由于此式中的积分有确定的值，所以可得

$$M=\sigma T^4$$

σ 为由 k、c、h 和积分值决定的常量。此即斯特藩-玻耳兹曼定律。（实际上该积分值为 $\pi^4/15$。于是 $\sigma=2\pi^5k^4/15c^2h^3=5.67\times10^{-8}\ \mathrm{W/m^2\cdot K^4}$。）

26.11　铝的逸出功是 4.2 eV，今用波长为 200 nm 的光照射铝表面，求：

(1) 光电子的最大动能；

(2) 截止电压；

(3) 铝的红限波长。

解　(1) $E_{k,m}=h\nu-A=h\dfrac{c}{\lambda}-A=\dfrac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{200\times10^{-9}\times1.6\times10^{-19}}-4.2=2.0\ \mathrm{eV}$

(2) $U_c=E_{k,m}/e=2.0/1=2.0\ \mathrm{V}$

(3) $\lambda_0=\dfrac{c}{\nu_0}=\dfrac{hc}{A}=\dfrac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}{4.2\times1.6\times10^{-19}}=2.96\times10^{-7}\ \mathrm{m}=296\ \mathrm{nm}$

26.12　银河系间宇宙空间内星光的能量密度为 $10^{-15}\ \mathrm{J/m^3}$，相应的光子数密度多大？假定光子的平均波长为 500 nm。

解　$N=\dfrac{w}{h\nu}=\dfrac{w\lambda}{hc}=\dfrac{10^{-15}\times500\times10^{-9}}{6.63\times10^{-34}\times3\times10^8}=2.5\times10^3$（个/$\mathrm{m^3}$）

26.13　在距功率为 1.0 W 的灯泡 1.0 m 远的地方垂直于光线放一块钾片（逸出功为 2.25 eV）。钾片中一个电子要从光波中收集到足够的能量以便逸出，需要多长时间？假设一个电子能收集入射到半径为 1.3×10^{-10} m（钾原子半径）的圆面积上的光能量。（注意，实际的光电效应的延迟时间不超过 10^{-9} s。）

解　按连续的波进行计算，应有

$$A=\frac{P}{4\pi R^2}\pi r^2 t$$

所求时间为

$$t=\frac{4R^2A}{Pr^2}=\frac{4\times1^2\times2.25\times1.6\times10^{-19}}{1.0\times(1.3\times10^{-10})^2}=85\ \mathrm{s}$$

***26.14**　在实验室参考系中一光子能量为 5 eV。一质子以 $c/2$ 的速度和此光子沿同一方向运动。在此质子参考系中，此光子的能量多大？

解　设想在实验室参考系 S 中在原点 O 处固定一光源，沿 $+x$ 方向发射光子，频率为 ν_0。质子在 $x>0$ 处沿 $+x$ 方向以速率 $u=c/2$ 运动。在质子参考系中，光源沿 $-x'$ 方向以 $u=c/2$ 运动。由于多普勒效应，质子参考系测得的频率将为

$$\nu=\sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}}\nu_0$$

而光子的能量为

$$h\nu=\sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}}h\nu_0=\sqrt{\frac{1-1/2}{1+1/2}}\times5=\frac{5}{\sqrt{3}}=2.9\ \mathrm{eV}$$

26.15　入射的 X 射线光子的能量为 0.60 MeV，被自由电子散射后波长变化了 20%。

求反冲电子的动能。

解 散射后光子波长增大，所以散射后光子的波长为 $\lambda=1.2\lambda_0$，其能量为

$$E=\frac{hc}{\lambda}=\frac{hc}{1.2\lambda_0}=\frac{h\nu_0}{1.2}=\frac{E_0}{1.2}$$

由能量守恒知，反冲电子的动能为

$$E_e=E_0-\frac{E_0}{1.2}=\frac{E_0}{6}=\frac{0.60}{6}=0.10\ \mathrm{MeV}$$

√**26.16** 一个静止电子与一能量为 4.0×10^3 eV 的光子碰撞后，它能获得的最大动能是多少？

解 当光子与电子发生正碰而折回时，能量损失最大。这时光子的波长为 $\lambda=\lambda_0+2h/m_ec$，而能量为

$$E=\frac{hc}{\lambda}=\frac{hc}{\lambda_0+2h/m_ec}=\frac{hc}{hc/E_0+2h/m_ec}=\frac{E_0m_ec^2}{m_ec^2+2E_0}$$

