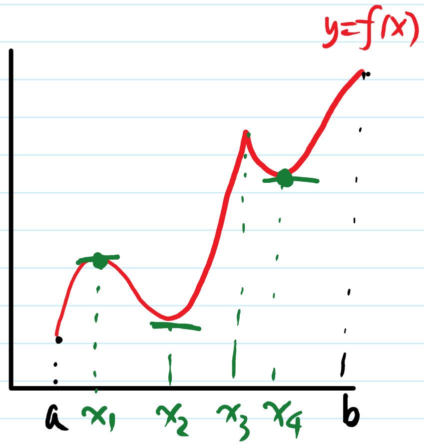
§5. 函数的极值与最值

1. 极值

(1)定义： $f(x)$ 定义在 (a,b) 内， $x_0 \in (a,b)$

(i) 若 $f(x) > f(x_0)$， $x \in \mathring{U}(x_0)$， 则 $f(x_0)$ 为极小值
(ii) 若 $f(x) < f(x_0)$， $x \in \mathring{U}(x_0)$， 则 $f(x_0)$ 为极大值 } 极值

注： (1) 极值是函数的局部性质
(2) 极大值不一定大于极小值



2. 极值的求法

定理1 (必要条件)

设 $f(x_0)$ 为极值， $f'(x_0)$ 存在， 则 $f'(x_0) = 0$.

注： (1) 若在 $f(x)$ 在极值点处有水平切线.
(2) 极值点一定是驻点 (√)
(3) 驻点一定是极值点. $y=x^3$. $x=0$ (X)
(4) 不可导点可能是极值点. (√) $y=|x|$
(5) 极值点 { 驻点
导点.
端点.

定理2 (第一充分条件) $f(x) \in C(U(x_0))$， $D(\mathring{U}(x_0))$.

(i) 若 $f'(x)$ 符号在 x_0 两侧发生改变 则 $f(x_0)$ 是极值.

$f'(x): - \longrightarrow + \Rightarrow f(x_0)$ 为极小值
$f'(x): + \longrightarrow - \Rightarrow f(x_0)$ 为极大值

(ii) 若 $f'(x)$ 的符号不改变，则 $f(x_0)$ 不是极值.

例1. 求函数的极值: $f(x)=2x^3-6x^2-18x-7$

解: $D: (-\infty,+\infty)$

$$y'=6x^2-12x-18=6(x^2-2x-3)=6(x-3)(x+1)=0$$

$\Rightarrow x_1=-1,\quad x_2=3.$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	大	$\searrow$	小	$\nearrow$

$\therefore f_{max}=f(-1)=3.\qquad f_{min}=f(3)=-61.$

例2 求极值: $y=(x-2)^2(x+1)^{\frac{2}{3}}.$

解: $f(x)=(x-2)^2(x+1)^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x)=2(x-2)(x+1)^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(x-2)^2(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{2(x-2)(4x+1)}{3(x+1)^{\frac{1}{3}}}\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{4},\ x_3=2.$$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-\frac{1}{4})$	$-\frac{1}{4}$	$(-\frac{1}{4},2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$-$	X	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\downarrow$	小	$\uparrow$	大	$\downarrow$	小	$\uparrow$

$\therefore f_{min}=f(-1)=0=f(2)$

$f_{max}=f(-\frac{1}{4})=(\frac{9}{4})^2(\frac{3}{4})^{\frac{2}{3}}.$

求极值的步骤:

(1) 明确定义域;

(2) 求驻点和不可导点;

(3) 列表;

(4) 依据判定定理 得出结论.

定理3 (第二充分条件) $f''(x_0)$ 存在, $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$

(i) $f''(x_0)>0 \Rightarrow f(x_0)$ 为极小值;

(ii) $f''(x_0)<0 \Rightarrow f(x_0)$ 为极大值.

证明:

注: $f''(x_0)=0$, 此法失效; 改用第一充分条件判定.

例3. 求极值: $y=(x^2-1)^3+1$.

解: 驻点: $y'=6x(x^2-1)^2=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=-1$.

$$y''=6(x-1)(x+1)(5x^2-1)$$

$x=0$: $y''(0)=6>0 \Rightarrow f_{min}=f(0)=0$

$x=\pm1$: $y''(\pm1)=0$. y' 不变号 $\Rightarrow f(\pm1)$ 不是极值.

3. 最值

(1) $f(x)\in C[a,b] \Rightarrow$ 存在最小值 m, 最大值 M;

(2) 求最值的步骤: 1° 求极值点; 2° 比较大小.

3° 实际问题.

注: $f(x)$ 在唯一的极值 $f(x_0) \Rightarrow f(x_0)$ 也就是最值.

例4. $f(x)=(x-2)^2(x+1)^{\frac{2}{3}}$, $-2\le x\le 3$. 求最值.

解: $x_1=-1$, $x_2=2$, $x=-\frac14$.

$f(-1)=0$ $f(2)=0$ $f(-\frac14)=(\frac94)^2(\frac34)^{\frac23}$. $f(-2)=16$. $f(3)=4^{\frac23}$.

$M=f(-2)=16$. $m=f(-1)=f(2)=0$

4. 画函数的草图.

例5. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

绘图步骤：(1) 定义域

(2) 求 y', y''，确定单调性与凹凸性

(3) 确定渐近线

(4) 特殊点

(5) 描绘曲线

解：(1) D: $(-\infty, +\infty)$

(2) $y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) = 0$

$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) = 0$

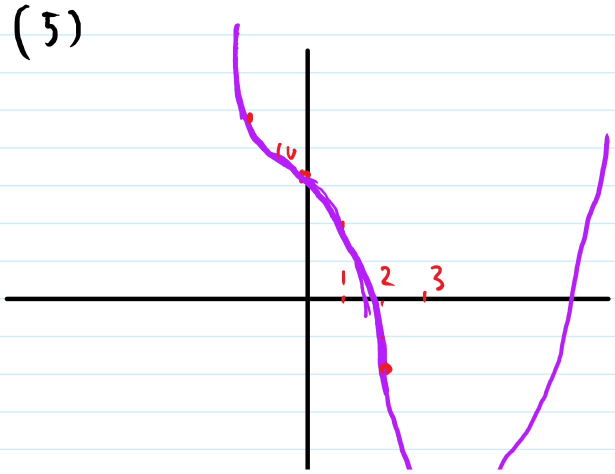
$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

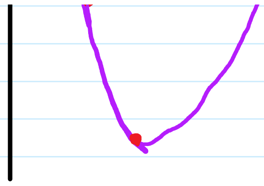
(3)

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
y	↘	10 拐	↘	-6 拐	↘	-17 极小	↗

(4) $f(-1) = 15$ 　 $f(1) = 7$ 　 $f(4) = \cdots$

(5)





例6. 描绘曲线： $f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}=\dfrac{1+x^2+2x}{1+x^2}$

解： 定义域 $(-\infty,+\infty)$

$$y'=\frac{2(1+x)(1+x^2)-2x(1+x)^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=0$$

$$y''=\frac{-4x(1+x^2)^2-4(1-x^2)(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}=0$$

$\Rightarrow\ x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=0,\ x_4=\sqrt{3},\ x_5=-\sqrt{3}$

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y''	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$\searrow$	拐	$\searrow$	小	$\nearrow$	拐	$\nearrow$	大	$\searrow$	拐	$\searrow$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1 \Rightarrow y=1$ 水平渐近线

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1^+$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1^-$