

عنوان درس: شناسایی الگو

استاد محترم: آقای دکتر محمد معطر

دانشجویان: فاطمه کاکائی - سمیرا ضیایی

تمرین ۱. با فرض مقابل در case II ثابت کنید:

Assumption: $\Sigma_i = \Sigma$

$$g_i(x) = -\frac{1}{2}(x - \mu_i)^t \Sigma^{-1}(x - \mu_i) + \ln P(w_i)$$

$$\begin{cases} w_i = \sum_i^{-1} \mu_i \\ w_{i0} = -\frac{1}{2} \mu_i^t \sum_i^{-1} \mu_i + \ln P(w_i) \end{cases}$$

$\Sigma_i = \Sigma$ از آنجا که در رابطه زیر داریم:

$$g_i(x) = -\frac{1}{2}(x - \mu_i)^t \Sigma^{-1}(x - \mu_i) - \frac{d}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \Sigma_i + \ln P(w_i)$$

$$p(\mathbf{x}/w_i) \sim N(\mu_i, \Sigma_i).$$

بنابراین $-d/2 \ln 2\pi$ و $-\frac{1}{2} \ln \Sigma_i$ حذف می شود و داریم رابطه

$$g_i(x) = -\frac{1}{2}(x - \mu_i)^t \Sigma^{-1}(x - \mu_i) + \ln P(w_i)$$

اگر معادله را بسط دهیم:

$$g_i(x) = -\frac{1}{2}x^t \sum^{-1} x - \frac{1}{2}\mu_i^t \sum^{-1} \mu_i + \frac{1}{2}x^t \sum^{-1} \mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^t \sum^{-1} x + \ln P(w_i)$$

از عبارت $x \sum^{-1} x^t - \frac{1}{2}$ به علت مستقل بودن از x صرف نظر می شود

$$g_i(x) = -\frac{1}{2}\mu_i^t \sum^{-1} \mu_i + \frac{1}{2}x^t \sum^{-1} \mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^t \sum^{-1} x + \ln P(w_i)$$

$$g_i(x) = w_i^t x + w_{i0}$$

از طرفی $g_i(x)$ به صورت یک معادله خطی است بنابراین برای w_{i0} از عباراتی که x دارند صرف نظر می کنیم:

$$g_i(x) = -\frac{1}{2}\mu_i^t \sum^{-1} \mu_i + \ln P(w_i)$$

از سوی دیگر

$$\frac{1}{2}\mu_i^t \sum^{-1} x = \omega_i^t x \rightarrow \frac{1}{2}\mu_i^t \sum^{-1} = \omega_i^t$$

تمرین ۲.

Case III: Assumption: $\Sigma_i = \text{arbitrary}$ دلخواه

با توجه به این شرط فقط $-d/2 \ln 2\pi$ حذف می شود و نتیجه تابع تمایز درجه ۲ خواهد شد. بنابراین $g_i(x)$ برابر است با:

$$g_i(x) = -\frac{1}{2}(x - \mu_i)^t \sum^{-1} (x - \mu_i) - \frac{1}{2} \ln |\sum| + \ln P(w_i)$$

معادله را بسط می دهیم:

$$g_i(x) = -\frac{1}{2}x^t \sum^{-1} x - \frac{1}{2}\mu_i^t \sum^{-1} \mu_i + \frac{1}{2}x^t \sum^{-1} \mu_i + \frac{1}{2}\mu_i^t \sum^{-1} x - \frac{1}{2} \ln |\sum| + \ln P(w_i)$$

از طرفی

$$g_i(x) = x^t W_i x + w_i^t x + w_{i0}$$

$$x^t W_i x = -\frac{1}{2}x^t \sum^{-1} x \rightarrow W_i = -\frac{1}{2} \sum^{-1}$$

برای w_{i0} از عباراتی که x دارند صرف نظر می کنیم:

$$w_{i0} = -\frac{1}{2}\mu_i^t \sum^{-1} \mu_i + -\frac{1}{2} \ln |\sum| + \ln P(w_i)$$