

Apuntes videos clase n° 4:

Aproximaciones de Chebyshov y Bessel

- Encuentra modelos / funciones matemáticas que sea cercano lo más posible al brick-wall, el filtro ideal. Tratar de encontrar funciones matemáticas realistas, que sirven en sistemas causales.
- * Máxima planicidad \rightarrow polinomios, mientras mayor sea el orden, mejor se aproxima al brick-wall
- * Cota media: Al aumentar el orden de los polinomios, aumentaba el retraso de grupo.
- ↳ Mejor caso posible: retraso de grupo constante \rightarrow fase lineal, con la menor pendiente posible si se prese.
- Máxima planicidad \rightarrow Se impone las restricciones de máx. por sobre las de fase. No importa el módulo, la fase y el retraso de grupo serán las que toquen. Una consecuencia de lo anterior.

| Bessel \rightarrow Plantea limitaciones sobre el retraso de grupo y dejo "libre" el módulo, será el que sea necesario cumplir con las restricciones de retraso de grupo.

- | Chebyshov \rightarrow También intenta acercarse al máx. de fase del brick-wall, pero con otros enfoque.
- Impongo una restricción de ripple / máx. en la banda de paso
 - Comportamiento oscilatorio y saltos entre los valores en la banda de paso. Su amplitud
 - Esta oscilación la puedo controlar con el parámetro ξ , controlo la amplitud del ripple.
 - Respuestas egori-ripple \rightarrow misma cantidad de ripple distribuido en toda la banda de paso.

INTRO
VIDEO 1

• Antes en MP, el error constante distribuido se forma asintótico en toda la banda de paso, sobre los extremos" → Esto tiene consecuencias.

Cheby, Butter y Cauer → No forman parte de la guía Δ
de TP's.

Anes en MP en el $\frac{d^2}{\omega^2}$ controla la distorsión máxima en la banda de paso, en función del α min y max.

Vídeo 2:

$|K(w)|^2 \rightarrow$ función de aproximación del filtro (aproximación de Bick-Wall)

$$|T_B(w)|^2 = 1 + \frac{1}{\xi^2} \cdot w^{2n}$$

$|K_B|^2$ butter

$|K(w)|^2$

función de
error y lo
largo de
función. w_0
 w_{cero} → el error.

$|K_C|^2$ cheby

ξ^2
el error
"en constante", hay
en BPF
permiso es lo
largo de paso.
Banda de oscilación, que
que la función pa
seña.

el error constante
"en constante", hay
en BPF
permiso es lo
largo de paso.
Banda de oscilación, que
que la función pa
seña.

• Ambas funciones deben ser (minimamente crecientes) o más que
ascenso (w , así se logra la estabilidad en la banda de
oscilación o se stop).

• En butter, tanto todo el error constante, así en cheby el error constante
no lo mantiene distribuido en toda la banda de paso, pero entre
entre estos niveles, es menor $\frac{1}{\xi^2}$.

Invierte la
función

$$\frac{1}{|T|^2} = 1 + \frac{1}{\xi^2}$$

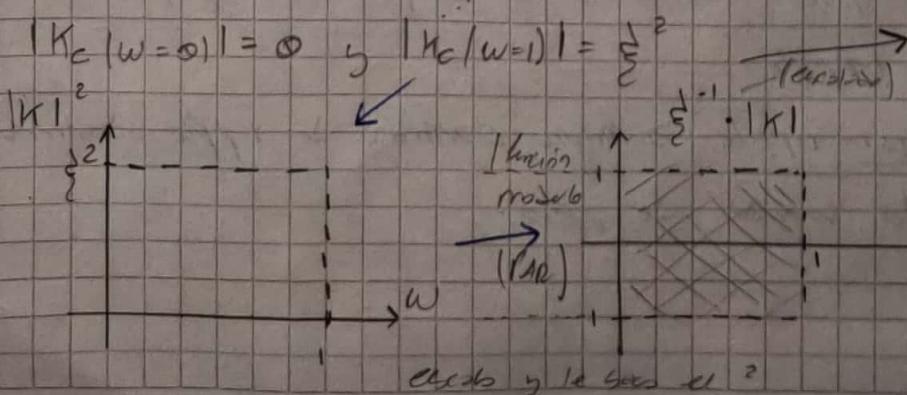
$$w \left(\frac{1}{|T|^2} - 1 \right)$$

* Excepciones al ripple
en la banda de paso, en
hace a la función de
aproximación que deseas
utilizar

Ambas en $w=1$ vale ξ^2
y en $w=\infty$ vale 0.

Esto me da las cotas en las
cuales excede el ripple..

* obtener límites
que necesitas una
función de aproximación
cuya dominio este entre
-1 y 1 y su imagen trab
entre un límite entre
-1 y 1.



\hookrightarrow oscillaciones

- Caso el módulo de la función aproximada es PdB, no convierte el $\cos(x)$ en función de aproximación de naturaleza PdB \rightarrow $\cos(\cos^{-1}(x))$.

Desarrollo:

Imagen(x)

$$\xi^{-1} \cdot |k| = x \rightarrow |k| = \xi \cdot x$$

$|w_k| \rightarrow$ banda \rightarrow peso

$$\rightarrow y = \xi \cdot \cos(nx) \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} k = \xi \cdot \cos[n \cdot \cos^{-1}(w)] \\ \end{array} \right.$$

$|w| > 1 \rightarrow$ banda \rightarrow elevación.

dominio(x)

$$\text{dominio}(x) \rightarrow x = \cos^{-1}(w) \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{para} \\ \text{acercar} \\ \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{expresión} \\ \text{real} \end{array} \right.$$

$$w = \cos(\cos^{-1}(w)) = e^{\frac{j(2w)}{2}} + e^{-j(2w)} = \frac{e^{jw} + e^{-jw}}{2} = \cosh(jw)$$

exponente real here que se convierte en coseno hiperbólico.

$$w = \cosh(jz) \rightarrow z = \cosh^{-1}(w) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ani. punto de} \\ \text{num. imaginario} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow |k| = \xi \cdot \cos[j \cdot (\cosh^{-1}(w))] = \xi \cdot \cosh[\cosh^{-1}(w)]$$

$$|k| = \xi \cdot \cosh[n \cdot \cosh^{-1}(w)] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{para todo} \\ \text{tramo} \\ (w) \text{ posible} \end{array} \right.$$

\hookrightarrow tamb. se lo suele conocer como $|k| = C_n(w)$

módulo 2 de una transmisión chebychev.

* Expansión polimómica de un coseno:

$$\cos(n\theta) = 2^{n-1} \cdot \cos^n(\theta) - \frac{n}{1!} \cdot 2^{n-3} \cdot \cos^{n-2}(\theta)$$

es infinito, no se toma, $y=1$
pues se toma solo en determinado "n".
dicho la longitud del polinomio.

$$+ \frac{n(n-3)}{2!} \cdot 2^{n-5} \cdot \cos^{n-4}(\theta) - \frac{n(n-3)(n-5)}{3!} \cdot 2^{n-7} \cdot \cos^{n-6}(\theta)$$

...

sigue

Ejemplo 1

argumento \rightarrow si $\theta = \cos^{-1}(w)$ \rightarrow reemplazo en el.

$$C_n(w) = \cos[n \cdot \cos^{-1}(w)] = 2^{n-1} \cdot w^n - \frac{n}{1!} \cdot 2^{n-3} \cdot w^{n-2} + \dots$$

$$C_n(w) = 2w \cdot C_{n-1}(w) - C_{n-2}(w) \quad \boxed{\nabla}$$

Expresión para
obtener los
coeficientes C_n del
polinomio de
Chebychev.

$$\Rightarrow C_n(w) = 2w \cdot C_{n-1}(w) - C_{n-2}(w) \quad \text{Expresión recursiva para } n \geq 2$$

$$C_0(w) = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{"semillas" para } \\ \text{para hacer recursiva la expresión} \end{array} \right.$$

$$C_1(w) = w \quad \text{y obtener los } C_2, C_3, \dots \text{ los siguientes}$$

$$\rightarrow C_2(w) = 2w \cdot C_1(w) - 1 = 2w^2 - 1 \quad \text{ inicializar la geometría}$$

$$\rightarrow C_3(w) = 2w \cdot (2w^2 - 1) - 1 = 4w^3 - 2w - 1 = 4w^3 - 3w \quad \text{ } //$$

~~Catetos~~ $|k| = \frac{1}{2} \cosh[n \cdot \cosh^{-1}(w)]$; $|k| = C_n$

No olvidar el $\frac{1}{2}$ que se multiplica a la función de aproximación, en este caso multiplica el polinomio

Otras anotaciones: De Chebychev.

En Chebychev se busca distribuir el error a la función de aproximación homogéneamente, para que siempre esté controlado y no sea siempre monótonamente decreciente.

Vídeo n° 3:

$$\cdot |T_C(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + C_n^2(w)} \quad \text{Cheby}$$

$$C_n(w) = \frac{1}{2} \cos[n \cdot \cos^{-1}(w)]$$

Utilizar esta expresión para analizar lo que pasa en la banda de paso.

Punto de arranque $\rightarrow w=0$, pero cambia en función de "n"

$$n=1) C_1(w=0) = \frac{1}{2} \cos[1 \cdot \cos^{-1}(0)] = \frac{1}{2} \cos[1 \cdot \pi/2] = 0$$

$$\Rightarrow |T_C(w=0)| = \frac{1}{1+0^2} = 1 \quad n=1 \text{ par, empieza en 1}$$

$$n=2) C_2(w=0) = \frac{1}{2} \cos[2 \cdot \cos^{-1}(0)] = \frac{1}{2} \cos(2 \cdot \pi/2) = -\frac{1}{2}$$

no tiene sentido analizar
 $n=0$, siempre

$n \geq 1$.

$$\Rightarrow |T_C(w=0)| = \frac{1}{1 + (-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5} \quad n=2 \text{ par, empieza en } \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}$$

$$C_n(w=0) = \frac{1}{2} \cos[n \cdot \cos^{-1}(0)] = \frac{1}{2} \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow n \text{ impar}$$

$\cos^{-1}(0)$ siempre da $\pi/2$, lo que cambia es el n que afecta a ese $\pi/2$.

Recuerda que es la expresión $|C_n(w)|^2$ que lleva el cuadro al resultado.

