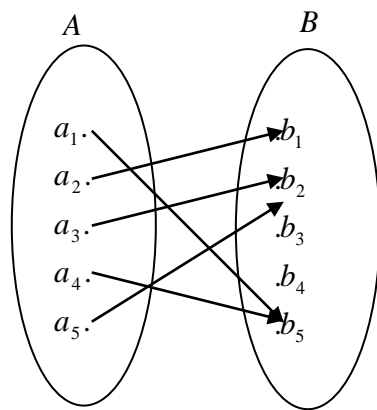


FUNGSI DAN LIMIT FUNGSI (DR.Jemakmun,M.Si)

1 Fungsi dan Grafiknya

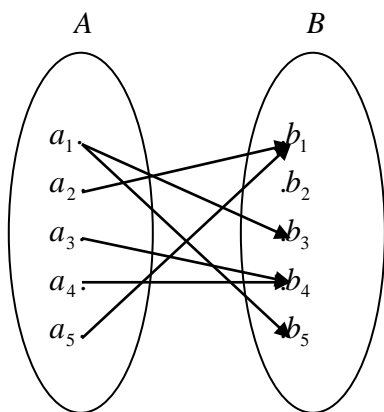
Misal $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ adalah dua himpunan yang anggotanya berhingga, berdasarkan fakta tersebut selanjutnya dapat dibuat hubungan (relasi) antara himpunan A dan B. Relasi yang dibuat dapat berupa lebih besar, kuadrat dari, 1 selisihnya, atau relasi yang lain.

Perhatikan gambar berikut ini.



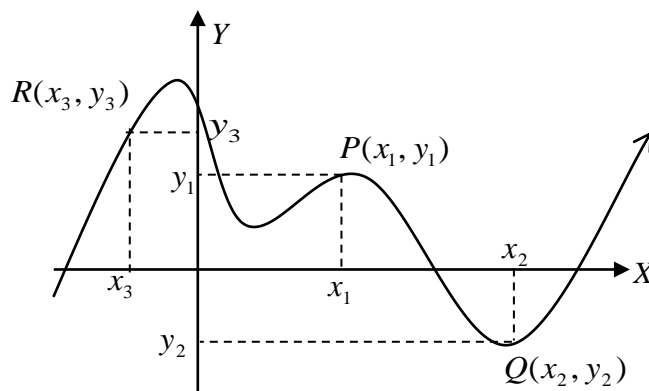
Gambar 1

Berdasarkan relasi yang digambarkan pada gambar 1 di atas, tampak bahwa semua anggota himpunan A mempunyai pasangan (peta) di B, sebaliknya tidak semua atau anggota himpunan B yang tidak mempunyai prapeta di A. Jika setiap anggota himpunan A mempunyai pasangan "satu dan hanya satu" di B maka relasi tersebut dinamaka fungsi atau pemetaan. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa setiap fungsi adalah relasi, akan tetapi tidak setiap relasi belum tentu fungsi. Seperti gambar berikut ini adalah relasi akan tetapi bukan fungsi.



Gambar 2

Selanjutnya, andaikan A dan B anggotanya tidak berhingga, maka dapat dibuat garis real dalam bentuk sumbu koordinat X dan Y. Semua titik pada sumbu X yang mempunyai pasangan di X disebut daerah asal (*domain*), sedangkan semua titik pada sumbu Y yang mempunyai prapeta di A disebut daerah hasil (*range*).



Gambar 3

Definisi:

Fungsi adalah suatu aturan korespondensi satu-satu yang menghubungkan setiap objek x dalam suatu himpunan, yang disebut daerah asal (*domain*) dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan yang kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (*range*).

Secara umum untuk memberi nama suatu fungsi digunakan simbol berupa f atau F . Maka $f(x)$ dibaca “fungsi f pada x ”. Hal ini menunjukkan nilai yang diberikan oleh fungsi f terhadap nilai x .

Jadi secara umum jika $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi f dari himpunan A ke himpunan B . A disebut daerah asal dan B disebut daerah hasil.

Untuk menentukan daerah asal dan daerah hasil suatu fungsi secara lengkap kita harus menyatakan, disamping aturan yang bersesuaian daerah asal fungsi. Misalnya jika f adalah fungsi dengan aturan $f(x) = x + 1$ maka daerah asal alamiah (*domain*) $f(x)$ adalah semua bilangan real dan daerah hasil (*range*) adalah semua bilangan real.

