§2. 审敛法

1. 正项级数审敛法 ($u_n \geq 0, n=1,2,\cdots$)

Th1 (充要条件) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

证:

例1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 的敛散性.

解. $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 > 2\cdot 2 \cdots 2\cdot 1 = 2^{n-1}$

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$S_n = 1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2-\frac{1}{2^{n-1}} < 2$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛.

Th2 (比较审敛法) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n : S_n, S$, $u_n \leq v_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n : \sigma_n, \sigma$

(i) $\sum v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum u_n$ 收敛;

(ii) $\sum u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum v_n$ 发散.

证: (i) $S_n = u_1+\cdots+u_n \leq v_1+\cdots+v_n < \sigma$

由 Th1, 得 $\sum u_n$ 收敛.

推论: $u_n \leq k v_n$, 从某 N 项后.

(i) $\sum v_n$ 收 $\Rightarrow \sum u_n$ 收;

(ii) $\sum u_n$ 发 $\Rightarrow \sum v_n$ 发.

Th3（比较审敛法的极限形式） $\sum u_n$, $\sum v_n$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\ (0<l<+\infty)\Rightarrow \sum u_n, \sum v_n$ 同敛散；

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$，$\sum v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum u_n$ 收敛；只能用收敛

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=+\infty$，$\sum v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum u_n$ 发散. 只能用发散.

证：(i) $\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时 $\left|\frac{u_n}{v_n}-l\right|<\varepsilon$

$$0<l-\varepsilon<\frac{u_n}{v_n}<l+\varepsilon$$

取 $\varepsilon=\frac{l}{2}$，$\frac{l}{2}v_n<u_n<\frac{3l}{2}v_n$

推论：(i) $\lim\limits_{n\to\infty} n u_n=l$，$0<l\leq+\infty \Rightarrow \sum u_n$ 发散

(ii) $\lim n^p u_n=l$，$0\leq l<+\infty$，$p>1\Rightarrow \sum u_n$ 收敛

例2. 讨论 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $(p>0)$ 的敛散性.

解：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{收敛}, & p>1\\ \text{发散}, & 0<p\leq 1\end{cases}$$

(1) $0<p\leq 1$： $n^p\leq n$ $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{n^p}\geq\frac{1}{n}\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ \text{发散}\end{array}\right\}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

(2) $p>1$： $n-1\leq x\leq n\ (n\geq 2)\Rightarrow x^p\leq n^p\Rightarrow$

$$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}dx\leq\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_{n-1}^{n}=\underline{\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right)}$$

$$\because s_n=\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)+\left(\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}<1$$

$\underbrace{2,\cdots,n+1}_{n\text{次}}$

$$= 1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}} < 1$$

n次

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right)$ 收敛.

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛.

例3. 判断敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$.　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}$　　(收)

解: (1) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$

$\sum\frac{1}{n}$ 发散

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

(2) $\because \lim_{n\to\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to\infty} n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛

(3) $\lim_{n\to\infty} n u_n = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发

法2. $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geqslant \frac{1}{n+1}\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} \text{ 发}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发

注: 审敛法 2. 3 需借助于参考旧据

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ 发散}\\ \sum aq^n\ (|q|<1).\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\ (p>1) \text{ 收敛}\end{array}\right.$$

定理4 (比值审敛法) (n!)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}\text{收敛} & 0\le\rho<1\\ \text{发散} & \rho>1\\ \text{失效} & \rho=1\end{cases}$$

定理5 (根值审敛法) (a_n^n)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}\text{收敛} & 0\le\rho<1\\ \text{发散} & \rho>1\\ \text{失效} & \rho=1\end{cases}$$

注：(i) $\rho=1$ 失效！

$\sum\frac{1}{n}$ 发散. 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u}=1$

$\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛

(ii) 条件是充分的，而非必要.

考虑：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

$$\left.\begin{aligned}&u_n=\frac{2+(-1)^n}{2^n}\le\frac{3}{2^n}=v_n\\ &\text{而 }\sum\frac{1}{2^n}\text{ 收敛}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sum\frac{2+(-1)^n}{2^n}\text{ 收敛}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2+(-1)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^{n+1}}{2\left(2+(-1)^n\right)}\ \text{不存在}.$$

例4. (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n)}$ (收)

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ (发)

解：(1) $\lim\frac{u_{n+1}}{}=\lim\frac{n!}{}=\lim\frac{1}{}=0<1$

解：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$

$\therefore \sum\frac{1}{n!}$ 收敛

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\underline{(1+\frac{1}{n})^n}}\cdot\frac{1}{n+1}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$

$\Rightarrow \sum\frac{1}{n^n}$ 收

(3) $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ 失效.

2. 交错级数

$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ $(u_n>0)$

$-u_1+u_2-u_3+u_4-\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n$

定理6 (莱布尼茨审敛法)

$\left.\begin{array}{l}\text{(i) } u_n\geqslant u_{n+1}\\ \text{(ii) } \lim\limits_{n\to\infty}u_n=0\end{array}\right\}\Rightarrow$ 交错级数收敛，且 $s\leq u_1$,

$|r_n|\leq u_{n+1}$.

例5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

解：$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}\\ \lim\frac{1}{n}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛 $\left.\begin{array}{l}\\ \sum\frac{1}{n} \text{ 发散}\end{array}\right\}\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 条件收敛

例6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 条件收敛.

解：$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}=0\\ u_n=\frac{\sqrt{n}}{n-1}\geqslant u_{n+1}\end{array}\right\}\Rightarrow \sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛

令 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$，$x\geq 2$，则 $f'(x)=\dfrac{-(x+1)}{2\sqrt{x}\,(x-1)^2}<0$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$ 发散

3. 一般项级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 一般项级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots$ 正项级数

定义 (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

(ii) $\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{ 发散}\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 收敛}\end{array}\right\}$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

定理7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum u_n$ 收敛.

（$\sum u_n$ 绝对收敛）

例 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$

解: $\left.\begin{array}{l}|u_n|=\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right|\leq\dfrac{1}{n^2}\\ \sum\dfrac{1}{n^2} \text{ 收敛}\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right| \text{ 收敛}}$

$\Rightarrow\ \sum\dfrac{\sin n}{n^2}$ 收敛.