

文章编号 1005-0388(2002)05-0437-05

无条件稳定的交替方向隐式FDTD 算法<sup>\*</sup>

刘 波 高本庆 薛正辉 胡 沥

(北京理工大学电子工程系, 北京 100081)

**摘 要** 介绍了一种新的FDTD 算法——交替方向隐式时域有限差分法(ADI-FDTD)。该方法采用求解微分方程的交替方向隐格式改造了FDTD 算法,使其能无条件稳定,从而极大地节约计算时间,成为一种计算时域电磁场分布的高效算法。同时,首次尝试利用ADI-FDTD 方法结合时域近远场变换技术计算天线方向图。数值实验的结果和传统FDTD 方法及理论值进行了对比,数值结果一致性较好,并节约了运算所占用的资源,提高了计算效率。

**关键词** 交替方向隐式时域有限差分法(ADI-FDTD), FDTD, 近远场变换, 方向图

**中图分类号** O441.4 **文献标识码** A

Numerical simulation of unconditionally stable  
ADI-FDTD algorithm

LIU Bo GAO Benqing XUE Zhenghui HU Li

(Dept. of E.E., Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract** ADI-FDTD, a new modified version of finite difference time domain (FDTD) method, can eliminate the restraint of Courant-Friedrich-Levy condition, so as to get an efficient saving of CPU time. In this paper, it is the first time that this method is applied to the calculation of time domain near zone to far zone transformation. As simulation examples, two antenna radiation patterns are derived and the numerical results are compared with those obtained from traditional FDTD and theoretical values. Good agreement is observed, while computational efficiency of ADI-FDTD method is improved.

**Key words** ADI-FDTD, FDTD, near zone to far zone transformation, pattern

## 1 引 言

时域有限差分法(FDTD)作为一种典型的全波分析时域算法<sup>[1]</sup>,近年来在众多领域的电磁问题中得到广泛的应用,展现了广阔的发展前景。然而,毋庸置疑,传统的FDTD 方法也有其自身的不足之处,至少表现在两个方面。一是数值色散条件的限制,即为控制数值色散必须要求空间步长取得足够小,尤其是计算较高频率信号传输的情况时更是如此。通常认为空间步长要小于波长的十分之一,对于电大对象,将不可避免地导致计算量和存贮量的增加,

难于处理。最近提出的多分辨率时域方法(MRTD)以及时域伪谱算法(PSTD)可以在每个波长的距离上只取两个采样点,仍保持低数值色散特性,能较好地解决这一问题。二是时间稳定性条件的限制,由于FDTD 法是由Maxwell 方程组离散后得到的显式差分算法,必须满足时间稳定性条件,也就是时间步长的取值由计算空间中空间步长的最小值决定,即时间步长的选择又受到空间步长的限制。时间步长的减小,使得迭代步数和运算时间大量增加,此问题一直没能有效解决。

本文所介绍的新算法能够令FDTD 方法一定程

度上摆脱时间步长稳定性条件的限制,明显地节省计算时间。这种方法将偏微分方程数值解法中适用于解决多维空间问题的交替方向隐式算法(alternating direction implicit method)巧妙地应用到显式的FDTD方法的差分迭代方程中,故而可以称之为交替方向隐式时域有限差分法(ADI-FDTD)<sup>[2~4]</sup>。本文给出了这种算法的差分迭代公式,并首次将其应用到计算场的传播以及天线阵的方向图问题。同时,通过和传统FDTD法计算结果的比较,证明其高效性。

## 2 数值迭代公式

ADI-FDTD方法采用传统的FDTD方法的Yee氏网格,并且具有相同的空间场分布,形式上的主要不同是ADI-FDTD法在每一个时间步的计算中包含两个步骤,即 $n$ 和 $n+1/2$ 时间步。下面分别以两个步骤中的电场分量 $E_x^{n+1/2}$ 和 $E_x^{n+1}$ 为例,给出具有一定普遍意义的非均匀媒质中,空间网格尺寸非一致情况下ADI-FDTD采用的迭代公式。

第一步骤中采用如下的差分方式:

$$E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k) = C_a(i+1/2, j, k) \cdot E_x^n(i+1/2, j, k) + C_b(i+1/2, j, k) \cdot \{ H_z^n(i+1/2, j+1/2, k) - H_z^n(i+1/2, j-1/2, k) \} / \Delta y(j) - [ H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k-1/2) ] / \Delta z(k) \quad (1)$$

$$H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) = H_y^n(i+1/2, j, k+1/2) + D_b(i+1/2, j, k+1/2) \cdot \{ E_z^n(i+1/2, j+1/2) - E_z^n(i, j, k+1/2) \} / \Delta x(i) - [ E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1) - E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k) ] / \Delta z(k) \quad (2)$$