$|T_C(0)| = 1$

$$|T_C(0)| = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}^2}$$

Análisis en $\omega=1 \rightarrow$ fin de banda de paso:

$$\bullet C_n(\omega=1) = \frac{1}{2} \cdot \cos[n \cdot \underbrace{\cos^{-1}(1)}_0] ; \cos^{-1}(1) = 0 \text{ o } 2k\pi, \text{ pero siempre PAP}$$

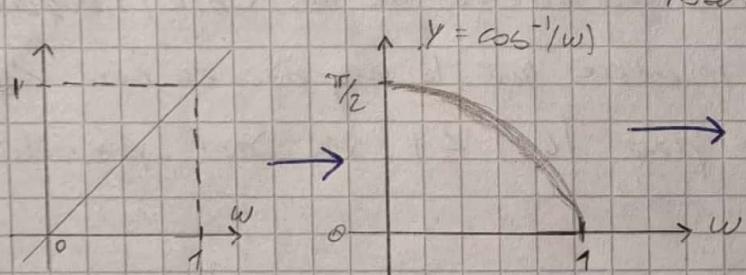
$$= \frac{1}{2} \cdot \cos[n \cdot 0] = \frac{1}{2} \cdot \cos[n \cdot (2k\pi)] = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$C_n^2(\omega=1) = \frac{1}{2}^2 ; \forall n \in \mathbb{N}$$

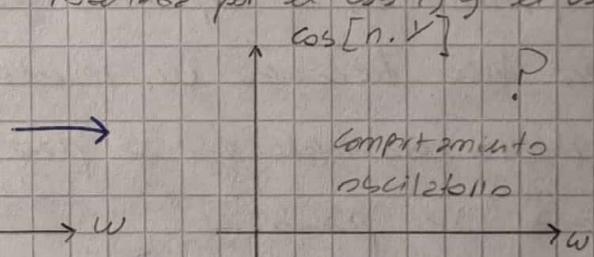
$$\Rightarrow |T_C(\omega=1)| = \frac{1}{1 + C_n^2(\omega)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}}$$

- Por eso todas las funciones de cualquier orden n pasan por el mismo punto a la medida de la banda se pase.

$$C_n(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \cos[n \cdot \underbrace{\cos^{-1}(\omega)}_{Y = \cos^{-1}(\omega)}]$$

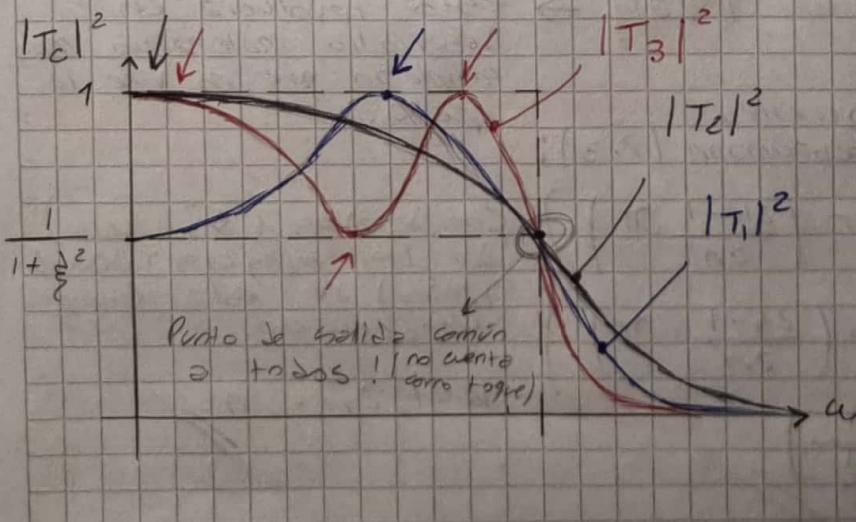


la frecuencia angular ω se ve afectada en 3 ocasiones, se ve dividida por el \cos^{-1} y el $\cos(1)$.



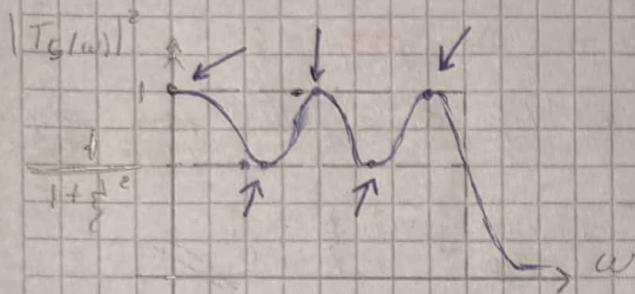
- A medida que sume el plato "n" del filtro, aumentará tanto la cantidad de oscilaciones de los huecos de aproximación en la banda de paso. En consecuencia, también aumentan la cantidad de "toques" de este hueco contra las cotas superiores e inferiores que exceden el ripple de la banda de paso.

\Rightarrow La cantidad de toques en la región contenida sería igual al orden "n" del filtro, sin contar el toque en $\omega=1$, ya que ese es común a todas las funciones (platos de salida).



Importante: las modulaciones de los $\cos(1)$ y $\cos^{-1}(1)$ quedan en los platos mixtos huecos de los dos selección de las oscilaciones en la región contenida. Por ende, los toques contra las cotas se producirán más cerca de $\omega=1$ que de $\omega=0$ y混在 que demuestra el orden "n" del filtro.

• Ejemplo transformación filtro Chebychev orden $n=5$.



Contabilizar 5 toques en la banda
se pase entre & salir de la banda con bandas.

} (Eso dice que esto es el criterio del diseño + la transformación de Chebychev)

Video 4:

Importante: $C_n(w) = \frac{1}{2} \cdot \cosh[n \cdot \cosh^{-1}(w)] \cdot \boxed{|tw|}$

$$C_n(w) = \frac{1}{2} \cdot \cos[n \cdot \cos^{-1}(w)], \boxed{|w| \leq 1}$$

la primera es la expresión GENERAL de los $C_n(w)$, válida para toda frecuencia w , mientras que la segunda es una expresión particular, solamente válida para $|w| \leq 1$, es decir, para la banda de paso.

Localización de P , Z en $|T_c|^2$

$$|T_{10w}|^2 = \frac{1}{1 + C_{10}^2(w)} \Big|_{w=\frac{s}{j}} = \frac{1}{1 + C_{10}^2(s/j)} = T(s) \cdot T(-s)$$

Necesito volver al dominio s para poder obtener el diagrama hasta el min 15

$C_{10}(s/j) = \frac{1}{2} \cdot \cosh[n \cdot \cosh^{-1}(s/j)] \rightarrow$ esto involucra un desarrollo matemático muy complejo que no vale la pena.

* Obtenemos los siguientes resultados del Schaummann (7.3):

$$\bullet \sigma_k = -\operatorname{senh}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2k-1}{2n} \cdot \pi\right) \quad \left\{ \text{Coordenadas } (\sigma_k, \omega_k) \text{ de las singularidades (polos) de esta función}\right.$$

$$\bullet \omega_k = \cosh(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{2k-1}{2n} \cdot \pi\right) \quad \left. \text{transformada.}\right.$$

$$\bullet \alpha = \frac{1}{n} \cdot \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \quad \parallel$$

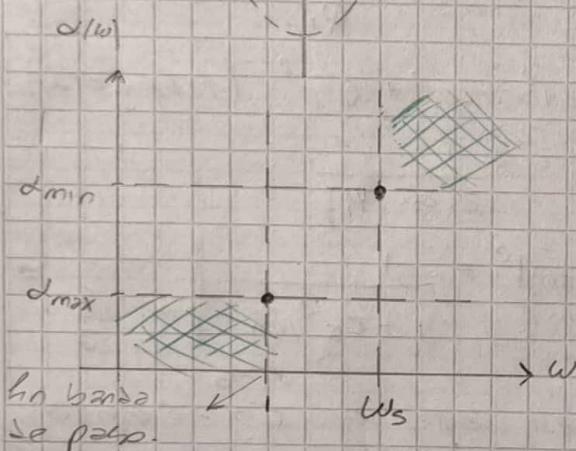
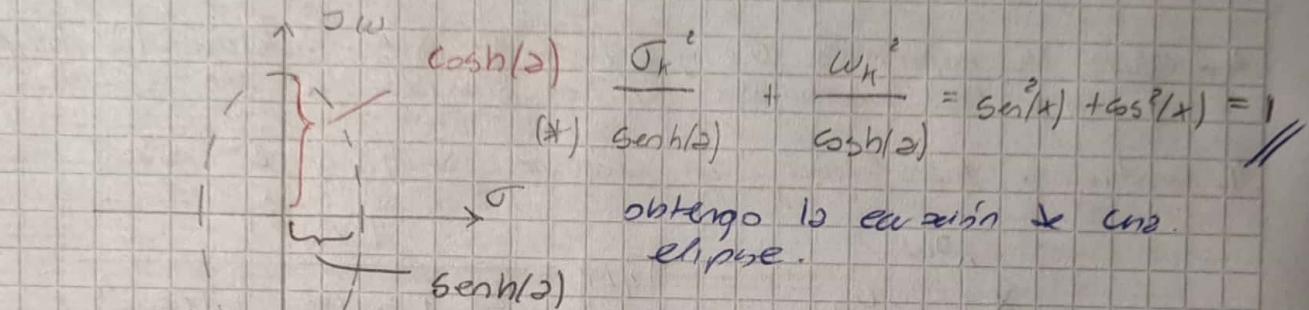
$$K = 1, 2, \dots, n \quad \parallel$$

F) Faltos que sacan el cuadrado los componentes de abajo para tener la ecuación de un ellipse, esto es el video.

41

Síguenos de la ellipse.

- Despejando en $\cos^2 \theta$ y aplicando una identidad trigonométrica obtengo que el lugar geométrico de las singularidades es una ellipse, con las siguientes parámetros:



→ Zonas permitidas

Recordar al revés de como se concibió señala siempre)

d_{max} → máxima atenuación permitida en la banda de paso.

d_{min} → mínima atenuación necesaria en la banda de detención (stop).

$$w=1 : d_{\max} = \frac{1}{|T|} = \sqrt{1 + \xi^2}$$

$$d_{\max} \Big|_{dB} = 10 \cdot \log \left(1 + \xi^2 \right) \rightarrow \xi^2 = 10 - 1 \quad \text{Igual que en máxima planicidad}$$

$$w=w_s : d_{\min} \Big|_{dB} = 10 \cdot \log \left(1 + \xi_n^2(w_s) \right)$$

$$d_{\min} \Big|_{dB} = 10 \cdot \log \left\{ 1 + \xi^2 \cdot \cosh^2 \left[n \operatorname{cosh}^{-1}(w_s) \right] \right\}$$

- Igual que en máxima planicidad, pero esta expresión con diferentes valores de $n = 1, 2, 3, \dots$ hasta que se cumple con la atenuación mínima necesaria en w_s .

⇒ Una vez obtenidos los parámetros " ξ " y " n ", queda absolutamente determinada la función de Chebychev.

hay dos posibles metodologías para resolver los problemas: la Schenmann (no recomendada) y la de la Calleja (recomendada).

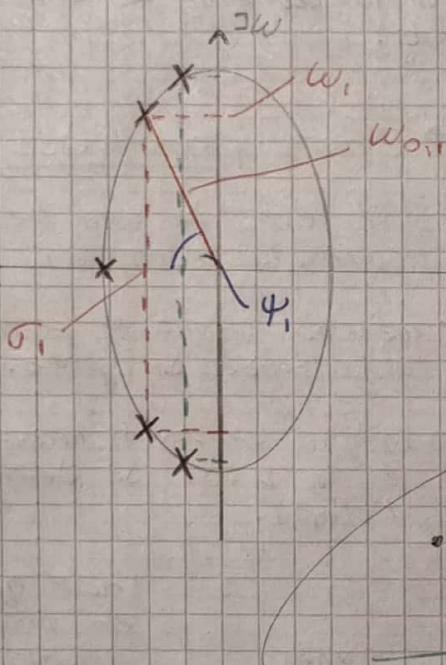
Según el Schenmann (F. 36)

1- obtener ξ y n

2- calcular "z"

3- calcular los componentes Q_1 y W_1 con los datos anteriores (\rightarrow los polos) y marcar las singularidades en el diagrama de polos y ceros.

