计算机辅助建模中的运动控制实验报告

一、问题重述

1.1 问题背景

在计算机辅助建模与制造(CAD/CAM)领域中，精确控制沿预定路径的运动是一个核心问题。这种控制在以下场景中尤为重要：

1. 数值加工：需要保持刀具与材料界面的恒定速度，以确保加工质量
2. 计算机动画：需要实现自然流畅的运动效果
3. 机器人运动：需要精确控制机械臂的运动轨迹
4. 虚拟现实：需要构造参数化曲线和曲面以供导航

在这些应用中，关键挑战是如何将任意参数化路径分割为等长度的子路径，并实现对运动速度的精确控制。

1.2 问题重述

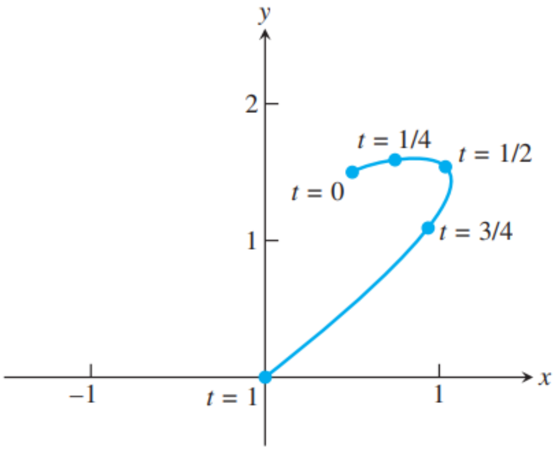


Figure 5.6 Parametrized curve given by Bézier spline. Typically, equal intervals of the parameter t do not divide the path into segments of equal length.

给定一条参数化路径：
$P = \{x(t), y(t)\} \mid 0 \leq t \leq 1$

其中：

$$x(t) = 0.5 + 0.3t + 3.9t^2 - 4.7t^3$$
$$y(t) = 1.5 + 0.3t + 0.9t^2 - 2.7t^3$$

问题一: 编写一个 MATLAB 函数，使用自适应求积法计算从 $t = 0$ 到 $t = T$ 的弧长，其中 $T \leq 1$。

问题二: 编写一个程序，对于任意输入 s（从 0 到 1 之间），找到参数 $t^*(s)$，使其满足路径从 $t = 0$ 到 $t = t^*(s)$ 的弧长除以从 $t = 0$ 到 $t = 1$ 的总弧长等于 s。使用二分法将 $t^*(s)$ 定位到三位小数精度。

- 哪个函数被设定为零?
- 初始二分区间应如何选择?

问题三: 将图 5.6 的路径等分为 n 等长子路径，其中 $n=4$ 和 $n=20$。绘制类似于图 5.6 的图，显示等分路径。如果计算速度过慢，请考虑使用辛普森法优化自适应求积（参见计算机问题 5.4.2）。

问题四: 在步骤 2 中，用牛顿法替代二分法，并重复步骤 2 和 3。

- 需要什么导数?
- 初始猜测如何选择?
- 此替代方法是否减少了计算时间?

问题五: 附录 A 展示了 MATLAB 中的动画命令，例如以下命令:

```
set(gca, 'XLim', [-2 2], 'YLim', [-2 2], 'Drawmode', 'fast', ...
    'Visible', 'on');
cla
axis square
```

定义一个对象“ball”，其位置 (x, y) 可通过以下命令指定:

```
set(ball, 'xdata', x, 'ydata', y); drawnow; pause(0.01)
```

在循环中改变 x 和 y 会使 ball 沿路径在 MATLAB 图窗中移动。
使用 MATLAB 的动画命令，分别演示以下两种情况:

- 原始参数 $0 \leq t \leq 1$ 的速度沿路径移动。
- 根据 $t^*(s)$（$0 \leq s \leq 1$）的恒定速度沿路径移动。

问题六: 尝试等分路径并进行动画展示。设计一条自选的 Bézier 曲线路径，将其等分为等弧长段，并按步骤 5 的方法进行动画。

问题七: 编写一个程序，根据任意前进曲线 $C(s)$（$0 \leq s \leq 1$，$C(0)=0$ 且 $C(1)=1$）沿路径 P 移动。目标是以比例 $C(s)$ 遇见路径的总弧长，例如，恒定速度可表示为 $C(s)=s$。尝试以下前进曲线:

- $C(s)=s^{1/3}$
- $C(s)=s^2$
- $C(s)=\sin(\pi s/2)$
- $C(s)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(2s-1)\frac{\pi}{2}$

有关平面和空间曲线重参数化的更多细节与应用，请参考 Wang 等人 [2003] 和 Guenter 与 Parent [1990] 的研究。

二、模型的建立

2.1 弧长计算模型

根据微分几何理论，参数曲线的弧长可以通过以下积分计算:

$L(t)=\int_0^t \sqrt{x'(\tau)^2+y'(\tau)^2}\,d\tau$

其中:

- $x'(t)=0.3+7.8t-14.1t^2$

- $y'(t) = 0.3 + 1.8t - 8.1t^2$

2.2 路径等分模型

为实现路径等分，需要找到参数值$t^*(s)$，使得：

$$\frac{L(t^*(s))}{L(1)} = s, \quad 0 \leq s \leq 1$$

这可以转化为求解方程：
$f(t) = L(t) - sL(1) = 0$

2.3 速度控制模型

通过引入进度函数$C(s)$，可以控制运动速度：

- $C(s) = s$ 表示匀速运动
- $C(s) = s^2$ 表示加速运动
- $C(s) = s^{1/3}$ 表示减速运动
- $C(s) = \sin(\pi s/2)$ 表示平滑加减速
- $C(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin((2s-1)\pi/2)$ 表示中间停顿