式中系数的定义方式与传统FDTD相类似,其中

$$C_a(i, j, k) = \frac{2\epsilon(i, j, k) - \alpha(i, j, k) \Delta}{2\epsilon(i, j, k) + \alpha(i, j, k) \Delta}$$

$$C_b(i, j, k) = \frac{2\Delta}{2\epsilon(i, j, k) + \alpha(i, j, k) \Delta}$$

$$D_b(i, j, k) = \frac{\Delta}{\mu(i, j, k)}$$

由于(1)~(2)式中的每一个方程左右两边都含

有相同时刻的场量,故而不能直接进行计算,必须进行适当地变形。将第一步骤中的方程(2)代入方程(1),消去 $H_y^{n+1/2}$ 分量,可以得到如下的差分方程(1'):

$$\begin{aligned} & -\alpha_1 E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k-1) + \beta_1 E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k) - \\ & \gamma_1 E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1) = \\ & p_1 E_x^n(i+1/2, j+1/2, k) + \\ & [ H_z^{n+1}(i+1/2, j+1/2, k) - \\ & H_z^{n+1}(i+1/2, j-1/2, k) ] / \Delta y(j) - \\ & [ H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - \\ & H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k-1/2) ] / \Delta z(k) + \\ & q [ E_z^n(i+1, j, k-1/2) - \\ & E_z^n(i, j, k-1/2) ] / \Delta x \Delta - \\ & r [ E_z^n(i+1, j, k+1/2) - \\ & E_z^n(i, j, k+1/2) ] / \Delta x \Delta \quad (1') \end{aligned}$$

其中

$$\alpha_1 = D_b(i+1/2, j, k-1/2) / \Delta z^2(k)$$

$$\beta_1 = 1/C_b(i+1/2, j, k) + \alpha_1 + \gamma_1$$

$$\gamma_1 = D_b(i+1/2, j, k+1/2) / \Delta z^2(k)$$

$$p_1 = C_a(i+1/2, j, k) / C_b(i+1/2, j, k)$$

$$q_1 = D_b(i+1/2, j, k-1/2)$$

$$r_1 = D_b(i+1/2, j, k+1/2)$$

随着方程(1')中 $i$ 和 $j$ 取值的变化,可以组成一个在网格空间中逐行扫描的线性方程组用于求解整个问题空间的场量 $E_x^{n+1/2}$ 。还可以发现这个方程组对角线上的元素满足 $|\beta_1| > |\alpha_1| + |\gamma_1|$ ,因此可以采用占用计算资源较少的追赶法求解。同样地,可以得到关于 $E_y^{n+1/2}$ 和 $E_z^{n+1/2}$ 分量的线性方程组。然后,由方程(2)可以求出 $H_y^{n+1/2}$ 的值。类似地,可以得到 $n+1/2$ 时刻其它两个方向的电磁场分量值,完成这一时刻全部场量的计算。

第二步骤中采用如下的差分方式(注意此时右端利用的磁场分量与第一步骤中对应场量的时间步是交替的):

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(i+1/2, j, k) = & C_a(i+1/2, j, k) \cdot \\ & E_x^{n+1/2}(i+1/2, j, k) + \\ & C_b(i+1/2, j, k) \cdot \{ H_z^{n+1} \\ & (i+1/2, j+1/2, k) - H_z^{n+1} \\ & (i+1/2, j-1/2, k) \} / \Delta y(j) - \\ & [ H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - \\ & H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k-1/2) ] / \Delta z(k) \} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_z^{n+1}(i+1/2j+1/2,k) = & H_z^{n+1/2}(i+1/2j+1/2,k) + \\ & D_b(i+1/2j+1/2,k) \cdot \\ & \{ E_x^{n+1}(i+1/2j+1,k) - \\ & E_x^{n+1}(i+1/2j,k) \} / \Delta y(j) - \\ & [ E_y^{n+1/2}(i+1j+1/2,k) - \\ & E_y^{n+1/2}(i,j+1/2,k) ] / \\ & \Delta x(i) \} \end{aligned} \quad (4)$$

