第四章 不定积分

§4.1 不定积分的概念与性质

1. 概念

(1) 原函数：在区间 I 上，$F'(x)=f(x)$，或 $dF(x)=f(x)\,dx$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

例1 (1) $(\sin x)'=\cos x$，$\therefore$ $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数

(2) $\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\therefore$ $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ 是 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上的一个原函数

注：(i) 原函数存在定理：$f(x)\in C(I)\Rightarrow \exists F(x)$ s.t. $F'(x)=f(x)$.

(ii) 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数.

(iii) 任意两个原函数相差一个常数，即

$$F'(x)=f(x),\ G'(x)=f(x)\Rightarrow F(x)=G(x)+C.$$

(2) 不定积分：在区间 I 上，将带有任意常数 C 的原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记作

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

积分号
被积函数
积分变量
被积表达式

其中，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

注：(i) C — 积分常数，不定积分的标志；

(ii) 不定积分是积分变量的函数.

(3) 积分与微分的关系.

设 $F'(x)=f(x)$，或 $dF(x)=f(x)\,dx$，则

(i) $\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x)$，或 $d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx$

(ii) $\int f(x)\,dx=\int dF(x)=F(x)+C$

2. 基本积分公式（17个 背熟）

(1) $\int 0\, dx = C$

(2) $\int k\, dx = kx + C$

(3) $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{1+\alpha} x^{1+\alpha} + C$

(4) $\int x^{n} dx = \frac{1}{1+n} x^{1+n} + C$

(5) $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$.

(6) $\int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + C$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + C$

(8) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

(9) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

(10) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

(11) $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

(12) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$

(13) $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$

(14) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

(15) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

(16) $\int e^x\, dx = e^x + C$

(17) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

3. 性质——线性性

定理：(1) $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$；

(2) $\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$.

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

4. 例题

例1. $\int \sqrt{x}(x^2-5)\, dx = \int \left(x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}}\right) dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx - 5\int x^{\frac{1}{2}} dx$

$= \frac{1}{1+\frac{5}{2}} x^{1+\frac{5}{2}} - 5 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}} x^{1+\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$.

例2 $\int \left(10^x + 3\cos x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{10^x}{\ln 10} + 3\sin x + 2\sqrt{x} + C$

3 $\int \frac{(1-x)^3}{x^2} dx = \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 3 - x\right) dx$

$= -\frac{1}{x} - 3\ln|x| + 3x - \frac{1}{2}x^2 + C$

4. $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)} dx = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \ln|x| + \arctan x + C$

5. $\int \tan^2 x \, dx = \int(\sec^2 x - 1)\, dx = \tan x - x + C$

6. $\int \sin^2\frac{x}{2} \, dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos x)\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C$

7. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int(\sec^2 x + \csc^2 x) dx = \tan x - \cot x + C$

例8. 设 $f'(\tan x) = \sec^2 x$, $f(0)=2$. 求 $f(x)$.

解法1. $\underline{f'(\tan x) = 1+\tan^2 x \Rightarrow f'(x) = 1+x^2}$

$\therefore \underline{f(x) = \int f'(x) dx} = \int (1+x^2)\, dx = x + \frac{1}{3}x^3 + C$

$f(0)=2 \Rightarrow C = 2.$

$\therefore f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + 2.$ $\quad f'(\tan x) \Rightarrow f'(x) \Rightarrow f(x).$

解法2. $f'(\tan x) \Longrightarrow f(\tan x) \Rightarrow f(x)$

$$f(\tan x) = \int f'(\tan x)\, d\tan x = \int \sec^2 x \, d\tan x$$

$$= \int (1+\tan^2 x)\, d\tan x$$

$$\triangleq \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + C$$

例9. $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$ 求 $\int f(x) dx$.

解: $\int f(x) dx = F(x) + C$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C_1, & x \le 0 \\ -\cos x + C_2, & x > 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续 $\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 0^2 + C_1 = -1 + C_2 \Rightarrow C_1 = C_2 - 1$

在 $x=0$ 处连续 $\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 0^2 + C_1 = -1 + C_2 \Rightarrow C_1 = C_2 - 1$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 1 + C_2, & x \le 0 \\ -\cos x + C_2, & x > 0 \end{cases}$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 1, & x \le 0 \\ -\cos x, & x > 0 \end{cases}$$

例10 $$\int \max(1, x^2)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3} + C, & x < -1, \\ x + C, & -1 \le x \le 1, \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3} + C, & x > 1. \end{cases}$$