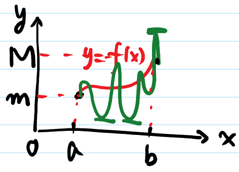
Th1（有界性定理）

$f(x)\in C[a,b] \Rightarrow \exists M>0.\ s.t.\ |f(x)|\leq M.\ x\in[a,b].$



Th2（最大值最小值定理）

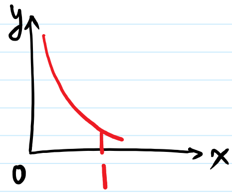
$f(x)\in C[a,b] \Rightarrow \exists x_1\in[a,b].\ s.t.\ f(x_1)$ 是最大值；

$\exists x_2\in[a,b],\ s.t.\ f(x_2)$ 是最小值.

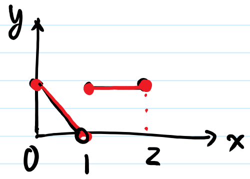
注：“连续”与“闭区间”缺一不可.

(i) $f(x)=\frac{1}{x}.\quad (0,1)$

$f(x)=\tan x.\quad (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$



(ii) $f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leq x<1\\ 1, & 1\leq x\leq 2\end{cases}$



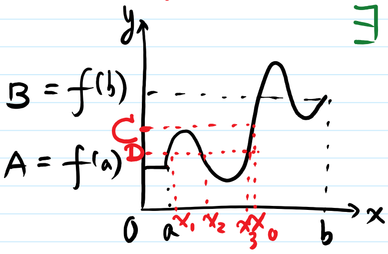
Th3（介值定理）

$f(x)\in C[a,b],\ f(a)=A,\ f(b)=B\quad (A\neq B).$

$\Rightarrow$ 介于 A. B 之间的 C. $\exists x_0\in(a,b).\ s.t.$

$f(x_0)=C.$

$F(x_0)=f(x_0)-C=0$



$f(x)\in C[a,b]$

$f(a)>f(b)$

$\Rightarrow \forall C\in(f(b),f(a))$

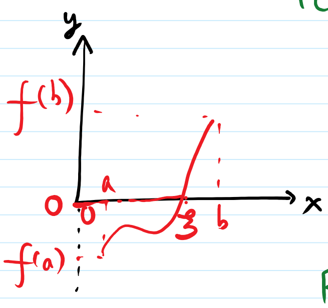
$\exists x_0\in(a,b).\ s.t$

$f(x_0)=C.$

Th4（零点定理）

$f(x)\in C[a,b],\ f(a)f(b)<0$

$\Rightarrow \exists \xi\in(a,b).\ s.t.\ f(\xi)=0$



证：令 $F(x)=f(x)-C$,

则 $F(x)\in C[a,b]$

$F(a)F(b)<0$

所以，$\exists x_0\in(a,b).$

$s.t.\ F(x_0)=0$

即 $f(x_0)=C.$

注：证明方程根的存在性.

（即是函数 $y=f(x)$ 的零点.）

例1. 证明: $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少存在一个实根.

($f(x)=x^3-4x^2+1$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点)

证: 令 $f(x)=x^3-4x^2+1$, 则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

$f(0)f(1)<0$.

由零点定理. 可得 $\exists\, \xi \in (0,1)$. s.t. $f(\xi)=0$.

即 ξ 是 $\cdots\cdots=0$ 在 $(0,1)$ 内的实根.

计算.