2.2求导法则

2017年10月16日 7:50

Th1（四则运算） 设 $f'(x)$. $g'(x)$ 存在，则

(i) 和：$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$;

(ii) 差：$(f(x)-g(x))' = f'(x) - g'(x)$;

(iii) 积：$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$;

(iv) 商：$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

证：令 $F(x) = f(x)g(x)$，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) \overset{-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)}{} - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x+h) + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x)$$

$$= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

例1. $y = x^3 + \sin x$. 求 $y' = 3x^2 + \cos x$.

2. $y = \sin x \ln x$. 求 $y' = \cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}$.

3. $(\tan x)' = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$$\begin{cases} (\sec x)' = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x \\ (\csc x)' = -\csc x \cot x \end{cases}$$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

正 + 余 −

S + C −

4. $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ \ln(1+x) & x\geq 0 \end{cases}$. 求 $f'(x)$.

解：(1) $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ \ln(1+x), & >0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 1, & x<0 \\ \frac{1}{1+x}, & x>0 \end{cases}$

(2) $x=0$：

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-0}{x-0}=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-0}{x}=1$$

$\therefore f'(0)=1$.

(3) $f'(x)=\begin{cases} 1, & x\leq 0, \\ \frac{1}{1+x}, & x>0. \end{cases}$

注：函数可导，导数不一定连续.

Th（反函数的导数） $y=f(x)$ 直接函数.
$x=f^{-1}(y)$ 反函数.

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \qquad \Delta x\to 0 \Leftrightarrow \Delta y\to 0$$

（反函数的导数等于直接函数的导数的倒数）

证：$\frac{dx}{dy}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

例2. 求 $y=\arcsin x$ 的导数.

解：$y=\arcsin x$. $x\in[-1,1]$，$y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$x=\sin y$. $\quad \dfrac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

注: $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$.

Th3 (链式法则) $y=f(\varphi(x))$: $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$

$y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 可导, $u=\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导.

$u_0=\varphi(x_0)$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{dy}{du}\right|_{u=u_0} \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(\varphi(x_0))\,\varphi'(x_0)$$

$$= f'(u)\Big|_{u=\varphi(x_0)} \cdot \varphi'(x_0)$$

注: $y=f(\varphi(x))$: $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$