解 $\Delta x' = \Delta x\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}} = l\cos\theta\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}$

$\Delta y' = \Delta y = l\sin\theta$

在 S' 系中棒长为

$$l' = \sqrt{(\Delta x')^2+(\Delta y')^2} = l\left(1-\cos^2\theta\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

l' 与 x' 轴的夹角为

$$\theta' = \arctan\frac{l\sin\theta}{l\cos\theta\sqrt{1-u^2/c^2}} = \arctan\left[\tan\theta\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right]$$

8.2 静止时边长为 a 的正立方体，当它以速率 u 沿与它的一个边平行的方向相对于 S' 系运动时，在 S' 系中测得它的体积将是多大？

解 在 S' 系中立方体平行于运动方向的边长将被测为长 $a' = a\sqrt{1-u^2/c^2}$，垂直于运动方向的其他两边边长仍为 a 不变。于是立方体的体积被测得为

$$V = a'a^2 = a^3\sqrt{1-u^2/c^2}$$

8.3 S 系中的观察者有一根米尺固定在 x 轴上，其两端各装一手枪。固定于 S' 系中的 x' 轴上有另一根长刻度尺。当后者从前者旁边经过时，S 系的观察者同时扳动两枪，使子弹在 S' 系中的刻度上打出两个记号。求在 S' 尺上两记号之间的刻度值。在 S' 系中观察者将如何解释此结果？

解 两枪打出两个记号的事在 S 系和 S' 系中的坐标分别为 (x_1,t_1)，(x_2,t_2) 和 (x'_1,t'_1)，(x'_2,t'_2)（图 8.2），由洛伦兹变换

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2-x_1)-u(t_2-t_1)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

由于 $t_2 = t_1$，$x_2 - x_1 = 1$ m，所以有 S' 尺上两记号之间的距离为

$$x'_2 - x' = 1/\sqrt{1-u^2/c^2} > 1\ \text{m}$$

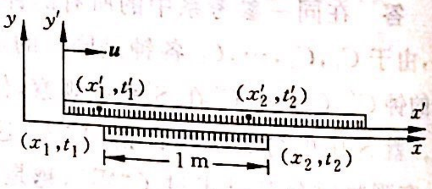

图 8.2 习题 8.3 解用图

在 S' 系中的观察者测量，两枪打出记号并不是同时发生的，而是米尺沿 $-x'$ 方向运动的后端，即 x_2 端的那支枪先发射，x_1 端的那支枪后发射，因此在 S' 系中那一根长刻度上打出的两记号之间的距离就大于 1 m 了。

8.4 在 S 系中观察到在同一地点发生两个事件，第二事件发生在第一事件之后 2 s。在 S' 系中观察到第二事件在第一事件后 3 s 发生。求在 S' 系中这两个事件的空间距离。

解 已知在 S 系中，$x_1 = x_2$，所以

$$\Delta t' = \Delta t\Big/\sqrt{1-u^2/c^2}$$

由此得

$$u = c\sqrt{1-(\Delta t/\Delta t')^2}$$

再由洛伦兹变换可得在 S' 系中两事件的空间距离为

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = -u\Delta t' = -c\sqrt{1-(\Delta t/\Delta t')^2}\times\Delta t'$$

$$= -3\times10^8\times\sqrt{1-(2/3)^2}\times3 = -6.71\times10^8\ \text{m}$$

8.5 在 S 系中观察到两个事件同时发生在 x 轴上，其间距离是 1 m。在 S' 系中观察这两个事件之间的距离是 2 m。求在 S' 系中这两个事件的时间间隔。

解 由于在 S 系中 $\Delta t=0$，$\Delta x=1$ m，所以由洛伦兹变换

$$\Delta x'=\frac{\Delta x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

得

$$u=c\sqrt{1-(\Delta x/\Delta x')^2}$$

再由洛伦兹变换可得在 S' 系中两事件的时间间隔为

$$|\Delta t'|=\left|\frac{\Delta t-\frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right|=\frac{u}{c^2}\Delta x'=\frac{\Delta x'}{c}\sqrt{1-(\Delta x/\Delta x')^2}$$

$$=\frac{2}{3\times10^8}\sqrt{1-(1/2)^2}=5.77\times10^{-9}\ \text{s}$$

8.6 一只装有无线电发射和接收装置的飞船，正以 $u=\frac{4}{5}c$ 的速度飞离地球。当宇航员发射一无线电信号后，信号经地球反射，60 s 后宇航员才收到返回信号。

