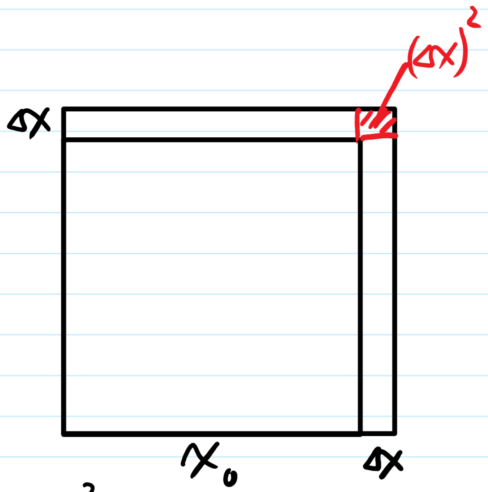
2.5函数的微分

2017年10月24日 21:27

1. 引例：

边长为 x_0 的铁板受热膨胀，求膨胀出来的面积.



$$(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = \underbrace{2x_0\cdot\Delta x} + \underline{(\Delta x)^2}$$

2. 定义：

若 $\Delta y = f(\underline{x_0+\Delta x}) - f(x_0) = \underline{A\cdot\Delta x} + o(\Delta x)$，

其中 A 与 Δx 无关，则称 $A\cdot\Delta x$ 为 $f(x)$ 在 x_0 点处的微分. 或 $f(x)$ 在 x_0 处可微. 记作

$$dy\Big|_{x=x_0} = A\cdot\Delta x.$$

注：(1) 近似计算：

$$\Delta y = dy + o(\Delta x)$$

$$\Delta y \approx dy = A\cdot\Delta x$$

(2)

$$dy = A\cdot\Delta x.$$

3. 等价命题

Th. $f(x)$ 在 x_0 点可微的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 点可导，$A = f'(x_0)$，且 $dy\big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$.

证：(⇐)

假设 $f(x)$ 在 x_0 点可微，则由定义得

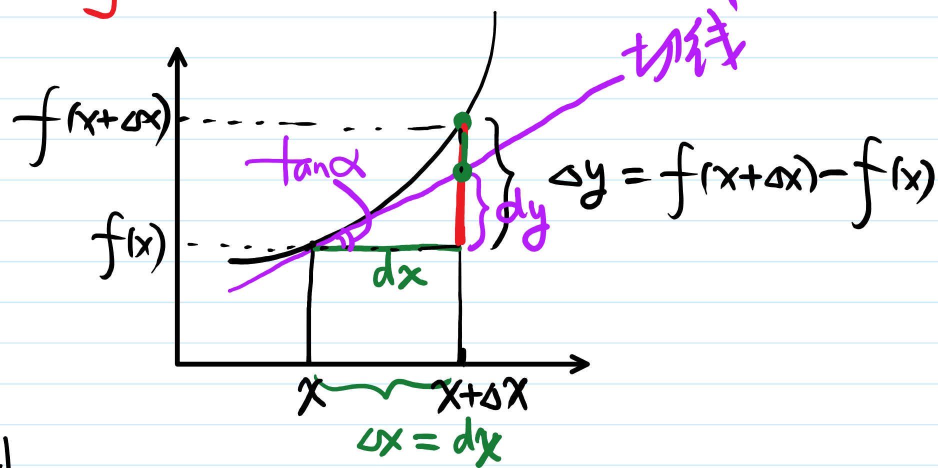
$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \underline{o(\Delta x)}$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'(x_0).$$

注：(i) 一元函数：可导 ⇔ 可微

(ii) $dy = f'(x)\Delta x = \underline{f'(x)\,dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \underline{f'(x)}$ — 微商

(iii) Δy 与 dy 的区别



4. 微分运算法则.

(1) $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ $\qquad d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}dx$

导数公式 ⇔ 微分公式.

(2) 复合函数的微分：

$y = f(u),\ u = \varphi(x)\ :\ y = f(\varphi(x)) \triangleq F(x)$

$$\Rightarrow dy = f'(u)\,\underline{\varphi'(x)\,dx} = F'(x)\,dx$$

$$= f'(u)\,du$$

(3) 微分四则运算

$$d\big(u(x) \pm v(x)\big) = du(x) \pm dv(x)$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

例1 $$d\tan(2x) = \sec^2(2x)\,d(2x) = 2\sec^2(2x)\,dx$$

例2 $e^y + xy - e = 0 \rightarrow y = y(x)$. 求 y', dy.

解：(法1) 两边求导

(法2) $$d(e^y + xy - e) = 0$$

$$\Rightarrow d(e^y) + d(xy) = 0$$

$$\Rightarrow e^y\,dy + x\,dy + y\,dx = 0 \quad ☆$$

$$(e^y + x)\,dy = -y\,dx$$

$$dy = -\frac{y}{e^y + x}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{e^y + x}$$