Apuntes videos clase n° 4:

Aproximaciones de Chebyshev y Bessel

Función de filtrado.

- Encontrar modelos/funciones matemáticas que se asemejen lo más posible al brick-wall, el filtro ideal. Tratar de encontrar funciones matemáticas realizables, que deriven en sistemas causales.

* Máxima planicidad → polinomios, mientras mayor era el orden, más se parecía al brick-wall.

* Consecuencia: Al aumentar el ~~orden~~ grado de los polinomios, aumentaba el retardo de grupo.

↳ mejor caso posible: retardo de grupo constante → fase lineal, con la menor pendiente posible si se puede.

- Máxima planicidad → se imponen las restricciones de módulo por sobre las de fase. Me importa el módulo, la fase y el retardo de grupo serán las que toquen. Son consecuencia de lo anterior.

Intro video 1

Bessel → Planteo limitaciones sobre el retardo de grupo y dejo "libre" el módulo, será el que tenga que ser para cumplir con las restricciones de retardo de grupo.

Chebyshev → tmb intenta acercarse/asimilarse al brick-wall, pero con otro enfoque.

- Impongo una restricción de ripple/módulo en la banda de paso
- Comportamiento oscilatorio y acotado entre dos valores en la banda de paso.
- Esa oscilación ~~lo~~ su amplitud la puedo controlar con el parámetro ξ, controlo la amplitud del ripple.
- Respuestas <u>equi-ripple</u> → misma cantidad de ripple distribuido en toda la banda de paso.

"Antes en MP, el error estaba distribuido de forma asintótica en toda la banda de paso, ahora lo acotamos" → Esto trae consecuencias.

Cheby inverso y Cauer → no forman parte de la guía de TP's.

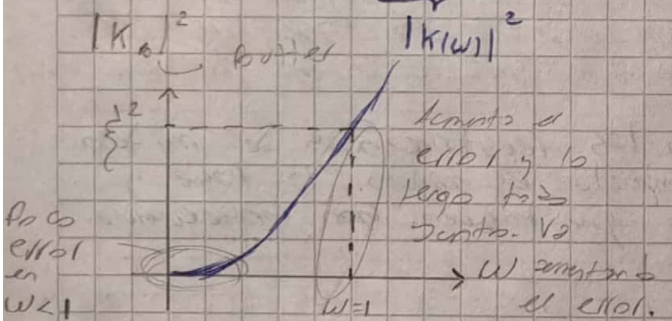
~~Antes en MP con el ξ^2 controlaba la distorsión máxima en la banda de paso en función del α_{min} y max.~~

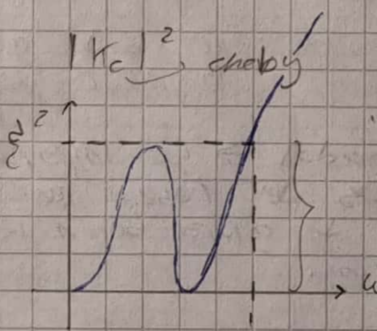
Video 2:

$|K(\omega)|^2$ → función de aproximación del filtro (aproximación al brick-wall)

$$|T_B(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \underbrace{\xi^2 \cdot \omega^{2n}}_{|K(\omega)|^2}}$$

$|K_B|^2$ → función "suave" → derivadas intermedias nulas.

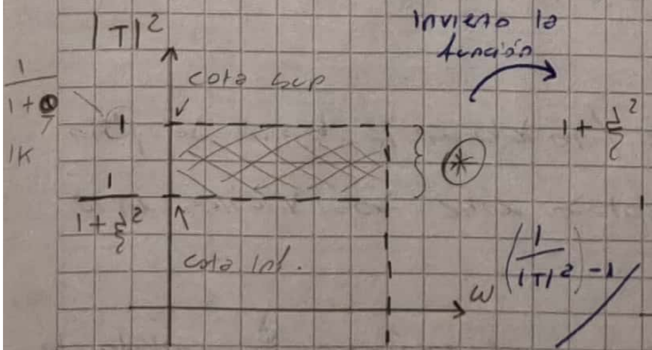


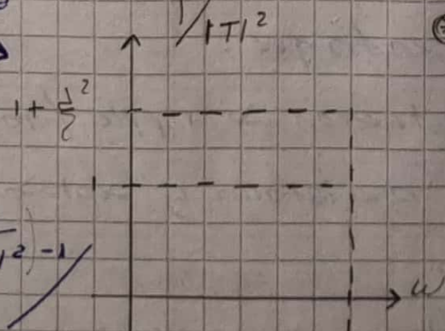


el error está "encajonado", hay un ripple permitido en la banda de paso. Banda de oscilación, ya que la función oscila.

- Ambas funciones deben ser (monótonamente crecientes) a medida que aumenta ω, así se logra la atenuación en la banda de detención o de stop.

- En butter, tenía todo el error junto, acá en cheby el error estaba uniformemente distribuido en toda la banda de paso, pero acotado entre ciertos niveles, en función de ξ^2.



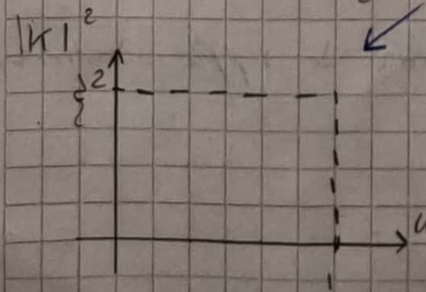


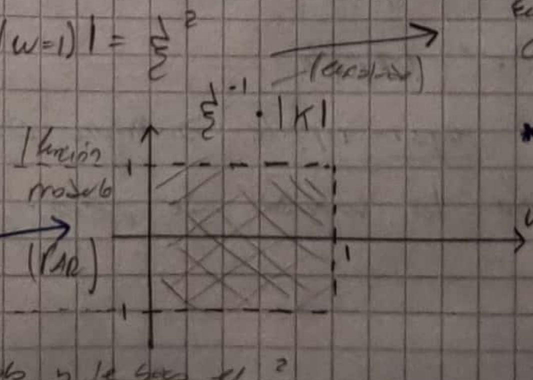
(*) Encajono el ripple en la banda de paso, en base a la función de aproximación que deseo utilizar

Ambas en $\omega=1$ valen ξ^2 y en $\omega=0$ valen 0.

Estas me dan las cotas en las cuales encajono el ripple.

$$|K_C(\omega=0)| = 0 \quad y \quad |K_C(\omega=1)| = \xi^2$$





* obtengo finalmente que necesito una función de aproximación cuyo dominio esté entre (-1 y 1) y su imagen tmb esté limitada entre -1 y 1.

función trigonométrica → Imag. en acotada.
↳ oscilatorias

- Como el módulo de la función aproximación es PAR, me conviene elegir una función de aproximación de naturaleza PAR → coseno(x).