4- construir la transformada con secciones de 1^s y 2^s o viceversa.



$$T_{41s} = \frac{(w_{01})^2}{s^2 + s \frac{w_{01}}{Q_1} + (w_{01})^2}$$

$$(w_{01})^2 = w_1^2 + \xi_1^2 \quad (\text{Pitágoras})$$

$$Q_1 = \frac{1}{2 \cdot \cos(\varphi_1)}$$

$$|T_{41zw}|^2 = \frac{1}{1 + c_5^2(w)} \quad |w = \frac{s}{\xi}| = T(s) \cdot T(-s)$$

• El polo real está en $G = -\operatorname{senh}(z)$

(Vea gráficos pag. 201/202)

Método catedral → construirlo con la forma rectangular.
con el $\operatorname{cs}(s)$

Hasta $n=3$ se puede resolver a mano y papel. → Cálculo de

$n \geq 4 \rightarrow$ resolver con python y $\operatorname{roots}()$.

función

Mismo método con el que se resuelve M.P. (Videos 6 y 7)

Datos & la plantilla de diseño:

$$\begin{cases} W_p = 1 \text{ k}^{1/2}/s \\ W_s = 10 \text{ k}^{1/2}/s \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{\max} = 12 \text{ dB} \\ \alpha_{\min} = 55 \text{ dB} \end{cases} \Rightarrow n = 3 \rightarrow \begin{array}{l} \text{(obtenido} \\ \text{mediante} \\ \text{software)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{V1.2} \\ \text{min 12} \end{array}$$

recordar: $\xi_w = ? - 1 \text{ k}^{1/2}/s = W_p$

$$\xi^2 = 10^{\frac{\alpha_{\max}}{10}} - 1 = 0,259$$

$n = 3 \rightarrow$ se obtiene 142 zetas.

V1.2 9
min?

$$\begin{aligned}
 |T_3(w)|^2 &= \frac{1}{1 + C_3(w)} = H(s) \cdot H(-s), \quad C_3(w) = 4w^3 - 3w // \\
 &= \frac{1}{1 + \xi^2 \cdot (4w^3 - 3w)^2} \rightarrow \text{resuelve el cuadrado del binomio} \\
 &= \frac{1}{1 + \xi^2 \cdot (16w^6 - 2 \cdot 4w^3 \cdot 3w + 9w^2)} \\
 &= \frac{1}{1 + \xi^2 \cdot (16w^6 - 24w^4 + 9w^2)} ; \\
 &= \frac{1}{w^6 \cdot 16\xi^2 + w^4 \cdot 24\xi^2 + w^2 \cdot 9\xi^2 + 1} // \\
 &\bullet \text{Ahora hago el reemplazo de } w = \frac{s}{\xi}, \text{ para así obtener el polinomio de la transferencia.} \\
 &\bullet |T_3(w)| = \frac{1}{-\xi^6 \cdot 16 - \xi^4 \cdot 24 - \xi^2 \cdot 9 + 1} //
 \end{aligned}$$

$$|T_3(s)|^2 = \frac{1}{1 + \xi^2 \cdot C_3(s)} = \left(\frac{1}{s^3 a + s^2 b + s c + d} \right) \cdot \left(\frac{1}{-s^3 a + s^2 b - s c + d} \right) T(s) T(-s)$$

$$\bullet S^6) \quad -16\xi^2 = 0 \cdot 1 - 2 \rightarrow -16\xi^2 = -2^2 \rightarrow \xi = \sqrt{-16\xi^2} = 4\xi //$$

$$\bullet S^4) \quad 1 = \xi^2 \rightarrow \xi = 1 //$$

$$\bullet S^2) \quad b\xi + b\xi - c^2 = -9\xi^2$$

$$2b\xi - c^2 = -9\xi^2 \rightarrow 2b\xi + 9\xi^2 = c^2 //$$

$$\bullet S^0) \quad -ac - ac + b^2 = -24\xi^2$$

$$-2ac + b^2 = -24\xi^2 \rightarrow -2ac + 24\xi^2 = -b^2 //$$

$$b^2 + 24\xi^2 = 2ac //$$

Importante: Aunq. queda un sistema de ecuaciones para conseguir los coeficientes del polinomio de Chebychev, SIEMPRE debes quedarte con los ~~signos~~ coeficientes POSITIVOS para el polinomio (ya que esto provocaría que el polinomio tenga raíces negativas en el semiplano izquierdo).

Sistema de ecuaciones 2x2

para obtener b y c.

me indica como

el signo de

los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

de los signos

- Un criterio de autocolección es chequear que todos los coeficientes obtenidos (a, b, c, d, \dots) sean positivos.
- Si se llega a una expresión polinómica, hay que descartar las raíces con parte imaginaria y quedarse solamente con las raíces positivas, ya que los coeficientes del polinomio son positivos también. Las raíces reales negativas se descartan tmb.

\Rightarrow Resuelvo el sistema este mediante sustitución.

$$c^2 = 9\zeta^2 + 2bd \rightarrow c = \sqrt{9\zeta^2 + 2bd}$$

$$b^2 = -24\zeta^2 + 2ac$$

$$2ac = 24\zeta^2 + b^2 \rightarrow \left(2a \cdot \sqrt{9\zeta^2 + 2bd}\right)^2 = (24\zeta^2 + b^2)^2$$

$$4a^2 \cdot (9\zeta^2 + 2bd) = (24\zeta^2 + b^2)^2; \quad a = 4\zeta \quad y \quad d = 1 \quad (\text{Vz obtenidos previamente})$$

$$4 \cdot (16\zeta^2) \cdot (9\zeta^2 + 2bd) = (24\zeta^2 + b^2)^2 \rightarrow \text{me va a quedar una cuadrática}$$

$$(64\zeta^2 \cdot (9\zeta^2 + 2bd))^2 = (576\zeta^4 + 2 \cdot 24\zeta^2 \cdot b^2 + b^4)$$

$$576\zeta^4 + 128\zeta^2 b = 576\zeta^4 + 48\zeta^2 b^2 + b^4$$

$$b^4 + 48\zeta^2 b^2 - 128\zeta^2 b = 0; \quad \text{tebr comén lo q le haga un grado al polinomio.}$$

$$\underbrace{b \cdot (16^3 + 48\zeta^2 \cdot b)}_{x} - \underbrace{128\zeta^2}_{y} = 0$$

$$x = 48\zeta^2 = 31219 \\ y = 128\zeta^2 = 8,5864$$

$$b_1 = 21563 \rightarrow \text{real positiva} \rightarrow b_1 = 21563 \approx 2,152$$

b_2 y $b_3 \rightarrow$ complejos conjugados \rightarrow las descarto

(tmb se puede calcular las raíces con Roots() en Spyder y será más preciso poniendo ζ^2 como constante.)

$$c = \sqrt{9\zeta^2 + 2bd} = \sqrt{9 \cdot (0,1259)^4 + 2 \cdot (2,152) \cdot 1} = \cancel{3,752} \quad 2,152$$

$$T_3(s) = \frac{1}{s^3 + bs^2 + cs + d} = \frac{1}{4\zeta^2 s^3 + 4,4568 s^2 + 3,3531 s + 1}$$

$$T_3(s) = \frac{1}{2,0352 s^3 + 4,4568 s^2 + 3,3531 s + 1} // \quad \begin{array}{l} \text{coinciden con las} \\ \text{lzs del} \\ \text{video.} \end{array}$$

Si queremos llevar $T_{3/5}$ a su formato másico, saco factor común "2" en el denominador y lo lleva al numerador. Entonces quedó:

$$T_{3/5} = \frac{0,4913}{15^3 + 0,9883 \cdot 5^2 + 1,2384 \cdot 5 + 0,4913}$$



~~✓~~

04/05

Clause presencial

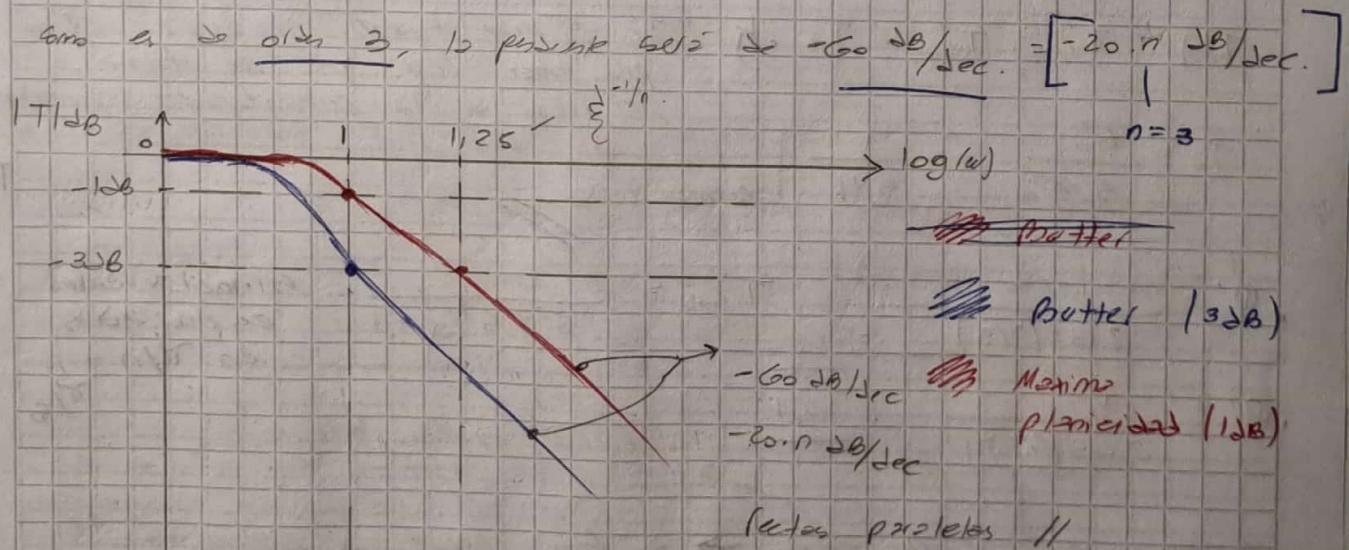
(Anotaciones)

$$s_w = 2\pi \cdot f_c$$

$$s_w \rightarrow s_{\text{Butter}} = s_w \cdot \xi^{-1/n}$$

- En Chobey, no hay forma de seguir el procedimiento normal para obtener los coeficientes del polinomio del denominador. No se puede hacer el cálculo de Butter, hay que hacerlo si o si a mano.

- Anotación: Los anotados de la banda de atenuación dependen solamente del filtro, no de la topología.



