

PERSAMAAN KUADRAT

❖ Pengertian Persamaan Kuadrat

Bentuk Umum Persamaan Kuadrat

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dimana $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$.

❖ Cara- cara Menyelesaikan Persamaan Kuadrat

a. Memfaktorkan

untuk bentuk $ax^2 + bx + c = 0$, maka kalian harus menentukan dua buah bilangan yang jumlahnya b dan hasil kalinya c

b. Melengkapkan kuadrat sempurna

ialah mengubah suatu bentuk kuadrat menjadi bentuk kuadrat sempurna.

Misalnya $x^2 - 2x$ diubah menjadi bentuk kuadrat sempurna $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

c. Menggunakan rumus kuadrat

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dengan $b^2 - 4ac \geq$



Nilai diskriminan (D)

Jika $b^2 - 4ac < 0$ maka persamaan kuadrat tidak memiliki penyelesaian

Jika $b^2 - 4ac = 0$ maka persamaan kuadrat memiliki tepat satu penyelesaian

Jika $b^2 - 4ac > 0$ maka persamaan kuadrat memiliki dua penyelesaian

❖ Menyusun Persamaan Kuadrat

Untuk akar-akar sebuah persamaan yang telah diketahui.

➤ Memakai faktor $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

➤ Memakai rumus jumlah dan hasil kali akar-akar

Diperoleh dari penjumlahan dan perkalian rumus abc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= \frac{-b}{a} \\ x_1 \times x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Sehingga dapat dinyatakan
Contoh 1 :

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

☺ Bagaimana merubah persamaan $2x^2 = 3x - 8$ ke dalam bentuk umum???

Penyelesaian : $2x^2 = 3x - 8$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 3x - 3x - 8 \quad (\text{kedua ruas dikurangi } 3x)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x = -8$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 8 = -8 + 8 \quad (\text{kedua ruas ditambah } 8)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 8 = 0$$

$$\text{Jadi } a = 2, b = -3 \text{ dan } c = 8$$

Contoh 2 :

Cara memfaktorkan

$$\text{Contoh : } x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 0 \text{ atau } x-3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{atau } x = 3$$

Sehingga himpunan penyelesaiannya adalah $\{2, 3\}$

Contoh 3

Cara Melengkapakan Kuadrat

Contoh : Menentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $x^2 + 2x - 15 = 0$!

$$\text{Jawab : } x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x^2 + 2x = 15$$

Agar $x^2 + 2x$ menjadi bentuk kuadrat sempurna, harus ditambah dengan kuadrat dari setengah koefisien $x + (\frac{1}{2} \times 2)^2 = 12 + 1$

Dengan menambahkan 1 pada kedua ruas, diperoleh :

$$x^2 + 2x + 1 = 15 + 1$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = \pm \sqrt{16}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = \pm 4$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 4 \text{ atau } x + 1 = -4$$

$$\Leftrightarrow x = 4 - 1 \text{ atau } x = -4 - 1$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ atau } x = -5$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{3, -5\}$

Contoh 4

a. Menggunakan rumus kuadrat

Menentukan himpunan penyelesaian persamaan $x^2 + 4x - 12 = 0$

↓ ↓ ↓

$$a = 1 \quad b = 4 \quad c = -12$$

penyelesaian

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm 8}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 + 8}{2} \quad \text{atau} \quad x_{1,2} = \frac{-4 - 8}{2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2 \quad \text{atau} \quad x_2 = -6$$

jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{-6, 2\}$

PERTIDAKSAMAAN

A.1. Pengantar

Pertidaksamaan muncul dari kasus-kasus sebagai berikut :

i. Tidak kurang dari 700 siswa gagal dalam Ujian Akhir Nasional (UAN) tahun ini. Pernyataan ini secara matematis ditulis sbb:

$$x \geq 700, \quad x = \text{Banyaknya siswa yang gagal UAN}$$

ii. Pada jalan tertentu tertulis rambu “ Beban maksimum 4 ton “. Pernyataan ini dapat ditulis sbb: $b \leq 4$, $b = \text{Beban}$

iii. Steven mendapatkan nilai 66 dan 72 pada dua tes yang lalu. Jika ia ingin mendapatkan nilai rata-rata paling sedikit 75, berapa nilai tes ketiga yang harus ia peroleh ?.

$$\text{Persoalan ini dapat ditulis } \frac{66+72+x}{3} \geq 75$$

Kalimat matematika di atas yang menggunakan tanda-tanda $<$, $>$, \leq dan \geq dinamakan pertidaksamaan.

