APLIKASI INTEGRAL GANDA(Dr. Jemakmun, M.Si)

1. Aplikasi Integral Ganda Dua

Integral ganda (rangkap) dua yang bentuk umumnya : $\iint_R f(x,y)\,dA$

dapat diaplikasikan untuk beberapa persoalan, diantaranya adalah:

a. Luas suatu Luasan (Bidang)

Luas bidang dapat dipandang sebagai integral ganda dua jika f(x,y) = 1 , sehingga integral ganda dua menjadi :

$$A = \iint_R dA$$

$$\Leftrightarrow A = \int_{x_1=a}^{x_2=b} \int_{\mathrm{y}_1=y(x)}^{\mathrm{y}_2=y(x)} \mathrm{dydx} \quad \text{atau} \quad \Leftrightarrow A = \int_{y_1=a}^{y_2=b} \int_{\mathrm{x}_1=x(y)}^{\mathrm{x}_2=x(y)} \mathrm{dxdy}$$

Dalam koordinat polar, bentuk di atas dinyatakan dengan:

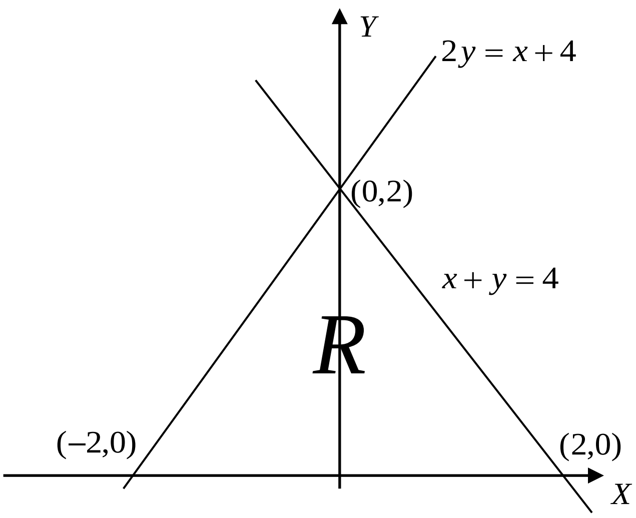
$$A = \iint_R dA = \int_{\theta_1=\alpha}^{\theta_2=\beta} \int_{\rho_1}^{\upsilon_2} \rho \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

Contoh :

1. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh x + y = 2 dan 2y = x + 4

   Jawab :

   Sebelum ditentukan luasnya, daerah tersebut digambar terlebih dahulu



$$A = \iint_R dA = \int_0^2 \int_{2y-4}^{2-y} \mathrm{dxdy} = \int_0^2 (\mathrm{x})_{2y-4}^{2-y}\, dy$$

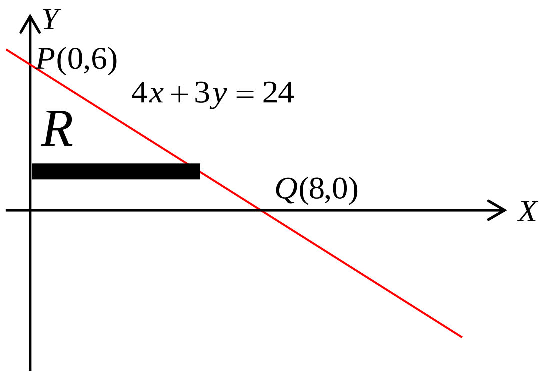
$$= \int_0^2 (2-y)-(2y-4)dy = \int_0^2 (6-3y)dy$$

$$= (6y - \frac{3}{2}y^2)\Big|_0^2 = (12-6) = 6$$

2. Gunakan integral ganda dua untuk menentukan luas suatu luasan yang dibatasi oleh:

   3x + 4y = 24, x = 0, y = 0

   Jawab



Luas luasan di atas adalah

A(R) = $\iint_R dA$

$$= \int_0^6 \int_0^{\frac{24-4y}{3}} dxdy$$

$$= \int_0^6 [x]_0^{\frac{24-4y}{3}}\, dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^6 24 - 4y\ dy$$

