§4. 函数的单调性与曲线的凹凸性

1 单调性

定理1. $f(x) \in C[a,b]$. $D(a,b)$

(i) $f'(x) > 0$, $x \in (a,b)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ 在$[a,b]$上单增;

(ii) $f'(x) < 0$, $x \in (a,b)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ 在$[a,b]$上单减.

证明: (i) $\forall x_1 < x_2 \in (a,b)$. 则

$$f(x_1) - f(x_2) = \underset{>0}{f'(\xi)}\underset{<0}{\underline{(x_1 - x_2)}} < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$\Rightarrow f(x)$ 单增.

例1. 求 $f(x) = x^3 - 12x - 5$ 的单调区间.

解: (1) 确定定义域: $(-\infty, +\infty)$

(2) 求驻点 (使 $f'(x_0) = 0$ 的点): $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -2$. $x_2 = 2$.

(3) 列表

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$

$\therefore$ 单增区间: $(-\infty, -2]$. $[2, +\infty)$

单减区间: $[-2, 2]$.

例2. $f(x) = 2 - (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$. 讨论单调性.

解: (1) $(-\infty, +\infty)$

(2) $f'(x) = -\frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = -\frac{4}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = 0$

临界点 $\begin{cases} 驻点：x_1=0 \\ 奇点(f'(x)不存在)：x_2=-1,\quad x_3=1 \end{cases}$

(3)

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$	$\times$	$-$
$f(x)$	$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$		$\downarrow$

$\therefore$ 单增：$(-\infty,-1]$. $[0,1]$

单减 $[-1,0]$. $[1,+\infty)$

例3. $f(x)=(x-2)^2(x+1)^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x)=2(x-2)(x+1)^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-2)^2(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{2(x-2)(4x+1)}{3(x+1)^{\frac{1}{3}}}$$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-\frac{1}{4})$	$-\frac{1}{4}$	$(-\frac{1}{4},2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\downarrow$		$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$

例4. 证明：$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$, $x>0$.

证：$\Leftrightarrow (1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$ 同一形

令 $F(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$, 则

$$F'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}$$

>0

$\therefore F(x)$ 单增. $\Rightarrow F(x)>F(0)=0$

即 $\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$, $x>0$.

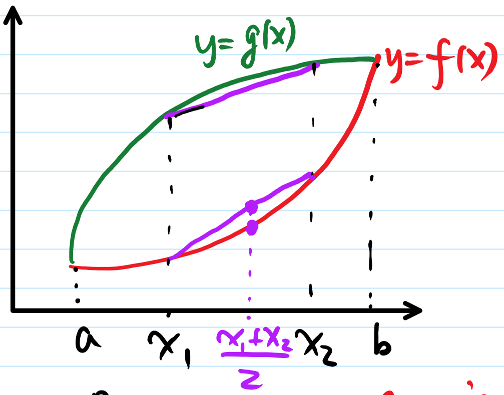
例5. $0<x<\frac{\pi}{2}$, 证明: $\tan x+\sin x>2x$.

证明: $f(x)=\tan x+\sin x-2x>f(0)=0$

$$f'(x)=\sec^2 x+\cos x-2>f'(0)=0$$

$$f''(x)=2\sec^2 x\tan x-\sin x=\sin x\left(\frac{2}{\cos^3 x}-1\right)>0$$

2. 曲线的凹凸性 — 曲线的弯曲方向



定义1. (凹凸性)

$f(x)$ 在 I_x 上连续.

(i) $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)$

则称函数的曲线在 I_x 上是凹的; (坑)

(ii) $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)$.

则称函数的曲线在 I_x 上是凸的. (包)

定理2 (凹凸性判定). $f(x)\in C[a,b]$, $f'(x)\in D(a,b)$

(i) $f''(x)>0$ on (a,b) $\Rightarrow$ $f(x)$ 的曲线在 $[a,b]$ 上是凹的.

(ii) $f''(x)<0$ on (a,b) $\Rightarrow$ $f(x)$ 的曲线在 $[a,b]$ 上是凸的.

例6 讨论凹凸性

(1) $y=x^3$

解: $y'=3x^2$, $y''=6x$.

当 $x>0$ 时 $y''>0$. $\Rightarrow$ y 的曲线在 $[0,+\infty)$ 上是凹的

当 $x<0$ 时 $y''<0$. $\Rightarrow$ y 的曲线在 $(-\infty,0]$ 上是凸的

注：拐点 (x_0, y_0)：在 x_0 左右两侧 $y''(x)$ 一定要改变.

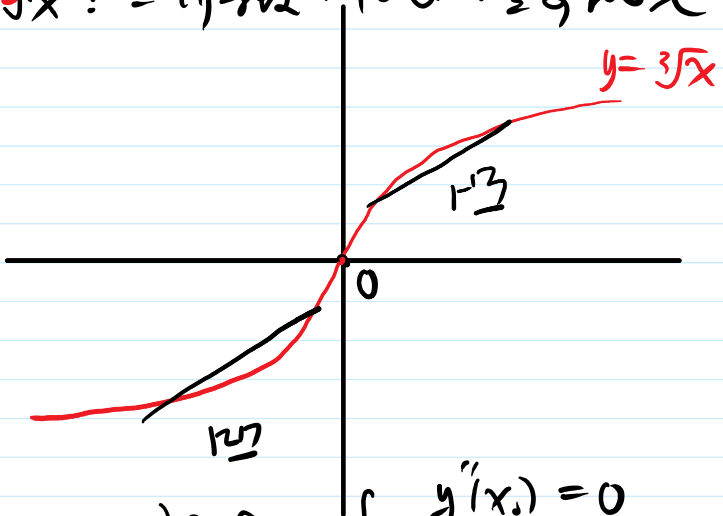
$(0, 0)$.

(2) $y = x^2$.

$y' = 2x \quad y'' = 2 > 0$

$(0,0)$ 不是拐点.

注：$y = \sqrt[3]{x}$：二阶导数不存在的点也可能是拐点.



$> x_0 <$

可能的拐点 $\begin{cases} y''(x_0) = 0 \\ y''(x_0) \text{ 不存在}. \end{cases}$

例 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$，求拐点 $(0,1)$. $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$