A.2. Notasi/Symbol

Simbol/Notasi	Garis Bilangan
$x > a$	
$x \geq a$	
$x < a$	
$x \leq a$	
$a \leq x \leq b$	
$x < a$ atau $x \geq b$	

Simbol $>$ artinya “ lebih dari ”

Simbol \geq artinya “ lebih dari atau sama dengan ”

Simbol $<$ artinya “ kurang dari ”

Simbol \leq artinya “ kurang dari atau sama dengan ”

A.3. Sifat-sifat Pertidaksamaan

1. Untuk setiap bilangan real x, y, z berlaku jika $x > y$ dan $y > z$ maka $x > z$.

Contoh : $x = 10, y = 5$ dan $z = 2$ maka $10 > 5, 5 > 2$ maka $10 > 2$

$x = 1, y = 0$ dan $z = -4$ maka $1 > 0, 0 > -4$ maka $1 > -4$

2. Untuk setiap dua bilangan real x dan y dan a sembarang bilangan , maka berlaku :

$$\clubsuit \text{ Jika } x > y \text{ maka } \begin{cases} x + a > y + a \\ x - a > y - a \end{cases}$$

$$\text{Contoh : } x=7, y=5, a=3 \rightarrow 7>5 \text{ maka } \begin{cases} 7+3 > 5+3 \\ 7-3 > 5-3 \end{cases}$$

$$x=7, y=5, a=-4 \rightarrow 7>5 \text{ maka } \begin{cases} 7+(-4) > 5+(-4) \\ 7-(-4) > 5-(-4) \end{cases}$$

$$\clubsuit \text{ Jika } x < y \text{ maka } \begin{cases} x + a < y + a \\ x - a < y - a \end{cases}$$

3. Untuk setiap dua bilangan real x dan y dan a sembarang bilangan , maka berlaku :

\clubsuit untuk $a > 0$ (positif), Jika $x > y$, maka

Contoh : $x=5, y=2$ dan $a=3$, berlaku

$$5 > 2 \text{ maka } 3(5) > 3(2) \text{ dan } \frac{5}{3} > \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} ax > ay \\ \frac{x}{a} > \frac{y}{a} \end{cases}$$

\clubsuit untuk $a < 0$ (negatif), Jika $x > y$, maka

Contoh: $x=5, y=2$ dan $a=-3$, berlaku

$$5 > 2 \text{ maka } -3(5) < -3(2) \text{ dan } \frac{5}{-3} < \frac{2}{-3}$$

$$\begin{cases} ax < ay \\ \frac{x}{a} < \frac{y}{a} \end{cases}$$

Sifat-sifat pertidaksamaan di atas dipakai untuk menyelesaikan pertidaksamaan.

B. PERTIDAKSAMAAN LINEAR

Pertidaksamaan linear adalah pertidaksamaan pangkat satu.

Contoh :

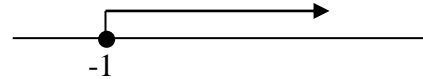
1. Selesaikan : $7x + 21 \geq 14$

$$\Leftrightarrow 7x + 21 - 21 \geq 14 - 21 \text{ (tambahkan } -21 \text{ pada kedua ruas)}$$

$$\Leftrightarrow 7x \geq -7 \text{ (bagilah kedua ruas dengan 7)}$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1$$

Dalam bentuk garis bilangan



2. $\frac{4x-7}{3} < \frac{5+2x}{4}$ (kalikan 12 pada kedua ruas)

$$\Leftrightarrow 4(4x-7) < 3(5+2x)$$

$$\Leftrightarrow 16x - 28 < \dots\dots\dots$$
 (tambahkan 6x+28 pada kedua ruas)

$$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$\Leftrightarrow 10x < 33$$
 (kedua ruas dibagi 10)

$$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

Dalam bentuk garis bilangan



C. PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

Untuk setiap x, y bilangan real berlaku :

✦ Jika $x \cdot y > 0$ maka $x > 0$ dan $y > 0$ atau $x < 0$ dan $y < 0$

✦ Jika $x \cdot y < 0$ maka $x > 0$ dan $y < 0$ atau $x < 0$ dan $y > 0$

1. Selesaikan $2x^2 - x - 3 \geq 0$

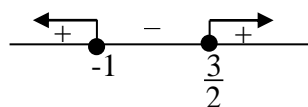
Faktorkan: $(\dots\dots)(\dots\dots) \geq 0$