Desarrollo:

$\xi^{-1} \cdot |K| = \gamma \rightarrow |K| = \xi \cdot \gamma$

$|wk|$ → banda de paso

Imagen(x) → $\gamma = \xi \cdot \cos(n x)$

Acoto el dominio(x) → $x = \cos^{-1}(w)$

$\Big\} \; |K| = \xi \cdot \cos[n \cdot \cos^{-1}(w)]$

$|w_{pi}|$ → banda de atenuación.

$\cos^{-1}(w) = jz \rightarrow$ Imaginario puro) para cuando: $|w| \geq 1$ exponente real !

$$w = \cos(jw) = \frac{e^{j \cdot (jw)} + e^{-j(jw)}}{2} = \frac{e^{w} + e^{-w}}{2} = \cosh(z)$$

Identidad trigonométrica del coseno

$w = \cosh(z) \rightarrow z = \cosh^{-1}(w)$ (Así me libro el num imaginario)

exponente real hace que se convierta a coseno hiperbólico.

$$\Rightarrow |K| = \xi \cdot \cos[j \cdot (\cosh^{-1}(w))] = \xi \cdot \cosh[\cosh^{-1}(w)]$$

- $|K| = \xi \cdot \cosh[n \cdot \cosh^{-1}(w)]$; $\forall w$ (para toda frecuencia w posible)

Se obtiene una expresión cerrada para poder calcular los coeficientes C_n del polinomio de Chebyschev.

↳ tmb se lo suele conocer como $\boxed{|K| = C_n(w)}$

- $$|T_c(w)|^2 = \frac{1}{1 + C_n^2(w)}$$ módulo^2 de una transferencia Chebyschev.

* **Expansión polinómica de un coseno:**

es infinita, no acotada, yo lo puedo acotar dado un determinado "n". Define la longitud del polinomio.

$$\cos(n\theta) = 2^{n-1} \cdot \cos^n(\theta) - \frac{n}{1!} \cdot 2^{n-3} \cdot \cos^{n-2}(\theta)$$

$$+ \frac{n \cdot (n-3)}{2!} \cdot 2^{n-5} \cdot \cos^{n-4}(\theta) - \frac{n \cdot (n-4) \cdot (n-5)}{3!} \cdot 2^{n-7} \cdot \cos^{n-6}(\theta) + \dots$$ sigue

reemplazo el argumento → si $\theta = \cos^{-1}(w)$ → reemplazo arriba.

- $$C_n(w) = \cos[n \cdot \cos^{-1}(w)] = 2^{n-1} \cdot w^n - \frac{n}{1!} \cdot 2^{n-3} \cdot w^{n-2} + \dots$$ factorial

$$\boxed{C_n(w) = 2w \cdot C_{n-1}(w) - C_{n-2}(w)}$$!

Expresión para poder obtener los coeficientes C_n del polinomio de Chebyschev.

los $C_n(w)$ son polinomios, no coeficientes.

$\Longrightarrow C_n(w) = 2w \cdot C_{n-1}(w) - C_{n-2}(w)$ // Expresión recursiva para $n \geq 2$

$\left.\begin{array}{l} C_0(w) = 1 \\ C_1(w) = w \end{array}\right\}$ "semillas" para poder hacer recursiva la expresión y obtener los $C_2, C_3, \ldots$ me permiten inicializar la secuencia.

$\rightarrow C_2(w) = 2w \cdot \underbrace{(w)}_{C_1} - \underbrace{(1)}_{C_0} = 2w^2 - 1$ //

$\rightarrow C_3(w) = 2w \cdot \underbrace{(2w^2-1)}_{C_2} - \underbrace{(w)}_{C_1} = 4w^3 - 2w - w = 4w^3 - 3w$ //

\# ~~Cálculos~~ $|k| = \xi \cdot \cosh[n \cdot \cosh^{-1}(w)]$; $|k| = C_n$

no olvidar el ξ que debe multiplicar a la función de aproximación, en este caso multiplica al polinomio de chebyshev. (fin video nº2)

Otras anotaciones:

En cheby se busca distribuir el error de la función de aproximación homogéneamente, para que siempre esté acotado y no sea siempre monótonamente creciente.

$\boxed{\text{Video nº3:}}$

- $|T_c(jw)|^2 = \dfrac{1}{1 + C_n^2(w)}$ //
  ↓
  cheby

$\underbrace{C_n(w) = \xi \cdot \cos[n \cdot \cos^{-1}(w)]}$

Utilizo esta expresión para analizar lo que pasa en la banda de paso. $|w| < 1$

Punto de arranque $\rightarrow w = 0$, pero cambia en función de "n"

$n=1)$ $C_n(w=0) = \xi \cdot \cos[1 \cdot \cos^{-1}(0)] = \xi \cdot \underbrace{\cos[1 \cdot \pi/2]}_{0} = 0$

$\Longrightarrow |T_c(w=0)| = \dfrac{1}{1+0^2} = 1$ // n = impar, empieza en 1

no tiene sentido analizar $n = 0$, siempre $n \geq 1$.

$n=2)$ $C_n(w=0) = \xi \cdot \cos[2 \cdot \cos^{-1}(0)] = \xi \cdot \underbrace{\cos(2 \cdot \pi/2)}_{-1} = -\xi$

$\Longrightarrow |T_c(w=0)| = \dfrac{1}{1 + (-\xi)^2} = \dfrac{1}{1+\xi^2}$ // n = par, empieza en $\dfrac{1}{1+\xi^2}$

- $C_n(w=0) = \xi \cdot \cos[n \cdot \underbrace{\cos^{-1}(0)}_{\pi/2}] = \xi \cdot \cos\left(n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow n$ impar $|T_c(0)| = 1$

  $\hookrightarrow n$ par $|T_c(0)| = \dfrac{1}{1+\xi^2}$

- $\cos^{-1}(0)$ siempre será $\pi/2$, lo que cambia es el n que afecta a ese $\pi/2$.

- Recordar que en la expresión va $\boxed{C_n(w)}^2$ hay que elevar al cuadrado el resultado.

