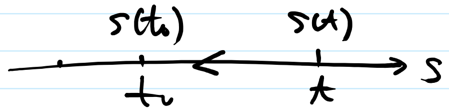
第二章 导数与微分

§1. 导数的定义

1. 引例

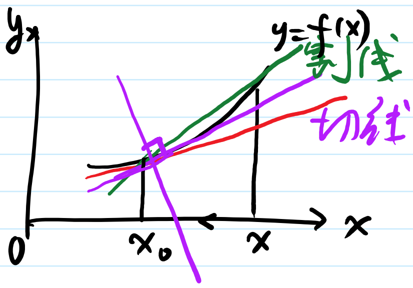
例A. 瞬时速度.

平均速度 $\bar{v} = \dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$



在 t_0 时刻的瞬时速度 $v = \lim\limits_{t\to t_0} \bar{v} = \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.

例B. 切线斜率



割线斜率 $k_{sec} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

切线斜率 $k_{tan} = \lim\limits_{x\to x_0} k_{sec}$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

2. 导数定义

定义1 (在 x_0 点的导数) $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义,

若 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

存在, 则该极限值称为 $f(x)$ 在 x_0 点处的导数, 或 $f(x)$ 在 x_0 点可导, 记作

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

注: (i) 其它记号和定义式:

$$y'\big|_{x=x_0} = f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(ii) 若极限不存在, 则称 $f(x)$ 在 x_0 点不可导;

(iii) 几何意义：导数描述切线的斜率.

∴ 切线方程：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

法线方程：$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

定义2（单侧导数）

$$\begin{cases} \text{左导数：} & f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \\ \text{右导数：} & f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\cdots=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\cdots \end{cases}$$

注：(i) $\begin{cases} \text{单侧极限：} & f(x_0-0)=f(x_0^-).\quad f(x_0+0)=f(x_0^+). \\ \text{单侧导数：} & f'_-(x_0),\ f'_+(x_0) \end{cases}$

(ii) $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $f'_-(x_0)$. $f'_+(x_0)$ 分别存在，且 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

分段函数的分段点处的导数只能应用单侧导数定义来讨论.

高数答疑时间：

每周五下午 4:00-5:30

教七 212.

定义3（在 (a,b) 内可导）

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点可导，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导

定义4（在 $[a,b]$ 上可导）

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$，$f'_-(b)$ 都存在，则

称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导.

注：(i) $f'(x)$ — 导(函)数.

(ii) $\begin{cases} f'(x_0) = f'(x)\big|_{x=x_0} \\ (f(x_0))' = 0 \end{cases}$

3. 用定义求导数的方法

步骤：(1) 求函数的增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$；

(2) 求比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$；

(3) 求极限 $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

例1. $y=C$. 求 y'. $(C)'=0$

解：$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{C-C}{x-x_0} = 0$.

例2. $y=\sin x$. 求 y'. $(\sin x)' = \cos x$

解：$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ $\to 1$

$= \cos x$.

注：$(\cos x)' = -\sin x$

$(x^n)' = nx^{n-1}$.　　$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$　　$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(a^x)' = a^x \ln a$　　$(e^x)' = e^x$　　$a^2-b^2=$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$　　$(\ln x)' = \frac{1}{x}$　　$a^3-b^3=\cdots$

证: $(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$　　$a^n-b^n=(a-b)(\cdots)$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left[(x+h)^{n-1}+x(x+h)^{n-2}+\cdots+x^{n-1}\right]}{\cancel{h}}$　　$a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}$

$= nx^{n-1}$

例3　讨论: $y=|x|$ 在 $x=0$ 点处的连续性与可导性.

解: (i) $y=|x|$ 在 $x=0$ 点连续.

(ii) $x=0$ 分段点,

$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1$

$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1$.

而 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$

$\therefore$ $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 点不可导.

4. 可导性与连续性的关系.

Th　$f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处连续;
反之不成立.

(可导 $\Rightarrow$ 连续; 连续 $\not\Rightarrow$ 可导)

证: $f'(x_0) = \lim \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\cdots}$

证：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A\ (<+\infty)$

$\Rightarrow\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$

即 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

例4. 讨论 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)\ \Rightarrow\ f(x)$ 在 $x=0$ 点连续

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)\ \Rightarrow\ f(x)$ 在 $x=0$ 点可导

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.