Nilai nol $x = \frac{3}{2}$ atau $x = -1$

2x-3	negatif	negatif	positif
x+1	negatif	positif	positif
(2x-3)(x+1)	positif	negatif	positif

Jadi $\{ x | x \leq -1 \text{ atau } x \geq \frac{3}{2}, x \in \mathbb{R} \}$

Cara lain :



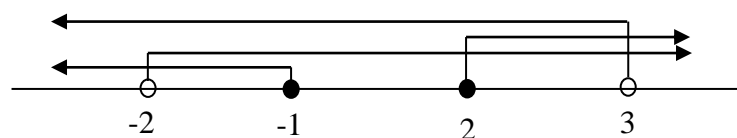
Jadi penyelesaiannya $\{ x | x \leq -1 \text{ atau } x \geq \frac{3}{2}, x \in \mathbb{R} \}$

2. Selesaikan : $2x + 4 \leq 2x^2 < 2x + 12$

$$\Leftrightarrow 2x + 4 \leq 2x^2 \text{ dan } 2x^2 < 2x + 12$$

$$\Leftrightarrow \dots\dots\dots \text{ dan } \dots\dots\dots$$

$$\Leftrightarrow \dots\dots\dots \text{ dan } \dots\dots\dots$$



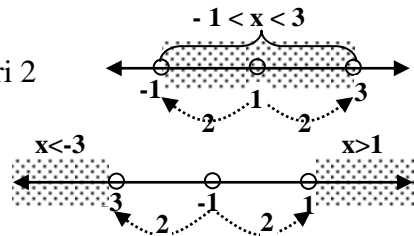
Penyelesaiannya : $\{ \dots\dots\dots \}$

F. PERTIDAKSAMAAN HARGA MUTLAK

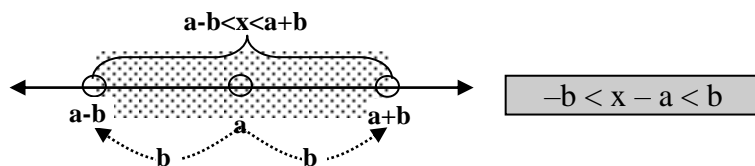
⌘ Ingat $|x| = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0 \\ -x, & \text{jika } x < 0 \end{cases}$ atau $|x| = \sqrt{x^2}$

⌘ $|x-1| < 2$ artinya jarak x terhadap 1 kurang dari 2

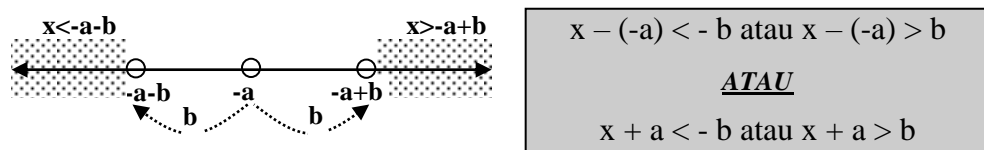
⌘ $|x+1| > 2 \Leftrightarrow |x-(-1)| > 2$
Artinya jarak x dari titik -1 lebih dari 2



Jadi $|x - a| < b$ artinya jarak x dari a adalah kurang dari b atau nilai x dikurangi a terletak antara $-b$ dan b .



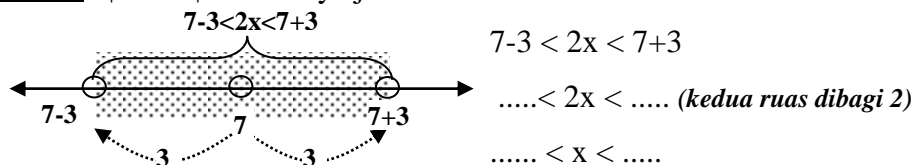
Jadi $|x + a| > b \Leftrightarrow |x - (-a)| > b$ artinya jarak x dari $-a$ adalah lebih dari b atau nilai x dikurangi $(-a)$ / nilai x di tambah a berada kurang dari $-b$ atau lebih dari b .



Contoh :

1. Selesaikan pertidaksamaan $|2x - 7| < 3$

Cara 1 : $|2x - 7| < 3$ artinya jarak $2x$ dari adalah dari 3.



