5. $f = x_4 - x_5$ (min);

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_4 - 2x_5 &= 1; \\ x_2 - 2x_4 + x_5 &= 2; \\ x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3; \end{aligned}\right\}$$

$x_j = 0$, или 1, или 2, ... $(j = \overline{1,5})$.

6.6. $f = 3x_1 + 2x_2 + x_3$ (min);

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &\geqslant 10; \\ 2x_1 + 4x_3 &\geqslant 14; \\ 2x_2 + x_3 &\geqslant 7; \end{aligned}\right\}$$

$x_j = 0$, или 1, или 2, ... $(j = \overline{1,3})$.

6.7. $f = 2x_1 + x_2 + x_3$ (max);

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 16; \\ x_1 + x_2 &< 7; \\ 3x_1 + 2x_3 &\geqslant 18; \end{aligned}\right\}$$

$x_j = 0$, или 1, или 2, ... $(j = \overline{1,3})$.

6.8. $f = 4x_1 + 3x_2$ (max);

$$\left.\begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 &\leqslant 88; \\ x_1 &\leqslant 22; \\ 5x_2 &\leqslant 90; \end{aligned}\right\}$$

$x_j = 0$, или 1, или 2, ... $(j = \overline{1, 2})$.

Глава 7. ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 7.1. Постановка задачи дробно-линейного программирования

При решении многих задач линейного программирования целевая функция представляет собой дробную функцию. Функция вида

$$f = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n}{q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_jx_j}{\sum_{j=1}^{n} q_jx_j}$$

называется *дробно-линейной.*

Математически задача дробно-линейного программирования формулируется так: даны целевая функция

$$f = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_jx_j}{\sum_{j=1}^{n} q_jx_j} \tag{7.1}$$

и система ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \ \ (i = \overline{1, m}); \tag{7.2}$$

$$x_j \geqslant 0 \ \ (j = \overline{1, n}). \tag{7.3}$$

Требуется среди всех неотрицательных решений системы (7.2) найти такое (план) $\overline{x}^* = (x_1^*; \dots; x_n^*)$, которое доставляет целевой функции (7.1) максимум или минимум.

Для простоты целевую функцию (7.1) представим в виде

$$f = \frac{f_1}{f_2}. \tag{7.4}$$

Система (7.2) при условии (7.3), как рассмотрено выше, определяет расход различного рода ресурсов, сырья и т. д., на которые налагаются ограничения $b_1, b_2, \ldots, b_m$. План производства продукции представляет собой вектор с неотрицательными компонентами $\bar{x}=(x_1; x_2; \ldots; x_n)$. Матрица $A=\|a_{ij}\|_{m\times n}$, составленная из коэффициентов при неизвестных системы (7.2), есть матрица затрат i-го ресурса на единицу продукции j-го вида.

Целевая функция (7.1) может выражать такие экономические показатели, как себестоимость, рентабельность и др. Например, хозяйство откармливает различный скот (коров, свиней, овец и т. д.). Выход мяса от одной головы j-го вида скота равен q_j ц, а стоимость откорма p_j. Если поголовье откармливаемого скота обозначить через x_j, то величина

$$f=\frac{p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n}{q_1x_1+q_2x_2+\ldots+q_nx_n}$$

определяет себестоимость 1 ц мяса. В данном случае требуется найти минимум дробно-линейной функции (минимальную себестоимость).

Если же в задаче известны затраты на производство продукции и ее стоимость, то легко найти чистый доход, а отношение чистого дохода к затратам определит рентабельность. В этом случае производство продукции должно быть организовано так, чтобы показатель рентабельности был максимальным.

Следует заметить, что в задачах дробно-линейного программирования объем выпускаемой продукции заранее не определен. В этом заключается их ценность, так как мы получаем оптимальный план производства на любой срок и для любого объема выпускаемой продукции. Дробно-линейная целевая функция, в частности переменная величина, определяемая знаменателем целевой функции $f_2\neq 0$, позволяет использовать и методы решения, специфические для этого раздела линейного программирования. Если объем выпускаемой продукции сделать постоянным, то получится обычная задача линейного программирования.

§ 7.2. Графический метод решения задач дробно-линейного программирования

Пусть дана задача дробно-линейного программирования для случая двух переменных:

$$f=\frac{p_1x_1+p_2x_2}{q_1x_1+q_2x_2}\ (\max); \qquad (7.5)$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leqslant b_1; \\ \cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\leqslant b_m; \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0. \tag{7.7}$$

Как и для линейного программирования, строим область допустимых решений (ОДР) системы (7.6) при условиях (7.7). Для построения целевой функции нужно ее выражение (7.5) упростить. Выразим x_2:

$$fq_1x_1 + fg_2x_2 = p_1x_1 + p_2x_2;$$

$$(fq_2 - p_2)x_2 = (p_1 - fq_1)x_1,$$

отсюда

$$x_2 = \frac{p_1 - fq_1}{fq_2 - p_2}x_1$$

или

$$x_2 = kx_1, \tag{7.8}$$

где

$$k = \frac{p_1 - fq_1}{fq_2 - p_2}.$$

Уравнение (7.8) представляет прямую с угловым коэффициентом, проходящую через начало координат. Если f принимает постоянное значение, $f = \text{const}$, то некоторое постоянное значение получит и коэффициент k, а прямая (7.8) займет на плоскости в прямоугольной системе координат определенное положение. При другом постоянном значении f прямая (7.8) займет иное положение. Она как бы повернется вокруг начала координат (рис. 7.1).

Выясним знак производной углового коэффициента k по отношению к f:

$$k' = \frac{p_2q_1 - p_1q_2}{(fq_2 - p_2)^2}.$$

Отсюда видно, что знаменатель дроби всегда положителен, а числитель не зависит от целевой функции f. Следовательно, производная k' имеет постоянный знак. При увеличении f коэффициент k будет или только возрастать, или только убывать, а прямая будет поворачиваться относительно начала координат.

Если направление вращения прямой (7.8) при возрастании целевой функции установлено, то в ОДР находим точку поворота прямой (7.8), в которой целевая функция достигает экстремума.

Рассмотрим графический метод решения задач дробно-линейного программирования на примере.

Пример 7.1. На плодоконсервном заводе из трех видов фруктов (яблоки, груши, сливы) изготовляют компот двух видов.

Количество фруктов, необходимое для приготовления 1 л компота, запас фруктов и затраты даны в табл. 7.1. Известно также, что яблок можно расходовать не более 500, а груш и слив — не менее 400 и 300 кг соответственно.

Таблица 7.1

Фрукты	Запас, кг	Расход (кг) на компот вида	
		I	II
Яблоки	500	0,3	0,2
Груши	400	0,2	0,3
Сливы	300	0,3	0,2
Затраты на 1 л компота, руб.		0,5	0,6

Требуется составить план производства компота двух видов и получить максимальную и минимальную себестоимость 1 л компота.

Решение. Обозначим x_1 — количество литров компота I вида, x_2 — количество литров компота II вида. Тогда система ограничений по расходу фруктов примет вид

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}3x_1+0{,}2x_2\leqslant 500; \\ 0{,}2x_1+0{,}3x_2\geqslant 400; \\ 0{,}3x_1+0{,}2x_2\geqslant 300; \end{array}\right\}$$

$$x_1\geqslant 0; \quad x_2\geqslant 0.$$

Затраты на производство компота

$$f_1=0{,}5x_1+0{,}6x_2.$$

Общий объем производства компота представится функцией

$$f_2=x_1+x_2.$$

Отношение общих затрат к общему объему производства даст себестоимость 1 л компота.

Таким образом, получим следующую экономико-математическую модель задачи:

$$f = \frac{0,5x_1 + 0,6x_2}{x_1 + x_2} \quad (\min);$$

$$\left.\begin{array}{l} 0,3x_1 + 0,2x_2 \leqslant 500; \\ 0,2x_1 + 0,3x_2 \geqslant 400; \\ 0,3x_1 + 0,2x_2 \geqslant 300; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

Строим ОДР (рис. 7.2). Чтобы определить, в какой точке

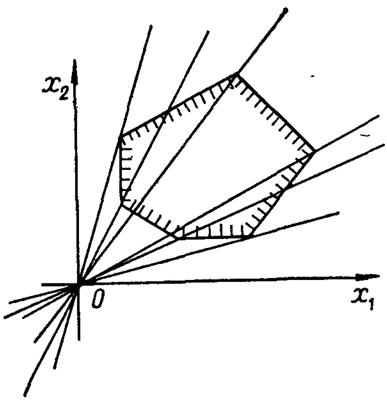

Рис. 7.1

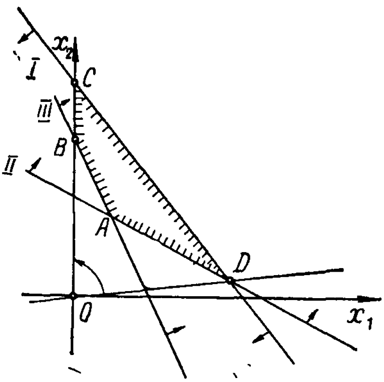

Рис. 7.2

ОДР целевая функция будет иметь экстремальное значение, выразим x_2:

$$x_2 = \frac{0,5 - f}{f - 0,6}\, x_1.$$

Угловой коэффициент

$$k = \frac{0,5 - f}{f - 0,6}.$$

Его производная

$$k' = \frac{0,1}{(f - 0,6)^2}.$$

Так как производная при любом значении f положительна, функция $k = \frac{0,5 - f}{f - 0,6}$ возрастающая; с увеличением f угловой коэффициент увеличивается. Это соответствует вращению прямой против часовой стрелки.

Таким образом, наибольшего значения целевая функция будет достигать в вершинах B и C области ОДР, т. е. максимальная себестоимость определяется во всех точках ребра BC. Координаты точек: $B(0;\ 1500)$; $C(0;\ 2500)$; значение целевой функции в этих точках: $f_{\max} = f(B) = f(C) = 0{,}6$ при $\overline{x}_1^* = (x_{11}^*;\ x_{12}^*) = (0{,}1500)$ или $\overline{x}_2^* = (x_{21};\ x_{22}) = (0;\ 2500)$. Максимальная себестоимость 1 л компота составляет 60 коп.

Минимальная себестоимость достигается в точке D области допустимых решений. Координаты точки $D(1400;\ 400)$, значение целевой функции в точке D

$$f_{\min} = f(D) = \frac{940}{1800} = \frac{47}{90} \approx 0{,}52.$$

Таким образом, минимальная себестоимость 1 л компота 52 коп., а максимальная 60 коп.

Из рис. 7.2 видно, что себестоимость 1 л компота остается постоянной, равной 60 коп., при производстве компота II вида от 1500 до 2500 л, т. е. $1500 \leqslant x_2 \leqslant 2500$.

Решение задач графическим методом может быть проще. Достаточно найти координаты крайних точек области допустимых решений, а затем вычислить значения целевой функции в этих точках и выбрать из них наибольшее или наименьшее (то, которое нас интересует).

§ 7.3. Решение задач дробно-линейного программирования симплекс-методом

Особенностью задач дробно-линейного программирования, как и задач линейного программирования, является то, что ограничения, налагаемые на переменные, линейны и экстремум достигается в крайней точке многогранника. Это сходство позволяет решать задачи дробно-линейного программирования обычным симплекс-методом с видоизмененным критерием оптимальности.

Покажем в общем виде, как используется симплекс-метод в дробно-линейном программировании. Пусть дана задача вида

$$f = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} q_j x_j} = \frac{f_1}{f_2}; \tag{7.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant a_i \quad (i = \overline{1,\ m}); \tag{7.10}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,\ n}). \tag{7.11}$$

Требуется среди всех неотрицательных решений системы (7.10) найти такое, при котором целевая функция принимает максимальное значение.

Как и в задаче линейного программирования, система (7.10) приводится к канонической форме введением балансовых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Получаем систему вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = a_i \quad (i = \overline{1, m})$$

или

$$y_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + a_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

Составляем исходную таблицу модифицированных жордановых исключений. При этом для целевой функции предусматриваются две строки f_1, f_2: в верхнюю строку f_1 заносятся коэффициенты при переменных числителя, а в нижнюю f_2 — коэффициенты при переменных знаменателя целевой функции (табл. 7.2).

Таблица 7.2

	1	$-x_1$	...	$-x_j$	...	$-x_n$
$y_1 =$	a_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...	...	...
$y_r =$	a_r	a_{r1}	...	a_{rj}	...	a_{rn}
...	...	...	...	...	...	...
$y_m =$	a_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}
$f_1 =$	0	$-p_1$	...	$-p_j$	...	$-p_n$
$f_2 =$	0	$-q_1$	...	$-q_j$	...	$-q_n$

Значение целевой функции для табл. 7.2 $f = \frac{f_1}{f_2} = \frac{0}{0}$; знаменатель целевой функции равен нулю, следовательно, план не может быть опорным. Это означает, что среди элементов столбца свободных членов имеются отрицательные. После k шагов модифицированных жордановых исключений получим опорный план, при этом преобразуются и строки f_1 и f_2.

Пусть имеем опорный план задачи (табл. 7.3), в которой все свободные члены $b_i \geqslant 0 \, (i = \overline{1, m})$. При этом опорном плане значение целевой функции

$$f=\frac{f_1}{f_2}=\frac{C}{T},\ T\neq 0.$$

Знаменатель целевой функции T всегда можно сделать положительным, поэтому будем считать, что $T>0$.

Таблица 7.3

	1	$-y_1$	...	$-x_s$	...	$-x_n$
$x_1=$	b_1	b_{11}	...	b_{1s}	...	b_{1n}
....	....	...	...	...	...	...
$y_r=$	b_r	b_{r1}	...	$\boxed{b_{rs}}$	...	b_{rn}
....	....	...	...	...	...	...
$y_m=$	b_m	b_{m1}	...	b_{ms}	...	b_{mn}
$f_1=$	C	c_1	...	c_s	...	c_n
$f_2=$	T	t_1	...	t_s	...	t_n

Опорное решение, отвечающее целевой функции $f=\frac{C}{T}$, получаем приравниванием верхних переменных нулю, а боковых переменных табл. 7.3 — свободным членам. Геометрически это отвечает крайней точке многогранника, из которой нужно перемещаться в следующую точку по направлению к оптимальной. Перемещение из одной точки в другую в направлении к точке оптимума аналитически соответствует шагу модифицированных жордановых исключений с некоторым разрешающим элементом. Задача заключается в том, чтобы установить правило выбора этого элемента.

Пусть, например, разрешающим элементом табл. 7.3 будет элемент b_{rs}. После шага модифицированных жордановых исключений получим новый план, для которого целевая функция будет иметь вид

$$f=\frac{f_1}{f_2}=\frac{C'}{T'},$$

где C' и T', вычисляемые по формуле прямоугольника, равны

$$C'=\frac{Cb_{rs}-b_rc_s}{b_{rs}};\quad T'=\frac{Tb_{rs}-b_rt_s}{b_{rs}}.$$

Приращение целевой функции определяется разностью

$$\Delta f=\frac{C'}{T'}-\frac{C}{T}=\frac{Cb_{rs}-b_rc_s}{Tb_{rs}-b_rt_s}-\frac{C}{T}=$$
$$=\frac{CTb_{rs}-Tb_rc_s-CTb_{rs}+Cb_rt_s}{T\,(Tb_{rs}-b_rt_s)}=\frac{Cb_rt_s-Tb_rc_s}{T\,(Tb_{rs}-b_rt_s)}.$$

В полученном выражении выделим отношение свободного члена к разрешающему элементу, т. е. $\frac{b_r}{b_{rs}}$. Для этого умножим и разделим полученное выражение на b_{rs}

$$\frac{Cb_rt_s-Tb_rc_s}{T\,(Tb_{rs}-b_rt_s)}\,\frac{b_{rs}}{b_{rs}}=\frac{b_{rs}\,(Ct_s-Tc_s)}{T\,(Tb_{rs}-b_rt_s)}\,\frac{b_r}{b_{rs}}=$$
$$=\frac{Tc_s-Ct_s}{TT'}\left(-\frac{b_r}{b_{rs}}\right).$$

Выражение в числителе Tc_s-Ct_s можно представить в виде определителя второго порядка, составленного из коэффициентов строк f_1 и f_2 столбца s и столбца свободных членов, т. е.

$$\Delta_s=\begin{vmatrix} c_s & C \\ t_s & T \end{vmatrix}=Tc_s-Ct_s.$$

Таким образом, приращение целевой функции в более упрощенном виде

$$\Delta f=\frac{\Delta_s}{TT'}\left(-\frac{b_r}{b_{rs}}\right);\quad \Delta f=-\frac{\Delta_s t}{TT'},$$

где $t=\frac{b_r}{b_{rs}}$ — наименьшее симплексное отношение, которое всегда должно быть положительным. Поскольку имеем опорный план, а это значит, что все $b_r\geqslant 0$, то и знаменатель b_{rs} для параметра t должен быть положительным.

Как мы уже отметили, знаменатель T всегда можно сделать положительным, а следовательно, и произведение TT' положительно (знак минус можно перенести в числитель для Δf). Поэтому знак приращения целевой функции будет зависеть от знака определителя второго порядка Δ_s. Исследуем эту зависимость.

1. $\Delta_s>0$, тогда $\Delta f<0$, т. е. приращение целевой функции отрицательно — целевая функция уменьшается на последующем шаге модифицированных жордановых исключений.

2. $\Delta_s<0$, тогда $\Delta f>0$ — приращение целевой функции положительно — целевая функция на последующем шаге модифицированных жордановых исключений увеличивается.

3. $\Delta_s=0$; целевая функция в этом случае не изменится, $\Delta f=0$.

Рассмотренные случаи позволяют сделать вывод, что критерием выбора разрешающего столбца служит определитель Δ_s.

Сформулируем алгоритм решения задач дробно-линейного программирования с помощью симплекс-метода:

1) *строим исходную таблицу модифицированных жордановых исключений* (табл. 7.2);

2) *строим опорный план* (табл. 7.3);

3) *для каждого столбца вычисляем значение определителя* Δ_j $(j=\overline{1, n})$ *и заносим эти значения в дополнительную строку, в которой в столбце свободных членов также помещаем и значение дробно-линейной целевой функции* (табл. 7.4);

Таблица 7.4

	1	$-y_1$ ... $-x_s$ ... $-x_n$
$x_1 =$	b_1	b_{11} ... b_{1s} ... b_{1n}
....	....	....
$y_r =$	b_r	b_{r1} ... b_{rs} ... b_{rn}
....	....	....
$y_m =$	b_m	b_{m1} ... b_{ms} ... b_{mn}
$f_1 =$	C	c_1 ... c_s ... c_n
$f_2 =$	T	t_1 ... t_s ... t_n
$\Delta_j =$	$\dfrac{C}{T}$	Δ_1 ... Δ_s ... Δ_n

4) *определяем разрешающий столбец, которому соответствует* $\max\limits_{\substack{j \\ \Delta_j<0}} |\Delta_j| = \Delta_s$ — *при решении задачи на максимум*;

5) *разрешающий элемент находим по наименьшему симплексному отношению*

$$\min_{\substack{i \\ b_{is}>0}} \frac{b_i}{b_{is}} = \frac{b_r}{b_{rs}}.$$

Имеем r-ю разрешающую строку и s-й разрешающий столбец, b_{rs} — *разрешающий элемент;*

6) *делаем шаг модифицированных жордановых исключений с разрешающим элементом* b_{rs}. *Строки* f_1 *и* f_2 *преобразуют-*

ся как и для целевой функции линейного программирования, а строка для определителей Δ_j оставляется свободной;

7) *вычисляем определители Δ_j $(j=\overline{1, n})$ и значение целевой функции. Если среди определителей Δ_j имеется хотя бы один отрицательный, делаем шаг модифицированных жордановых исключений, выбирая разрешающим столбцом тот, для которого определитель отрицателен;*

8) *процесс отыскания оптимального плана заканчивается тогда, когда все определители $\Delta_j \geqslant 0$.*

Пусть в задаче требуется найти минимум целевой функции

$$f=\frac{f_1}{f_2}.$$

Эту задачу можно решить двумя способами.

1. Изменить алгоритм и отыскивать минимум; за разрешающий брать столбец с положительным значением определителя Δ_j.

Разрешающая строка, как и для максимума целевой функции, определяется по минимальному симплексному отношению. Условием оптимальности плана служит неположительность определителей Δ_j $(j=\overline{1, n})$, т. е. $\Delta_j \leqslant 0$.

2. У целевой функции изменить знак, т. е. заменить его другим по формуле $f'=-f$ и решать задачу на максимум. Такая замена возможна для любой дробно-линейной функции. Легко заметить, что если целевая функция принимает максимальное значение в некоторой точке области допустимых решений, то при перемене знака целевой функции в этой же точке она будет принимать минимальное значение.

Пример 7.2. Найти максимальное и минимальное значения целевой функции

$$f=\frac{3x_1+2x_2}{x_1+x_2}$$

в точках $A(1; 2)$, $B(3; 4)$, $C(3; 5)$, $D(10; 2)$.

Решение. Значения целевой функции будут: $f \to 2\frac{1}{3}$, $2\frac{3}{7}$, $2\frac{3}{8}$, $2\frac{5}{6}$.

$$f_{\max}=2\frac{5}{6} \text{ в точке } D(10;\ 2).$$

Поменяем знак у целевой функции:

$$f'=-f;\quad f'=-\frac{3x_1+2x_2}{x_1+x_2}.$$

Значения целевой функции f' в данных точках: $f' \to -2\frac{1}{3}$, $-2\frac{3}{7}$, $-2\frac{3}{8}$, $-2\frac{5}{6}$.

$$f_{\min} = -2\frac{5}{6} \text{ в точке } D(10;\ 2).$$

Пример 7.3. Найти максимум целевой функции

$$f = \frac{x_1 - 3x_2 + x_3}{4x_1 + x_3}$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \qquad &\leqslant -1; \\ 5x_1 \qquad + 3x_3 &\leqslant 15; \\ x_1 + x_2 - \ x_3 &\leqslant -3; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad (j = \overline{1,3}).$$

Решение. Составляем исходную таблицу для модифицированных жордановых исключений (табл. 7.5).

Таблица 7.5

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$x_4 =$	-1	2	-1	0
$x_5 =$	15	5	0	3
$x_6 =$	-3	1	1	$\boxed{-1}$
$f_1 =$	0	-1	3	-1
$f_2 =$	0	-4	0	-1

Поскольку среди свободных членов табл. 7.5 имеются отрицательные, строим опорный план. За разрешающий столбец выберем, например, третий, для которого элемент -1 расположен в строке, соответствующей отрицательному свободному члену. Определяем наименьшее симплексное отношение:

$$\min(15/3;\ -3/-1) = \min(5;\ 3) = 3.$$

Проделав шаг модифицированных жордановых исключений с разрешающим элементом $a_{33} = -1$, получим табл. 7.6.

Таблица 7.6

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_6$
$x_4 =$	-1	2	$\boxed{-1}$	0
$x_5 =$	6	8	3	3
$x_3 =$	3	-1	-1	-1
$f_1 =$	3	-2	2	-1
$f_2 =$	3	-5	-1	-1

В столбце свободных членов есть отрицательный элемент. Строим опорный план. За разрешающий столбец выбираем второй. Определяем разрешающий элемент:

$$\min\left(\frac{-1}{-1};\ \frac{6}{3}\right) = \min\ (1;\ 2) = 1.$$

После шага модифицированных жордановых исключений получим опорный план (табл. 7.7).

Таблица 7.7

	1	$-x_1$	$-x_4$	$-x_6$
$x_2 =$	1	-2	-1	0
$x_5 =$	3	14	3	$\boxed{3}$
$x_3 =$	4	-3	-1	-1
$f_1 =$	1	2	2	-1
$f_2 =$	4	-7	-1	-1
$\Delta_j =$	1/4	15	9	-3

В табл. 7.7 все свободные члены неотрицательны, прибавим дополнительную строку, куда запишем значения определителей Δ_j и целевой функции f:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 7 = 15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 1 = 9;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 1 = 3;$$

$$f = \frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{4}.$$

Отрицательное значение определителя $\Delta_3 = -3$ указывает, что план еще не оптимален. Третий столбец, для которого $\Delta_3 = -3$, выбираем за разрешающий. Разрешающим элементом будет 3. Проделаем с ним шаг модифицированных жордановых исключений и получим новый план (табл. 7.8).

Таблица 7.8

	1	$-x_1$	$-x_4$	$-x_5$
$x_2 =$	1			
$x_6 =$	1			
$x_3 =$	5			
$f_1 =$	2	20/3	3	1/3
$f_2 =$	5	−7/3	0	1/3
$\Delta_j =$	2/5	114/3	15	1

Поскольку все определители Δ_j неотрицательны, то этот план оптимален. $f_{\max} = 2/5$ при плане $\overline{x}^* = (x_1^*;\ x_2^*;\ x_3^*) = (0;\ 1;\ 5)$.

Пример 7.4. Найти минимум целевой функции

$$f = \frac{x_1 + 3x_2}{2 + x_1 + x_2}$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4; \\ 3x_1 - x_2 + x_4 &= 6; \\ x_1 + x_2 + x_5 &= 3; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,5}).$$

Решение. Целевая функция представляет собой дробно-линейную неоднородную функцию. Свободный член знаменателя, равный 2, помещается в строку f_2 столбца свободных членов. Исходная таблица для модифицированных жордановых исключений имеет вид табл. 7.9.

Таблица 7.9

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_3 =$	-4	-1	$\boxed{-3}$
$x_4 =$	6	3	-1
$x_5 =$	3	1	1
$f_1 =$	0	-1	-3
$f_2 =$	2	-1	-1

Поскольку свободный член отрицателен, строим опорный план. Второй столбец выбираем за разрешающий. Определяем разрешающий элемент:

$$\min(-4/-3;\ 3/1) = \min(4/3;\ 3) = 4/3.$$

Имеем первую разрешающую строку, а элемент -3 есть разрешающий. После шага модифицированных жордановых исключений получим опорный план (табл. 7.10).

Таблица 7.10

	1	$-x_1$	$-x_3$
$x_2 =$	4/3	1/3	$-1/3$
$x_4 =$	22/3	$\boxed{10/3}$	$-1/3$
$x_5 =$	5/3	2/3	1/3
$f_1 =$	4	0	-1
$f_2 =$	10/3	$-2/3$	$-1/3$
$\Delta_j =$	6/5	8/3	-2

В первом столбце определитель $\Delta_1 = 8/3$ не отрицателен, значит, минимум целевой функции не достигнут. Разрешающий столбец — первый, соответствующий переменной x_1. Определяем разрешающий элемент:

$$\min (4/3:1/3;\ 22/3:10/3;\ 5/3:2/3) = \\ = \min (4;\ 11/5;\ 5/2) = 11/5.$$

Разрешающий элемент 10/3. Проделаем шаг модифицированных жордановых исключений, найдем новый план (табл. 7.11).