$= \dfrac{1}{3}\left[24y - 2y^2\right]_0^6$

$= \dfrac{1}{3}(24.6 - 2.6^2) - (24.0 - 2.0^2)$

$= \dfrac{1}{3}(144 - 72)$

= 24 satuan luas

b. Pusat Luasan

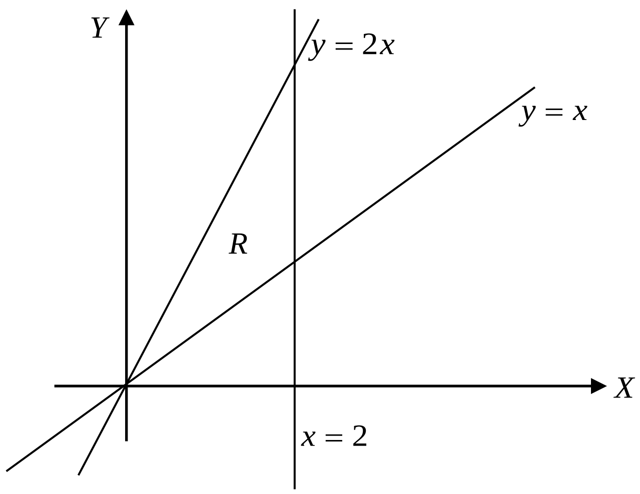
Misal R adalah suatu luasan yang dibatasi oleh kurva-kurva, maka luasan tersebut mempunyai pusat luasan dan dinyatakan dengan $(\bar{x}, \bar{y})$ dengan hubungan

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\, dA}{\iint_R dA} \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y\, dA}{\iint_R dA}$$

dengan $\iint_R dA$ adalah luas dari luasan dimaksud.

Contoh

1) Tentukan pusat luasan berikut dengan menggunakan integral ganda dua.y = 2x, y = x, x = 0, dan x = 2



Pusat suatu luasan dinyatakan dengan $(\bar{x}, \bar{y})$, dengan

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\, dA}{\iint_R dA} \text{ dan } \bar{y} = \frac{\iint_R y\, dA}{\iint_R dA}$$

Luasan di atas dengan menggunakan integral ganda dua didapat:

$$A(R) = \iint_R dA$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_x^{2x} dydx = \int_0^2 (y)_x^{2x} dx = \int_0^2 x\, dx = \left(\frac{1}{2}x^2\right)_0^2 = 2$$

dan

$$\iint_R y\, dA$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_x^{2x} y\, dydx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_x^{2x} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[4x^2 - x^2\right] dx = \frac{1}{2}\left(x^3\right)_0^2 = \frac{9}{2}$$

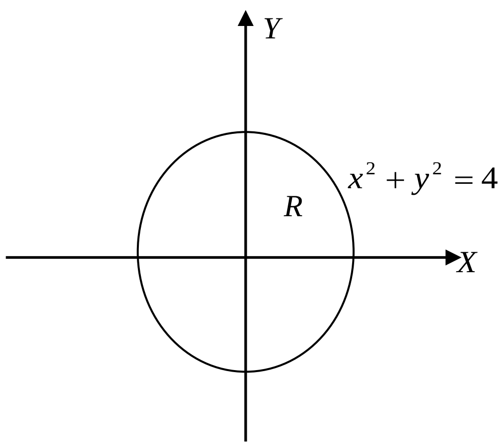
$$\iint_R x\, dA$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_x^{2x} x\, dydx = \int_0^2 [xy]_x^{2x} dx = \int_0^2 \left[2x^2 - x^2\right] dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right)_0^2 = \frac{9}{2}$$

sehingga $\bar{x} = \frac{\frac{9}{2}}{9}$ dan $\bar{y} = \frac{\frac{9}{2}}{9}$

diperoleh pusat luasan yang dibatasi oleh y = 2x, y = x, x = 0, dan x = 2 adalah $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2) Tentukan pusat luasan dengan batasan $x^2 + y^2 = 4$ pada kuadra I.