$f(x) = x + 1$ daerah asal alamiahnya semua bilangan real karena untuk setiap x bilangan real $f(x)$ mempunyai nilai.

Contoh . Tentukan daerah asal alamiah dan range dari:

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

Jawab

Daerah asal alamiah (D) = $\{x \mid x > 1\} = (1, \infty)$

Daerah hasil (R) = $\{x \mid 0 < x < 1\} = (0,1)$

Catatan

Jika $f(x), g(x)$ fungsi-fungsi yang terdefinisi pada interval tertentu dalam \mathbb{R} maka:

1. Jika $f(x) = f(-x)$ maka $f(x)$ disebut fungsi genap

Contoh

a) $f(x) = x^4 - x^2$ adalah fungsi ganjil karena $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ adalah fungsi genap

2. Jika $-f(x) = f(-x)$ maka $f(x)$ disebut fungsi ganjil

Contoh

a) $f(x) = x^3 - x$ adalah fungsi ganjil

b) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2+x^3}}$ adalah fungsi bukan ganjil

3. jika $f(x) = f(-x) = -f(x)$ maka $f(x)$ disebut fungsi genap dan ganjil

Contoh

a. $f(x) = 0$ fungsi genap dan ganjil karena $f(x) = 0$, $-f(x) = -0 = 0$ dan $f(-x) = 0$ sehingga $f(x) = f(-x) = -f(x)$

4. jika $f(x) \neq f(-x) \neq -f(x)$ maka $f(x)$ disebut fungsi tidak genap tidak ganjil.

Contoh

a) $f(x) = 1 - x$ adalah fungsi bukan genap dan bukan ganjil

b) $f(x) = x - x^2$ adalah fungsi bukan genap bukan ganjil

2 Operasi Pada Fungsi

Sepertihalnya pada bilangan, fungsi dapat dioperasikan dengan tanda operasi pada bilangan. Operasi tersebut adalah + (jumlah), - (selisih), : (pembagian), dan . (perkalian).

Misal $f(x)$ dan $g(x)$ dua fungsi yang terdefinisi pada suatu selang tertentu, operasi pada kedua fungsi dinyatakan dengan:

1. $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$
2. $f(x) - g(x) = (f - g)(x)$
3. $f(x).g(x) = (f.g)(x)$
4. $\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ asalkan $g(x) \neq 0$
5. $\underbrace{f(x).f(x).f(x).f(x)....f(x)}_{n \text{ faktor}} = \underbrace{(f.f.f.f.f....f)}_n(x) = [f(x)]^n = f^n(x)$

Selain dengan menggunakan operasi di atas, dua fungsi atau lebih dapat dikomposisikan. Jika fungsi f mempunyai daerah hasil $f(x)$ dan fungsi g mempunyai daerah definisi $g(f(x))$, maka dapat dikatakan kita telah mengkomposisikan $g(x)$ dengan $f(x)$. Fungsi yang dihasilkan disebut komposisi fungsi g dengan fungsi f dan dinotasikan dengan $g \circ f$, sehingga $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

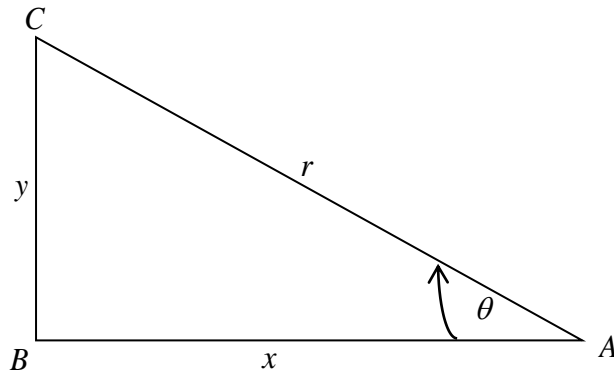
Dengan cara yang sama kita juga dapat melakukan komposisi $f(x)$ dengan $g(x)$. Fungsi yang dihasilkan disebut komposisi fungsi f dengan fungsi g dan dinotasikan dengan $(f \circ g)(x)$ sehingga $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Contoh

