

$$\begin{aligned}
&= 8 \int_0^2 (r^2 - y^2) \left(\frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{1}{2} t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dy \\
&= 8 \cdot \frac{\pi}{4} \int_0^r (r^2 - y^2) dy \\
&= 2\pi \left(r^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^r = 2\pi \left(r^2 r - \frac{1}{3} r^3 \right) = \frac{4}{3} \pi r^3
\end{aligned}$$

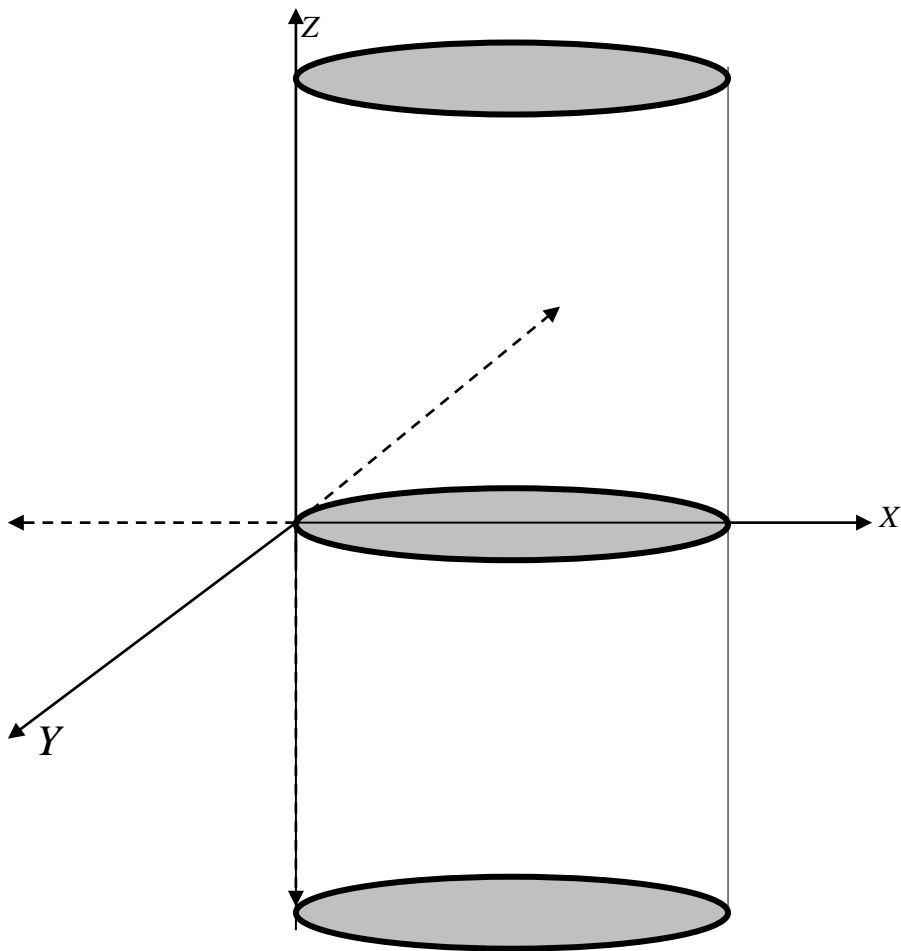
5. **Gambar kurva ruang** $x^2 + y^2 = 4x$

Jawab

$$x^2 + y^2 = 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$$



2 Aplikasi Integral Ganda Tiga

Integral ganda tiga sebagai perluasan integral ganda dua dinyatakan dalam bentuk umum

$$V = \iiint_R dv$$

Sebagaimana telah dinyatakan pada bab III, bahwa integral ganda tiga dapat dinyatakan dalam bentuk koordinat Cartesius, koordinat silinder, dan koordinat bola.

Jika dinyatakan dalam bentuk koordinat Cartesius maka

$$V = \iiint_R f(x, y, z) dv$$

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dv &= \int_{z_1=a}^{z_2=b} \int_{y_1=y(z)}^{y_2=y(z)} \int_{x_1=x(y,z)}^{x_2=x(y,z)} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{y_1=a}^{y_2=b} \int_{z_1=z(y)}^{z_2=z(y)} \int_{x_1=x(z,y)}^{x_2=x(z,y)} f(x, y, z) dx dz dy \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dv &= \int_{z_1=a}^{z_2=b} \int_{x_1=x(z)}^{x_2=x(z)} \int_{y_1=y(x,z)}^{y_2=y(x,z)} f(x, y, z) dy dx dz \\ &= \int_{x_1=a}^{x_2=b} \int_{z_1=z(x)}^{z_2=z(x)} \int_{y_1=y(z,x)}^{y_2=y(z,x)} f(x, y, z) dy dz dx \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) dv &= \int_{x_1=a}^{x_2=b} \int_{y_1=y(x)}^{y_2=y(x)} \int_{z_1=z(y,x)}^{z_2=z(y,x)} f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_{y_1=a}^{y_2=b} \int_{x_1=x(y)}^{x_2=x(y)} \int_{z_1=z(x,y)}^{z_2=z(x,y)} f(x, y, z) dz dx dy \end{aligned}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk koordinat Tabung maka

$$V = \iiint_R f(x, y, z) dv = \iiint_R f(r, \theta, z) dv = \int_{\theta_1=\alpha}^{\theta_2=\beta} \int_{r_1=\rho(\theta)}^{r_2=\rho(\theta)} \int_{z_1=z(r, \theta)}^{z_2=z(r, \theta)} f(r, \theta, z) r dz dr d\theta$$