- Conectar Miller-Key en cascada \rightarrow Tengo un operador que divide: Esto me garantiza que lo puedo cascadar, ya que tengo un generador \rightarrow $\frac{1}{w}$. Puedo colgarlo que yo quiera seguidas 26270, hasta otras 1000, u otras etapas.

Exercicio num 2 de la guía:

Sallen-Kee en cascada.

Lo importante: Escribir determinar las significas de Φ y la ganancia.

No puedo obtener ambas a la vez como yo quiero, siempre obtengo la Φ que quiero. No posee estructura ortogonal esta configuración.

• Preferible posicionar el Φ , dejar la ganancia. Dejar la ganancia la pongo igual con los signos positivos. (buena implementación)

• orden 0 mínimo \rightarrow con Sallen-Kee = 2, (3) \rightarrow max. Φ dato importante (conceptual)

* Orden $n = 5$)

$$T(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \text{ orden } P(s) = 5.$$

Dato neto la ganancia? pregunta para max de la intc.

$$T(s) = T_{SOS} \cdot T''_{SOS} \cdot T_L \cdot \Phi \quad T_L \rightarrow \text{orden 1 real. se apunta el polo real que me falta.}$$

El polo \rightarrow la circunferencia, coincide con eins

$$T_L = \frac{\theta_0}{s + \theta_0} = \frac{1}{s + 1} \quad \text{normalizado.}$$

$$\Gamma_{TSOS} = \text{orden } \frac{2}{2}$$

$$\Phi' = \frac{1}{2 \cos(\pi/5)} \quad T_{SOS} = \frac{1}{s^2 + s/2 + 1} \quad \text{singolaridades separadas en } \pi/5 =$$

$$\Phi'' = \frac{1}{2 \cos(2\pi/5)} = 1,61. \quad \text{punto Sallen-Kee.}$$

second order system?

• Rastrear con Sallen-Kee \rightarrow difícil porque se un orden 8.

y si me pides ganancia, tendrás que usar más larga / sola.

Orden 5 como máximo con suerte.

• Dato con la factorización de signos.

$$\Phi = \frac{1}{s - K} \quad \text{dato de un Sallen-Kee.}$$

$$K = 1 + \frac{R_o}{R_A} \quad \text{ganancia } K \text{ y } \Phi \text{ están íntimamente relacionados en este topología.}$$

• Problema de los transformadores $[S.A.B]$ (single amplifier, biassed)

Problema de un solo operacional.

[no tengo oxigeno xD como en el Adelberg - Mossberg.]

- Supongo con $\varphi = 3 \rightarrow$ Juego con K para sacar φ .

$$\varphi = \frac{1}{3-k}$$

$$\downarrow$$

$$3$$

$$3(3-k) = 1$$

$$9-3k = 1$$

$$8/3 = k$$

~~✓~~

$$9-3k=1$$

$$\bullet K = 1 + \frac{R_0}{R_1} \rightarrow R_0 = K-1 = \frac{8}{3}-1 = \frac{5}{3} \quad //$$

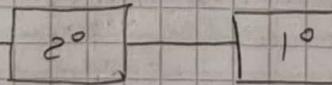
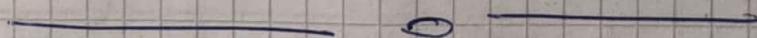
$$\downarrow \quad \boxed{R_2 = R_1}$$

- Necesito normalizarlo al 1% para hacerlo funcionar, con resistencias al 5%
- es imposible por la disponibilidad. (Problema de implementación)

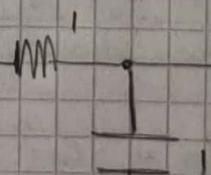
$$\left. \begin{array}{l} R_1 = 10K \\ R_0 = 18K \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{normalizarlo a } 1\% \Rightarrow R_1 = 10 \\ \text{y } R_0 = 18 \end{array}$$

se me van a quitar 5 cuando yo lo quería
de $\varphi = 3$.

- Sistema inestable \rightarrow el haz de ondas in AC, varías en pico hasta infinito en los transistores y lo hace inestable, con ganancia POSITIVA \rightarrow sistema anti-causal. (buena antención)



$$\varphi = 1 \quad \text{GOS}$$

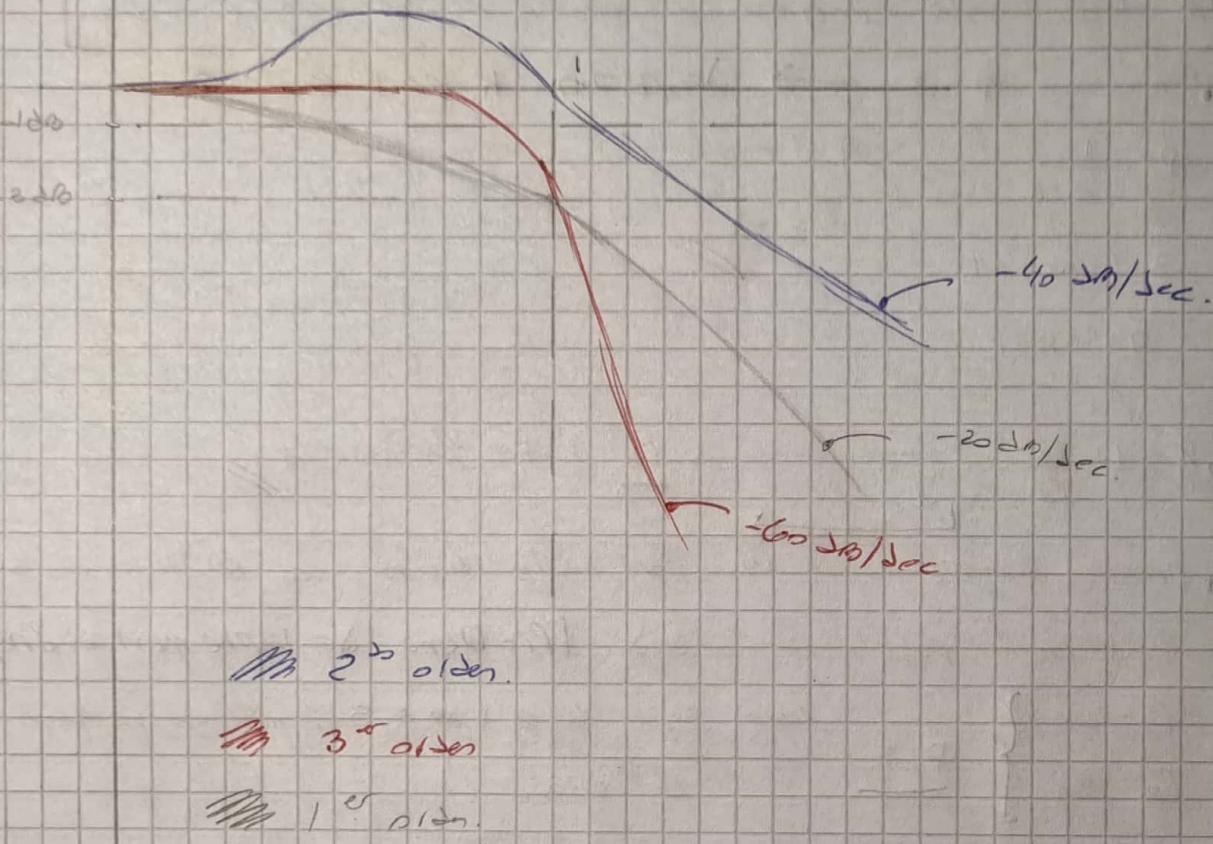


- $|T(\omega_0)| = Q_0 = 0.28$. (Importante característica)

Cuando normalizamos ω es decir $\omega = \omega_0$, tenemos $|T(\omega)| = 0.28$ o $W = 1$ y $= 3dB$ en 1,25.

(que es todo en 1?) Preguntar. $R=L=C=1$

$\varphi = 1$ en las primeras etapas GOS.



$$T_{10} = \frac{1}{s+1}$$

$$T_{20} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Composición de curvas. La gráfica de la suma de 1º orden con 1 o 2º orden para obtener 1 o 2º orden es la misma planificada.

(completar con lato celular)

Repaso cheby:

$$|T|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\xi^2} \cdot A(\omega)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\xi^2} \cdot \cos(n \cdot \cos^{-1}(\omega))} \quad \text{dominio de } \omega : -1 \leq \omega \leq 1.$$

Butter: $A(\omega) = \omega^{2n}$

Cheby: $A(\omega) = \frac{C_n^2}{\omega^n}$

Recursive

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{\xi^2} \cdot \cosh[n \cdot \cosh^{-1}(\omega)]}$$

(expresión alternativa).

Resumen sobre Cheby: La respuesta es constante.

• Para $\omega=1$ las 1^{er} funciones se comportan \rightarrow como Butter? Chequear.

• Todas las funciones de cualquier orden (n) pasan por el mismo punto:

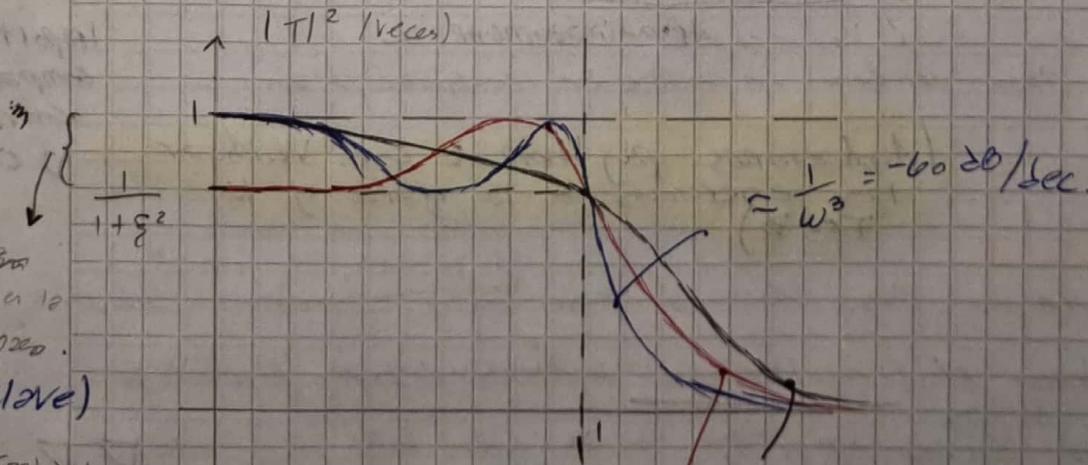
1/ω en el gráfico de abajo)

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{\xi^2}} \text{ en } \omega=1 \quad //$$

• El punto se arrastra si varía en función del orden.

Par: $\frac{1}{1 + \frac{1}{\xi^2}}$ } Puntos de arranque
Impar: 1 }

• En $[n=1]$ el polinomio de Cheby es igual al de Butter. Ya a punto de irse a cambiar.



Ento lo contrario
de togues es la
banda.

Cont. togues = n1 (orden).

Crank's for Cheby \rightarrow oscilación (corte en la banda superior), amortiguado (ripple permitido en la banda).

