7.3幂级数

2017年12月27日　10:00

1. 函数项级数

1) 定义：　$u_1(x),\ u_2(x),\ \cdots,\quad x\in I$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \qquad (*)$$

2) 收敛与发散.

$x_0 \in I$.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则x_0称为$(*)$的收敛点，收敛点的集合称为收敛域

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散，则x_0称为$(*)$的发散点，发散点的集合称为发散域.

3) 和函数.　$\forall x\in$ 收敛域

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

例1. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$ 的收敛域.

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{n+1}\cdot n\,(1+x)^n\right| = \frac{1}{|1+x|}$$

当 $\frac{1}{|1+x|}<1$，即 $x>0$，$x<-2$ 时　$\sum |u_n(x)|$ 收敛 $\Rightarrow \sum u_n(x)$ 绝对收敛.

当 $\frac{1}{|1+x|}>1$，即 $-2<x<0$ 时　$\sum |u_n(x)|$ 发散.

从N项开始　$|u_{n+1}(x)| > |u_n(x)| \Rightarrow |u_n(x)| \not\to 0$

$\Rightarrow u_n(x) \not\to 0$

$\Rightarrow \sum u_n(x)$ 发散.

当 $x=-2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

当 $x=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛.

∴ 收敛域：$(-\infty,-2)\cup[0,+\infty)$

例2. 求收敛域

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$　(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$　(3) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$

解：(1) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x| < 1$　∴ $-1<x<1$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$　∴ $-\infty<x<+\infty$

(3) $x=0$

2. 幂级数

定义1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

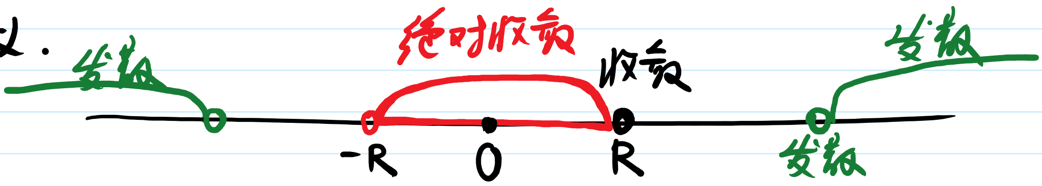
其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 幂级数的系数

定理1（阿贝尔定理）

(i) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0$ 收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对满足 $|x|<|x_0|$ 的 x 绝对收敛.

(ii) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0$ 发散，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对满足 $|x|>|x_0|$ 的 x 发散.

几何意义.



注：(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是以原点为中心的区间.

(2) 用 $\pm R$ 表示发散与收敛的分界点. 则

$R=0$,　$\sum a_n x^n$ 仅在 $x=0$ 处收敛；

$R=+\infty$,　$\sum a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛；

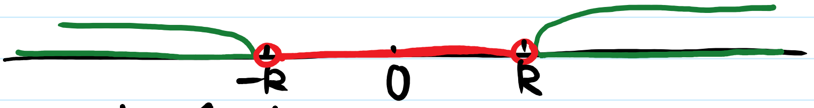
$0<R<+\infty$,　$\sum a_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 内绝对收敛，

$R=+\infty$, $\sum a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内绝对收敛,

$0<R<+\infty$, $\sum a_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 内绝对收敛,

在 $[-R,R]$ 外发散

在 $x=\pm R$ 可能发散, ~~也~~ 能收敛.



R - 称为收敛半径

$(-R,R)$ - 收敛区间.

定理 2 (确定收敛半径) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$

则
$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \quad \text{收敛区间 } (-R,R) \\ +\infty, & \rho = 0 \quad \text{收敛域 } (-\infty,+\infty) \\ 0 & \rho = +\infty \quad \text{仅在 } x=0 \text{ 处收敛.} \end{cases}$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \rho|x|$

当 $\rho|x|<1$, 即 $|x|<\dfrac{1}{\rho}$ 时 $\sum a_n x^n$ 绝对收敛.

当 $\rho|x|>1$, $|x|>\dfrac{1}{\rho}$ 时 $\sum a_n x^n$ 发散.

