1.9连续函数的运算与初等函数的连续性

2017年10月11日 11:14

§9. 连续函数的运算.

定理1 (四则运算, $+ - \times /$)

$f(x)$. $g(x)$ 在 x_0 点连续. $\Rightarrow$

$f(x)\pm g(x)$. $f(x)\cdot g(x)$. $f(x)/g(x)$ $(g(x_0)\neq 0)$

在 x_0 点连续.

定理2 (反函数的连续)

$y=f(x)$ 是单增(减), 且连续, $x\in I_x$. $\Rightarrow$

反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是单增(减), 且连续, $y\in I_y$,

$I_y=\{y\mid y=f(x), x\in I_x\}$

定理3 (复合函数的连续性) 连续函数与极限号可交换

$y=f(\varphi(x))$ 由 $y=f(u)$. $u=\varphi(x)$ 复合而成,

$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, $\lim\limits_{u\to a}f(u)=f(a)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x)) \xlongequal{u=\varphi(x)} \lim\limits_{u\to a}f(u)=f(a)=f(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))$

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x))$$

特别地, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$. $u_0=\varphi(x_0)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x))=f(\varphi(x_0))$$
$$=f(\varphi(\lim_{x\to x_0}x))=f(\varphi(x_0))$$

例1. 判断 $F(x)=\dfrac{3|x|-x^2}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ 的连续性. $(x>0)$

$\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$

例2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\ln e$$

$$=1$$

定理4.(初等函数的连续性)

(1) 基本初等函数在定义域内连续;

(幂.指.对.三.反三)

(2) 初等函数在定义区间内连续.

$y=\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{\sin x-1}$

例3. 确定 a, 使

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0\\ a+x, & x\geq 0\end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.