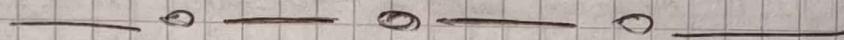
• Cheby distribuye el error en toda la banda de paso y lo suelta.

• Cheby Inverso \equiv Cheby tipo 2 \rightarrow es en Cheby $\rho_{\text{pass}} = 1/\omega_s$.

$$|T_{\text{Cheby}}|^2 = \frac{1}{1 + \xi^2 C_n^2(\omega^2)}$$

$$|T_{C_2}|^2 = 1 - |T_C|^2 = 1 + \frac{\xi^2 C_n^2(\omega^2)}{1 + \xi^2 C_n^2(\omega^2)}$$

$C_n \rho_{\text{pass}} = 2/\omega_s$?



$\left\{ \begin{array}{l} \text{el } \xi^2 \text{ se calcula } \rightarrow \text{lo calcula en M.P. y en Cheby} \\ \xi^2 = 10 \frac{\text{amortijo}}{\text{masa}} - 1 \end{array} \right.$

M.P.

$$d_{\min} = 10 \cdot \log \left(1 + \xi^2 \frac{w_s^{2n}}{(n\pi)^2} \right)$$

Cambia la expresión que tienes que tener para poder calcular "n".

Cheby:

$$d_{\min, \text{ch}} = 10 \cdot \log \left(1 + \xi^2 \cosh^2(n \cdot \text{asinh}(w_s)) \right)$$

[• A igual orden, en cheby puedes obtener mayor atenuación en la banda \rightarrow a veces (d_{\min}), camino del doble la función de n .]

Aproximadamente \approx

* butter \rightarrow P_{212} Verificar en butter dc de alguna otra.

Importante comparación entre MP y cheby

(Anotaciones Python: como verificar los errores de los gráficos y la TS 3)

• sig_LP2LP(1)

transformación de pass low to a pass low - (lowpass - lowpass)

me permite hacer el recalculo Butter - Máxima planificación.

que da para des-normalizar.

muy útil esta función.

1,96 dato con clara.

hacer TS3 con brisa

contando Δ leímos a cheby
con el python.

47

d

Cheby \rightarrow And log al de veces: los pobs están dentro en elipse.

los singulares de Cheby están más cerca del eje JW.

por lo que, eso significa que tienen menor Q en comparación a

los singularidades de MP.

Otra buena comparación entre MP y Cheby)

• Analyze-sys() \rightarrow Es la forma lo que hace que sea para los
cambios a los gráficos de los vectores: Zoom Vertical.

Aprietas "V" en los gráficos de los vectores: Zoom Vertical.

focando la Iupita.

"H" \rightarrow Devuelve a la visualización original.

[\rightarrow Implementar en Cheby con haller-Key, Cheby es
muy demandante de Q] ∇

• Letras Δ grupos \rightarrow Importante para la distorsión & los

• Q1 } lo hace ver más bruscamente.

cambio drástico, pendiente muy pronunciada cerca de 0.

• Verificar los coeeficientes
en función del epípolo trío
• en np.roots(.)

• gráf Δ tp \rightarrow otras mayores a 3,

extremadamente variables para hacer en computadora.

Exercitación

- mismo diseño que en la TS 3, pero sobre Cheby.

(sin tb de d lo \Rightarrow go/2/3)

i hay a mas en orden 4 es imposible, muy largo.

③ PB Cheby.

$$\omega_B = 9,6 \text{ kHz}$$

$$d_{min} = 98 \text{ dB}$$

$$d_{max} = 0,4 \text{ dB}$$

$$f_c = 3,2 \text{ kHz}$$

$$\xi^2 = 10 - 1 = 0,096$$

$$d_{min} = 10 \log (1 + \xi^2 \cdot \cosh^2(n \cdot \cosh^{-1}(w)))$$

$$d_{min}(n=2) = \dots$$

$$d_{min}(n=5) = 100, \dots \text{dB} \quad (\text{un Butter corresponde a un orden } 2).$$

• Ventajas: me quedo ordenes y tengo una rápida transición.

• Desventajas: distorsión de fase y ondulación en la banda de paso.

• Cambio $d_{min} = 24 \text{ dB} \rightarrow n = 3$, así es factible en lápiz y papel.

$$* [T(s) \cdot T(-s)] = |T(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \xi^2 C_3^2(\omega)}$$

$$C_3(\omega) = 2\omega C_{n-1} - C_{n-2} \quad (C \text{ const}, \text{ no cerrado}).$$

$$= 2\omega C_2 - C_1 \quad ; \quad [\text{Regla de recusión}]$$

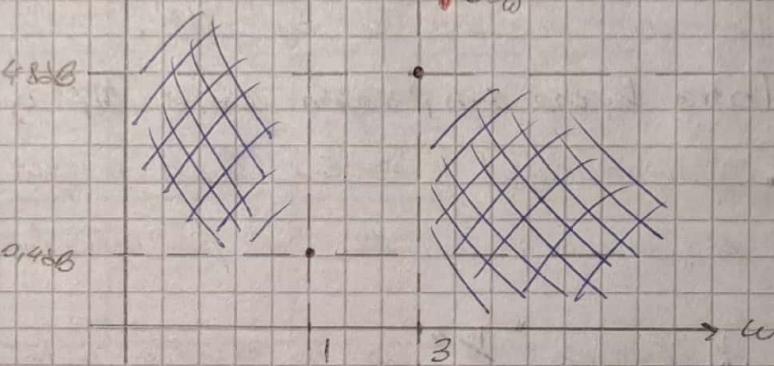
$$\begin{cases} C_1 = w \\ C_0 = 1 \end{cases} \quad (\text{no se aplica } \rightarrow \text{tanda hace todo esto en el video, excepto el caso const})$$

$$C_2 = 2\omega \cdot (w-1) = 2w^2 - 1 \quad \text{función}$$

Con C_1 en la sumilla de la expresión, luego se aplica recursividad.

Regla recursiva

2 se puede hacer la minimización \rightarrow Butter ecc.



$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_c = 2\pi \cdot 3,2 \text{ kHz}.$$

Resuelto por computadora.

cheby
vs
MP

④

$$C_3 = 2w \cdot (2w^2 - 1) - w$$

criticar este paso.

$$\bullet C_3 = 4w^3 - 2w - w = 4w^3 - 3w$$

~~(Polinomio de grado par)~~
~~(orden 3)~~

llevarlo
siempre a
la forma
mónica.
se llega al
mismo
resultado
19/08/11

$$|T(2w)|^2 = \frac{1}{1 + \xi^2 \cdot C_3(w)} = \frac{1}{1 + \xi^2 \cdot (4w^3 - 3w)}$$

para facilitar
el
álgebra.

$$= \frac{1}{1 + \xi^2 \cdot (16w^6 - 24w^4 + 9w^2)}$$

máscota.

$$= \frac{1}{16\xi^2 w^6 - 24\xi^2 w^4 + 9\xi^2 w^2 + 1}$$

$$\begin{cases} a = 16\xi^2 \\ b = +24\xi^2 \\ c = 9\xi^2 \end{cases}$$

$$= \left[\frac{1}{2w^6 - bw^4 + cw^2 + 1} \right] \Big|_{w=\frac{s}{\sqrt{2}}}$$

• todos los coeficientes
tienen los mismos
signos.

$$= \frac{1}{-2s^6 - bs^4 - cs^2 + 1} \quad \} \text{ orden 6}$$

T(s)

$$|T(s)|^2 = \left(\frac{1}{\alpha s^3 + \beta s^2 + \gamma s + 1} \right) \cdot \left(-\alpha s^3 + \beta s^2 - \gamma s + 1 \right)$$

|T(s)|

$$\bullet \alpha^2 = -\beta, \quad \beta^2 = \alpha \quad (1)$$

$$\bullet -b = -\alpha\gamma - \gamma\alpha + \beta^2, \quad -b = -2\alpha\gamma + \beta^2 \quad (2)$$

$$\bullet -c = 2\beta - \gamma^2 \quad (3)$$

(los ordenes impares me llevan a la forma mónica, como se ve en el cuadro.) importante.

$$\star \alpha^2 = \beta \rightarrow \alpha = \sqrt{\beta} = \sqrt{16\xi^2} = 4\xi$$

(2), (3) son un sistema de ecuaciones.

$$\gamma^2 = 2\beta + c \quad (3') \rightarrow \gamma = \sqrt{2\beta + c}$$

$$(2') -b = -2\alpha \sqrt{2\beta + c} + \beta^2 \quad (\text{ya es una ecuación para calcular } \alpha \text{ y } \beta).$$

bicuadrática

$$\alpha_1, 2 = ?$$

Si se hace con γ en vez de con β , queda mucho más fácil para calcular. Al final, es complicado.

Cuando se complica con un coeficiente, anula al otro.

* Anotación: Los devuelven módulos los coeficientes del polinomio las funciones de pumpay.

Re Continua la resolución del ejercicio v clase:

$$|T_3(w)|^2 = \frac{1}{16\zeta^2 w^6 - 24\zeta^2 w^4 + 9\zeta^2 w^2 + 1}$$

$$|T_3(w)|^2 = \frac{1}{w = \frac{s}{3}} = \frac{1}{(-16\zeta^2 s^6 - 24\zeta^2 s^4 - 9\zeta^2 s^2 + 1)}$$

$$|T_3(s)|^2 = \frac{1}{1 + \zeta^2 \cdot C_3^2(s)} = \left(s^3 a + s^2 b + s c + d \right) \cdot \left(-s^3 a + s^2 b - s c + d \right)$$

(Sigo parte del procedimiento del ejercicio modo de las clases grados 2023)

$$\bullet s^6 - 16\zeta^2 = (-\bar{z}) \cdot (\bar{z}) \rightarrow 16\zeta^2 = z^2 \rightarrow z = \sqrt{16\zeta^2} = 4\zeta //$$

$$\bullet s^6 - 1^2 = 1 \rightarrow \boxed{z=1} // \quad \text{Recordar: } \zeta^2 = 0,096 //$$

$$\bullet s^2(bd + bd - c^2) = -9\zeta^2$$

$$2bd - c^2 = -9\zeta^2 \rightarrow c^2 = 2bd + 9\zeta^2 //$$

$$\bullet s^4(-ac - ac + b^2) = -24\zeta^2$$

$$-2ac + b^2 = -24\zeta^2 \rightarrow b^2 = 2ac - 24\zeta^2 //$$

• Planté el sistema de ecuaciones de 2x2:

$$\bullet c^2 = 9\zeta^2 + 2bd \rightarrow \boxed{c = \sqrt{9\zeta^2 + 2bd}} \quad (I) \quad \text{Sustitución (I) en (II)}$$

$$\bullet b^2 = 2ac - 24\zeta^2 \rightarrow b^2 + 24\zeta^2 = 2ac \quad (II) \quad \begin{array}{l} \text{y obtengo la} \\ \text{siguiente expresión:} \end{array}$$

$$\Rightarrow b^4 + 48\zeta^2 \cdot b^2 - 128\zeta^2 b = 0$$

obtengo las raíces mediante

$$\underbrace{b}_{b_1 = 0} \cdot (b^3 + 0b^2 + 48\zeta^2 b - 128\zeta^2) = 0 \rightarrow \text{software.}$$

$$\underbrace{b_2}_{b_3} = 1,666768773 // \quad \begin{array}{l} \text{me quedo solamente con} \\ \text{la raíz real y positiva,} \\ \text{que me genera para} \\ \text{en el cuadrante 1.} \end{array}$$

b_3
 b_4

$$\Rightarrow c = \sqrt{9\frac{1}{2}^2 + 2bd} = \sqrt{9\frac{1}{2}^2 + 2.11.6667...} = 2,049839338 //$$

coefficientes: $a = 4\frac{1}{2} = 1,242437579$ (no están en formato mixtos, si los dejo así, tengo que multiplicarlos por 10⁴, que vienen a ser 10000 factores comunes y quitarlos al numerador)