此碰撞后，电子获得的能量最大，为

$$E_e=E_0-E=E_0\left(1-\frac{m_ec^2}{m_ec^2+2E_0}\right)$$

$$=4.0\times10^3\left(1-\frac{0.511\times10^6}{0.511\times10^6+2\times4\times10^3}\right)=62\ \mathrm{eV}$$

***26.17** 用动量守恒定律和能量守恒定律证明：一个自由电子不能一次完全吸收一个光子。

证 在自由电子原来静止的参考系内考虑，如果此电子一次完全吸收一个光子，则能量守恒与动量守恒将分别给出

$$m_0c^2+h\nu=mc^2$$

和

$$mv=h\nu/c$$

消去 $h\nu$，可得

$$m_0=m(1-v/c)=\frac{m_0(1-v/c)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

即

$$\sqrt{1-v^2/c^2}=1-v/c$$

此式将给出 $v=0$ 或 $v=c$，这都是不可能的。因而上列能量守恒和动量守恒式不能同时满足。这也就说明自由电子不能一次完全吸收一个光子。

***26.18** 一能量为 5.0×10^4 eV 的光子与一动能为 2.0×10^4 eV 的电子发生正碰，碰后光子向后折回。求碰后光子和电子的能量各是多少？

解 以 E 和 p 分别表示光子碰后的能量和动量，以 E_e 和 p_e 分别表示电子碰后的能量和动量，则对碰撞过程利用能量守恒和动量守恒可分别得出

$$E_0+E_{e0}=E+E_e$$
$$p_0-p_{e0}=-p+p_e$$

由动量和能量关系可得

$$p_0=E_0/c,\quad p=E/c$$

$$p_{e0}=\frac{1}{c}\sqrt{E_{e0}^2-(m_ec^2)^2},\quad p_e=\frac{1}{c}\sqrt{E_e^2-(m_ec^2)^2}$$

将此四式代入前二式，联立求解，可得

$$E_e=\frac{(2E_0+E_{e0}-\sqrt{E_{e0}^2-m_e^2c^4})^2+m_e^2c^4}{2(2E_0+E_{e0}-\sqrt{E_{e0}^2-m_e^2c^4})}$$

式中 $m_ec^2=5.11\times10^5$ eV，$E_{e0}=E_{k0}+m_ec^2=2.0\times10^4+5.11\times10^5=5.31\times10^5$ eV，$E_0=5\times10^4$ eV，代入可得

$$E_e=\frac{[2\times5.0\times10^4+5.31\times10^5-\sqrt{(5.31\times10^5)^2-(5.11\times10^5)^2}]^2+(5.11\times10^5)^2}{2\times[2\times5.0\times10^4+5.31\times10^5-\sqrt{(5.31\times10^5)^2-(5.11\times10^5)^2}]}$$
$$=5.12\times10^5\ \text{eV}$$

而电子碰后的动能为

$$E_{ek}=E_e-m_ec^2=5.12\times10^5-5.11\times10^5=0.1\times10^4\ \text{eV}$$

碰后光子的能量为

$$E=E_0+E_{e0}-E_e=5\times10^4+5.31\times10^5-5.12\times10^5=6.9\times10^4\ \text{eV}$$

26.19 电子和光子各具有波长 0.20 nm。它们的动量和总能量各是多少？

解 电子和光子的动量都是

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{6.63\times10^{-34}}{0.20\times10^{-9}}=3.32\times10^{-24}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

电子的总能量为

$$E_e=\sqrt{(pc)^2+(m_0c^2)^2}=\sqrt{(3.32\times10^{-24}\times3\times10^8)^2+(0.911\times10^{-30}\times9\times10^{16})^2}$$
$$=8.19\times10^{-14}\ \text{J}=5.12\times10^5\ \text{eV}$$

光子的能量为

$$E=pc=3.32\times10^{-24}\times3\times10^8=9.9\times10^{-16}\ \text{J}=6.19\times10^3\ \text{eV}$$

26.20 室温(300 K)下的中子称为热中子。求热中子的德布罗意波长。

解 在室温下中子的平均动能

$$E_k=\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}\times300=6.21\times10^{-21}\ \text{J}$$

中子的静能为

$$E_0=m_nc^2=1.67\times10^{-27}\times9\times10^{16}=1.50\times10^{-10}\ \text{J}$$