Análisis en $\omega=1$ → fin de banda de paso:

• $C_n(\omega=1) = \xi \cdot \cos[n \cdot \underbrace{\cos^{-1}(1)}_{0}]$; $\cos^{-1}(1) = 0$ o $2k\pi$, pero siempre PAR

$$= \xi \cdot \cos[n \cdot 0] = \xi \cdot \cos[n \cdot \underbrace{(2k\pi)}_{PAR}] = 1 \cdot \xi = \xi$$

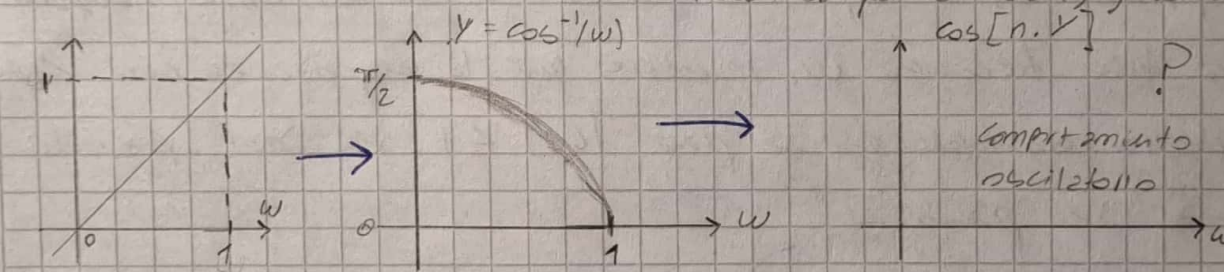
$C_n^2(\omega=1) = \xi^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow |T_c(\omega=1)| = \frac{1}{1+C_n^2(\omega)} = \frac{1}{1+\xi^2}$$

• Por eso todas las funciones de cualquier orden n pasan por el mismo punto a la salida de la banda de paso.

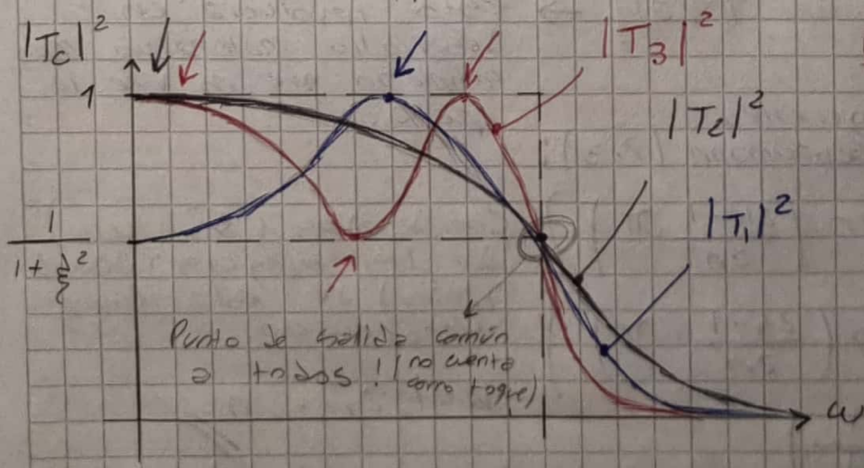
$$C_n(\omega) = \xi \cdot \cos[n \cdot \cos^{-1}(\omega)]$$

La frecuencia angular ω se ve afectada en 3 ocasiones, se ve modulada por el $\cos^{-1}()$ y el $\cos()$.



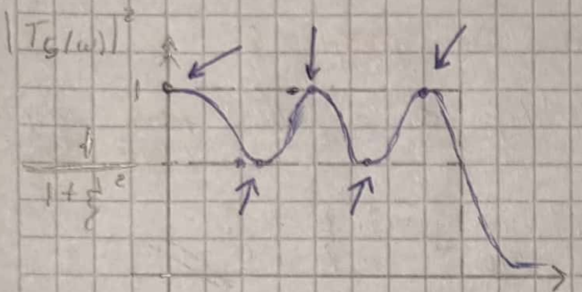
• A medida que aumente el orden "n" del filtro, aumentará tmb la cantidad de oscilaciones de la función de aproximación en la banda de paso. En consecuencia, tmb aumentarán la cantidad de "toques" de esta función contra las cotas superiores e inferiores que encajonan el ripple de la banda de paso.

$\Longrightarrow$ La cantidad de toques en la región confinada será igual al orden "n" del filtro, sin contar el toque en $\omega=1$, ya que ese es común a todas las funciones (punto de salida)



Importante: las modulaciones de los $\cos()$ y $\cos^{-1}()$ provocan un desplazamiento hacia el lado derecho de las oscilaciones en la región confinada.
Por ende, los toques contra las cotas se producirán más cerca de $\omega=1$ que de $\omega=0$ a medida que aumente el orden "n" del filtro.

• Ejemplo transferencia filtro Chebyshev orden $n=5$.



Contabilizo 5 toques en la banda de paso antes de salir de la región condicionada.

Recordar que esto es el gráfico del módulo de la transferencia al cuadrado!

Video 4:

Importante: $C_n(\omega) = \xi \cdot \cosh[n \cdot \cosh^{-1}(\omega)]$; $\boxed{\forall \omega}$

$C_n(\omega) = \xi \cdot \cos[n \cdot \cos^{-1}(\omega)]$; $\boxed{|\omega| \leq 1}$

La primera es la expresión GENERAL de los $C_n(\omega)$, válida para toda frecuencia ω, mientras que la segunda es una expresión particular, solamente válida para $|\omega| \leq 1$, es decir, para la banda de paso.

Localización de P y Z en $|T_c|^2$

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+C_n^2(\omega)}\Bigg|_{\underbrace{\omega = \frac{s}{j}}} = \frac{1}{1+C_n^2(s/j)} = T(s) \cdot T(-s)$$

• Necesito volver al dominio s para poder obtener el diagrama de polos y ceros de la función $|T_c|^2$

• $C_n(s/j) = \xi \cdot \cosh[n \cdot \cosh^{-1}(s/j)]$ → esto involucra un desarrollo matemático muy complejo que no vale la pena.

* Obtenemos los siguientes resultados del Schaumann (7.3):

• $\sigma_k = -\mathrm{senh}(a) \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2k-1}{2n} \cdot \pi\right)$

• $\omega_k = \cosh(a) \cdot \cos\left(\frac{2k-1}{2n} \cdot \pi\right)$

• $a = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{senh}^{-1}\left(\frac{1}{\xi}\right)$

Coordenadas $(\sigma_k ; \omega_k)$ de las singularidades (polos) de esta función transferencia.

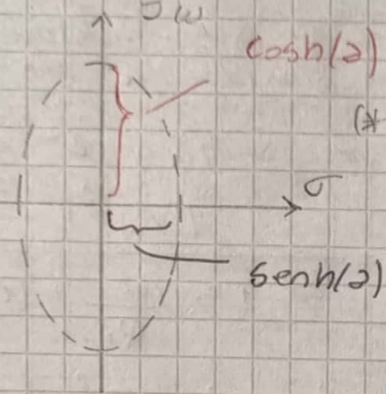
$k = 1, 2, \ldots, n$

min 15 ?

hasta el min 20, copiar dos ... visto

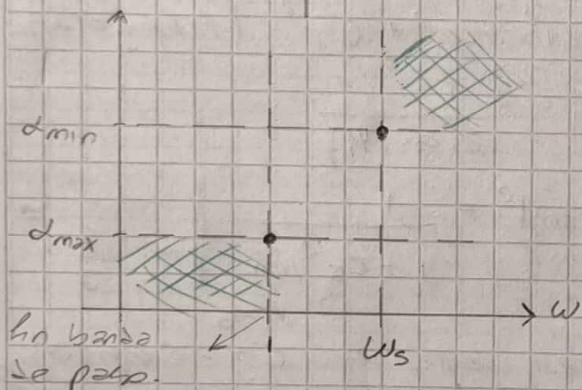
f) Faltas que estén al cuadrado las componentes de abajo para poder ver la ecuación de una elipse, ellos en el video. Son las diagonales de la elipse.