Таблица 7.11

	1	$-x_4$	$-x_3$
$x_2 =$ $x_1 =$ $x_5 =$	3/5 11/5 1/5		
$f_1 =$	4	0	−1
$f_2 =$	24/5	1/5	−2/5
$\Delta_j =$	5/6	−4/5	−16/5

В табл. 7.11 определители $\Delta_j < 0$ ($j = 1,2$); получен оптимальный план $\bar{x}^* = (x_1^*;\ x_2^*;\ x_3^*;\ x_4^*;\ x_5^*) = (11/5;\ 3/5;\ 0;\ 0;\ 1/5)$, для которого значение целевой функции $f_{\min} = \frac{5}{6}$.

Упражнения

7.1. Найти максимальное значение целевой функции

$$f = \frac{3x_1 + 4x_2}{x_1 + 2x_2 + 1}$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqslant 16; \\ x_1 + x_2 &\leqslant 10; \\ x_2 &\leqslant 6; \\ x_1 \quad &\leqslant 7; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0;\quad x_2 \geqslant 0.$$

7.2. Найти максимальное значение целевой функции

$$f=\frac{2x_1-x_2}{x_1+2x_2+1}$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3 \qquad &= 2; \\ 2x_1+\ x_2 \qquad +x_4 &= 6; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1,4}).$$

7.3. Найти максимальное значение целевой функции

$$f=\frac{x_1+2x_2+x_3}{x_2+2x_3}$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2-\ x_3 &\leqslant 1; \\ x_2+\ x_3 &\leqslant 2; \\ 2x_1+3x_2-2x_3 &\leqslant -2; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1,3}).$$

7.4. Найти максимальное значение целевой функции

$$f=\frac{x_1+4x_2-3x_3}{2x_1+3x_2-4x_3}$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+\ x_2+3x_3 &\leqslant 7; \\ 4x_1-3x_2-2x_3 &\geqslant 9; \\ x_1+2x_2-\ x_3 &= 2; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1,3}).$$

7.5. Найти минимальное значение целевой функции

$$f=\frac{x_1-2x_2+3x_3}{2x_1+x_2-x_3}$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2 \qquad &\geqslant 1; \\ x_1+\ x_2+2x_3 &= 5; \\ -x_1-3x_2 \qquad &\leqslant -2; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1,3}).$$

7.6. Найти максимальное и минимальное значения целевой функции

$$f=\frac{40x_1+30x_2}{x_1+x_2}$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} 0,3x_1+0,3x_2 &\geqslant 180; \\ 0,25x_1+0,5x_2 &\geqslant 200; \\ 0,5x_1 \qquad &\geqslant 200; \\ 0,4x_2 &\geqslant 120; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

7.7. На промышленном комплексе по производству мяса откармливают свиней трех пород. Все данные представлены в табл. 7.12.

Таблица 7.12

Вид корма	Запасы корма, ц	Требуемое количество корма (ц) для породы свиней		
		раннеспелой (до 1 года)	среднеспелой (до 1,5 лет)	позднеспелой (до 2 лет)
Грубые (сенная мука, травян.)	Не менее 8 000	3	2	3
Сочные (корнеплоды, картофель)	Не более 6 800	1	4	2
Комбикорма	Не менее 3 000	1	1	1
Стоимость откорма, руб.		90	100	140
Продуктивность, ц		1,5	2	2,5

Требуется найти такое поголовье свиней каждой породы, чтобы себестоимость 1 ц мяса была минимальной.

7.8. В цехе по производству консервированных фруктов изготовляют два вида компотов из трех видов фруктов (яблоки, груши и сливы). Перед отправкой в торговую сеть компоты разливают в банки: компот I вида в пятилитровые, II — в двухлитровые. Все данные, необходимые для решения задачи, приведены в табл. 7.13.

Таблица 7.13

Фрукты	Запас, кг	Расход фруктов (кг) для компота вида	
		I	II
Яблоки	Не более 650	1	0,5
Груши	Не более 245	0,3	0,25
Сливы	Не менее 800	0,75	1
Прибыль, получаемая от реализации 1 банки компота, руб.		1,3	0,5

Требуется составить такой план производства двух видов компота, для которого рентабельность была бы наибольшей, если известно, что затраты на пятилитровую банку составляют 5 руб., а на двухлитровую — 2 руб.

Глава 8. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 8.1. Постановка и геометрическая интерпретация задачи

Задачи параметрического программирования являются обобщением задач линейного программирования. Это обобщение состоит в том, что данные задач параметрического программирования считают не постоянными величинами, а функциями, определенным образом зависящими от некоторых параметров. Если предположить, например, что произведенная предприятием продукция подлежит хранению, то ее стоимость будет складываться из двух частей: а) постоянной — стоимости продукции на момент изготовления; б) переменной, зависящей от срока хранения продукции. *Целевую функцию задачи оптимального планирования* такого производства *можно выразить через коэффициенты, линейно зависящие от одного параметра*, в частности от времени t.

Часто на практике встречаются задачи, в которых значения коэффициентов целевой функции известны лишь приближенно. Представив их в виде линейных функций параметра t, можно изучить поведение решений задач при различных значениях этих коэффициентов. Аналогично можно провести исследование для случая, когда изменяются коэффициенты системы ограничений.

Рассмотрим зависимость от параметра t только коэффициентов целевой функции. Математически задачу в этом случае ставят следующим образом: пусть параметр $t \in [\alpha, \beta]$, где α и β — произвольные действительные числа. Необходимо найти для каждого t на отрезке $[\alpha, \beta]$ свой вектор $\bar{x}^* = (x_1^*; \ldots; x_n^*)$, максимизирующий

$$f_t = \sum_{j=1}^{n} (c_j + d_j t)\, x_j \tag{8.1}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant a_i \quad (i = \overline{1,m}); \\ &x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,n}), \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

В выражении (8.1) числа c_j и d_j известны и постоянны.

Остановимся на геометрической интерпретации задачи.

Пусть система ограничений (8.2) совместна и определяет выпуклый многогранник Ω. Уравнению $\sum_{j=1}^{n}(c_j+d_jt)\,x_j=0$ соответствует семейство гиперплоскостей, проходящих через начало координат. Если параметру придать некоторое значение $t=\alpha_0$, то гиперплоскость займет вполне определенное положение. Отодвигая ее от начала координат, в направлении возрастания функции, получим решение в точке A (рис. 8.1). При

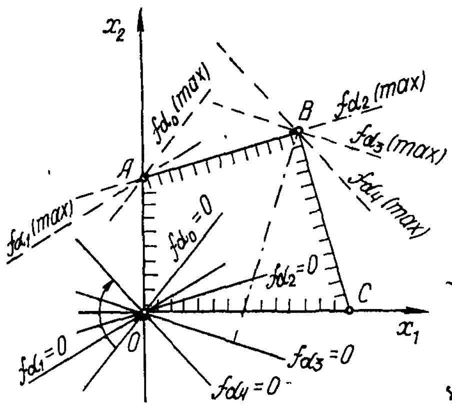

Рис. 81

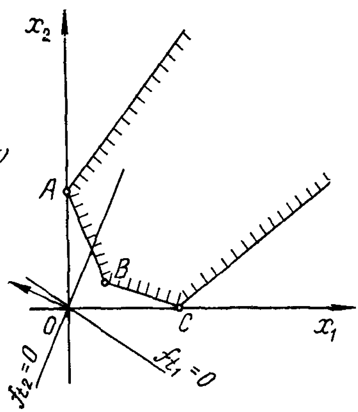

Рис 82

дадим параметру другое значение $t=\alpha_1$ и снова найдем на графике точку оптимума. Гиперплоскость $\sum_{j=1}^{n}(c_j+d_j\alpha_1)\,x_j=0$ вследствие изменения параметра t повернется вокруг начала координат на некоторый угол. Отодвигая эту гиперплоскость от начала координат, получим оптимальное решение в той же вершине A. Однако значение функции при $t=\alpha_1$ изменится, так как оно равно взвешенному отклонению точки A от исходной гиперплоскости. При $t=\alpha_2$ гиперплоскость будет параллельна ребру AB. Оптимальное решение в этом случае будет достигаться в любой точке отрезка AB. Увеличивая t дальше (при $t>\alpha_2$), получим оптимальное решение только в вершине B. Для этой вершины будет свой интервал изменения параметра t.

Из постановки и геометрической интерпретации задачи следует, что при различных значениях параметра t оптимальный план может оказаться не одним и тем же. Поэтому в задаче параметрического программирования нужно не просто найти оптимальное решение, а требуется разбить отрезок $[\alpha, \beta]$ на конечное число интервалов, содержащих такие значения t, для которых оптимальное базисное решение задачи достигается в одной и той же вершине многогранника Ω.

Если многогранник Ω неограничен, то гиперплоскость $f_t = 0$ при некоторых значениях параметра t может занять такое положение, что $f_t(\max)$ окажется неограниченным. Положение гиперплоскости $f_{t_1} = 0$ (рис. 8.2) соответствует неограниченному значению функции, а положение гиперплоскости $f_{t_2} = 0$ — максимальному.

§ 8.2. Графическое решение задачи

Пример 8.1. Определить интервал изменения параметра t и найти значения переменных x_1 и x_2, при которых максимум линейной функции $f_t = 4x_1 + (2+t)x_2$, $t \in [0;\ 8]$, достигается в одной и той же вершине области допустимых решений системы ограничений

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 &\leqslant 10; \\ x_1 + x_2 &\geqslant 5; \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 4; \\ 4x_1 + 5x_2 &\leqslant 40; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.$$

Решение. Находим область допустимых решений системы ограничений. Это многоугольник $ABCD$ (рис. 8.3). Придадим параметру самое малое значение $t=0$, тогда получим функцию с постоянными коэффициентами

$$f_0 = 4x_1 + 2x_2.$$

Максимальное значение этой функции достигается в вершине C.

Далее приравняем f_t нулю и найдем уравнение разрешающей прямой при любом t:

$$x_2 = -\frac{4}{2+t}x_1.$$

Запишем угловой коэффициент k_f этой прямой и исследуем его поведение при изменении параметра t:

$$k_f = -\frac{4}{2+t}.$$

Его начальное значение при $t=0$ будет $k_f=-2$.

Найдем производную углового коэффициента по параметру t:

$$(k_f)'_t = \left(-\frac{4}{2+t}\right)'_t = \frac{4}{(2+t)^2}.$$

Очевидно, при любом t производная положительна, и угловой коэффициент при увеличении t возрастает. Найдем предел его возрастания:

$$\lim_{t\to+\infty} k_f = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{4}{2+t}\right) = -0.$$

Так как при $t\to+\infty$ угловой коэффициент k_f приближается к нулю со стороны отрицательных значений, то разрешающая прямая поворачивается против часовой стрелки до предельного горизонтального положения. (Напомним, что при вертикальном положении прямой угловой коэффициент, как функ-

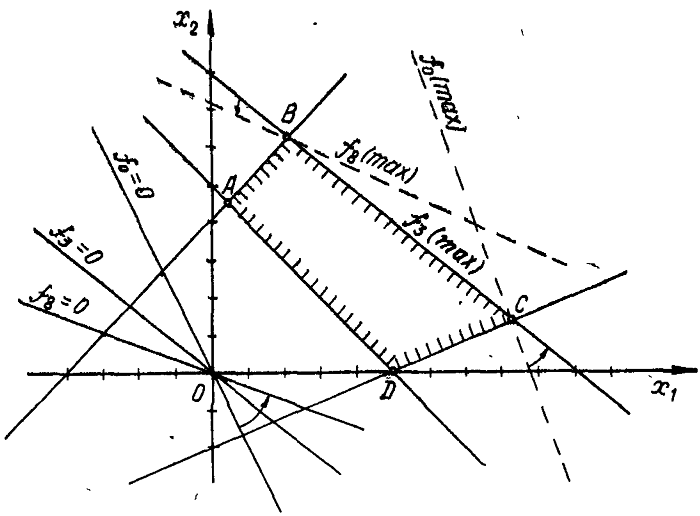

Рис 8.3

ция, терпит разрыв. При вращении прямой против часовой стрелки от оси абсцисс до вертикального положения угловой коэффициент возрастает от 0 до $+\infty$, при дальнейшем вращении прямой он возрастает от $-\infty$ до 0.)

В рассматриваемом примере при изменении параметра t от нуля до некоторого значения максимум функции будет в вершине C. Далее в некоторый фиксированный момент времени оптимум будет достигаться на отрезке BC, а затем он перейдет в точку B и останется в ней для всех больших значений t. Определим значение параметра t, при котором решение задачи окажется на отрезке BC.

Поскольку в этот момент прямая BC и разрешающая прямая должны быть параллельны, приравняем их угловые коэффициенты. Угловой коэффициент прямой BC $k_{BC} = -4/5$, следовательно, $-\frac{4}{2+t} = -4/5$, откуда $t = 3$.

Итак, при $0 \leqslant t < 3$ оптимальное решение задачи будет в вершине $C(8{,}3;\ 1{,}3)$, при $t = 3$ оно достигается на всем отрезке BC, а при $3 < t \leqslant 8$ — в точке $B(2{,}2;\ 6{,}2)$.

Упражнения

Решить графическим методом задачи:

8.1. $f_t = (2 + 2t)\,x_1 + (4 - 2t)\,x_2$ (max);

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 6; \\ x_2 &\leqslant 4; \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 10; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ t \in [1;\ 15].$$

8.2. $f_t = tx_1 + (1 + t)\,x_2$ (max);

$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + 4x_2 &\leqslant 12; \\ 4x_1 + x_2 &\leqslant 8; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ t \in [1;\ 7].$$

§ 8.3. Аналитическое решение задачи

Алгоритм решения задачи (8.1)—(8.2) состоит из двух этапов.

Этап I. *Параметру t дают фиксированное значение, например $t = \alpha$. Этим задача приводится к задаче линейного программирования. Решая эту задачу симплекс-методом, находят вершину, в которой f_t достигает максимума.*

Этап II. *Определяют интервал изменений параметра t, для которого максимум f_t достигается в одной и той же вершине многогранника Ω. Найденный интервал исключают из отрезка $[\alpha,\ \beta]$. Для оставшейся части отрезка снова решают задачу симплекс-методом, т. е. переходят к этапу I. Решение продолжается до тех пор, пока весь отрезок $[\alpha,\ \beta]$ не будет разбит на частичные интервалы.*

Подробно алгоритм решения рассмотрим на примере.

Пример 8.2. Найти интервалы изменения параметра t на отрезке $[\alpha, \beta]$, для которых $f_t = \sum_{j=1}^{n} (c_j + d_j t) x_j$ достигает максимума в одной и той же вершине области допустимых решений системы ограничений.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i = \overline{1,m});$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1,n}).$$

Решение. Этап I.

1. Полагаем $t = \alpha$. Тогда функция f_t будет иметь вид

$$f_\alpha = \sum_{j=1}^{n} (c_j + d_j \alpha) x_i. \tag{8.3}$$

Все данные задачи заносим в жорданову таблицу. В строку f_α этой таблицы в каждый столбец записываем число, равное сумме чисел c_j и $d_j\alpha$. Кроме того, добавим в таблицу две строки для записи функций f_t с произвольным параметром t (табл. 8.1). При этом в предпоследней строке записываем коэффициенты c_j, а в последней — d_j. Чтобы получить f_t, нужно умножить коэффициенты последней строки на t и сложить их с коэффициентами предпоследней.

Таблица 8.1

	1	$-x_1$	...	$-x_n$
$x_{n+1} =$	a_1			
...	...		(a_{ij})	
$x_{n+m} =$	a_m			
$f_\alpha =$	0	$c_1 + d_1\alpha$	...	$c_n + d_n\alpha$
$f_t =$	0	c_1	...	c_n
	0	d_1	...	d_n

2. Находим оптимальный план задачи обычным симплекс-методом, подвергая преобразованию и элементы последних двух строк.

Предположим, что план, представленный в табл. 8.2, является оптимальным. Тогда все коэффициенты f_α-строки неотрицательны:

$$p_j+q_j\alpha \geqslant 0.$$

Поскольку оптимальный план найден, переходим к выполнению действий этапа II.

Таблица 8.2

	1	$-x_{n+1}$	...	$-x_s$	$-x_{s+1}$	...	$-x_n$
$x_1=$ ... $x_r=$ $x_{r+1}=$ $x_{n+m}=$	b_1 ... b_r b_{r+1} b_{n+m}			(b_{ij})			
$f_\alpha=$	$P+Q\alpha$	$p_1+q_1\alpha$	...	$p_s+q_s\alpha$	$p_{s+1}+$ $+q_{s+1}\alpha$	...	$p_n+q_n\alpha$
$f_t=$	P	p_1	...	p_s	p_{s+1}	...	p_n
	Q	q_1	...	q_s	q_{s+1}	...	q_n

Этап II.

1. Находим значения параметра t, при которых план в табл. 8.2 будет оставаться оптимальным (максимум f_t достигается в той же вершине). Для этого необходимо, чтобы все коэффициенты функции f_t были неотрицательны:

$$\left.\begin{aligned} p_1+q_1t &\geqslant 0; \\ &\dots\dots \\ p_n+q_nt &\geqslant 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8.4)$$

Из системы (8.4) видно, что во всех случаях, кроме $q_j=0$ (при $q_j=0$ неравенство $p_j+q_jt\geqslant 0$ выполняется при любых значениях t; следовательно, на столбец, в котором находится $q_j=0$, можно не обращать внимания), границей изменения параметра t служит отношение $-\dfrac{p_j}{q_j}$.

Поэтому просматриваем элементы q_j последней строки таблицы: если все они больше нуля, переходим к пункту 2; если все они меньше нуля — к пункту 3; если же среди элементов q_j имеются и положительные, и отрицательные — к пункту 4.

2. Пусть все $q_j > 0$. Среди отношений $-\frac{p_j}{q_j}$ выбираем наибольшее. Верхней границы в этом случае для t не существует. Таким образом,

$$\alpha_1 = \max\left(-\frac{p_j}{q_j}\right) \leqslant t < +\infty = \alpha_2. \tag{8.5}$$

В интервале $[\alpha_1, \alpha_2)$ функция f_t достигает максимума в той же вершине, что и при $t=\alpha$; следовательно, $t \in [\alpha_1, \alpha_2)$.

3. Пусть все $q_j < 0$. Среди отношений $-\frac{p_j}{q_j}$ выбираем наименьшее. Если взять $t \leqslant \min\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)$, то все условия (8.4) будут удовлетворены. Нижней границы для t в этом случае не существует, поэтому его можно уменьшать бесконечно. Значит,

$$\alpha_1 = -\infty < t \leqslant \min\left(-\frac{p_j}{q_j}\right) = \alpha_2. \tag{8.6}$$

Как и прежде, $t \in (\alpha_1, \alpha_2]$.

4. Пусть среди элементов q_j имеются как положительные, так и отрицательные. Разделим систему неравенств (8.4) на две подсистемы соответственно знакам коэффициентов q_j. Тогда из подсистемы неравенств с $q_j > 0$ получим $\max\left(-\frac{p_j}{q_j}\right) \leqslant t$, а из второй подсистемы с $q_j < 0$ будем иметь $t \leqslant \min\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)$.

Следовательно, вся система неравенств (8.4) будет удовлетворяться, если t будет принимать значения:

$$\alpha_1 = \underbrace{\max\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)}_{(q_j > 0)} \leqslant t \leqslant \underbrace{\min\left(-\frac{p_j}{q_j}\right)}_{(q_j < 0)} = \alpha_2. \tag{8.7}$$

В этом случае выделенный интервал, в котором функция достигает максимума в той же вершине, что и при $t=\alpha$, является отрезком, $t \in [\alpha_1, \alpha_2]$.

5. Сравниваем полученный интервал $[\alpha_1, \alpha_2]$ с заданным $[\alpha, \beta]$. Независимо от значения α_1 левой границей первого

интервала будет α, так как α_1 больше α быть не может. Если $\alpha_2 \geqslant \beta$, то весь интервал $[\alpha, \beta]$ попадает внутрь интервала $[\alpha_1, \alpha_2]$, и задача решена. Для любого значения параметра $t \in [\alpha, \beta]$ максимум функции Z_t достигается в одной и той же вершине (рис. 8.4).

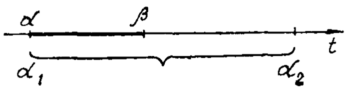

Рис. 8.4

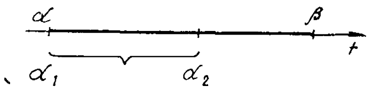

Рис 8 5

6. Если $\alpha_2 < \beta$, то в интервале $[\alpha, \alpha_2]$ максимум функции Z_t будет в найденной вершине (рис. 8.5).

Исключаем этот интервал из рассмотрения и решаем задачу для оставшегося интервала $[\alpha_2, \beta]$. Для этого t даем значение $t = \alpha_2$ и заменяем строку f_α строкой f_{α_2}. В результате замены получим новую таблицу (табл. 8.3).

Таблица 8.3

	1	$-x_{n+1}$	...	$-x_s$	$-x_{s+1}$	...	$-x_n$
$x_1 =$	b_1						
...	...						
$x_r =$	b_r			(b_{ij})			
$x_{r+1} =$	b_{r+1}						
...	...						
$x_{n+m} =$	b_{m+n}						
$Z_{\alpha_2} =$	$P + Q_{\alpha_2}$	$p_1 + q_1\alpha_2$	...	$p_s + q_s\alpha_2$	$p_{s+1} + q_{s+1}\alpha_2$	...	$p_n + q_n\alpha_2$
$Z_t =$	P	p_1	...	p_s	p_{s+1}	...	p_n
	Q	q_1	...	q_s	q_{s+1}	...	q_n

За разрешающий столбец в новой таблице выбирается тот, по которому определено значение $t = \alpha_2$ (в этом столбце на пересечении с f_{α_2}-строкой находится элемент, равный нулю). Если нули находятся в нескольких столбцах, то за разрешающий можно брать любой из них.

Разрешающий элемент находим по наименьшему симплексному отношению и делаем один шаг модифицированных жордановых исключений. Получим следующее по порядку оптимальное решение, так как все коэффициенты в строке f_{α_2} при преобразовании не изменятся.

Для найденного решения снова определяем интервал изменения параметра t, для чего переходим к пункту 1.

Если в разрешающем столбце не окажется положительных коэффициентов, то функция f_t при $t>\alpha_2$ неограничена; задача на оставшемся интервале $[\alpha_2, \beta]$ решения не имеет.

Примечание. При отыскании оптимального решения для $t=\alpha$ (при выполнении пункта 2 этапа I алгоритма) может оказаться, что функция f_α сверху не ограничена. В этом случае в разрешающем столбце j_0 коэффициент f_α-строки отрицателен $(p_{j_0}+q_{j_0}\alpha<0)$, а все остальные коэффициенты столбца j_0 неположительны.

При значениях $t>\alpha$ на пересечении строки f_t и столбца j_0 будет элемент $(p_{j_0}+q_{j_0}t)$. Нас интересуют значения этого элемента, так как они определяют поведение функции при $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$. Выберем такое значение $t=t_0$, при котором коэффициент $p_{j_0}+q_{j_0}t=0$. Отсюда получаем, что $t_0=-\frac{p_{j_0}}{q_{j_0}}$.

Если значение элемента $q_{j_0}\leqslant 0$, то для всех $t\geqslant\alpha$ коэффициент разрешающего столбца в строке f_t будет отрицательным $(p_{j_0}+q_{j_0}t<0)$. Следовательно, на всем заданном отрезке $[\alpha, \beta]$ целевая функция f_t неограничена (задача решения не имеет).

Если элемент $q_{j_0}>0$, то при $\alpha\leqslant t<t_0$ коэффициент, находящийся в разрешающем столбце и f_t-строке, будет отрицательным. Значит, и в этом случае целевая функция неограничена и задача решения не имеет.

При значении $t=t_0$ коэффициент $p_{j_0}+q_{j_0}t=0$, а при дальнейшем увеличении t он будет положительным. К отрезку $[t_0, \beta]$ применяем последовательно весь алгоритм решения задачи.

Пример 8.3. Найти решение задачи из примера 8.1 при изменении параметра t на отрезке $[0, 12]$.

Решение. Полагаем $t=0$. Тогда

$$f_0=4x_1+2x_2 \ (\max).$$

Заносим условие задачи в табл. 8.4 и решаем ее симплекс-методом. Опуская подробности, приведем оптимальное решение (табл. 8.5): $x_1=25/3$; $x_2=4/3$.

Определим значения параметра t, при которых оптимальное решение будет в той же вершине, что и при $t=0$.

Так как в последней строке элемент $q_1=-2/15<0$, а $q_2=1/15>0$, то для определения значений t, при которых максимум будет достигаться в найденной вершине, подставим соответствующие значения в соотношение (8.7), получим

$$-12=\left(-\frac{4/5}{1/15}\right)\leqslant t\leqslant\left(-\frac{2/5}{-2/15}\right)=3.$$

Таблица 8.4

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_3 =$	10	2	−5
$x_4 =$	−5	−1	−1
$x_5 =$	4	−1	1
$x_6 =$	40	4	5
$f_0 =$	0	−4	−2
$f_t =$	0	−4	−2
	0	0	−1

Таблица 8.5

	1	$-x_3$	$-x_6$
$x_4 =$	14/3	1/30	7/30
$x_1 =$	25/3	1/6	1/6
$x_5 =$	11	3/10	1/10
$x_2 =$	4/3	−2/15	1/15
$f_0 =$	36	2/5	4/5
$f_t =$	36	2/5	4/5
	4/3	−2/15	1/15

Здесь $\alpha_1 = -12$, а $\alpha_2 = 3$. Полученный интервал меньше заданного $[0, 12]$, поэтому его исключаем из дальнейшего рассмотрения и решаем задачу для оставшегося интервала $[3, 12]$. Для этого даем t значение $t=3$ и вычисляем для него строку f_3. Занесем элементы f_3-строки в табл. 8.6. Все прочие элементы таблицы оставляем без изменений.