Pusat suatu luasan dinyatakan dengan $\left(\overline{x},\overline{y}\right)$, dengan

$$\overline{x}=\frac{\iint_R x\,dA}{\iint_R dA} \quad \text{dan} \quad \overline{y}=\frac{\iint_R y\,dA}{\iint_R dA}$$

Luasan di atas dengan menggunakan integral ganda dua didapat:

$$A(R)=\iint_R dA$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dydx = \int_0^2 (y)_0^{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\;dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t.2\cos t\;dt$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{\sin t\cos t}{2}-\frac{1}{2}t\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(\frac{\pi}{4}\right)=\pi$$

dan

$$\iint_R y\,dA$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\;dydx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_x^{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[4-x^2\right]dx = \frac{1}{2}\left(4x-x^3\right)_0^2 = 0$$

$$\iint_R x\,dA$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x\;dydx = \int_0^2 \left[xy\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^2 \left[x\sqrt{4-x^2}\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t 2\cos t 2\cos t dt$$

$$\Leftrightarrow 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t dt = -8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\;d(\cos t) = -\frac{8}{3}\left(\cos^3 t\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}$$

sehingga $\bar{x} = \dfrac{\frac{8}{3}}{\pi}$ dan $\bar{y} = \dfrac{0}{\pi}$, diperoleh pusat luasan yang dibatasi oleh

$x^2 + y^2 = 4$ pada kuadra I. adalah $\left(\dfrac{8}{3\pi}, 0\right)$

c. Luas Permukaan Lengkung

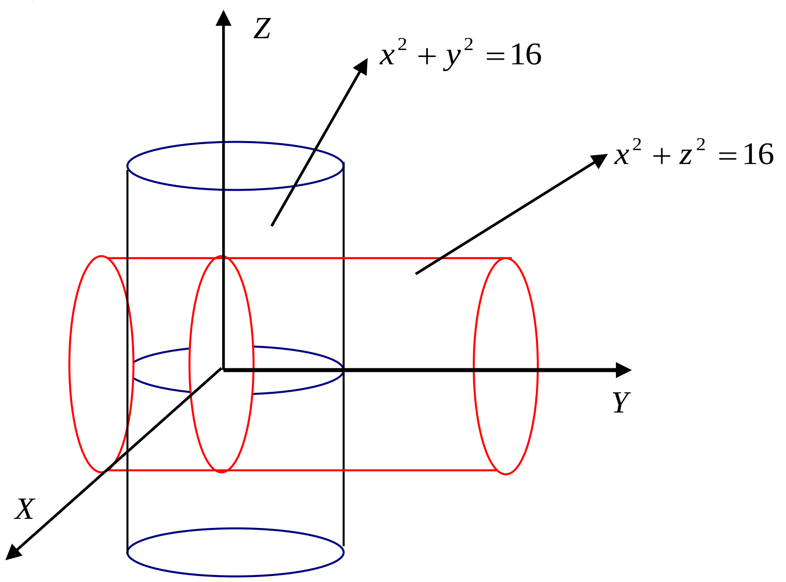
Jika S adalah bagian dari permukaan R' dengan persamaan z=f(x,y). R' dapat diproyeksikan pada bidang koordinat yang cocok sehingga menghasilkan suatu daerah R pada bidang dalam ruang. Dengan demikian fungsinya terintegralkan pada R.

1. Jika R' diproyeksikan pada XOY maka $S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$
2. Jika R' diproyeksikan pada YOZ maka $S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dA$
3. Jika R' diproyeksikan pada XOZ maka $S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dA$

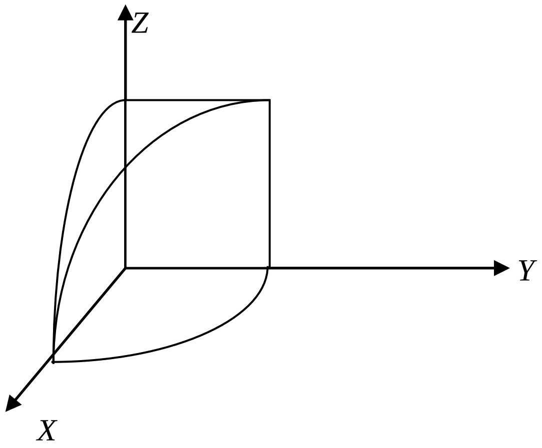
tanda integrasi urutannya menyesuaikan dengan bidang proyeksi, Jika bidang proyeksinya X)Y maka dA berubah menjadi dxdy atau dx.