$b = 1,666768773$

$c = 2,049839338$

$d = 1$

(Verificado en Python y el resultado es correcto)

Ahora pruebo otra posible resolución, (II) \rightarrow (I)

$$b^2 = 2ac - 24\frac{1}{2}^2 \rightarrow b = \sqrt{2ac - 24\frac{1}{2}^2}$$

$$c^2 = 9\frac{1}{2}^2 + 2bd \rightarrow c^2 - 9\frac{1}{2}^2 = 2bd; \quad d = 1 \quad y \quad a = 4\frac{1}{2}$$

$$(c^2 - 9\frac{1}{2}^2)^2 = \left(2 \cdot \sqrt{2ac - 24\frac{1}{2}^2}\right)^2$$

$$c^4 - 2 \cdot c^2 \cdot 9\frac{1}{2}^2 + 81\frac{1}{2}^4 = 4 \cdot \left(2 \cdot 4\frac{1}{2}\right) \cdot c - 24\frac{1}{2}^2$$

$$c^4 - 18\frac{1}{2}^2 c^2 + 81\frac{1}{2}^4 = 4 \cdot \left(8\frac{1}{2}c - 24\frac{1}{2}^2\right)$$

$$c^4 - 18\frac{1}{2}^2 c^2 + 81\frac{1}{2}^4 = 32\frac{1}{2}c - 96\frac{1}{2}^2$$

$$c^4 - 18\frac{1}{2}^2 c^2 - 32\frac{1}{2}c + (81\frac{1}{2}^4 + 96\frac{1}{2}^2) = 0 //$$

↳ Se devuelven las raíces reales y las raíces complejas conjugadas.

$$\begin{cases} c_1 & \text{Complejas} \\ c_2 & \text{Conjugadas} \end{cases} \quad c_3 = 2,04983933... \quad \checkmark$$

$$\checkmark \quad c_4 = 0,931328...$$

Para elegir entre c_3 y c_4 , los evalúo en la expresión de B, para ver cuál se devuelve en el coeficiente positivo también.

$$\Rightarrow b = \sqrt{2 \cdot a \cdot c - 24\frac{1}{2}^2} \rightarrow b_3/c_3 = 1,666768... // \quad \checkmark$$

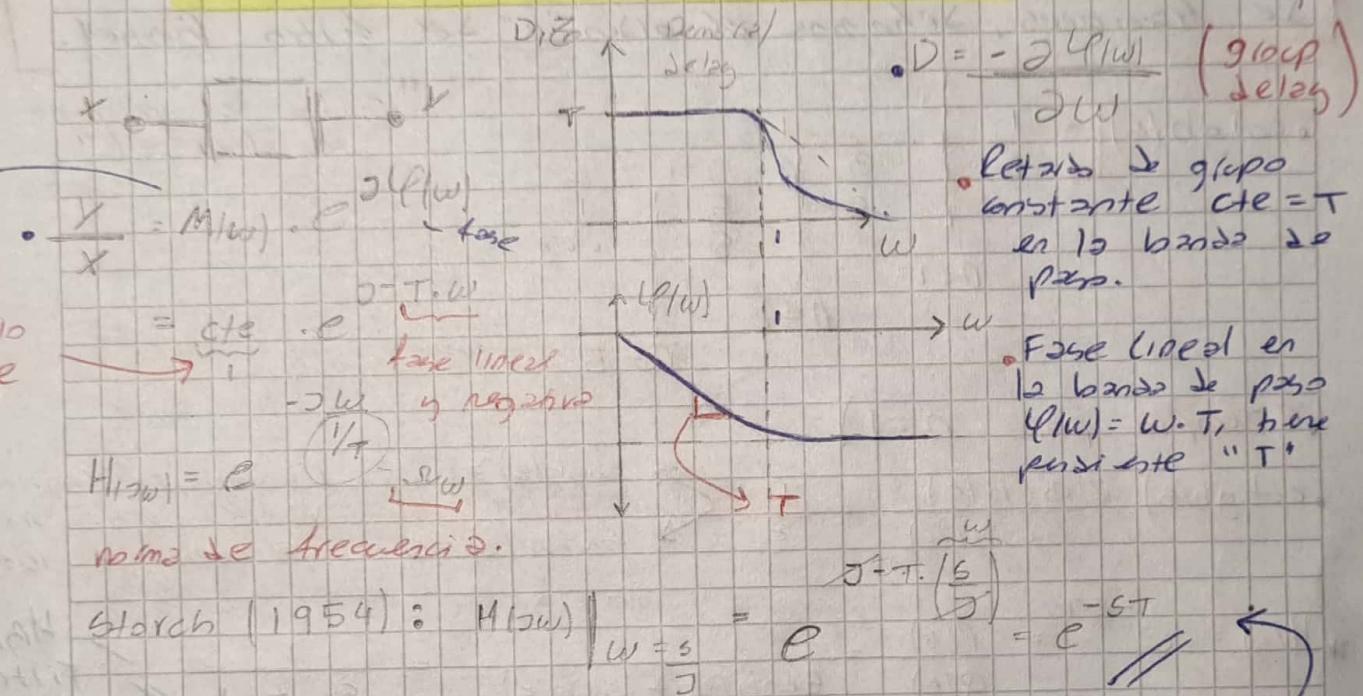
↳ $b_4/c_4 = \text{math error}$ (intento + la raíz negativa o cuadra)

$$\begin{cases} a = 4\frac{1}{2} = 1,2424... \\ b = 1,666768... \\ c = 2,04983933... \\ d = 1 \end{cases}$$

Se obtienen los mismos resultados que con el procedimiento anterior.

Claue 4: Aproximaciones de Chebyshev y Bessel

→ Video n°5: Aproximación de Bessel (Capítulo 4 Schumann)



Necesito obtener una función transferencia de este estilo:

Para convertirla en un cociente de polinomios como hacemos siempre, utilizaremos propiedades del sistema trigonométrica hiperbólica:

$$H(s) = e^{-ST} = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{\operatorname{senh}(s) + \operatorname{cosh}(s)}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}(s) &= \frac{e^s - e^{-s}}{2} \\ \operatorname{cosh}(s) &= \frac{e^s + e^{-s}}{2} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{senh}(s) + \operatorname{cosh}(s) = \frac{e^s - e^{-s}}{2} + \frac{e^s + e^{-s}}{2} \\ = \frac{1}{e^s} + e^{-s} \end{array} \right.$$

Representación polinómica de $\operatorname{senh}(s)$ y $\operatorname{cosh}(s)$:

$$\operatorname{senh}(s) = s + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \frac{s^7}{7!} + \dots$$

$$\operatorname{cosh}(s) = 1 + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \frac{s^6}{6!} + \dots$$

Alta utilizar la siguiente identidad trigonométrica hiperbólica para poder relacionar de manera polinómica ambas funciones:

$$\operatorname{ctgh}(s) = \frac{\operatorname{cosh}(s)}{\operatorname{senh}(s)}$$

$$\frac{\cotgh(s)}{\sinh(s)} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^3} + \frac{1}{s^5} + \dots$$

Admite expansión en fracciones continuas \rightarrow

Al controlando el término en que contamos la expansión continua de fracciones, definimos el orden " n " del filtro Bessel.

$$\frac{\cotgh(s)}{\sinh(s)} = \frac{1}{n} \frac{1}{s} + \frac{3}{s^3} + \frac{1}{s^5} + \dots$$

$n=1$ $n=2$ $n=3$

" \rightarrow es el polinomio de Bessel"

• ejemplo para $n=1$)

$$\frac{\cotgh(s)}{\sinh(s)} = \frac{\cosh(s)}{\sinh(s)} = \frac{1}{s} \quad \begin{cases} \cosh(s) = 1 \\ \sinh(s) = s \end{cases}$$

obtengo los factores reales para formar el polinomio de Bessel.

$$H(s) = e^{-st} = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s + 1} \quad \begin{cases} H_B(s) \\ \text{Filtro Bessel de orden 1.} \end{cases}$$

[nota: El filtro Bessel de orden 1 también coincide

lleva la misma expresión que el filtro Cheby de orden 1 y que el M.P. Butter de orden 1. Importante

• ejemplo para $n=2$)

$$\cotgh(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^3} = \frac{s^2 + 3}{3s} \quad \begin{cases} \cosh(s) \\ \sinh(s) \end{cases}$$

$$H_B(s) = \frac{K}{(s^2 + 3s + 3)} \quad \begin{cases} K=3 \\ \text{Si deseas tener ganancia unitaria en la banda de paso: } 1w \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$H_B(s) = \frac{B_{n0}}{B_n(s)}$$

síndes $B_n(s)$: Polinomio de Bessel de orden " n "

B_{n0} : Coeficiente de orden "0" del polinomio (s^0 o término independiente)

• Se maneja genérico y para ganancia unitaria en la banda

de paso. Si los grados elegidos de ganancia difieren en la banda de paso, muchas de valor de " K ".

• Ejemplo para $n=3$)

$$\text{coth}(hs) = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{1}{\frac{5}{s}}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{5}{5}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{s}{5}}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{5s^2 + 15}{s^2 + 15}} = \frac{1}{s} + \frac{5s}{s^2 + 15} = \frac{s^2 + 5s^2 + 15}{s^3 + 15s}$$

$$\text{coth}(hs) = \frac{6s^2 + 15}{s^3 + 15s} \rightarrow \text{coth}(s)$$

$$H_{B3}(s) = \frac{15}{s^2 + 3s + 3} \quad \begin{array}{l} \text{ap. Bessel} \\ \text{ap. Butterworth} \end{array}$$

Comparativa entre topología Bessel y Butterworth:

Para igual orden ($n=2$): $H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$

$$H_{B3}(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 3}$$

$$\hookrightarrow \omega_0^2 = 3 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{3}$$

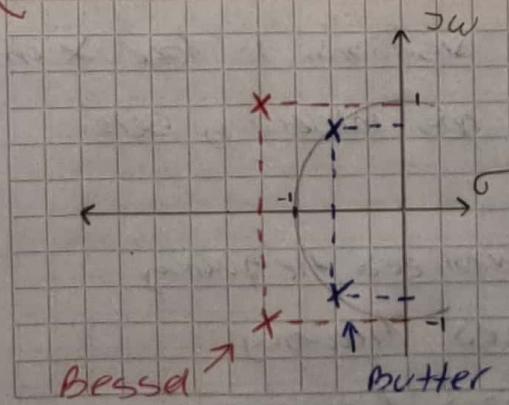
$$\hookrightarrow \frac{\omega_0}{Q} = 3 \rightarrow \frac{\omega_0}{3} = Q \rightarrow Q = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Butter & orden $n=2$: $\rightarrow \omega_0 = 1$

$$\hookrightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Variables y sus
valores

$$\left\{ \begin{array}{l} Q: \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow Q_{\text{Butter}} > Q_{\text{Bessel}} \\ \omega_0: \sqrt{3} > 1 \rightarrow \omega_{0\text{Bessel}} > \omega_{0\text{Butter}} \end{array} \right.$$



• Como $Q_{\text{Butter}} > Q_{\text{Bessel}}$, las polos de Butter estarán más cercanos al eje $j\omega$ que los de Bessel, más hacia la izquierda.

