第三章 微分中值定理与导数的应用.

§1. 微分中值定理

定理1 (罗尔定理)

(i) $f(x) \in C[a,b]$
(ii) $f(x) \in D(a,b)$
(iii) $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow$ 至少 $\exists \xi \in (a,b)$. 使得 $f'(\xi)=0$.

(对应 $f(x)$ 有水平的切线)

证明: $f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \exists m, M$. 使 $f_{min} = m$. $f_{max} = M$.

(i) $m = M$. $f(x) = C$. $\Rightarrow f'(x) = 0$

(ii) $M > m$. M, m 至少有一个不等于 $f(a)=f(b)$.

不妨设 $f(a) \neq M$.

故 存在 $\xi \in (a,b)$. s.t. $f(\xi) = M$.

$\because f(x) \in C(a,b)$

$\therefore f'(\xi) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\xi+\Delta x) - f(\xi)}{\Delta x}$ 存在.

又 $f'_+(\xi) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(\xi+\Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0$

$f'_-(\xi) \quad \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(\xi+\Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geq 0$

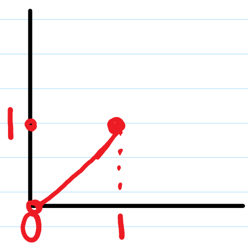
由 $0 \leq f'_-(\xi) = f'(\xi) = f'_+(\xi) \leq 0$

有 $f'(\xi) = 0$.

注: 条件是充分条件. 三个条件缺一不可.

(i) "连续"

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

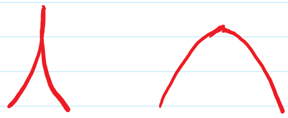


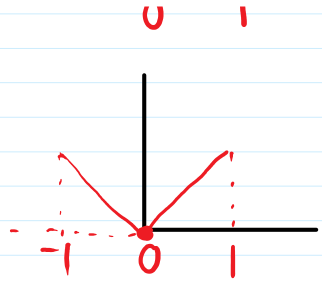
(ii) "可导"

$f(x) = |x| \quad x=0$

(ii) 例子

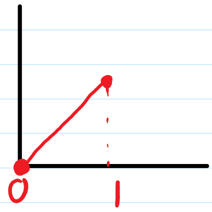
$f(x)=|x|,\quad x=0$





(iii) "$f(a)=f(b)$"

$f(x)=x,\quad 0\le x\le 1$



例1. 证明：方程 $x^3+3x+1=0$ 在 $(-1,1)$ 内有且仅有一个实数根.

证明：(1) 存在性.

设 $f(x)=x^3+3x+1$. 则 $f(x)\in C[-1,1]$，且

$f(-1)f(1)=(-3)(5)<0$.

由零点定理，$\exists\,\xi\in(-1,1)$，使得 $f(\xi)=0$.

即方程 $x^3+3x+1=0$ 至少有一个实数根.

(2) 唯一性.（反证法）

假设 $\exists\,\xi_1\in(-1,1)$，使得 $f(\xi_1)=0$，且 $\xi_1<\xi$.

由罗尔定理知，$\exists\,c\in(\xi_1,\xi)\subset(-1,1)$，使得

$$f'(c)=0.$$

而 $f'(x)=3(x^2+1)>0$，$\forall x\in(-1,1)$.

矛盾. 故假设不真.

$\therefore$ 方程 … 有且仅有一个实根位于 $(-1,1)$.

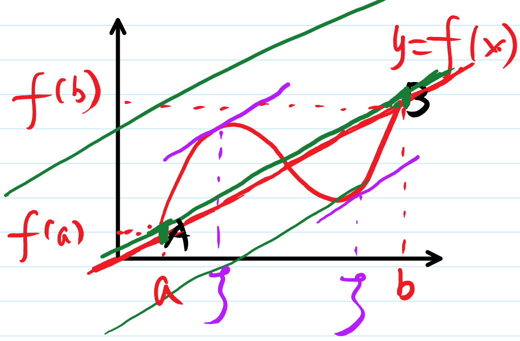
定理2（拉格朗日中值定理）

(i) $f(x)\in C[a,b]$ $\}$ $\Longrightarrow$ 至少 $\exists\,\xi\in(a,b)$ 使得

(ii) $f(x)\in D(a,b)$ $\}\Rightarrow \exists\, \xi\in(a,b)$. 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

注：曲线 $y=f(x)$ 上存在平行于弦 AB 的切线



分析：$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\Leftrightarrow\quad f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \qquad f'(x)\Big|_{x=\xi}=0$$

$$\Leftarrow\quad \left[f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right]'\Bigg|_{x=\xi}=0$$

$$\Leftarrow\quad \underline{[F(x)]'\Big|_{x=\xi}}=\left[f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right]'\Bigg|_{\underline{x=\xi}}=0$$

证：设 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，则

$F(x)\in C[a,b],\ D(a,b)$,

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a=\frac{bf(a)-\cancel{af(a)}-af(b)+\cancel{af(a)}}{b-a}$$

$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}b=\frac{\cancel{bf(b)}-af(b)-\cancel{bf(b)}+bf(a)}{b-a}$$

由罗尔定理知，$\exists\,\xi\in(a,b)$. 使得 $F'(\xi)=0$.

即
$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

注.(i) $F(x)$ 不唯一！

$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

(ii) $$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

推论: $f'(x)=0,\ x\in I_x \Rightarrow f(x)=C$. #

例2. 证明: $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, $-1\le x\le 1$.

证: 设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$, 则 $f(x)\in C[-1,1]$. $D(-1,1)$

$\because f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$, $-1<x<1$.

$\Rightarrow f(x)=C$.

当 $x=0$ 时, $C=\frac{\pi}{2}$ $\therefore f(x)=\frac{\pi}{2}$.

当 $x=\pm1$ 时. $f(x)=\frac{\pi}{2}$.

例3. 证明: 当 $x>0$ 时,

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

证: 设 $f(x)=\ln(1+x)$. $[0,x]$

设 $f(t)=\ln(1+t)$, $0\le t\le x$. 则

$f(t)\in C[0,x]$, $D(0,x)$.

应用拉格朗日中值定理, 得 $\exists\xi\in(0,x)$. s.t.

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)$$

即 $$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}.$$

$0<\xi<x \Rightarrow \frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<1 \Rightarrow \frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x$

$$0<\xi<x \Rightarrow \frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<1 \Rightarrow \frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x$$

$$\therefore \frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x, \quad x>0.$$

定理 3 （柯西中值定理）

(i) $f(x), F(x) \in C[a,b]$

(ii) $f(x), F(x) \in D(a,b)$, $F'(x) \neq 0$

$\Rightarrow$ 至少 $\exists \xi \in (a,b)$. 使得

$$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}.$$

注：(i) $f(b)-f(a) = f'(\xi_1)(b-a)$

$F(b)-F(a) = F'(\xi_2)(b-a)$ （X）

(ii) $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} F'(\xi)$