Contoh; Carilah luas permukaan silinder $x^2 + z^2 = 16$ didalam silinder $x^2 + y^2 = 16$

Jawab



Perpotongan kedua selinder menghasilkan bangun



dengan mengganggap bidang XOY sebagai bidang proyksi, maka

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$z = \sqrt{16 - x^2}$, *sehingga* $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$ *dan* $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ sehingga

$$S = 8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{z}\right)^2}\, dydx$$

$$\Leftrightarrow 8\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}}\, dydx$$

$$\Leftrightarrow 32\int_0^4 dx = 32(4) = 128 \text{ satuan luas}$$

d. Volume Bangun Ruang

Volume bangun suatu ruang dapat dinyatakan dengan menggunakan integral ganda dua dan dituliskan dengan

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

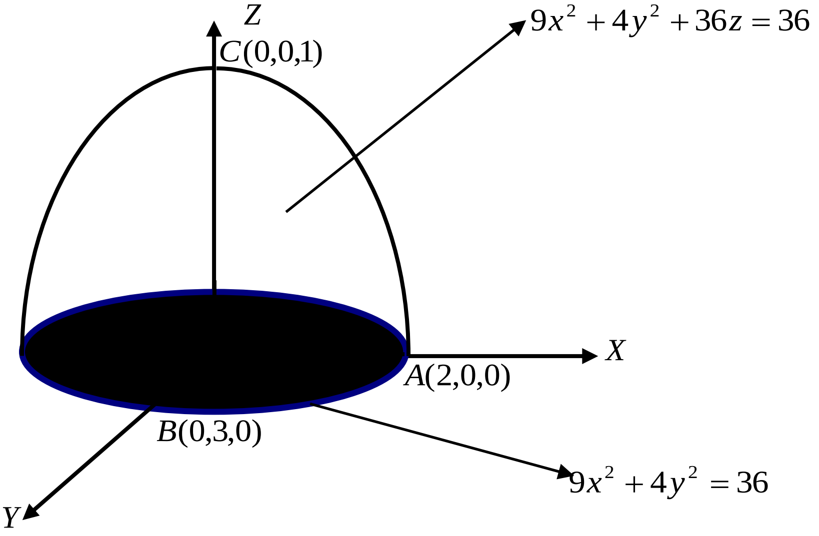
$$\Leftrightarrow A = \int_{x_1=a}^{x_2=b} \int_{y_1=y(x)}^{y_2=y(x)} \mathrm{f(x, y)\, dydx} \quad \text{atau} \quad \Leftrightarrow A = \int_{y_1=a}^{y_2=b} \int_{x_1=x(y)}^{x_2=x(y)} \mathrm{f(x, y)\, dxdy}$$

Contoh

1. Cari volume irisan $9x^2 + 4y^2 + 36z = 36$ oleh bidang z = 0

   Jawab

   Gambar bangun yang pembatasnya $9x^2 + 4y^2 + 36z = 36$ adalah



$$V = \iint_R f(x,y)\, dA$$

Dengan melakukan perubahan dA = dydx diperoleh

$$V = 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{\frac{36-9x^2}{4}}} \frac{36 - 9x^2 - 4y^2}{36}\, dydx$$

$$= \frac{4}{36}\int_0^2 \int_0^{\sqrt{\frac{36-9x^2}{4}}} 36 - 9x^2 - 4y^2\, dydx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 \left[36y - 9x^2y - \frac{4}{3}y^3\right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{36-9x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 36(\frac{1}{2}\sqrt{36-9x^2}) - 9x^2(\frac{1}{2}\sqrt{36-9x^2}) - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{36-x^2}\right)^3 dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 18\sqrt{36-9x^2}) - \frac{9}{2}x^2\sqrt{36-9x^2}) - \frac{4}{3}.\frac{1}{8}(36-9x^2)\sqrt{36-9x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 18\sqrt{36-9x^2} - \frac{9}{2}x^2\sqrt{36-9x^2} - \frac{1}{6}(36-9x^2)\sqrt{36-9x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 (18-6)\sqrt{36-9x^2} - \frac{9}{2}x^2\sqrt{36-9x^2} + \frac{3}{2}x^2\sqrt{36-9x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 12\sqrt{36-9x^2} - \left(\frac{9}{2}-\frac{9}{6}\right)x^2\sqrt{36-9x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 [12\sqrt{36-9x^2} - 3x^2\sqrt{36-9x^2}\,]\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 [12\sqrt{9(4-x^2)} - 3x^2\sqrt{9(4-x^2)}\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 [36\sqrt{(4-x^2)} - 9x^2\sqrt{(4-x^2)}\,dx$$