• Como $\omega_{0\text{Bessel}} > \omega_{0\text{Butter}}$, tanto más cerca que las singulares estén de Bessel estarán más alejados del origen, con un radio de creciente menor ω_0^2 .

Importantes conclusiones

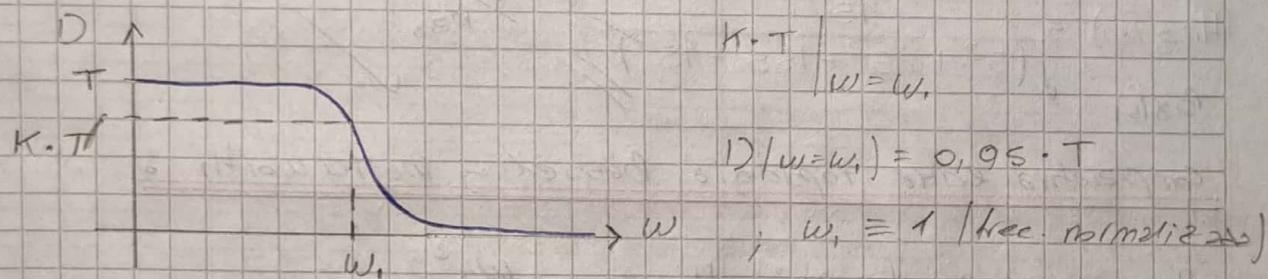
Diseño de un Filtro Bessel

Páginas 426-428
del Schenckens)

1. Ripple en banda de paso $\rightarrow n_1$ (Primera restricción de orden)
2. % error en la demora $\rightarrow n_2$
3. Atenuación en f_{c3} $\rightarrow n_3$

Tercera restricción para el orden.

\Rightarrow Claro el orden n es posible que cumpla con las 3 restricciones de manera simultánea.



$$K \cdot T = w_c$$

$$D(w=w_c) = 0,95 \cdot T$$

; $w_c \equiv 1$ (freq. normalizada)

$|K| < 1$ \rightarrow es una fracción menor a 1 que representa el error en el delay/demora/retardo \star grupo que hay en la banda de paso. Mientras mayor sea K , mas se acercará al "brick-wall", se obtendrá un retardo más constante para toda frecuencia.

Para lograr todo esto, hay que analizar los siguientes 3 gráficos / curvas / óvalos de diseño que están presentes en el Schenckens en base a las especificaciones impuestas en la plantilla de diseño x fase.

* No pensar de vista que se está diseñando la fase x en filtro, el espacio del mundo no nos interesa y será consecuencia de la fase deseada.

- I) Passband attenuation in dB vs normalized frequency
- II) Delay error in % vs normalized frequency
- III) Attenuation in dB vs normalized frequency

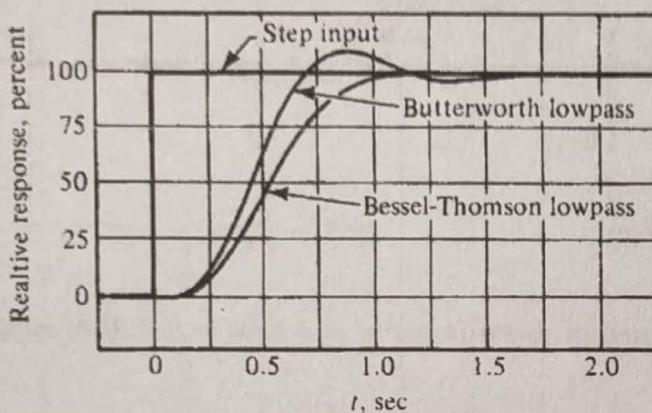


Figure 10.9 Step response of Butterworth and Bessel-Thomson filters ($n = 4$).

first is the *overshoot*, defined as

$$\% \text{ overshoot} = \frac{v_{2\max} - v_{2\text{final}}}{v_{2\text{final}}} \times 100\% \quad (10.48)$$

The second quantity is the *rise time*, usually defined as the time for the response $v_2(t)$ to go from 10 to 90% of its final value. The two responses shown in Fig. 10.9 are for the case $n = 4$. The Butterworth response has considerable overshoot, while the Bessel-Thomson response does not. Also the Butterworth response has a smaller rise time than the Bessel-Thomson response. These same characteristics are shown in Fig. 10.10 for a pulse input and for $n = 8$ Butterworth and Bessel-Thomson filters. This absence of overshoot and ringing is a distinguishing characteristic of Bessel-Thomson filters and is sometimes the reason for their selection for a given application.

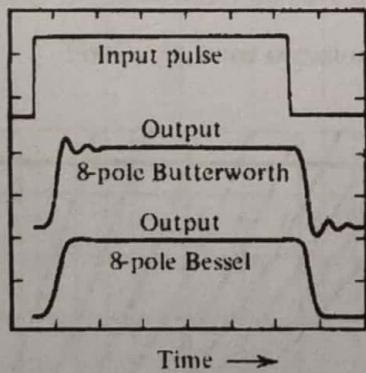


Figure 10.10 Pulse response of eighth-order Butterworth and Bessel-Thomson filters.

10.5 DESIGN OF BESSLEL-THOMSON FILTERS

At this point in our development of a design procedure for the Butterworth, Cauer, and Chebyshev filters we showed that the specification of attenuations α_{\min} and α_{\max} together with related frequencies determined n , the order of the filter response. There is no such direct analysis available for Bessel-Thomson filters, and there is no formula for n . Consequently we make use of design curves to help us find the smallest degree necessary. Figure 10.11 explains the definitions used. Design is accomplished using guidelines often derived from prior experience.

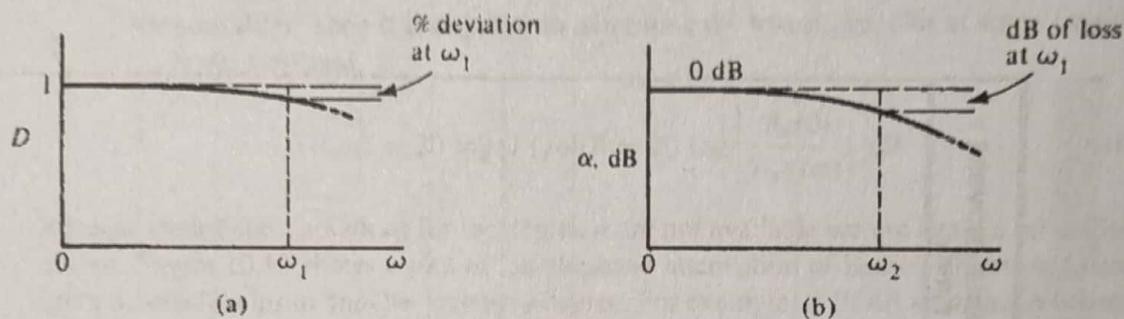
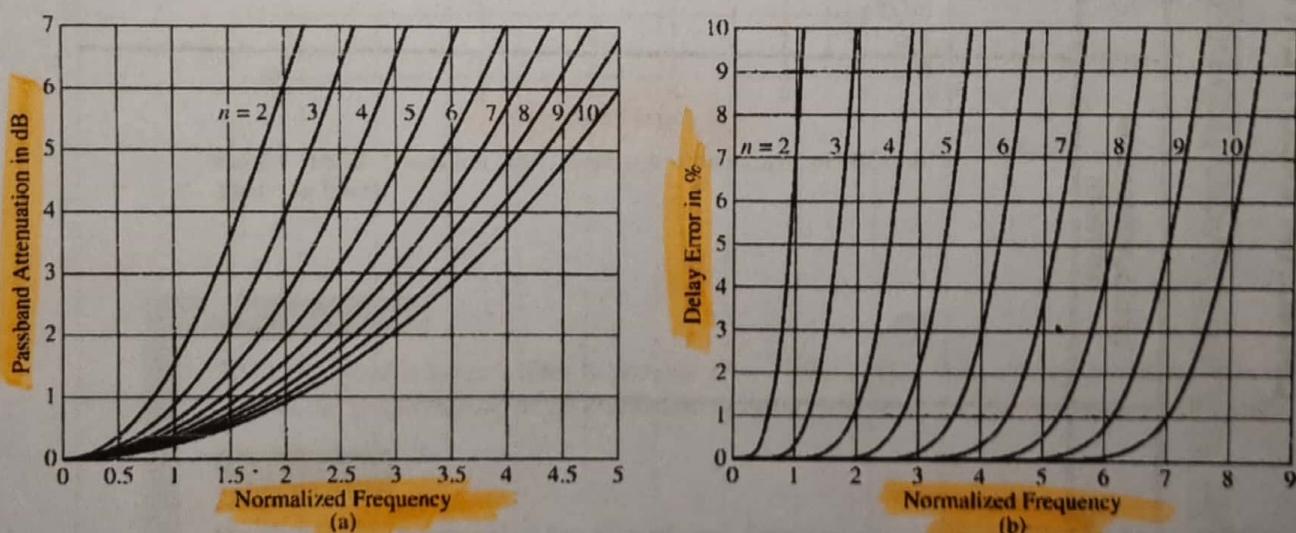


Figure 10.11 Definitions of delay error and passband attenuation in Bessel-Thomson filters.

- As shown in Fig. 10.11a we define an error in percent by which the filter's delay deviates from the ideal $D = 1$. Since D is a function of frequency, we need to specify at which frequency ω_1 the maximally acceptable delay error occurs.
- In an analogous fashion, Fig. 10.11b shows how the Bessel-Thomson lowpass passband attenuation differs from the ideal, 0 dB. Again we need to specify at which frequency ω_2 the maximally acceptable loss occurs.

This information is used in Fig. 10.12 to determine the required degree of the Bessel-Thomson filter. In Fig. 10.12a we have plotted the passband attenuation error as a function of filter degree and frequency. For instance, if a 2-dB passband loss is acceptable until $\omega_1 = 1.7$, the intersection of the horizontal line at 2 dB and the vertical line at 1.7 results in $n \approx 4.2$. As always, we round up to use $n = 5$. Analogously, Fig. 10.12b contains design curves that relate the delay error to degree and frequency. A prescribed maximum delay error of 3% up to a frequency of 3.3 leads to $n \approx 5.3$, i.e., $n = 6$ must be taken. If *both* requirements are to be met by *the same* filter, we have to use the larger of the two degrees: $n = 6$.