(1) 在地球反射信号的时刻，从飞船上测得的地球离飞船多远？

(2) 当飞船接收到反射信号时，地球上测得的飞船离地球多远？

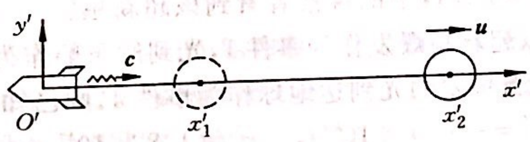

图 8.3 习题 8.6 解用图

解 (1) 在飞船上测量，无线电信号到达地球又反射回来，一去一回光速相等，所用时间也相等，都是 30 s。所以在地球反射信号时，地球离飞船的距离为

$$c\times30=9\times10^9\ \text{m}$$

(2) 在飞船上测量，在宇航员发射信号时，它离地球的距离为

$$l'=c\times30-\frac{4}{5}c\times30=6c$$

在地球上测量，在宇航员发射信号时，它离地球的距离为

$$l=l'/\sqrt{1-u^2/c^2}=6c/\sqrt{1-(4/5)^2}=10c=3\times10^9\ \text{m}$$

宇航员从发射到接收无线电信号，他自己的钟经过了 $\Delta t'=60$ s，为固有时。在地球上测量，这一段时间长为

$$\Delta t=\Delta t'/\sqrt{1-u^2/c^2}=60/\sqrt{1-(4/5)^2}=100\ \text{s}$$

在这段时间内，在原来离地球 $10c$ 的基础上，飞船又继续向前飞了

$$l_1=u\Delta t=\frac{4c}{5}\times100=80c$$

的距离。因此，在地球上测量，宇航员接收到反射信号时，飞船离地球的距离为

(2) 地球上接收到报告的时刻为

$$t_3 = t_2 + \Delta t_{23} = \frac{t'_2 + \frac{u}{c^2}x'_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \frac{x_2}{c} = \frac{t'_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \frac{ut'_2}{c\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$= \frac{t'_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\left(1+\frac{u}{c}\right) = \frac{1.2\times10^8}{\sqrt{1-0.8^2}}\left(1+\frac{0.8\times3\times10^8}{3\times10^8}\right)$$

$$= 3.6\times10^8\ \mathrm{s}$$

(3) 地球上看到超新星的时刻为

$$t_4 = t_1 + \Delta t_{14} = t_1 + \frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{c} = -2.0\times10^8 + \frac{10^{17}\sqrt{0.6^2+1.2^2}}{3\times10^8} = 2.5\times10^8\ \mathrm{s}$$

8.9 地球上的观察者发现一艘以速率 $0.60c$ 向东航行的宇宙飞船将在 5 s 后同一个以速率 $0.80c$ 向西飞行的彗星相撞。

(1) 飞船中的人们看到彗星以多大速率向他们接近？

(2) 按照他们的钟，还有多少时间允许他们离开原来航线避免碰撞？

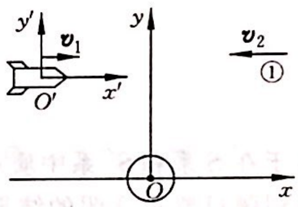

图 8.5　习题 8.9 解用图

解　(1) 由洛伦兹速度变换，在飞船测得的彗星速度为

$$v'_2 = \frac{v_2 - v_1}{1-\frac{v_2 v_1}{c^2}} = \frac{-0.8c-0.6c}{1-(-0.8\times0.6)} = -0.95c$$