Dengan metode substitusi x = 2 sin t didapat dx = 2 cos t dx

Untuk x = 2 maka t = $\frac{\pi}{2}$

Untuk x = 0 maka t = 0

Sehingga

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 [36\sqrt{(4-x^2)} - 9x^2\sqrt{(4-x^2)}\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [36\sqrt{(4-4\sin^2 t)} - 9(4\sin^2 t)\sqrt{(4-4\sin^2 t)}\,(2\cos t dt)$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [36(2\cos t) - 36(1-\cos^2 t)(2\cos t)]\,2\cos t\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2\cos t) - (1-\cos^2 t)(2\cos t)]\ 2\cos t\ dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} [4\cos^2 t - 4\cos^2 t + 4\cos^4 t)\ dt$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\ dt$$

Karena $\int \cos^m x\ dx = \dfrac{\sin x \cos^{m-1} x}{m} + \dfrac{(m-1)}{m}\int \cos^{m-1} x\ dx$

Maka

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\ dt$$

$$= 16\left[\frac{\sin t\ \cos^3 t}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{1}{2}t\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$= 16\left(0 + \dfrac{3}{4}(0 + \dfrac{\pi}{4}\right)-16\left(0 + \dfrac{1}{2}.0\right)$

$= 3\pi$ satuan isi

Volume bangun di atas dapat juga dilakukan dengan mengubah urutan tanda integrasi dxdy.

Dengan melakukan perubahan dA = dydx diperoleh

$$V = 4\int_0^3 \int_0^{\sqrt{\frac{36-4y^2}{9}}} \frac{36 - 9x^2 - 4y^2}{36}\ dxdy$$

$$= \frac{4}{36}\int_0^3 \int_0^{\sqrt{\frac{36-4y^2}{9}}} 36 - 9x^2 - 4y^2\ dxdy$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 \left[36x - 3x^3 - 4y^2 x\right]_0^{\frac{1}{3}\sqrt{36-4y^2}} dy$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 36(\frac{1}{3}\sqrt{36-4y^2}) - 3\left(\frac{1}{3}\sqrt{36-4y^2}\right)^3 - 4y^2(\frac{1}{3}\sqrt{36-4y^2})dy$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 12\sqrt{36-4y^2} - \frac{1}{9}(36-4y^2)\sqrt{36-4y^2} - \frac{4}{3}y^2\sqrt{36-4y^2}dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 12\sqrt{36-4y^2} - 4\sqrt{36-4y^2} + \frac{4}{9}y^2\sqrt{36-4y^2} - \frac{4}{3}y^2\sqrt{36-4y^2}dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 (12-4)\sqrt{36-4y^2} + (\frac{4}{9}y^2 - \frac{4}{3}y^2)\sqrt{36-4y^2}\ dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 8\sqrt{4(9-y^2)} - \frac{8}{9}y^2\sqrt{4(9-y^2)}dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 16\sqrt{9-y^2} - \frac{16}{9}y^2\sqrt{9-y^2}dx$$

Dengan metode substitusi y = 3 sin t didapat dx = 3 cos t dx

Untuk x = 3 maka t = $\frac{\pi}{2}$

Untuk x = 0 maka t = 0

Sehingga

$$\frac{1}{9}\int_0^3 16\sqrt{9-y^2} - \frac{16}{9}y^2\sqrt{9-y^2}dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [16\sqrt{(9-9\sin^2 t)} - \frac{16}{9}(3\sin t)^2\sqrt{9-9\sin^2 t}]\,3\cos t\ dt$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [16\sqrt{9(1-\sin^2 t)} - \frac{16}{9}(9\sin^2 t)\sqrt{9(1-\sin^2 t)}]\ (3\cos t\, dt)$$

$$= \frac{3}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [16(3\cos t) - 16(1-\cos^2 t)(3\cos t)]\ \cos t\ dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [48\cos t - 48\cos t + 48\cos^3 t]\cos t \, dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 48\cos^4 t] \, dt \quad = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt$$

