第七章 无穷级数

§1. 常数项级数的概念与性质

1. 概念

(1) 无穷级数：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum u_n$ "形式和"

(2) 部分和数列 $\{S_n\}$：$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$

(3) 级数的敛散性：若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (有限值)，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 S 称为级数的和，即

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

否则，称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例1. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ $(a\neq 0)$ 的敛散性

解：$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$

当 $q\neq 1$ 时，

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

$|q|<1$，$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$，$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} = S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 收敛

$|q|>1$，$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$，$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 发散

$q=1$：$S_n = na \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. $\Rightarrow \sum aq^{n-1}$ 发散

$q=-1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a(-1)^{n-1} = a - a + a - a + \cdots \Rightarrow \sum aq^{n-1}$ 发散.

综上，等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ $\begin{cases} \text{收敛}, & |q|<1, \\ \text{发散}, & |q|\geq 1. \end{cases}$

例2. 讨论敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1} \frac{1}{n(n+2)}$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

解：(1) $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = 1 = S$ （裂项相消）

(2) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$S_n = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$= \sqrt{n+1} - 1 \longrightarrow \infty \quad (n\to\infty)$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 发散.

(3) $u_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right]$$

2. 性质

性质1　若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛；

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 发散，$k \neq 0$.

证：$\sigma_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1+u_2+\cdots+u_n)$

$$= kS_n$$

注：$\sum u_n$. $\sum ku_n$ 同敛散.

性质2. 若 $\sum u_n$. $\sum v_n$ 收敛，则 $\sum(u_n \pm v_n) = \sum u_n \pm \sum v_n$

注：(1) 若 $\sum u_n$ 发散，$\sum v_n$ 收敛，则 $\sum(u_n \pm v_n)$ 发散.

证：假设 $\sum(u_n+v_n)$ 收敛，则

$\sum u_n = \sum (u_n + v_n - v_n)$ 收敛，

与已知矛盾.

(ii) 若 $\sum u_n$，$\sum v_n$ 发散，则 $\sum (u_n \pm v_n)$ 不确定.

(1) $u_n = 1$, $v_n = -1$: $u_n + v_n = 0$ $\sum (u_n + v_n)$ 收

(2) $u_n = 1$, $v_n = (-1)^n$: $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n)$

$= 2 + 2 + \cdots$ 发散

性质3 添加、删除或改变有限项所得的新级数敛散性不变.

注：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots$

$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} u_i}_{常数} + \sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i}$

性质4. 对收敛级数任意加括号后得到的新级数仍然收敛且收敛到原级数的和.

注. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \underbrace{(u_1 + \cdots + u_{n_1})}_{v_1} + \underbrace{(u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2})}_{v_2} + \underbrace{(u_{n_2+1} + \cdots + u_{n_3})}_{v_3} + \underbrace{u_{n_3+1} + \cdots + u_{n_4}}_{v_4} + \cdots$

$\sum_{m=1}^{\infty} v_m = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \cdots$

注：收敛级数去掉括号得到的级数敛散不确定.

如 $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$ 收敛

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ 发散.

性质5 (收敛的必要条件)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

证：$u_n = S_n - S_{n-1}$

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

注：(1) $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum u_n$ 发散

(用于判断级数发散)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 不能用于判断级数收敛.

例. 证明:调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

证:

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{32}\right)+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$> \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{2}+\cdots}+\frac{1}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$

$\therefore \sum\frac{1}{n}$ 发散.