

## LIMIT (DR.Jemakmun,M.Si)

### 1.Limit di Tak Hingga

Perhatikan fungsi

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

$f(x)$  mempunyai daerah definisi semua bilangan real ( $R$ )

Nilai  $f(x)$  mendekati 2 apabila peubah  $x$  bertambah besar atau bertambah kecil. Hal ini berarti  $f(x)$  dapat dibuat sedekat mungkin ke 2. Dengan kata lain jarak  $f(x)$  dengan 2 dapat dibuat lebih kecil dari bilangan positif sebarang. Dengan cara mengambil  $x$  cukup besar (lebih besar dari bilangan positif tertentu), atau dengan cara mengambil  $x$  cukup kecil (lebih kecil dari bilangan negatif tertentu).

Dalam kasus  $x$  mengambil nilai cukup besar, kita menyatakan dengan lambang

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2, \text{ dan}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$$

Kedua bentuk di atas dinamakan limit di tak hingga dan didefinisikan sebagai berikut:

- 1) Misal  $f(x)$  didefinisikan disetiap titik pada  $(a, +\infty)$ . Jika limit  $f(x)$  untuk  $x$  menuju positif tak hingga adalah  $L$  dan ditulis

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Jika untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$  ada bilangan  $P > 0$  sehingga

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ apabila } x > P$$

Secara singkat ditulis

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P > 0 \ni |f(x) - L| < \varepsilon \text{ bila } x > P$$

- 2) Misal  $f(x)$  didefinisikan disetiap titik pada  $(-\infty, b)$ . Jika limit  $f(x)$  untuk  $x$  menuju negatif tak hingga adalah  $L$  dan ditulis

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Jika untuk setiap bilangan  $\varepsilon > 0$  ada bilangan  $N < 0$  sehingga

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ apabila } x < N$$

Secara singkat ditulis

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N < \infty \ni |f(x) - L| < \varepsilon \text{ bila } x < N$$

## 2. Limit Tak Hingga

Dalam definisi limit fungsi di satu titik, fungsi  $f(x)$  terdefinisi pada selang terbuka yang memuat  $a$ , kecuali mungkin di  $a$  itu sendiri. Tetapi ada kalanya fungsi  $f(x)$  akan membesar tanpa batas atau mengecil tanpa batas apabila  $x$  mendekati  $a$ .

Sebelum kita mendefinisikan limit tak hingga, perhatikan terlebih dahulu fungsi-fungsi berikut.

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} \quad \text{b. } g(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}$$

Fungsi  $f(x)$  dan  $g(x)$  di atas terdefinisi pada selang buka yang memuat 3 kecuali di 3 sendiri. Bagaimana nilai  $f(x)$  dan  $g(x)$  apabila  $x$  mendekati 3?

Nilai  $f(x)$  akan membesar tanpa batas, artinya nilai  $f(x)$  dapat dibuat lebih besar dari bilangan positif manapun, asalkan nilai  $x$  cukup dekat dengan 3 dan bukan  $x = 3$ . Sebaliknya nilai  $g(x)$  mengecil tanpa batas, artinya nilai  $g(x)$  dapat dibuat lebih kecil dari bilangan negatif manapun apabila  $x$  cukup dekat dengan 3 dan bukan  $x = 3$ . Hal demikian di atas dinamakan dengan limit tak hingga dan ditulis dengan

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} -\frac{1}{(x-3)^2} = -\infty$$

Limit tak hingga didefinisikan sebagai berikut:

- 1) Misalkan  $f(x)$  didefinisikan di setiap titik pada selang buka  $I = (a, b)$  yang memuat  $a$  kecuali mungkin di  $a$  sendiri. Limit  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  adalah positif tak hingga, dan ditulis

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

Jika untuk setiap bilangan  $P > 0$  ada bilangan  $\delta > 0$  sehingga  $f(x) > P$  apabila  $0 < |x - a| < \delta$ . Secara singkat ditulis

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall P > 0 \exists \delta > 0 \ni f(x) > P \text{ bila } 0 < |x - a| < \delta$$

- 2) Misalkan  $f(x)$  didefinisikan di setiap titik pada selang buka  $I = (a,b)$  yang memuat  $a$  kecuali mungkin di  $a$  sendiri. Limit  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  adalah negatif tak hingga, dan ditulis

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Jika untuk setiap bilangan  $P < 0$  ada bilangan  $\delta > 0$  sehingga  $f(x) < N$  apabila  $0 < |x - a| < \delta$ . Secara singkat ditulis

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0 \exists \delta > 0 \ni f(x) < N \text{ bila } 0 < |x - a| < \delta$$

Catatan

- 1) Teorema limit di satu titik berlaku pada limit di tak hingga dan limit tak hingga.
- 2) Secara umum limit tak hingga bernilai tak hingga, sedang limit di tak hingga dapat bernilai tak hingga atau berhingga.