- Despejando un paso y aplicando una identidad trigonométrica obtengo que el lugar geométrico de las singularidades es una elipse, con los siguientes parámetros:



$$(*)\quad \frac{\sigma_k^2}{\operatorname{senh}^2(a)} + \frac{\omega_k^2}{\cosh^2(a)} = \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

obtengo la ecuación de una elipse.



→ Zonas permitidas (al revés de como se señala siempre)

Recordar conceptos

α_{max} → máxima atenuación permitida en la banda de paso.

α_{min} → mínima atenuación necesaria en la banda de detenida (stop).

$\underline{\omega = 1}$: $\alpha_{max} = \frac{1}{|T|} = \sqrt{1+\xi^2}$ — Igual que en máxima planicidad

$$\alpha_{max}\Big|_{dB} = 10 \cdot \log\left(1+\xi^2\right) \rightarrow \xi^2 = 10^{\frac{\alpha_{max}}{10}} - 1$$ obtengo a ξ^2

Sí o sí debe estar en dB este parámetro.

$\underline{\omega = \omega_s}$: $$\alpha_{min}\Big|_{dB} = 10 \cdot \log\left(1 + C_n^2(\omega_s)\right)$$

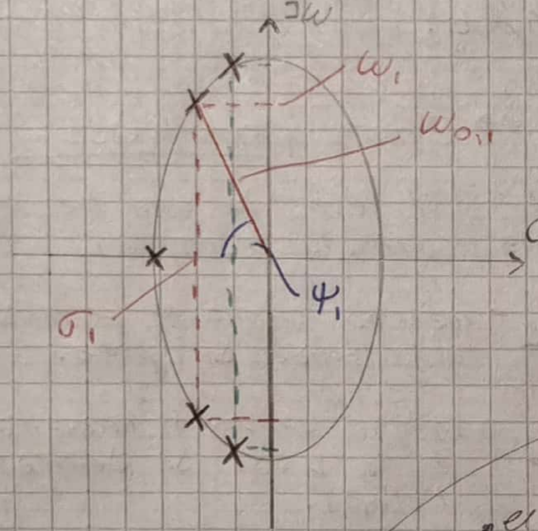
$$\alpha_{min}\Big|_{dB} = 10 \cdot \log\left\{1 + \xi^2 \cdot \cosh^2\left[n \cdot \cosh^{-1}(\omega_s)\right]\right\}$$

- Igual que en máxima planicidad, itero esta expresión con distintos valores de $n = 1, 2, 3, \ldots$ hasta que se cumpla con la atenuación mínima necesaria en ω_s.

⟹ Una vez obtenidos los parámetros "ξ" y "n", queda absolutamente determinada la función de Chebyshev.

Hay dos posibles metodologías para encarar los problemas: la de Schaumann (no recomendada) y la de la Cátedra (recomendada)

- Según el Schaumann (P. 36)
  1. obtener ξ y n
  2. calcular "a"
  3. calcular las componentes σ_k y ω_k con los datos anteriores (de los polos) y ubicar las singularidades en el diagrama de polos y ceros.
  4. construir la transferencia con secciones de 1er y 2do orden.



$$T_4(s) = \frac{(\omega_{0,1})^2}{s^2 + s\,\frac{\omega_{0,1}}{Q_1} + (\omega_{0,1})^2}$$

$$\omega_{0,1}^2 = \omega_1^2 + \sigma_1^2 \quad (\text{Pitágoras})$$

$$Q_1 = \frac{1}{2\cdot\cos(\psi_1)}$$

$$|T_4(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \underbrace{C_5^2(\omega)}_{n=5}}\Bigg|_{\omega = \frac{s}{j}} = T(s)\cdot T(-s)$$

- el polo real está en $\sigma = -\operatorname{senh}(a)$

(ver gráfico pág. anterior)

método cátedra → construirlo con la forma recursiva con el $C_5(s)$

hasta $n = 3$ se puede resolver en lápiz y papel. → criterio de partes de función

$n \geq 4$ → resolver con python y roots().

mismo método con el que se resuelve M.P. (Videos 6 y 7)

- Datos de la plantilla de diseño:

$\begin{cases} \omega_p = 1k\ rad/s \\ \omega_s = 10k\ rad/s \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_{max} = 1dB \\ \alpha_{min} = 55dB \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $n = 3$ → (obtenido mediante software) $\xi^2 = 0,259$ — Vid 7 min 12

recordar: $\Omega_\omega = ?\ 1k\ rad/s = \omega_p$.

- $\xi^2 = 10^{\frac{\alpha_{max}}{10}} - 1 = 0,259$ — Vid 9 min 7

$n = 3$ → se obtiene iterando.

$$|T_3(\omega)|^2 = \frac{1}{1+C_3^2(\omega)} = H(s)\cdot H(-s) \quad ; \quad C_3(\omega) = 4\omega^3 - 3\omega$$

$$= \frac{1}{1+\xi^2\cdot(4\omega^3-3\omega)^2}$$ → resuelvo el cuadrado del binomio.

$$= \frac{1}{1+\xi^2\cdot(16\omega^6 - 2\cdot 4\omega^3\cdot 3\omega + 9\omega^2)}$$

$$= \frac{1}{1+\xi^2\cdot(16\omega^6 - 24\omega^4 + 9\omega^2)}$$

$$= \frac{1}{\omega^6\cdot 16\xi^2 - \omega^4\, 24\xi^2 + \omega^2\, 9\xi^2 + 1} \quad ;$$

- Ahora hago el reemplazo de $\omega = \frac{s}{j}$, para así obtener el polinomio de la transferencia.