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $g(x) = 2 + \frac{1}{1-x}$
 - a) $f(x) + g(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \left(2 + \frac{1}{1-x}\right)$
 - b) $f(x) - g(x) = \sqrt{x^2 - 4} - \left(2 + \frac{1}{1-x}\right)$
 - c) $f(x).g(x) = \sqrt{x^2 - 4} \left(2 + \frac{1}{1-x}\right)$

$$d) \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2 + \frac{1}{1-x}} = \frac{(1-x)\sqrt{x^2 - 4}}{3-x}$$

2.3 Fungsi Trigonometri



Gambar 2.4

Pada gambar 2.4 di atas, ΔABC adalah segitiga yang salah satu sudutnya θ dan siku-siku pada $\angle CBA$. Misal $AB = x$, $BC = y$ dan $AC = r$, berdasarkan segitiga ABC

yaitu: $\frac{BC}{AC}, \frac{AB}{AC}, \frac{BC}{AB}, \frac{AB}{BC}, \frac{AC}{AB}, \frac{AC}{BC}$

Karena $\angle A = \theta$ maka perbandingan tersebut dinyatakan dengan:

1. $\frac{BC}{AC} = \frac{y}{r} = \sin \theta$
2. $\frac{AB}{AC} = \frac{x}{r} = \cos \theta$
3. $\frac{BC}{AB} = \frac{y}{x} = \frac{BC/AC}{AB/AC} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$
4. $\frac{AB}{BC} = \frac{x}{y} = \frac{AB/AC}{BC/AC} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$
5. $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{AB/AC} = \frac{1}{x/r} = \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$
6. $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{BC/AC} = \frac{1}{y/r} = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin \theta} = \csc \theta$

Karena ΔABC salah satu sudutnya siku-siku, sehingga menurut teorema Pythagoras berlaku:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

Selanjutnya secara berurutan persamaan $x^2 + y^2 = r^2$ dibagi x^2, y^2, r^2 diperoleh persamaan baru

$$1. \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \dots\dots\dots (1)$$

$$2. \frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + (\tan \theta)^2 = (\sec \theta)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \dots\dots\dots (2)$$

$$3. \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1^2 = \left(\frac{r}{y}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (\cot \theta)^2 + 1 = (\csc \theta)^2$$

$$\Leftrightarrow \cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta \dots\dots\dots (3)$$

Persamaan (1), (2), dan (3) dinamakan rumus-rumus identitas.

Rumus-rumus sudut rangkap trigonometri; .

$$\text{Rumus } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{Sehingga diperoleh rumus } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \dots\dots\dots (5)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta))$$

$$= \sin \alpha \cos (-\beta) + \cos \alpha \sin (-\beta)$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha (-\sin \beta)$$

$$= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) \\
&= \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) \\
&= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha (-\sin \beta) \\
&= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \dots\dots\dots(7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\
&= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}
\end{aligned}$$

Persamaan di atas dibagi dengan $\cos \alpha \cos \beta$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\
&= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\
&= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}
\end{aligned}$$

$$\text{Sehingga } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \dots\dots\dots(8)$$

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha - \beta) &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} \\
&= \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}
\end{aligned}$$

Persamaan di atas dibagi dengan $\cos \alpha \cos \beta$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 + \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\
&= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}
\end{aligned}$$

Sehingga $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$ (9)

Beberapa rumus fungsi trigonometri yang lain adalah:

1. $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
2. $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
3. $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
4. $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
5. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
6. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
7. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
8. $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$
9. $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$
10. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$
11. $\sin \left(\frac{x}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

Bukti:

Berdasarkan rumus jumlah dua sudut diperoleh

$$\cos x = \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \right)$$

$$\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \right) = \cos \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{2} \right) - \sin \left(\frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$12. \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Bukti:

Berdasarkan rumus jumlah dua sudut diperoleh

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

$$= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \left(1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$$

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Bukti lain rumus di atas ditinggalkan penulis sebagai latihan bagi pembaca.

2.4 Limit Fungsi

a. Limit Fungsi di Satu Titik

Perhatikan fungsi $f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

Fungsi di atas mempunyai daerah definisi $(D) = R - \{1\}$

Bagaimana nilai $f(x)$ jika x diganti dengan sebarang bilangan real yang mendekati 1.

