

INTEGRAL TAK TENTU DAN TENTU

- Integral Tak Tentu

Notasi/lambang untuk menyatakan integral adalah \int . Misalkan $F(x)$ menyatakan fungsi dalam x , dengan $f(x)$ turunan dari $F(x)$ dan c konstanta berupa bilangan real sembarang, maka notasi integral tak tentu dari $f(x)$ adalah

$$\boxed{\int f(x) dx = F(x) + c}$$

Rumus dasar integral tak tentu

a. Integral Fungsi Aljabar

Cara menentukan integral fungsi aljabar. Misalkan $y = x^{n+1}$ maka kita dapat menentukan turunan pertamanya, yaitu $y' = (n+1) x^{(n+1)-1} = (n+1) x^n$.

$y' = \frac{dy}{dx}$ sehingga diperoleh $\frac{dy}{dx} = (n+1) x^n$. Dari persamaan tersebut

diperoleh $dy = (n+1) x^n dx$. Apabila diintegrasikan kedua ruas akan diperoleh persamaan:

$$\int dy = \int (n+1) x^n dx$$

$$\Leftrightarrow y + c = \int (n+1) x^n dx$$

Kemudian disubstitusikan dengan bentuk fungsi $y = x^{(n+1)}$ diperoleh

$$\int (n+1) x^n dx = x^{(n+1)} + c, \text{ sehingga diperoleh } \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, n \neq -1$$

Pada materi diferensial, jika turunan $F(x)$ adalah $f(x)$ dan turunan $G(x)$

adalah $g(x)$ maka turunan dari $y = F(x) + G(x)$ adalah $\frac{dy}{dx} = f(x) + g(x)$,

dengan demikian dapat dinyatakan bahwa

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Sifat-sifat yang merupakan rumus-rumus dasar integral adalah sebagai berikut.

1. $\int dx = x + c$

2. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c; n \neq -1$

$$3. \int a^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c; n \neq -1$$

$$4. \int a dx = a + c$$

$$5. \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$6. \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

$$7. \int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$1. \text{ Jika } f(x) = \sin x \text{ maka } f'(x) = \cos x$$

$$2. \text{ Jika } f(x) = \cos x \text{ maka } f'(x) = -\sin x$$

$$3. \text{ Jika } f(x) = \tan x \text{ maka } f'(x) = \sec^2 x$$

$$4. \text{ Jika } f(x) = \cot x \text{ maka } f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$5. \text{ Jika } f(x) = \sec x \text{ maka } f'(x) = \sec x \tan x$$

$$6. \text{ Jika } f(x) = \operatorname{cosec} x \text{ maka } f'(x) = \operatorname{cosec} x \cot x$$

Contoh:

$$1. \text{ Selesaikan pengintegralan dari } \int x^4 \sqrt{x} dx.$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \int x^4 \sqrt{x} dx &= \int x^4 x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \int x^{4\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{4\frac{1}{2}+1} x^{4\frac{1}{2}+1} + c \\ &= \frac{2}{11} x^{\frac{11}{2}} + c \end{aligned}$$

b. Integral Fungsi Trigonometri

Karena integral adalah operasi kebalikan (invers) dari turunan (diferensial), integral trigonometri dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\bullet \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\bullet \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\bullet \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$$

- $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$
- $\int \sin (ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos (ax + b) + c$
- $\int \cos (ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sin (ax + b) + c$

- Integral Tentu

Misalkan f kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ atau $a \leq x \leq b$. Jika F suatu fungsi sedemikian rupa sehingga $F'(x) = f(x)$ untuk semua x pada $[a,b]$, maka berlaku

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$F(x)$ adalah antiturunan dari $f(x)$ pada $a \leq x \leq b$. Hubungan di atas dinamakan dengan teorema dasar kalkulus. Dengan teorema ini, nilai integral tertentu lebih mudah diketahui. Bukti teorema di atas adalah sebagai berikut.

Bukti:

Misal $g(x) = \int_a^x f(x) dx$ dengan $x \in [a,b]$ maka $g(x)$ merupakan integral tak tentu sehingga $g(x) = \int_a^x f(x) dx = F(x) + c$.

Sifat-sifat integral tertentu:

Misal $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi kontinu maka:

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$, dengan c konstanta
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$; dengan $a < c < b$.

TUGAS

SILAKAN KALIAN BUAT SENDIRI SOAL DAN JAWABANNYA

1. 5 SOAL MENGENAI INTEGRAL TAK TENTU
2. 5 SOAL UNTUK INTEGRAL TERTENTU.