Karena $\int \cos^m x \, dx = \frac{\sin x \cos^{m-1} x}{m} + \frac{(m-1)}{m}\int \cos^{m-1} x \, dx$

Maka

$$16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt$$

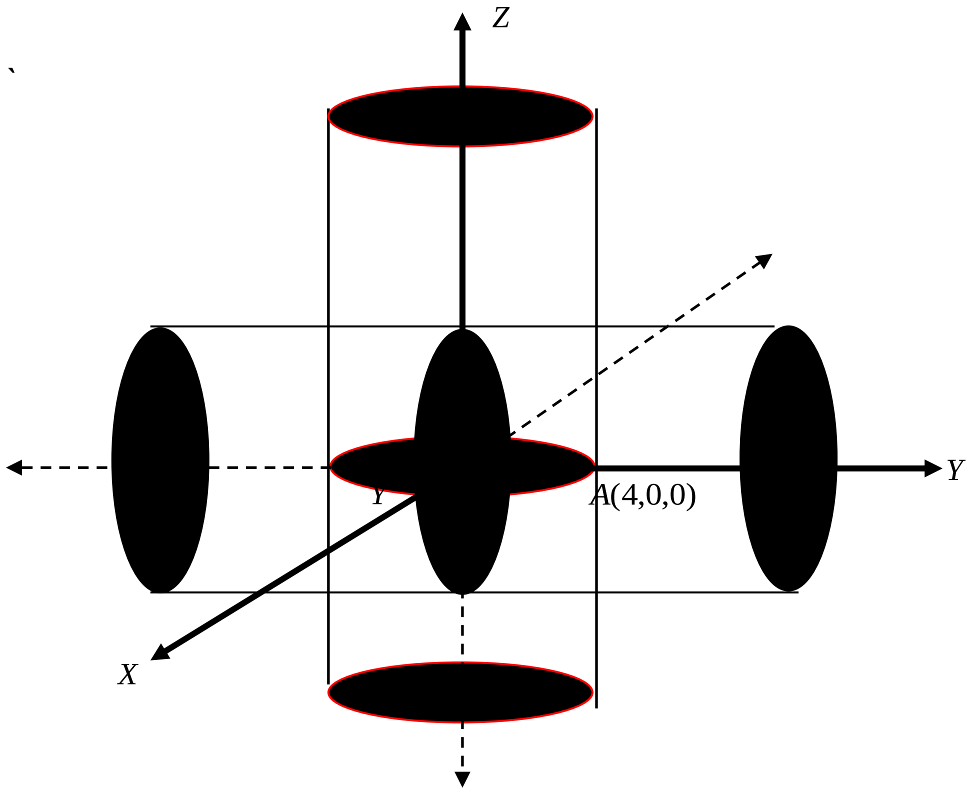
$$= 16\left[\frac{\sin t \cos^3 t}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{1}{2}t\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 16\left(0 + \frac{3}{4}(0 + \frac{\pi}{4}\right) - (0) \; = 3\pi$$

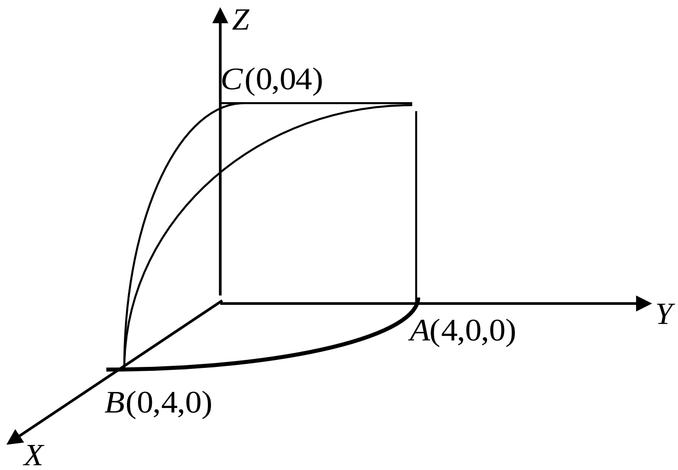
2. Carilah volume persekutuan silinder $x^2 + y^2 = 16$ dan $x^2 + z^2 = 16$

