

# 第1章 函数与极限

## §1. 函数

### 1. 集合

(1) 数系:  $N \subset Z \subset Q \subset R \subset (C)$

$\delta$ -delta  
 $\Delta$

(2) 区间:  $\begin{cases} \text{有限区间: } [a, b], (a, b), \dots \\ \text{无穷区间: } (-\infty, b), [a, +\infty), \dots, (-\infty, +\infty) = R \end{cases}$

(3)  $\delta$ -邻域:

$$U(x_0) = U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\} \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

(4)  $x_0$  的  $\delta$ -邻域

$$\dot{U}(x_0) = \dot{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

### 2. 函数

1) 定义:  $x, y$  是两个变量,  $D$  是非空数集. 若对  $D$  中任一数  $x$ , 通过对应法则  $f$  总有 唯一 的数  $y$  与之相对应, 则称  $y$  是  $x$  的函数, 记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中  $x, y, D, R = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$  - 值域.

注: (1) 函数的符号可以任意的, 如  $g, H, \varphi$ .

(2) 定义中的函数是抽象的.

(3) 定义域: 自然定义域.

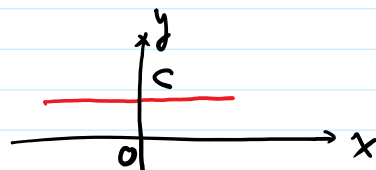
(4)  $\begin{cases} \text{单值函数:} & y = x^2, y = x^3 \\ \text{多值函数:} & x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

(5) 图象 (图形):  $G = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$

2) 常见函数.

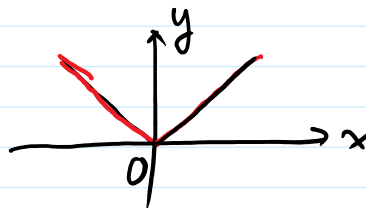
Ex1. (常数函数)

$$y = C, \quad x \in \mathbb{R}.$$



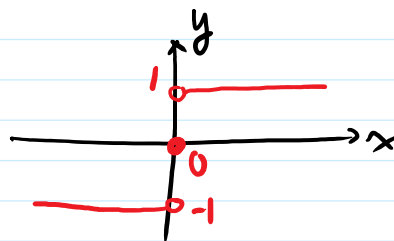
Ex2 (绝对值函数)

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



Ex3 (符号函数)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

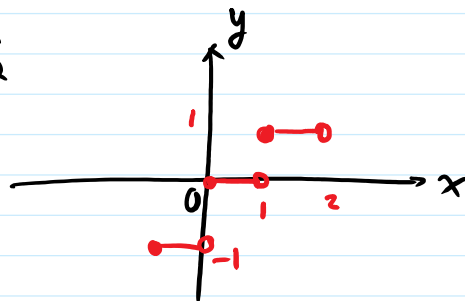


Ex4 (取整函数)

$$y = [x], \quad \text{— 不超过 } x \text{ 的最大整数}$$

$$y = [2.1] = 2$$

$$y = [-1.2] = -2$$



注: 分段函数. 如: Ex2. Ex3.

Ex5.  $f(x) = 1.$

$$g(x) = \frac{x}{x}.$$

3. 函数的性质.

性质1. (有界性)  $D = [a, b], \quad x \in D$

- (i)  $\forall x \in X, \exists K_1$  s.t.  $f(x) \leq K_1$  - 上界.  
 (ii)  $\forall x \in X, \exists K_2$  s.t.  $f(x) \geq K_2$  - 下界.  
 (iii)  $\forall x \in X, \exists M > 0$  s.t.  $|f(x)| \leq M$  - 有界.

性质2 (单调性)

性质3 (连续性)

性质4 (可导性)

#### 4. 反函数

$y = f(x)$ .  $x \in D$ .  $y \in R$  (range) - 直接函数

$\Rightarrow x = f^{-1}(y)$ .  $\angle y = f(x)$  是反函数. 通常写作

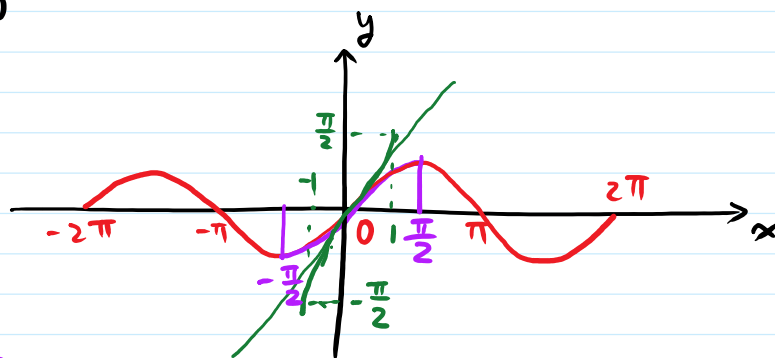
$$y = f^{-1}(x)$$

Ex.  $y = x^2$  不是反函数

Ex.  $y = \sin x$ .  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .  
 $-1 \leq y \leq 1$ .

$$y = \arcsin x. -1 \leq x \leq 1$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$



$$y = \arccos x$$

$$y = \arctan x$$

$$y = \operatorname{arccot} x$$

#### 5. 复合函数

$$y = f(u), u = g(x), x \in D. \text{ 则}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

注:  $g(x)$  在  $(\frac{1}{2}, 1]$   $\subset f$  在  $[\frac{1}{2}, 1]$

Ex 8  $y = u^2, u = \sin x \Rightarrow y = \sin^2 x, x \in \mathbb{R}$

Ex 9.  $y = \arcsin u, u = x+2 \rightarrow$  不成立  $\frac{1}{2}$

Ex 10.  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  求  $f(f(x)), f(\frac{1}{f(x)})$ .

Ex 11.  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}, \varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$  求  $f(\varphi(x))$

解:  $f(\varphi(x)) = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} e^{x+2}, & \begin{cases} x+2 < 1 \\ x < 0 \end{cases} \\ e^{x^2-1}, & \begin{cases} x^2-1 < 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ x+2, & \dots \\ x^2-1, & \dots \end{cases} = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x+2, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2-1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

注:  $y = f(x): x$  既可以看成  $1$  或  $\frac{1}{2}$ , 也可以看成  $\frac{1}{2}$  或  $\frac{1}{2}$ .

## 6. 初等函数

基本初等函数: 幂函数. 指数函数. 对数函数. 三角函数. 反三角函数

初等函数: 由基本初等函数经过四则运算及复合运算而成的函数.

Ex 12.  $y = \sqrt{\arccos \frac{x}{2}}$  初等函数

例 (1) 设  $f(x)$  连续且  $x \in [0,1]$ . 求

$$f(x+a) + f(x-a) \quad (a>0) \text{ 在 } [0,1] \text{ 上}.$$

(2)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ . 设  $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ ,  $n=2,3,\dots$ .

$f_1(x) = f(x)$ . 求  $f_n(x)$ .