Jika dinyatakan dalam bentuk koordinat Bola maka

$$V = \iiint_R f(x, y, z) dv$$

$$\iiint_R f(\rho, \phi, \theta) dv = \int_{\theta_1=\alpha}^{\theta_2=\beta} \int_{\phi_1=\rho(\theta)}^{\phi_2=\rho(\theta)} \int_{\rho_1=\rho(\phi, \theta)}^{\rho_2=\rho(\phi, \theta)} f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

Selanjutnya integral ganda tiga dapat digunakan untuk menentukan volume (isi) benda dan secara umum volume benda dengan menggunakan integral ganda tiga adalah

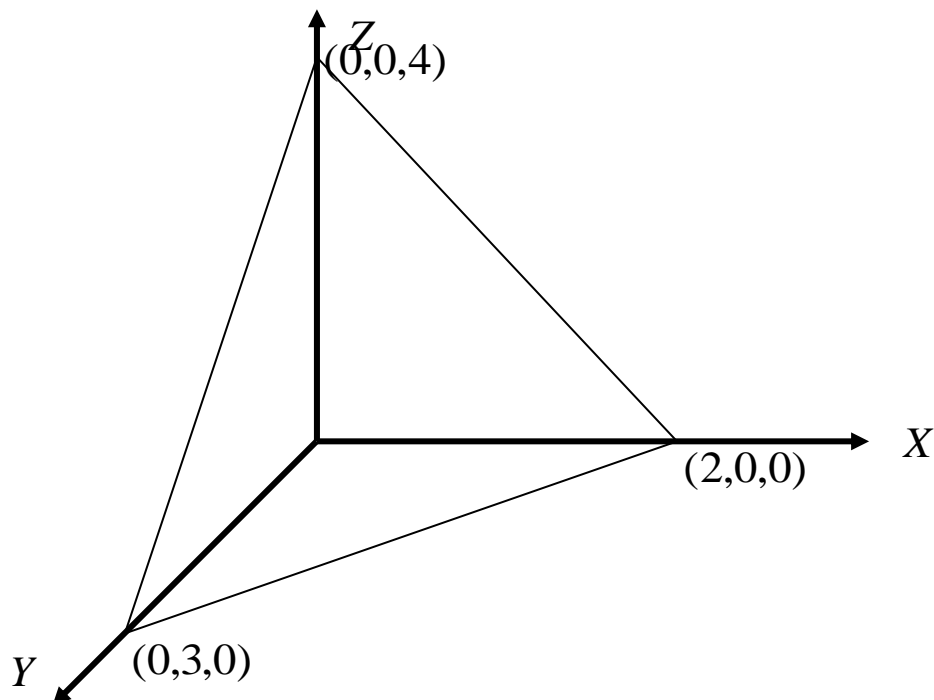
$$V = \iiint_R dv$$

dengan menganggap bahwa $f(x, y, z) = 1$

Untuk perhitungan selanjutan dapat menggunakan koordinat Cartesius, koordinat tabung, atau koordinat bola.

Perhatikan beberapa contoh berikut ini.

6. Dengan menggunakan integral ganda tiga tentukan Volume bangun yang dibatasi oleh $6x + 4y + 3z = 12$



$$\begin{aligned}
 \text{Volume Limas} &= \frac{1}{3} \text{Luas alas } x \text{ tinggi} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} x \cdot y \right) \cdot z \\
 &= 4 \text{ SI}
 \end{aligned}$$

Dengan integral ganda tiga didapat

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_R dv \\
 &= \int_0^3 \int_0^{\frac{12-4y}{6}} \int_0^{\frac{12-6x-4y}{3}} dz dx dy \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^3 \int_0^{\frac{12-4y}{6}} (12-6x-4y) dx dy \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^3 \left[12x - 3x^2 - 4yx \right]_0^{\frac{12-4y}{6}} dy \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^3 \left[12 \left(\frac{12-4y}{6} \right) - 3 \left(\frac{12-4y}{6} \right)^2 - 4y \left(\frac{12-4y}{6} \right) \right] dy \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^3 \left[2(12-4y) - \frac{1}{12} (144 - 96y + 16y^2) - 8y + \frac{8}{3} y^2 \right] dy \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^3 \left[12 - 8y + \frac{4}{3} y^2 \right] dy \\
 &= \frac{1}{3} \left(12y - 4y^2 + \frac{4}{9} y^3 \right)_0^3 \\
 &= \frac{1}{3} \left(12(3) - 4(3)^2 + \frac{4}{9} (3)^3 \right) \\
 &= \frac{1}{3} (36 - 36 + 12) = 4
 \end{aligned}$$

**SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABAN DIKIRIMKAN
SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN**

1. Dengan menggunakan integral ganda dua hitunglah luas suatu luasan berikut ini:
 - a. dibatasi oleh parabola $y^2 = 4 - x$ dan $y^2 = 4 - 4x$
 - b. dibatasi oleh kurva $y^2 = 4x$, $x^2 = 5 - 2y$ dan $x = 0$
 - c. di kuadran I dibatasi oleh $y^2 = 6x$, $y = 0$, dan $x = 6$
2. Tentukan volume berikut dengan menggunakan integral ganda tiga dalam koordinat tabung
 - a. bola dengan persamaan $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
 - b. persekutuan silinder $x^2 + z^2 = 9$ dan silinder $x^2 + y^2 = 9$
 - c. benda pejal yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, di bawah oleh $z = 0$ dan secara menyamping oleh $x^2 + y^2 = 4$