

## §4. 无穷大与无穷小.

## 1. 无穷小

定义 1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0. \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, } |f(x)| < \varepsilon.$$

即  $f(x)$  称为当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小.

例 1.  $\sin x, 1 - \cos x$  是当  $x \rightarrow 0$  时的无穷小

$e^{-x}$  是当  $x \rightarrow +\infty$  时的无穷小

$\frac{1}{n}, \frac{1}{2^n}$  是当  $n \rightarrow \infty$  时的无穷小.

注: (i) 只说“无穷小”是不准确的, 必须指出极限过程;

(ii) “无穷小”与“非常小”是有区别的;

(iii) **0 是无穷小? (是)**

定理 1 (函数极限与无穷小的关系)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{ 其中 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \alpha(x) = 0.$$

证: ( $\Rightarrow$ )  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0. \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时,}$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\text{令 } \alpha(x) = f(x) - A, \text{ 则}$$

$$|\alpha(x)| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

( $\Leftarrow$ )

( $\Leftarrow$ )  
充分性

2. 无穷大

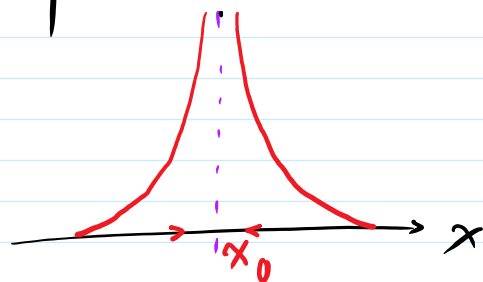
定义 2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

$$\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, } f(x) > M.$$

即  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷大.

- 注: (i) 说“极限为无穷大”, 而实际上是极限不存在;  
(ii) “无穷大”与“非常大”不一样.  
(iii) 几何意义:

$x = x_0$  — 铅直渐近线.



定理 2 (无穷大与无穷小的关系)

(i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0;$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, f(x) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty.$

$$\begin{cases} x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow x_0^+ \\ x \rightarrow x_0^- \\ x \rightarrow \infty \\ x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty \end{cases}$$