

# Contents

<b>1</b>	<b>Motivation und Aufgabenstellung</b>	<b>2</b>
1.1	Motivation . . . . .	2
1.2	Ziele - Aufgabenstellung . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Gewinnung roher Sterbewahrscheinlichkeiten - Arten von Sterbetafeln - Daten</b>	<b>5</b>
2.1	Definitionen relativer Sterbehäufigkeiten und Beschreibung von Personengesamtheiten . . . . .	5
2.2	Methoden zur Gewinnung roher Sterbewahrscheinlichkeiten und deren Vergleich . . . . .	7
2.3	Methodenunabhängige Einflüsse . . . . .	9
2.4	Arten von Sterbetafeln . . . . .	10
2.5	Öffentlich zugängliche Sterblichkeitsdaten . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Einfache Modelle</b>	<b>16</b>
3.1	Geburtsjahr als erklärende Variable . . . . .	16
3.2	Alter als erklärende Variable . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Übliche Verfahren zur Gewinnung von Sterbetafeln und die Sterbetafel 2004R</b>	<b>23</b>
4.1	Auswahl des Basisjahrs . . . . .	23
4.2	Bestimmung roher Sterbewahrscheinlichkeiten . . . . .	24
4.3	Glättung der Sterbewahrscheinlichkeiten . . . . .	25
4.4	Extrapolation von hohen Altern . . . . .	26
4.5	Trendfunktionen der Sterbetafel 2004R . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Abschnittsweises Dichteschätzen</b>	<b>28</b>
5.1	Modellbildung . . . . .	28
5.2	Kerndichteschätzung . . . . .	29
5.3	Schätzung des Trends durch Minimierung . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Qualitätsvergleich der Modelle mittels Simulation</b>	<b>30</b>
6.1	Qualitätsvergleich mittels Tests . . . . .	30
6.2	Qualitätsvergleich durch Simulation . . . . .	30
6.3	Qualitätsvergleich der Modelle mittels Theorie . . . . .	30
<b>7</b>	<b>Ausblick</b>	<b>31</b>
7.1	Stein-Schätzer . . . . .	31
7.2	Internationalisierung . . . . .	31
7.3	Interpretation als Markovkette . . . . .	31
7.4	Weitere Qualitätsvergleiche . . . . .	32

# 1 Motivation und Aufgabenstellung

In diesem Kapitel wird diese Arbeit motiviert und die Ziele dieser Arbeit aufgezeigt.

## 1.1 Motivation

Die Idee für diese Arbeit ist entstanden, als ich im Winter 2018/2019 ein Praktikum bei einer Lebensversicherung gemacht habe. Dort habe ich eine Programmbibliothek geschrieben, die aus einer Sterbetafel Kommutionssymbole bestimmt. Um die Begriffe Sterbetafel und Kommutionssymbole mit Leben zu füllen betrachten wir als Beispiel die Einmalprämie einer  $n$ -jährigen Erlebnisfallversicherung mit Versicherungssumme 1 Geldeinheit (GE) für eine Person mit Alter  $x$ . Sei diese Einmalprämie mit  ${}_nE_x$  bezeichnet. Um  ${}_nE_x$  mathematisch beschreiben zu können benötigen wir einige Definitionen:

Sei also  $q_x$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, die bereits  $x$  Jahre alt geworden ist, vor ihrem  $x+1$ -ten Geburtstag verstirbt. Man nennt  $q_x$  eine 1-jährige Sterbewahrscheinlichkeiten. Aus diesen  $q_x$  bestimmt man dann weiter Werte, die zur Produktkalkulation notwendig sind.

Bezeichne also  $p_x$  die 1-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Person, die bereits  $x$  Jahre alt ist, auch noch das nächste Jahr überlebt. Dann gilt in unserem Fall per Definition  $p_x = 1 - q_x$ , da wir davon ausgehen, dass eine Person entweder stirbt oder nicht. Man kann auch noch andere Möglichkeiten betrachten warum eine Person für uns nicht mehr interessant ist.

Weiterhin bezeichne  $l_x$  die Lebenden im Alter  $x$ . Das heißt, es gelte  $l_{x+1} = l_x \cdot (1 - q_x) = l_x \cdot (1 - (1 - p_x)) = l_x \cdot p_x$ .

Weiterhin benötigt man in der Versicherungsmathematik regelmäßig einen Rechnungszins, der hier mit  $i$  bezeichnet wird. Weiterhin sei der Diskontierungsfaktor  $v$  durch definiert:

$$v^m = \left( \frac{1}{1+i} \right)^m$$

Dann kann man die Einmalprämie einer  $n$ -jährigen Erlebnisfallversicherung mit Versicherungssumme 1 Geldeinheit (GE) für eine Person mit Alter  $x$  über die Gleichung

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n} \cdot v^{x+n}}{l_x \cdot v^x}$$

berechnen. Das heißt, man definiert die Einmalprämie also genau als die diskontierte Anzahl an Personen am Ende der Aufschubzeit dividiert durch die diskontierte Anzahl an Personen am Beginn der Aufschubzeit ist. Deshalb und um bei der Berechnung der  $l_x$  Rundungsfehler zu vermindern, wird normalerweise eine recht große Startkollektivgröße angenommen. Zum Beispiel sei  $l_0 = 1.000.000$ . Diese Größe hat keinen Einfluss auf die Prämie, die sie sowohl im Zähler als auch im Nenner vorkommt und sich somit kürzt.

Kommen wir noch kurz auf die Begriffe am Anfang dieses Abschnitts zurück: Eine Sterbetafel ist eine Tabelle, in der 1-jährige Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x$  tabelliert sind und die  $l_x$  sind ein Beispiel für Kommutionssymbole.

Ich hoffe, dass dieses Beispiel gewisse Motivation geben konnte, warum Sterbetafeln von Interesse sind. Im nächsten Abschnitt wird auf die Ziele und die Aufgabenstellung dieser Arbeit eingegangen.

## 1.2 Ziele - Aufgabenstellung

Wir haben in dem obigen Abschnitt 1.1 ein Beispiel gesehen, warum Sterbetafeln wichtig sind. In diesem Abschnitt werden die Ziele dieser Arbeit vorgestellt.

Ein Problem bei der Verwendung von Sterbetafeln ist, dass sich die Sterblichkeit im Laufe der Zeit verändert. Genauer gesagt, hat sich die Lebenserwartung in den letzten Jahrzehnten erhöht. Diese Veränderung in der Lebenserwartung muss auch in Sterbetafeln berücksichtigt werden. Betrachten wir dazu zwei Säulendiagramme, die die Entwicklung der Sterblichkeit der Jahre 1990 und 2017 in der Bundesrepublik Deutschland zeigen:

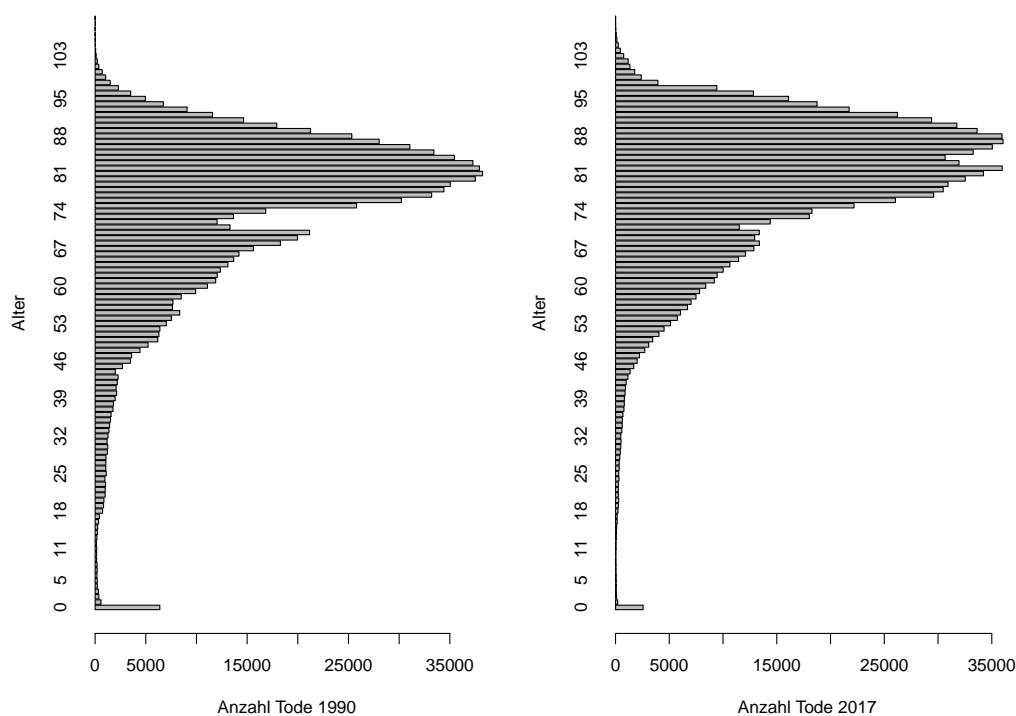


Figure 1: Anzahl an Toden in der Bundesrepublik Deutschland. Auf der linken Seite im Jahr 1990 und auf der rechten Seite im Jahr 2017

Wenn man die beiden Diagramme vergleicht, sieht man, dass im Jahr 2017 im Vergleich zum Jahr 1990 deutlich mehr Personen später versterben. Das Diagramm für das Jahr 2017 ist nach oben, zu den höheren Altern, verschoben. Diese Erhöhung der Lebenserwartung nennt man Sterbetrends. Um diese Trends zu schätzen, geht man in zwei Schritten

vor. Im ersten Schritt wird eine Basistafel geschätzt und im zweiten Schritt werden dann Sterblichkeitstrends geschätzt.

Wie man diese Sterblichkeitstrends schätzt ist, wie bereits gesagt, auch in der Praxis sehr relevant. Entsprechend beschäftigt sich auch die Deutschen Aktuarvereinigung (DAV) mit diesem Problem und hat mit der Sterbetafel 2004R eine Richtlinie für deutsche Personenversicherer herausgegeben. Die Dokumentation für die Sterbetafel 2004R, sowie weiterer von der DAV veröffentlichte Sterbetafeln, können unter <https://aktuar.de/unsere-themen/lebensversicherung/Seiten/sterbetafeln.aspx> eingesehen werden.

Das Ziel dieser Arbeit ist es dann, sich Gedanken über die Eigenschaften dieser Schätzer zu machen und welche anderen Möglichkeiten man hat, um diese Trendfunktionen zu schätzen. Außerdem gibt es verschiedene Modelle und die Frage ist, wie man das beste Modell auswählt.