实际运动位置由复合函数$P(t^*(C(s)))$给出。

三、模型求解

问题一 自适应求积法计算弧长

3.1.1 算法设计

为了计算参数曲线的弧长，我们使用自适应Simpson求积法。该方法的核心思想是：

1. 使用复合Simpson公式进行数值积分
2. 通过逐步加密网格实现自适应控制
3. 比较相邻两次计算结果来判断收敛性

具体实现步骤：

1. 计算被积函数：

```
function y = integrand(t)
    % 计算x'(t)和y'(t)
    dxdt = 0.3 + 2*3.9*t - 3*4.7*t.^2;
    dydt = 0.3 + 2*0.9*t - 3*2.7*t.^2;

    % 计算弧长微元
    y = sqrt(dxdt.^2 + dydt.^2);
end
```

2. 主函数实现：

```
function length = task1_arc_length(T)
```

```matlab
    % 使用自适应Simpson求积法计算弧长
    tol = 1e-8;  % 误差容限

    % 初始划分
    n = 10;  % 初始区间数
    t = linspace(0, T, n+1);
    h = T/n;

    % 计算函数值
    y = integrand(t);

    % Simpson求积
    length = h/3 * (y(1) + 4*sum(y(2:2:end-1)) + 2*sum(y(3:2:end-2)) + y(end));

    % 自适应加密
    while n < 1000  % 设置最大区间数防止无限循环
        n_new = 2*n;
        t_new = linspace(0, T, n_new+1);
        h_new = T/n_new;

        y_new = integrand(t_new);
        length_new = h_new/3 * (y_new(1) + 4*sum(y_new(2:2:end-1)) + 2*sum(y_new(3:2:end-2)) + y_new(end));

        % 检查收敛
        if abs(length_new - length) < tol * abs(length_new)
            length = length_new;
            return;
        end

        n = n_new;
        length = length_new;
    end
end
```

3.1.2 实验结果

对不同参数值进行弧长计算并和库积分函数得到以下结果：

```
>> test_task1
计算不同参数值的弧长，并与MATLAB库函数的结果比较：
t = 0.25, 自适应求积法计算的弧长 = 0.263085, 库函数计算的弧长 = 0.263085, 误差 = 0.000000
t = 0.50, 自适应求积法计算的弧长 = 0.572789, 库函数计算的弧长 = 0.572789, 误差 = 0.000000
t = 0.75, 自适应求积法计算的弧长 = 1.054116, 库函数计算的弧长 = 1.054116, 误差 = 0.000000
t = 1.00, 自适应求积法计算的弧长 = 2.495247, 库函数计算的弧长 = 2.495247, 误差 = 0.000000
```

问题二 二分法求解参数方程

3.2.1 算法设计

题目本质是在求在满足 $\frac{L(t)}{L(1)} = s$的情况下t(即$t^*(s)$)的值

为了找到满足特定弧长比例的参数值t*(s)，我们使用二分法求解方程：

$f(t) = \frac{L(t)}{L(1)} - s = 0$

这里，被设为零的函数是当前弧长与目标弧长的差值：
$f(t) = L(t) - sL(1)$
其中L(t)是从0到t的弧长，sL(1)是目标弧长。

初始二分区间的选择：

- 左端点：t_left = 0，因为t=0对应曲线起点
- 右端点：t_right = 1，因为t=1对应曲线终点
- 这个选择是合理的，因为：
    1. 弧长L(t)是单调递增的
    2. L(0) = 0 < sL(1) < L(1)对任意s∈(0,1)成立
    3. 因此解必定存在于[0,1]区间内

具体实现步骤：

1. 主函数实现：

```
function t_star = task2_find_t(s)
    % 计算总弧长
    total_length = task1_arc_length(1);

    % 目标弧长
    target_length = s * total_length;

    % 使用二分法求解
    t_left = 0;
    t_right = 1;
    tol = 1e-3;  % 三位小数精度

    while (t_right - t_left) > tol
        t_mid = (t_left + t_right)/2;
        current_length = task1_arc_length(t_mid);

        if current_length < target_length
            t_left = t_mid;
        else
            t_right = t_mid;
        end
    end

    t_star = (t_left + t_right)/2;
end
```

3.2.2 实验结果

对不同的s值进行测试，得到以下结果：

```
>> test_task2
测试不同比例的参数查找:
s = 0.25, 找到的 t = 0.545
    计算的比例 = 0.250, 误差 = 0.00022
s = 0.50, 找到的 t = 0.800
    计算的比例 = 0.499, 误差 = 0.00051
s = 0.75, 找到的 t = 0.917
    计算的比例 = 0.749, 误差 = 0.00087
参数查找测试通过
```

验证结果表明:

问题三 路径等分实现

3.3.1 算法设计

路径等分的实现基于前两个任务的结果，主要步骤如下:

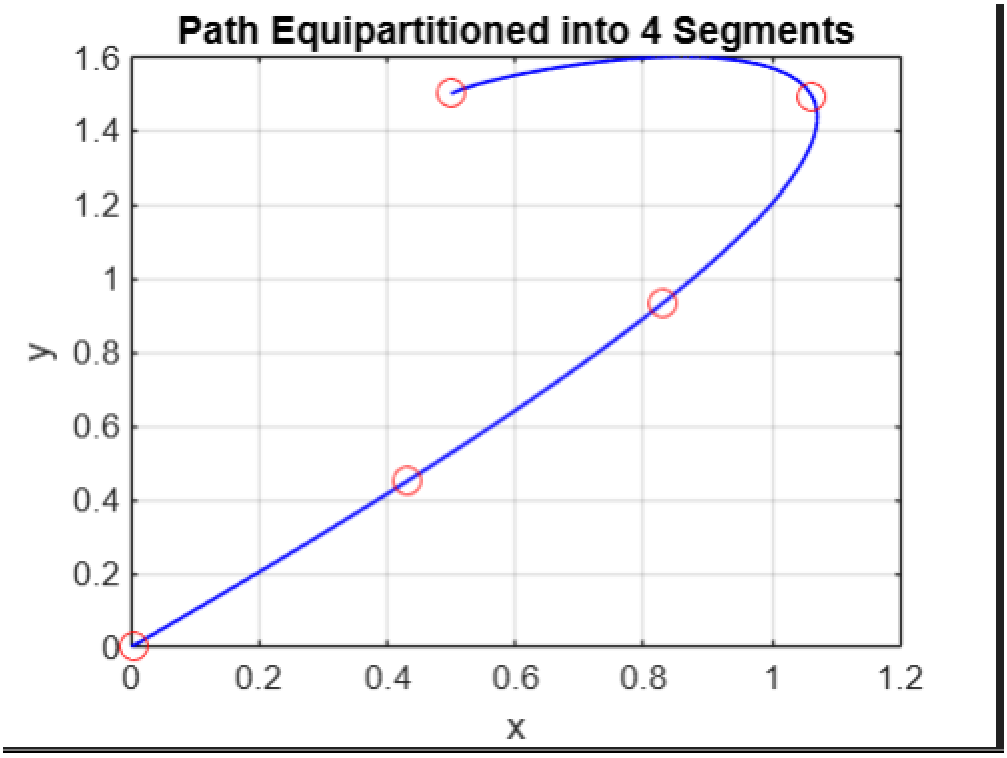
1. 主函数实现:

```
function task3_equipartition(n)
    % 计算等分点
    s_values = linspace(0, 1, n+1);
    t_values = zeros(size(s_values));

    % 对每个s计算对应的t值
    for i = 1:length(s_values)
        t_values(i) = task2_find_t(s_values(i));
    end

    % 绘制路径和等分点
    t_plot = linspace(0, 1, 100);
    x_plot = 0.5 + 0.3*t_plot + 3.9*t_plot.^2 - 4.7*t_plot.^3;
    y_plot = 1.5 + 0.3*t_plot + 0.9*t_plot.^2 - 2.7*t_plot.^3;

    % 计算等分点的坐标
    x_points = 0.5 + 0.3*t_values + 3.9*t_values.^2 - 4.7*t_values.^3;
    y_points = 1.5 + 0.3*t_values + 0.9*t_values.^2 - 2.7*t_values.^3;

    % 绘图
    plot(x_plot, y_plot, 'b-', 'LineWidth', 1);
    hold on;
    plot(x_points, y_points, 'ro', 'MarkerSize', 8);
    grid on;
    title(['Path Equipartitioned into ' num2str(n) ' Segments']);
    xlabel('x');
    ylabel('y');
end
```

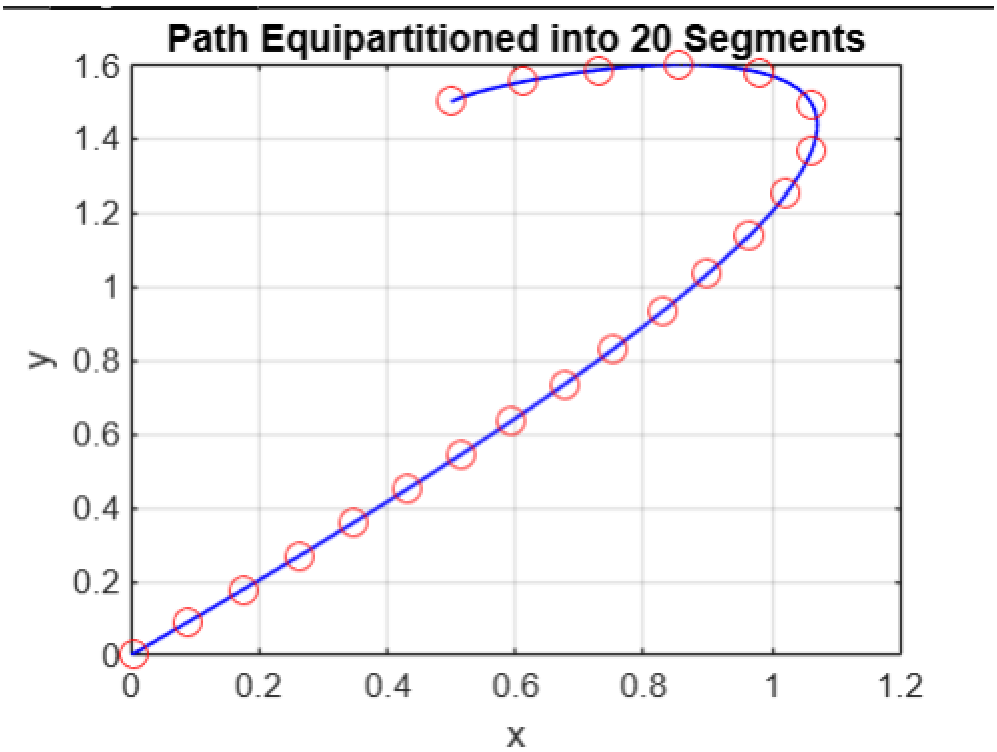
3.3.2 实验结果

分别对n=4和n=20两种情况进行测试：

4等分：



20等分：



问题四 牛顿法求解参数方程

3.4.1 算法设计

将任务2中的二分法替换为牛顿法。牛顿法的迭代公式为：

$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}$

其中：

- $f(t) = L(t) - sL(1)$ 是目标函数
- $f'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ 是导数

