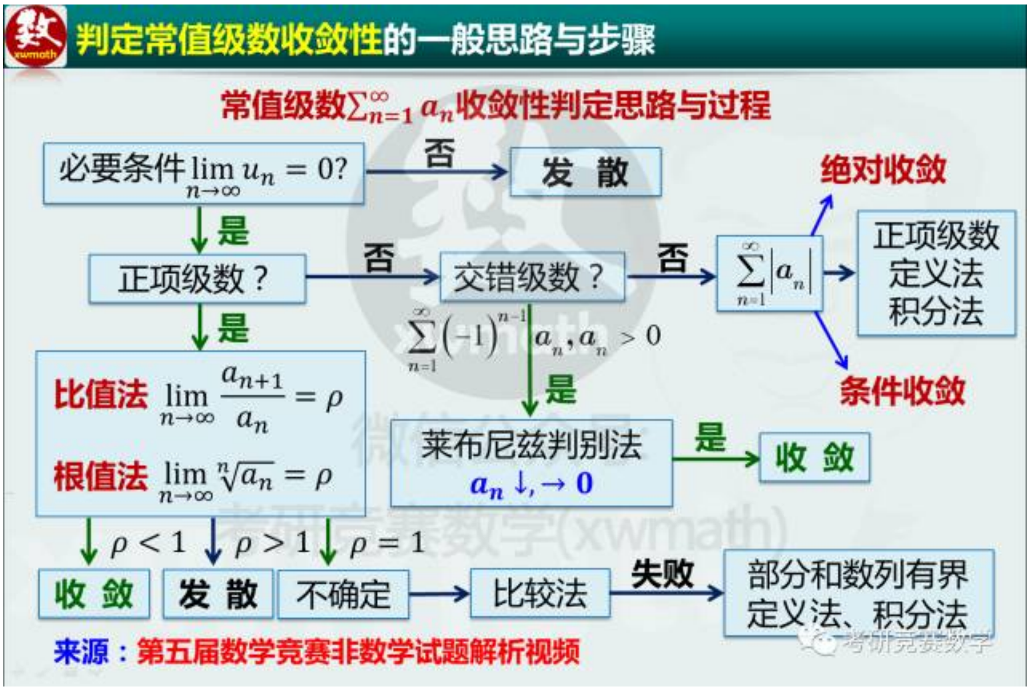
判别常值级数敛散性的基本思路与步骤



相关结论：

几何级数(等比级数)：当公比|q|<1时，级数收敛，并且有

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}(|q|<1).$$

当|q|⩾1时发散.

自然常数：

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}.$$

注意以上两个和从n=0开始.

p−级数：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}: \begin{array}{l} 当p>1时，收敛 \\ 当0<p\le 1时，发散 \end{array}$$

并且当p=1时，级数称为调和级数，即调和级数是发散级数.

定义1　对于级数$\sum a_n$，若其部分和**数列$\{S_n\}$收敛**，且极限为s，则称**级数$\sum a_n$收敛**，s称为该级数的**和**，记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s .$$

若部分和数列$\{S_n\}$发散，则称级数$\sum a_n$发散.

定理1 (级数收敛的必要条件)设级数$\sum a_n$收敛，则有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

定理2 设级数$\sum a_n$和$\sum b_n$收敛，则级数$\sum(\alpha a_n \pm \beta b_n)$也收敛($\alpha\beta\neq 0$)，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n \pm \beta b_n) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \beta\sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

定理3 增加或减少级数$\sum a_n$中的有限项不改变原级数的收敛性，换句话说，级数的收敛性与前有限项无关.

定理4 设级数$\sum a_n$收敛，则在不改变级数项前后位置的条件下，任意结合级数的有限项得到新级数，则新级数也收敛，且和不变.

定理5 (正项级数收敛的充要条件)设$\sum a_n$为正项级数，则$\sum a_n$收敛的充要条件是其部分和数列$\{S_n\}$有界，即存在不依赖于n的正常数M，使得

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le M \ (n = 1, 2, \cdots)$$

定理6 (比较判别法的不等式形式)设$\sum a_n$和$\sum b_n$均为正项级数，且在某一项N之后成立$a_n \leqslant b_n (n=N,N+1,\ldots)$，则有

(1) 当级数$\sum b_n$收敛时，级数$\sum a_n$也收敛；

(2) 当级数$\sum a_n$发散时，级数$\sum b_n$也发散.

定理7 (比较判别法的极限形式)设$\sum a_n$和$\sum b_n$均为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \rho ,$$

则(1) 当$0<\rho<+\infty$时，级数$\sum a_n$和$\sum b_n$有相同的敛散性；

(2) 当$\rho=0$时，如果级数$\sum b_n$收敛，那么$\sum a_n$收敛；

(3) 当$\rho=+\infty$时，如果级数$\sum b_n$发散，那么$\sum a_n$发散.

定理8（比值判别法）设Σa_n为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho\ (\rho\geq 0),$$

则(1) 当$0\leq\rho<1$时，级数Σa_n收敛；
(2) 当$\rho>1$时，级数Σa_n发散；
(3) 当$\rho=1$时，级数Σa_n敛散性不确定.(即方法失败)

定理9（根值判别法）设Σa_n为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho\ (\rho\geq 0),$$

则(1) 当$0\leq\rho<1$时，级数Σa_n收敛；
(2) 当$\rho>1$时，级数Σa_n发散；
(3) 当$\rho=1$时，级数Σa_n敛散性不确定.(即方法失败)

定理10（莱布尼兹判别法）对于交错级数$\Sigma(-1)^{n-1}a_n(a_n>0)$，若满足$\{a_n\}$单调减少趋于0，则交错级数$\Sigma(-1)^n a_n$收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\leq a_1 .$$

定理11 若级数$\Sigma|a_n|$收敛，则级数Σa_n一定收敛，且

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| .$$

定义2　若级数$\Sigma|a_n|$收敛，则称级数Σa_n为绝对收敛.
若级数Σa_n收敛，而级数$\Sigma|a_n|$发散，则称级数Σa_n为条件收敛.