Diese Ziele geben der weiter Aufbau der Arbeit vor. Im nächsten Abschnitt, dass heißt in Abschnitt 2.5 gehen wir auf die Daten ein, die der Sterbetafel 2004R zugrunde liegen und auf Daten, die öffentlich verfügbar sind. In den nächsten beiden Abschnitten 5 und 6 gehen wir dann auf das Schätzen von Basistafeln, das Schätzen von Sterblichkeitstrends und auf die Auswahl von Modellen ein.

OPTIONAL In dem vorletzten Abschnitt wird die Qualität der Schätzer betrachtet und im letzten Abschnitt schauen wir uns die Situation im internationalen Vergleich an.

Abschließend möchte ich noch kurz auf die Daten und Codes, die zum erstellen der Diagramme (1) verwendet wurden, eingehen. Die Daten stammen von der Onlinedatenbank <https://www.mortality.org/cgi-bin/hmd/country.php?cntr=DEU&level=2>. Weitere Information zu diesen Daten können im Abschnitt 2.5 gefunden werden. Dieses Histogramm wurde in **R** erstellt. Der Code für dieses Diagramm, sowie alle anderen Codes, die in dieser Arbeit verwenden werden, können auf meiner Github-Seite unter <https://github.com/fake1884/moRtRe> eingesehen werden.

## 2 Gewinnung roher Sterbewahrscheinlichkeiten - Arten von Sterbetafeln - Daten

In diesem Kapitel werden im ersten Abschnitt grundlegende Begriffe wie Kollektiv und relative Sterbehäufigkeiten geklärt. Im nächsten Abschnitt werden Methoden zur Bestimmung von rohen Sterbewahrscheinlichkeiten angegeben. Im daran anschließenden Abschnitt werden methodenunabhängige Einflüsse auf die Gewinnung roher Sterbewahrscheinlichkeiten diskutiert. Diese ersten drei Abschnitte orientieren sich an dem Buch "Methodik von Sterblichkeitsuntersuchungen", siehe [Kak85].

Der nächste Abschnitt behandelt verschiedene Arten von Sterbetafeln. Für diesen Abschnitt gab es keine brauchbare Quelle: In der Literatur werden die verschiedenen Arten von Sterbetafeln nicht präzise definiert.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden Daten vorgestellt, auf deren Grundlage Sterbetafeln erstellt wurden und werden. Insbesondere wird auf die öffentlich zugänglichen Sterbetafeln der Webside [mortality.org](http://mortality.org) eingegangen, siehe [Shk18].

### 2.1 Definitionen relativer Sterbehäufigkeiten und Beschreibung von Personengesamtheiten

Da das Ziel dieser Arbeit das Schätzen von Sterbewahrscheinlichkeiten ist, müssen wir Notation einführen, um Sterblichkeit zu definieren. Dazu definieren wir zuerst verschiedene Arten von Jahren und was Personen und Personengemeinschaften sind:

- Jahre: Seien  $D, \tau, \gamma \in \mathbb{N}$  Jahre. Dabei bezeichne  $D$  immer ein Datum,  $\tau$  ein Geburtsjahr und  $\gamma$  immer ein Todesjahr. Daraus werden gleich Personen definiert. Seine weiterhin  $E$  und  $S$  jeweils End- und Startalter einer Person. Wir setzen in dieser Arbeit  $S = 0$  und  $E = 110$ . Alle Alter größer 110 die beobachtet werden, werden auf 110 gesetzt. Außerdem unterscheiden wir Personen nicht nach Geschlecht.
- Personen: Seien  $P_1, \dots, P_n$  Personen. Eine Person  $P_i$  ist definiert durch ein Geburtsalter  $\tau_i$  und durch ein Todesjahr  $\gamma_i$ . Ist  $D_i = \gamma_i$  ist die Person  $P_i$  im Jahr  $D$  verstorben.

Aus diesen Definitionen kann man direkt die folgenden Begriffe ableiten:

$$\begin{aligned}\text{Alter} &= X = \text{Kalenderjahr} - \text{Geburtsjahr} = D - \tau, \text{ für } D \leq \gamma \\ \text{Todesalter} &= Y = \text{Todesjahr} - \text{Geburtsjahr} = \gamma - \tau \\ \text{Lebenserwartung} &= LE = \mathbb{E}(y)\end{aligned}$$

- Kollektive: Sei weiterhin  $K_j$  eine Menge von lebenden Personen  $P_i$ . Das heißt, aus  $P_i \in K_j$  folgt, dass  $\gamma_i < D_i$ . Alle Personen unter Beobachtung werden mit  $K$  bezeichnet. Der Index  $j$  dient dazu, Personen in Risikoklassen zu unterteilen. Zum

Beispiel  $J = \{1900, \dots, 2000\}$ , also eine Unterscheidung nach Geburtsjahren. Sei  $J$  immer derart, dass  $K = \cup_{j \in J} K_j$ . Die Bezeichnung  $K$  kommt daher, dass man von einem Kollektiv spricht. Ein Synonym zu Kollektiv ist eine Personengesamtheit. Wir bezeichnen die Kardinalität einer Personengemeinschaft  $K_j$  mit  $k_j$  also  $|K_j| = k_j$  beliebige Personengemeinschaften.

- Austrittsgründe: Es gibt verschiedene Gründe für den Austritt aus einem Kollektiv. Von besonderem Interesse ist der Austritt durch Tod. Andere Austrittsgründe können Invalidität oder Auswanderung sein. Invalidität wird in dieser Arbeit keine Rolle spielen. Wir werden Auswanderung später als Störgröße diskutieren. Man unterscheidet weiterhin offene und geschlossene Personengesamtheit. Falls aus einer Personengesamtheit Personen nur durch Tod ausscheiden, nennen wir diese Personengesamtheit geschlossen.

Führen wir nun Zufallsvariablen(Z.V.) ein: Sei  $Y$  als das zufällige Todesalter und  $y$  als eine Realisierung von  $Y$ . Analog ist das Todesjahr zufällig und wird mit  $\Gamma$  bezeichnet. Eine Realisierung von  $\Gamma$  wird mit  $\gamma$  bezeichnet. Die Notation soll unterstreichen, dass wir  $\Gamma_i$  beziehungsweise  $Y_i$  voraussagen wollen, gegeben dass wir für eine Person  $P_i$  die Größe  $\tau_i$  kennen. Außerdem sind wir ein bestimmtes Kalenderjahr  $D$ . Das heißt, wir wollen eine Methode  $M$  finden um  $Y_i \approx M(D_i, x_i)$  sinnvoll zu schätzen. Aus den Größen  $\Gamma$  beziehungsweise  $Y$  wird in der Literatur dann  $q_x$  abgeleitet:

$$\text{1-jährige-Sterbewahrscheinlichkeit} = q_x = \mathbb{P}(y \leq x + 1 | y > x), x \in [S, E] \subset \mathbb{N}_0 \quad (1)$$

Das heißt,  $q_x$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, die bereits  $x$  Jahre alt geworden ist, vor ihrem  $x + 1$ -ten Geburtstag verstirbt. Diese Wahrscheinlichkeiten nennt man dann die 1-jährige-Sterbewahrscheinlichkeit

- Teilgesamtheit der Ausgeschiedenen: Um die  $q_x$  für  $x \in \{S, S+1, \dots, E\}$  zu schätzen, betrachtet man Kollektive und zählt die Personen, die zu einem bestimmten Kalenderjahr  $D$ , das Risiko haben zu sterben und im darauffolgenden Jahr  $D + 1$ , die Anzahl an Todesfällen. Das konkrete vorgehen wird im nächsten Abschnitt definiert. An dieser Stelle sollen nur die beiden Teilmengen  $T$  und  $K'$  definiert werden: Wir bezeichnen mit  $T$  die Teilmenge der Toten aus  $K$  und mit  $K'$  die Teilmenge der Überlebenden. Seien weiterhin die Kardinalitäten mit  $t$  beziehungsweise  $k'$  bezeichnet. Es gilt:

$$\text{Kollektiv} = K = T \cup K' = \text{Tote} \cup \text{Überlebende}$$

- Rohe Sterbehäufigkeiten: Mit den Definitionen der Teilgesamtheiten kann man rohe (1-jährige) Sterbewahrscheinlichkeiten schätzen:

$$\hat{q}^{roh} = \frac{t}{k} = \frac{t}{t + k'} \quad (2)$$

Man betrachtet also ein Kollektiv und schätzt daraus die Sterbewahrscheinlichkeit. Das in dieser Arbeit meistens betrachtete Kollektiv ist die west-deutsche Gesamtbevölkerung. Warum genau dieses Kollektiv betrachtet wird, wird in dem Abschnitt 2.5 diskutiert.

- Basistafel und Sterbetafel: Es fehlt noch die Definition einer Sterbetafel beziehungsweise einer Basistafel. Leider werden diese beiden Größen in der Literatur nicht definiert, sondern intuitiv verwendet. Eine Sterbetafel  $ST$  ist intuitiv  $ST = (q_S, q_1, \dots, q_E)$ . Allerdings hat man mit dieser Definition das Problem, dass man gerne Sterbewahrscheinlichkeiten pro Geburtsjahrgang angeben möchte. Das heißt es interessiert  $ST_1, \dots, ST_m$  für Indizes  $1, \dots, m \in \{\tau_1, \dots, \tau_m\}$ . Deshalb sei  $B = (q_S, q_1, \dots, q_E)$  eine Basistafel und  $ST = (B_1, \dots, B_m)$  eine Sterbetafel.

## 2.2 Methoden zur Gewinnung roher Sterbewahrscheinlichkeiten und deren Vergleich

Im letzten Kapitel wurde bereits definiert, was man unter einer rohen Sterbewahrscheinlichkeit versteht. In diesem Kapitel werden die verschiedenen Methoden rohe Sterbewahrscheinlichkeiten zu gewinnen diskutiert. Es gibt die Geburtsjahrmethode, die Sterbejahrmethode, das Sterbeziffernverfahren und die Verweildauermethode.