即彗星以 $0.95c$ 的速率向飞船接近。

(2) 以地球上发现飞船经过某地时飞船和彗星最初隔一段距离(并于 5 s 后就要碰撞)为事件 1，以地球上发现飞船和彗星就要相撞为事件 2。这两件事对飞船来说发生在同一地点，飞船上测得的时间间隔应为固有时，此时间间隔为

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-v_1^2/c^2} = 5\times\sqrt{1-0.6^2} = 4\ \mathrm{s}$$

8.10　一光源在 S' 系的原点 O' 发出一光线，其传播方向在 $x'y'$ 平面内并与 x' 轴夹角为 θ'，试求在 S 系中测得的此光线的传播方向，并证明在 S 系中此光线的速率仍是 c。

解　在 S' 系中光的传播速度 $v'=c$。由洛伦兹速度变换可得在 S 系中光的两个分速度分别为

$$v_x = \frac{v'_x+u}{1+\frac{v'_x u}{c^2}} = \frac{v'\cos\theta'+u}{1+\frac{v'\cos\theta' u}{c^2}} = \frac{c\cos\theta'+u}{1+\frac{u\cos\theta'}{c}}$$

$$v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+\frac{v'_x u}{c^2}} = \frac{v'\sin\theta'\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+\frac{v'\cos\theta u}{c^2}} = \frac{c\sin\theta'\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+\frac{u\cos\theta'}{c}}$$

由此得在 S' 中光线与 x 轴的夹角为

$$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{\sin\theta'\sqrt{1-u^2/c^2}}{\cos\theta'+u/c}$$

而光的速率为

$$v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \frac{c}{c+u\cos\theta'}\left[(u+c\cos\theta')^2 + c^2\sin^2\theta'\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\right]^{1/2}$$

这一结果表示质点将以近于 c 的速度作匀速运动。

8.13　在什么速度下粒子的动量等于非相对论动量的两倍？又在什么速度下粒子的动能等于非相对论动能的两倍？

解　对动量问题，由题知

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 2m_0 v$$

由此解得

$$v = \sqrt{3}c/2 = 0.866c$$

对动能问题有

$$mc^2 - m_0 c^2 = 2 \times \frac{1}{2} m_0 v^2$$

由此得

$$1 = \left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

解此式可得

$$v = 0.786c$$

8.14　在北京正负电子对撞机中，电子可以被加速到动能为 $E_k = 2.8 \times 10^9$ eV。

(1) 这种电子的速率和光速相差多少 m/s？

(2) 这样的一个电子动量多大？

(3) 这种电子在周长为 240 m 的储存环内绕行时，它受的向心力多大？需要多大的偏转磁场？

解　(1) 由 $E_k = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0\right)c^2$ 可得

$$c^2 - v^2 = \left(\frac{m_0 c^3}{E_k + m_0 c^2}\right)^2$$

由于 $c \approx v$，所以 $c^2 - v^2 = (c+v)(c-v) \approx 2c(c-v)$，从而由上式可得

$$c - v = \frac{1}{2c}\left(\frac{m_0 c^3}{E_k + m_0 c^2}\right)^2$$

又由于 $E_k = 2.8 \times 10^9 \text{ eV} \gg m_0 c^2 = 0.511 \times 10^6$ eV，所以又有

$$c - v = \frac{m_0^2 c^5}{2E_k^2} = \frac{(0.911 \times 10^{-30})^2 \times (3 \times 10^8)^5}{2 \times (2.8 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19})^2} = 5.02 \text{ m/s}$$

(2) 电子的动量为

$$p = \sqrt{\frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2}} = \frac{\sqrt{E_k(E_k + 2m_0 c^2)}}{c}$$

由于 $E_k \gg m_0 c^2$，所以有

$$p \approx \frac{E_k}{c} = \frac{2.8 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19}}{3 \times 10^8} = 1.49 \times 10^{-18} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

(3) 电子绕行所需的向心力为

$$F = \frac{mv^2}{R} \approx \frac{mc^2}{R} = \frac{E}{R} \approx \frac{E_k}{R} = \frac{2.8 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19}}{240/2\pi} = 1.2 \times 10^{-11} \text{ N}$$

所需的偏转磁场为