Таблица 8.6

	1	$-x_3$	$-x_6$
$x_4 =$	14/3	1/30	7/30
$x_1 =$	25/3	1/6	1/6
$x_5 =$	11	$\boxed{3/10}$	1/10
$x_2 =$	4/3	−2/15	1/15
$f_3 =$	40	0	1
$f_t =$	36	2/5	4/5
	4/3	−2/15	1/15

Таблица 8.7

	1	$-x_5$	$-x_6$
$x_4 =$	31/9		
$x_1 =$	20/9		
$x_3 =$	110/3		
$x_2 =$	56/9		
$f_3 =$	40	0	1
$f_t =$	64/3	−4/3	2/3
	56/9	4/9	1/9

В первом столбце и f_3-строке табл. 8.6 находится нуль, поэтому этот столбец берем за разрешающий (при $t>3$ на месте нуля первым появится отрицательное число, и план перестанет быть оптимальным). Находим разрешающий элемент по наименьшему симплексному отношению и переходим к новой таблице (табл. 8.7).

План $x_1=20/9$, $x_2=56/9$ в табл. 8.7 оптимален, так как все элементы f_3-строки неотрицательны. В последней строке все элементы $q_j>0$, следовательно, применяем формулу (8.3) и определяем, что

$$\alpha_2=\max\left(-\frac{-4/3}{4/9};\ -\frac{2/3}{1/9}\right)\leqslant t<+\infty=\alpha_3,\ \text{т.е. } 3\leqslant t<+\infty.$$

Так как значение $\alpha_3>\beta$, то задача решена.

Итак, при $0\leqslant t\leqslant 3$ максимальное значение функции достигается в вершине $C(25/3;\ 4/3)$, при $3\leqslant t\leqslant 12$ максимальное значение функции достигается в вершине $B(20/9;\ 56/9)$ (рис. 8.3). При значении $t=3$ оптимум достигается в вершинах B и C, а также в их выпуклой линейной комбинации.

Упражнения

8.3. Решить аналитически задачи параметрического программирования, условия которых заданы: а) в задаче 8.1; б) в задаче 8.2.

Решить задачи:

8.4. $f_t=(1+t)x_1+(2-t)x_2+(2-3t)x_3+(1-2t)x_4$ (max), $t\in[1,20]$;

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3-x_4&\leqslant 5;\\ x_1+2x_2+x_4&\leqslant 7;\\ x_1+x_3+2x_4&\leqslant 3;\end{aligned}\right\}$$

$$x_j\geqslant 0\ (j=\overline{1,4}).$$

8.5. $f_t=(10+10t)x_1+(9+t)x_2+(7-2t)x_3$ (max), $t\in[1,10]$;

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2&\leqslant 5;\\ 2x_1+x_3&\leqslant 17;\\ x_1+2x_2+3x_3&\leqslant 40;\end{aligned}\right\}$$

$$x_j\geqslant 0\ (j=\overline{1,3}).$$

8.6. $f_t=(3+2t)x_1+(4+t)x_2+(1+t)x_3$ (max), $t\in[0,5]$;

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2&\leqslant 500;\\ x_2+x_3&\leqslant 550;\\ x_2&\leqslant 200;\end{aligned}\right\}$$

$$x_j\geqslant 0\ (j=\overline{1,3}).$$

Глава 9. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 9.1. Постановка задачи нелинейного программирования

Рассмотрим конкретный пример задачи нелинейного программирования.

Пример 9.1. Предприятие может выпускать два вида изделий. На их изготовление идет три типа ресурсов. Запасы ресурсов на предприятии, плановые нормы их расхода a_{ij} $(i=\overline{1,3};\ j=1,2)$, плановая себестоимость c_j $(j=1,2)$ и оптовые цены указаны в табл. 9.1 (все данные в расчете на 1 тыс. шт. изделий).

Таблица 9.1

Тип ресурса	Запас ресурса	Нормы расхода ресурсов на изделие вида	
		1	2
I	100	10	20
II	120	20	10
III	150	20	20
Себестоимость, руб.		5	10
Цена, руб.		7	13

Из-за брака в процессе производства расход ресурсов зависит от объема x_j $(j=1,2)$ производства изделий и в первом приближении выражается линейной функцией $a_{ij}+x_j$, а себестоимость продукции — функцией $c_j+0{,}1x_j$. Изделия могут выпускаться в любых соотношениях, так как сбыт обеспечен.

Составить план выпуска изделий, обеспечивающий получение максимальной прибыли.

Решение. На изготовление планируемых к выпуску x_1 и x_2 единиц изделий 1-го и 2-го видов соответственно (за единицу изделия примем 1 тыс. шт.) будет израсходовано

$(10+x_1)x_1+(20+x_2)x_2$ единиц ресурса I типа; $(10+x_1)$ и $(20+x_2)$ — расход ресурса I типа на единицу изделия соответственно 1-го и 2-го видов. По условию

$$(10+x_1)x_1+(20+x_2)x_2 \leqslant 100$$

или

$$10x_1+x_1^2+20x_2+x_2^2 \leqslant 100. \qquad (9.1)$$

Аналогичным образом получаем ограничения по другим типам ресурсов:

$$20x_1+x_1^2+10x_2+x_2^2 \leqslant 120; \qquad (9.2)$$

$$20x_1+x_1^2+20x_2+x_2^2 \leqslant 150. \qquad (9.3)$$

В результате реализации единицы изделия 1-го вида предприятие получит прибыль $[7-(5+0{,}1x_1)]$ руб.; единицы изделия 2-го вида — прибыль $[13-(10+0{,}1x_2)]$ руб. Общая прибыль f предприятия составит

$$f=[7-(5+0{,}1x_1)]x_1+[13-(10+0{,}1x_2)]x_2$$

или

$$f=2x_1+3x_2-0{,}1x_1^2-0{,}1x_2^2. \qquad (9.4)$$

Итак, задача свелась к нахождению неотрицательных x_1^* и x_2^*, удовлетворяющих нелинейным ограничениям (9.1) — (9.3) и доставляющих максимум нелинейной функции (9.4).

В целевой функции и ограничениях переменные содержатся в степенях выше первой. Это характерный признак задачи нелинейного программирования.

Общая задача нелинейного программирования ставится следующим образом: *требуется найти значения n переменных $x_1, \ldots, x_n$, которые удовлетворяют m уравнениям и неравенствам*

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)\ \{\leqslant,\ =,\ \geqslant\}\ b_i\ (i=\overline{1,m}) \qquad (9.5)$$

и максимизируют (минимизируют) функцию

$$z=f(x_1, \ldots, x_n). \qquad (9.6)$$

Предполагается, что вид функций $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ известен, а b_i — заданные постоянные. Величины m и n между собой не связаны, так что m может быть больше, меньше или равно n. В каждом из ограничений (9.5) сохраняется только один из знаков: $\leqslant$, $=$ или $\geqslant$. Обычно некоторые или все переменные удовлетворяют условию неотрицательности.

В отличие от линейных задач, в нелинейных допустимая область может быть невыпуклой, может иметь бесконечное число крайних точек, целевая функция может достигать экстремума не только на границе, но и внутри области и, более того, иметь несколько локальных экстремумов. Этими причинами объясняется отсутствие общих методов, подобных симплекс-методу в линейном программировании, позволяющих решать любые задачи нелинейного программирования. Вместе с тем отдельные специальные типы нелинейных задач достаточно хорошо изучены. Некоторые методы их решения мы рассмотрим ниже.

Упражнения

В следующих задачах составить математическую модель.

9.1. Определить место строительства завода между двумя пунктами сбыта, расстояние между которыми 100 км, и размер поставок в каждый из пунктов, если валовой выпуск продукции завода составляет 150 единиц. Зависимость продажной цены x_i $(i=1, 2)$ единицы продукции в каждом из пунктов сбыта и затрат на перевозки единицы продукции от расстояния y_i между заводом и пунктом сбыта задаются табл. 9.2.

Таблица 9.2

Пункт сбыта	Продажная цена, руб.	Затраты на перевозки, руб.
1	$15-0,1x_1$	$1,5+0,1y_1$
2	$12-0,08x_2$	$1,5+0,05y_2$

9.2. Найти оптимальный план выпуска двух видов продукции с учетом ограниченных ресурсов сырья (120 кг), электроэнергии (280 квт·ч) и оборудования (300 станко-часов) при следующих нормах расхода на единицу продукции: сырья 3 и 2 кг/ед., электроэнергии 4 и 7 квт·ч и оборудования $50-5x_1$ и $20-4x_2$, где x_1 и x_2 — искомое число производимых единиц 1-го и 2-го вида.

§ 9.2. Метод множителей Лагранжа

В математическом анализе задачи типа (9.5)—(9.6) называют *задачами на условный экстремум*. Если среди ограничений (9.5) нет неравенств и условий неотрицательности или дискретности переменных, $m<n$, функции f и φ_i непрерывны и имеют частные производные по крайней мере второго порядка, то задача приводится к виду:

$$z=f(x_1, \dots, x_n) \quad \max(\min); \tag{9.7}$$

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n)=b_i \quad (i=\overline{1, m}). \tag{9.8}$$

Эти задачи нелинейного программирования частного вида называют *классическими задачами оптимизации.* Их можно решать, по крайней мере в принципе, методами дифференциального исчисления.

В простейшем случае *условным экстремумом функции* $f(x_1, x_2)$ *называется максимум или минимум этой функции, достигнутый при условии, что* x_1 *и* x_2 *удовлетворяют дополнительному условию (уравнению связи)*

$$\varphi(x_1, x_2) = b.$$

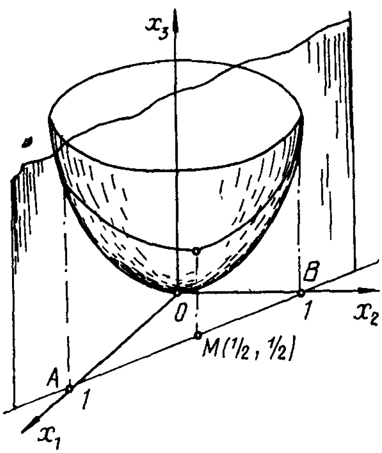

Рис. 9.1

Чтобы лучше уяснить различие между условным и безусловным (обычным) экстремумом, рассмотрим пример (рис. 9.1). Функция $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ определяет параболоид вращения. Ее безусловный минимум равен 0 и достигается в начале координат. Присоединим ограничение $x_1 + x_2 = 1$. Графически этому уравнению на плоскости x_1Ox_2 отвечает прямая AB. Теперь задача состоит в том, чтобы на линии $x_1 + x_2 = 1$ найти точку M, в которой значение данной функции является наименьшим. Эта точка и будет точкой условного минимума. В данном случае такой точкой будет $M(1/2;\ 1/2)$ и ей соответствует $f_{min} = 1/2$. Таким образом, в первом случае мы имеем наименьшую из всех аппликат, во втором — из аппликат, отвечающих точкам прямой AB.

Условный экстремум функции $f(x_1, x_2)$ при наличии дополнительного ограничения $\varphi(x_1, x_2) = b$ находят с помощью так называемой *функции Лагранжа*

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda[b - \varphi(x_1, x_2)], \tag{9.9}$$

где λ — неотрицательный постоянный множитель (множитель Лагранжа), безусловный экстремум которой совпадает с условным экстремумом данной функции $f(x_1, x_2)$. Объясняется это тем, что для точек (x_1, x_2), удовлетворяющих условию $\varphi(x_1, x_2) = b$, второе слагаемое в (9.9) обращается в 0, и тогда $L = f$. Для остальных же точек $L \neq f$. Отсюда и следует, что задача на определение условного экстремума функции $f(x_1, x_2)$ может быть заменена нахождением обычного экстремума функции (9. 9), ибо в области допустимых решений функцию $f(x_1, x_2)$ можно заменить функцией Лагранжа.

Необходимое условие экстремума сводится к существованию решения системы трех уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= b - \varphi(x_1, x_2) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9.10)$$

с тремя неизвестными x_1, x_2, λ, из которой можно, вообще говоря, определить эти неизвестные. Есть и достаточные условия, при выполнении которых решение (x_1; x_2; λ) системы (9.10) определяет точку (стационарную), в которой f достигает экстремума. Этот вопрос решается на основе изучения знака второго дифференциала d^2L функции (9.9). Поскольку в стационарной точке полный дифференциал функции $\varphi(x_1, x_2)$ равен нулю, т. е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 = 0 \ (dx_1^2 + dx_2^2 \neq 0,$$

и, кроме того, $\partial^2 L/\partial \lambda^2 = 0$, то второй дифференциал функции (9.9)

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} dx_2^2.$$

Функция $f(x_1, x_2)$ имеет в стационарной точке (x_1; x_2; λ) условный максимум, если в ней $d^2L < 0$, и условный минимум, если $d^2L > 0$.

Аналогично находится условный экстремум функции трех и большего числа переменных при наличии одного или нескольких дополнительных ограничений (число которых, однако, должно быть меньше числа переменных). Здесь приходится вводить в функцию Лагранжа столько неопределенных множителей, сколько имеется дополнительных уравнений связи.

Укажем последовательность решения классической задачи оптимизации методом множителей Лагранжа применительно к общей задаче (9.7)—(9.8):

1) составляется функция Лагранжа

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \\ + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i [b_i - \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)];$$

2) находятся все стационарные точки функции L из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_j}&=\frac{\partial f}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}=0\ (j=\overline{1,n});\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}&=b_i-\varphi_i(x_1,\ \dots,\ x_n)=0\ (i=\overline{1,m});\end{aligned}\right\}$$

3) из стационарных точек функции L, взятых без координат $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, выбираются такие, в которых функция f имеет условные экстремумы при наличии ограничений (9.8). Этот выбор осуществляется, например, с помощью достаточных условий.

Пример 9.2. Найти условный экстремум функции $f=6-4x_1-3x_2$, если $x_1^2+x_2^2=1$.

Решение. Геометрически задача сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений аппликаты f плоскости $f=6-4x_1-3x_2$ для точек ее пересечения с цилиндром $x_1^2+x_2^2=1$ (рис. 9.2).

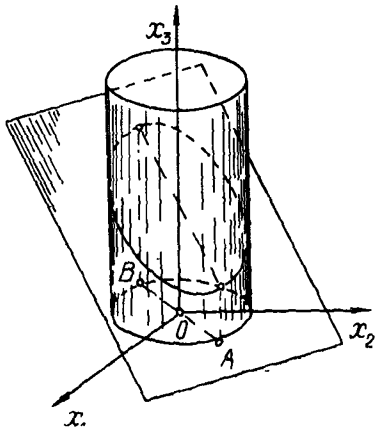

Рис. 9.2

1) Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x_1,\ x_2,\ \lambda)=(6-4x_1-3x_2)+\\+\lambda(1-x_1^2-x_2^2);$$

2) необходимые условия дают систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\partial L/\partial x_1&=\ -4\ -2x_1=0;\\ \partial L/\partial x_2&=\ -3\ -2x_2=0;\\ \partial L/\partial \lambda&=1-x_1^2-x_2^2=0,\end{aligned}\right\}$$

решая которую, находим:

$$\lambda'=-5/2,\ x_1'=4/5,\ x_2'=3/5;$$

$$\lambda''=5/2,\ x_1''=-4/5,\ x_2''=-3/5;$$

3) так как $\partial^2 L/\partial x_1^2=-2\lambda$; $\partial^2 L/\partial x_2^2=-2\lambda$; $\partial^2 L/\partial x_1\partial x_2=0$, то $d^2L=-2\lambda dx_1^2-2\lambda dx_2^2=-2\lambda(dx_1^2+dx_2^2)$.

Если $\lambda' = -5/2$, $x_1' = 4/5$, $x_2' = 3/5$, то $\partial^2 L > 0$ и, значит, в точке $A(4/5;\ 3/5)$ функция f имеет условный минимум. Если же $\lambda'' = 5/2$, $x_1'' = -4/5$, $x_2'' = -3/5$, то $d^2L < 0$ и в точке $B(-4/5;\ -3/5)$ функция f имеет условный максимум. При этом $f_{\max} = 11$, $f_{\min} = 1$.

Множителям Лагранжа можно придать экономический смысл. Доказывается, что если в условиях (9.8) величины b_i будут меняться, то выполняется соотношение $\partial f_{\max}/\partial b_i = \lambda_i$ $(i=\overline{1,m})$. Отсюда, *если f интерпретировать как доход или стоимость, b_i — как затраты некоторых ресурсов, множители λ_i будут показывать, как изменится максимальный доход (или минимальная стоимость), если количество i-го вида ресурсов увеличится на единицу.*

Метод множителей Лагранжа обобщается на случай, когда переменные неотрицательны и некоторые ограничения заданы в форме неравенств. Однако это обобщение имеет преимущественно теоретическое значение и не дает конкретных вычислительных приемов.

Упражнения

Найти точки условного экстремума следующих функций:

9.3. $f = x_1x_2$, если $x_1 + x_2 = 1$.

9.4. $f = x_1/2 + x_2/3$, если $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

9.5. $f = x_1^2 + x_2^2$, если $x_1/2 + x_2/3 = 1$.

9.6. $f = x_1 - 2x_2 + 2x_3$, если $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$.

9.7. $f = x_1x_2^2x_3^3$, если $x_1 + x_2 + x_3 = 12$.

9.8. $f = x_1x_2 + x_2x_3$, если $x_1^2 + x_2^2 = 2$, $x_2 + x_3 = 2$
$x_j \geqslant 0$ $(j = \overline{1,3})$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функций, аргументы которых связаны указанными условиями:

9.9. $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$, если $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$; $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.

9.10. $f = x_1x_2x_3$, если $x_1 + x_2 + x_3 = 5$; $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 8$.

§ 9.3. Градиентные методы

Вообще говоря, *градиентные методы* можно применять к любой задаче нелинейного программирования. Но они приводят лишь к локальному экстремуму, а поэтому оказываются более эффективными при решении задач выпуклого программирования, где всякий локальный экстремум есть одновременно и глобальный.

В качестве основной в теории выпуклого программирования обычно рассматривается задача отыскания вектора $\bar{x}^* = (x_1^*; \ldots ; x_n^*)$, который удовлетворяет условиям

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,n});$$

$$\varphi_i(\bar{x}) \leqslant 0 \quad (i = \overline{1,m})$$

и доставляет глобальный минимум функции

$$z = f(\bar{x});$$

функции f и φ_i предполагаются гладкими и выпуклыми.

Если f — вогнутая функция, а φ_i — выпуклые функции, то получаем соответственную задачу: найти вектор $\bar{x}^* = (x_1^*; \ldots x_n^*)$, удовлетворяющий условиям $\bar{x} \geqslant 0$, $\varphi_i(\bar{x}) \leqslant 0$ $(i = \overline{1,m})$ и доставляющий глобальный максимум функции $z = f(\bar{x})$.

Множество точек $\bar{x} = (x_1, \ldots , x_n)$, удовлетворяющих условиям сформулированных задач, является выпуклым.

Таким образом, *задачи выпуклого программирования являются задачами минимизации выпуклой функции (или максимизации вогнутой функции) на выпуклом множестве, определяемом указанными выше условиями.*

Если функция $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{x}_0$, то *градиентом* $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}_0$ называется n-мерный вектор

$$\operatorname{grad} f(\bar{x}_0) = \bar{g}_0 = \nabla f(\bar{x}_0) = (\partial f(\bar{x}_0)/\partial x_1, \ \ldots , \ \partial f(\bar{x}_0)/\partial x_n).$$

Градиент в каждой точке $\bar{x}_0$, в которой он существует, *направлен по нормали к линии уровня поверхности* $f(\bar{x})$ (рис. 9.3) и показывает *направление наискорейшего возрастания функции* в данной точке. Если градиент отличен от нуля, то он указывает направление, небольшое перемещение по которому будет увеличивать значение функции $f(\bar{x})$.

Вектор $-\nabla f(\bar{x}_0)$, противоположный градиенту, называется *антиградиентом* и указывает направление *наискорейшего убывания* $f(\bar{x})$.

Для выпуклой функции необходимым и достаточным условием оптимальности точки $\bar{x}^*$ является равенство нулю градиента функции в этой точке, т. е. $\nabla f(\bar{x}^*) = 0$.

Градиентный метод основан на простой идее. Если заранее известно, что $f(\bar{x})$ имеет в допустимой области единственный экстремум, то поиск точки, в которой он достигается, целесообразно проводить так. В допустимой области взять произвольную точку $\bar{x}_0$ и с помощью градиента (антиградиента) определить направление, в котором $f(\bar{x})$ возрастает (убывает) с наибольшей скоростью (рис. 9.4). Сделав небольшой «шаг» в найденном направлении, перейти в новую точку $\bar{x}_1$. Потом снова определить наилучшее направление для перехода в очередную точку $\bar{x}_2$ и т. д. Иначе говоря, надо построить последо-

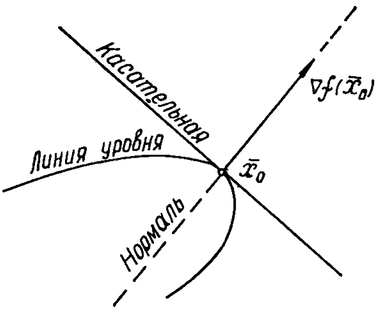

Рис. 9.3

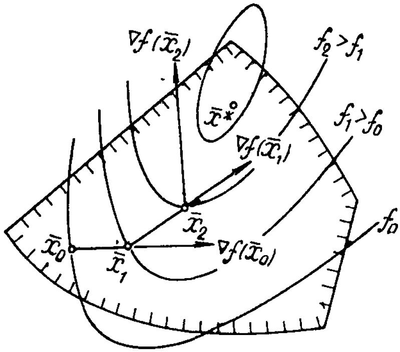

Рис. 9.4

вательность точек $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ... так, чтобы она сходилась к точке экстремума $\bar{x}^*$, т. е. для точек последовательности выполнялись условия $f(\bar{x}_0) < f(\bar{x}_1) < f(\bar{x}_2) < \ldots$ $(f(\bar{x}_0) > f(\bar{x}_1) > f(\bar{x}_2) > \ldots)$.

Величина «шага» из точки $\bar{x}_0$ по направлению градиента $\nabla f(\bar{x}_0)$ (антиградиента $-\nabla f(\bar{x}_0)$) определяется значением параметра λ в уравнении прямой

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \nabla f(\bar{x}_0)\lambda \quad (\bar{x} = \bar{x}_0 + [-\nabla f(\bar{x}_0)]\lambda), \tag{9.11}$$

проходящей через $\bar{x}_0$ параллельно градиенту (антиградиенту). Значение λ можно выбрать, исходя из конкретных условий задачи или руководствуясь следующими соображениями: перемещение по прямой (9.11) в новую точку $\bar{x}_1$ сопровождается изменением функции f на величину Δf, которая зависит от выбранного значения λ; значение λ^*, при котором приращение Δf достигает наибольшей величины, можно определить, используя необходимый признак экстремума Δf:

$$d\Delta f/d\lambda = \nabla f(\bar{x}_1)\nabla f(\bar{x}_0) = 0. \tag{9.12}$$

Градиентные методы, как правило, дают точное решение за бесконечное число шагов и только в некоторых случаях — за конечное.

Пример 9.3. Минимизировать

$$f = -6x_1 - 4x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 18$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\leqslant 24; \\ x_1^2 - 5x_1 + x_2^2 &\leqslant 6; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = 1,2).$$

Решение. Возьмем в допустимой области произвольную точку, например $\bar{x}_0 = (1,5;\ 3)$. Она действительно принадлежит заданной области, так как $4 \cdot 1,5 + 3 \cdot 3 = 15 < 24$ и $1,5^2 - 5 \cdot 1,5 + 3^2 = 3,75 < 6$. В этой точке $f(\bar{x}_0) = 8,25$.

Вычислим координаты антиградиента функции в точке $\bar{x}_0$: $-\partial f/\partial x_1 = 6 - 2x_1$; $-\partial f/\partial x_2 = 4 - 2x_2$. Итак, $-\nabla f(\bar{x}) = (6 - 2x_1;\ 4 - 2x_2)$, а в точке $\bar{x}_0$: $-\nabla f(\bar{x}_0) = (6 - 2 \cdot 1,5;\ 4 - 2 \cdot 3) = (3;\ -2)$.

Поскольку $-\nabla f(\bar{x}_0) \neq 0$, то $\bar{x}_0$ не является точкой экстремума.

Переместимся из $\bar{x}_0$ вдоль антиградиента по прямой (9.11) в новую точку $\bar{x}_1$. Для определения координат точки $\bar{x}_1 = (1,5 + 3\lambda;\ 3 - 2\lambda)$ нужно выбрать значение параметра λ. Используем условие (9.12), найдем: $d\Delta f/d\lambda = [-\nabla f(\bar{x}_1)] \times [-\nabla f(\bar{x}_0)] = [6 - 2(1,5 + 3\lambda);\ 4 - 2(3 - 2\lambda)] \cdot (3;\ -2) = 13 - 26\lambda = 0$, откуда $\lambda = 0,5$. Так как $d^2\Delta f/d\lambda^2 = -26 < 0$, то при $\lambda = 0,5$ изменение Δf значения функции f достигает наибольшей величины. Получающаяся при этом точка $\bar{x}_1 = (1,5 + 3 \cdot 0,5;\ 3 - 2 \cdot 0,5) = (3;\ 2)$ принадлежит допустимой области $(4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 18 < 24;\ 3^2 - 5 \cdot 3 + 2^2 = -2 < 6)$.

В точке $\bar{x}_1$ антиградиент $-\nabla f(\bar{x}_1) = (6 - 2 \cdot 3;\ 4 - 2 \cdot 2) = (0;\ 0)$. Значит, никакими перемещениями из точки $\bar{x}_1$ функцию f уменьшить нельзя и $\bar{x}_1$ — искомая точка минимума $\bar{x}^*$. Итак, $\bar{x}^* = (3;\ 2)$; $f_{\min} = 5$.

На рис. 9.5 приведена геометрическая иллюстрация решения задачи. На рис. 9.5, *а* дано наглядное изображение поверхности f (параболоид вращения), на рис. 9.5, *б* поверхность f изображена линиями уровня (концентрическими окружностями). Для большей наглядности рисунка антиградиент $-\nabla f(\bar{x}_0) = (3;\ -2)$ построен при начале координат. Траектория наискорейшего спуска $\bar{x}_0\bar{x}_1$ в точку минимума $\bar{x}^*$ параллельна антиградиенту. Граничными линиями допустимой области являются оси координат, прямая $4x_1 + 3x_2 = 24$ и дуга окружности $x_1^2 - 5x_1 + x_2^2 = 6$. Для построения этой дуги уравнение окружности преобразовано к виду $(x_1 - 2,5)^2 + (x_2 - 0)^2 = 3,5^2$. Откуда следует, что центр окружности находится в точке $(2,5;\ 0)$, а радиус равен 3,5.