$j^6 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = (-1)$

$j^4 = (-1)\cdot(-1) = 1$

$j^2 = (-1)$

- $$|T_3(\omega)|\Big|_{\omega=\frac{s}{j}} = \frac{1}{-s^6\, 16\xi^2 - s^4\, 24\xi^2 - s^2\, 9\xi^2 + 1}$$

$$|T_3(s)|^2 = \frac{1}{1+\xi^2\cdot C_3^2(s)} = \underbrace{\left(\frac{1}{s^3 a + s^2 b + sc + d}\right)}_{T(s)}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{-s^3 a + s^2 b - sc + d}\right)}_{T(-s)}$$

- $s^6)\quad -16\xi^2 = a\cdot(-a) \rightarrow -16\xi^2 = -a^2 \rightarrow \underline{a} = \sqrt{16\xi^2} = 4\xi$
- $s^0)\quad 1 = d^2 \rightarrow \underline{d} = 1$
- $s^2)\quad bd + bd - c^2 = -9\xi^2$

  $2bd - c^2 = -9\xi^2 \rightarrow 2bd + 9\xi^2 = c^2$
- $s^4)\quad -ac - ac + b^2 = -24\xi^2$

  $-2ac + b^2 = -24\xi^2 \rightarrow -2ac + 24\xi^2 = -b^2$

  $b^2 + 24\xi^2 = 2ac$

Sistema de ecuaciones 2x2 para obtener b y c.

me había comido el signo

Importante: cuando queda un sistema de ecuaciones para obtener los coeficientes del polinomio de Chebyschev, SIEMPRE debo quedarme con los ~~[illegible]~~ coeficientes POSITIVOS para el polinomio, ya que esto provocará que el polinomio tenga raíces negativas (en el semiplano izquierdo).

• Un criterio de autocorrección es chequear que todos los coeficientes obtenidos $(a, b, c, d, \ldots)$ sean positivos ¡!.

• Si se llega a una expresión polinómica, hay que descartar las raíces con parte imaginaria y quedarse solamente con las reales positivas, ya que los coeficientes del polinomio son positivos también. Las raíces reales negativas se descartan tmb.

$\Rightarrow$ Resuelvo el sistema 2x2 mediante sustitución.

• $c^2 = 9\xi^2 + 2bd \rightarrow c = \sqrt{9\xi^2 + 2bd}$

• $b^2 = -24\xi^2 + 2ac$

$2ac = 24\xi^2 + b^2 \rightarrow \left(2a \cdot \sqrt{9\xi^2 + 2bd}\right)^2 = \left(24\xi^2 + b^2\right)^2$

$4a^2 \cdot \left(9\xi^2 + 2bd\right) = \left(24\xi^2 + b^2\right)^2$; $a = 4\xi$ y $d = 1$ (ya obtenidos previamente)

$4 \cdot (16\xi^2) \cdot (9\xi^2 + 2b \cdot 1) = (24\xi^2 + b^2)^2 \rightarrow$ me va a quedar una cuadrática solamente en función de b.

$64\xi^2 \cdot (9\xi^2 + 2b) = (576\xi^4 + 2 \cdot 24\xi^2 \cdot b^2 + b^4)$

o bicuadrática.

$\cancel{576\xi^4} + 128\xi^2 b = \cancel{576\xi^4} + 48\xi^2 b^2 + b^4$

$b^4 + 48\xi^2 \cdot b^2 - 128\xi^2 b = 0$; factor común b y le bajo un grado al polinomio.

$\underbrace{b}_{b=0} \cdot (1b^3 + \underbrace{48\xi^2}_{x} \cdot b - \underbrace{128\xi^2}_{y}) = 0$

$x = 48\xi^2 = 3,219$

$y = 128\xi^2 = 8,5864$

$b_1 = \cancel{2,563} \rightarrow$ real positiva $\rightarrow$ ~~$b = 2,563 \approx 2,52$~~

$b = \cancel{4,4568}$ 2,0116 (chequeado con spyder)

b_2 y $b_3 \rightarrow$ complejas conjugadas $\rightarrow$ las descarto

(tmb se puede calcular las raíces con roots() en Spyder y será más preciso poniendo ξ^2 como constante.

$c = \sqrt{9\xi^2 + 2bd} = \sqrt{9 \cdot (0,259)^2 + 2 \cdot (\cancel{2,52}) \cdot 1} = \cancel{3,3531}$ 2,52

4,46

$T_3(s) = \dfrac{1}{as^3 + bs^2 + cs + d} = \dfrac{1}{4\xi s^3 + 4,4568 s^2 + 3,3531 \cdot s + 1}$

$T_3(s) = \dfrac{1}{2,0352\, s^3 + 4,4568 \cdot s^2 + 3,3531 \cdot s + 1}$

coinciden con las rtas del video.

Si quiero llevar $T_3(s)$ a su formato mónico, saco factor común "a" en el denominador y lo llevo al numerador. Entonces queda:

$$T_3(s) = \frac{0,4913}{1s^3 + 0,9883.s^2 + 1,2384.s + 0,4913}$$

(Ver primero la teoría de Cheby)

44 2

04/05

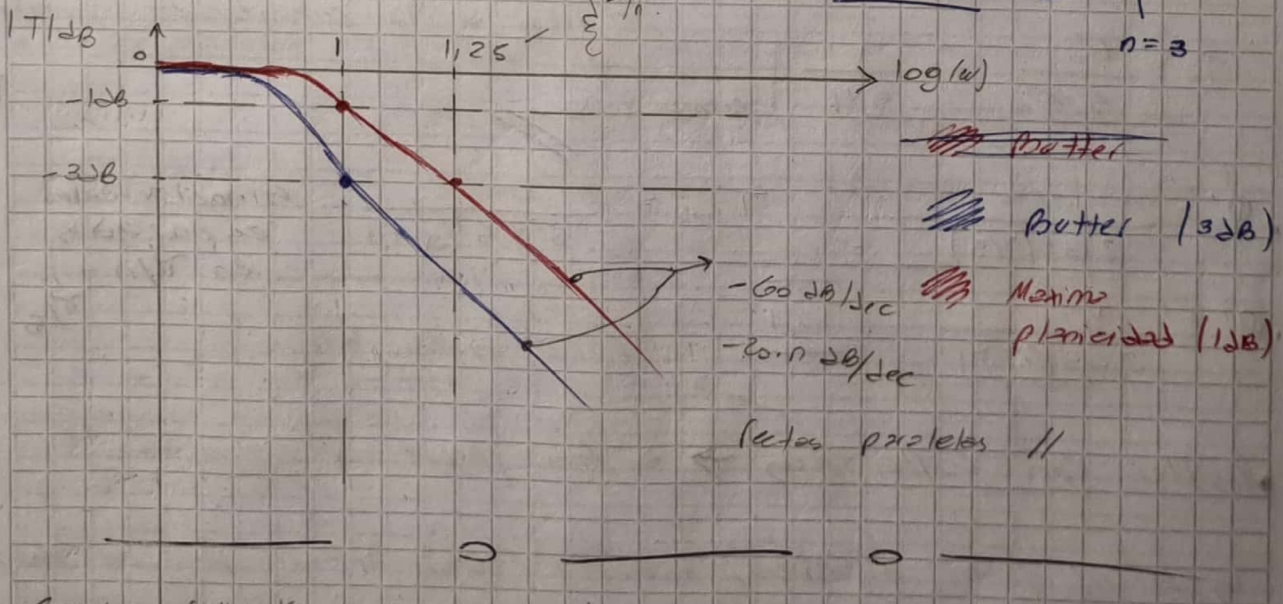
Clase presencial (Anotaciones)

- $\Omega_\omega = 2\pi \cdot f_c$
- $\Omega_\omega \rightarrow \Omega_{Butter} = \Omega_\omega \cdot \xi^{-1/n}$

- En Cheby, no hay forma de esquivar el procedimiento manual para obtener los coeficientes del polinomio del denom. no se puede hacer el atajo de Butter, hay que hacerlo sí o sí a manopla.