Perhatikan tabel berikut ini

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01	1,1
f(x)	4,8	4,98	4,998	4,9998	...	?	5,0002	5,002	5,02	5,2

Berdasarkan tabel di atas,

1. Jika jarak x dengan 1 kurang dari 0,1 maka jarak $f(x)$ dengan 5 kurang dari 0,2
2. Jika jarak x dengan 1 kurang dari 0,01 maka jarak $f(x)$ dengan 5 kurang dari 0,02
3. Jika jarak x dengan 1 kurang dari 0,001 maka jarak $f(x)$ dengan 5 kurang dari 0,002
4. Jika jarak x dengan 1 kurang dari 0,0001 maka jarak $f(x)$ dengan 5 kurang dari 0,0002
5. dan seterusnya.

Dengan menggunakan notasi harga mutlak untuk menyatakan jarak, maka berdasarkan tabel di atas,

1. Jika $0 < |x - 1| < 0,1$ maka $|f(x) - 5| < 0,2$
2. Jika $0 < |x - 1| < 0,01$ maka $|f(x) - 5| < 0,02$
3. Jika $0 < |x - 1| < 0,001$ maka $|f(x) - 5| < 0,002$
4. Jika $0 < |x - 1| < 0,0001$ maka $|f(x) - 5| < 0,0002$
5. dan seterusnya

Dengan meninjau dari sudut lain, yaitu dengan terlebih dahulu memandang lebih dahulu nilai $f(x)$. Nilai $f(x)$ didekatkan ke 5 sekehendak kita asalkan nilai diambil

cukup dekat dengan 1, Artinya $|f(x) - 5|$ dapat kita buat sekehendak kita, asalkan $|x - 1|$ cukup kecil pula dan $x \approx 1$. Lambang-lambang yang biasa digunakan untuk selisih yang kecil ini adalah bilangan positif ε (epsilon) dan δ (delta). Sehingga kita menyatakan dengan $|f(x) - 5| < \varepsilon$ apabila $0 < |x - 1| < \delta$ (1)

Adalah penting untuk memahami besarnya bilangan positif δ tergantung dari besarnya bilangan positif ε .

Berdasarkan tabel kita dapatkan $|f(x) - 5| \approx 0,2$ jika $|x - 1| \approx 0,1$. Jadi untuk $\varepsilon \approx 0,2$ ada $\delta \approx 0,1$ dan berlaku $|f(x) - 5| < 0,2$ apabila $0 < |x - 1| < 0,1$. Hal ini sesuai dengan pernyataan (1) dengan $\varepsilon = 0,2$ dan $\delta = 0,1$.

Demikian pula $\varepsilon = 0,02$ dan $\delta = 0,01$ dan dikatakan

$|f(x) - 5| < 0,02$ apabila $0 < |x - 1| < 0,01$, Hal ini bersesuaian dengan pernyataan (2) dengan $\varepsilon = 0,02$ dan $\delta = 0,01$.

Demikian pula $\varepsilon = 0,002$ dan $\delta = 0,001$ dan dikatakan

$|f(x) - 5| < 0,002$ apabila $0 < |x - 1| < 0,001$, Hal ini bersesuaian dengan pernyataan (3) dengan $\varepsilon = 0,002$ dan $\delta = 0,001$.

Demikian pula $\varepsilon = 0,0002$ dan $\delta = 0,0001$ dan dikatakan

$|f(x) - 5| < 0,0002$ apabila $0 < |x - 1| < 0,0001$, Hal ini bersesuaian dengan pernyataan (4) dengan $\varepsilon = 0,0002$ dan $\delta = 0,0001$. Dan seterusnya

Bagaimanapun kecilnya bilangan positif ε diberikan selalu dapat ditentukan bilangan positif δ yang tergantung pada besarnya ε tersebut sehingga berlaku:

$$|f(x) - 5| < \varepsilon \text{ apabila } 0 < |x - 1| < \delta$$

Karena untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dapat ditentukan $\delta > 0$ sehingga

$$|f(x) - 5| < \varepsilon \text{ apabila } 0 < |x - 1| < \delta$$

Maka kita mengatakan $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ untuk x mendekati 1 adalah 5 dan pernyataan ini ditulis dengan

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5 \text{ atau } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = 5$$