Wir brauchen einige genauer Definitionen:

- Sei  $\delta z$  ist die Länge einer Zeitperiode.
- Sei  $\dot{z}$  und  $\dot{\bar{z}}$  sind Zeitpunkte.
- Sei  $z$  ist ein Zeitraum, der zum Zeitpunkt  $\dot{z}$  beginnt, die Zeit  $\Delta z$  andauert und zum Zeitpunkt  $\dot{\bar{z}}$  endet.
- Also kann man einen Zeitraum  $z$  als ein Intervall  $z = [\dot{z}, \dot{z} + \Delta z] = [\dot{z}, \dot{\bar{z}}]$ .
- Bezeichne  $b$  immer einen Beobachtungszeitraum.
- Bezeichne  $g$  immer einen Geburtszeitraum.
- Bezeichne  $x$  immer ein Alter.

Bezeichnung	Gesamtheit der Personen, die ...	Beispiele
$L_{x,d}(b)$	während des Beobachtungszeitraums $b$ genau den Bruchteil $d$ der Altersperiode $x$ zu $L$ gehören	
$L_x(b)$	während des Beobachtungszeitraums $b$ "zeitweilig" zu $L$ gehören, das heißt $L_x(b) = \cup_{0 < d \leq 1} L_{x,d}(b)$	
$L_x(b, g)$	die Zeitraum $g$ geboren sind. Teilgesamtheit von $L_x(b)$ .	
$L_x(\dot{b})$	zum Beginn des Beobachtungszeitraums $b$ $x$ Jahre alt sind.	
$L_x(\ddot{b})$	zum Ende des Beobachtungszeitraums $b$ $x$ Jahre alt sind.	
$T_x(b)$	während des Beobachtungszeitraums $b$ $x$ -jährige durch Tod aus $L_{x,d}(b) \cap L_x(\dot{b})$ ausscheiden.	
$T'_{x,d}(b)$	während des Beobachtungszeitraums $b$ $x$ -jährige durch Tod aus $L_{x,d}(b) \cap L_x(b)$ ausscheiden.	

TODO : Die Dots über den Zeiträumen kann man kaum sehen. Hier muss was passieren.

- Geburtsjahrmethode: ?Man berücksichtigt alle in einem Beobachtungszeitraum gestorbenen mit einem bestimmten Geburtsjahr?

$$q_x^G = t'_{x,1}(b, g_1) / l_{x,1}(b, g_1)$$

- Sterbejahrmethode: Man berücksichtigt alle in einem Beobachtungszeitraum gestorbenen.

$$q_x = \frac{t_x(b)}{1/2 \cdot l_x(b_0, g_0) + l_x(b_1, g_1) + 1/2 \cdot l_x(b_2, g_2)}$$

Nach einigen Umformungen TODO erhält man

$$q_x^S = \frac{t_x(b)}{l_x(b_1/b_2, g_1/g_2) - 1/2 \cdot l_x(b_2, g_2) + 1/2 l_x(b_1, g_0)}$$

- Sterbeziffernverfahren: Dieses Verfahren ist technisch einfacher als die Sterbejahrmethode. Es handelt sich um ein Anfangs-Plus-Endbestand-Halbe-Methode. Zuerst muss man die Sterbeziffer definieren:

$$k_x = \frac{t_x(b_1, g_0/g_1)}{1/2 \cdot (l_x(\dot{b}_1) + l_x(\ddot{b}_1))}$$

und erhält damit

$$q_x^Z = \frac{2 \cdot k_x}{2 + k_x}$$



- Verweildauerverfahren: Dieses Verfahren erfasst die Teilzeiten, die Personen zu einem Kollektiv gehören

$$q_x^D = \frac{t_x(b)}{t_x(b) + \sum_d d \cdot l'_{x,d}(b)}, 0 < d \leq 1$$

Insgesamt lässt sich feststellen, dass die Methoden aufwändiger werden. Dies liegt daran, dass auch Personen erfasst werden, die auch nur einen Teil der Beobachtungsperiode zu dem betrachteten Kollektiv gehören. Das heißt, dass insbesondere die Geburtsjahrmethode geeignet ist, wenn man ein geschlossenes Kollektiv betrachtet, während die Verweildauermethode insbesondere bei offenen Kollektiven geeignet ist.

Ein weiteres Problem kann darin bestehen, dass möglicherweise die Zugehörigkeit zu den Risikoklassen, dass heißt zu den Altern, nicht ganz genau möglich ist. Man muss hierzu den Geburtstag genau erfassen und bei Toden am Geburtstag die Todeszeit sinnvoll zuordnen.

TODO Beispiele

Man sieht (hoffentlich) in dem Beispiel, dass die 4 Methode für eine geschlossene Personengesamtheit das selbe Ergebnis liefern.

Bei offenen Personengesamtheiten passiert TODO

## 2.3 Methodenunabhängige Einflüsse

In diesem Kapitel werden Einflussgrößen diskutiert, nicht von der Methode zur Erfassung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten abhängen, aber trotzdem einen Einfluss haben. Es handelt sich um eine Aufzählung interessanter Punkte. Für diese Einflussgrößen werden keine Methoden zur Korrektur entwickelt:

- Jahreszeitliches Schwankungen: Wie man in der folgenden Graphik (2) sieht, schwankt die Sterblichkeit, je nach Jahreszeit. Das heißt, je nachdem zu welchem

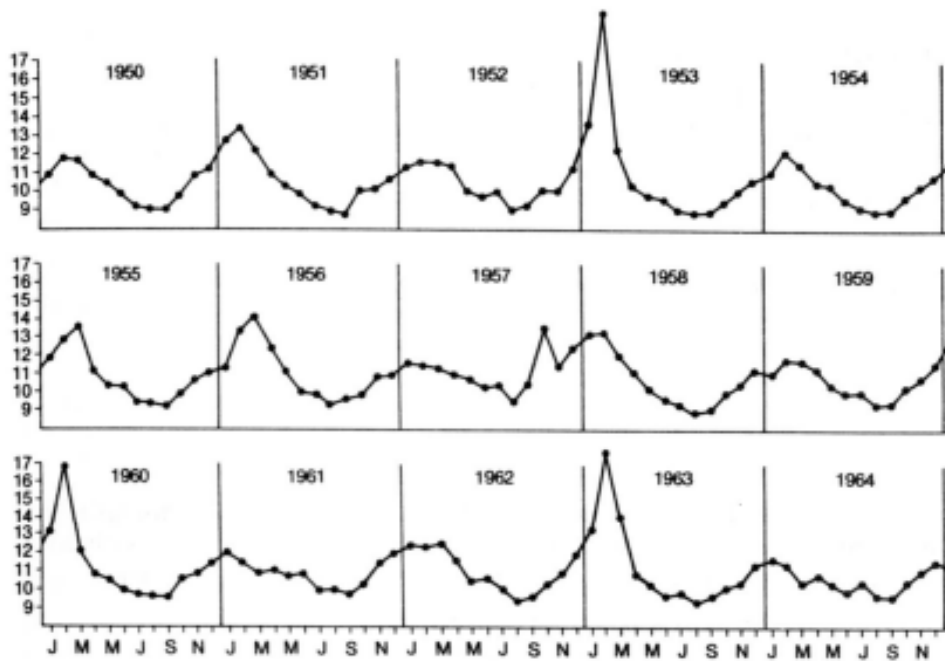


Abb. 10. Monatliche, auf ein Jahr normierte Sterbeziffern 1950–1964 in Prozent.

Figure 2: jahreszeitliche Schwankung der Sterblichkeit; diese Graphik stammt aus "Methodik" [Kak85]

- Seltene Ereignisse: Ein weiteres Problem mit den Daten ist, dass es im Jahr 1969/1970 eine Grippewelle in Deutschland gab, die das Datenmaterial verzerrt. TODO Graphik einfügen.
- Änderung der Datenerfassung: Wiedervereinigung 1989 problematisch, da die Daten vorher separat erfasst wurden. TODO mehr ausführen

## 2.4 Arten von Sterbetafeln

In diesem Abschnitt werden Periodentafeln, Kohortentafeln, Generationstafeln und Selektionstafeln definiert. Die Definitionen hier sind recht locker gehalten. Zum Schluss werden noch als Beispiele für Sterbetafeln die 2004R und 2008 diskutiert.

- Periodensterbetafeln/Aggregattafeln: Um eine Periodensterbetafel zu erstellen wird, meist über einen relativ kurzen Zeitraum, ein Kollektiv bestehend aus Personen  $P_1, \dots, P_n$  betrachtet. Aus diesem Kollektiv werden dann, im einfachsten Fall, die beiden Kennziffern  $I_x$  und  $t_x$  bestimmt. Dabei bezeichnet  $I_x$  die anzahlgewichtete Verweildauer der Lebenden des Alters  $x$ . Das heißt, eine Person die ein halbes Jahr nach ihrem  $x$ -ten Geburtstag verstirbt, trägt  $1/2$  zu  $I_x$  bei. Auf der anderen Seite

bezeichnet  $t_x$  die Anzahl an Todesfällen von Personen im Alter  $x$ . Man bestimmt dann

$$q_x^{\text{roh}} = \frac{t_x}{I_x} \quad (3)$$

als die Rohe Sterbewahrscheinlichkeit. Weiter Details zum Schätzen der  $q_x$  erfolgt im Kapitel 5. Hier sei nur noch einmal darauf hingewiesen, dass solche Daten einfach zu erfassen sind. Allerdings werden Sterblichkeiten von gleichzeitig lebenden Personen ermittelt und daraus  $q_x$  geschätzt. Das Geburtsjahr geht nicht als Faktor in die Betrachtung mit ein. Deshalb sind solche Tafeln für Versicherungsprodukte von langfristiger Natur ungeeignet. Sie sind ebenfalls ungeeignet, wenn man sich für die Sterblichkeit der Gesamtbevölkerung eines Landes in Zukunft interessiert.