Jadi penyelesaiannya : $\{x | \dots\}$

Cara 2: $|2x - 7| < 3$

$$-3 < 2x - 7 < 3 \text{ (ketiga ruas ditambah 7)}$$

$$\dots < \dots < \dots \text{ (ketiga ruas dibagi 2)}$$

$$\dots < \dots < \dots$$

$$\dots < x < \dots$$

Jadi penyelesaiannya $\{x | \dots\}$

Cara 3 : $\sqrt{(2x - 7)^2} < 3 \dots \text{ (kedua ruas dikuadratkan)}$

$$(2x - 7)^2 < 3^2 \quad \dots \text{(kedua ruas dikurangi dengan } 3^2)$$

$$\dots < \dots$$

$$((2x - 7)^2 - 3^2 < 0 \dots \text{(pemfaktoran selisih kuadrat)})$$

$$(\dots + \dots)(\dots - \dots) < 0$$

$$(\dots + \dots)(\dots + \dots) < 0$$

$$\text{Nilai nol: } (\dots + \dots)(\dots + \dots) = 0$$

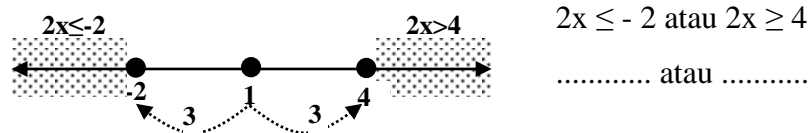
$$x = 2 \text{ atau } x = 5$$

$$\text{Garis bilangan : } \begin{array}{c} + \quad \quad \quad - \quad \quad \quad + \\ \hline \quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad 5 \quad \quad \quad \end{array}$$

$$\text{Penyelesaian : } \{x | \dots\}$$

2. Selesaikan pertidaksamaan $|2x - 1| \geq 3$

Cara 1 : $|2x - 1| \geq 3$ artinya jarak $2x$ daridari 3



Jadi penyelesaiannya $\{x | \dots\}$

Cara 2: $|2x - 1| \geq 3$

$$2x - 1 \leq -3 \text{ atau } 2x - 1 \geq 3$$

$$\dots \leq \dots \text{ atau } \dots \geq \dots$$

$$\dots \leq \dots \text{ atau } \dots \geq \dots$$

$$x \leq \dots \text{ atau } x \geq \dots$$

Jadi penyelesaiannya $\{x | \dots\}$

Cara 3 : $\sqrt{(2x - 1)^2} \geq 3 \quad \dots \text{(kedua ruas dikuadratkan)}$

$$(2x - 1)^2 \geq 3^2 \quad \dots \text{(kedua ruas dikurangi dengan } 3^2)$$

$$\dots \geq \dots$$

$$(2x - 1)^2 - 3^2 \geq 0 \dots \text{(pemfaktoran selisih kuadrat)}$$

$$(\dots + \dots)(\dots - \dots) \geq 0$$

$$(\dots + \dots)(\dots + \dots) \geq 0$$

$$\text{Nilai nol: } (\dots + \dots)(\dots + \dots) = 0$$

$$x = \dots \text{ atau } x = \dots$$

$$\text{Garis bilangan : } \begin{array}{c} \leftarrow \dots \quad \dots \quad \rightarrow \\ \hline \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \end{array}$$

$$\text{Penyelesaian : } \{x | \dots\}$$

**SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABANNYA KIRIMKAN SEBELUM BATAS
WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN**

Kelompok 1. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan sbb :

- a. $2x-3 \leq 2x^2-3x < x^2-2$
- b. $x^2+3x+4 \geq 0$
- c. $2 < x^2-x$
- d. $x^2(x^2+1)(2-x-x^2) < 0$
- e. $x(x^2+1)(2-x-x^2) > 0$

Kelompok 2. Tentukan Himpunan Penyelesaian dari pertidaksamaan sbb:

- a) $|2x+1| \geq 3$
- b) $\left| \frac{2x-1}{x+5} \right| \leq 3$
- c) $|x+3| < \sqrt{9-x^2}$

Kelompok 3.

- ☺ Nyatakan persamaan $2(x^2+1)=x(x+3)$ ke dalam bentuk umum persamaan kuadrat !
- ☺ Tentukan himpunan penyelesaian persamaan kuadrat $2x^2-5x-3=0$, jika $x \in \mathbb{R}$!
- ☺ Tentukan persamaan kuadrat jika diketahui akar-akarnya adalah 3 dan 0 !
- ☺ Jumlah dua bilangan cacah adalah 12. jika hasil kali dua bilangan itu 35. Tentukan kedua bilangan cacah yang dimaksud !