1.3函数的极限

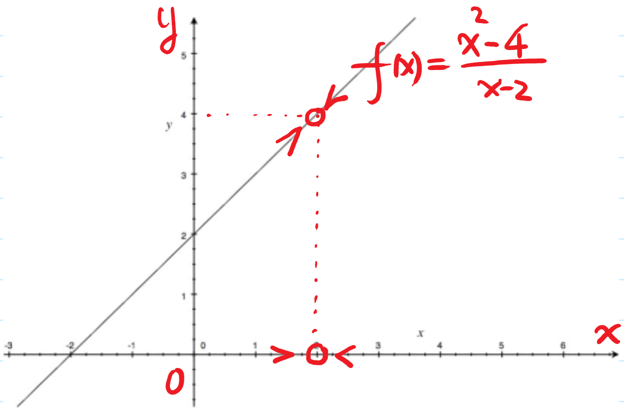
2017年9月22日 8:42

§3. 函数的极限

1. 当 $x \to x_0$ (有限数) 时函数的极限

例0. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$

分析: $x \to 2$, $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ 无限地接近于4



一般地, 当 $x \to x_0$ 时, $f(x) \to A$.

则称 A 为当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限.

定义1: $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义,
对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限为 A.

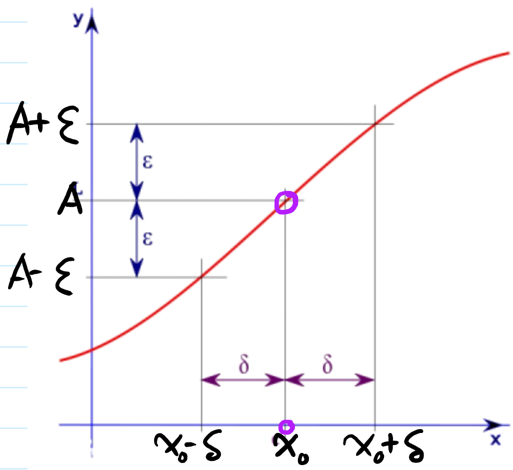
说明: (i) $f(x)$ 在 x_0 点可以没有定义.
即使有定义, 与极限是否存在也没有关系.

(ii) 几何意义

$$0 < |x - x_0| < \delta \iff (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon \iff A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon \iff A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$



例1. $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$ (C常数)

证: $\forall \varepsilon>0$. $0<|x-x_0|<\delta$

$$|f(x)-A| = |C-C| = 0 < \varepsilon$$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} C = C$.

例2. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$.

证: $\forall \varepsilon>0$, $0<|x-1|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

$$|(2x-1)-1| = \underline{2|x-1| < \varepsilon}$$

注: $\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b) = ax_0+b$

$\lim\limits_{x\to x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$. $P_n(x)$ - n次多项式.

定义2 (单侧极限)

左极限: $f(x_0-0)=f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

右极限：$f(x_0+0)=f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$

注：(i) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \iff \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$.

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

例3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在.

证：$\left.\begin{aligned}&\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1\\&\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\frac{-x}{x}=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在.

注：$x=0$ 一分段点.

分段点处的极限必须用<u>定义</u>或<u>单侧极限</u>！

2. 当 $x\to\infty$ 时函数的极限

$(x\to\infty,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty)$

定义3 $(x\to+\infty)$

$f(x)$ 定义在 $[C,+\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

$\iff\forall\varepsilon>0.\ \exists X>0.$ 当 $x>X$ 时 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

注：水平渐近线：$y=A$.

2. 性质.

定理 1 （唯一性）

定理 2 （有界性） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow \exists M>0.\ s.t.\ |f(x)| \le M$

$x \in \mathring{U}(x_0)$

定理 3 （保号性）

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A.\quad f(x) \ge 0 \Rightarrow A \ge 0.$

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A.\quad A>0 \Rightarrow f(x)>0.\quad x\in \mathring{U}(x_0).$

定理 4. （数列极限与函数极限的关系）