- Kohortensterbetafeln: Im Gegensatz zu Periodentafeln sind Kohortensterbetafeln Tafeln, die das Absterben eines Kollektivs mit Geburtsjahr  $\tau$  beschreiben. Das heißt, man beginnt mit einem Kollektiv von  $n$  Personen  $P_1^\tau, \dots, P_n^\tau$  und erfasst jedes Jahr die Anzahl an Todesfällen. Bei einer solchen Tafel ist das Geburtsjahr als Faktor relevant. Leider sind solche Daten nur schwer zu beschaffen. Dies liegt daran, dass es bei der Gesamtbevölkerung eines Landes 2 Eintritts- und Austrittsgründe gibt. Zum einen kommen Personen in das Kollektiv durch Geburt, zum anderen durch Einwanderung. Bei den Austrittsgründen gibt es analog dazu Tod und Auswanderung. Dieses Problem sieht man auch in den Daten: Betrachtet man die Anzahl an Personen in Deutschland, die in einem gewissen Jahr geboren sind und das Risiko haben, zu versterben, so ist diese Anzahl nicht monoton fallend. Das heißt, es kommen in jedem Alter neue Personen in das Kollektiv, das betrachtet wird. Da diese Daten nicht zu beschaffen sind, betrachtet man die nachfolgende Art von Tafeln.
- Generationssterbetafel: Unter einer Generationensterbetafel versteht man eine Sterbetafel, bei der die Sterblichkeit nicht nur vom Alter (und eventuell vom Geschlecht), sondern zusätzlich vom Geburtsjahrgang abhängt. Es handelt sich also im Prinzip um eine Kohortentafel. Der Unterschied ist, dass bei einer Generationstafel nicht am Anfang ein Kollektiv steht, sondern eine Gesamtbevölkerung, bei der auch das Geburtsjahr  $\tau$  erfasst wird. Somit ist eine Generationstafel eine Mischung aus einer Periodentafel und einer Kohortentafel. Die Daten haben mehr Information, sind allerdings trotzdem erfassbar. Es gibt allerdings nach wie vor das Problem, dass man mit zensierten Daten arbeitet. Das heißt, man keine Beobachtungen darüber, wie Personen mit einem bestimmten Geburtsjahr  $\tau$  in Zukunft versterben. Dies muss mit statistischen Verfahren ausgeglichen werden.
- Selektionstafel: Da der Bestand von Lebensversicherern oft nicht repräsentativ für die Gesamtbevölkerung ist, gibt es hier eigene Tafeln. Konkret ist die Mortalität im Bestand von Lebensversicherern niedriger als die Mortalität der Gesamtbevölkerung. Da man um solche Tafeln zu erstellen Bestandsdaten von Lebensversicherern braucht, werden solche Tafeln hier nicht erstellt.

Ein Beispiel für eine Sterbetafel ist die Sterbetafel 2004R. Dabei steht das R für Rente. Das heißt, diese Tafel wird für Versicherungsprodukte mit Erlebnisfallcharakter, wie die Rente, konzipiert. Erlebensfallprodukte zeichnen sich dadurch aus, dass die versicherte Person nach einer Leistung erhält, wenn sie einen bestimmten Zeitraum  $n$  überlebt. In diesen Produkten, wird die Sterblichkeit als Rechnungsgrundlage neben dem Rechnungszins und den Kosten mit einbezogen, da nur bei Erleben geleistet wird. Konkret werden zwei Arten von Sterbetafeln generiert: Zum einen wird versucht die Sterblichkeiten möglichst genau zu schätzen, man spricht von einer Sterbetafel 2. Ordnung, zum anderen werden Risikoabschläge genommen, um sicher zu gehen, dass die Versicherung ihren Verpflichtungen auf alle Fälle nachkommen kann. Hier spricht man von einer Sterbetafel 1. Ordnung. Für die Konstruktion von Verträgen wird die Tafel 1. Ordnung verwendet. In dieser Arbeit interessiert uns der statistische Aspekt der Versicherungsmathematik, weshalb uns nur die 2. Ordnung interessiert.

An dieser Stelle sei noch kurz erwähnt, dass genau dieser Unterschied in den Sicherheitsabschlägen den Unterschied zwischen Tafeln mit Sterbe- und mit Rentencharakter ausmachen. Für Rentenversicherungen ist es sicherer eine etwas zu geringe Sterblichkeit anzunehmen, während es für Risikolebensversicherungen sicherer ist, eine etwas zu hohe Sterblichkeit anzunehmen. Deshalb findet man auch in der DAV Tafel 2008T über keine Schätzung von Sterbetrends. Es ist sicherer für Versicherungen mit Todesfallcharakter kein Verbesserung der Sterblichkeit an zu nehmen.

## 2.5 Öffentlich zugängliche Sterblichkeitsdaten

Die Sterbetafel 2004R basiert laut Kapitel 2 der Herleitung auf den folgenden Daten:

- Versichertendaten für die Jahre 1995 bis 2002, die von der Münchner Rück und der GenRe ausgewertet wurden,
- Abgekürzte Bevölkerungssterbetafeln des Statistischen Bundesamtes für das frühere Bundesgebiet ab 1971/73 bis 1998/200 (für 1986/88 stattdessen die Allgemeine Deutsche Sterbetafel 1986/88) und
- Daten der gesetzlichen Rentenversicherung (GRV) für das frühere Bundesgebiet von 1986 bis 2002 für die Alter von 66 bis 98 Jahren

Die Daten der Münchner Rück und der Gen Re sind Privateigentum der jeweiligen Unternehmen und deshalb nicht öffentlich zugänglich. Auch die Daten des Statistischen Bundesamtes beziehungsweise der gesetzlichen Rentenversicherung sind auf ihren jeweiligen Webseiten nicht ohne weiteres öffentlich zugänglich. Allerdings gibt es auf der Internetseite Mortality.org Daten über die Sterblichkeit für viele Staaten.

Werfen wir nun einen Blick auf einen Ausschnitt aus "Brief Summary of the Methods Protocol for the Human Mortality Database", um zu sehen, welche Daten vorliegen. Dieses Dokument kann auf der Website von Mortality.org gefunden werden. Ich habe die Punkte etwas gekürzt.

- "Births: Annual counts of live births by sex and by month are collected for each population over the longest time period available. At a minimum, a complete series of birth counts by sex is needed for the time period over which mortality rates and period life tables are computed."
- "Deaths: Death counts are collected by sex, completed age, year of birth, and year of death if available. Before making subsequent calculations, deaths of unknown age may be distributed proportionately across the age range."
- "Population size: Below age 80, estimates of population size on January 1st of each year are either obtained from another source or derived using intercensal survival. When necessary, persons of unknown age are distributed proportionately across age. Above age 80, population estimates are used. For non-extinct cohorts aged 80 to 90 at the end of the observation period, population estimates are obtained either from another source or by applying the method of intercensal survival."
- "Exposure-to-risk: Estimates of the population exposed to the risk of death during some age-time interval are based on annual population estimates, with a small correction that reflects the timing of deaths during the interval and variation in cohort's birthdays by month."
- "Death rates: For both periods and cohorts, death rates are simply the ratio of deaths to exposure-to-risk in matched intervals of age and time."

Diese Daten sind von 1990 an für das ganze Bundesgebiet verfügbar und für West-beziehungsweise Ostdeutschland separat für die Jahre 1945 bis 1989.

Weiterhin beachte man, dass manchmal Beobachtungen nicht zuordenbar sind. In diesen Fällen werden die Beobachtungen proportional auf die verschiedenen Kategorien verteilt. Dies kann dann dazu führen, dass man bei Todeszahlen kein ganzen Zahlen bekommt, sondern gebrochene.

Die folgende Tabelle soll einen kurzen Einblick in die Struktur der Daten geben:

Year	Age	Female	Male	Total
1949	0	.	.	.
1949	1	.	.	.
1949	2	.	.	.
1949	3	.	.	.
1949	4	.	.	.
1949	5	.	.	.
1949	6	.	.	.
1949	7	0.000412	0.000714	0.000566
1949	8	0.000363	0.000632	0.000501
1949	9	0.000335	0.000539	0.000440
1949	10	0.000260	0.000484	0.000375
1949	11	0.000298	0.000446	0.000374
1949	12	0.000332	0.000445	0.000390
1949	13	0.000282	0.000432	0.000359
1949	14	0.000315	0.000542	0.000432
1949	15	0.000384	0.000667	0.000529
1949	16	0.000467	0.001051	0.000767
1949	17	0.000500	0.001344	0.000933
1949	18	0.000621	0.001643	0.001145
1949	19	0.000562	0.001676	0.001133
1949	20	0.000571	0.001785	0.001190

Man sieht anhand Tabelle, dass zum Beispiel für den Jahrgang 1949 Daten erst ab einem Alter von 7 Jahren gibt. Es gibt dann Daten bis zu einem Alter von 67 Jahren. Das Endalter bei diesen Tabellen ist 110. Alle Personen, die 110 Jahre oder mehr alt sind, werden in eine Kategorie, genannt 110+, gruppiert.

Man erhält nur einen Ausschnitt, da die Generationstafel aus einer Periodentafel bestimmt wird: Wenn man die Anzahl an Toden von Personen mit Alter und aktueller Jahreszahl hat, kann man zurückrechnen, wie viele Personen mit einem bestimmten Geburtsjahr in welchem Alter verstorben sind. Dies kann man auch dem, oben bereits erwähnten, Dokument "Brief Summary of the Methods Protocol for the Human Mortality Database" entnehmen:

"Raw data are usually obtained in a period format (i.e., by the year of occurrence). In the HMD, most data are presented in a period format, but we also provide death rates and life tables in a cohort format (i.e., by year of birth) if the observation period is sufficiently long to justify such a presentation."

Auf Mortality.org unter dem Link <https://www.mortality.org/Public/ExplanatoryNotes.php> findet man die folgende Erklärung.

"Period data are indexed by calendar year, whereas cohort data (if available) are indexed by year of birth."

Deshalb werden die Daten transformiert.

### 3 Einfache Modelle

Wir haben uns im vorletzten Abschnitt damit beschäftigt welche Arten von Sterbetafeln es gibt, wie man rohe Sterbewahrscheinlichkeiten finden kann und welche Daten man im Internet finden kann. In diesem Kapitel werden einfache Modelle eingeführt, um die Sterblichkeiten zu schätzen. Diese Modelle sind einfach, da nur eine Variable, entweder das Geburtsjahr oder das Alter verwendet werden. Eine Trendschätzung wird nicht durchgeführt. Diese Modelle dienen als Basisfall und sollten beim Vergleich mit den komplexeren Modellen schlechter abschneiden.

Diese und die vorhergehenden Schätzmethoden sind in dem beiliegenden Paket *moRtRe*, der Name steht für "Mortality Trends", für die Daten aus Kapitel 2.5 implementiert.

#### 3.1 Geburtsjahr als erklärende Variable

Beginnen wir mit dem Modell, dass den Todeszeitpunkt in Abhängigkeit vom Geburtszeitpunkt angibt. Wir benutzen die folgenden Definitionen:

- $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$  Todesjahr
- $T = (T_1, \dots, T_n)$  Geburtsjahr
- $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \sim N(0, 1)$  unabhängig und identisch verteilt (u.i.v.)

