1. Erők felírása

A buborékra három erő hat: a nehézségi erő, felhajtóerő és a közegellenállási erő. Legyen a koordinátarendszerünknél felfele a pozitív h (ekkor g értéke negatív).
Így a testre ható gyorsulás

$$a(h, v) = g - \frac{\rho_f}{\rho(h)} g - \frac{6\pi\eta r(h) v}{m} = \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho(h)}\right) g - \frac{6\pi\eta r(h) v}{m}$$

Ahol

- ρ_f a folyadék sűrűsége
- η a folyadék viszkozitása
- $\rho(h)$ a buborékban lévő nitrogén sűrűsége h magasságban (víz alatt h negatív)
- $r(h)$ a buborék sugara h függvényében
- m a buborék kezdeti tömege $m = V_0 \rho(z_0)$
- z_0 a buborék középpontjának kezdeti magassága
- V_0 a buborék kezdeti térfogata (z_0 magasságban)

2. Numerikus közelítés

A következő összefüggések könnyen adódnak és a numerikus számolás során jól jönnek:

$$p(h) = p_0 + \rho_f g h \tag{1}$$

$$V(h) = \frac{p(z_0)}{p(h)} V_0 \tag{2}$$

$$r(h) = \sqrt[3]{\frac{3V(h)}{4\pi}} \tag{3}$$

$$\rho(h) = \frac{p(h)M}{RT_0} \tag{4}$$

M a nitrogén moláris tömege, T_0 a víz hőmérséklete, p_0 a külső légnyomás. A buborékban lévő vízgőz parciális nyomását valamint a felületi feszültségből adódó nyomást elhanyagoltuk.
Most, hogy mindent kifejeztünk a gyorsulás képletében, a mozgást például Runge-Kutta algoritmussal közelíthetjük. Azonban úgy tűnik, hogy ez az egyenlet egy „Stiff equation”, ezért néha rendkívül kicsi lépésköz kell hozzá, ami a program futásidejét nagyon megnövelheti. Ezért praktikai okokból beépítettem egy rendszert, ami megbecsli a futásidőt.
Érdemes megemlíteni továbbá, hogy a gyorsulásra kapott képlet csak 1-nél kisebb Reynolds-számokra pontos, ezért a program kiírja a mozgás legnagyobb Reynolds-számát, hogy eldönthessük, mennyire komolyan vehető az eredmény.
A mellékelt .cpp fájlon kívül a program másmilyen változata futtható online felületen is: `https://ide.usaco.guide/OJe3kxlvm_VYd3hoL7Z`, itt viszont van egy 5 másodperces futásidőlimit (ezért is lett néhány változtatás eszközölve).

3. Beállt egyensúly közelítés

Minden magassághoz tartozik egy egyensúlyi sebesség. Jelöljük ezt v-vel és hagyjuk el a zárójelet a magasságtól függő p, V, r, ρ mennyiségek után, ha a h helyen vett értéket jelöljük.
Egyensúlyi helyzetben $a = 0$, tehát

$$\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) g - \frac{6\pi\eta r v}{m} = 0$$

Kihasználva, hogy $m = V\rho = \frac{4}{3}\pi r^2 \rho$:

$$\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) g - \frac{6\pi\eta r v}{\frac{4}{3}\pi r^2 \rho} = 0$$

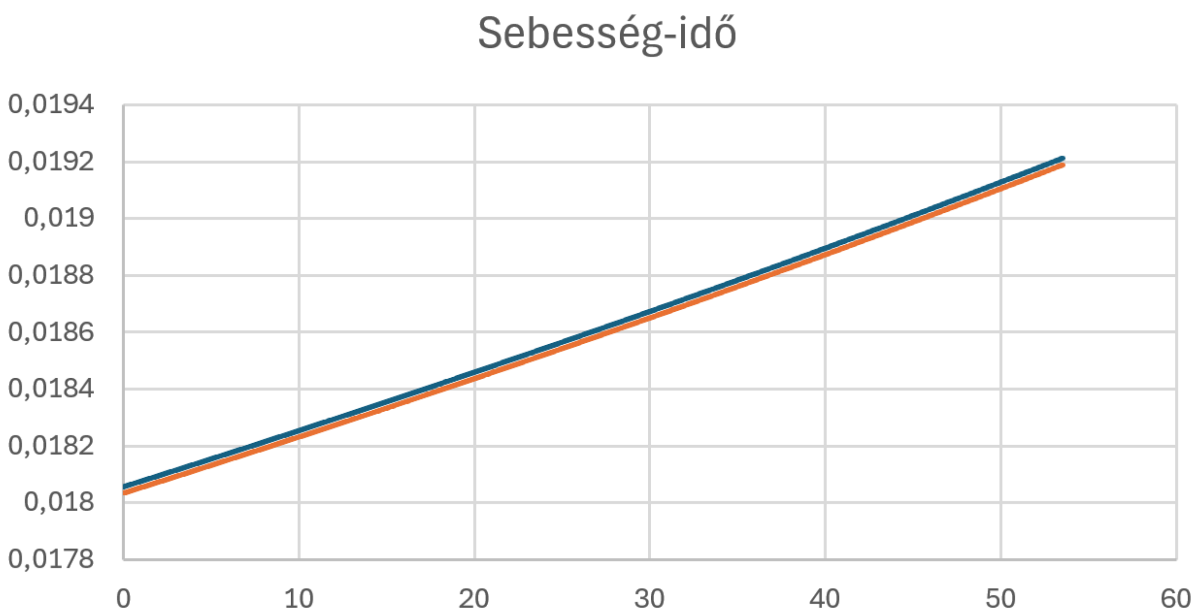
Innen v:

$$v = \frac{2}{9} \frac{\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) g r^2 \rho}{\eta}$$