由于 $E_k\ll E_0$，所以可以不考虑相对论效应而得

$$\lambda=\frac{h}{\sqrt{2m_nE_k}}=\frac{6.63\times10^{-34}}{\sqrt{2\times1.67\times10^{-27}\times6.21\times10^{-21}}}$$
$$=1.46\times10^{-10}\ \text{m}=0.146\ \text{nm}$$

26.21 一电子显微镜的加速电压为 40 keV，经过这一电压加速的电子的德布罗意波长是多少？

解 由于 40 keV 比电子的静能 511 keV 小许多，所以可以不考虑相对论效应而得

$$\lambda=\frac{h}{\sqrt{2m_eE_k}}=\frac{6.63\times10^{-34}}{\sqrt{2\times0.91\times10^{-30}\times4\times10^4\times1.6\times10^{-19}}}=6.1\times10^{-12}\ \text{m}$$

$$\Delta t=\frac{10^{-6}}{0.5\times10^{-13}}=2\times10^{7}\ \mathrm{s}=231\ \mathrm{h}=9.6\ \mathrm{d}$$

差不多10天。10天内走了1 μm，在宏观上可以认为是"静止"的了。这就是牛顿力学给出的质点的位置和速度可同时"准确地"测定的概念。

26.25 电视机显像管中电子的加速电压为9 kV，电子枪枪口直径取0.50 mm，枪口离荧光屏的距离为0.30 m。求荧光屏上一个电子形成的亮斑直径。这样大小的亮斑影响电视图像的清晰度吗？

解 取$\Delta y=0.50$ mm。则由不确定关系得

$$\Delta p_y=\frac{\hbar}{2\Delta y}$$

而

$$p_x=\sqrt{2m_eE}$$

荧光屏上亮斑直径为d，则$\dfrac{\frac{d}{2}}{l}=\dfrac{\Delta p_y}{p_x}$，由此得

$$d=\frac{2\Delta p_y}{p_x}l=\frac{\hbar l}{\Delta y p_x}=\frac{\hbar l}{\Delta y\sqrt{2m_eE}}$$
$$=\frac{1.05\times10^{-34}\times0.30}{0.5\times10^{-3}\times\sqrt{2\times9.1\times10^{-31}\times9\times10^{3}\times1.6\times10^{-19}}}$$
$$=1.2\times10^{-9}\ \mathrm{m}=1.2\ \mathrm{nm}$$

此亮斑的大小不会影响当前电视图像的清晰度。

又，亮斑直径也可用波的衍射来求。以θ表示亮斑的角半径，则

$$d=2\theta l=2\times\frac{1.22\lambda l}{\Delta y}=\frac{2.44hl}{\Delta y p}=\frac{2.44\times2\pi\hbar l}{\Delta y\sqrt{2m_eE}}\approx\frac{\hbar l}{\Delta y\sqrt{2m_eE}}$$

26.26 卢瑟福的α散射实验所用α粒子的能量是7.7 MeV。α粒子的质量为6.7×10^{-27} kg。所用α粒子的波长是多少？对原子的线度10^{-10} m来说，这种α粒子能像卢瑟福做的那样按经典力学处理吗？

解 α粒子的静能为

$$E_0=mc^2=6.7\times10^{-27}\times9\times10^{16}=3.8\times10^{4}\ \mathrm{MeV}$$

由于$E\ll E_0$，所以可按经典力学求其动量，而其波长为

$$\lambda=\frac{h}{\sqrt{2mE}}=\frac{6.63\times10^{-34}}{\sqrt{2\times6.7\times10^{-27}\times7.7\times10^{6}\times1.6\times10^{-19}}}=5.2\times10^{-15}\ \mathrm{m}$$

由于$\lambda\ll10^{-10}$ m，所以可以把α粒子当做经典粒子处理。

26.27 为了探测质子和中子的内部结构，曾在斯坦福直线加速器中用能量为22 GeV的电子做探测粒子轰击质子。这样的电子的德布罗意波长是多少？质子的线度为10^{-15} m。这样的电子能用来探测质子内部的情况吗？

解 所用电子能量(22 GeV)大大超过电子的静能(0.51 MeV)，所以需用相对论计算其动量，$p=E/c$。而其德布罗意波长为

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{hc}{E}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{22\times10^{8}\times1.6\times10^{-19}}=5.7\times10^{-17}\ \mathrm{m}$$