- Anotación: las asíntotas de la banda de atenuación depende solamente del grado del filtro, no de la topología.

Como es de orden 3, la pendiente será de $-60\ dB/dec$. $= \left[-20 \cdot n\ dB/dec\right]$ $n = 3$



- Conectar Sallen-Key en cascada → tengo un op amp como salida: Eso me garantiza que lo puedo cascadear, ya que tengo un generador ideal de tensión, puedo colgar lo que yo quiera aguas abajo, hasta otras ramas u otra etapa.

Ejercicio num 2 de la guía:
Sallen-Key en cascada.

↳ Importante: están relacionados los diagramas de Q y de ganancia. No puedo obtener ambos a la vez como yo quiero, siempre alguno lo tengo que relajar. No posee ajuste ortogonal esta configuración.

• Preferible priorizar el Q y relajar la ganancia, después la ganancia la puedo ajustar con una etapa posterior. (buena implementación)

• existe Q máximo de un Sallen-Key = 2,3 → max. Dato importante (conceptual)

*Orden n = 5)

$T(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, orden $Q(s) = 5$.

Donde meto la ganancia? preguntar para más adelante.

$T(s) = T'_{sos} \cdot T''_{sos} \cdot T_L \cdot K_1$

T_L → orden lineal. Me aporta el polo real que me falta. El resto de la circunferencia, cumple con eso.

$T_L = \frac{\theta_0}{s+\theta_0} = \frac{1}{s+1}$ normalizado.

T_{sos} = orden 2 second order system?

• $Q' = \frac{1}{2\cos(\pi/5)} = 0{,}62$

$T'_{sos} = \frac{1}{s^2 + s\,1/Q + 1}$

singularidades espaciadas en $\pi/n = \pi/5$

• $Q'' = \frac{1}{2\cos(2/5\,\pi)} = 1{,}61$

Puro Sallen Key.

• Butter con Sallen-Key → difícil pasar de un orden 5.

y si me piden ganancia, todavía tengo menos rango/cota.

Orden 5 como máximo con suerte.

• Dato con la factorización de secciones.

$Q = \frac{1}{3-K}$

$K = 1 + \frac{R_B}{R_A}$

datos de un Sallen-Key. ganancia (K) y Q están íntimamente relacionados en esta topología.

• Problema de las transferencias $\boxed{S.A.B.}$ (single amplifier, biquad)

Problema de un solo operacional.

[No tengo ajuste ortogonal tal como en el Ackerberg - Mossberg.]

• Supongo un $Q = 3$ → despejo K para ese Q.

$Q = \frac{1}{3-K}$ → 3

$3 \cdot (3-K) = 1$

$9 - 3K = 1$

$9 - 1 = 3K$

$8/3 = K$

• $K = 1 + \frac{R_B}{R_1}$ → $R_B = K - 1 = 8/3 - 1 = 5/3$

→ $R_2 = R_1$

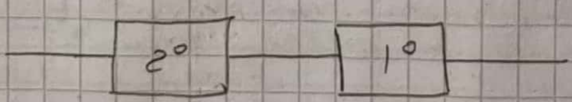
• Necesito normalizado al 1% para hacerlo funcionar, con resistencias al 5% es imposible por su sensibilidad. (Problema de implementación)

Valores estándar.

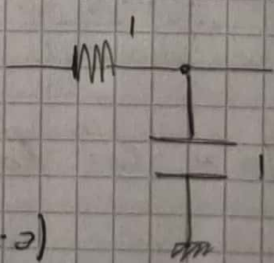
$R_1 = 10K$, $R_B = 18K$ } $Q = 5$

ahora se me va el Q a 5 cuando yo lo quería de $Q = 3$.

• Sistema inestable → al hacerlo andar en AC, verías un pico hacia infinito en la transferencia y la fase invertida, con pendiente positiva → sistema anti-causal. (buena anotación)



$Q = 1$ SOS



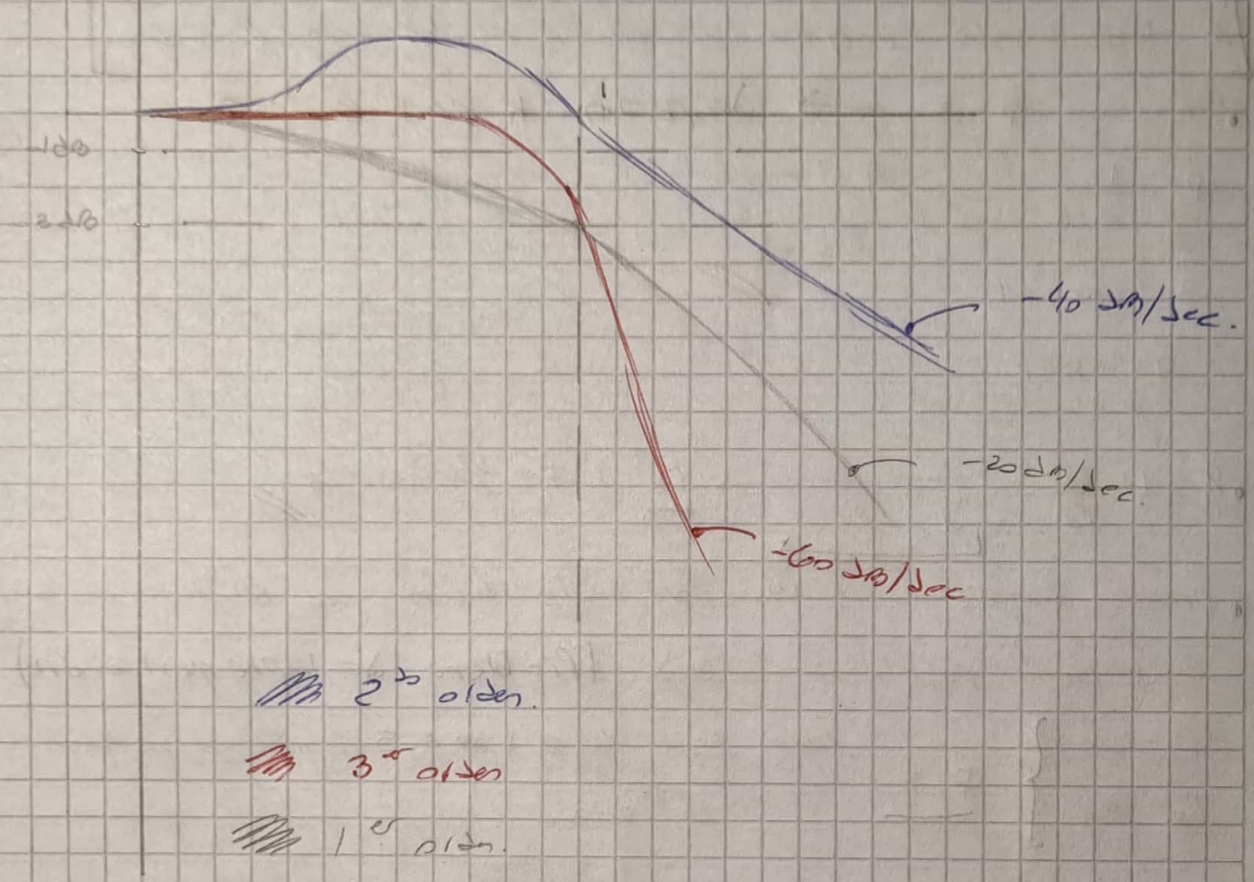
(TS3)