具体实现：

```
function t = find_t_newton(s)
    % 计算总弧长
    total_length = task1_arc_length(1);

    % 使用牛顿法求解
    t = s;  % 初始猜测
    tol = 1e-6;
    max_iter = 50;

    for i = 1:max_iter
        % 计算当前弧长
        current_length = task1_arc_length(t);

        % 计算导数
        dxdt = 0.3 + 2*3.9*t - 3*4.7*t^2;
        dydt = 0.3 + 2*0.9*t - 3*2.7*t^2;
        df = sqrt(dxdt^2 + dydt^2);

        % 计算函数值和导数
        f = current_length/total_length - s;
        df = df/total_length;

        % 牛顿迭代
        t_new = t - f/df;

        % 确保t_new在[0,1]范围内
        t_new = max(0, min(1, t_new));

        % 检查收敛
        if abs(t_new - t) < tol
            t = t_new;
            return;
        end
        t = t_new;
    end
end
```

3.4.2实验结果

```
>> test_task4
测试任务4: 牛顿法实现
s = 0.25: 二分法 = 0.5454, 牛顿法 = 0.5459, 差异 = 4.6407e-04
s = 0.50: 二分法 = 0.8003, 牛顿法 = 0.8006, 差异 = 3.0237e-04
s = 0.75: 二分法 = 0.9165, 牛顿法 = 0.9168, 差异 = 3.3046e-04
计算时间比较 (s=0.5):
二分法: 0.0008秒
牛顿法: 0.0003秒
任务4测试通过!
```

问题五 动画演示实现

3.5.1 算法设计

动画演示需要实现两种不同的运动方式：原始参数运动和等速运动。主要实现步骤如下：

1. 设置动画环境：

```
% 设置图形窗口
set(gca, 'XLim', [-0.5 2.5], 'YLim', [-0.5 2.5], ...
    'Drawmode', 'fast', 'Visible', 'on');
cla
axis square
grid on;
hold on;
```

2. 绘制基准路径：

```
% 绘制完整路径
t_plot = linspace(0, 1, 100);
x_plot = 0.5 + 0.3*t_plot + 3.9*t_plot.^2 - 4.7*t_plot.^3;
y_plot = 1.5 + 0.3*t_plot + 0.9*t_plot.^2 - 2.7*t_plot.^3;
plot(x_plot, y_plot, 'b-', 'LineWidth', 1);

% 创建运动点
ball = plot(x_plot(1), y_plot(1), 'ro', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'r');
```

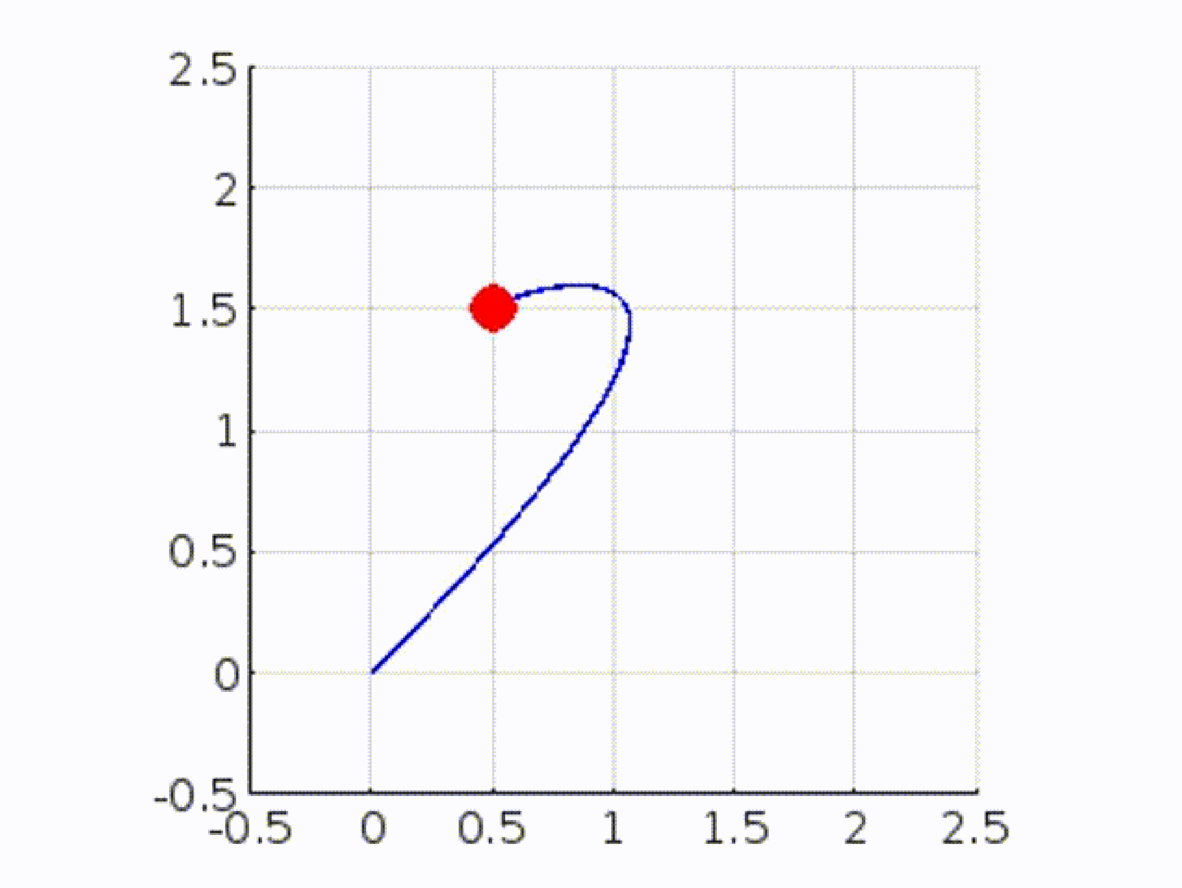
3. 实现两种运动方式：

```
% 原始参数运动
title('Motion with Original Parameterization');
for t = linspace(0, 1, 100)
    % 计算当前位置
    x = 0.5 + 0.3*t + 3.9*t^2 - 4.7*t^3;
```