Und gehen von einem funktionalen Zusammenhang

$$\Gamma = f(T) + \epsilon \tag{4}$$

aus. Dann ist das Todesalter  $\Gamma - T$  und die Lebenserwartung  $\mathbb{E}(\Gamma - T)$ . man kann eine Sterbetafel aufstellen mittels:

$$\begin{aligned} q_x &= \mathbb{P}(\Gamma - T < x + 1 | \Gamma - T > x) \\ &= \end{aligned}$$

Offensichtlich hat dieses Modell das Problem, dass das Alter einer zu versichernden Person bekannt ist und diese Info nicht berücksichtigt wird. Ein anderes Problem ist, dass bei Anwendung auf die Daten um so später eine Person geboren ist, um so früher stirbt sie. Siehe dazu Graphik (3)



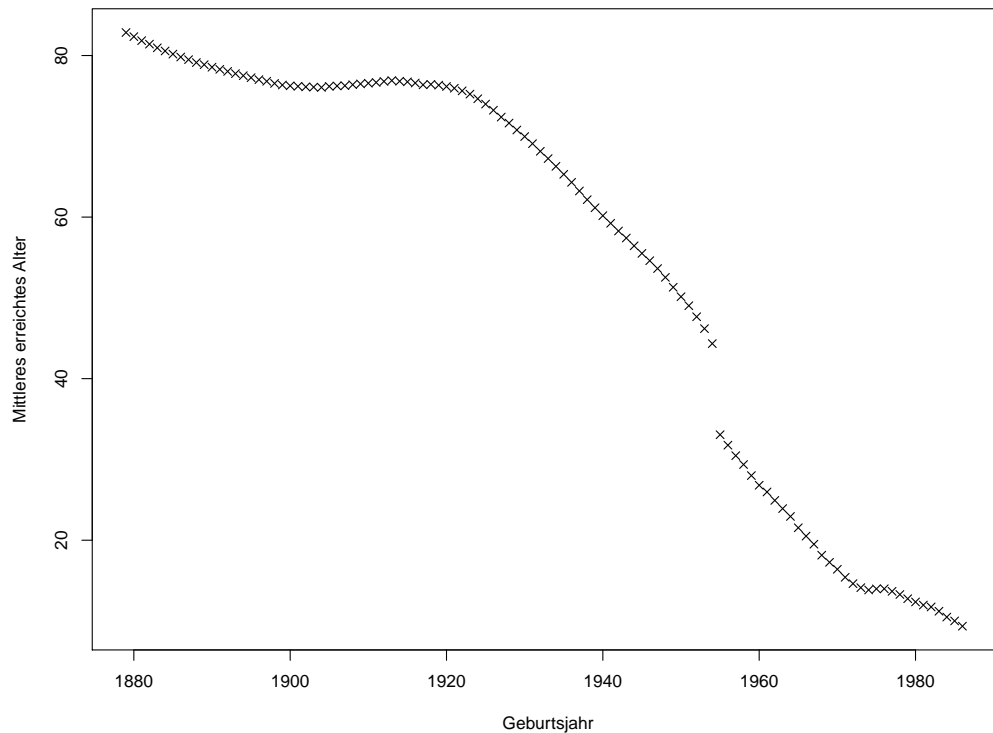


Figure 3: einfachstes Modell Geburtsjahr

Dies macht auch Sinn, wenn man einen Moment darüber nachdenkt: Das mittlere Alter, in dem wir Personen sterben sehen, die 1950 geboren sind, ist natürlich höher als das mittlere Alter von Personen, die 2017 geboren sind. Hier sieht man deutlich das Problem mit der Zensur der Daten. Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir noch eine Heatmap, das die Anzahl an Todesfällen in Abhängigkeit zu Geburtsjahr und Alter beschreibt:

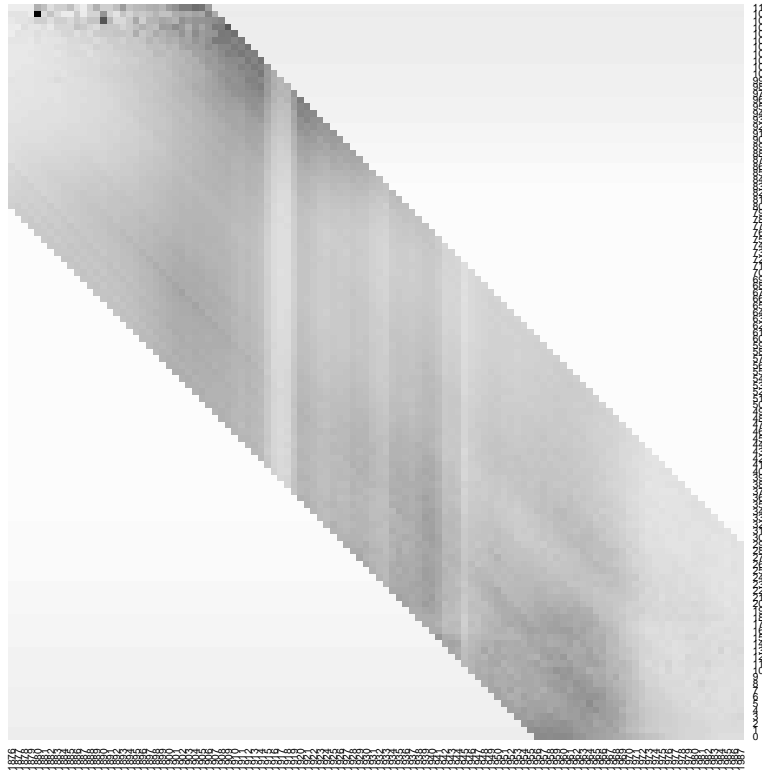


Figure 4: Ein Heatmap der Todesfälle. Auf der x-Achse ist das Geburtsjahr und auf der y-Achse ist das Alter der Personen. Eine dunklere Farbe bedeutet eine höhere Anzahl an Todesfällen.

Man sieht, dass man eine Diagonale von links oben, hohe Alter und frühe Geburtsjahre, nach unten links, junge Alter und späte Geburtsjahre hat. Außerhalb der Diagonale gibt es keine Beobachtungen. Deshalb eignet sich nur das Geburtsjahr nicht als erklärende Variable.

### 3.2 Alter als erklärende Variable

Betrachten wir als nächstes ein weiteres einfaches Modell, doch diesmal mit dem Alter als erklärende Variabel. Beginnen wir wieder mit den Definitionen:

- $Y = (Y_1^\tau, \dots, Y_n^\tau)$  relative Anzahl an Todesfällen/ Todesfälle geteilt durch die Anzahl an Personen, die einem Sterberisiko unterliegen
- $X = (X_1^\tau, \dots, X_n^\tau)$  Alter
- $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \sim N(0, 1)$  unabhängig und identisch verteilt (u.i.v.)

Wir unterstellen wieder einen funktionalen Zusammenhang zwischen  $X$  und  $Y$

$$Y = f(X) + \epsilon \quad (5)$$

Betrachten wir also zuerst einen Plot der Daten (5):

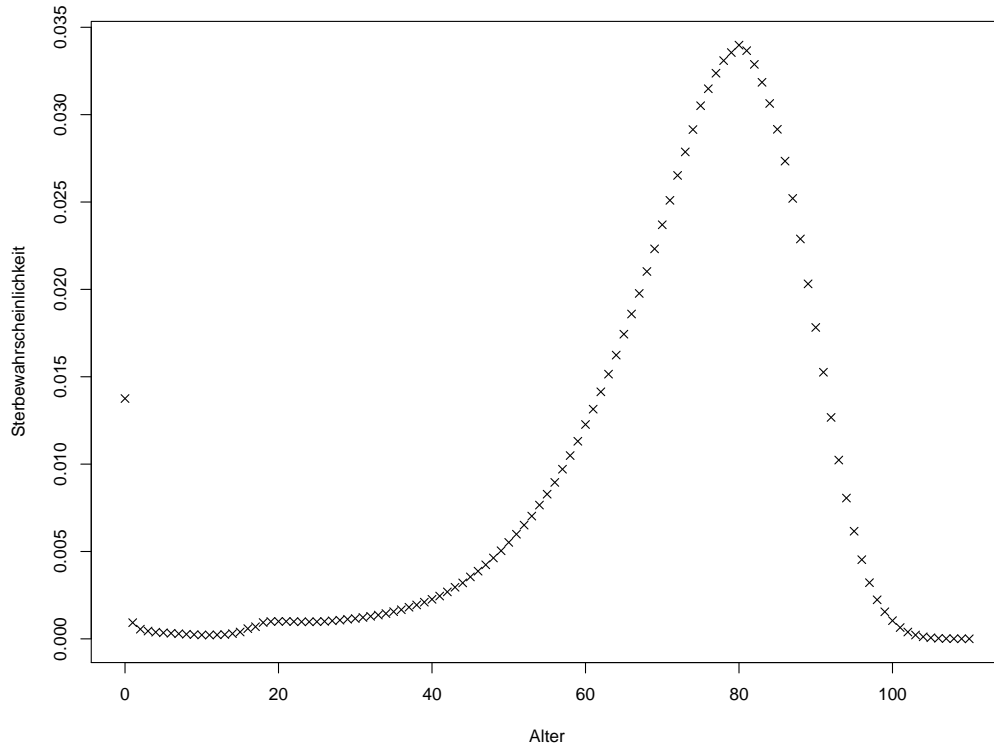


Figure 5: einfachstesModellAlter

Man sieht, dass der funktionale Zusammenhang  $f$  nicht linear ist. Zum Beispiel in [GK07] wird das folgende Modell vorgeschlagen, das als Lee-Carter Modell bezeichnet wird:

Bezeichne  $m_{a,t}$  den Logarithmus der Sterblichkeit der Altersgruppen  $a(a = 1, \dots, A)$  und  $t(t = 1, \dots, T)$  die Zeit. Dann gehen wir von

$$m_{a,t} = \alpha_a + \beta_a \gamma_t + \epsilon_{a,t} \quad (6)$$

aus. Hier bezeichnen  $\alpha_a, \beta_a$  und  $\gamma_t$  Parameter, die zu schätzen sind. Seien weiterhin  $\epsilon_{a,t}$  eine Menge von zufälligen Schwankungen.