• $|T(w_0)| = Q_0 = 0\,dB$. (Importante característica)

Cuando desnormalizas en función de ξ, tenés 1dB en $w=1$ y -3dB en 1,25.

(queda todo en 1.?) Preguntar. $R = L = C = 1$

$Q = 1$ en la primer etapa SOS.



$$T_{1o} = \frac{1}{s+1}$$

$$T_{2o} = \frac{1}{s^2+s+1}$$

Composición de curvas. la gráfica de la función de 1er orden con la 2do orden para obtener la de orden 3 de máxima planicidad.

(Completar con foto celular)

Repaso Cheby:

$$|T|^2 = \frac{1}{1+\xi^2 \cdot A(\omega^2)} = \frac{1}{1+\xi^2 \cdot \cos(n \cdot \cos^{-1}(\omega))}$$

dominio de ω : -1 a +1.

$$= \frac{1}{1+\xi^2 \cdot \cosh[n \cdot \cosh^{-1}(\omega)]}$$

(expresión alternativa).

Butter: $A(\omega^2) = \omega^{2n}$

Cheby: $A(\omega^2) = C_n^2(\omega^2)$

Recursiva

Podemos también utilizar la de más abajo.

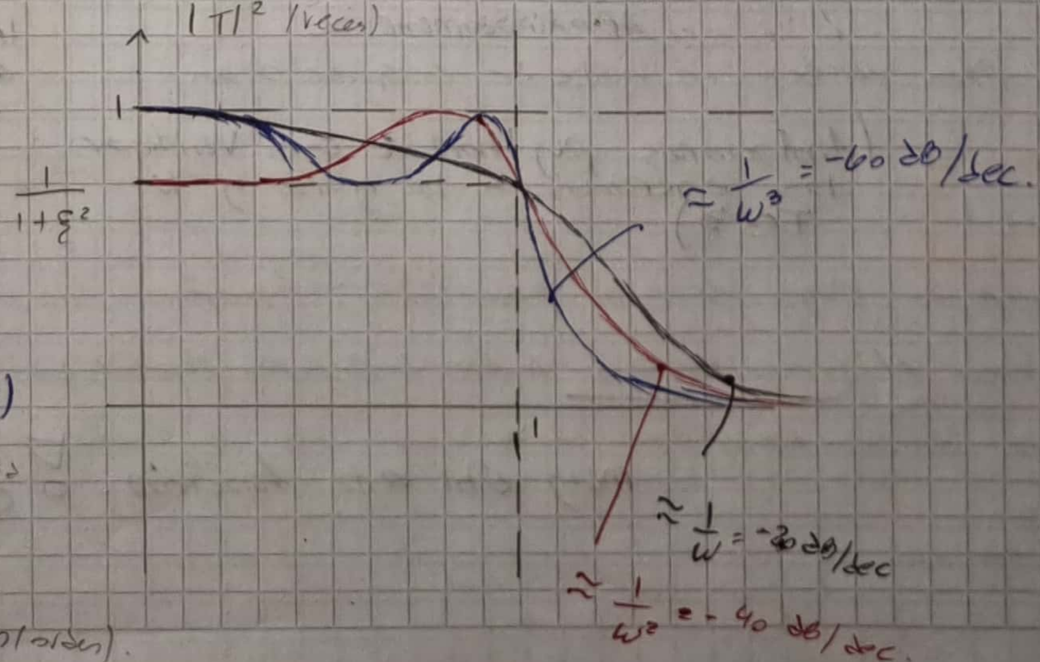
- Para $\omega = 1$ la 1ra función se comporta → como butter? chequear.
- Todas las funciones de cualquier orden (n) pasan por el mismo punto: (ver en el gráfico de abajo)

$\frac{1}{1+\xi^2}$ en $\omega = 1$

- El punto de arranque si varía en función del orden.
  - Par: $\frac{1}{1+\xi^2}$
  - Impar: 1

  Puntos de arranque

- En $\boxed{n=1}$ el polinomio de Cheby es igual al de Butter. Ya a partir de orden 2 cambia.



Caso que contiene la oscilación en la banda de paso. (clave)

Cuento la cantidad de toques en la banda.

Cant. toques = n (orden).

$\boxed{\text{Característica Cheby}}$ → oscilación / rechazo en la banda superior, aproximado al ripple permitido en la banda.

- Cheby distribuye el error en toda la banda de paso y la pasada.

- Cheby Inverso ≡ Cheby tipo 2 → Es un Cheby pasa-altos.

$$|T_{Cheby}|^2 = \frac{1}{1 + \xi^2 C_n^2(\omega^2)}$$

$$|T_{C_I}|^2 = 1 - |T_C|^2 = \frac{\cancel{1} + \xi^2 C_n^2(\omega^2) - \cancel{1}}{1 + \xi^2 C_n^2(\omega^2)}$$

inverso

un pasa-altos?

El ξ^2 se calcula de igual manera en M.P. y en Cheby.

$$\xi^2 = 10^{\alpha_{max}/10} - 1$$

M.P.

$$\alpha_{min_{MP}} = 10 \cdot \log\left(1 + \xi^2 \underbrace{\omega_s^{2n}}_{A(\omega)}\right)$$

Cheby:

$$\alpha_{min_{ch}} = 10 \cdot \log\left(1 + \xi^2 \cosh^2(n \cdot \cosh^{-1}(\omega_s))\right)$$

[• A igual orden, un cheby puede obtener mayor atenuación en la banda de rechazo (α_{min}), $\underbrace{\text{aumenta el doble en función de } n}_{\text{Aproximadamente} \simeq}$.]

Importante comparación entre MP y cheby

* buttap → para verificar un butter de cualquier orden.

