§2 数列的极限

1. 数列的定义：一系列有序的数：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n\}$$

例1. n个例子.

(1) $x_n = \frac{n}{n+1}$: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots \to 1$

(2) $x_n = 2^n$: $2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^n, \cdots \to \infty$

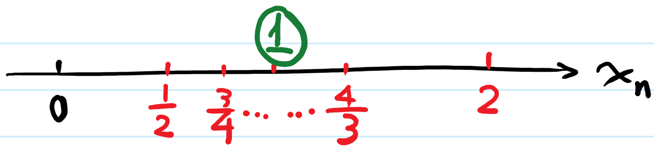
(3) $x_n = \frac{1}{2^n}$: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots \to 0$

(4) $y_n = 1+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$: $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \cdots \to 1$

(5) $z_n = (-1)^{n+1}$: $1, -1, 1, -1, \cdots$

2. 数列极限的定义

观察 $y_n = 1+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$:



$$|y_n - 1| = \frac{1}{n}.$$

给定 0.01, $\frac{1}{n} < 0.01$. $n > 100$, 101, 102, … ✓

0.0001, $\frac{1}{n} < 0.0001$. $n > 10000$, 10001, 10002, … ✓

⋮

$\varepsilon > 0$. $\boxed{\frac{1}{n} < \varepsilon}$. $n > \frac{1}{\varepsilon} \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] = N$, $N+1$, $N+2$, …

定义：$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$. $|x_n - a| < \varepsilon$, 当 $n > N$ 时.

则称 a 为 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，或称 $\{x_n\}$

收敛到 a，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a. \text{ 或 } x_n \to a\ (n\to\infty).$$

否则，称 $\{x_n\}$ 发散.

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = a\right)$$

说明：(i) "ε-N" 语言：

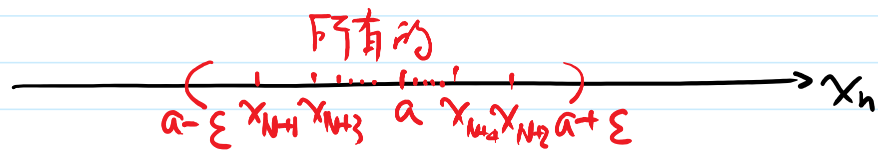
(ii) 只强调 N 的存在性；

(iii) $N = N(\varepsilon)$. N 与 ε 有关；

(iv) 几何意义：

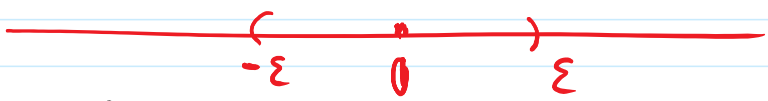
$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad n = N+1, N+2, \cdots$$

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon.$$



$$1, \boxed{0, 0, 0}, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right)$$

$x_1, \cdots, x_N$



ε - Epsilon

例2. 证明：$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

证明：$\forall \varepsilon > 0$. 取 $N = [\frac{1}{\varepsilon^2}]$. 当 $n > N$ 时

$$|x_n - a| = \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$$

即 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

$$\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow n > \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] = N \right)$$

3. 收敛数列的性质.

定理1（唯一性）极限存在必唯一.

定理2（有界性）数列极限存在必有界.

$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists M>0$. 使得 $|x_n| \leq M$,

$n=1,2,\cdots$

证明：$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N>0$. 当 $n>N$ 时

$|x_n - a| < \varepsilon$.

取 $\varepsilon = 1$. 则 $|x_n - a| < 1$.

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

$n=N+1, N+2, \cdots$

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1+|a|\}$，则

$|x_n| \leq M$.

即 数列有界.

定理3（数列与子列的关系）

数列 $\{x_n\}$：$x_1, \cdots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, \cdots x_{n_2}, x_{n_2+1}, \cdots x_{n_3}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$

子列 $\{x_{n_k}\}$：$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$

$n_k \geq k$

如果 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么任一子列均收敛且收敛于 a.

注：(i) 若两子列收敛到不同的极限，则原数列发散.

$x_n = (-1)^{n+1}$. $1, 1, 1, \cdots \longrightarrow 1$

$-1, -1, -1, \cdots \longrightarrow -1.$

(ii) $x_{2k} \to a,\ x_{2k+1} \to a \Rightarrow x_n \to a$

(iii) 发散的数列可以有收敛的子列.

定理 4 (保号性)

$x_n \to a,\ x_n \geq 0 \Rightarrow a \geq 0.$ (√)

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

注: $x_n \to a,\ a \geq 0 \Rightarrow x_n \geq 0$ (×)

$x_n \to a,\ a > 0 \Rightarrow x_n > 0$ (√)

$x_n \to a,\ y_n \to b,\ x_n \geq y_n \Rightarrow a \geq b$ (√)

练习: 证: $x_n = (-1)^{n+1}$ 发散.