Versucht man nun die Sterbewahrscheinlichkeiten zu logarithmieren und passt dann ein lineares Modell an, so erhält man folgendes Graphik (6):

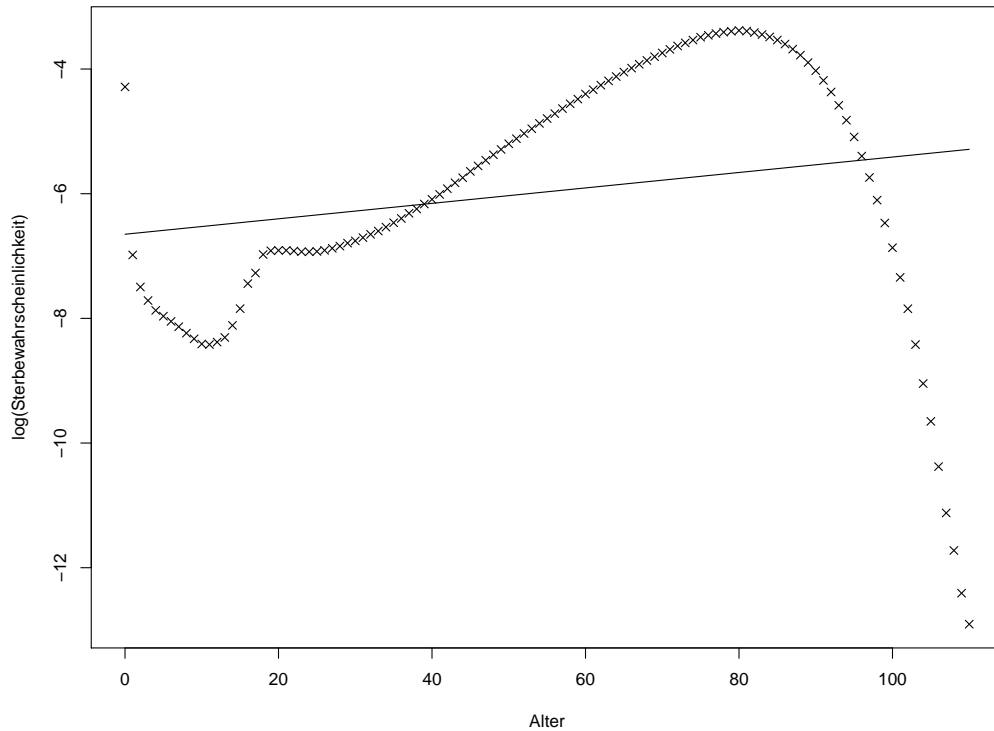


Figure 6: einfachstesModell-log-fitted-Alter

Durch die Logarithmierung werden die Daten schon deutlich linearisiert, allerdings noch nicht zu einem Grad, der mir ausreichend scheint.

Betrachten wir noch einmal Graphik (5). Die 1-jährigen Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x$  ergeben in Summe 1, sprich  $\sum_{x=S}^E q_x = 1$ . Jede Person stirbt in unserem Modell, spätestens bei Erreichen des Alters  $E$ . Es liegt also nahe,  $q_x$  für alle  $x$  als Ausschnitt aus einer Dichtefunktion zu interpretieren. Das heißt, es scheint sinnvoll den funktionalen Zusammenhang  $f$  als Dichtefunktion zu betrachten. Die bekannteste Dichtefunktion ist die Normalverteilung, und die Daten scheinen optisch auch recht gut zu einer Normalverteilung zu passen. Wir legen also das folgende Modell an:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot s}} \cdot \exp\left(-\frac{(m - X)^2}{2 \cdot s^2}\right) + \epsilon \quad (7)$$

Bei Modell (7) sind alle Operationen punktweise zu verstehen. In folgender Graphik sieht man noch einmal die Daten aus Graphik (5) und zusätzlich der geschätzte, funktionale Zusammenhang  $f$ . Die Parameter  $s$  und  $m$  wurden durch Minimierung der quadratischen Abweichungen von Fehlern und Modell bestimmt:

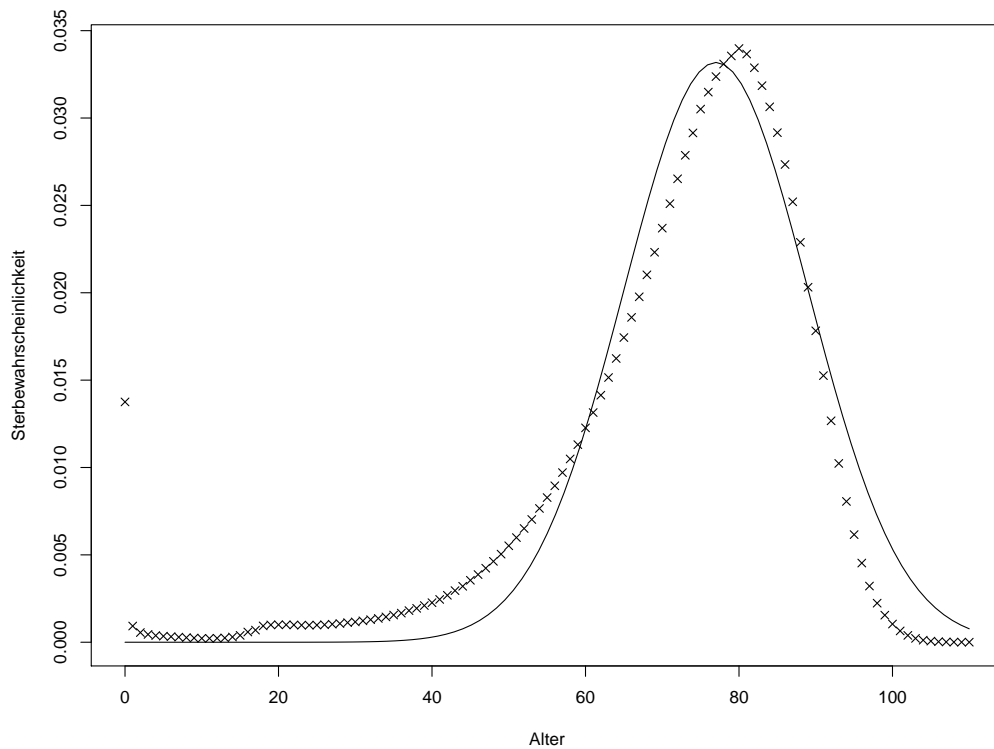


Figure 7: einfachstesModell-fitted2-Alter

Dieses Modell ist das Basismodell. Das heißt, die anderen beiden Modelle müssen zeigen, ob sie besser sind. Es hat sicherlich viele Schwächen. So hat man beispielsweise Masse im negativen Bereich. Das heißt, man hat eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit mit einem negativen Alter zu sterben. Außerdem wird das Geburtsjahr als erklärende Variable vernachlässigt. Allerdings ist es als Vergleichsfall sehr praktisch, da man davon ausgehen kann, dass dieses Modell schlechter ist, als die anderen beiden, die in dieser Arbeit betrachtet werden.

Im nächsten Kapitel werden wir betrachten, welche Modelle es in der Literatur gibt und wie die DAV Sterbetafeln geschätzt werden.

Im übernächsten Kapitel werden wir noch einmal darauf eingehen, die 1-jährigen Sterbewahrscheinlichkeiten als Ausschnitte aus einer Dichte zu betrachten. Dann kann man für jeden Geburtsjahrgang eine eigene Dichte  $g(\tau)$  schätzen und mittels eines Kerndichteschätzers zu 1-jährigen Sterbewahrscheinlichkeiten kommen. Betrachte dazu die folgende Graphik (8).

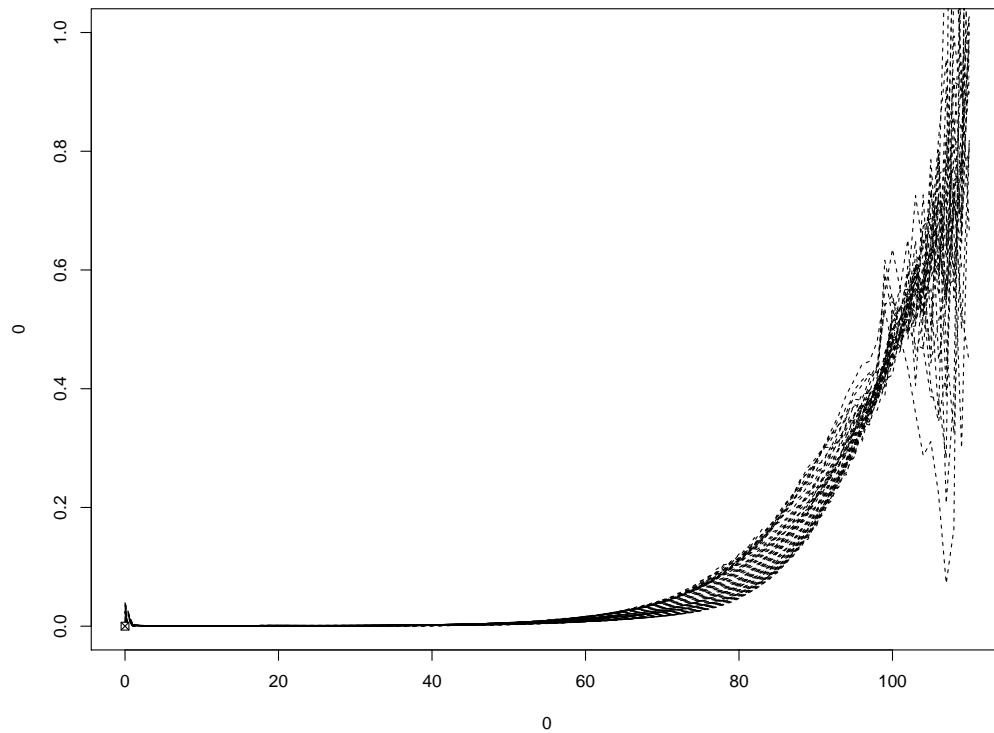


Figure 8: abschnittsweises-Dichteschätzen

In einem nächsten Schritt unterstellt man dann einen funktionalen Zusammenhang

$$f(g(\tau), g(\tau + 1)) = h(\tau)$$

und schätzt  $f$  und  $h$ .

## 4 Übliche Verfahren zur Gewinnung von Sterbetafeln und die Sterbetafel 2004R

Wir haben bereits in der Motivation in Abschnitt 1.1 gesehen, dass einfache Basistafeln nicht ausreichen. Deshalb werden wir in diesem Abschnitt statistische Modelle angeben, um Sterblichkeiten und unterliegende Trends zu schätzen.

Die Sterbetafel 2004R geht in zwei Schritten vor: Im ersten wird eine Basistafel geschätzt, im zweiten wird auf Grundlage der Basistafel eine Trendfunktion geschätzt. Diese Trendfunktion soll Verbesserungen in der Sterblichkeit modellieren. An diesem Vorgehen finde ich problematisch, dass die Basistafel als Periodentafel erstellt wird. Das heißt bei der Erstellung der Basistafel wird das Geburtsjahr nicht berücksichtigt.