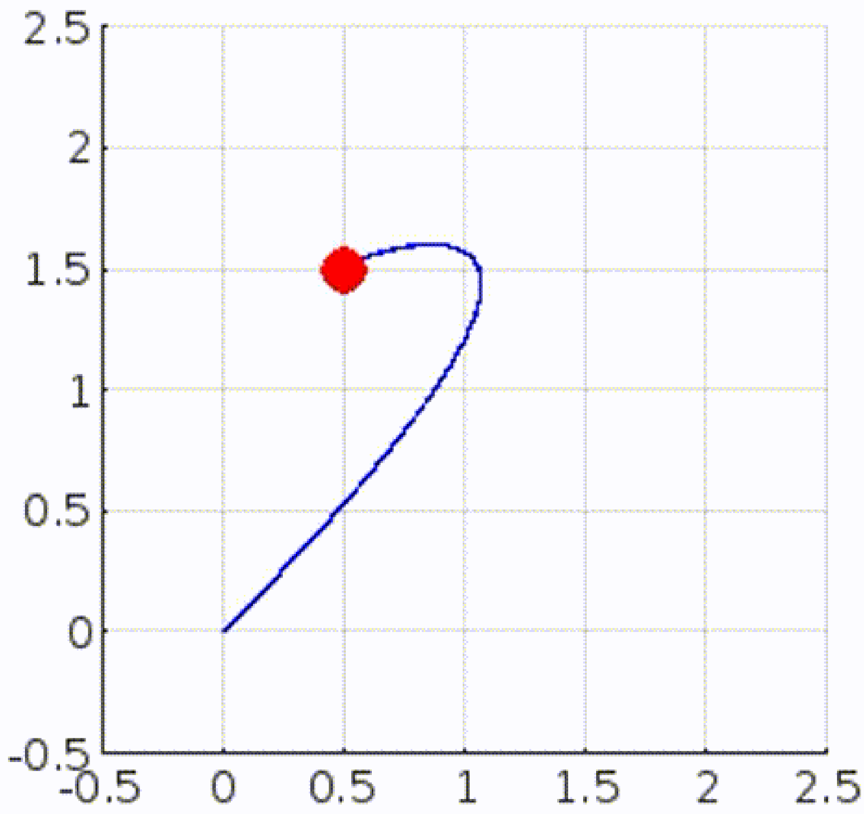
```
    y = 1.5 + 0.3*t + 0.9*t^2 - 2.7*t^3;

    set(ball, 'xdata', x, 'ydata', y);
    drawnow;
    pause(0.01);
end
pause(1);

% 等速运动
title('Motion with Constant Speed');
for s = linspace(0, 1, 100)
    % 找到对应的参数t
    t = task2_find_t(s);

    % 计算位置
    x = 0.5 + 0.3*t + 3.9*t^2 - 4.7*t^3;
    y = 1.5 + 0.3*t + 0.9*t^2 - 2.7*t^3;

    set(ball, 'xdata', x, 'ydata', y);
    drawnow;
    pause(0.01);
end
```

3.5.2 实验结果

- 原参数



- 等速



问题六 自定义贝塞尔曲线实现

3.6.1 算法设计

1. 贝塞尔曲线的参数方程：

```
function [x, y] = bezier_curve(t, control_points)
    % 确保t是列向量
    t = t(:);
    % 三次贝塞尔曲线公式
    B = [(1-t).^3, 3*t.*(1-t).^2, 3*t.^2.*(1-t), t.^3];
    x = B * control_points(:,1);
    y = B * control_points(:,2);
end
```

2. 曲线导数计算：

```
function [dx, dy] = bezier_derivative(t, control_points)
    % 确保t是列向量
    t = t(:);

    % 计算导数的基函数
    dB = [-3*(1-t).^2, 3*(1-4*t+3*t.^2), 3*(2*t-3*t.^2), 3*t.^2];

    % 计算x和y方向的导数
    dx = dB * control_points(:,1);
    dy = dB * control_points(:,2);
end
```