(Anotaciones python: como verificar los ejercicios de la guía y la TS3)

- $\boxed{\text{sig.lp2lp()}}$

transformación de pasa bajo a pasa bajo. (lowpass - lowpass)

me permite hacer el reescalamiento butter - Máxima planicidad que uso para des-normalizar.

muy útil esta función.

1,96 daba uno cleo.

hacer TPS con buena cantidad de decimales y chequear con el python.

47 d

Cheby → tiene lugar de ceros: los polos están sobre una elipse.
las singularidades de Cheby están mas cerca del eje $j\omega$.
por ende, eso significa que tendrán mayor Q. en comparación a las singularidades de un MP.
(otra buena comparación entre MP y Cheby)

- analyze_sgs( ) → En teoría lo que hace es que les pone las etiquetas a los gráficos de polos y ceros.

Python:

- Apretando "L" en los gráficos de las ventanas: Zoom vertical. tocando la lupita.
"H" → vuelvo a la visualización original.

[no implementar un Cheby con Sallen-Key, Cheby es muy demandante de Q.] ¡!

- retardo de grupo → importante para la distorsión de fase
- Q ↑ } la fase varía mas bruscamente.
cambio abrupto, pendiente muy pronunciada cerca de ω_0.

- Verificar los coeficientes en función del épsilon trab. con np.roots( )

- guía de tp → ordenes mayores a 3, solamente válidos para hacer en computadora.

Ejercitación

• mismo diseño que en la TS3, pero ahora Cheby.
(vimos tmb el de la guía/3)

(hacer a mano en orden 4 es imposible, muy largo.)

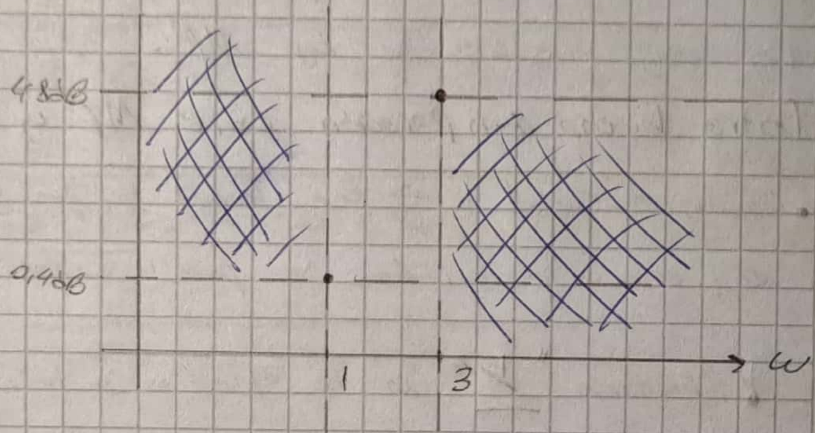
(3) PB Cheby.

$f_s = 9{,}6\ KHz$

$\alpha_{min} = 48\ dB$

$\alpha_{max} = 0{,}4\ dB$

$f_c = 3{,}2\ KHz$.



$$\xi^2 = 10^{\alpha_{max}/10} - 1 = 0{,}096$$

$$\alpha_{min} = 10\log\left(1+\xi^2\cdot\cosh^2(n\cdot\cosh^{-1}(\omega_s))\right)$$

$\alpha_{min}(n=2) = \ldots$ resuelvo por computadora.

$\alpha_{min}(\underline{n=5}) = 60{,}\ldots\ dB$ // (en Butter correspondía a un orden 7).

Ventajas: me ahorro órdenes y tengo una rápida transición.
desventajas: distorsión de fase y ondulación en la banda de paso.

Cambio $\alpha_{min} = 24dB \longrightarrow \underline{n=3}$, así es resoluble en lápiz y papel.

$$\left[T(s)\cdot T(-s)\right]\Big|_{s=j\omega} = |T(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\xi^2 C_3^2(\omega)}$$

$C_3(\omega) = 2\omega C_{n-1} - C_{n-2}$ (C común, no cuadrado).
$= 2\omega C_2 - C_1$; [Regla de recursión]

$$\begin{cases} C_1 = \omega \\ C_0 = 1 \\ C_2 = 2\omega\cdot(\omega-1) = 2\omega^2-1 \end{cases}$$

(no se explica de donde sale todo esto en el video, aceptarlo así como está)

función //

C_0 y C_1 son la semilla de la expresión, luego se aplica recursividad.
Regla recursiva.

No se puede hacer la normalización de Butter acá.

$C_3 = 2w \cdot (2w^2-1) - w$ crítico este paso.

$C_3 = 4w^3 - 2w - w = 4w^3 - 3w$

llevarlo siempre a la forma mónica. Se llega al mismo resultado igual.

$$|T(jw)|^2 = \frac{1}{1+\xi^2 \cdot C_n^2(w)} = \frac{1}{1+\xi^2 \cdot (4w^3-3w)^2}$$

para facilitar el álgebra.

$$= \frac{1}{1+\xi^2 \cdot (16w^6 - 24w^4 + 9w^2)}$$

$$= \frac{1}{16\xi^2 w^6 - 24\xi^2 w^4 + 9\xi^2 w^2 + 1}$$

nomenclatura.

$$\begin{cases} a = 16\xi^2 \\ b = +24\xi^2 \\ c = 9\xi^2 \end{cases}$$

$$= \left[\frac{1}{aw^6 - bw^4 + cw^2 + 1}\right]\Bigg|_{w=\frac{s}{j}}$$

• todos los coeficientes deben ser ~~pares~~ reales

$$= \frac{1}{-as^6 - bs^4 - cs^2 + 1} \Big\} \text{orden } 6$$

sin llevarlo a la forma mónica.

$$|T(s)|^2 = \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha s^3 + \beta s^2 + \gamma s + 1}\right)}_{T(s)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{-\alpha s^3 + \beta s^2 - \gamma s + 1}\right)}_{T(-s)}$$

• $-\alpha^2 = -a$, $\alpha^2 = a$ (1)

• $-b = -\alpha \cdot \gamma - \gamma \cdot \alpha + \beta^2$, $-b = -2\alpha\gamma + \beta^2$ (2).

• $-c = 2\beta - \gamma^2$ (3)

(los órdenes impares me van a dar 0 siempre, usar solo los pares) esto es debido a la factorización.

$* \ \alpha^2 = a \rightarrow \alpha = \sqrt{a} = \sqrt{16\xi^2} = 4\xi$

(2) y (3) son un sistema de ecuaciones.

$\gamma^2 = 2\beta + c$ (3') $\longrightarrow \gamma = \sqrt{2\beta + c}$

(2') $-b = -2\alpha\sqrt{2\beta + c} + \beta^2$ (queda una cuadrática para resolver).

~~bicuadr~~ bicuadrática

$\beta_{1,2} = ?$

si se hace con γ en vez de con β, queda mucho más fácil para calcular. al revés se complica.

cuando se complica con un coeficiente, conviene arrancar con el otro.