Для построения линий уровня поверхности f ее уравнение приведено к виду $(x_1-3)^2+(x_2-2)^2=f-5$. Очевидно, что линиями пересечения поверхности с плоскостями, параллельными плоскости x_1Ox_2, т. е. при $f=\text{const}$, будут окружности. При $f=6, 7, 8, 9, 10$ их радиусы соответственно равны 1; 1,41; 1,73; 2; 2,24. На плоскости x_1Ox_2 они имеют общий центр (3; 2).

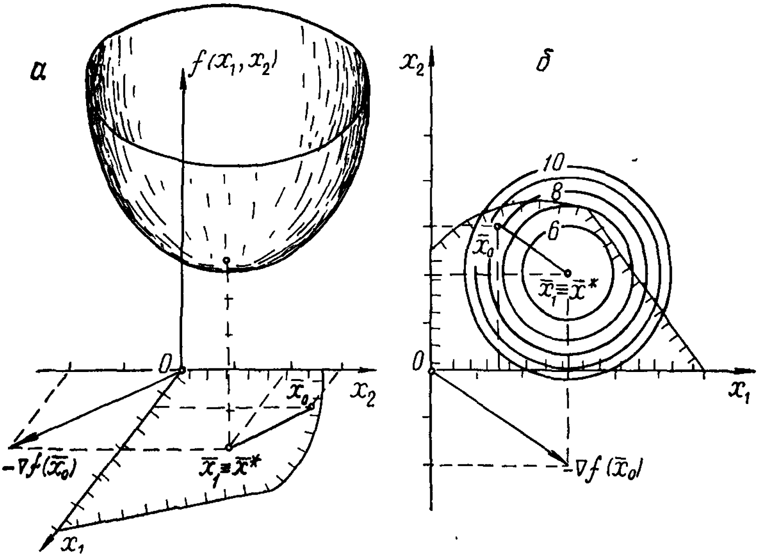

Рис. 9.5

Рассмотрим последовательность решения нелинейной задачи с линейными ограничениями в случае, когда экстремум достигается на границе допустимой области. Итак,

$$z = f(\bar{x}) \ (\max); \tag{9.13}$$

$$\bar{a}_i \bar{x} \leqslant a_{i0} \, (i = \overline{1,m}); \tag{9.14}$$

$$\bar{x} \geqslant 0, \tag{9.15}$$

где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$; $\bar{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$. Предполагается, что $f(\bar{x})$ имеет непрерывные частные производные в каждой точке допустимой области.

Начнем с геометрической интерпретации процесса решения (рис. 9.6). Предположим, что начальная точка $\bar{x}_0$ расположена внутри заданной области. Мы можем двигаться из точки $\bar{x}_0$ в направлении градиента $\nabla f(\bar{x}_0)$ до тех пор, пока не достигнем границы области. Вообще говоря, двигаться до границы не обязательно, так как максимум $f(\bar{x})$ может достигаться и до встречи с ней. В нашем случае $f(\bar{x})$ все время возрастает, поэтому остановиться нужно в точке $\bar{x}_1$ на граничной прямой. Как видно из рис. 9.6, дальше двигаться в направлении градиента нельзя, ибо мы выйдем из допустимой области. Поэтому необходимо найти вектор $\bar{r}_1$, составляющий с вектором $\nabla f(\bar{x}_1)$

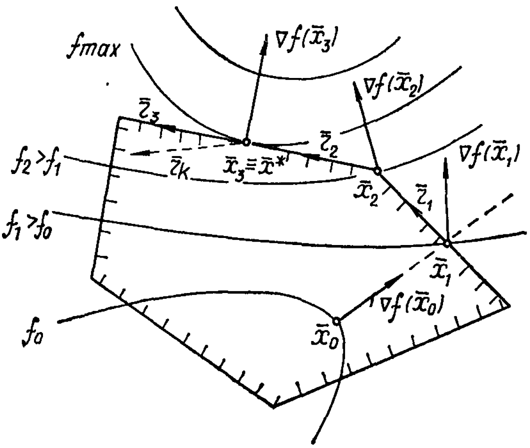

Рис. 9.6

наименьший острый угол по сравнению с любым вектором, выходящим из точки $\bar{x}_1$ и лежащим в допустимой области. Аналитически такой вектор находят из условия максимизации скалярного произведения $\nabla f(\bar{x}_1)\cdot\bar{r}_1$ (точнее, косинуса угла между указанными векторами), что равносильно минимизации острого угла между векторами $\nabla f(\bar{x}_1)$ и $\bar{r}_1$, ибо чем больше косинус острого угла, тем меньше сам угол. В данном случае вектор $\bar{r}_1$, указывающий наивыгоднейшее направление, совпадает с граничной прямой. Таким образом, на следующем шаге мы двигаемся вдоль граничной прямой до тех пор, пока функция f возрастает; в нашем случае — до точки $\bar{x}_2$. Из рис. 9.6 видно, что далее следует перемещаться в направлении вектора $\bar{r}_2$, т. е. вдоль следующей граничной прямой, до точки $\bar{x}_3$. Здесь процесс заканчивается, так как, судя по чертежу, в точке $\bar{x}_3$ функция $f(\bar{x})$ имеет локальный максимум. В этой точке $f(\bar{x})$ достигает также глобального максимума в рассматриваемой области. Градиент $\nabla f(\bar{x}_3)$ в точке максимума $\bar{x}_3=\bar{x}^*$ составляет тупой угол с любым вектором $\bar{r}_k$ из допустимой области, проходящим через точку $\bar{x}_3$, поэтому косинус его, а значит, и скалярное произведение $\nabla f(\bar{x}_3)\cdot\bar{r}_k$ будут отрицательными за исключением одного случая. Для вектора $\bar{r}_3$, направленного по граничной прямой, скалярное произведение $\nabla f(\bar{x}_3)\cdot\bar{r}_3=0$, так как $\nabla f(\bar{x}_3)$ и $\bar{r}_3$ взаимно перпендикулярны. Это равенство и свидетельствует о том, что в точке $\bar{x}_3$ функция $f(\bar{x})$ достигла максимума.

Обратимся к аналитическому решению задачи (9.13)—(9.15). Предположим, что в допустимой области выбрана некоторая точка $\bar{x}_0=(x_{01}; \ldots ; x_{0n})$, причем $\nabla f(\bar{x}_0)=\bar{d}_0\neq 0$. Если она расположена внутри области, то все ограничения (9.14)—(9.15) выполняются как строгие неравенства и перемещаться в следующую точку целесообразно в направлении градиента $\bar{d}_0$, т. е. по прямой (9.11). Чтобы найти координаты новой точки $\bar{x}_1$ на этой прямой, нужно так определить значение параметра $\lambda>0$, чтобы координаты этой точки $\bar{x}_1=\bar{x}_0+\bar{d}_0\lambda$ прежде всего удовлетворяли ограничениям (9.14), (9.15) задачи. С этой целью решается система линейных неравенств

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_i(\bar{x}_0+\bar{d}_0\lambda) &\leqslant a_{i0}\ (i=\overline{1,m}); \\ \bar{x}_0+\bar{d}_0\lambda &\geqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{9.16}$$

и находится интервал возможных значений параметра λ, при которых точка $\bar{x}_1$ будет принадлежать допустимой области. Далее в этом интервале определяется такое значение λ^*, при котором $f(\bar{x}_0+\bar{d}_0\lambda^*)$ имеет локальный максимум по λ. Для этого либо решается уравнение

$$d\Delta f/d\lambda=\nabla f(\bar{x}_0+\bar{d}_0\lambda)\bar{d}_0=0, \tag{9.17}$$

когда перемещение осуществляется вдоль градиента, либо аналогичное уравнение

$$d\Delta f/d\lambda=\nabla f(\bar{x}_0+\bar{r}\lambda)\bar{r}=0, \tag{9.18}$$

когда движение происходит по направлению $\bar{r}\neq\bar{d}_0$.

Если в направлении градиента функция $f(\bar{x})$ возрастает до самой границы, то точка $\bar{x}_1$ окажется на граничной прямой. В таком случае двигаться в направлении градиента и дальше нельзя, ибо сразу будут нарушены некоторые из ограничений (9.14), (9.15). Определением координат точки $\bar{x}_1$ завершается первый этап решения задачи.

Второй этап (как и первый!) начинается с выбора наилучшего направления перемещения из имеющейся точки $\bar{x}_1$. Для определения допустимого направления $\bar{r}_1$ перемещения из $\bar{x}_1$, сопровождающегося увеличением значения $f(\bar{x})$, нужно решить следующую вспомогательную задачу математического программирования: максимизировать

$$T_1=\nabla f(\bar{x}_1)\cdot\bar{r}_1 \tag{9.19}$$

при ограничениях

$$\bar{a}_i\bar{r}_1\leqslant 0 \tag{9.20}$$

для тех i, при которых

$$\bar{a}_i \bar{r}_1 = a_{i0}; \qquad (9.21)$$

$$|\bar{r}_1| = 1. \qquad (9.22)$$

Здесь $\bar{r}_1 = (r_{11}; \ \dots \ ; r_{1n})$, $|\bar{r}| = \sqrt{r_{11}^2 + \ \dots \ + r_{1n}^2}$.

В результате будет найден вектор $\bar{r}_1$, составляющий с градиентом $\nabla f(\bar{x}_1)$ наименьший угол.

Условие (9.21) говорит о том, что точка $\bar{x}_1$ принадлежит границе допустимой области, а условие (9.20) означает, что перемещение из $\bar{x}_1$ направлено внутрь или по границе допустимой области. Условие нормализации (9.22) необходимо для ограничения величины $\bar{r}_1$, так как иначе значение функции (9.19) можно сделать сколь угодно большим. Рассматриваются различные формы условий нормализации. В зависимости от этого задача (9.19)—(9.22) может быть линейной или нелинейной.

После определения направления $\bar{r}_1$, аналогично описанному выше, отыскивается наилучшее значение λ_1^* и находится следующая точка $\bar{x}_2$ и т. д. Процесс прекращается по достижении точки $\bar{x}_k$, в которой

$$\max T_k = \nabla f(\bar{x}_k) \cdot \bar{r}_k = 0.$$

Пример 9.4. Максимизировать

$$f = x_1 + 2x_2 - 0{,}5x_1^2 - 0{,}5x_2^2 - 5$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 6; \\ x_1 + 4x_2 &\leqslant 5; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = 1,2).$$

Решение. Пусть оптимизационный поиск начинается с точки $\bar{x}_0 = (1{,}5;\ 0{,}5)$. Эта точка лежит внутри допустимой области, ибо $2 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 0{,}5 = 4{,}5 < 6$ и $1{,}5 + 4 \cdot 0{,}5 = 3{,}5 < 5$. При этом $f(\bar{x}_0) = -3{,}75$.

За направление перемещения в следующую точку $\bar{x}_1$ принимаем направление градиента $\nabla f(\bar{x}) = (1 - x_1;\ 2 - x_2)$, координаты которого в точке $\bar{x}_0$ равны: $\bar{d}_0 = (-0{,}5;\ 1{,}5) \neq \bar{0}$.

Координаты точки $\bar{x}_1 = (x_{11};\ x_{12})$ можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} x_{11} &= x_{01} + d_{01}\lambda = 1{,}5 - 0{,}5\lambda; \\ x_{12} &= x_{02} + d_{02}\lambda = 0{,}5 + 1{,}5\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (9.23)$$

Найдем значения параметра λ, при которых точка $\bar{x}_1$ будет принадлежать допустимой области. Система (9.16) в данном случае имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} 2(1{,}5-0{,}5\lambda)+3(0{,}5+1{,}5\lambda) &\leqslant 6;\\ (1{,}5-0{,}5\lambda)+4(0{,}5+1{,}5\lambda) &\leqslant 5;\\ 1{,}5-0{,}5\lambda &\geqslant 0;\\ 0{,}5+1{,}5\lambda &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая ее, находим $-0{,}3333 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}2727$. Нас интересуют лишь неотрицательные значения параметра λ, поэтому в полуинтервале $(0;\ 0{,}2727]$ найдем значение λ^*, при котором достигается наибольшее изменение Δf функции f, вызванное перемещением из точки $\bar{x}_0$ в точку $\bar{x}_1$. В соответствии с (9.17) имеем

$$d\Delta f/d\lambda = \nabla f(\bar{x}_1)\bar{d}_0 =$$
$$= (-0{,}5+0{,}5\lambda;\ 1{,}5-1{,}5\lambda)(-0{,}5;\ 1{,}5) = 0.$$

или

$$d\Delta f/d\lambda = 2{,}5-2{,}5\lambda = 0,$$

откуда $\lambda=1$. Однако $\lambda=1$ не принадлежит полуинтервалу $(0;\ 0{,}2727]$, поэтому $\lambda^*=0{,}2727$.

Новая точка $\bar{x}_1$ в соответствии с (9.23) имеет координаты: $\bar{x}_1=(1{,}3636;\ 0{,}9091)$ и находится на граничной прямой, отвечающей второму неравенству системы ограничений, т. е. тому, которому соответствует взятое нами значение λ^*. В точке $\bar{x}_1$ функция принимает значение $f(\bar{x}_1)=-3{,}1612$, причем $f(\bar{x}_1) > f(\bar{x}_0)$. На этом заканчивается первый этап решения.

В точке $\bar{x}_1$ градиент $\nabla f(\bar{x}_1)=(-0{,}3636;\ 1{,}0909)$, но вдоль него перемещаться нельзя, так как сразу выйдем из допустимой области (рис. 9.7). Поэтому нужно найти другое направление движения. Соответствующий вектор $\bar{r}_1=(r_{11};\ r_{12})$ будет решением задачи (9.19)—(9.22). В данном случае она формулируется так: максимизировать

$$T_1 = \nabla f(\bar{x}_1)\bar{r}_1 = (-0{,}3636;\ 1{,}0909)(r_{11};\ r_{12}) =$$
$$= -0{,}3636r_{11}+1{,}0909r_{12}$$

при ограничениях

$$\bar{a}_2\bar{r}_1 = (1;\ 4)(r_{11};\ r_{12}) = r_{11}+4r_{12} = 0;$$

$$|\bar{r}_1| = \sqrt{r_{11}^2+r_{12}^2} = 1.$$

Поскольку точка $\bar{x}_1$ располагается только на одной (второй) граничной прямой ($i=2$): $x_1+4x_2=5$, условие (9.20) записывается в форме равенства.

Система ограничительных уравнений получившейся задачи имеет всего два решения: (—0,9700; 0,2425) и (0,9700; 0,2425).

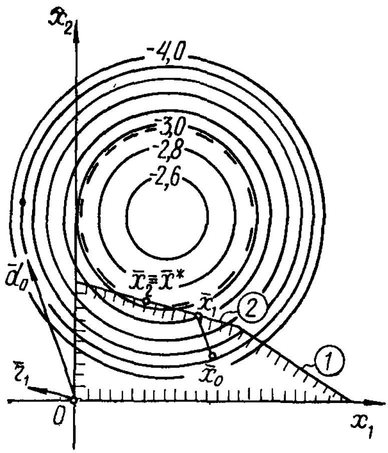

Рис. 97

Непосредственной подстановкой их в функцию T_1 устанавливаем, что максимум $T_1 \neq 0$ и достигается при (—0,9700; 0,2425). Таким образом, перемещаться из $\bar{x}_1$ нужно вдоль вектора $\bar{r}_1=(-0,9700;\ 0,2425)$, т. е. вдоль второй граничной прямой.

Для определения координат следующей точки $\bar{x}_2$:

$$\left.\begin{aligned} x_{21} &= x_{11} + r_{11}\lambda_1 = 1{,}3636 - 0{,}9700\,\lambda_1; \\ x_{22} &= x_{12} + r_{12}\lambda_1 = 0{,}9091 + 0{,}2425\,\lambda_1 \end{aligned}\right\} \qquad (9.24)$$

необходимо найти значение λ_1^* параметра λ_1, при котором функция $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x}_2$ достигает возможно большего значения. Рассуждаем аналогично предыдущему: точка $\bar{x}_2$ должна удовлетворять ограничениям (9.16), т.е.

$$\left.\begin{aligned} 2(1{,}3636 - 0{,}9700\,\lambda_1) + 3(0{,}9091 + 0{,}2425\lambda_1) &\leqslant 6; \\ 1{,}3636 - 0{,}9700\,\lambda_1 &\geqslant 0; \\ 0{,}9091 + 0{,}2425\,\lambda_1 &\geqslant 0. \end{aligned}\right\}$$

Второе ограничение мы опустили, так как точка $\bar{x}_2$ лежит на второй граничной прямой. Решая эту систему, устанавливаем, что λ_1 следует искать в полуинтервале (0; 1,4055]. При этом

λ_1^* должно отвечать максимуму Δf. В соответствии с (9.18)

$$d\Delta f/d\lambda_1 = \nabla f(\bar{x}_2)\,\bar{r}_1 = (-0{,}3636 + 0{,}9700\lambda_1;$$

$$1{,}0909 - 0{,}2425\lambda_1)\,(-0{,}9700;\ \ 0{,}2425) = 0{,}6173 - \lambda_1 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 0{,}6173$. При этом $d^2\Delta f/d\lambda_1^2 = -1 < 0$. Значит, $\lambda_1^* = 0{,}6173$.

По формулам (9.24) находим координаты новой точки: $\bar{x}_2 = (0{,}7647;\ 1{,}0588)$.

Если продолжить процесс дальше, то при решении задачи (9.19)—(9.22) будет установлено, что максимум функции

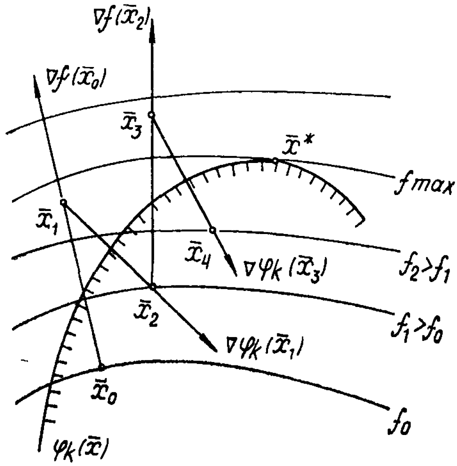

Рис. 9.8

$T_2 = \nabla f(\bar{x}_2)\cdot\bar{r}_2$ равен нулю. Это свидетельствует о том, что дальнейшее увеличение целевой функции в заданной области невозможно. Следовательно, точка $\bar{x}_2$ является искомой точкой $\bar{x}^*$ максимума функции $f(\bar{x})$. При этом $f_{max} = -2{,}9705$.

К этому же выводу можно прийти, анализируя рис. 9.7: в точке $\bar{x}_2$ одна из линий уровня касается границы области, т. е. точка $\bar{x}_2$ есть точка оптимума $\bar{x}^*$.

В задачах с линейными ограничениями движение по граничным прямым оказывается возможным и даже целесообразным. При нелинейных ограничениях, определяющих выпуклую область, любое как угодно малое перемещение из граничной точки может сразу вывести за пределы области допустимых решений, и возникнет необходимость в возвращении. Подобная ситуация характерна для задач, в которых экстремум функции $f(\bar{x})$ достигается на границе области. В связи с этим применяются различные способы перемещения, обеспечивающие построение последовательности точек, расположенных вблизи границы и внутри области допустимых решений, или зигзагообразное движение вдоль границы с пересечением последней (рис. 9.8). Как видно из рис. 9.8, возврат из точки $\bar{x}_1$ в область следует осуществлять вдоль градиента той граничной функции $\varphi_k(\bar{x})$, которая оказалась нарушенной. Это обеспечит отклонение очередной точки $\bar{x}_2$ в сторону точки экстремума $\bar{x}^*$. Признаком экстремума в подобном случае будет коллинеарность векторов ∇f и $\nabla\varphi_k$.

Пример 9.5. По условиям примера 9.1 найти оптимальный план выпуска изделий.

Решение. Как было установлено, математически задача сводится к максимизации функции

$$f = 2x_1 + 3x_2 - 0{,}1x_1^2 - 0{,}1x_2^2$$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 10x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2 \leqslant 100; \\ 20x_1 + x_1^2 + 10x_2 + x_2^2 \leqslant 120; \\ 20x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2 \leqslant 150; \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \; x_2 \geqslant 0.$$

Перепишем неравенства в виде

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(\bar{x}) = 100 - (10x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2) \geqslant 0; \\ \varphi_2(\bar{x}) = 120 - (20x_1 + x_1^2 + 10x_2 + x_2^2) \geqslant 0; \\ \varphi_3(\bar{x}) = 150 - (20x_1 + x_1^2 + 20x_2 + x_2^2) \geqslant 0. \end{array}\right\} \qquad (9.25)$$

В качестве начальной возьмем точку $\bar{x}_0 = (1;\ 3)$. Она принадлежит допустимой области, что легко проверяется подстановкой координат в соотношения (9.25). В этой точке $f(\bar{x}_0) = 10$ (рис. 9.9).

Координаты градиента $\nabla f(\bar{x})$ равны $\partial f/\partial x_1 = 2 - 0{,}2x_1$; $\partial f/\partial x_2 = 3 - 0{,}2x_2$, а в точке $\bar{x}_0$: $\nabla f(x_0) = (1{,}8;\ 2{,}4)$.

Из точки $\bar{x}_0$ переместимся вдоль градиента $\nabla f(\bar{x}_0)$ в новую точку $\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + \nabla f(\bar{x}_0)\lambda_1 = (1 + 1{,}8\lambda_1;\ 3 + 2{,}4\lambda_1)$, причем параметру λ_1 дадим значение, например, $\lambda_1 = 0{,}5$. Получим $\bar{x}_1 = (1{,}9;\ 4{,}2)$.

Проверим, принадлежит ли точка $\bar{x}_1$ допустимой области: $\varphi_1(\bar{x}_1) = -24{,}25 < 0$; $\varphi_2(\bar{x}_1) = 18{,}75 > 0$; $\varphi_3(\bar{x}_1) = 6{,}75 > 0$. Точка $\bar{x}_1$ лежит за пределами области допустимых решений, так как нарушено первое ограничение системы (9.25).

Необходимо вернуться в область и при этом сдвинуться в сторону точки максимума. Находим градиент нарушенной граничной функции $\varphi_1(\bar{x})$ и вычисляем его координаты в точке $\bar{x}_1$: $\partial\varphi_1/\partial x_1 = -10 - 2x_1$; $\partial\varphi_1/\partial x_2 = -20 - 2x_2$; $\nabla\varphi_1(\bar{x}_1) = (-13{,}8;\ -24{,}8)$.

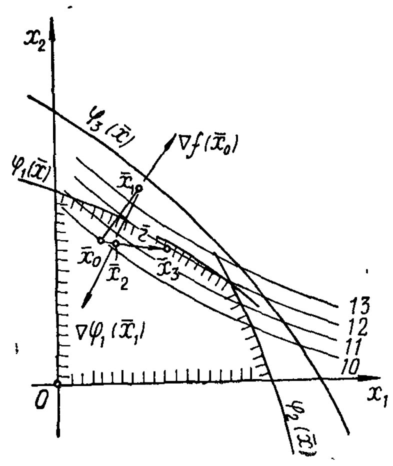

Рис. 9.9

Следующую точку $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \nabla\varphi_1(\bar{x}_1)\lambda_2 = (1{,}9 - 13{,}8\lambda_2;\ 4{,}2 - 24{,}8\lambda_2)$ найдем при значении параметра λ_2, равном, например, $\lambda_2 = 0{,}05$. Получим $\bar{x}_2 = (1{,}21;\ 2{,}96)$.

Подставляя координаты точки $\bar{x}_2$ в ограничения (9.25), убеждаемся, что она находится в допустимой области. При этом $f(\bar{x}_2) = 10{,}2774$.

Значения $f(\bar{x}_0) = 10$ и $f(\bar{x}_2) = 10{,}2774$ близки между собой, что говорит о смещении точки $\bar{x}_2$ вдоль линии уровня функции $f(\bar{x})$. Чтобы ускорить процесс сходимости к точке максимума, переместимся из точки $\bar{x}_2$ в направлении вектора $\bar{r}$, проходящего через точки $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_2$ (рис. 9.9). Находим координаты вектора $\bar{r}$:

$$\bar{r} = (1{,}21 - 1;\ 2{,}96 - 3) = (0{,}21;\ -0{,}04).$$

Очередную точку $\bar{x}_3 = \bar{x}_2 + \bar{r}\lambda_3 = (1{,}21 + 0{,}21\lambda_3;\ 2{,}96 - 0{,}04\lambda_3)$ найдем, приняв λ_3 равным, например, $\lambda_3 = 6{,}5$. Получим $\bar{x}_3 = (2{,}5750;\ 2{,}7000)$.

Подставляя координаты точки $\bar{x}_3$ в ограничения (9.25), находим $\varphi_1(\bar{x}_3) = 6{,}3294 > 0$; $\varphi_2(\bar{x}_3) = 20{,}2894 > 0$; $\varphi_3(\bar{x}_3) = 30{,}5794 > 0$. Таким образом, точка $\bar{x}_3$ принадлежит области допустимых решений. При этом $f(\bar{x}_3) = 11{,}8579$.

Найдем градиенты ∇f и $\nabla \varphi_1$ функций f и φ_1 в точке $\bar{x}_3$:

$$\nabla f(\bar{x}_3) = (1{,}4850;\ 2{,}4600);\ \nabla \varphi_1(\bar{x}_3) = (-15{,}15;\ -25{,}40).$$

Вычислим отношения одноименных координат этих векторов:

$$\frac{1{,}4850}{-15{,}15} = -0{,}098;\quad \frac{2{,}4600}{-25{,}40} = -0{,}097.$$

Отношения незначительно отличаются друг от друга по величине. Значит, векторы ∇f и $\nabla \varphi_1$ практически коллинеарны и перемещение вдоль них будет происходить по зигзагообразной траектории вблизи границы с пересечением ее (см. рис. 9.8). Учитывая, кроме того, что отклонение $\varphi_1(\bar{x}_3) = 6{,}3294$ от нуля сравнительно невелико и точка $\bar{x}_3$ принадлежит допустимой области, задачу можно считать решенной, т. е. $\bar{x}^* \approx \approx (2{,}5750;\ 2{,}7000)$, $f_{\max} = 11{,}8579$.

Итак, производить следует 2575 штук изделий 1-го вида и 2700 штук изделий 2-го вида. При этом прибыль предприятия по рассматриваемым видам изделий составит 11857,9 руб.