3. 弧长计算：

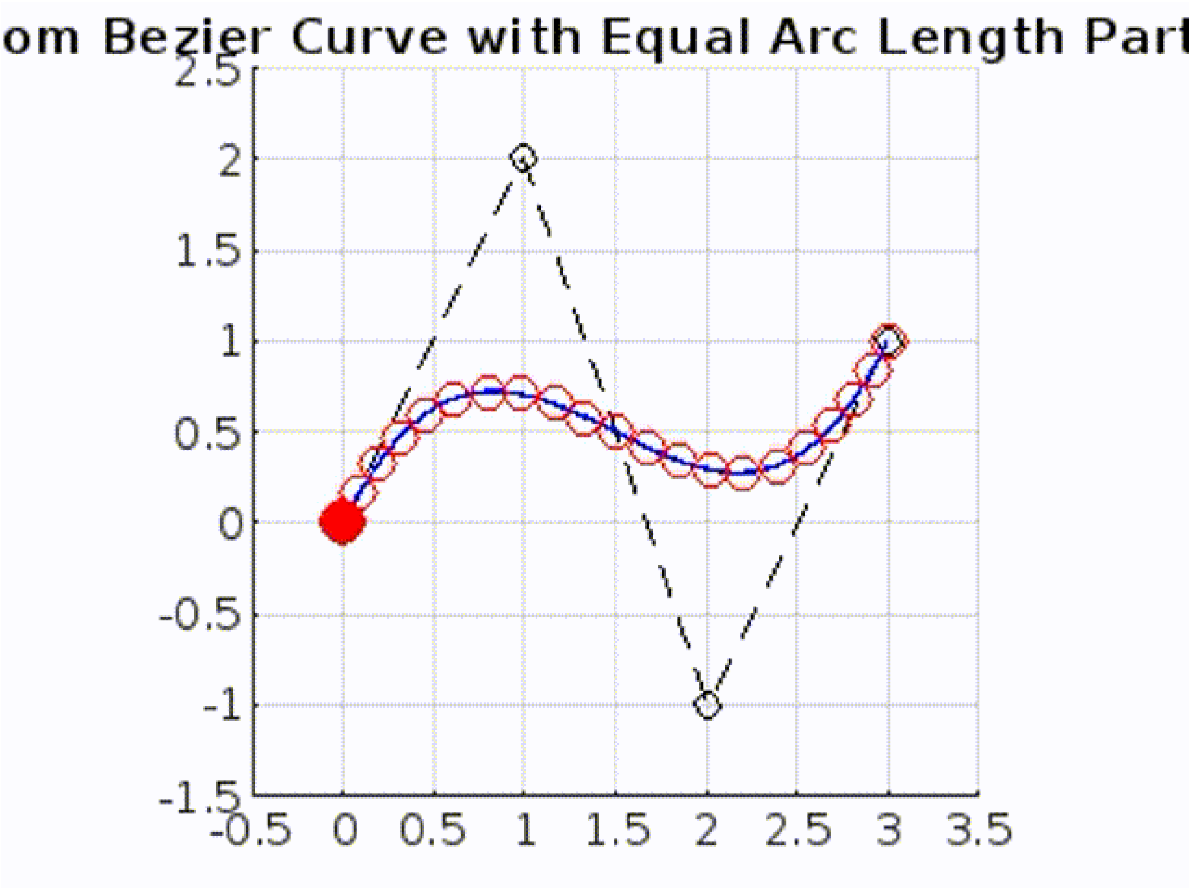
```
function len = compute_arc_length(t_end, control_points)
    % 使用复合Simpson求积计算弧长
    n = 100;  % 积分区间数
    t = linspace(0, t_end, n+1);
    h = t_end/n;

    % 计算所有点的速度
    [dx, dy] = bezier_derivative(t, control_points);
    v = sqrt(dx.^2 + dy.^2);

    % Simpson求积
    len = h/3 * (v(1) + 4*sum(v(2:2:end-1)) + 2*sum(v(3:2:end-2)) + v(end));
end
```

4. 参数反解：

```
function t = find_t_newton(s, control_points)
    % 使用牛顿法找到对应的参数t
    t = s;  % 初始猜测
    tol = 1e-6;
    max_iter = 50;
    total_length = compute_arc_length(1, control_points);

    for i = 1:max_iter
        current_length = compute_arc_length(t, control_points);
        [dx, dy] = bezier_derivative(t, control_points);

        % 计算函数值和导数
        f = current_length/total_length - s;
        df = sqrt(dx^2 + dy^2)/total_length;

        % 牛顿迭代
        t_new = t - f/df;
```

```
        % 确保t_new在[0,1]范围内
        t_new = max(0, min(1, t_new));

        % 检查收敛
        if abs(t_new - t) < tol
            t = t_new;
            return;
        end
        t = t_new;
    end
end
```

3.6.2 实验结果



问题七 进度曲线运动控制

3.7.1 算法设计

1. 进度曲线定义：

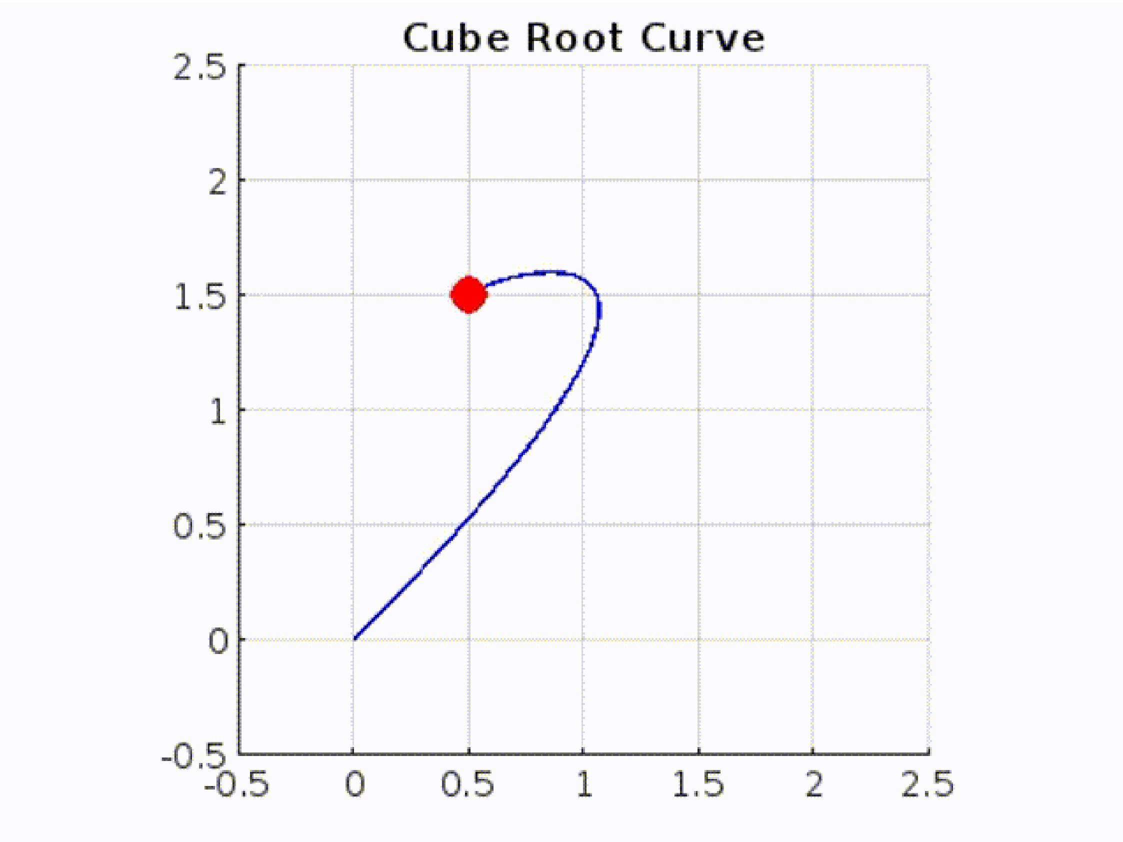
```
progress_curves = {
    @(s) s^(1/3),
    @(s) s^2,
    @(s) sin(pi*s/2),
    @(s) 0.5 + 0.5*sin((2*s-1)*pi/2)
};
```