   Jawab

   Gambar silinder persekutuannya adalah:



Gambar di oktan I persekutuan silinder di atas adalah



$$V = \iint_R f(x,y)\, dA$$

$$= 2\int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{16-x^2}\,dydx$$

$$= 8\int_{0}^{4}\int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{16-x^2}\,dydx$$

$$= 8\int_{0}^{4}\left(y\sqrt{16-x^2}\right)_0^{\sqrt{16-x^2}} dx$$

$$= 8\int^{4}\left(16-x^2\right) dx$$

$$= 8\left(16x - \frac{1}{3}x^3\right)_0^4$$

= 8[(16.4-$\frac{1}{3}4^3$)-(16.0-$\frac{1}{3}0$)

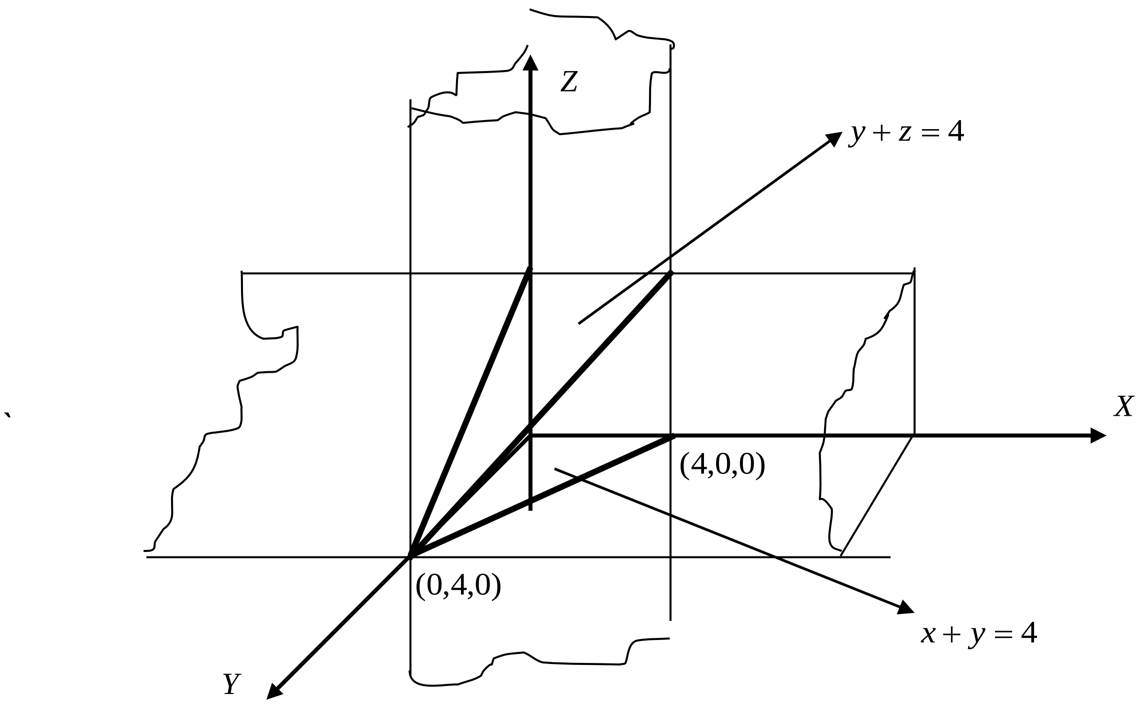
= 8(128/3)

= $\frac{1024}{3}$ *satuan isi*

3. Dengan menggunakan integral ganda dua, tentukan volume bangun ruang yang dibatasi oleh bidang z = 0, x + y = 4 dan y + z = 4