Упражнения

Решить графическим методом следующие задачи нелинейного программирования:

9.11. $f = 2x_1 - 0{,}2x_1^2 + 3x_2 - 0{,}2x_2^2$ (max);

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 13; \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 10; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0;\quad x_2 \geqslant 0.$$

9.12. $f = 2x_1 - 0{,}1_1^2 + 3x_2 - 0{,}1x_2^2$ (max);

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 + 13x_2 &\leqslant 51; \\ 15x_1 + 7x_2 &\leqslant 105; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0;\quad x_2 \geqslant 0.$$

9.13. $f = 3x_1 - 0{,}3x_1^2 + 6x_2 - 0{,}3x_2^2$ (max);

$$\left.\begin{aligned} 9x_1 + 8x_2 &\leqslant 72; \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 10; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0;\quad x_2 \geqslant 0.$$

Решить градиентным методом следующие задачи нелинейного программирования, начиная процесс оптимизационного поиска с указанной точки $\bar{x}_0$ и сопровождая решение графической иллюстрацией:

9.14. $f = 3x_1 - 0{,}2x_1^2 + x_2 - 0{,}2x_2^2$ (max);

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 7; \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 10; \end{aligned}\right\} \qquad \bar{x}_0 = (1;\ 2).$$

$$x_1 \geqslant 0;\quad x_2 \geqslant 0;$$

9,15. $f = 2x_1 - 0{,}1x_1^2 + 3x_2 - 0{,}1x_2^2$ (max);

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &\leqslant 30; \\ 3x_1 + 4x_2 &\leqslant 24; \end{aligned}\right\} \qquad \overline{x_0} = (3;\ 1).$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0;$$

9.16. $f = 3x_1 - 0{,}1x_1^2 + 2x_2 - 0{,}1x_2^2$ (max)·

$$\left.\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 &\leqslant 35; \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 10; \end{aligned}\right\} \qquad \overline{x_0} = (1;\ 2).$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0;$$

Решить градиентным методом следующие задачи нелинейного программирования:

9.17. $f = -6x_1 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$ (min);

$$x_1 + x_2 \leqslant 2;$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

9.18. $f = 2x_1 - x_1^2 + x_2$ (max);

$$2x_1^2 + 3x_2^2 \leqslant 6;$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

9.19. $f = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_1^2 - 2x_2^2 - 1/3x_3^2$ (max);

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 4;$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0; \quad x_3 \geqslant 0.$$

Таблица 9.3

Вариант	a_{10}	a_{20}	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	p_1	p_2	c_1^0	c_2^0	$c_1' = c_2'$	$\overline{x_0}$
0	90	88	3	6	8	11	12	10	7	8	0,2	(2; 3)
1	30	60	5	2	8	11	8	7	6	4	0,1	(3; 1)
2	60	10	11	8	1	2	10	11	7	9	0,1	(1; 2)
3	14	42	1	4	7	3	15	13	14	11	0,2	(4; 1)
4	7	10	1	1	1	2	12	11	9	10	0,2	(1; 2)
5	51	105	5	13	15	7	15	13	13	10	0,1	(2; 1)
6	40	84	4	7	12	7	11	17	9	14	0,2	(4; 1)
7	13	10	2	3	2	1	14	16	12	13	0,2	(3; 1);
8	72	10	9	8	1	2	23	19	20	13	0,3	(4; 2)
9	84	31	7	12	5	3	21	27	15	24	0,3	(2; 3)

9.20. Предприятие выпускает изделия А и Б, при изготовлении которых используется сырье вида I и II. Известны запасы сырья a_{i0} ($i = 1,2$), нормы его расхода a_{ij} ($j = 1,2$) на единицу изделия, оптовые цены p_j на изделия и их плановая себестоимость c_j^0. Как только объем выпускаемой продукции перестает соответствовать оптимальным размерам предприятия, дальнейшее увеличение выпуска x_j ведет к повышению себестоимости продукции, и в этих условиях фактическая себестоимость c_j в первом приближении описывается функцией $c_j = c_j^0 + c_j' x_j$, где c_j' — некоторая постоянная величина. Составить план выпуска изделий, обеспечивающий предприятию получение максимальной прибыли.

Задачу решить градиентным методом, начиная процесс оптимизационного поиска с указанной точки $\bar{x}_0$ и сопровождая решение графической иллюстрацией Необходимые числовые данные приведены в табл. 9.3

Глава 10. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 10.1. Многошаговые процессы в динамических задачах

Динамическое программирование (планирование) представляет собой математический метод для нахождения оптимальных решений многошаговых (многоэтапных) задач. Некоторые из таких задач естественным образом распадаются на отдельные шаги (этапы), но имеются задачи, в которых разбиение приходится вводить искусственно, для того чтобы их можно было решить методом динамического программирования.

Пусть на некоторый период времени T, состоящий из m лет, планируется деятельность группы промышленных предприятий. В начале планируемого периода на развитие предприятий выделяются основные средства Q_0, которые необходимо распределить между предприятиями. В процессе функционирования предприятий выделенные им средства частично расходуются. Однако каждое из этих предприятий за определенный период времени (хозяйственный год) получает прибыль, зависящую от объема вложенных средств. В начале каждого года имеющиеся средства могут перераспределяться между предприятиями.

Требуется определить, сколько средств надо выделить каждому предприятию в начале каждого года, чтобы суммарный доход от всей группы предприятий за весь период времени T был максимальным.

Процесс решения такой задачи является естественно многошаговым. Шагом управления (планирования) здесь будет хозяйственный год. Управление процессом состоит в распределении (перераспределении) средств в начале каждого хозяйственного года.

Пусть имеется груз, состоящий из неделимых предметов различных типов, который нужно погрузить в самолет грузоподъемностью P. Стоимость и вес каждого предмета j-го типа известны и составляют соответственно c_j и p_j единиц $(j=\overline{1,n})$.

Требуется определить, сколько предметов каждого типа надо загрузить в самолет, чтобы суммарная стоимость груза была наибольшей, а вес не превышал грузоподъемности самолета.

Математически задача записывается следующим образом: найти такие целые неотрицательные значения x_j $(j=\overline{1,n})$, которые бы максимизировали функцию

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничении

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leqslant P,$$

где x_j — количество груза j-го типа, позволяющее достичь $\max f(x)$.

Процесс решения рассматриваемой задачи не является многоэтапным. Она относится к классу задач целочисленного линейного программирования. Однако ее можно решить методом динамического программирования. Для этого весь процесс решения потребуется разбить на этапы искусственно. На первом этапе рассматривают всевозможные варианты загрузки самолета предметами первого типа и среди них находят оптимальный. На втором этапе определяют вариант загрузки самолета предметами первого и второго типов и т. д. Процесс решения задачи продолжается до тех пор, пока не будет найден оптимальный вариант загрузки самолета предметами n типов.

§ 10.2. Принцип оптимальности и рекуррентные соотношения

Метод динамического программирования позволяет одну задачу со многими переменными заменить рядом последовательно решаемых задач с меньшим числом переменных. Процесс решения задачи разбивается на шаги. При этом нумерация шагов, как правило, осуществляется от конца к началу.

Основным принципом, на котором базируется оптимизация многошагового процесса, а также особенности вычислительного метода динамического программирования, является *принцип оптимальности Р. Беллмана.*

Принцип оптимальности. *Оптимальное поведение обладает тем свойством, что каковы бы ни были начальное состояние и начальное решение, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате первоначального решения.*

Принцип оптимальности имеет конструктивный характер и непосредственно указывает процедуру нахождения оптимального решения. Математически он записывается выражением вида

$$f_{n-l}(S_l) = \underset{U_{l+1}}{\text{optimum}}\,[R_{l+1}(S_l,\ U_{l+1}) + f_{n-(l+1)}(S_{l+1})]$$
$$(l = \overline{0,\ n-1}), \qquad (10.1)$$

где $U_l = (u_l^{(1)};\ \ldots;\ u_l^{(m)})$ — решение (управление), выбранное на l-м шаге; $S_l = (s_l^{(1)};\ \ldots;\ s_l^{(m)})$ — состояние системы на l-м шаге; R_l — непосредственный эффект, достигаемый на l-м шаге; f_{n-l} — оптимальное значение эффекта, достигаемого за $n-l$ шагов; n — количество шагов (этапов).

«Optimum» в выражении (10.1) означает максимум или минимум в зависимости от условия задачи.

Все вычисления, дающие возможность найти оптимальное значение эффекта, достигаемого за n шагов, $f_n(S_0)$, проводятся по формуле (10.1), которая носит название *основного функционального уравнения Беллмана* или *рекуррентного соотношения.* Действительно, при вычислении очередного значения функции f_{n-l} используются значение функции $f_{n-(l+1)}$, полученное на предыдущем шаге, и непосредственное значение эффекта $R_{l+1}(S_l,\ U_{l+1})$, достигаемого в результате выбора решения U_{l+1} при заданном состоянии системы S_l. Процесс вычисления значений функции f_{n-l} $(l=\overline{0,n-1})$ осуществляется при естественном начальном условии $f_0(S_n)=0$, которое означает, что за пределами конечного состояния системы эффект равен нулю.

§ 10.3. Вычислительная схема

Оптимальное решение задачи методом динамического программирования находится на основе функционального уравнения (10.1). Чтобы определить его, необходимо:

1) *записать функциональное уравнение для последнего состояния процесса (ему соответствует $l=n-1$):*

$$f_1(S_{n-1}) = \underset{U_n}{\text{optimum}}\,[R_n(S_{n-1},\ U_n) + f_0(S_n)];$$

2) *найти $R_n(S_{n-1},\ U_n)$ из дискретного набора его значений при некоторых фиксированных S_{n-1} и U_n из соответствующих допустимых областей (так как $f_0(S_n)=0$, то $f_1(S_{n-1}) = \underset{U_n}{\text{optimum}}\,[R_n(S_{n-1},\ U_n)]$. В результате после первого шага известно решение U_n и соответствующее значение функции $f_1(S_{n-1})$;*

3) *уменьшить значение l на единицу и записать соответствующее функциональное уравнение. При $l = n - k$ $(k = \overline{2, n})$ оно имеет вид:*

$$f_k(S_{n-k}) = \underset{U_{n-k+1}}{\text{optimum}}[R_{n-k+1}(S_{n-k}, U_{n-k+1}) + f_{k-1}(S_{n-k+1})]; \quad (10.2)$$

4) *найти условно-оптимальное решение на основе выражения (10.2);*

5) *проверить, чему равно значение l. Если $l=0$, расчет условно-оптимальных решений закончен, при этом найдено оптимальное решение задачи для первого состояния процесса. Если $l \neq 0$, перейти к выполнению пункта 3;*

6) *вычислить оптимальное решение задачи для каждого последующего шага процесса, двигаясь от конца расчетов к началу.*

Пример 10.1. Требуется перевезти груз из города A в город B. Сеть дорог, связывающих эти города, изображена на рис. 10.1. Стоимость перевозки груза из города s $(s = \overline{1, 9})$ в город j $(j = \overline{2, 10})$ проставлена над соответствующими дугами сети. Необходимо найти маршрут, связывающий города A и B, для которого суммарные затраты на перевозку груза были бы наименьшими.

Решение. На рис. 10.1 вершинам сети поставлены в соответствие города, а дугам — транспортные магистрали.

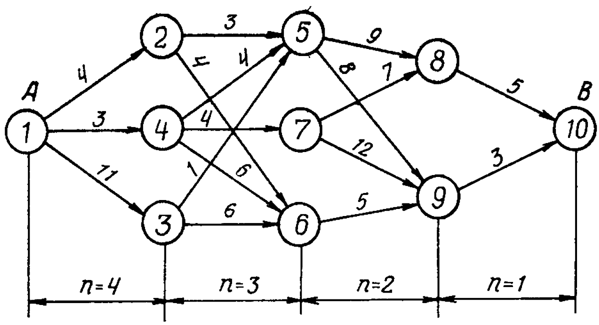

Рис 10.1

Разобьем все множество вершин (городов) на подмножества. В первое подмножество включим исходную вершину *1*. Во второе — вершины, в которые входят дуги, выходящие из вершины *1*. В третье — вершины, в которые входят дуги, выходящие из вершин второго подмножества. Таким образом, продолжая разбиение дальше, получим пять подмножеств: {*1*}, {*2*, *3*, *4*}, {*5*, *6*, *7*}, {*8*, *9*}, {*10*}. Очевидно, что любой маршрут из города *1* в город *10* содержит ровно четыре дуги, каждая из которых связывает вершины, принадлежащие соответствующим подмножествам. Следовательно, процесс решения задачи (нахождения оптимального маршрута) разбивается на четыре этапа. На первом этапе принимается решение, через какой город, принадлежащий второму подмножеству, везти груз из города *1*. На втором этапе необходимо определить, через какой город третьего подмножества везти груз из некоторого города, принадлежащего второму подмножеству, и т. д.

Перенумеруем этапы от конечной вершины сети к начальной (см. рис. 10.1) и введем обозначения: n — номер шага ($n=1, 2, 3, 4$); $f_n(s)$ — минимальные затраты на перевозку груза от города s до конечного города, если до конечного города осталось n шагов; $j_n(s)$ — номер города, через который нужно ехать из города s, чтобы достичь $f_n(s)$; c_{sj} — стоимость перевозки груза из города s в город j.

Здесь все обозначения несут важную смысловую нагрузку: f означает целевую функцию, s — состояние системы (номер города), индекс n несет динамическую информацию о том, что из города s до конечного города осталось n шагов.

Предположим, что груз доставлен в город *10*, следовательно, число оставшихся шагов равно нулю ($n=0$) и $f_n(s)=f_0(10)=0$, так как из города *10* груз везти не надо.

Рассмотрим последний шаг ($n=1$) и вычислим для него значение функции. Очевидно, что в город *10* груз может быть доставлен или из города *8*, или из города *9*. Вычислим затраты на перевозку для этих двух состояний:

$$f_1(8)=c_{8,\,10}+f_0(10)=5+0=5,\ s=8,\ j_1(8)=10;$$

$$f_1(9)=c_{9,\,10}+f_0(10)=3+0=3,\ s=9,\ j_1(9)=10.$$

Чтобы произвести расчет для $n=2$, выдвинем гипотезы о месте нахождения груза: 1-я гипотеза — груз находится в городе *5*; 2-я гипотеза — груз находится в городе *6*; 3-я гипотеза — груз находится в городе *7*.

Из города *5* в город *10* можно провезти груз или через город *8*, или через город *9*. Поэтому оптимальный маршрут из города *5* найдется из выражения

$$f_2(5)=\min_{j}[c_{58}+f_1\ (8);\ c_{59}+f_1\ (9)]=\min(9+5;\ 8+3)=11.$$

Здесь $s=5$ и $j_2(5)=8$, т. е. условно-оптимальный маршрут проходит через город *8*.

Аналогично находим значения функции для $s=6$ и $s=7$:

$$f_2(6)=c_{69}+f_1(9)=8;$$

$$f_2(7)=\min_j[c_{78}+f_1(8);\ c_{79}+f_1(9)]=12.$$

Все вычисления удобно выполнять в таблицах. Расчеты первого $[n=1,\ c_{sj}+f_0(j)]$ и второго $[n=2,\ c_{sj}+f_1(j)]$ этапов помещены в табл. 10.1 и 10.2 соответственно.

Таблица 10.1

$s \backslash j$	10	$f_1(s)$	$j_1(s)$
8	$5+0$	5	10
9	$3+0$	3	10

Таблица 10.2

$s \backslash j$	8	9	$f_2(S)$	$j_2(S)$
5	9+5	8+3	11	9
6		5+3	8	9
7	7+5	12+3	12	8

Цифры в столбцах таблиц, находящиеся слева от двойной вертикальной черты, представляют собой сумму стоимости c_{sj} доставки груза из города s в город j и стоимости $f_{n-1}(j)$ доставки груза от города j до города B. В каждой строке выбирается наименьшая из этих сумм. Этим определяются условно-оптимальные затраты на доставку груза из города s в конечный город. Затраты (значение функции) обозначены $f_n(s)$ и записаны в первом столбце справа от вертикальной черты, а город, через который проходит условно-оптимальный маршрут, обозначен $j_n(s)$.

Рекуррентное соотношение для $n=3$ имеет вид

$$f_3(s)=\min_{s,j}[c_{sj}+f_2(j)].$$

Отметим, что для подсчета условно-оптимальных значений используется значение $f_2(j)$, полученное на предыдущем шаге, из табл. 10.2.

Вычисления для третьего шага $[n=3,\ c_{sj}+f_2(j)]$ приведены в табл. 10.3. Здесь две клетки заштрихованы, поскольку из городов *2* и *3* нельзя попасть в город *7*.

Вычисления для четвертого шага $(n=4,\ c_{sj}+f_3(j))$ приведены в табл. 10.4. Из табл. 10.4 видно, что минимальные затраты на перевозку груза $f_4(1)=16$ и оптимальный маршрут проходит через второй город, так как $j_4(1)=2$. Далее из табл. 10.3 при $s=2$ следует, что оптимальный маршрут про-

Таблица 10.3

$s \backslash j$	5	6	7	$f_3(s)$	$j_3(s)$
2	3+11	4+8		12	6
3	1+11	6+8		12	5
4	4+11	6+8	4+12	14	6

Таблица 10.4

$s \backslash j$	2	3	4	$f_4(s)$	$j_4(s)$
1	$4+12$	$11+12$	$3+14$	16	2

ходит через город *6*, так как $j_3(2)=6$. Продолжая рассмотрение таблиц, для $n=2$ определяем, что оптимальный маршрут проходит через город *9* ($j_2(6)=9$). Наконец, из города *9* груз доставляется в конечный город *10* (место назначения). Таким образом, двигаясь от последней таблицы к первой, мы определили оптимальный маршрут $\mu=(1—2—6—9—10)$, затраты на перевозку груза по которому составляют $f_4(1)=4+4+5+3=16$.

Упражнения

10.1. Найти оптимальный маршрут (рис. 10.1) из города *1* в город *10*, проходящий через город *4*.

10.2. Записать в общем виде рекуррентное соотношение для нахождения оптимального пути между начальной и конечной вершинами сети.

10.3. Найти путь минимальной длины между начальной и конечной вершинами сети методом динамического программирования (цифры, приписанные дугам сети, означают расстояния между соответствующими вершинами): а) для рис. 10.2; б) для рис. 10.3; в) для рис. 10.4; г) для рис. 10.5.

§ 10.4. Планирование производственной программы

Предприятие изготовляет машины, спрос на которые в каждом из месяцев равен D_t ($t=\overline{1, T}$) единиц. Запас машин на складе предприятия на начало планируемого периода i_0 единиц. Пусть общие затраты $c_t(x_t, i_t)$ состоят из затрат $c(x_t)$ на производство машин и затрат hi_t на их содержание до отправки потребителю, т. е.

$$c_t(x_t, i_t)=c(x_t)+hi_t.$$

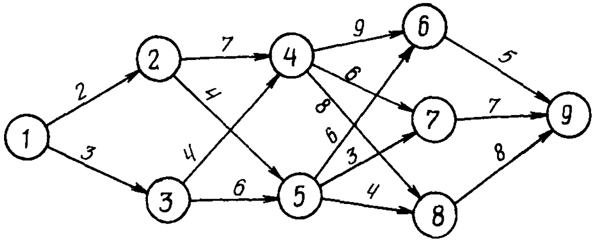

Рис 10.2

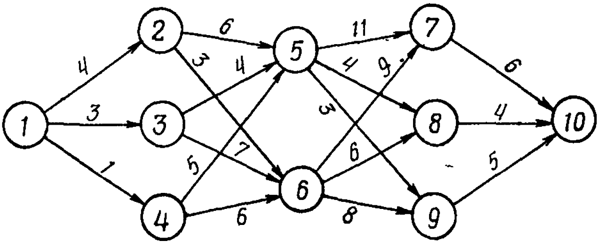

Рис 10.3

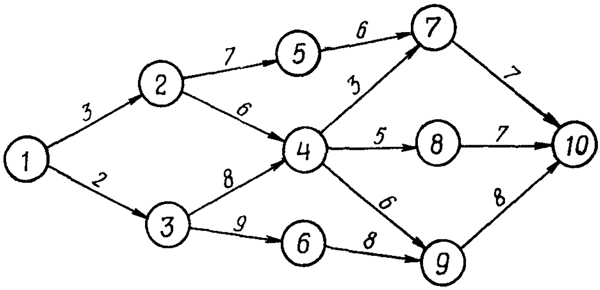

Рис 10.4

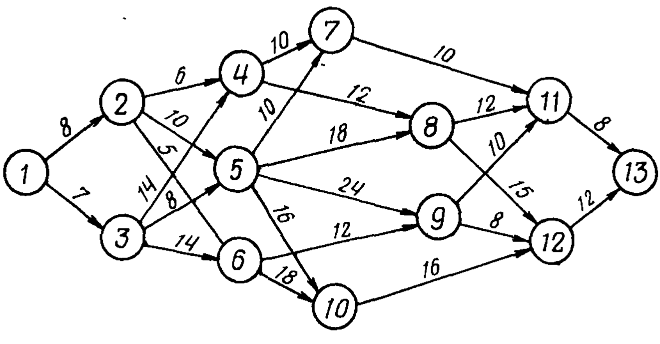

Рис. 10.5

В свою очередь затраты $c(x_t)$ на производство машин складываются из условно-постоянных k и пропорциональных lx_t (l единиц на каждую единицу продукции). Таким образом, для любого месяца

$$c(x_t)=k+lx_t.$$

Затраты на хранение единицы продукции равны h, поэтому затраты на содержание запасов численно равны уровню запасов на конец месяца, умноженному на h. Складские площади

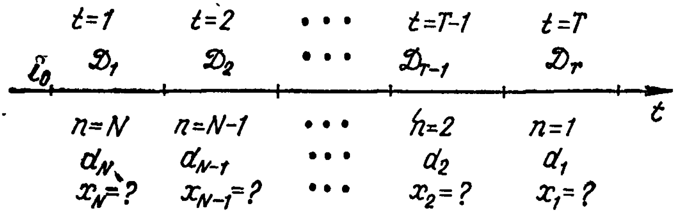

Рис. 10.6

предприятия ограничены, и хранить можно не более M единиц продукции. Производственные мощности также ограничены, и в каждом месяце можно изготовить не более B единиц продукции.

Требуется определить производственную программу изготовления машин x_t, удовлетворяющую спрос в каждом из месяцев планируемого периода D_t $(t=\overline{1,T})$ и обеспечивающую минимальные затраты на производство продукции и содержание запасов. Запас продукции на складе в конце планируемого периода должен быть равен нулю.

Для решения задачи методом динамического программирования и записи рекуррентного соотношения будем использовать следующие обозначения: n $(n=\overline{1,N})$ — номер планового отрезка времени (соответствует обратной нумерации месяцев); j — уровень запаса на конец отрезка; d_n — спрос на продукцию на n-м отрезке $(d_1=D_T,\ d_2=D_{T-1},\ \ldots,\ d_n=D_1)$; $c_n(x,\ j)$ — затраты, связанные с выпуском x единиц продукции на n-м отрезке и с содержанием запасов, объем которых на конец n-го отрезка равен j единиц; $f_n(i)$ — значение функции, равное затратам на производство и хранение продукции за n последних месяцев при условии, что уровень запасов на начало n-го месяца составляет i единиц; $x_n(i)$ — производство продукции на n-м отрезке, если уровень запасов на начало отрезка равен i единиц.

Плановый период изобразим на рис. 10.6 и для наглядности нанесем на него некоторые параметры условия задачи.

В данном примере число шагов решения задачи совпадает с числом месяцев (количеством плановых отрезков времени n). Так как уровень запасов на конец планового периода должен быть равен нулю, то для $n=0$

$$f_0(0)=0. \tag{10.3}$$

Перейдем к рассмотрению первого отрезка ($n=1$). Запас i_1 на начало этого отрезка неизвестен. Однако ясно, что он может быть равен любому неотрицательному целому числу, не превышающему вместимости склада и спроса в рассматриваемом отрезке, т. е. не должен превышать $\min(d_1, M)$. Для полного удовлетворения спроса на последнем отрезке объем должен быть равен d_1-i_1. Следовательно,

$$f_1(i)=c_1(x_1, j_1)=c_1(d_1-i, j_1)=c_1(d_1-i, 0),$$
$$i=0, 1, \ldots, \min(d_1, M). \tag{10.4}$$

Перейдем ко второму шагу ($n=2$). Уровень запасов на начало второго отрезка равен i. При этом величина i может принимать любые неотрицательные целочисленные значения, не превышающие $\min(d_1+d_2, M)$. Целочисленные значения x (объем выпуска) во втором отрезке при заданном i должны быть не меньше, чем d_2-i (спрос на данном отрезке должен быть удовлетворен), но не больше $\min(d_1+d_2-i, B)$, так как запас на конец планового периода равен нулю и производство продукции в любом отрезке не превышает B. Минимальные суммарные затраты на производство и хранение продукции за два последних месяца

$$f_2(i)=\min_x [c_2(x, i+x-d_2)+f_1(i+x-d_2)], \tag{10.5}$$

где

$$i=0, 1, \ldots, \min(d_1+d_2, M);\ d_2-i\leqslant x\leqslant \min(d_1+d_2-i, B).$$

Аналогично можно записать рекуррентное соотношение для $n=3$. Общее рекуррентное соотношение имеет вид:

$$f_n(i)=\min_x [c_n(x, i+x-d_n)+f_{n-1}(i+x-d_n)]\quad (n=\overline{1, N}); \tag{10.6}$$
$$i=0, 1, \ldots, \min(d_1+d_2+\ldots+d_n, M);$$
$$d_n-i\leqslant x\leqslant \min(d_1+d_2+\ldots+d_n-i, B).$$

В выражении (10.6) величина $(i+x-d_n)=j_n$ характеризует уровень запасов на конец отрезка n. Заметим, что поскольку уровень запасов i на начало каждого месяца (за исключением первого) неизвестен, то необходимо учесть все возможные его значения и произвести поочередно вычисления $f_1(i)$, $i=0, 1, \ldots, \min(d_1, M)$; $f_2(i)$, $i=0, 1, \ldots, \min(d_1+ +d_2, M)$; ...; $f_{n-1}(i)$, $i=0, 1, \ldots, \min(d_1+d_2+\ldots+d_{n-1}, M)$; $f_n(i_0)$, i_0 — известная величина.

