

## 1. 使用 Excel 产生随机数验证大数定律(LLN, Law of Large Numbers)

### 伯努利大数定律

设 $m$ 是 $n$ 重伯努利试验中事件 $A$ 出现的次数， $p$ 是事件 $A$ 在每次试验中发生的概率，则对于任意给定的实数 $\varepsilon > 0$ ，有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr \left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

在本实验中，事件 $A$ 指的是硬币抛掷结果正面向上，显然 $p = 1/2$ 。从图 1 可以看到，在多次硬币抛掷试验中，随着试验次数 $n$ 的增加，正面向上的频率逐渐趋向于一个稳定的数值： $1/2$ ，即硬币正面朝上的概率。

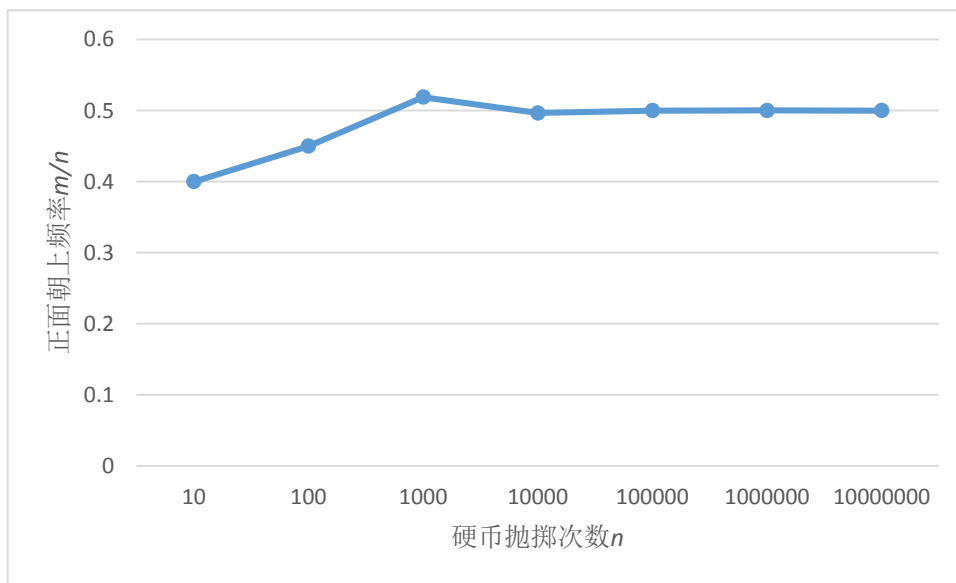


图 1：不同硬币抛掷次数中正面向上出现频率分布

## 2. 使用 Excel 产生随机数验证中心极限定理(CLT, Central Limit Theorem)

### 独立同分布中心极限定理

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是相互独立同分布的随机变量序列，且具有数学期望和方差：

$$\mathbb{E}(X_i) = \mu, \quad \mathbb{D}(X_i) = \sigma^2, \quad i = 1 \dots n$$

则随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 服从中心极限定理：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x \right\} = \Phi(x)$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布。

在本实验中，取 $X_i \sim U(0, 1)$ ，则 $\mathbb{E}(X_i) = 1/2$ ， $\mathbb{D}(X_i) = 1/12$ ；取 $n = 12$ ，则 $\sqrt{n}\sigma = 1$ ， $n\mu = 6$ 使得计算方便。利用样本值 $x_i$ ，得到近似服从标准正态分布的样本值 $\sum_{i=1}^n x_i - 6$ 。重复抽样 10000 次，所得结果直方图见图 2。

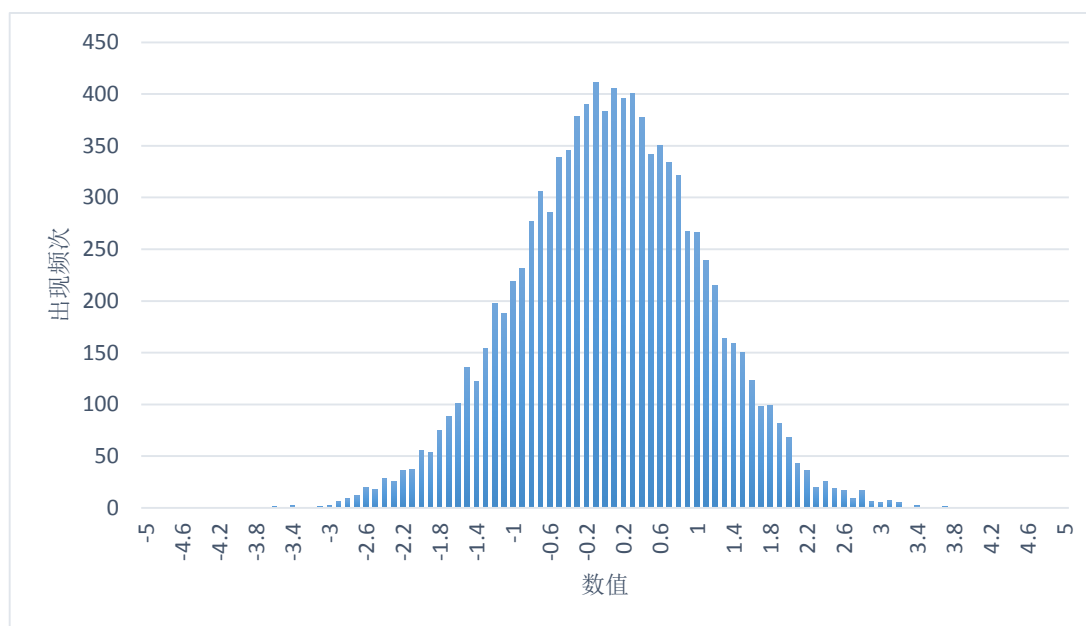


图 2：利用 CLT 生成 10000 个随机数的出现频次分布

从图 2 可以看到，绘制得到的直方图近似为标准正态分布。因此，利用中心极限定理，可以使用均匀分布的随机数来产生服从标准正态分布的随机数。