第二章 复习.

1. 定义:

(1) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的导数:

$$f'(x_0)=\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(2) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的微分

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

$$dy\big|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x$$

注:(1) $f(x)$ 可微 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 可导.

$$dy=f'(x)\,dx \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx}=f'(x)$$

(2) 导数的几何意义:

$y=f(x)$, $x=x_0$

$f'(x_0)$: 曲线上 x_0 点处的切线的斜率.

切线: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

法线: $y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

(3) 高阶导数

2. 求导数的方法

(1) 定义法: 分段点处的导数, 抽象函数在指定点的导数

(2) 四则运算法则: 前提是每个函数都是可导的.

(3) 基本求导公式

$$(\tan x)'=\sec^2 x.\qquad (\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

(4) 链式法则: 一气呵成!

(5) 隐函数求导: 方程两边同时关于自变量求导.

(6) 参变量函数的求导: dy $\quad \frac{dy}{}$ $\quad \psi'(t)$

(5) 隐函数求导：方程两边同时对x求导，自变量求导.

(6) 参变量函数的求导： $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\triangleq f(t)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(f(t))}{\frac{dx}{dt}}$$

(7) 对数求导法 $\left\{\begin{array}{l}\text{幂指函数}\\ \text{多个因式乘积}\end{array}\right.$

例1. $f(x)$ 可导, $F(x)=f(x)(1+|x|)$. 若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则必有(　　).

A. $f(0)$.　　　　B. $f'(0)=0$

C. $f(0)+f'(0)=0$.　　　　D. $f(0)-f'(0)=0$

解：

$$F(x)=\begin{cases} f(x)(1+x), & x>0\\ f(0), & x=0\\ f(x)(1-x), & x<0\end{cases}$$

$$F'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)(1-x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-f(x)\right]=f'(0)-f(0)$$

$$F'_+(0)=f'(0)+f(0)$$

$F'(0)$ 存在 $\Leftrightarrow F'_-(0)=F'_+(0)\Rightarrow f(0)=0$

例2. $\forall x, y$. 都有 $f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$.

$f(0)=0$, $g(0)=1$, $f'(0)=1$. $g'(0)=0$. 求 $f'(x)$.

解：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ ✓\qquad =\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)g(\Delta x)+f(\Delta x)g(x)-f(x)-f(0)g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\left[f(x)\cdot\frac{g(\Delta x)-g(0)}{\Delta x}+g(x)\cdot\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\right]$$

$= f(x)g'(0) + g(x)f'(0)$

$= g(x).$

例3. 设 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续. 分别讨论下列函数在 $x=a$ 处是否可导?

(1) $f(x) = (x-a)\varphi(x)$;

(2) $f(x) = |x-a|\varphi(x)$;

(3) $f(x) = (x-a)|\varphi(x)|$.

注: 不能用求导法则, 只能用导数定义.

例4. 求导数

(1) $y = \dfrac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$, 求 y'. y''.

$\ln y = x\ln\sin x + \ln x$ (X)

(2) $y = (\sin x)^x + x$. 求 y'.

(3) $y = e^{\sin^2\frac{1}{x}}$. 求 $y' = e^{\sin^2\frac{1}{x}} \cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}\, e^{\sin^2\frac{1}{x}}$.

(4) $y = f(1-\cos x)$. $f''(x)$ 存在. 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$y' = f'\cdot(\sin x) = \sin x\, f'$

$y'' = \cos x\, f' + \sin^2 x\, f''$

$f' = f'(1-\cos x)$

(5) $y = x^2 f\left(\sin\frac{1}{x}\right)$. f'' 存在. 求 y''.

(5) $y=x^2 f\left(\sin\frac{1}{x}\right)$. f''存在. 求 y''.

$y' = 2xf - \cos\frac{1}{x}\cdot f'$

$y'' = 2f + 2x\, f'\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \sin\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) f' - \cos\frac{1}{x}\cdot f''\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= 2f - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x}\, f' - \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x} f' + \frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x} f''$

(6) $y = x^2 e^{-x}$. 求 $y^{(n)}$.

$y^{(n)} = \left(e^{-x}\right)^{(n)} x^2 + C_n^1\left(e^{-x}\right)^{(n-1)}\left(x^2\right)' + C_n^2\left(e^{-x}\right)^{(n-2)}\left(x^2\right)''$

$= (-1)^n e^{-x}\cdot x^2 + n(-1)^{n-1} e^{-x}\cdot 2x + 2C_n^2(-1)^{n-2}e^{-x}$

$= (-1)^{n-2} e^{-x}\left(x^2 - 2nx + n(n-1)\right)$

例 证明: 双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴所构成的三角形的面积为 $2a^2$.

证: (1) 切线 (x_0, y_0) $x_0, y_0 > 0$

(2) 截距 a. b

(3) 面积: $S = \frac{1}{2}ab$