§7. 无穷小的比较

1. 定义：$\lim \alpha(x)=0$. $\lim \beta(x)=0$

(1) $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$

(2) $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$, 则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

(3) $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=C\neq 0$. 则称 α 与 β 是同阶无穷小.

(4) $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha^k(x)}=C\neq 0$, 则称 β 是 α 的 k 阶无穷小.

(5) $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$, 则称 α 与 β 是等价无穷小. 记作 $\alpha\sim\beta$.

注：当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x \sim x \sim \arcsin x$$
$$\tan x \sim x \sim \arctan x$$
$$\ln(1+x) \sim x \sim e^x-1$$
$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

2. 定理.（等价无穷小替换定理）$\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$. $\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在. 则

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$$

证明：
$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim\left(\underset{\downarrow\atop 1}{\frac{\alpha}{\alpha'}} \cdot \underline{\frac{\alpha'}{\beta'}} \cdot \underset{\downarrow\atop 1}{\frac{\beta'}{\beta}}\right) = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$$

Eg1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\downarrow} \cdot 2\cancel{x} \cdot \underbrace{\frac{3x}{\sin 3x}}_{\downarrow} \cdot \underset{\downarrow}{\cos 3x} \cdot \frac{1}{3\cancel{x}} = \frac{2}{3}$$

例: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\downarrow\, 1}\cdot \cancel{2x}\cdot\underbrace{\frac{3x}{\sin 3x}}_{\downarrow\, 1}\cdot\underbrace{\cos 3x}_{\downarrow\, 1}\cdot\frac{1}{3\cancel{x}} = \frac{2}{3}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

注: (i) 最快地化简极限式！

(ii) 等价无穷小替换必须在乘积中应用.

例: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} \cancel{=} \lim \frac{x - x}{x^3} = 0$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}$

$\Downarrow$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}.$

(iii) 非零极限直接写出来.