与第一步采样完全相同的转换方法,将方程(4)代入(3),即可得到用于求解场量 $E_x^{n+1}$ 的隐式线性方程,不再赘述。同样能得到 $E_y^{n+1}$ 和 $E_z^{n+1}$ 的隐式方程,再计算 $n+1$ 时刻三个方向的磁场分量值,完成这一时刻场的计算。文献[2]证明该算法在原理上是无条件稳定的,即时间步长不受空间步长大小的限制。当然,考虑到文献[5]中提出的随着时间步长的增加,数值色散效应会越发显著,应用中的时间步长取值绝不能任意增大。

### 3 数值结果

本文用ADI-FDTD方法计算电磁波在三维空间中传输情况,然后将该方法与时域的近远场变换技术结合,计算了具有代表性的平面天线阵方向图的数值结果,并将其与FDTD的计算结果以及理论解进行了比较。

#### 3.1 自由空间中波的传输

计算空间为自由空间,体积是 $25 \times 25 \times 25 \text{ m}^3$ ( $50 \times 50 \times 50$  网格),空间步长 $\Delta_s$ ( $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta_s$ )为 $0.5 \text{ m}$ 。激励是频率为 $1.5 \text{ GHz}$ 的点源正弦电场 $E_z$ 。图1中分别给出FDTD法和ADI-FDTD法计算的空间一点电场随时间的变化情况,边界条件为PML[9]。两种方法采用的时间步长分别为 $8.3 \text{ ps}$ 和 $41.5 \text{ ps}$ 。这里,对于FDTD方法,时间步长 $\Delta$ 满足稳定性条件:

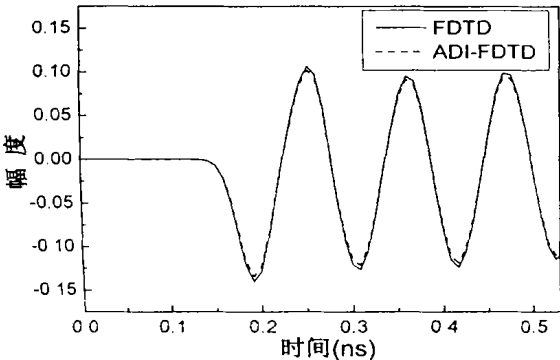


图1 与激励点相距 $3 \text{ m}$ 处 $E_z$ 分量随时间的分布

$$\Delta \leq \Delta_{\max} = \frac{1}{c \sqrt{(1/\Delta_x)^2 + (1/\Delta_y)^2 + (1/\Delta_z)^2}}$$

其中 $c$ 为光速。而ADI-FDTD方法所采用的时间步长是FDTD方法的5倍,当然,此处还可以取得更大,只是随着采样间隔的增大,误差也会相应变大。由计算程序设定相同的物理时间,这里ADI-FDTD法计算程序在Pentium II 266型PC机上运行所用的时间仅为显式FDTD的1/5多一些。

#### 3.2 天线方向图的计算

在时域结合近远场变换求解天线方向图问题是FDTD方法近年来的一个发展方向。概括地讲,该方法是将FDTD计算求得的时域值经过与频域方法相似的等效、变换过程[7],再通过Fourier变换得到频域响应,从而求得方向图。这里包括三层计算:一是沿所选闭合面将表面电流和磁流(对应切向电场和磁场)沿表面积分;二是将该积分对时间求偏导数;最后,利用离散傅立叶变换求出方向图。这里涉及对闭合面上的场量需存储其一定长度的时间序列值,不同于FDTD算法进行一般迭代运算时不需存储较早时刻场值的作法,故而,如采用传统FDTD进行计算,必将占用大量的存储空间。如果选用不受时间稳定性条件限制的ADI-FDTD,将时间步长设置成较传统FDTD更大的值,可以减小需存储的各场量时间序列的长度,从而占用较少的存贮空间,并且减少运算中迭代的次数,达到显著节省计算资源的目的。

##### 3.2.1 偶极子辐射方向图的计算

采用时域算法中的近远场变换方法,得到FDTD和ADI-FDTD两种方法计算偶极子E面方向图结果,其中角度变化范围为从与偶极子轴向夹角 $0^\circ$ 到 $180^\circ$ 。计算过程中,选取均匀的空间步长,令隐式算法的时间步长为显式的5倍。边界条件仍为PML[9],经过比较发现两者计算结果吻合较好。隐式占用的内存较显式稍有增加,但CPU计算运行时间大约节省2/3。总的来说,隐式算法在很大程度上提高了FDTD法的效率。

