第一章 复习

1. 连续性与间断点

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

(2) 间断点类型 $\begin{cases} 一 \begin{cases} 可去 \\ 跳跃 \end{cases} \\ 二 \begin{cases} 振荡 \\ 无穷 \end{cases} \end{cases}$

2. 闭区间上连续函数的性质.

Th1. 有界性. 最值定理

Th2 介值定理. 零点定理

3. 极限的计算方法

(1) 观察法: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$

(2) 夹逼定理: $a\leftarrow x_n\le y_n\le z_n\to a \Rightarrow y_n\to a$

(3) 单调有界准则: $\begin{cases} 找到单增有上界 \\ \quad\ \ 减\quad 下 \end{cases} \Rightarrow$ 必有极限

(4) 重要极限: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

(5) 等价无穷小代换: 只能在乘积中代换

(6) 洛必达法则: $\frac{0}{0}$. $\frac{\infty}{\infty}$

(7) 对指变换: 幂指函数 $\longrightarrow$ 初等函数

(8) 定积分定义

注: 分段点处的极限. 连续性可导性必须用定义

(单侧极限. 单侧连续. 单侧导数)单独讨论

例1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan^3(2x)}{x^3(e^x-1)}\left[\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^x-1\right]$ $\quad e^x-1\sim x$

$= \frac{x\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{\quad}$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\quad}{x^3(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{8x^3}{x^4}\left[e^{x\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{8}{\cancel{x}}\cdot \cancel{x}\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=8\lim_{x\to0^+}\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=8\ln 2.$$

例2. $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}\quad(x>0)$

(1) 求 $f(x)$;

(2) $f(x)$ 在定义域内是否连续?

解: (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln e^n\left(1+\frac{x^n}{e^n}\right)}{n}$

$0<\frac{x}{e}<1$

$0<x<e$ $\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\ln\left(1+\left(\frac{x}{e}\right)^n\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\ln\left(1+\left(\frac{x}{e}\right)^n\right)}{n}\right)$

$$=1$$

(2) $I=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x^n\left(1+\left(\frac{e}{x}\right)^n\right)}{n}$

$x>e$ $\quad=\lim_{n\to\infty}\left(\ln x+\frac{\ln\left(1+\left(\frac{e}{x}\right)^n\right)}{n}\right)$ $\to 0$, $\to\infty$

$x=e$ $\quad f(x)\ln=x\ 1$

(3)

$\therefore\ f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le e\\ \ln x, & x>e\end{cases}$

$$\lim_{x\to e}f(x)=f(e)=1$$

∞

注: $\lim e^x=0$, $\lim q^n=0$, $|q|<1$.

例3. $f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上，$\forall x_1, x_2$. $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.
证明. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

证: $\forall x \in (-\infty,+\infty)$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)] = 0$$

$$\left[\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\right]$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)]$$

$$= f(x) + \boxed{f(0)} \qquad x_1=x_2=0 \Rightarrow f(0)=0$$

$$= f(x)$$

例4. 确定 a, b. 使 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-1)(x-a)}$ 有无穷间断点 $x=0$,
可去间断点 $x=1$.

解: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-b}{x-1} = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}(e^x-b)=0$
$b=e$

$$= \lim \frac{e^{x-1}-1}{x-1} = A$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-b}{(x-1)(x-a)} = -\lim_{x\to 0}\frac{\overset{\nearrow 1-b}{e^x-b}}{\underset{\searrow -a}{x-a}} = \infty$$

$a=0$