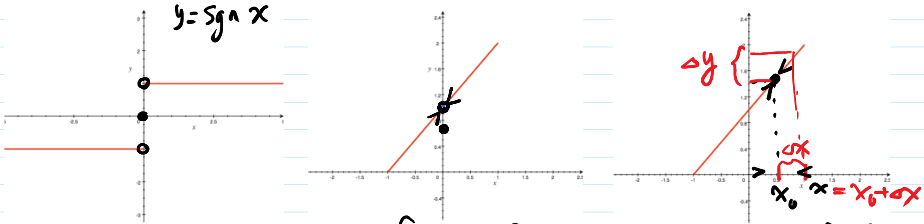
1.8函数连续性与间断点

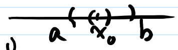
2017年10月10日 20:32

1. 函数的连续性



$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.　　$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$　　$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

定义1 （在内点的连续性）



设 $f(x)$ 定义在包含 x_0 的开区间内，若

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

注：(1) 等价定义：$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right] = 0$$

(2) 定义式包含三层含义：

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

(ii) $f(x)$ 在 x_0 点有定义；

(iii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

定义2（单侧连续）

$f(x)$ 在 x_0 点左连续 $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

$f(x)$ 在 x_0 点右连续 $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

注：$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

定义3（在开区间内连续）

若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

定义4（在闭区间上连续）

若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且 $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$，$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

例1. $\lim_{x\to x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$　　多项式在R上连续.

2. $\lim_{x\to x_0} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \frac{P_n(x_0)}{P_m(x_0)}$　　有理函数在定义域内连续.

3. 三角函数在定义域内连续.

2. 间断点.

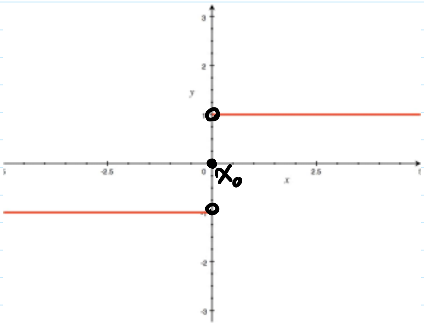
定义5 满足下列情形之一，则称 $f(x)$ 在 x_0 点不连续：

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

(ii) $f(x)$ 在 x_0 点没定义；

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

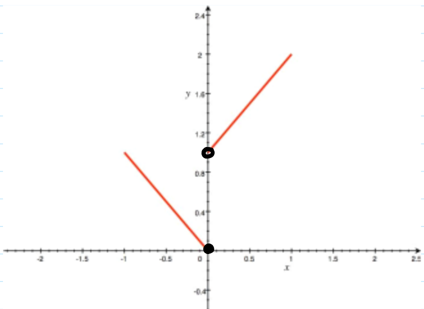
例2. 间断点的类型.

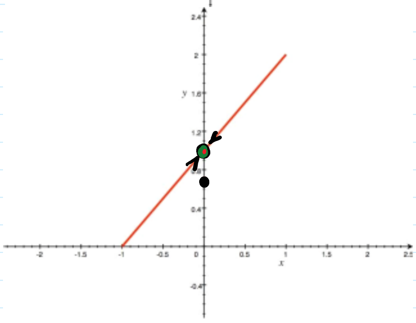


$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

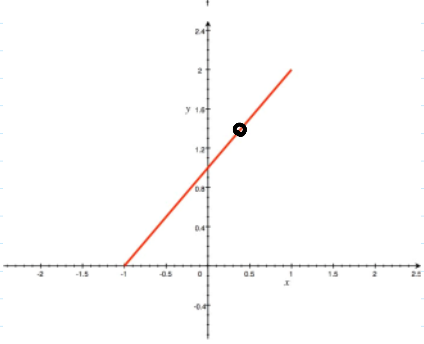
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

跳跃间断点.





$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$



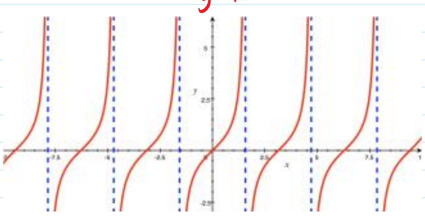
$f(x)$ 在 x_0 点没定义.

可去间断点.

第一类间断点：单侧极限存在

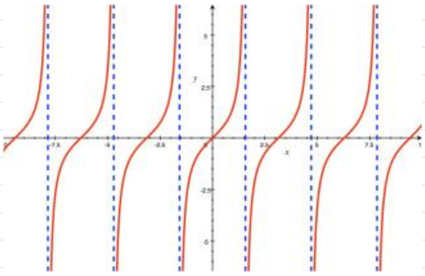
否则，称为第二类间断点.

$y=\tan x$



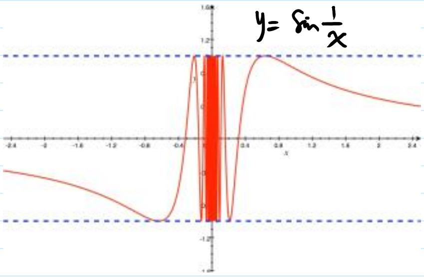
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$

无穷间断点.



$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$

无穷间断点



$y = \sin\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在

振荡间断点