##### 3.2.2 求解平面阵列天线方向图

相对于简单天线,要令阵列天线辐射场稳定需要用更长的计算时间,因此ADI-FDTD方法较传统显式FDTD方法就更能体现其节约时间的优势。下面给出用这两种方法计算 $5 \times 5$ 的平面阵E面方向图计算实例(图3)。各馈源均于 $yoz$ 面内,且为沿 $z$ 轴方向,频率 $1.5 \text{ GHz}$ 的正弦电场信号。各激励单元相距 $12 \text{ cm}$ (大于 $1/2$ 波长)。

计算中隐式方法仍采用 5 倍于显式 FDTD 的时间步长。由图 4 可见,两者的计算结果同样吻合较好。和传统显式 FDTD 法相比,隐式方法在同前所述的 PC 机上运行时间节省大约 2/3。

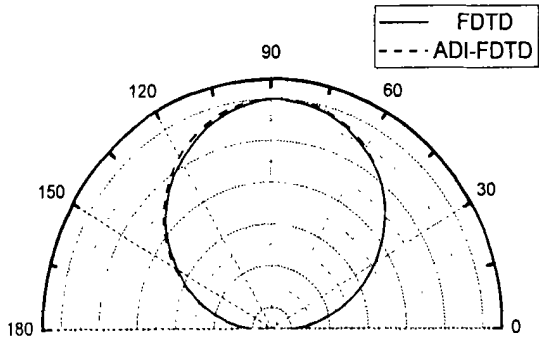


图 2 偶极子天线 E 面方向图

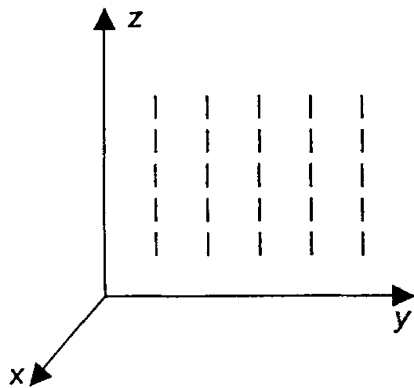


图 3 平面天线阵的馈源分布

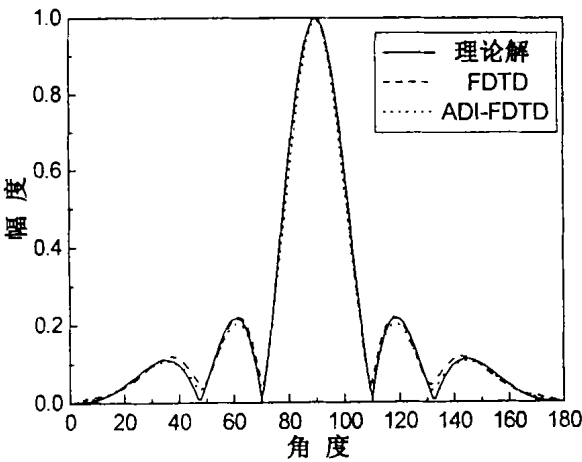


图 4 5×5 平面天线阵的方向图

4 结 论

本文介绍了一种基于微分方程数值解法中交替方向隐格式的 FDTD 算法。由于其不受时间稳定性条件的限制,所以运行时可以选择较大的时间步,从而缩短 CPU 的运行时间。相对于传统 FDTD 法,其缺点是,由于每时间步需存储两个步骤的场量值,占用内存较大。本文作者正尝试将理论上较传统 FDTD 法能够节省 33% 内存的 R-FDTD 算法<sup>[9]</sup>与 ADI-FDTD 算法结合,达到节约计算时所需内存的目的。总之,这种交替方向隐式 FDTD 算法是一种值得深入研究并推广应用的时域算法。

参考文献

[ 1 ] 高本庆. 时域有限差分法 [ M ] . 国防工业出版社, 1995.

[ 2 ] T Nani ki . A new FDTD algorithm based on alternating direction implicit method [ J ] . IEEE Trans . Microwave Theory and Techniques , 1999, 47( 10 ) : 2003~2007.

[ 3 ] T Nani ki . 3-D ADI-FDTD method unconditionally stable time-domain algorithm for solving full vector Maxwell's equations [ J ] . IEEE Trans . Microwave Theory and Techniques , 2000, 48( 10 ) : 1743~1748.

[ 4 ] F Zheng , Z Chen , and J Zhang . Toward the development of a three dimensional unconditionally stable finite difference time-domain method [ J ] . IEEE Trans . Microwave Theory and Techniques , 48( 9 ) : 1950~1958, 2000.

[ 5 ] T Nani ki , and K Ito . Investigation of numerical errors of two-dimensional ADI-FDTD method [ J ] . IEEE Trans . Microwave Theory and Techniques , 2000, 48( 11 ) : 1950~1956.