На основании полученных расчетов находится объем выпуска продукции в каждом месяце, соответствующий оптимальному решению задачи. Для первого месяца планового периода он равен $x_N(i_0)$ и позволяет достичь $f_N(i_0)$. Уровень запасов на начало второго месяца $i_{N-1}=i_0+x_N(i_0)-d_N$, а объем выпуска во втором месяце $x_{N-1}(i_{N-1})$. Рассматривая таким образом плановые отрезки до конца планового периода, находим объем выпуска в каждом из месяцев.

Рассмотренную задачу проиллюстрируем числовым примером.

Пример 10.2. Пусть $T=3$, $D_1=3$, $D_2=4$, $D_3=3$, $h=2$, $B=6$, $M=4$, $i_0=1$, $k=8$, $l=2$.

Решение. Так как $c(x)=k+lx$, то: $c(0)=0$, $c(1)=10$, $c(2)=12$, $c(3)=14$, $c(4)=16$, $c(5)=18$, $c(6)=20$.

Рассмотрим $n=0$ (отрезок за пределом планового периода). Так как уровень запасов на конец планового периода равен нулю, $f_0(0)=0$.

Для $n=1$

$$\left.\begin{array}{l} x_1(i) = d_1 - i; \\ f_1(i) = c_1\ (x_1,\ j_1) = c_1(d_1 - i,\ 0) = c_1(3 - i), \\ i = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \end{array}\right\}$$

Расчет всех значений $f_1(i)$ выполним в табл. 10.5, где $f_1(i)=c_1(3-i)$.

Таблица 10.5

i	$x_1(i)$	$f_1(i)$
0	3	14
1	2	12
2	1	10
3	0	0

Для второго отрезка ($n=2$) значения функции $f_2(i)$ вычисляются по формуле (10.5). В табл. 10.6 приведены все возможные значения сумм $c_2(x)+h(i+x-d_2)+f_1(i+x-d_2)$. Здесь предусмотрено по одной строке для каждого возможного значения начального уровня запаса i, который не должен превышать $\min(d_1+d_2, M)$, и по одному столбцу для возможных значений выпуска x. Поскольку спрос на продукцию в каждом месяце должен быть удовлетворен, а уровень запасов на конец каждого отрезка не может превысить 4 единиц, некоторые клетки в таблице заштрихованы. Эти клетки соответствуют недопустимым сочетаниям значений i и x. Так, если $i=0$, то спрос удается удовлетворить только при условии $x \geqslant 4$. Если $i=4$, то $x \leqslant 3$, иначе запас на конец планового периода будет больше нуля. В каждой клетке таблицы слева от двойной черты записана сумма трех слагаемых. Первое слагаемое — значение $c(x)=k+lx$. Второе слагаемое — затраты на содержание запасов, равные уровню запасов на конец отрезка, умноженному на $h=2$. Так, например, при $i=3$ и $x=1$ уровень запасов на конец отрезка равен нулю, поэтому в соответствующей клетке второе слагаемое равно нулю. При $i=2$ и $x=5$ уровень запасов на конец отрезка равен 3, следовательно, в соответствующей клетке таблицы второе слагаемое равно 6. Наконец, третье слагаемое есть ранее вычисленное значение $f_1(i+x-d_2)=f_1(i+x-4)$, взятое из табл. 10.5.

Значение функции $f_2(i)$, записанное в правом крайнем столбце табл. 10.6, представляет собой минимальную из всех сумм в клетках строки для каждого фиксированного i, а $x_2(i)$ — соответствующий выпуск продукции. Например, при $i=0$ оптимальный выпуск равен 4 единицам, так как наименьшая сумма в этой строке (16+0+14) находится в столбце, соответствующем $x=4$.

Таблица 10.6

i \ x	0	1	2	3	4	5	6	$x_2(i)$	$f_2(i)$
0					16+0+14	18+2+12	20+4+10	4	30
1				14+0+14	16+2+12	18+4+10	20+6+0	6	26
2			12+0+14	14+2+12	16+4+10	18+6+0		5	24
3		10+0+14	12+2+12	14+4+10	16+6+0			4	22
4	0+0+14	10+2+12	12+4+10	14+6+0				0	14

Для $n=3$ рекуррентное соотношение имеет вид

$$f_3(i)=\min_x [c_3(x)+h(i+x-d_3)+f_2(i+x-d_3)];$$
$$i=i_0,$$
$$d_3-i_0=2\leqslant x\leqslant 4=\min(d_1+d_2+d_3-i_0, M).$$

Расчет значений $f_3(i)$ приведен в табл. 10.7. Таблица состоит из двух строк: заглавной и предназначенной для записи вычислений при начальном уровне запаса $i_0=1$. Здесь мы не делаем предположений о значениях i, так как запас на начало первого месяца планового периода известен.

Таблица 10.7

$i \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	$x_3(i)$	$f_3(i)$
$i_0=1$			12+0+30	14+2+26	16+4+24	18+6+22	20+8+14	2 3 6	42

Заметим, что при вычислении значений $f_3(i)$ использованы значения $f_2(i+x-d_3)$ из предыдущей таблицы.

Минимальные затраты, связанные с производством и хранением продукции за три месяца, $f_3(i)=42$. Оптимальными являются три решения: 1) при $x_3=2$ уровень запасов на начало второго месяца (конец первого) равен $i_0+x_3-d_3=1+2-3=0$. Рассматривая строку табл. 10.6, соответствующую $i=0$, видим, что $x_2=4$. Поскольку запас продукции на начало третьего месяца также равен нулю $(i_1=i_2+x_2-d_2=0+4-4=0)$, из табл. 10.5 находим $x_1=3$; таким образом, чтобы достичь оптимальных затрат, равных 42 единицам, требуется в первый месяц изготовить 2 машины, во второй — 4 и в третий — 3; проводя аналогичные рассуждения, находим еще два оптимальных решения: 2) при $x_3=3$ (см. табл. 10.7) $x_2=6$ и $x_1=0$; 3) при $x_3=6$ $x_2=0$ и $x_1=3$.

Упражнения

10.4. Пусть плановый период состоит из N отрезков Необходимо составить рекуррентное соотношение в общем виде и записать ограничения на уровень запасов (вместимость склада считать неограниченной) и объем выпуска (месячный выпуск не может превышать B единиц), если запас продукции на складе в конце планируемого периода должен быть равен нулю.

10.5. Условия те же, что и в задаче 10.4. Требуется записать ограничение на объем выпуска, если производственные мощности неограничены.

10.6. Условия те же, что и в примере 10.2. Найти оптимальную производственную программу и соответствующие уровни запасов, если $i_0=0$ и $h=1$.

Определить оптимальную производственную программу в задачах 10.7—10.10. Условие задачи приведено в начале параграфа. Затраты на производство продукции составляют: $c(0)=0$, $c(1)=13$, $c(2)=15$, $c(3)=17$, $c(4)=19$, $c(5)=21$, $c(6)=23$. Плановый период состоит из четырех месяцев $(t=\overline{1,4})$:

10.7. $D_1=3$, $D_2=4$, $D_3=4$, $D_4=2$, $i_0=2$, $h=2$, $B=6$, $M=4$.

10.8. $D_1=2$, $D_2=3$, $D_3=2$, $D_4=2$, $i_0=1$, $h=2$, $B=4$, $M=4$.

10.9. $D_1=2$, $D_2=3$, $D_3=3$, $D_4=2$, $i_0=2$, $h=1$, $B=4$, $M=4$.

10.10. $D_1=3$, $D_2=3$, $D_3=2$, $D_4=4$, $i_0=1$, $h=1$, $B=5$, $M=4$.

§ 10.5. Оптимальное распределение средств на расширение производства

Широкий класс составляют задачи, в которых речь идет о наиболее целесообразном распределении во времени тех или иных ресурсов (денежных средств, рабочей силы, сырья и т. п.). Рассмотрим простейший пример такого рода задачи.

Группе предприятий выделяются дополнительные средства на реконструкцию и модернизацию производства. По каждому из n предприятий известен возможный прирост $g_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ выпуска продукции в зависимости от выделенной ему суммы x. Требуется так распределить между предприятиями средства c, чтобы общий прирост $f_n(c)$ выпуска продукции был максимальным.

В соответствии с вычислительной схемой динамического программирования рассмотрим сначала случай $n=1$, т. е. предположим, что все имеющиеся средства выделяются на реконструкцию и модернизацию одного предприятия. Обозначим через $f_1(x)$ максимально возможный прирост выпуска продукции на этом предприятии, соответствующий выделенной сумме x. Каждому значению x отвечает вполне определенное (единственное) значение $g_1(x)$ выпуска, поэтому можно записать, что

$$f_1(x)=\max\,[g_1(x)]=g_1(x). \tag{10.7}$$

Пусть теперь $n=2$, т. е. средства распределяются между двумя предприятиями. Если второму предприятию выделена сумма x, то прирост продукции на нем составит $g_2(x)$. Оставшиеся другому предприятию средства $(c-x)$ в зависимости от величины x (а значит, и $c-x$) позволят увеличить прирост выпуска продукции до максимально возможного значения $f_1(c-x)$. При этом условии общий прирост выпуска продукции на двух предприятиях

$$g_2(x)+f_1(c-x). \tag{10.8}$$

Оптимальному значению $f_2(c)$ прироста продукции при распределении суммы c между двумя предприятиями соответствует такое x, при котором сумма (10.8) максимальна. Это можно выразить записью

$$f_2(c)=\max_{0\leqslant x\leqslant c}[g_2(x)+f_1(c-x)].$$

Значение $f_3(c)$ можно вычислить, если известны значения $f_2(c)$, и т. д.

Функциональное уравнение Беллмана для рассматриваемой задачи запишется в следующем виде:

$$f_n(c)=\max_{0\leqslant x\leqslant c}[g_n(x)+f_{n-1}(c-x)]. \tag{10.9}$$

Итак, максимальный прирост выпуска продукции на n предприятиях определяется как максимум суммы прироста выпуска на n-м предприятии и прироста выпуска на остальных $n-1$ предприятиях при условии, что оставшиеся после n-го предприятия средства распределяются между остальными предприятиями оптимально.

Имея функциональные уравнения (10.7) и (10.9), мы можем последовательно найти сначала f_1, затем f_2, f_3 и т. д. и, наконец, f_{n-1} и f_n для различных значений распределяемой суммы средств.

Для отыскания оптимального распределения средств прежде всего находим величину $x_n^*(c)$ ассигнований n-му предприятию, которая позволяет достичь полученного нами максимального значения f_n прироста продукции. По величине оставшихся средств $c - x_n^*(c)$ и уже известному нам значению f_{n-1} устанавливаем $x_{n-1}^*(c)$ — величину ассигнований $(n-1)$-му предприятию и т. д. и, наконец, находим $x_2^*(c)$ и $x_1^*(c)$.

Пример 10.3. Пусть имеются четыре предприятия, между которыми распределяется 100 тыс. руб. Значения $g_i(x)$ прироста выпуска продукции на предприятиях в зависимости от выделенной суммы x приведены в табл. 10.8. Составить план распределения средств, максимизирующий общий прирост выпуска продукции.

Решение. Пусть $n=1$. В соответствии с формулой (10.7) в зависимости от начальной суммы c получаем с учетом табл. 10.8 значения $f_1(c)$, помещенные в табл. 10.9.

Таблица 10.8

Средства c, тыс. руб.	Предприятие № 1	№ 2	№ 3	№ 4
	Прирост выпуска продукции на предприятиях, $g_i(x)$, тыс. руб.			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

Таблица 10.9

$x_1^*(c)$	$f_1(c)$
20	10
40	31
60	42
80	62
100	76

Предположим теперь, что средства вкладываются в два предприятия. Тогда в соответствии с формулой (10.9):

$$f_2(c) = \max_{0 \leq x \leq c} [g_2(x) + f_1(c-x)]. \tag{10.10}$$

Очередная задача — найти значения функции (10.10) для всех допустимых комбинаций c и x. Для упрощения расчетов значения x будем принимать кратными 20 тыс. руб. и для большей наглядности записи оформлять в виде таблиц. Каждому шагу будет отвечать своя таблица. Рассматриваемому шагу соответствует табл. 10.10.

Таблица 10.10

c \ x	0	20	40	60	80	100	$f_2(c)$	$x_2^*(c)$
20	0+10	12+0					12	20
40	0+31	12+10	26+0				31	0
60	0+42	12+31	26+10	36+0			43	20
80	0+62	12+42	26+31	36+10	54+0		62	0
100	0+76	12+62	26+42	36+31	54+10	78+0	78	100

Для каждого значения (20, 40, 60, 80, 100) начальной суммы c распределяемых средств в табл. 10.10 предусмотрена отдельная строка, а для каждого возможного значения x (0, 20, 40, 60, 80, 100) распределяемой суммы — столбец. Некоторые клетки таблицы останутся незаполненными, так как соответствуют недопустимым сочетаниям c и x. Такой, например, будет клетка, отвечающая строке $c=40$ и столбцу $x=80$, ибо при наличии 40 тыс. руб. естественно отпадает вариант, при котором одному из предприятий выделяется 80 тыс. руб.

В каждую клетку таблицы будем вписывать значение суммы $g_2(x)+f_1(c-x)$. Первое слагаемое берем из условий задачи (табл. 10.8), второе — из табл. 10.9. Так, например, при распределении начальной суммы $c=80$ тыс. руб. одним из вариантов может быть следующий: второму предприятию выделяется 60 тыс. руб. ($x=60$), тогда первому — $80-60=20$ тыс. руб. При таком распределении первоначальной суммы на втором предприятии будет обеспечен прирост продукции на сумму в 36 тыс. руб. (табл. 10.8), на первом — 10 тыс. руб. (табл. 10.9).

Общий прирост составит (36+10) тыс. руб., что и записано в соответствующей клетке табл. 10.10. В двух последних столбцах таблицы проставлены максимальный по строке прирост продукции (в столбце $f_2(c)$) и соответствующая ему оптимальная сумма средств, выделенная второму предприятию (в столбце $x_2^*(c)$). Так, при начальной сумме $c=60$ тыс. руб. максимальный прирост выпуска продукции составляет 43 тыс. руб.

(12+31), и это достигается выделением второму предприятию 20, а первому — 60—20=40 тыс. руб.

Расчет значений $f_3(c)$ приведен в табл. 10.11. Здесь использована формула, получающаяся из (10.9) при $n=3$

$$f_3(c) = \max_{0<x<c} [g_3(x) + f_2(c-x)].$$

Таблица 10.11

c \ x	0	20	40	60	80	100	$f_3(c)$	$x_1(c)$
20	0+12	11+ 0					12	0
40	0+31	11+12	36+ 0				36	40
60	0+43	11+31	36+12	45+ 0			48	40
80	0+62	11+43	36+31	45+12	60+ 0		67	40
100	0+78	11+62	36+43	45+31	60+12	77+ 0	79	40

Первое слагаемое в табл. 10.11 взято из табл. 10.8, второе — из табл. 10.10.

Аналогичным образом находятся значения $f_4(c)$. Соответствующая таблица здесь не приводится, но читателю следует проверить, насколько им освоены описанные вычислительные операции метода динамического программирования, построив таблицу для $f_4(c)$, аналогичную табл. 10.11. Полученные результаты можно сравнить с теми, которые приведены в сводной таблице (табл. 10.12, см. последние два столбца), составленной на основе расчетных таблиц, начиная с табл. 10.9.

Табл. 10.12 содержит много ценной информации и позволяет единообразно решать целый ряд задач.

Таблица 10.12

c	$x_1^*(c)$	$f_1(c)$	$x_2^*(c)$	$f_2(c)$	$x_3^*(c)$	$f_3(c)$	$x_4^*(c)$	$f_4(c)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	20	10	20	12	0	12	20	16
40	40	31	0	31	40	36	40	37
60	60	42	20	43	40	48	20	52
80	80	62	0	62	40	67	40	73
100	100	76	100	78	40	79	40	85

Например, из табл. 10.12 видно, что наибольший прирост выпуска продукции, который могут дать четыре предприятия при распределении между ними 100 тыс. руб. ($c = 100$), составляет 85 тыс. руб. ($f_4(100) = 85$). При этом четвертому предприятию должно быть выделено 40 тыс. руб. ($x_4^*(100) = 40$), а остальным трем: $100 - 40 = 60$ тыс. руб. Из той же таблицы видно далее, что оптимальное распределение оставшихся 60 тыс. руб. ($c = 60$) между тремя предприятиями обеспечит общий прирост продукции на них на сумму 48 тыс. руб. ($f_3(60) = 48$) при условии, что третьему предприятию будет выделено 40 тыс. руб. ($x_3^*(60) = 40$), а остальным двум $60 - 40 = 20$ тыс. руб. Оставшиеся 20 тыс. руб. при оптимальном распределении между двумя предприятиями дадут прирост продукции на сумму в 12 тыс. руб. ($f_2(20) = 12$). При этом второму предприятию нужно ассигновать 20 тыс. руб. ($x_2^*(20) = 20$), а на долю первого средств не останется ($20 - 20 = 0$).

Итак, максимальный прирост выпуска продукции на четырех предприятиях при распределении между ними 100 тыс. руб. составляет 85 тыс. руб. и будет получен, если первому предприятию средств не выделять, второму выделить 20 тыс., а третьему и четвертому — по 40 тыс. руб.

Предположим теперь, что 100 тыс. руб. нужно распределить оптимально между тремя предприятиями.

Из табл. 10.12 находим $f_3(100) = 79$ тыс. руб., прирост продукции на такую сумму может быть получен при $x_3^*(100) = 40$, т. е. если третьему предприятию ассигновать 40 тыс. руб., а двум другим $100 - 40 = 60$ тыс. руб. Эти средства при оптимальном их распределении между двумя другими предприятиями обеспечат прирост выпуска продукции на сумму $f_2(60) = 43$ тыс. руб. Но это возможно лишь в случае, если $x_2^* = 20$, т. е. если второму предприятию будет выделено 20 тыс. руб. Из табл. 10.12 видно далее, что оставшиеся $60 - 20 = 40$ тыс. руб. следует ассигновать первому предприятию, так как $f_1(40) = 31$ при $x_1^* = 40$.

И наконец, читателю предлагается убедиться в оптимальности следующего распределения 80 тыс. руб. между тремя предприятиями: $x_1^* = 40$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 40$; при этом $f_3(80) = 67$.

Упражнения

10.11. В табл 10.13 приведены значения $g_i(x)$ возможного прироста выпуска продукции на четырех предприятиях в зависимости от выделенной на реконструкцию и модернизацию производства суммы x.

Распределить между предприятиями имеющиеся 100 тыс. руб, чтобы общий прирост $f_4(100)$ выпуска продукции был максимальным Для упрощения вычислений значения x принимать кратными 20 тыс. руб.

Таблица 10.13

Предприятие		Прирост выпуска продукции на предприятиях $g_i(x)$, тыс. руб.	Средства c, тыс. руб.: 20	40	60	80	100	Вариант
№ 1		$g_1(x)$	9	18	24	38	50	0
			9	17	29	38	47	1
			7	29	37	41	59	2
			9	20	35	44	57	3
			9	18	29	41	60	4
			11	21	40	54	62	5
			12	26	40	60	72	6
			14	24	37	45	58	7
			16	28	36	49	60	8
			12	28	39	47	69	9
№ 2		$g_2(x)$	11	19	30	44	59	0
			11	34	46	53	75	1
			9	19	28	37	46	2
			12	25	34	46	57	3
			8	19	30	47	58	4
			13	20	42	45	61	5
			16	21	36	49	63	6
			12	30	42	58	71	7
			10	29	42	50	74	8
			14	26	40	51	68	9
№ 3		$g_3(x)$	16	32	40	57	70	0
			13	28	37	49	61	1
			17	27	37	48	66	2
			11	20	32	48	61	3
			12	25	51	58	69	4
			12	22	34	55	60	5
			9	17	35	51	65	6
			13	25	45	62	70	7
			15	27	46	58	65	8
			11	24	43	51	68	9
№ 4		$g_4(x)$	13	27	44	69	73	0
			12	35	40	54	73	1
			16	30	42	65	81	2
			14	23	40	50	58	3
			7	15	52	59	60	4
			10	27	33	57	69	5
			15	25	51	62	76	6
			7	33	46	60	68	7
			17	23	38	53	67	8
			16	21	36	49	72	9

§ 10.6. Оптимальная политика замены оборудования

Проблема своевременной замены устаревшего оборудования новым — одна из насущных проблем любой сферы производственной деятельности. В самом деле, с течением времени оборудование изнашивается и физически и «морально», а потому на каком-то этапе его эксплуатация становится менее выгодной, нежели приобретение и использование нового оборудования. В связи с этим и возникает задача определения наиболее подходящего момента замены. В качестве критерия оптимальности при замене оборудования в промышленности обычно принимают минимум ожидаемых затрат или максимум ожидаемой прибыли за некоторый период времени.

Мы рассмотрим задачу в упрощенной постановке. Пусть в начале планового периода из N лет имеется некоторое оборудование возраста t. Ежегодно производится продукция стоимостью $r(t)$. При этом оборудование требует эксплуатационных затрат $u(t)$ и имеет остаточную стоимость $s(t)$. Все перечисленные характеристики зависят от возраста t оборудования. В любой год оборудование можно сохранить или продать по остаточной стоимости и купить новое по цене p (сюда же входят затраты на установку и запуск в эксплуатацию).

Требуется разработать оптимальную политику замены оборудования исходя из условия максимизации ожидаемой прибыли за период времени длительностью N лет.

В соответствии с общей концепцией динамического программирования начнем процесс оптимизации с конца планового периода, т. е. рассмотрим сначала последний год периода. При этом годы будем нумеровать от конца периода к его началу: $n=1, 2, \ldots, N$.

Итак, пусть $n=1$. Будем считать, что к началу последнего года у нас имеется оборудование возраста t. По нашему усмотрению может быть принято одно из следующих решений: сохранить оборудование или продать его и купить новое.

Если оборудование сохранить, то за последний год прибыль составит

$$r(t)-u(t). \qquad (10.11)$$

Если же оборудование продать по остаточной стоимости и купить новое, то прибыль к концу последнего года выразится суммой

$$s(t)-p+r(0)-u(0), \qquad (10.12)$$

где $r(0)$ — стоимость продукции, произведенной новым оборудованием («нулевого» возраста) за год; $u(0)$ — расходы, связанные с эксплуатацией нового оборудования в течение года.

Поскольку планируется деятельность в последнем году планового периода, то в соответствии с концепцией динамического программирования мы должны действовать так, чтобы последний год сам по себе принес максимальную выгоду. Но результаты деятельности в данном случае характеризуются выражениями (10.11) и (10.12). Заменять оборудование будет выгодно лишь в случае, если $s(t)-p+r(0)-u(0)>r(t)-u(t)$, т. е. когда доход от нового оборудования больше (!), чем от старого.

Обозначим через $f_n(t)$ максимально возможную прибыль за последние n лет планового периода при условии, что в начале периода имеется оборудование возраста t и мы придерживаемся оптимальной политики. В соответствии с этим максимальную прибыль за последний год обозначим через $f_1(t)$. Ясно, что $f_1(t)$ равняется наибольшему из выражений (10.11) и (10.12), что символически запишется так:

$$f_1(t)=\max_t \begin{cases} r(t)-u(t) & \text{— сохранение;} \\ s(t)-p+r(0)-u(0) & \text{— замена.} \end{cases} \tag{10.13}$$

Пусть теперь $n=2$, т. е. рассматривается период, состоящий из двух последних лет.

Если к началу этого периода имеется оборудование возраста t и принято решение его сохранить, то к концу первого года будет получена прибыль $r(t)-u(t)$. За год оборудование постареет и к началу последнего года будет иметь возраст $(t+1)$ лет. Если в отношении этого оборудования на последнем году придерживаться оптимальной политики, то дополнительно будет получена прибыль $f_1(t+1)$, а общая прибыль за два года составит

$$r(t)-u(t)+f_1(t+1). \tag{10.14}$$

Если же в начале второго года будет принято решение оборудование заменить, то затраты, связанные с продажей и приобретением оборудования, составят $s(t)-p$, а прибыль от нового оборудования за первый год будет равна $r(0)-u(0)$. К концу года новое оборудование постареет и будет иметь возраст 1 год, поэтому оптимальная политика в последнем году принесет прибыль $f_1(1)$.

Общая же прибыль за два года составит

$$s(t)-p+r(0)-u(0)+f_1(1). \tag{10.15}$$

Оптимальной в последние два года будет политика, обеспечивающая за этот период максимальную прибыль, которая, очевидно, равна наибольшему из выражений (10.14) и (10.15). Записать это можно так:

$$f_2(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) + f_1(t+1) & \text{— сохранение;} \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + f_1(1) & \text{— замена.} \end{cases}$$

Рассуждая аналогично, можно получить выражения для $f_3(t)$ и т. д. Общие функциональные уравнения Беллмана имеют вид:

$$f_n(t) = \max_{t,\,n} \begin{cases} r(t)-u(t)+f_{n-1}(t+1) & \text{—сохранение;} \\ s(t)-p+r(0)-u(0)+f_{n-1}(1) & \text{—замена,} \end{cases} \qquad (10.16)$$

где $n=2, 3, \ldots$; $t=0, 1, 2, \ldots$

Рекуррентные соотношения (10.13) и (10.16) позволяют реализовать концепцию динамического программирования и развернуть процесс формирования оптимальной политики замен с конца планируемого периода, последовательно находя $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_{N-1}(t), f_N(t)$ для различных значений t. Процесс станет понятным, когда читатель разберет числовой пример, приведенный ниже.

Пример 10.4. Разработать оптимальную политику относительно оборудования возраста не старше 10 лет при следующих условиях: 1) стоимость $r(t)$ продукции, произведенной с использованием оборудования за год, и расходы $u(t)$, связанные с эксплуатацией оборудования, задаются табл. 10.14;

Таблица 10.14

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	27	26	26	25	24	23	23	22	21	21	20
$u(t)$	15	15	16	16	16	17	18	18	19	20	20

2) ликвидационная стоимость оборудования не зависит от его возраста и равна 4; 3) цена единицы нового оборудования со временем не меняется и равна 13.

Решение. Прежде всего запишем функциональные уравнения (10.13) и (10.16) для числовых данных нашего примера ($s(t)=4$, $p=13$, $r(0)=27$, $u(0)=15$):

$$f_1(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) \\ 4-13+27-15 \end{cases} =$$

$$= \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) & \text{— сохранение;} \\ 3 & \text{— замена;} \end{cases} \qquad (10.17)$$

$$f_n(t) = \max_{t,\,n} \begin{cases} r(t) - u(t) + f_{n-1}(t+1) & \text{— сохранение;} \\ 3 + f_{n-1}(1) & \text{— замена.} \end{cases} \qquad (10.18)$$

А теперь, пользуясь этими формулами, будем последовательно вычислять значения максимальной прибыли $f_n(t)$ при различных n и t и полученные величины записывать в специальную таблицу (табл. 10.15). Первую строку таблицы будем заполнять, придавая параметру t в формулах (10.17) значения 0, 1, ..., 10 и пользуясь данными табл. 10.14.