Hier wird besprochen, wie die Basistafel der Sterbetafel 2004R geschätzt wird. Bei einer Basistafel handelt es sich um eine Periodensterbetafel bei der ein bestimmtes Kalenderjahr zugrunde gelegt wird. Dazu wird in 4 Schritten vorgegangen: Zuerst muss ein Basisjahr für die Tafel festgelegt werden. Das heißt, es muss ein Jahr bestimmt werden, für die die Tafel gelten soll. Danach werden die rohen Sterbewahrscheinlichkeiten bestimmt und im nächsten Schritt geglättet. Zum Schluss werden Sterbewahrscheinlichkeiten für hohe Alter extrapoliert. Die folgende Beschreibung orientiert sich an Kapitel 3.3.1 der Herleitung der Tafel 2004R. Man beachte, dass die 2004R zum einen eine Tafel für die Rentenbezugszeit und zum anderen für die Aufschubszeit hat. Da es sich bei der Tafel zur Rentenbezugszeit um eine Selektionstafel handelt, wird deren Herleitung hier nicht betrachtet.

### 4.1 Auswahl des Basisjahrs

Die Auswahl des Basisjahrs wird in Anhang 4 der Herleitung der Sterbetafel 2004R erklärt:

"Der mittlere Zeitpunkt des Beobachtungsmaterials wird definiert durch Gewichtung der Verweildauer der Jahre 1995 bis 2002, also als

$$\frac{\sum_{t=1995}^{2002} t \cdot VWD(t)}{\sum_{t=1995}^{2002} VWD(t)} \quad (8)$$

wobei  $VWD(t)$  die gesamte nach Rentenhöhen gewichtete Verweildauer des Beobachtungsmaterials im Jahr  $t$  bezeichnet."

Die DAV schlägt also vor als Bezugsjahr der Basistafel das mittlere Jahr des Beobachtungszeitraums zu nehmen. Dies wird nicht weiter motiviert, allerdings spricht dafür, dass im mittleren Jahr der Effekt der Sterblichkeitsverbesserung zu den Randaltern am geringsten sei dürfte.

Ich würde einfach den größten Jahrgang nehmen, um die Varianz der Schätzer zu verringern (Trend zum Mittel). Allerdings hat man keine Kohortendaten; was heißt also größten? geburtenstärksten?

## 4.2 Bestimmung roher Sterbewahrscheinlichkeiten

Wie bereits in Abschnitt 2.5 beschrieben werden zur Bestimmung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten die beiden Kennzahlen  $I_x$  und  $t_x$  für ein Kollektiv bestimmt. Dabei bezeichnet  $I_x$  die anzahlgewichtete Verweildauer der Lebenden des Alters  $x$ . Das heißt, eine Person die ein halbes Jahr nach ihrem  $x$ -ten Geburtstag verstirbt, trägt  $1/2$  zu  $I_x$  bei. Auf der anderen Seite bezeichnet  $t_x$  die Anzahl an Todesfällen von Personen im Alter  $x$ . Man bestimmt dann

$$q_x^{\text{roh}} = \frac{t_x}{I_x} \quad (9)$$

Dieses Verfahren nennt man Intervallmethode. Es findet auch in der Sterbetafel 2008T Anwendung.



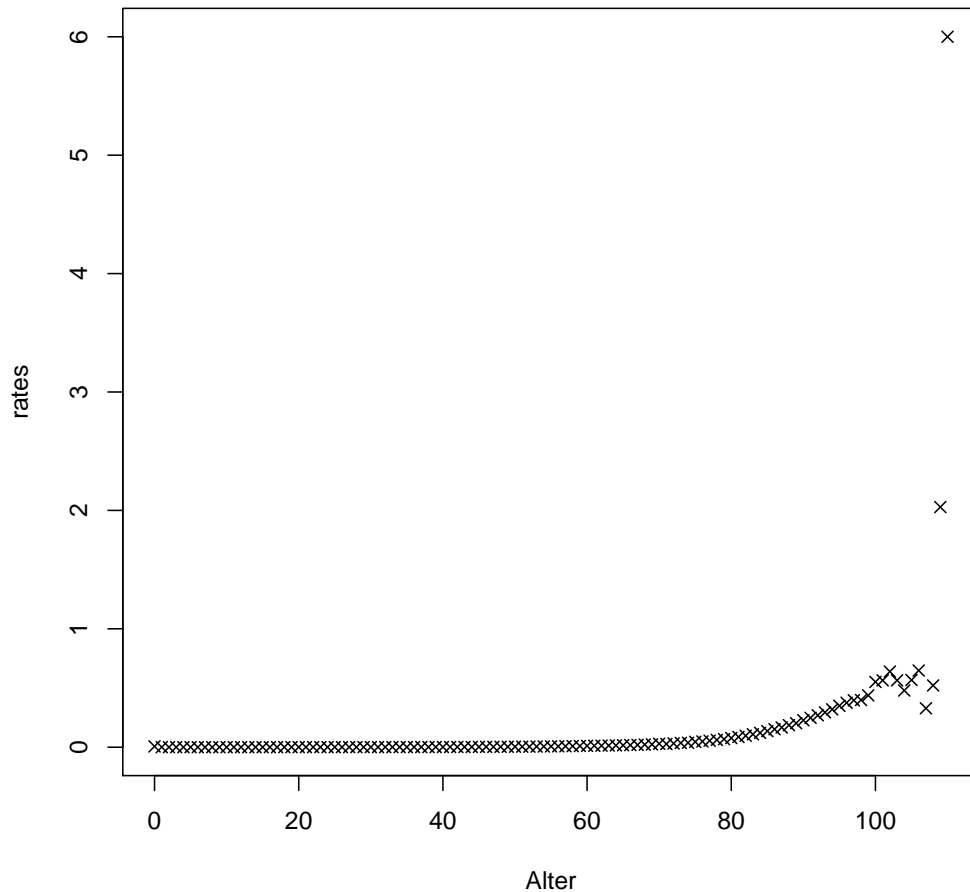


Figure 9: Periodensterblichkeit im Basisjahr 1990. Die Sterbetafel wurde aus Periodensterbetafel erzeugt.

### 4.3 Glättung der Sterbewahrscheinlichkeiten

Dieses Kapitel basiert auf [Kak85] Kapitel 3.

Grundsätzliches

Mechanische Methoden

Analytische Methoden

Zusammenhang

Die rohen Sterbewahrscheinlichkeiten werden mit dem Verfahren von Whittaker-Henderson geglättet:

Beschreibung des Verfahrens: -> TODO

-> Quellen aus 2008T Kapitel 2.2: Kakies et al 1985 "Methodik der Sterblichkeitsuntersuchung" Loebus, 1994 "Bestimmung einer angemessenen Sterbetafel für Lebensver-

sicherungen mit Todesfallcharakter."

-> Quellen aus 2004R Kapitel 3.2.3: KBLOZ S.92 ff = Kakies 1985 "Methodik der Sterblichkeitsuntersuchung" L1 S. 508/509 = Loebus, 1994 "Bestimmung einer angemessenen Sterbetafel für Lebensversicherungen mit Todesfallcharakter."

Danach werden die tatsächlich beobachtete Anzahl von Toten verglichen mit der Anzahl von Toten, die bei Ansatz der ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten zu erwarten wäre.

## 4.4 Extrapolation von hohen Altern

Dieser Abschnitt orientiert sich an der Herleitung der DAV Tafel 2004R Anhang 9. Die DAV Tafel 2004R hat in der Basistafel nur Alter bis 99. Die Alter 100 bis 120 werden mittels der Methodik aus TKV = Thatcher "The force of mortality at Ages 80 to 120" (1998) geschätzt:

sechs Modelle:

- Gompertz-Modell:  $q_x = 1 - \exp(-\exp(a + bx))$
- Quadratisches Modell:  $q_x = 1 - \exp(-\exp(a + bx + cx^2))$
- Heligmann-Pollard-Modell:  $q_x = (a \exp(bx)) / (1 + a \exp(bx))$
- Weibull-Modell:  $q_x = 1 - \exp(-a(x + (1/2))^b)$
- Kannisto-Modell:  $q_x = 1 - \exp(-((a \exp(bx)) / (1 + a \exp(bx))))$
- Logistische Modell  $q_x = 1 - \exp(-(\beta \exp(bx)) / (1 + \alpha \exp(bx)))$

TODO TKV lesen; TKV kann auf <http://www.demogr.mpg.de/Papers/Books/Monograph5/start.htm> eingesehen werden.

Die DAV schätzt dann alle Parameter für die Basistafel und dann wird auf Grund von Gütekriterien das beste Modell ausgewählt. Konkret werden drei herangezogen:

- Vergleich von gemäß extrapolierten Sterbewahrscheinlichkeiten erwarteten Toten mit tatsächlichen Toten  $\sum_{x=96}^{99} (\hat{q}_x L_x) / \sum_{x=96}^{99} \hat{q}_x L_x$
- Wert der Loglikelihood (ohne konstanten Summanden):  $\sum_{x=96}^{99} T_x \ln(\hat{q}_x) + \sum_{x=96}^{99} (L_x - T_x) \ln(1 - \hat{q}_x)$
- Wert der  $\chi^2$ -Statistik:  $\sum_{x=96}^{99} (T_x - L_x \hat{q}_x)^2 / (L_x \hat{q}_x (1 - \hat{q}_x))$

## 4.5 Trendfunktionen der Sterbetafel 2004R

Hier wird das Schätzen von Sterblichkeitstrends betrachtet. Im vorherigen Kapitel haben wir gesehen, wie man am besten eine Basistafel schätzt. Ausgehend von dieser Basistafel gibt es verschiedene Möglichkeiten die Sterbetrends zu schätzen. Im folgenden Betrachten wir zuerst das vorgehen bei der Sterbetafel 2004R und danach TODO Dieser Abschnitt basiert auch dem 4. Kapitel der Herleitung zur Basistafel 2004R.

traditionelles Modell:

$$\frac{q_{x,t+1}}{q_{x,t}} = \exp(-F(x)) \quad (10)$$

laut Anhang 11 wird  $F$  mittels einer Methode der kleinsten Quadrate durch lineare Regression aus den Werten für  $\ln(q_{x,t})$  für  $t_0 \leq t \leq t_1$  geschätzt.

