Problem 1

T1:解：

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

令 $\frac{x-\mu}{\sigma}=t$ ，我们可以得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-t^2}{2}}dt$$

这样我们就把不标准的正态分布转化为标准的正态分布

然后令 $I=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-t^2}{2}}dt$

则 $I^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(t^2+u^2)}{2}}dtdu$

再用极坐标进行转换可得

$$I^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{r}e^{-\frac{r^2}{2}}drd\theta$$

进行计算可得

$$I^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{r}e^{-\frac{r^2}{2}}drd\theta=\int_0^{\infty}re^{-\frac{r^2}{2}}dr=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}dr^2=1$$

所以 $I=1$

所以 $f(\mathrm{x};\mu,\sigma^2)$是合法的 pdf

T2：解：

$$E(x)=\mu,V(x)=\sigma^2$$

T3：解：

跟 T1 同理，用极坐标换元后积分可得，或者直接套用泊松积分

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}dt=\sqrt{\pi}$$

T4：解：$\int_0^{\infty}\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{\frac{-x}{\beta}}dx=\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{\frac{-x}{\beta}}dx$

此时令 $x=\frac{x}{\beta}$ 则原式为：$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}e^{\frac{-x}{\beta}}dx=\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}=1$

所以 $f(x;\alpha,\beta)$ 是合法的 pdf

T5:解：

pdf 为自由度为 1 的卡方分布：

$$\int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}}$$

T6:解：

$$\because f(x,y) = f_x * f_y$$

$$\therefore P(x^2+y^2 \,\&\&\, \frac{x}{y})\text{在某点（}a,b\text{）的pdf为：}$$

$$2\int_0^{\pi-\arctan\left(\frac{1}{b}\right)}\int_0^a \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta = \frac{1}{\pi}\left(\pi - \arctan\frac{1}{b}\right)\left(1-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)$$

$$\text{在分别考虑 } P(x^2+y^2)\text{与}P(\frac{x}{y})\text{在点}(a,b)\text{的pdf}$$

$$P(\frac{x}{y}) = 2\int_0^{\pi-\arctan\frac{1}{b}}\int_0^\infty \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta = \frac{1}{\pi}\left(\pi - \arctan\frac{1}{b}\right)$$

$$P(x^2+y^2) = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta = 1 - e^{-\frac{r^2}{2}}$$

所以 $P(x^2+y^2 \,\&\&\, \frac{x}{y}) = P(x^2+y^2) * P(\frac{x}{y})$

所以 x^2+y^2 与 $\frac{\mathrm{x}}{y}$ 独立