Пусть $t=0$, тогда выражение (10.17) примет вид

$$f_1(0) = \max_t \begin{cases} r(0) - u(0) \\ 3 \end{cases} = \max \begin{cases} 27 - 15 \\ 3 \end{cases} =$$

$$= \max \begin{cases} 12 \text{ — сохранение;} \\ 3 \text{ — замена.} \end{cases}$$

Так как $12 > 3$, то оптимальная политика, соответствующая $f_1(0)$, есть политика сохранения оборудования. Полученное значение максимальной прибыли (12) вписываем первым элементом первой строки табл. 10.15.

Таблица 10.15

$f_n(t)$ \ t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_1(t)$	12	11	10	9	8	6	5	4	3	3	3
$f_2(t)$	23	21	19	17	14	14	14	14	14	14	14
$f_3(t)$	33	30	27	24	24	24	24	24	24	24	24
$f_4(t)$	42	38	34	33	33	33	33	33	33	33	33
$f_5(t)$	50	45	43	42	41	41	41	41	41	41	41
$f_6(t)$	57	54	52	50	49	48	48	48	48	48	48
$f_7(t)$	66	63	60	58	57	57	57	57	57	57	57
$f_8(t)$	75	71	68	66	66	66	66	66	66	66	66
$f_9(t)$	83	79	76	75	74	74	74	74	74	74	74
$f_{10}(t)$	91	87	85	83	82	82	82	82	82	82	82

Пусть теперь $t=1$. Из формулы (10.17) получаем

$$f_1(1) = \max \begin{cases} 26 - 15 \\ 3 \end{cases} = \max \begin{cases} 11 \text{ — сохранение;} \\ 3 \text{ — замена.} \end{cases}$$

И снова заключаем, что оптимальной политикой, отвечающей $f_1(1)$, является политика сохранения оборудования. Значение максимальной прибыли (11) вписываем вторым элементом первой строки табл. 10.15.

Продолжая аналогично и дальше, при $t=7$ находим

$$f_1(7) = \max \begin{cases} 22-18 \\ 3 \end{cases} = \max \begin{cases} 4 \text{ — сохранение;} \\ 3 \text{ — замена,} \end{cases}$$

что по-прежнему соответствует политике сохранения оборудования. Но при $t=8$ имеем

$$f_1(8) = \max \begin{cases} 21-19 \\ 3 \end{cases} = \max \begin{cases} 2 \text{ — сохранение;} \\ 3 \text{ — замена.} \end{cases}$$

Здесь уже $2<3$, а это означает, что оптимальной будет политика замены оборудования.

Из табл. 10.14 видно, что $r(t)-u(t)$ с ростом t убывает, поэтому, если при $t=8$ $r(8)-u(8)=21-19=2<3$, то при $t>8$ и подавно $r(t)-u(t)<3$. Так что при $t>8$ оптимальной будет политика замены оборудования.

Чтобы в табл. 10.15 различать, в результате какой политики получается то или иное значение максимальной прибыли, разграничим жирной чертой элементы таблицы, соответствующие различным политикам. В результате в первой строке окажутся отделенными жирной чертой все элементы, начиная с $f_1(8)=3$. Аналогичное разделение элементов будем производить и во всех других строках таблицы.

Вторую строку табл. 10.15 заполняем на основе формулы

$$f_2(t) = \max_t \begin{cases} r(t)-u(t)+f_{2-1}(t+1); \\ 3+f_{2-1}(1) \end{cases}$$

или

$$f_2(t) = \max_t \begin{cases} r(t)-u(t)+f_1(t+1) \text{ — сохранение;} \\ 14 \qquad\qquad \text{— замена,} \end{cases} \tag{10.19}$$

полученной из (10.18) для двухлетнего периода ($n=2$). При этом учтено, что $f_1(1)=11$ (см. первую строку табл. 10.15).

Придавая в (10.19) параметру t значения 0, 1, ..., последовательно находим $f_2(0)=23$, $f_2(1)=21$, ... При этом значения $r(t)$ и $u(t)$ берем, как и ранее, из табл. 10.14, а значения $f_1(t+1)$ — из первой строки табл. 10.15.

При $t=4$ получаем

$$f_2(4) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) + f_1(5) \\ 14 \end{cases} = \max \begin{cases} 24 - 16 + 6 \\ 14 \end{cases} =$$

$$= \max \begin{cases} 14 — \text{сохранение;} \\ 14 — \text{замена.} \end{cases}$$

Здесь обе политики обеспечивают одинаковую прибыль в 14 единиц. Выбрать целесообразней все же политику сохранения, так как имеющееся оборудование нам хорошо известно и мы к нему привыкли.

При $t=5$ имеем

$$f_2(5) = \max \begin{cases} 23 - 17 + 5 \\ 14 \end{cases} = \max \begin{cases} 11 — \text{сохранение;} \\ 14 — \text{замена.} \end{cases}$$

Откуда видим, что $f_2(5)=14$ обеспечивается при политике замены.

Поскольку $r(t)-u(t)$ и $f_1(t+1)$ с ростом t убывают, что видно из табл. 10.14 и 10.15 (да и экономически понятно: чем старее оборудование, тем меньший доход оно дает), то при $t>5$ оптимальной будет политика замен и $f_2(t)=14$.

Третья строка табл. 10.15, отвечающая трехлетнему периоду ($n=3$), заполняется на основе формулы

$$f_3(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) + f_2(t+1) — \text{сохранение;} \\ 3 + 21 \qquad — \text{замена.} \end{cases}$$

При этом значения $f_2(t+1)$ следует брать из второй строки табл. 10.15.

Продолжая вычисления описанным способом, мы постепенно заполним всю табл. 10.15. Данные этой таблицы можно использовать для решения ряда задач.

Предположим, например, что в начале десятилетнего периода имеется оборудование четырехлетнего возраста и требуется выработать оптимальную политику в отношении этого оборудования.

В табл. 10.15 на пересечении строки $f_{10}(t)$ и столбца $t=4$ читаем значение максимальной прибыли, равное 82 единицам. Найдем теперь оптимальную политику, обеспечивающую эту прибыль. Замечаем, что значение $f_{10}(4)=82$ записано слева от жирной линии, в «области политик сохранения». Это означает, что для достижения в плановом периоде из 10 лет максимальной прибыли в 82 единицы надо в первом году оборудование сохранить.

В течение первого года оборудование постареет на один год, так что к концу года мы придем с оборудованием возраста $4+1=5$ лет. Теперь нам надо действовать оптимально в оставшемся периоде из 9 лет с оборудованием возраста 5 лет. На пересечении строки $f_9(t)$ и столбца $t=5$ читаем значение 74, оказавшееся справа от жирной линии, т. е. в «области политик замен». Заменив оборудование и проработав на нем очередной год, мы за 8 лет до конца планового периода будем иметь оборудование возраста 1 год. Теперь при наличии оборудования возраста 1 год нужно действовать оптимально в оставшиеся 8 лет. Продолжая рассуждать таким же образом, последовательно находим $f_8(1)=71$, $f_7(2)=60$, $f_6(3)=50$, $f_5(4)=41$ в области политик сохранения, что означает, что в третьем, четвертом, пятом и шестом годах имеющееся оборудование надо сохранять. Действуя оптимально и дальше, мы обнаруживаем, что $f_4(5)=33$ находится в области политик замен. Следовательно, на седьмом году оборудование придется заменить новым. Далее находим $f_3(1)=30$, $f_2(2)=19$ и $f_1(3)=9$, расположенные в области политик сохранения. Значит, на восьмом, девятом и десятом годах планового периода оборудование заменяться не будет.

Рассмотренный процесс формирования оптимальной политики можно изобразить символически следующим образом:

$$f_{10}(4)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{1-й год}} f_9(5)\xrightarrow[\text{замена}]{\text{2-й год}} f_8(1)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{3-й год}}$$

$$f_7(2)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{4-й год}} f_6(3)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{5-й год}} f_5(4)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{6-й год}}$$

$$f_4(5)\xrightarrow[\text{замена}]{\text{7-й год}} f_3(1)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{8-й год}} f_2(2)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{9-й год}}$$

$$f_1(3)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{10-й год}}. \qquad (10.20)$$

Анализируя рассмотренное решение, мы замечаем, что вместо поиска оптимальной политики сразу для всего десятилетнего периода мы предпочли находить серию взаимосвязанных оптимальных решений для отрезков времени меньшей длины (1 год), т. е. вместо решения одной сложной задачи находили оптимальные решения нескольких более простых взаимосвязанных задач аналогичного содержания. В этом и проявляется существо метода динамического программирования.

Табл. 10.15 составлена для десятилетнего периода времени. Однако ход рассуждений не изменится, если потребуется составить политику для планового периода меньшей продолжительности.

Пусть, например, в начале семилетнего периода имеется оборудование пятилетнего возраста и необходимо сформулировать политику в отношении этого оборудования. Рассуждая, как и выше, последовательно находим:

$$f_7(5)\xrightarrow[\text{замена}]{\text{1-й год}} f_6(1)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{2-й год}} f_5(2)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{3-й год}}$$

$$f_4(3)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{4-й год}} f_3(4)\xrightarrow[\text{замена}]{\text{5-й год}} f_2(1)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{6-й год}}$$

$$f_1(2)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{7-й год}}. \tag{10.21}$$

Таким образом, максимальная прибыль $f_7(5)=57$ единицам и достигается за счет политики, состоящей в том, что в первом году оборудование заменяется, затем в течение трех лет оно эксплуатируется, после чего (на пятом году) вновь заменяется и в оставшиеся два года планового периода сохраняется.

Известно, что поэтапное планирование многошагового процесса должно осуществляться так, чтобы при планировании политики для каждого этапа учитывалась не выгода, получаемая только на данном этапе, а общая выгода, получаемая по окончании всего процесса, и именно относительно общей выгоды производится оптимальное планирование. Эта особенность динамического программирования может быть наглядно проиллюстрирована на условиях только что рассмотренного примера. Итак, на первом году мы заменили оборудование и, как видно из табл. 10.15, получили по прошествии года прибыль, равную $57-54=3$ единицы, хотя могли сохранить оборудование и получить прибыль в 6 единиц ($f_1(5)=6$). Оказалось, что с точки зрения всего семилетнего периода, а не одного первого года, следует пойти на «жертву» в первом году, сознательно уменьшив прибыль.

В заключение этого примера проанализируем такую политику: не заменяя оборудования в первом году, получить прибыль в 6 единиц (это лучше, чем 3 единицы!), а впоследствии (начиная со второго года) придерживаться оптимальной политики. Несостоятельность такого подхода обнаруживается сразу. Из табл. 10.15 видно, что $f_6(6)=48$ единицам и, таким образом, суммарная ожидаемая прибыль составит $6+48=54$ единицы, что меньше 57 единиц, которые можно обеспечить, следуя с самого начала оптимальной политике замен (10.21).

Читателю предлагается убедиться в оптимальности политики

$$f_{10}(2)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{1-й год}} f_9(3)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{2-й год}} f_8(4)\xrightarrow[\text{замена}]{\text{3-й год}}$$

$$f_7(1)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{4-й год}} f_6(2)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{5-й год}} f_5(3)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{6-й год}}$$

$$f_4(4)\xrightarrow[\text{замена}]{\text{7-й год}} f_3(1)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{8-й год}} f_2(2)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{9-й год}}$$

$$f_1(3)\xrightarrow[\text{сохранение}]{\text{10-й год}}, \tag{10.22}$$

которой мы воспользуемся для иллюстрации одной из характерных особенностей метода динамического программирования.

Сопоставляя оптимальные политики (10.20) и (10.22), замечаем следующее: несмотря на то что в начале рассматриваемых периодов имелось оборудование разного возраста (четырехлетнее и двухлетнее) и в отношении его проводились разные политики, начиная с восьмого года политика в обоих случаях стала одинаковой. А произошло это потому, что к началу восьмого года возраст оборудования и в том и в другом случаях оказался одинаковым (равным одному году). Этим подтверждается важная особенность метода динамического программирования, состоящая в том, что прошлое оптимизируемого процесса не имеет значения при определении будущей политики. Иначе говоря, решение, принимаемое на данном этапе, не зависит от того, каким образом оптимизируемый процесс достиг теперешнего состояния. Оптимальная политика выбирается лишь с учетом факторов, характеризующих процесс в данный момент.

Упражнения

10.12. Разработать оптимальную политику относительно оборудования возраста не старше десяти лет, если известны: стоимость $r(t)$ продукции, производимой в течение года с использованием данного оборудования; ежегодные расходы $u(t)$, связанные с эксплуатацией оборудования; его остаточная стоимость $s(t)$; стоимость p нового оборудования (сюда же включены расходы, связанные с установкой, наладкой и запуском оборудования).

После составления матрицы максимальных прибылей сформировать оптимальные политики в отношении оборудования данного возраста t в плановом периоде данной продолжительности N.

Все числовые данные (в десяти вариантах) приведены в табл. 10.16 и 10.17.

Таблица 10.16

Вариант	0		1		2		3		4		5		6		7		8		9	
Продолжительность периода N	10	8	10	6	10	7	10	8	10	6	10	9	10	8	10	7	10	9	10	6
Возраст t оборудования	7	1	7	4	8	5	6	5	8	4	7	6	6	5	9	4	6	8	9	3
Остаточная стоимость $s(t)$	0		2		2		0		3		0		5		2		0		1	
Стоимость p нового оборудования	10		11		14		10		10		8		17		12		6		13	

Таблица 10.17

	Возраст оборудования t											Вариант
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Стоимость продукции, произведенной за год, $r(t)$	20	20	20	19	19	18	18	17	17	16	15	0
	22	22	21	21	21	20	20	19	19	19	18	1
	25	24	24	23	22	22	21	21	21	20	20	2
	28	27	27	26	25	25	24	23	23	22	21	3
	21	20	19	19	18	18	17	16	16	15	15	4
	24	24	24	23	23	22	21	21	21	20	20	5
	28	27	26	25	24	24	23	22	22	22	21	6
	20	20	19	18	17	16	16	15	15	14	13	7
	26	25	25	24	24	23	23	23	22	21	21	8
	23	23	22	22	21	20	20	20	19	18	18	9
Расходы, связанные с эксплуатацией оборудования в течение года, $u(t)$	10	11	12	12	13	13	14	14	15	15	15	0
	12	13	13	14	15	15	16	16	17	18	18	1
	13	13	14	15	15	16	16	17	18	19	20	2
	16	16	17	17	17	18	18	19	20	20	21	3
	11	11	11	12	12	13	13	13	14	14	15	4
	13	14	15	16	17	17	17	18	19	19	20	5
	15	15	16	17	17	18	19	20	20	21	21	6
	8	9	9	10	10	10	11	11	12	13	13	7
	15	15	16	16	17	17	18	19	19	20	21	8
	11	12	13	14	14	15	16	17	17	17	18	9

Глава 11. МНОГОЦЕЛЕВЫЕ ЗАДАЧИ

§ 11.1. Понятие о многоцелевых задачах

Известно, что экономическая *эффективность производства количественно измеряется системой экономических показателей.* В экономике различают *показатели* и *критерии эффективности.* Например, критерием следует считать максимальный объем продукции, произведенной в течение года при наименьших затратах на единицу продукции, а показателем будет служить сопоставление результата с затратами на его достижение. Так, в сельскохозяйственном производстве важными показателями эффективности являются: валовой доход на единицу сопоставимых по качеству сельскохозяйственных угодий, чистый доход, прибыль, рентабельность и др.

Максимальное значение одного из показателей еще не означает, что то или иное предприятие работает лучше. Только система показателей может характеризовать эффективность всего производства.

Задачи, решаемые с учетом множества (системы) показателей или критериев, носят название многоцелевых.

Планы задач, полученные по разным критериям, будут отличаться один от другого. Например, решая задачу по критериям максимума чистого дохода и минимума издержек производства (двухцелевая задача), имеем два различных плана. Задачи могут быть как линейные, так и нелинейные. Цель решения таких экономических задач — найти такой план, при котором система критериев была бы наилучшей (эффективной, компромиссной или субоптимальной). В зависимости от критериев эффективный план для каждой задачи определяется по-разному. Если все критерии равнозначны, то эффективным считается такой план, при котором отклонения от оптимумов по каждому критерию равны. Для задач, у которых критерии не равнозначны, применяется соответственно другой метод решения, так называемый *метод уступок.*

§ 11.2. Алгоритм метода уступок

Прежде чем решать поставленную задачу по нескольким критериям, необходимо:

1) *расположить критерии по их значимости (наиболее важный считается первым);*

2) *решить задачу по первому критерию, $f_1 = f_1^*$, т. е. отыскать экстремальное значение f_1^* целевой функции f_1.*

3) *сделать уступку по первому критерию; иными словами, уменьшить величину f_1 до значения $f_1 = k_1 f_1^*$, $0 < k_1 < 1$;*

4) *в задачу ввести дополнительное ограничение $f_2 \geqslant k_1 f_1^*$;*

5) *решить задачу по второму критерию $f_2 = f_2^*$,* где f_2^* — *экстремальное значение целевой функции f_2;*

6) *обратиться к пункту 3 алгоритма и сделать уступку для второго критерия $f_2 = k_2 f_2^*$, $0 < k_2 < 1$;*

7) *обратиться к пунктам 4 алгоритма, т. е. ввести в задачу дополнительное ограничение $f_2 \geqslant k_2 f_2^*$, $0 < k_2 < 1$;*

8) *новую задачу, уже с двумя дополнительными ограничениями, решить по третьему критерию и т. д.;*

9) *процесс решения задачи заканчивается, когда решение будет получено по всем критериям. Окончательный план и будет наиболее эффективным. При этом получаем экстремальное значение наименее важного критерия при условии гарантированных значений предшествующих критериев.*

Проиллюстрируем решение задач по методу уступок на примерах.

Пример 11.1. Решить задачу по двум критериям, считая первый наиболее предпочтительным. Его отклонение от максимального значения составляет 10%:

$$f_1 = x_1 + 2x_2 \ (\max);$$
$$f_2 = x_1 + x_2 \ (\min);$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geqslant 6; \\ x_1 \qquad &\leqslant 4; \\ x_2 &\leqslant 5; \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.$$

Решение. Решим задачу методом уступок графически. Область допустимых решений $ABCD$ задачи показана на рис. 11.1. Максимальное значение целевой функции достигается в точке $C(4;\ 5)$, $f_1^*\ (\max) = 14$. Делаем уступку на 10%, т. е. уменьшаем величину $f_1^* = 14$ до значения $f_1^* = 0{,}9 \cdot 14 = 12{,}6$.

Дополнительное ограничение

$$x_1+2x_2 \geqslant 12{,}6.$$

Линия уровня $x_1+2x_2=12{,}6$ опускается ниже и отсекает от многоугольника область ECK. В этой области в точке E находим минимум целевой функции $f_2=x_1+x_2=2{,}6+5=7{,}6$.

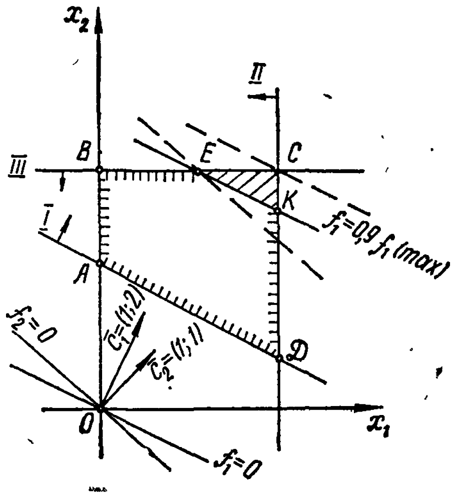

Рис 11.1

Таким образом, план в точке $E(2{,}6;\ 5)$ будет при данных условиях задачи наиболее эффективным, субоптимальным по двум критериям:

$$f_1^*(\max)=12{,}6,\ f_2^*(\min)=7{,}6;$$

$$\bar{x}^*=(x_1^*,\ x_2^*)=(2{,}6;\ 5).$$

Пример 11.2. Предприятие изготовляет два вида продукции № 1 и № 2, располагая при этом производственными мощностями четырех видов в следующем количестве: первого вида на менее 12, а остальных — не более 10, 6, 7. Нормы затрат мощностей каждого вида составляют на единицу продукции № 1: 3, 1, 1, 0; на единицу продукции № 2: 4, 1, 0, 1.

Прибыль от сбыта единицы продукции № 1 равна 3 руб., продукции № 2 — 5 руб. Чистый доход от единицы продукции № 1 равен 3 руб., а продукции № 2 — 1 руб. Затраты на производство единицы продукции № 1 составляют 2 руб., продукции № 2 — 1 руб.

Найти компромиссный план производства продукции обоих видов, считая наиболее предпочтительным критерием прибыль с отклонением от максимального значения 20%, чистый доход с отклонением 40% и менее важным — критерий затрат.

Решение. Пусть x_1 — количество продукции № 1, x_2 — продукции № 2, планируемое к выпуску. Производство продукции должно принести максимальную прибыль и максимальный чистый доход при минимуме затрат.

Составляем математическую модель задачи:

$$f_1 = 3x_1 + 5x_2 \ (\max);$$
$$f_2 = 3x_1 + x_2 \ (\max);$$
$$f_3 = 2x_1 + x_2 \ (\min).$$
$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\geqslant 12; \\ x_1 + x_2 &\leqslant 10; \\ x_1 &\leqslant 6; \\ x_2 &\leqslant 7; \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \geqslant 0; \ x_2 \geqslant 0.$$

Область допустимых решений $ABCDEF$ задачи представлена на рис. 11.2, *а*. Для целевых функций f_1 и f_2 необходимо определить максимальное, а для целевой функции f_3 — минимальное значение. Линии уровня этих функций и оптимальные вершины показаны на рис. 11.2, *а*.

Максимальное значение целевой функции f_1 достигается в точке $C(3;\ 7)$, $f_1(\max) = 44$.

Делаем уступку по первому критерию на 20%, получаем

$$f_1 = 0{,}8 \cdot 44 = 35{,}2.$$

Дополнительное ограничение имеет вид

$$3x_1 + 5x_2 \geqslant 35{,}2.$$

Линия уровня $3x_1 + 5x_2 = 35{,}2$ опустится ниже (рис. 11.2, *б*) и отсечет область $KCDN$.

Решаем задачу по второму критерию. Максимальное значение f_2 достигается в точке $D(6;\ 4)$, $f_2(\max) = 22$. Делаем уступку по второму критерию на 40%, получаем

$$f_2 = 0{,}6 \cdot 22 = 13{,}2.$$

Дополнительное ограничение имеет вид

$$3x_1 + x_2 \geqslant 13{,}2.$$

Линия уровня $3x_1+x_2=13{,}2$ еще уменьшает область решений (рис. 11.2, *в*, многоугольник $TCDNM$).

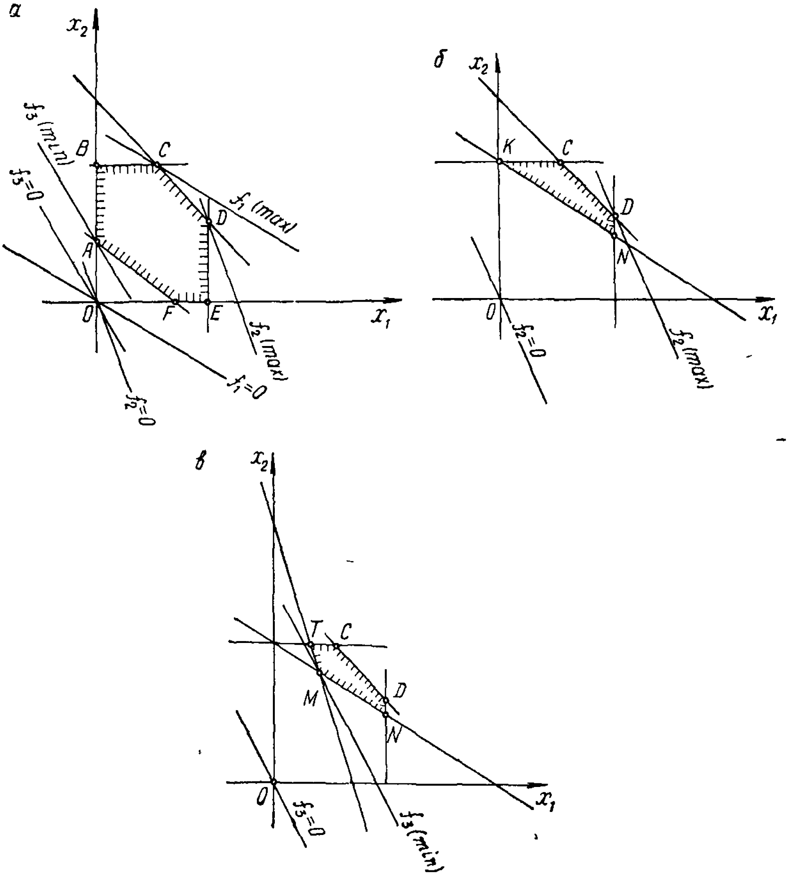

Рис 11 2

План в точке $M(2{,}567;\ 5{,}5)$, минимизирующий на новой области третью целевую функцию f_3, и будет субоптимальным по всем трем критериям:

$$\bar{x}^* = (x_1^*;\ x_2^*) = (2{,}567;\ 5{,}5);$$

$$f_1 = 3\cdot 2{,}567 + 5\cdot 5{,}5 \approx 35{,}2;$$

$$f_2 = 3\cdot 2{,}567 + 5{,}5 \approx 13{,}2;$$

$$f_3 = 2\cdot 2{,}567 + 5{,}5 \approx 10{,}6.$$

Пример 11.3. Найти компромиссное решение задачи при условии, что отклонение по первому критерию от максимального значения составляет 50%:

$$f_1 = 3x_1 + 2x_3 \ (\max);$$
$$f_2 = x_1 + 2x_2 + x_3 \ (\min).$$

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 5x_3 &\leqslant 6; \\ x_1 \qquad - 2x_3 &\leqslant 2; \\ 2x_2 - x_3 &\leqslant 5; \\ x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1, 3}). \end{aligned}\right\}$$

Решение. Решим задачу симплекс-методом по первому критерию (табл. 11.1—11.4).