### 3. Bentuk Tak Tentu

Setiap menyelesaikan tentang limit, kita dihadapkan pada bentuk pembagian atau perkalian. Bentuk yang sering ditemukan ada 3 macam, yaitu :

1. *Bentuk terdefinisi* (tertentu) : yaitu bentuk yang nilainya ada dan tertentu, misalnya :

$$\frac{5}{3}, \frac{4}{7}.$$

2. *Bentuk tak terdefinisi* : yaitu bentuk yang tidak mempunyai nilai, misalnya :  $\frac{5}{0}$

3. *Bentuk tak tentu* : yaitu bentuk yang nilainya sembarang, misalnya :  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^\infty$

Penting : Persoalan limit adalah mengubah *bentuk tak tentu* menjadi *bentuk tertentu*.

Untuk jelasnya dapat dilihat pada pembahasan berikut ini:

### 4. Limit Fungsi Aljabar

Jika diketahui fungsi  $f(x)$  dan nilai  $f(a)$  terdefinisi, maka  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Contoh :

1.  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x) = (3^2 + 2(3)) = 9 + 6 = 15$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{5x + 7} = \frac{0^2 + 0}{5(0) + 7} = 0$

Berikut ini akan dibahas limit limit fungsi Aljabar *bentuk tak tentu* yaitu :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^{\infty}.$$

## 5. Limit Bentuk $\left(\frac{0}{0}\right)$

Limit ini dapat diselesaikan dengan *memfaktorkan pembilang dan penyebutnya*, kemudian "*mencoret*" faktor yang sama, lalu *substitusikan nilai*  $x = a$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)P(x)}{(x-a)Q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

Catatan :

1. Karena  $x \rightarrow a$ , maka  $(x-a) \rightarrow 0$  sehingga pembilang dan penyebut boleh dibagi dengan  $(x-a)$
2. Nilai limitnya ada jika dan hanya jika :  $Q(a) \neq 0$
3. Jika pembilang atau penyebutnya memuat *bentuk akar*, maka sebelum difaktorkan dikalikan dulu dengan *bentuk sekawannya*.

Contoh :

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{5x-1}}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{5x-1}}{(x^2-1)} \left( \frac{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{5x-1}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+3) - (5x-1) - 2}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{5x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{5x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{5x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-4)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{5x-1})} \\ &= \frac{1-4}{(1+1)(\sqrt{4+3} + \sqrt{5-1})} = \frac{-3}{2(2+2)} = \frac{-3}{8} = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

## 6. Limit Bentuk $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Limit ini dapat diselesaikan dengan *membagi pembilang dan penyebut dengan variabel berpangkat tertinggi*, selanjutnya menggunakan  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0$ .

Contoh :

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 2x^2 + 5x}{12x^3 + 7x^2 - 8x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{5x}{x^3}}{\frac{12x^3}{x^3} - \frac{7x^2}{x^3} - \frac{8x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^3}}{12 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^3}} = \frac{6 - 0 + 0}{12 + 0 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 7x^2 - 3x}{2x^4 - x^3 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^3}{x^4} - \frac{7x^2}{x^4} - \frac{3x}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4} - \frac{x^3}{x^4} + \frac{4x^2}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{0 + 0 - 0}{2 - 0 + 0} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 2}{2x^3 + 4x^2 - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^4}{x^4} - \frac{3x^2}{x^4} + \frac{2}{x^4}}{\frac{2x^3}{x^4} + \frac{4x^2}{x^4} - \frac{7}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}}{\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{7}{x^4}} = \frac{5 - 0 + 0}{0 + 0 - 0} = \infty$$

Kesimpulan:

Jika  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  dan  $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$

maka:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0}{b_0}, \text{ untuk } n = m$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \text{ untuk } n < m$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \text{ atau } -\infty, \text{ untuk } n > m$$

## 7. Limit Bentuk $(\infty - \infty)$

Limit ini umumnya memuat bentuk akar:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} \right)$$

Cara Penyelesaian :

1. Kalikan dengan bentuk sekawannya !

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} \left( \frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - g(x)}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}}$$