$\frac{\rho_f}{\rho}$ mellett az 1-et elhanyagolhatjuk (gázok sűrűsége a folyadékoknak kb. ezredrésze, így még 90 méter víz alatti nyomáson is kevesebb, mint 1%-os hibát vétünk ezzel a közelítéssel).
Tehát az egyenletünk:

$$v = -\frac{2}{9} \frac{\rho_f g r^2}{\eta}$$

Észre lehet venni, hogy a mozgás túlnyomó részében nagyon megközelíti ezt a sebességet a buborék.



$V_0 = 0{,}1\,\mathrm{cm}^3, z_0 = -1\,\mathrm{m}, T_0 = 300\,\mathrm{K}, \rho_f = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}, \eta = 1\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$

A kék vonal az állandósult sebességet, a narancssárga pedig a valódit mutatja. Ez alapján a felbukkanás idejét úgy közelíthetjük, hogy feltesszük, minden pillanatban az egyensúlyi sebességgel halad a buborék. Így az eredmény

$$t = \int_{z_0}^{0} \frac{\mathrm{d}h}{v} = \frac{9\eta}{2\rho_f g} \int_0^{z_0} \frac{\mathrm{d}h}{r^2}$$

Kifejezve r-et p-ból:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3\frac{p(z_0)}{p}V_0}{4\pi}} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \left(\frac{4\pi}{3p(z_0)V_0}\right)^{2/3} \cdot p^{2/3}$$

Ezt visszahelyettesítve

$$t = \frac{9\eta}{2\rho_f g}\left(\frac{4\pi}{3p(z_0)V_0}\right)^{2/3}\int_0^{z_0} p^{2/3}\mathrm{d}h$$

Tudjuk, hogy $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = \rho_f g \Rightarrow \mathrm{d}h = \frac{\mathrm{d}p}{\rho_f g}$, így az integrál

$$t = \frac{9\eta}{2\rho_f g}\left(\frac{4\pi}{3p(z_0)V_0}\right)^{2/3}\int_{p_0}^{p(z_0)} p^{2/3}\frac{\mathrm{d}p}{\rho_f g} = \frac{9\eta}{2(\rho_f g)^2}\left(\frac{4\pi}{3p(z_0)V_0}\right)^{2/3}\left[\frac{3}{5}p^{5/3}\right]_{p_0}^{p(z_0)}$$

$$t = 2{,}7 \cdot \frac{\eta}{(\rho_f g)^2}\left(\frac{4\pi}{3p(z_0)V_0}\right)^{2/3}\left(p(z_0)^{5/3} - p_0^{5/3}\right)$$

A mozgás nem addig tart, amíg a buborék közepe eléri a felszínt, hanem amíg a buborék széle éri el azt. Ezért a következő képlet kis $|z_0|$-okra jobb:

$$t = 2{,}7 \cdot \frac{\eta}{(\rho_f g)^2}\left(\frac{4\pi}{3p(z_0)V_0}\right)^{2/3}\left(p(z_0)^{5/3} - p(-r(z_0))^{5/3}\right)$$

nagy $|z_0|$-okra pedig a milliméter nagyságrendben lévő $r(z_0)$ távolság lehagyása nem változtat sokat az eredményen.
Ez a közelítés nagyon pontosnak bizonyult (legalábbis ha az iteratív közelítést igaznak elfogadjuk), a legnagyobb tapasztalt eltérés is kevesebb, mint 5%-os volt a két eredmény között.

4. Diszkusszió

Tapasztalat, hogy a kis térfogatú buborékok lassabban haladnak, a hőmérséklet nem kifejezetten befolyásolja az eredményt (a futásidőt viszont igen), viszkózusabb folyadék lassabb, sűrűbb pedig gyorsabb mozgást eredményez. Ezt úgy is láthatjuk, ha felírjuk a $h = 0$ magasságban lévő egyensúlyi sebességet:

$$v(0) = -\frac{2}{9}\frac{\rho_f g r(0)^2}{\eta} \propto \frac{\rho_f V_0^{2/3}}{\eta}$$

Ekkor lesz a legnagyobb a Reynolds-szám is:

$$Re_{\max} = \frac{\rho_f r(0)v(0)}{\eta} = -\frac{\rho_f^2 g r(0)^3}{\eta^2} \propto \frac{\rho_f^2 V_0}{\eta^2}$$

Így az is látszik, hogy nagyobb η-kra és kisebb kezdeti térfogatokra pontos a modell.
Ezekre viszont több idő, amíg lefut a program. Ezen úgy lehetne javítani, hogy változó lépésközzel iterálunk, mivel a folyamatnak csak az eleje érzékeny (amikor kicsi a buborék sebessége, ezért nagy erők hatnak rá) és utána átválthatnánk nagyob lépésközre. Erre azonban (sőt, a numerikus közelítésre egyáltalában) nincs nagy szükség, mivel az előző részben tárgyalt közelítő képlet rendkívül pontos és minden gyakorlati használatban helyettesíteni tudja a szimulációt. Nagyobb problémának tűnik nekem az, hogy végig a v-ben lineáris közegellenállási erővel számoltunk, aminek megvan az érvényességi határa.