Kohortenmodell:

$$\frac{q_{x,t+1}}{q_{x,t}} = \exp(-G(t+1-x)) \quad (11)$$

Synthesenmodell

$$\frac{q_{x,t+1}}{q_{x,t}} = \exp(-F(x) - G(t+1-x)) \quad (12)$$

Die Ergebnisse der Trendschätzung können in DAV 2004R Anhang 1 Teil B gefunden werden.

Alle diese Modelle sind nicht parametrisch. Vielleicht wäre ein linear Parametrisches Modell besser? also  $F(x) = ax + b$ ?

Dann gibt auch noch die Trenddämpfung TODO

QUELLE: "Understanding the Lee-Carter Mortality Forecasting Method" Girsi & King

$$\log(Y) = a + bc + \epsilon \quad (13)$$

## 5 Abschnittsweises Dichteschätzen

Wir haben bereits die Graphik:

TODO

gesehen. In diesem Abschnitt werden wir pro Geburtsjahrgang eine Dichtefunktion mittels Kerndichteschätzer bestimmen

-> TODO Quelle Kerndichteschätzer

und dann mittels eines Trendzusammenhangs, als Minimierungsproblem  $f$  Schätzen

### 5.1 Modellbildung

In einem ersten Schritt muss man klären, wie viele Zufallsvariablen man in seinem Modell haben möchte. Zum einen gibt es die Möglichkeit davon aus zu gehen, dass es nur eine Zufallsvariable  $X \sim F$  gibt. Wir beobachten dann Realisierungen von  $g(X, \tau)$  wobei  $\tau \in \{1876, \dots, 1978\}$  ein Geburtsjahr ist. Weiterhin bezeichnet  $g$  eine unbekannte Funktion, die die Verbesserung der Sterblichkeit abhängig vom Geburtsjahr  $\tau$  beschreibt. Dieses Vorgehen führt allerdings dazu, dass eine Funktion  $g$  geschätzt werden muss, über man schlechte Annahmen treffen kann.

Deshalb wird im Folgenden von  $m = 1978 - 1876 = 102$  Zufallsvariablen ausgegangen. Das heißt für jedes Geburtsjahr  $\tau$  gibt es eine zugehörige Zufallsvariable  $X^\tau \sim F^\tau$ . Weiterhin haben wir Beobachtungen der Quantile  $q_x$  von  $X^\tau$ . Allerdings sind unsere Beobachtungen unvollständig. Dies liegt zum einen daran, dass die Daten nicht vorliegen, zum anderen an der Zensur der Daten: Für Geburtsjahr und Alterkombinationen, die in der Zukunft liegen, liegen natürlich noch keine Beobachtungen vor. Deshalb gehen wir von dem folgenden Zusammenhang aus:

$$\frac{q_{x,\tau+1}}{q_{x,\tau}} = f(x, \tau) \quad (14)$$

In diesem Modell beschreibt die Funktion  $f$  die Verbesserung der Sterblichkeit. Das heißt wir versuchen in einem ersten Schritt  $q_{x,\tau}$  soweit wie möglich zu schätzen. In einem zweiten Schritt schätzen wir  $f$ .

Jetzt haben wir ein Modell und können uns Gedanken darüber machen, wie wir die Parameter schätzen. Für die  $q_{x,\tau}$  für die Daten vorliegen benutzt kann man direkt die Sterblichkeitsraten von [mortality.org](http://mortality.org) nehmen. Die Frage ist jetzt wie man  $f$  schätzt.

Ideen zum Schätzen von  $f$ :

- $f(x, \tau) = \exp(-F_\tau(x))$  also eine Funktion  $F_{tau}$  pro Jahrgang  $\tau$  und dann betrachtet man das ganze als Interpolationsproblem.
- $f(x, \tau) = \exp(-(ax + b) \cdot \tau)$  also ein einfaches lineares Modell. und man schätzt  $a$  und  $b$ .
- Vielleicht findet man bei Whittaker-Henderson noch eine Inspiration.

Die übrigen Quantile  $q_{x,\tau}$  werden dann über die Beziehung (14) geschätzt.

## 5.2 Kerndichteschätzung

Nachdem wir ein Modell haben, können wir die Dichten Schätzen.

-> Kerndichteschätzer; einen pro Geburtsjahr

## 5.3 Schätzung des Trends durch Minimierung

Jetzt können wir

$$q_{x+1}/q_x = f(x) \tag{15}$$

nach  $f$  lösen.

## 6 Qualitätsvergleich der Modelle mittels Simulation

In diesem Kapitel werden Vergleiche der drei Methoden vorgestellt.

### 6.1 Qualitätsvergleich mittels Tests

Quelle: Kapitel 2 aus Methodik von Sterblichkeitsuntersuchungen

Insbesondere sollen die folgenden beiden Fragen mittels statistischen Tests beantwortet werden:

- Ist es notwendig Trends zu bestimmen? Dazu wird geschaut, ob eine Sterbetafel aus z.B. 1950 und eine von 2000 signifikant gleich sind
- Unterscheiden sich die drei Sterbetafeln, die mittels der drei Verfahren bestimmt wurden signifikant?

-> In diesem Abschnitt müssen also Tests vorgestellt werden, die zwei (oder mehr) Sterbetafeln vergleichen können.

### 6.2 Qualitätsvergleich durch Simulation

Die Idee ist eine (oder mehrere) Sterbetafeln vorzugeben. Dann zieht man daraus Stichproben, addiert einen Fehler und schätzt mit den drei Verfahren eine Sterbetafel. Dann kann man schauen, welche Schätzung am besten war.

### 6.3 Qualitätsvergleich der Modelle mittels Theorie

In diesem Kapitel möchte ich den Bias und die Varianz der drei Methoden bestimmen. Das heißt in diesem Abschnitt soll

$$\mathbb{E}(\hat{q}_x) \tag{16}$$

und

$$\text{Var}(\hat{q}_x) \tag{17}$$

bestimmt werden.

## 7 Ausblick

In diesen Abschnitt kommen Ideen, die es zwischendurch gab, die aber nicht weiter verfolgt wurden.

### 7.1 Stein-Schätzer

Angenommen man hat das Modell  $X \sim N_d(\theta, I_d)$  mit unbekanntem Parameter  $\theta \in \mathbb{R}^d$ . Wir wollen  $\theta$  schätzen. Dazu haben wir nur eine Beobachtung  $B$  von  $X$ . James and Stein haben in ihrem Artikel "Estimation with quadratic loss" (1961) gezeigt, dass der Schätzer  $\hat{\theta} = B$  nicht zulässig ist. Das heißt, sie haben gezeigt, dass es einen Schätzer mit einem kleineren Risiko gibt. Konkret wird gezeigt, dass der Schätzer

$$T_{JS}(B) = \left(1 - \frac{d-2}{\|B\|^2}\right) B \quad (18)$$

für  $d \geq 3$  ein kleineres Risiko hat. Da dieses Ergebnis nicht intuitiv ist, wird es auch als das Stein-Paradoxon bezeichnet.

Wie aber passt der Stein-Schätzer in diese Arbeit? Anstatt davon auszugehen, dass wir zugrundeliegende Zufallsvariablen  $X^\tau$  haben und ihre Quantile beobachten können wir von folgendem Modell ausgehen: Wir beobachten  $Y_x^\tau \sim N(q_x^\tau, 1)$ . Das heißt, wir gehen von davon aus, dass wir Realisierungen  $Y_x^\tau = q_x^\tau + \epsilon$  beobachten. Hier ist  $\epsilon \sim N(0, 1)$ . Dann ist der Stein-Schätzer dem intuitiven Ansatz aus dem vorhergehenden Abschnitt überlegen.

Wir können also, alternativ zu dem vorhergehenden Abschnitt auch,

$$\hat{q}_x^\tau = \left(1 - \frac{111-2}{\sqrt{\sum_{i=0}^{110} \hat{q}_i^{\tau_{\text{tau}}}}}\right) \hat{q}_x^\tau \quad (19)$$

schätzen. Dann kann man genau wie im letzten Abschnitt  $f$  schätzen und damit die Generationstafeln auffüllen. Man würde vermuten, dass dieser Schätzer einen geringeren Fehler aufweist.

### 7.2 Internationalisierung

Eventuell ist die Frage nach dem West-Ost-Deutschland Vergleich interessant und der Internationale Vergleich.

### 7.3 Interpretation als Markovkette

Man kann eventuell einen Sterbeprozess als Markovkette auffassen und damit Wkeiten schätzen.

-> TODO Graphik erstellen -> Valentin fragen -> Quelle: Wkeit Klenke (bei mir im Regal)

## 7.4 Weitere Qualitätsvergleiche

Qualitätsvergleich über Simulation; dazu hat man mehrere Möglichkeiten:

- Man teilt die Daten in Teildatenbanken  $D_1$  und  $D_2$  auf. Auf Grund von  $D_1$  wird der Schätzer bestimmt. Dann kann man mit dem Schätzer die Werte von  $D_2$  schätzen und mit den wahren Werten vergleichen.
- Man zieht neue Datensätze aus der empirischen Verteilungsfunktion der Daten, die man hat, und benutzt diese neuen Daten, um die Qualität der Schätzer zu bestimmen.
- Nachdem man  $\hat{q}_x^\tau$  gefunden hat, gibt man  $\tilde{q}_x^\tau = \hat{q}_x^\tau + \epsilon, \epsilon \sim N(0, 1)$  für einige  $x$  vor und versucht  $\hat{q}_x^\tau$  wieder zu finden. Dies testet, wie gut die Stein-Methode ist, wenn die Voraussetzungen per Definition erfüllt sind.

-> Anhang 11 : Likelihood-Ratio-Test zum Modellvergleich

Eine mögliche Fragestellung ist dann, welche Qualität diese Modelle besitzen:

- Sind sie konsistent?
- Sind sie unverzerrt und vielleicht UMVU?
- Wie sind die Fehler verteilt?

[GK07], [DAV04]



## References

- [DAV04] DAV, *Dav 2004r*, [https://aktuar.de/unsere-themen/lebensversicherung/Seiten/sterbetafel\\_n.aspx](https://aktuar.de/unsere-themen/lebensversicherung/Seiten/sterbetafel_n.aspx), Accessed: 22-05-2019, 2004.
- [GK07] F. Girosi and G. King, “Understanding the lee-carter mortality forecasting method,” 2007.
- [Kak85] P. Kakies, *Methodik von Sterblichkeitsuntersuchungen*. Verl. Versicherungswirtschaft, 1985.
- [Shk18] V. Shkolnikov, *Mortality*, <https://www.mortality.org/>, Accessed: 22-05-2019, 2018.