2. Bentuknya berubah menjadi  $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)$

3. Selesaikan seperti pada limit sebelumnya.

Contoh:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 6x + 2} - \sqrt{x^2 - 4x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 6x + 2} - \sqrt{x^2 - 4x + 1} \left( \frac{\sqrt{x^2 + 6x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 1}}{\sqrt{x^2 + 6x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 1}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 6x + 2) - (x^2 - 4x + 1)}{\sqrt{x^2 + 6x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x - 1}{\sqrt{x^2 + 6x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 1}} = \frac{10}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{10}{2} = 5$$

Sehingga

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 6x + 2} - \sqrt{x^2 - 4x + 1} = 5$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 3x} \left( \frac{\sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 3x}}{\sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 3x}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - x) - (x^2 + 3x)}{\sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 3x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 4x)}{\sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 3x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x - 4)}{x\sqrt{2 - \frac{1}{x}} + x\sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = \infty$$

Secara umum:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r} =$$

$$1) \frac{b - q}{2\sqrt{a}}, \text{ jika } a = p$$

2)  $\infty$ , jika  $a > p$

3)  $-\infty$ , jika  $a < p$

Sebagai latihan bagi pembaca, buktikan soal-soal berikut:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 - 3x + 1} - \sqrt{4x^2 - 5x - 2} = \frac{-3 - (-5)}{2\sqrt{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + 7x - 1} - \sqrt{3x^2 + x - 8} = \infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 3} - \sqrt{5x^2 + 4x - 7} = -\infty$$

## 8. Limit Bentuk $(1^\infty)$

Definisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281\dots, n \in N$$

Dari definisi dapat dibuktikan teorema berikut :

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} = e$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{-\frac{1}{x}} = e$$

Contoh :

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4} \cdot 4} = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4}} \right)^4 = e^4$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x \cdot \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}^{\frac{1}{2}} = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} \right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 3x\right)^{\frac{1}{-3x} \cdot (-3)} = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 3x\right)^{\frac{1}{-3x}} \right)^{-3} = e^{-3}$$

## 9. Limit Deret Konvergen

**Definisi :** Deret Geometri Konvergen adalah deret geometri dengan rasio  $-1 < r < 1$ .

Teorema :  $S = \frac{a}{1-r}$

$S$  : jumlah tak hingga suku deret geometri konvergen

$a : U_1$  : suku pertama

$r$  : rasio, yaitu  $r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$

Contoh :

1. Hitung jumlah tak hingga deret geometri berikut :

a)  $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$

Jawab .  $S = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$

b)  $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots$

Jawab.  $S = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{3}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4}$

2. Hitung limit berikut :

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n} \right)$

Jawab

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n} \right) = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2 \cdot 3^{-i}$

Jawab

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2 \cdot 3^{-i} = \lim_{i=1} \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{3^n} \right) = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

4. Jumlah semua suku deret geometri tak hingga adalah 12, jumlah suku-suku bernomor genap adalah 4. Tentukan rasio dan suku pertama deret itu !

Jawab :



$$S = 12 \Leftrightarrow \frac{a}{1-r} = 12 \dots\dots (1)$$

$$U_2 + U_4 + U_6 + \dots = 4$$

$$ar + ar^3 + ar^5 + \dots = 4$$

$$\frac{ar}{1-r^2} = 4 \Rightarrow \left(\frac{a}{1-r}\right)\left(\frac{r}{1+r}\right) = 4 \dots\dots (2)$$

Berdasarkan (1) dan (2) diperoleh

$$12\left(\frac{r}{1+r}\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow 12r = 4 + 4r$$

$$\Leftrightarrow 8r = 4$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

Selanjutnya berdasarkan (1) dan (2)

$$\frac{a}{1-r} = 12$$

$$\frac{a}{1-\frac{1}{2}} = 12$$

$$\Leftrightarrow a = 12\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

Dengan demikian diperoleh rasio =  $\frac{1}{2}$  dan suku pertama = 6

SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABAN  
DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN

1. Selesaikanlah;

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^{-1} + 4}{x^4 - x^3 - 5}$

b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + x^4 - 7x^3}{6x^5 - 2x^3 + 8x^2}$

c.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{10} - 2x^8 + 3x^7}{x^{12} + 12x^5 + x^2}$

d.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^7 + 6x^4 - 2}{2x^6 + 7x^4 - x^3}$

2. Ubahlah menjadi pecahan biasa !

a) 0,6666 .....

b) 0,242424 .....

3. Diketahui sebuah bujursangkar dengan sisi 10 cm. Titik tengah keempat sisinya dihubungkan sehingga terbentuk bujursangkar kedua. Titik tengah keempat sisibujursangkar kedua dihubungkan lagi sehingga terbentuk bujursangkar ketiga, demikian seterusnya. Hitunglah jumlah luas semua bujursangkar itu !