[ 6 ] G Liu and S D Gedney . Perfectly matched layer for an unconditionally stable three dimensional ADI-FDTD method [ J ] . IEEE Microwave and Guided Wave Letters , 2001, 10( 7 ) : 261~263.

[ 7 ] R J Lubbers , Karl S Kunz , Michael Schneider , and Forrest Hunsberger . A finite difference time domain near zone to far zone transformation [ J ] . IEEE Trans . Antenna and Propagation , 1991, 39( 4 ) : 429~433.

[ 8 ] 刘波, 高本庆, 薛正辉等 . 交替方向隐式 FDTD 算法 [ C ] . 广州: 2001 年全国电磁兼容学术会议论文集, 中国通信学会.

[ 9 ] G D Kondylis , F D Flavia s , G J Pottie , and T Itoh . A memory efficient formulation of the finite difference time domain method for the solution of Maxwell equations [ J ] . IEEE Trans . Microwave Theory and Techniques , 2001, 49( 7 ) : 1310~1320.

( 下 转 第 461 页 )

然而,对于电各向异性介质目标,其前向散射场一般地减小,尤其是在  $90^\circ$  的散射方向上变化特别大,而后向散射场显著地增强。

### 参考文献

- [1] K S Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media [J]. IEEE Trans on AP, 1966, 14(4): 302~307.
- [2] J Schneider, S Hudson. The Finite-difference time-domain method applied to anisotropic material [J]. IEEE Trans on AP, 1993, 41(7): 994~999.
- [3] G Mur. Absorbing boundary condition for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations [J]. IEEE Trans on EMC, 1981, 23(4): 1073~1077.
- [4] K K Mei and J Fang. Superabsorption-A method to improve absorbing boundary conditions [J]. IEEE Trans on AP, 1992, Vol. 40, PP. 1001~1010.
- [5] J P Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic wave [J]. Journal of Computational Physics, 1994, Vol. 114, pp: 185~200.
- [6] A P Zhao, J Junctunen and V Raisenen. Generalized material-independent PML absorbers for the FDTD simulation of electromagnetic waves in arbitrary anisotropic dielectric and magnetic media [J]. IEEE Microwave and Guided Wave Lett, 1998, 8(2): 52~57.
- [7] H Y Tan, K Liu and D Liang. Standing-traveling wave boundary condition (STWBC) for finite-difference time-domain mesh truncation [J]. IEEE ELECTRONICS LETTERS, 2000, 36(6): 508~509.

- [8] 金建铭. 电磁场有限元方法 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1998 年. pp: 196.
- [9] M F Catedra, E Gago and L Nuno. A numerical scheme to obtain the RCS of three-dimensional bodies of resonant size using the conjugate gradient method and the fast fourier transform [J]. IEEE Trans on AP, 1989, 37(5): 528~537.
- [10] B Becker, K Umashankar and A Taflov. Numerical analysis and validation of the combined field surface integral equations for electromagnetic scattering by arbitrary shaped two-dimensional anisotropic objects [J]. IEEE Trans on AP, 1989, 37(12): 1573~1581.



**龚主前** (1971-), 男, 湖北人, 博士研究生。在读期间一直从事复杂军用目标电磁散射特性方面的学习和研究, 主要研究各向异性材料及涂层目标的 FDTD 算法。

**朱国强** (1959-), 男, 武汉人, 博士, 教授, 博士生导师。长期从事军用复杂目标电磁散射特性、天线理论与技术等方面的研究工作。

**郑立志** (1974-), 男, 湖北人, 博士研究生, 目前正在香港城市大学从事研究。在读期间一直从事复杂军用目标电磁散射的频域及时域特性方面的学习和研究工作。

(上接第 440 页)



**刘波** (1974-), 男, 哈尔滨人, 2001 年于空军工程大学获得工学硕士学位。现于北京理工大学电子工程系攻读博士学位, 从事计算电磁学, 电磁兼容以及系统生存能力等方面的研究工作。



**薛正辉** (1970-), 男, 上海人, 现为北京理工大学电子工程系讲师, 博士。主要从事电磁场与微波技术方面的教学和计算电磁学、电磁兼容及微波毫米波技术方面的有关研究, 发表论文十余篇。

**高本庆** (1936-), 男, 安徽人, 北京理工大学教授, 博士生导师, 中国电子学会会士, IEEE 高级会员。近期科研工作涉及毫米波技术、计算电磁学、电磁兼容与生物电磁学等。