   Jawab

   Bangun persekutuan bidang seperti gambar berikut



$$V = \iint_R f(x,y)\, dA$$

$$= \int_0^4 \int_0^{4-y} 4 - y \; dxdy$$

$$= \int_0^4 \left(4x - yx\right)_0^{4-y} dy$$

$$= \int_0^4 4(4-y) - y(4-y) dy$$

$$= \int_0^4 (16 - 4y - 4y + y^2) dy$$

$$= \int_0^4 (16 - 8y + y^2) dy$$

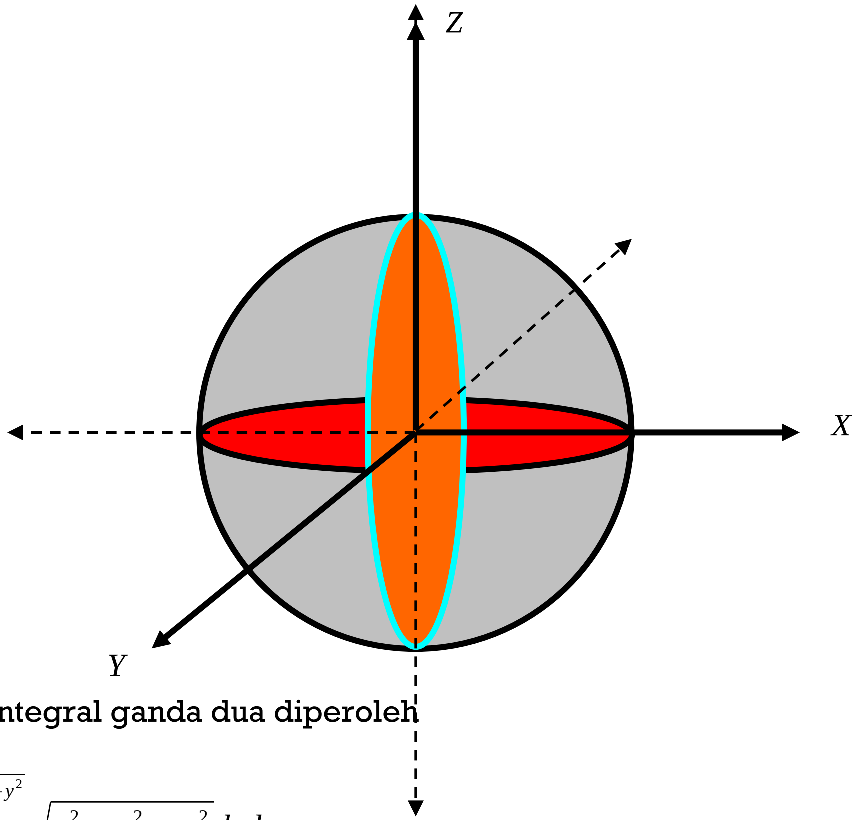
$$= \left[16y - \frac{8}{3}y^2 + \frac{1}{3}y^3\right]_0^4$$

$$= \left[16.4 - \frac{8}{3}.4^2 + \frac{1}{3}.4^3\right] - \left[16.0 - \frac{8}{3}.0^2 + \frac{1}{3}.0^3\right]$$

$$= 64 - \frac{128}{3} + \frac{64}{3}$$

4. Tentukan volume bola $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ menggunakan integral ganda dua.

Jawab



Dengan integral ganda dua diperoleh

$$V = 8\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

$$= 8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{(r^2 - y^2) - x^2}\, dxdy$$

Dengan menggunakan substitusi fungsi trigonometri diperoleh

x = $\sqrt{r^2 - y^2}\cos t$ dan dx = $\sqrt{r^2 - y^2}\sin t$

untuk x = 0 didapat t = dan untuk x = $\sqrt{r^2 - y^2}$ didapat t = $\frac{\pi}{2}$, sehingga

$$8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{(r^2 - y^2) - x^2}\, dxdy$$

$$= 8\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(r^2 - y^2) - (r^2 - y^2)\sin^2 t}\,(\sqrt{r^2 - y^2}\cos t)dy \quad = 8\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 - y^2)\cos^2 t\ dtdy$$

SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABAN DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN

1. Dengan menggunakan integral ganda dua hitunglah luas suatu luasan berikut ini:
   a. dibatasi oleh parabola $y^2 = 4 - x$ dan $y^2 = 4 - 4x$
   b. dibatasi oleh kurva $y^2 = 4x, x^2 = 5 - 2y \; dan \; x = 0$
   c. di kuadran I dibatasi oleh $y^2 = 6x, y = 0, \; dan \; x = 6$