Definisi

Misal f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang buka I yang memuat a kecuali di a sendiri, Limit $f(x)$ untuk x mendekati a adalah L , a, L bilangan real ditulis dengan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, Jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ apabila $0 < |x - a| < \delta$ dan ditulis dalam bentuk singkat

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni |f(x) - L| < \varepsilon \text{ bila } 0 < |x - a| < \delta$$

Contoh

1. Buktikan bahwa $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 1) = 11$

Bukti

Yang harus ditunjukkan bahwa $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni$

$$\Leftrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \text{ apabila } 0 < |x - a| < \delta$$

$$\Leftrightarrow |(4x - 1) - 11| < \varepsilon \text{ apabila } 0 < |x - 3| < \delta$$

$$\text{Tetapi } |(4x - 1) - 11| = |4x - 12| = 4|x - 3|$$

Jadi yang diinginkan adalah $4|x - 3| < \varepsilon$ apabila $0 < |x - 3| < \delta$

$$\text{Atau } |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ apabila } 0 < |x - 3| < \delta$$

Ambil $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, maka akan terpenuhi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni |4x - 12| < \varepsilon \text{ apabila } 0 < |x - 3| < \delta$$

b. Teorema Limit

Misal n bilangan bulat positif, k bilangan real, $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi-fungsi yang memiliki limit di titik $x = c$, maka:

1. $\lim_{x \rightarrow c} k = k$

2. $\lim_{x \rightarrow c} x = c$

3. $\lim_{x \rightarrow c} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
6. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
7. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}, \text{ asalkan } \lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$
8. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right)^n$
9. $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$

Teorema di atas, dapat diaplikasikan dalam banyak hal pada penyelesaian soal-soal tentang limit.

Contoh:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 = 3 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 \dots\dots(3)$$

$$= 3 \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 \dots\dots(8)$$

$$= 3(2)^2 \dots\dots\dots(2)$$

$$= 12$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x-3)}{\lim_{x \rightarrow 2}} \dots\dots\dots(7)$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 3}{\lim_{x \rightarrow 2} x} \dots\dots(5)$$

$$= \frac{2-3}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$3. \text{ Jika } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3 \text{ dan } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -1$$

Tentukan:

$$a. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} = \dots$$

Jawab

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} \{f^2(x) + g^2(x)\}} \dots\dots(9)$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f^2(x) + \lim_{x \rightarrow a} g^2(x)} \dots\dots(4)$$

$$= \sqrt{\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)^2 + \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)^2} \dots\dots(8)$$

$$= \sqrt{3^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{10}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{f(x)} \{g(x) + 3\} = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{f(x)} \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) + 3 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{f(x)} \{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) + \lim_{x \rightarrow 3} 3 \}$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \{ \lim_{x \rightarrow a} g(x) + \lim_{x \rightarrow a} 3 \}$$

$$= \sqrt[3]{3}(-1 + 3)$$

$$= 2\sqrt[3]{3}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x) - 3g(x)}{f(x) + g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) - 3g(x))}{\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} 3g(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$= \frac{2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$= \frac{2(3) - 3(-1)}{3 + (-1)}$$

$$= \frac{9}{2}$$

SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABANNYA KIRIMKAN
SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN

1. Tentukan daerah definisi dan daerah hasil fungsi-fungsi berikut:

a) $g(x) = \frac{1}{2x}$

b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

c) $g(x) = 1-x^2$

d) $f(x) = x^2 + 4,$

e) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x}}$

2. Buktikan kesamaan berikut.

a. $(1 + \sin x)(1 - \sin x) = \frac{1}{\sec^2 x}$

b. $\sec x - \sin x \cos x = \cos x$

c. $\cos 3y = 4\cos^3 y - 3\cos y$

d. $(1 + \cos x)(1 - \cos x) = \sin^2 x$

e. $(1 - \cos^2 x)(1 + \cot^2 x) = 1$

3. Tentukan $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$ jika

a) $f(x) = 1 - \sqrt{1+x}, \quad g(x) = \frac{1}{2x}$

b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad g(x) = 1-x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{2-x}, \quad g(x) = x^3 - 1$

4. Tentukan nilai limit; a. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 + 4x^2 - 19x + 14}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x^2 + 3x + 4}{x^3 + 10}}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}{x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{1}}{x}$

e. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ jika } f(x) = x^3 + 2\sqrt{x}$

f. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ jika } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

g. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$