2. 运动控制实现：

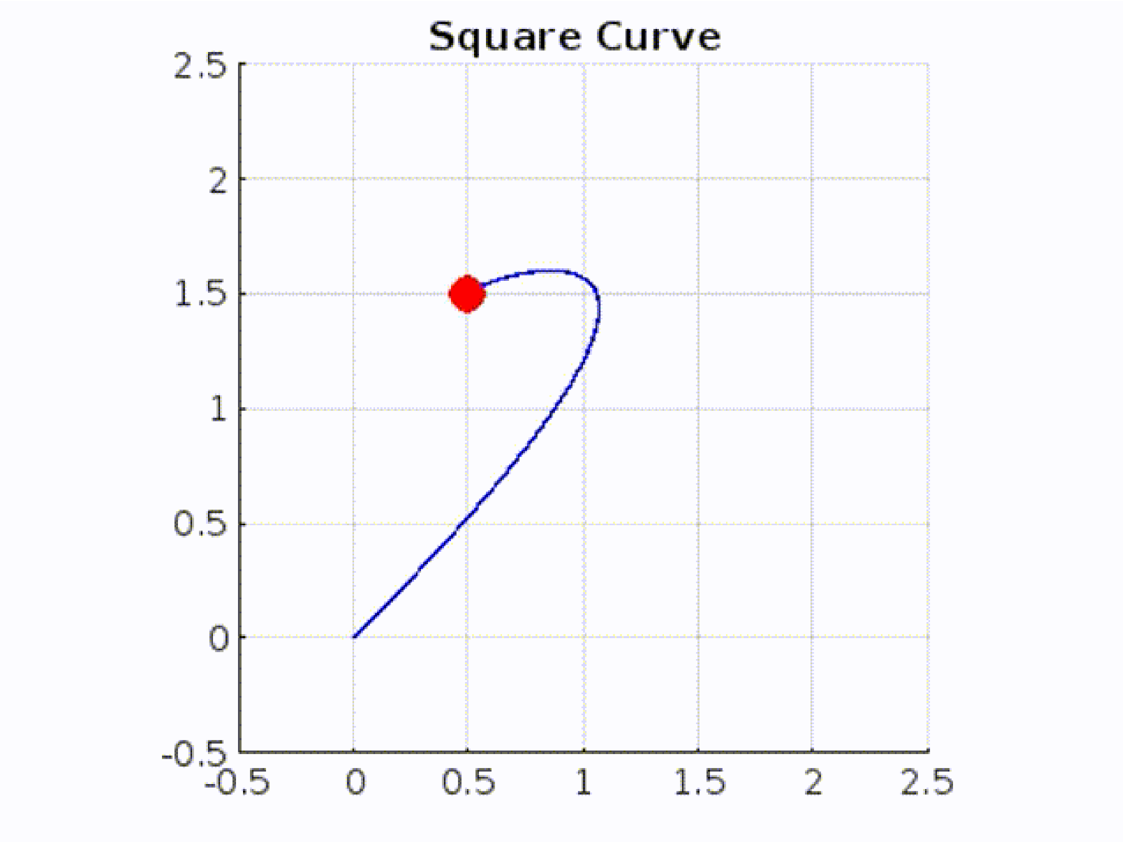
```
% 按照当前进度曲线运动
for u = linspace(0, 1, 50)
    % 计算当前进度
    s = progress_curves{i}(u);

    % 找到对应的参数t
    t = task2_find_t(s);

    % 计算位置并更新
    x = 0.5 + 0.3*t + 3.9*t^2 - 4.7*t^3;
    y = 1.5 + 0.3*t + 0.9*t^2 - 2.7*t^3;
    set(ball, 'xdata', x, 'ydata', y);
    drawnow;
end
```