Таблица 11.1

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$x_4 =$	6	-2	-1	5
$x_5 =$	2	$\boxed{1}$	0	-2
$x_6 =$	5	0	2	-1
$f_1 =$	0	-3	0	-2

Таблица 11.2

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_3$
$x_4 =$	10	2	-1	$\boxed{1}$
$x_1 =$	2	1	0	-2
$x_6 =$	5	0	2	-1
$f_1 =$	6	3	0	-8

Таблица 11.3

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_4$
$x_3 =$	10	2	-1	1
$x_1 =$	22	5	-2	2
$x_6 =$	15	2	$\boxed{1}$	1
$f_1 =$	86	19	-8	8

Таблица 11.4

	1	$-x_5$	$-x_6$	$-x_4$
$x_3 =$	25			
$x_1 =$	52			
$x_2 =$	15			
$f_1 =$	206	35	8	16

Максимальное значение целевой функции f_1 достигается для плана

$$\overline{x}^* = (x_1^*;\ x_2^*;\ x_3^*) = (52;\ 15;\ 25);\ f_1(\max) = 206.$$

Делаем уступку на 50%, получаем

$$f_1 = 0{,}5 \cdot 206 = 103.$$

Дополнительное ограничение

$$3x_1 + 2x_3 \geqslant 103.$$

С учетом дополнительного ограничения условия задачи будут иметь вид:

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 5x_3 &\leqslant 6; \\ x_1 \quad - 2x_3 &\leqslant 2; \\ 2x_2 - x_3 &\leqslant 5; \\ 3x_1 \quad + 2x_3 &\geqslant 103. \end{aligned}$$

Решим задачу по второму критерию (табл. 11.5—11.8).

Таблица 11.5

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$x_4 =$	6	−2	−1	5
$x_5 =$	2	$\boxed{1}$	0	−2
$x_6 =$	5	0	2	−1
$x_7 =$	−103	−3	0	−2
$f_2 =$	0	−1	−2	−1

Таблица 11.6

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_3$
$x_4 =$	10	2	−1	$\boxed{1}$
$x_1 =$	2	1	0	−2
$x_6 =$	5	0	2	−1
$x_7 =$	−97	3	0	−8
$f_2 =$	2	1	−2	−3

Таблица 11.7

	1	$-x_5$	$-x_2$	$-x_4$
$x_3 =$	10	2	−1	1
$x_1 =$	22	5	−2	2
$x_6 =$	15	2	1	1
$x_7 =$	−17	19	$\boxed{-8}$	8
$f_2 =$	32	7	−5	3

Таблица 11.8

	1	$-x_5$	$-x_7$	$-x_4$
$x_3 =$	97/8			
$x_1 =$	105/4			
$x_6 =$	137/8			
$x_2 =$	17/8			
$f_2 =$	341/8	−39/8	−5/8	−2

Таким образом, при данных условиях задачи субоптимальным является план

$$\overline{x}^* = (\overset{*}{x}_1;\ \overset{*}{x}_2;\ \overset{*}{x}_3) = (105/4;\ 17/8;\ 97/8),$$

для которого $f_1 = 103$; $f_2 = 341/8$.

Упражнения

Решить задачи 11.4—11.6 методом уступок.

11.4. Найти компромиссное решение задачи с учетом отклонения от максимального значения по первому критерию на 40%:

$$f_1 = x_1 + x_2\,(\max);$$
$$f_2 = x_1 + 3x_2\,(\min).$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geqslant 9; \\ 2x_1 - 3x_2 &\leqslant 8; \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 2; \\ x_2 &\leqslant 5; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

11.5. Найти компромиссное решение задачи, считая второй критерий наиболее предпочтительным. Его отклонение от минимального значения 20%:

$$f_1 = 2x_1 + 4x_2 \,(\max);$$
$$f_2 = x_1 + x_2 \,(\min).$$

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 &\leqslant 20; \\ 12x_1 + 3x_2 &\geqslant 24; \\ x_1 \qquad &\leqslant 3; \\ x_2 &\leqslant 3; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

11.6. Найти компромиссное решение задачи, считая первый критерий наиболее предпочтительным. Его отклонение от максимального значения 25%:

$$f_1 = 2x_1 + x_2 + 4x_3 \,(\max);$$
$$f_2 = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \,(\min).$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leqslant 12; \\ x_2 + 2x_3 &\leqslant 8; \\ x_1 \qquad + 3x_3 &\geqslant 9; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \; (j = \overline{1,3}).$$

§ 11.3. Метод равных и наименьших отклонений

При решении задач линейного программирования по методу уступок мы имеем различные отклонения критериев от экстремальных значений. Потребуем, чтобы в компромиссном плане относительные отклонения всех критериев от своих экстремальных значений были равны и минимальны. При этом предполагается, что в области допустимых решений задачи не существует плана, оптимизирующего все критерии.

Условие равенства отклонений запишем в виде

$$\left| \frac{f_1 - f_1^*}{f_1^*} \right| = \left| \frac{f_2 - f_2^*}{f_2^*} \right| = \ldots = \left| \frac{f_m - f_m^*}{f_m^*} \right|, \qquad (11.1)$$

где f_k^* — экстремальное значение целевой функции f_k $(k = \overline{1, m})$.

Если некоторым критериям отдается предпочтение, то в условие равенства отклонений вводятся соответствующие коэффициенты $k_2>0$, $k_3>0$, ..., $k_m>0$ (коэффициент k_1 считается равным единице).

В этом случае соотношение (11.1) примет вид

$$\left|\frac{f_1-f_1^*}{f_1^*}\right|=k_2\left|\frac{f_2-f_2^*}{f_2^*}\right|=\ldots=k_m\left|\frac{f_m-f_m^*}{f_m^*}\right|. \quad (11.2)$$

Предполагая, например, что все критерии задачи максимизируются, условие равенства отклонений после соответствующий преобразований запишем в виде

$$q_1f_1=q_kf_k$$

или

$$q_1f_1-q_kf_k=0, \quad (11.3)$$

где $q_k=\frac{1}{f_k^*}$, $k=\overline{1,m}$; m — число критериев задачи.

Для случая, когда один критерий максимизируется, а второй минимизируется, условие равенства отклонений запишется так:

$$q_1f_1+q_2f_2=2. \quad (11.4)$$

Так как относительные отклонения для всех критериев равны, то для минимизации достаточно взять любое из отклонений. Возьмем, например, отклонение первого критерия

$$\left|\frac{f_1-f_1^*}{f_1^*}\right|.$$

Чтобы его уменьшить, нужно f_1 увеличить, приближая f_1 к максимальному значению f_1^*. Новая задача, которая называется *замещающей,* решается на максимум переменной f_1. Аналогично решается замещающая задача и по второму критерию.

Для критерия, который минимизируется, например, для третьего, относительное отклонение

$$\left|\frac{f_3-f_3^*}{f_3^*}\right|$$

будет минимальным, когда f_3 окажется приближенным к своему наименьшему значению f_3^*, т. е. будет найден минимум f_3.

В качестве целевой функции можно взять любое из следующих выражений:

$$u = f_1 \quad (\max);$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u = f_k \quad (\min);$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u = f_m \quad (\max).$$

Тогда все остальные требования выполняются автоматически.

Итак, чтобы решить задачу линейного программирования методом равных и наименьших относительных отклонений, необходимо составить так называемую замещающую задачу, т. е. к системе ограничений данной задачи добавить дополнительные условия

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - f_1 = 0; \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\sum_{j=1}^{n} h_j x_j - f_k = 0; \\ &q_1 f_1 - q_k f_k = 0; \\ &q_1 f_1 + q_k f_k = 2, \end{aligned}\right\}$$

где оптимизируемые критерии $f_1, \ldots, f_k$ включены в число неизвестных.

Проиллюстрируем метод равных и наименьших относительных отклонений на примере.

Пример 11.7. Решить задачу линейного программирования по двум критериям:

$$f_1 = x_1 + 2x_2 \,(\max);$$
$$f_2 = x_1 + x_2 \,(\min).$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geqslant 6; \\ x_1 \qquad &\leqslant 4; \\ x_2 &\leqslant 5; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.$$

Решение. Решим задачу симплекс-методом по каждому критерию.

Для первого критерия (табл. 11.9—11.12):

Таблица 11.9

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_3 =$	-6	-1	$\boxed{-2}$
$x_4 =$	4	1	0
$x_5 =$	5	0	1
$f_1 =$	0	-1	-2

Таблица 11.10

	1	$-x_1$	$-x_3$
$x_2 =$	3	1/2	$-1/2$
$x_4 =$	4	1	0
$x_5 =$	2	$-1/2$	$\boxed{1/2}$
$f_1 =$	6	0	-1

Таблица 11.11

	1	$-x_1$	$-x_5$
$x_2 =$	5	0	1
$x_4 =$	4	$\boxed{1}$	0
$x_3 =$	4	-1	2
$f_1 =$	10	-1	2

Таблица 11.12

	1	$-x_4$	$-x_5$
$x_2 =$	5		
$x_1 =$	4		
$x_3 =$	8		
$f_1 =$	14	1	2

Максимальное значение целевой функции f_1 равно $f_1(\max)=14$.

Решаем задачу по второму критерию (табл. 11.13, 11.14).

Таблица 11.13

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_3 =$	-6	-1	$\boxed{-2}$
$x_4 =$	4	1	0
$x_5 =$	5	0	1
$f_2 =$	0	-1	-1

Таблица 11.14

	1	$-x_1$	$-x_3$
$x_2 =$	3		
$x_4 =$	4		
$x_5 =$	2		
$f_2 =$	3	$-1/2$	$-1/2$

Минимальное значение целевой функции f_2 равно $f_2(\min)=3$.

Поскольку в задаче производится максимизация и минимизация, то дополнительным условием равных относительных отклонений будет

$$q_1 f_1 + q_2 f_2 = 2,$$

где

$$q_1 = \frac{1}{f_1(\max)} = \frac{1}{14}; \quad q_2 = \frac{1}{f_2(\min)} = \frac{1}{3}.$$

Дополнительное условие равных относительных отклонений после подстановки значений q_1, q_2, f_1 и f_2 примет вид

$$1/14(x_1+2x_2)+1/3(x_1+x_2)=2.$$

Упрощая данное соотношение, получим

$$17x_1+20x_2=84 \quad \text{или} \quad 0=-17x_1-20x_2+84.$$

Составляем ограничения замещающей задачи:

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2 &\geqslant 6;\\ x_1 \quad &\leqslant 4;\\ x_2 &\leqslant 5;\\ x_1+2x_2-f_1 &= 0;\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1+\quad x_2-f_2 &= 0;\\ -17x_1-20x_2+84 &= 0;\\ x_1\geqslant 0;\ x_2 &\geqslant 0;\\ f_1\geqslant 0;\ f_2 &\geqslant 0.\end{aligned}\right\}$$

В канонической форме замещающая задача примет следующий вид:

$$\left.\begin{array}{lr} u=x_1+2x_2 & (\max);\\ x_1+2x_2-x_3 & =\ 6;\\ x_1 \qquad\quad +x_4 & =\ 4;\\ \qquad x_2 \qquad\quad +x_5 & =\ 5;\\ x_1+2x_2 \qquad\qquad\qquad -f_1 & =\ 0;\\ x_1+\ x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad -f_2 & =\ 0;\\ 17x_1+20x_2 & =84;\\ x_j\geqslant 0\ (j=\overline{1,5});\quad f_k\geqslant 0\ (k=1,2). & \end{array}\right\}$$

Здесь в качестве целевой функции взят первый критерий задачи, который максимизируется. Аналогично можно было бы взять в качестве целевой функции и второй критерий. Тогда задача решалась бы на минимум второго критерия.

Решаем замещающую задачу симплекс-методом (табл. 11.15, 11.16).

Имеем субоптимальный план $\bar{x}^*=(x_1^*;\ x_2^*)=(0,21/5)$, для которого

$$f_1^*=42/5=8{,}4;\quad f_2^*=21/5=4{,}2.$$

Таблица 11.15

	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_3 =$	-6	-1	-2
$x_4 =$	4	1	0
$x_5 =$	5	0	1
$f_1 =$	0	-1	-2
$f_2 =$	0	-1	-1
$0 =$	84	17	$\boxed{20}$
$u =$	0	-1	-2

Таблица 11.16

	1	$-x_1$
$x_3 =$	12/5	
$x_4 =$	4	
$x_5 =$	4/5	
$f_1 =$	42/5	
$f_2 =$	21/5	
$x_2 =$	21/5	
$u =$	42/5	7/10

Упражнения

Решить задачи методом равных и наименьших отклонений.

11.9. $f_1 = 4x_1 + 2x_2$ (max);

$f_2 = x_1 + 2x_2$ (max).

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqslant 8; \\ -x_1 + 2x_2 &\leqslant 4; \\ x_1 + x_2 &\geqslant 2; \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

11.10. $f_1 = 2x_1 + 3x_2$ (max);

$f_2 = x_1 + 2x_2 - x_3$ (min).

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geqslant 1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8; \\ -x_1 + 3x_2 &\geqslant 3; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \; (j = \overline{1,3}).$$

11.11. $f_1 = 2x_1 + 4x_2$ (max);

$f_2 = 2x_1 + 3x_2 + x_3$ (max);

$f_3 = x_1 + x_2 + x_3$ (min).

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geqslant 5; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 17; \\ x_2 &\leqslant 4; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \; (j = \overline{1,3}).$$

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.1. (1; —1; 3; 4). **1.2.** $x_1=3/2x_3+7/2$; $x_2=-1/2x_3+7/2$, где x_3 — любое. **1.3.** $x_1=4/5x_3+1/5x_4+1$; $x_2=2/5x_3+3/5x_4+2$, где x_3 и x_4 — любые. **1.4.** Система несовместна. **1.5.** $x_3=22x_1-33x_2-11$; $x_4=-16x_1+24x_2+8$, где x_1 и x_2 — любые. **1.6.** $x_3=-8x_1+4x_2-1$; $x_4=0$; $x_5=2x_1-x_2+1$, где x_1 и x_2 — любые. **1.7.** (1; 2; 0; 0); (—3; 0; —5; 0); (1/3; 0; 0; —10/3); (0; 3/2; —5/4; 0); (0; —1; 0; —5); (0; 0; —1/2; —3). **1.8.** (0; 4; 0; 2); (2; —2; 0; 0); (4/3; 0; 0; 2/3); (0; 0; —4/9; 2/3); (0; —2; —2/3; 0). **1.9.** (2; 18; 13; 0); (2; 0; —7/5; 18/5); (2; 7/4; 0; 13/4). **1.10.** (0; 0; 5; 6); (5/8; 0; 0; —1/4); (0; 2/5; 1/5; 0); (3/5; 0; 1/5; 0); (0; 5/12; 0; —1/4). **1.11.** (1; 2; 0; 0). **1.12.** (2; 3; 0). **1.13.** Система несовместна в области неотрицательных значений неизвестных. **1.14.** (4; 12; 0; 0); (10; 0; 6; 0); (0; 10; 0; 2); (0; 0; 4; 4). **1.15.** (0; 12; 0; 12); (6; 18; 0; 0); (4; 0; 4; 0); (0; 0; 3; 9). **1.16.** (0; 1; 0; 1); (0; 0; 1; 2); (2; 0; 3; 0); (1/2; 3/2; 0; 0). **1.17.** (0; 0; 4; 24); (0; 4; 0; 56); (8; 0; 20; 0). **1.20.** (0; 1/2; 0). **1.21.** (0; 2; 4; 1; 0). **1.22.** $-x_1+x_2\leqslant 1$; $x_1-x_2\leqslant 1$; $x_1+x_2\leqslant 2$; $x_1\geqslant 0$; $x_2\geqslant 0$. **1.23.** $2x_1-x_2\leqslant 3$; $x_1+x_2\leqslant 3$; $x_1\geqslant 0$; $x_2\geqslant 0$. **1.24.** $3x_1+2x_2\geqslant 84$, $4x_1+x_2\geqslant 80$; $3x_1+13x_2\geqslant 150$; $x_1\geqslant 0$; $x_2\geqslant 0$.

Глава 2

2.8. а) Наименьшее значение 4, наибольшее 19; б) наименьшее значение 26, наибольшее 53. **2.9.** а) Наименьшее значение —27/13, наибольшее 67/11; б) наименьшее значение 1/3, наибольшее 12/7. **2.10.** (1000; 2000). **2.11.** (1; 3). **2.12.** (24; 6). **2.13.** (2; 5). **2.14.** (60; 50).

Глава 3

3.1. (2; 5; 0; 0). **3.2.** (0; 0; 6; 3/2; 1/2). **3.3.** (0; 27/5; 0; 7/5; 1/5). **3.4.** (3; 2; 0; 0; 1; 1). **3.5.** (3; 0; 1; 3). **3.6.** Функция неограниченная. **3.7.** (0; 3; 0; 4/5). **3.8.** (0; 2; 4; 1; 0). **3.9.** (20; 40). **3.10.** (75; 0; 25; 200). **3.11.** (12; 0; 0; 4). **3.12.** (4; 0; 2; 0). **3.13.** (0; 3/2; 5/8; 0; 0; 3/2). **3.14.** (0; 0; 0; 5/3; 1/3). **3.15.** Задача неразрешима. **3.16.** (22,5; 0; 26,25). **3.17.** (12; 0; 18). **3.18.** (58000/13; 16000/13; 4000/13). **3.19.** (600; 700; 0). **3.20.** (0; 500; 0; 0). **3.21.** а) (8/17; 7/17; 2/17); б) (250; 675; 1500); в) (5; 1; 0; 72/13); д) $x_{11}=50$; $x_{22}=20$; $x_{31}=30$.

Глава 4

4.13. а) (200; 150; 50); б) (1; 1; 1); в) целесообразно, ибо $\Delta p=75$; г) $\Delta_4=1$, следовательно, нецелесообразно; д) $\Delta f_1=70$; $\Delta f_2=200$; $\Delta f_3=-40$; $\Delta f=230$. **4.14.** а) (150; 200; 150); (3/2; 1; 1/2); б) ресурс I — [200; ∞], ресурс II — [400; ∞], ресурс III — [0; 275]; в) $\Delta f_1=-225$; $\Delta f_3=35$; $\Delta f=-190$. **4.15.** (475; 50; 100); (1; 1; 1).

Глава 5

5.1. 586. **5.2.** а) 495; б) 1090; в) 282; г) 1141; д) 1742; е) 357; ж) 170; з) 48. **5.3.** 58850. **5.4.** 565. **5.5.** Затраты можно уменьшить на 35 единиц. **5.6.** 1020. **5.7.** 22897. **5.8.** 24050; 300 единиц. **5.9.** 804450. **5.10.** 152,5. **5.11.** 240. **5.12.** 2510. **5.13.** Построить новый завод на 100 единиц продукции и расширить производство на заводе № 2 на 100 единиц. **5.14.** а) 770; б) 570; в) 640; г) 2535; д) 340.

Глава 6

6.1. (0; 0; 7). **6.2.** (2; 1). **6.3.** (0; 1; 1); (1; 0; 2). **6.4.** (1; 0; 0; 2). **6.5.** (0; 4; 0; 1; 0). **6.6.** (1; 2; 3). **6.7.** (6; 1; 4). **6.8.** (6; 18).

Глава 7

7.1. 21/8. **7.2.** 4/3. **7.3.** 3/4. **7.4.** 1/3. **7.5.** 3/26. **7.6.** 40; 30. **7.7.** (1200; 1000; 800). **7.8.** (400; 500).

Глава 8

8.1. При $t=1$ максимум f_t в вершине (4; 2) и в вершине (5; 0). При $1<t\leqslant 15$ максимум f_t достигается в вершине (5; 0). **8.2.** При $1\leqslant t\leqslant 7$ максимум в вершине (20/19; 72/19). **8.4.** При $1\leqslant t\leqslant 2$ максимум в вершине (3; 2; 0; 0), при $2\leqslant t\leqslant 20$ — в вершине (3; 0; 0; 0). При $t=2$ максимум в обеих вершинах и в их выпуклой оболочке. **8.5.** При $1\leqslant t\leqslant 3{,}5$ максимум в вершине (5; 0; 7), при $3{,}5\leqslant t\leqslant 10$ — в вершине (5; 0; 0). При $t=3{,}5$ максимум в обеих вершинах и в их выпуклой оболочке. **8.6.** При $0\leqslant t\leqslant 1/4$ максимум в вершине (150; 200; 150), при $1/4\leqslant t\leqslant 5$ — в вершине (250; 0; 550). При $t=1/4$ максимум в обеих вершинах и в их выпуклой оболочке.

Глава 9

9.3. (0,5; 0,5) — точка максимума. **9.4.** $(3/\sqrt{13};\ 2/\sqrt{13})$ — точка максимума; $(-3/\sqrt{13};\ -2/\sqrt{13})$ — точка минимума. **9.5.** (18/13; 12/13) — точка минимума. **9.6.** (1; —2; 2) — точка максимума; (—1; 2; —2) — точка минимума. **9.7.** (2; 4; 6) — точка максимума. **9.8.** (1; 1; 1) — точка максимума. **9.9.** $1/7\,(12-\sqrt{18})$; $1/7\,(12+\sqrt{18})$. **9.10.** 4; 112/27. **9.11.** (2; 3). **9.12.** (5; 2). **9.13.** (2; 4). **9.14.** (6; 1). **9.15.** (52/25; 111/25). **9.16.** (135/37; 70/37). **9.17.** (1,5; 0,4). **9.18.** (0,7906; 1,2580). **9.19.** (7/8; 5/8; 15/8).

9.20.

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Оптимальный план	(6; 2)	(2; 4)	(4; 2)	(2; 3)	(6; 1)	(5; 2)	(3; 4)	(2; 3)	(2; 4)	(5; 2)

Глава 10

10.1. *(1—4—6—9—10)*. **10.2.** $f_n(s)=\min\limits_{s,j}\,[c_{sj}+f_{n-1}(j)]$. **10.3.** а) *(1—2—5—7—9)*; б) *(1—4—5—8—10)* и *(1—4—5—9—10)*; в) *(1—2—4—7—10)*; г) *(1—*

2—4—7—11—13). **10.4.** $f_n(i)=\min\limits_x [c(x)+h(i+x-d_n)+f_{n-1}(i+x-d_n)]$ $(n=\overline{1,N})$; $i=0, 1, 2, \ldots, d_1+\ldots+d_n$; $d_n-i\leqslant x\leqslant \min(d_1+\ldots+d_n-i; B)$. **10.5.** $d_n-i\leqslant x\leqslant d_1+\ldots+d_n-i$. **10.6.** (4; 6; 0). Запас в начале второго месяца равен 1 единице; в начале третьего — 3 единицам. **10.7.** (5; 0; 6; 0). **10.8.** (4; 0; 4; 0). **10.9.** (0; 4; 4; 0). **10.10.** (2; 5; 0; 4).

10.11.

Вариант		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Максимальный прирост выпуска продукции, тыс. руб.		85	82	82	65	77	70	79	78	79	73
Оптимальное распределение средств по предприятиям, тыс. руб.	№ 1	0	0	0	0	0	0	20	0	20	0
	№ 2	0	40	0	40	0	20	20	0	0	20
	№ 3	20	20	20	0	40	0	0	60	60	60
	№ 4	80	40	80	60	60	80	60	40	20	20

10.12.

Вариант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Максимальная прибыль	60	62	72	80	67	73	77	77	80	70
	54	37	50	64	40	66	62	54	72	43

Глава 11

11.4. (7,54; 2,36). **11.5.** (28/15; 8/15). **11.6.** (4; 0; 4). **11.9.** (8/3; 0). **11.10.** (291/94; 197/94; 67/94). **11.11.** (10/3; 10/3, 0).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балашевич В. А.* Математические методы в управлении производством. Минск, «Вышэйшая школа», 1976.

2. *Бирман И. Я.* Оптимальное программирование. М, «Экономика», 1968.

3. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. Т. 1—3. Пер. с англ. М., «Мир», 1972, 1973.

4. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. М., «Советское радио», 1972.

5. *Волков В. А.* Элементы линейного программирования. М., «Просвещение», 1975.

6. *Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование. Изд. 2-е. М, «Наука», 1967.

7. *Калихман И. Л.* Линейная алгебра и программирование. М., «Высшая школа», 1967.

8. *Калихман И. Л.* Сборник задач по математическому программированию Изд. 2-е. М., «Высшая школа», 1975.

9. *Канторович Л. В., Горстко А. Б.* Оптимальные решения в экономике. М., «Наука», 1972.

10. *Карпелевич Ф. И., Садовский Л. Е.* Элементы линейной алгебры и линейного программирования. Изд. 3-е М., «Наука», 1967.

11. *Кузнецов А. В., Кузнецова Д. С.* Жордановы преобразования и их применение в линейной алгебре Минск, БГИНХ, 1976.

12. *Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б.* Математическое программирование М., «Высшая школа», 1976.

13. *Куцев Л. Н., Горяинов М. М.* Математика и управление производством. М, «Московский рабочий», 1967.

14. *Лурье А. Л.* Экономический анализ моделей планирования социалистического хозяйства. М., «Наука», 1973.

15. *Полунин И. Ф.* Курс математического программирования. Изд 3-е. Минск, «Вышэйшая школа», 1975.

16. *Терехов Л. Л.* Экономико-математические методы. Изд. 2-е. М, «Статистика», 1972.

17. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование Пер. с англ. М., «Мир», 1967.

18. *Холод Н. И.* Дробно-линейное программирование Минск, БГИНХ, 1976.

19 *Щедрин Н. И., Кархов А. Н.* Математические методы программирования в экономике. М., «Статистика», 1974.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Альберт Васильевич Кузнецов,
Николай Игнатьевич Холод,
Леонид Степанович Костевич

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Редактор А. А. Белянкина
Мл. редактор Л. С. Кравченко
Худож. редактор В. Н. Валентович
Техн. редактор Г. М. Романчук
Корректоры А. А. Савицкая, В. В. Неверко

ИБ № 431

Сдано в набор 24.10.77 г. Подписано к печати 15.5.78 г. АТ 05025. Бумага 60×90 1/16 типогр. № 3. Печ. л. 16. Уч.-изд. л. 15,44. Литературная гарнитура. Высокая печать. Изд. № 76—149. Тип. зак. 704. Тираж 12 000 экз. Цена 70 коп.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Редакция литературы по математике, физике и энергетике. 220004, Минск, Парковая магистраль, 11. Дом книги.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Белоруссии. Минск, Ленинский пр., 79.