$\therefore$ 收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}$.

注: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

例3. 求收敛域

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ (3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

解: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 = \rho \Rightarrow R=1$

$\left\{\begin{array}{l}(2n)!! \\ (2n)!\end{array}\right.$

$x=\pm1$ $\sum x^n$ 发散

$\therefore$ 收敛域 $(-1,1)$

(2) $R=\lim\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\left|\dfrac{1}{n!}(n+1)!\right| = +\infty$

∴ 收敛域 $(-1, 1)$

(2) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{n!}(n+1)!\right| = +\infty$

∴ 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$

$0! = 1$

$1! = 1$

例4. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ 的收敛半径.

解：法1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\overset{(2n+2)!}{[2(n+1)]!}}{[(n+1)!]^2} \cdot \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot x^2$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} x^2 = 4x^2$

当 $4x^2 < 1$ 时， $|x| < \frac{1}{2}$ 　　级数绝对收敛.

$4x^2 > 1$ 　　$|x| > \frac{1}{2}$ 　　发散

$R = \dfrac{1}{2}$

法2. 令 $x^2 = t$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} t^n$

t： $R = \dfrac{1}{4}$

x： $R = \dfrac{1}{2}$

例5 求收敛域 　　$x - x_0 = t$

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2} (x-1)^n$ 　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n \cdot 3^n} (x+2)^n$

解：(1) 令 $x-1 = t$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2} t^n$

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$

$t = 1$： $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2}$ 收敛 　($p=2$ 的 p-级数)

$t = -1$： $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ 收敛.

∴ $-1 \le t \le 1$

$-1 \le x-1 \le 1$

∴ $0 \le x \le 2$

3. 幂级数的运算

(1) 四则运算. $\sum a_n x^n$, R_1; $\sum b_n x^n$, R_2

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \quad R=\min(R_1, R_2)$$

(2) 微积分性质.

定理3 (逐项可积. 逐项可导)

$$\underline{S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,} \quad -R<x<R$$

(i) $S(x)$ 在$(-R, R)$内连续. 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在端点收敛, 则 $S(x)$ 单侧连续;

(ii) $S(x)$ 在$(-R, R)$内可导, 且任意阶可导.

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(iii) $S(x)$ 在$(-R, R)$内可积, 且

$$\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

注: (i) $S(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x S(t)\,dt$ 积分 $\to$ 微分

(ii) $S(x) = \int_0^x S'(t)\,dt + S(0)$ 微分 $\to$ 积分

例6. 求和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n$

注: 两步: 第一步: 求收敛域;

第二题：求和函数.

解：(1) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n}\cdot(n+1)\right|=1$

$x=1$. $\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛

$x=-1$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{n}$ 发散 $\quad\therefore\ -1<x\leq 1$

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$，则 $S(0)=0$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

$$=\frac{1}{1+x}$$

$$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt+S(0)=\ln(1+t)\Big|_0^x=\ln(1+x),$$

$-1<x\leq 1$.

(2) $-1<x<1$

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$，则

$$S(x)=\underline{x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$$

$$=x\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},$$

(3) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n+1}\cdot n+2\right|=1$ $\quad -1<x<1$.

$x=1$. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ 发散

$x=-1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛 $\quad\therefore\ -1\leq x<1$

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}x^n$，则

$$=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots$$

$$xS(x)=\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}},\quad x\neq 0$$

令 $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, $[-1,1)$. $T(0)=0$

$$T'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=\frac{1}{1-x}$$

$$\therefore\ T(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt+\underline{T(0)}$$

$$=-\ln(1-x)$$

$$\therefore\ S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x). & x\neq 0,\ [-1,0)\cup(0,1)\\ 1, & x=0\end{cases}$$

例7. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

解：令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\underline{(n+1)x^n}$, $-1<x<1$, 则

$$S(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n+1}\right)'=\left(x^2\underline{\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}}\right)'$$

$$=\left[x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'\right]'=\left[x^2\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right]'$$

$$=\frac{2x}{(1-x)^3}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}=S\left(\tfrac{1}{2}\right)=8.$$

记：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e.$