3.7.2 实验结果

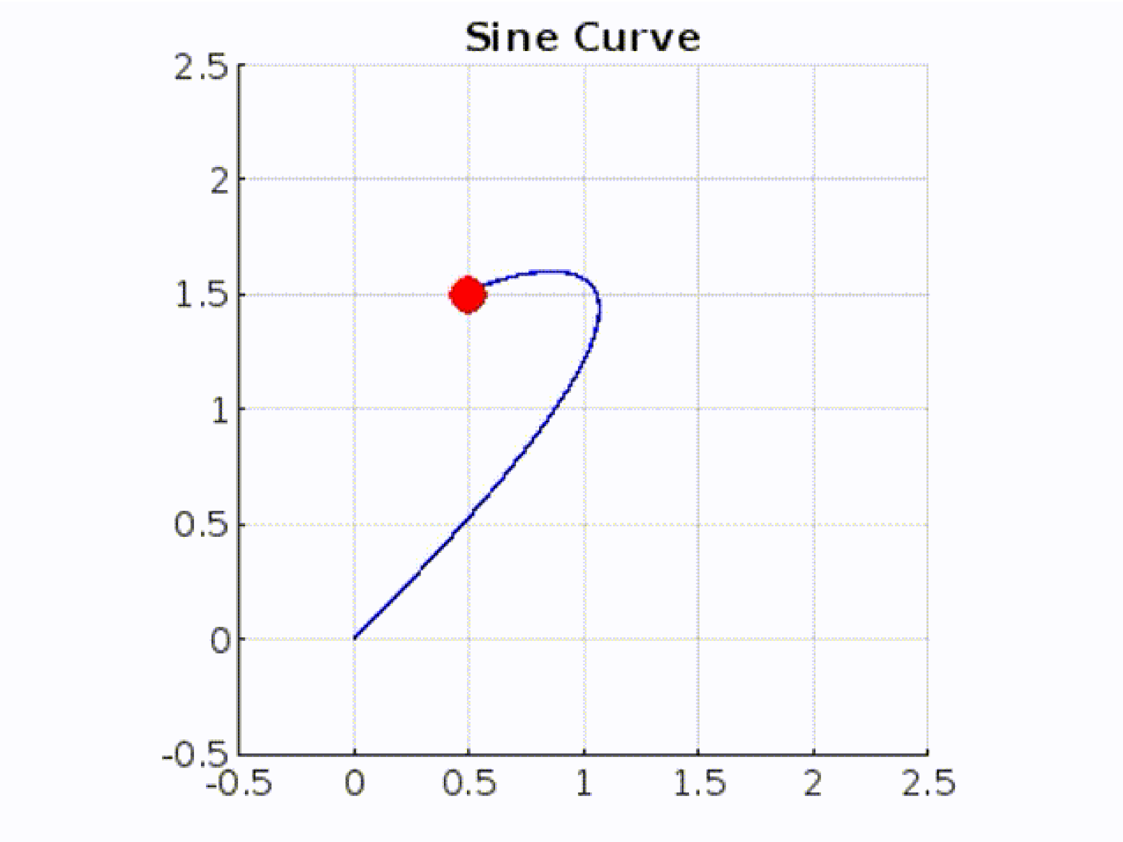
1. **Cube Root Motion 动画**
   对应前进曲线： $C(s) = s^{1/3}$



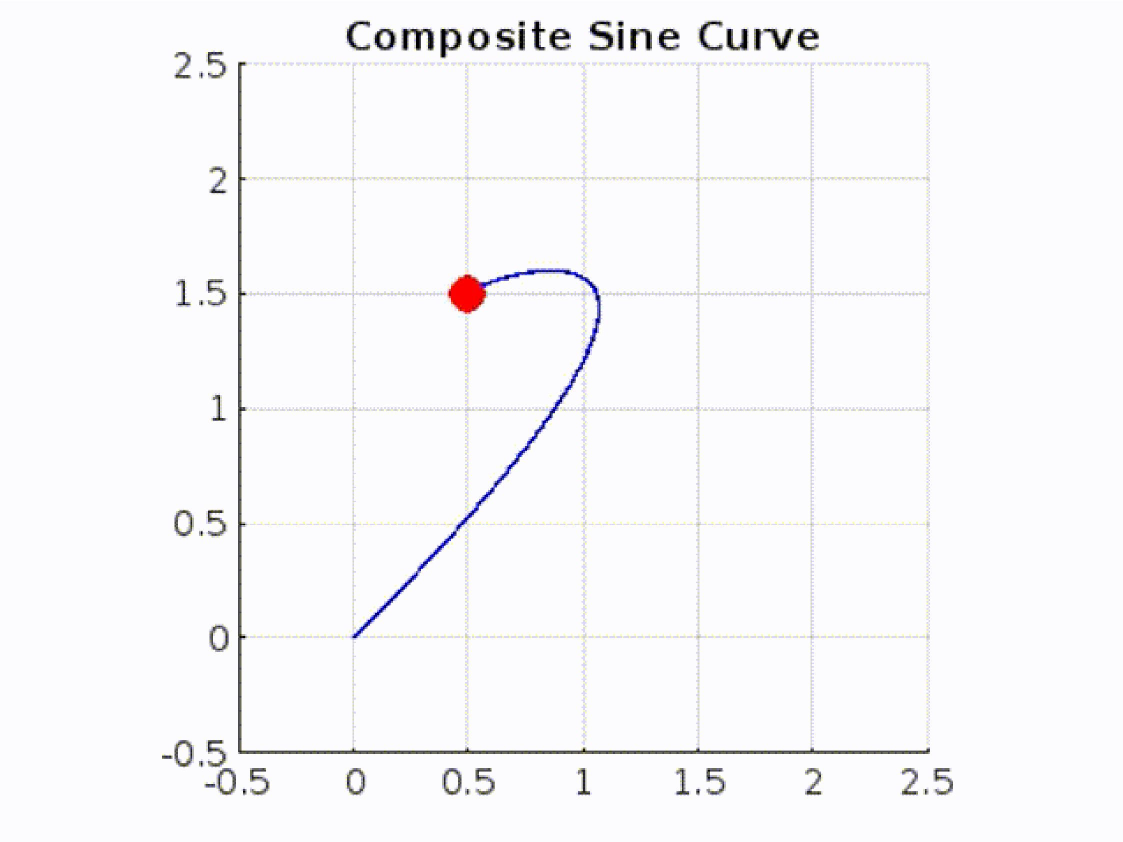
2. **Square Motion 动画**
   对应前进曲线： $C(s) = s^2$



3. **Sine Motion 动画**
   对应前进曲线： $C(s) = \sin\left(\pi s/2\right)$



4. **Composite Sine Motion 动画**
   对应前进曲线： $C(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(2s - 1\right)\frac{\pi}{2}$


Composite Sine Curve
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5