- Finally, in some occasions the delay filter serves a secondary function of acting as a

Figure 10.12 Design curves for determining the degree n of the Bessel-Thomson filter to meet (a) the acceptable loss and (b) the maximum delay error.

lowpass filter. Then it is required to determine the loss it provides at some frequency ω_3 in the stopband,

$$\alpha(\omega_3) = 20 \log |T(j\omega_3)| = 20 \log \left| \frac{\mathcal{B}_n(0)}{\mathcal{B}_n(j\omega_3)} \right| \text{ dB} \quad (10.49)$$

Because closed-form solutions for the degree n are not available we use again a set of design curves. Figure 10.13 shows a plot of the stopband attenuation of Bessel-Thomson filters of order n , which helps to find the necessary degree. For example, if 18-dB attenuation is needed at $\omega_3 = 6.5$, the figure indicates that $n = 7$ will be required. Since only one parameter, the degree n , is available to the designer, the largest degree must be chosen so that all specifications can be met. Note that if substantial stopband attenuation is required coupled with good delay performance, a delay filter of very high order would be necessary. In these cases alternative techniques are preferred that use delay equalizers together with maximally flat or inverse Chebyshev responses. We will leave the discussion of these approaches to Chapter 11.

Let us next illustrate the design of a Bessel-Thomson filter by an example.

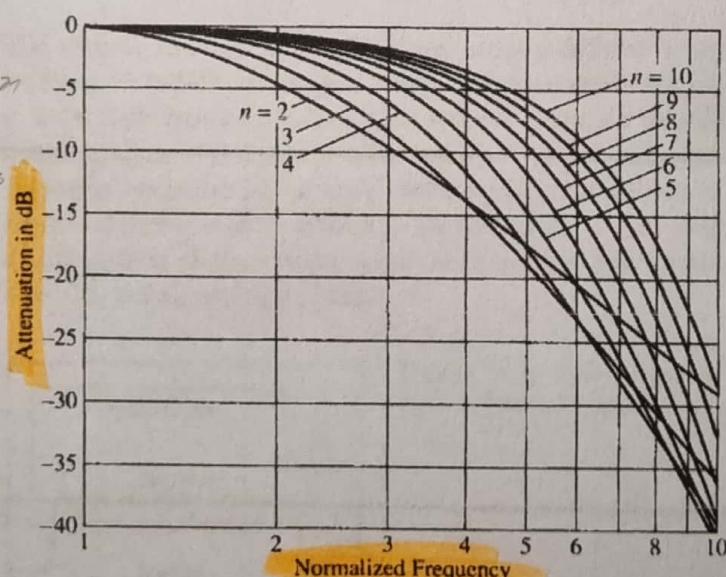


Figure 10.13 Transition and stopband attenuation of Bessel-Thomson filters.

* Atenuación en la banda de Rejeción:
Como en el gráfico aparecen valores negativos estos hacen referencia a la banda de rejeción (Banda de filtro).
Por consecuencia & que estos valores son negativos, se hace la atenuación para determinadas frecuencias.

EXAMPLE 10.1

To be designed is a delay filter to provide $D = 100 \mu\text{s}$ delay with a delay deviation of at most 10% at the frequency $\omega_1 = 25 \text{ krad/s}$ and at most 1-dB loss at a frequency $\omega_2 = 10 \text{ krad/s}$.

Solution

We first have to determine the normalizing frequency ω_c so that we know how to interpret the normalized frequency axes in Fig. 10.12. According to Eq. (10.9) we have $\omega_c = 1/D = 1/100 \mu\text{s} = 10 \text{ krad/s}$. Therefore, ω_1 corresponds to 2.5 and ω_2 to 1. From Fig. 10.12b we

`analyze_sos(sos)`

`SOS = analyze_sos(sos, num, len)`

`SOS`

`analyze_sos(SOS)`

`plt.close('all')`

- No permite descomponer las operaciones de en la KHO para operaciones + operaciones.

Primera orden tiene antes de graficar

No permite una como se compone no en otro & mayor orden.

II/OS

(close presencial)

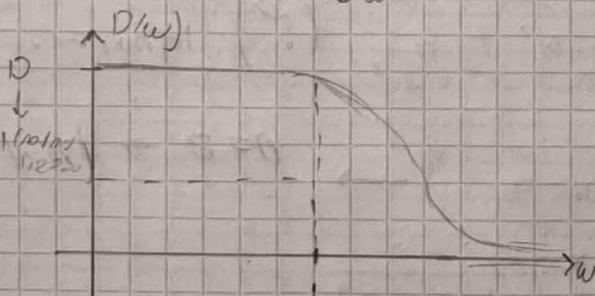
Repaso Bessel

- Topología Bessel \rightarrow se centra en el retardo de grupo.

- quiva, obtiene una fase lineal \rightarrow retardo constante.

$$\bullet D(w) = Z(w) = -\frac{\partial \Psi + k}{\partial w} \quad T(s)$$

Ahi aparece la
derivada en el
exponente.



- No me importa lo que haga mi filtro impongo una restricción en la fase.

$$\bullet T(jw) = N(jw) \cdot e^{j\psi} = N \cdot e^{-jwD}$$

~~$$N \cdot e^{-jw \frac{D}{T}}$$~~

- I) es el retardo, el delay tensor resultante.

- Bessel up (Python) \rightarrow a lo mismo normalizar tenemos,

retardo \circ módulo. | tiempo entre 3 opciones)

$$\bullet$$
 Parte operativa: $T(jw) = N \cdot e^{-jwD}$ | $w_0 = \frac{\pi}{2}$

$$= N \cdot e^{-s}$$

$$T(s) = \frac{1}{\sinh(s) + \cosh(s)}$$

transformada

$\cotgh(s) = \frac{\cosh(s)}{\sinh(s)}$, "Serie infinita de tener exponentes en cada

constante."

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3 + \frac{1}{s^5 + \dots}}$$

• Quiero obtener una constante de retardo, donde en ese ordena es

constante. (con un cierto error % tmb)

• Obtengo un menor retardo de menor planicidad.

$$\mathcal{Z}(w) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} w^2} \quad \text{Aplics M.P sobre la función retardo,}$$

la función modelo no me interesa, será lo

que será.

Importante

retardo cte \rightarrow
retardo plano \rightarrow
máximo
planicidad

$$\mathcal{Z}(w) = \frac{\partial_1}{\partial_0} \cdot \frac{1 + \frac{w^2}{\omega_0^2}}{1 + \left(\frac{\partial_1^2}{\partial_0^2} - 2 \cdot \omega_0 \right) \cdot w^2 + \frac{\omega_0^4}{\omega_0^2}} \quad (?) \text{ Ignorar.}$$

$$\mathcal{T}(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + 2\zeta s + \omega_0^2} \quad \omega_0 = \omega_1 = 3 \quad \rightarrow \quad n=2 \rightarrow H_{B2}(s)$$

$$\mathcal{Z}(w) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} w^2} \quad \mathcal{Z}_{B2} = \frac{3w^2 + 9}{w^4 + 3w^2 + 9}$$

$$\cotgh(s) = \frac{1}{s} + \frac{s}{3} = \frac{3+s^2}{3s}$$

$$\begin{aligned} \cosh(s) &= s^2 + \frac{3}{s^2} \\ \sinh(s) &= 3s \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \mathcal{T}_{B2}(s) &= \frac{3}{s^2 + 3s + 3} \\ &\parallel \end{aligned} \right\} = H_{B2}(s)$$

• Bessel \rightarrow Poco distorsión de fase

• Cheby \rightarrow el que menor trae el modelo, pero peor trae a la fase. tiene la menor transición entre bandas, pero su fase es cualquier cosa.

Cada topología tiene sus pros y sus contras con respecto al tratamiento de la fase, retardo y modelo.

Ejercicio 6 de la guía (Pág. 9)

- FPT, extracción MFB (ver aparte topologías)

- Retardo constante de $100 \mu\text{s}$ (en banda de paso)

$$Z(0) = D \rightarrow D = 100 \mu\text{s} \quad //$$

mínima de
frecuencia:

$$\omega_L = \frac{1}{D} = \frac{1}{100 \mu\text{s}} = 10 \text{ rad/s}$$

1 no lo hace como kHz, recuerda que los en rad/s pasa así para operar matemáticamente con él)

[necesita hacer logaritmo el radio en función de ω_L .]

$$C = \frac{1}{\omega_L}$$

obtengo
 $n=4$

- $W_1 = 25 \text{ rad/s} \rightarrow 2,5 \text{ rad/seg} \text{ (normalizada)}$

$$\omega_1 = \frac{25 \text{ rad/s}}{10 \text{ rad/s}} = 2,5$$

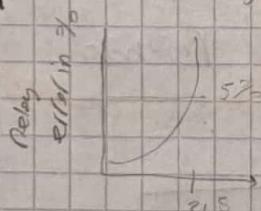
{ 10% error $\Rightarrow n=4$ } ↑

- $W_2 = 10 \text{ rad/s} \rightarrow 1 \text{ rad/s} \text{ (normalizada)}$

$$\alpha_{\max} = 128$$

obtengo
 $n=3$

(error en el segundo gráfico, no es α , es $\Rightarrow T$)



* Para la curva $\Rightarrow n=4$, para $W=2,5$ obtengo 5% de error mi error máximo es $\Rightarrow 10\%$, si que 5% es razonable.

Normalized
frequency

Mi guía con la curva $\Rightarrow n=5$ de todos los que vienen con $n=5$ obtengo 1-2%.

En teoría me que do con el menor n que satisfaga todas las condiciones de módulo y retardo. Ambos gráficos tengo que elegir, dos curvas.

Siempre hay 3 curvas.

- Basando atenuación en dB (segunda curva)

Hubo otra curva muy para la rectificación $\Rightarrow L_{max}$.

[En este caso no hay rectificación de L_{min}] solo tengo 2 rectificaciones en este caso.

• Basé el todo una transición MUY lenta, lo peor de todos, caso

Atenuación en la banda de paso muy lenta, pero con muy

capturas con la fase. Pros vs contras.

Ahora viene la parte operativa.

\Rightarrow elijo orden $n=4$

$$\bullet \text{cotg}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 + \frac{3}{s} + 1} = \frac{1}{s^2 + \frac{3}{s} + 1} = \frac{1}{s^2 + \frac{3}{s} + \frac{1}{s^2}} = \frac{1}{s^2 + \frac{3+1}{s} + \frac{1}{s^2}}$$

Ahora voy recordando
los conceptos denominados,
y los trámites
necesarios obtener un
cociente de polinomios.

Nota: tiene que quedar PAB escrita en el numerador

$$\bullet \text{cotg}(s) = \frac{s^4 + 4s^2 + 10s}{10s^3 + 10s}$$

lo convierto en un FAB \rightarrow ØdB. \rightarrow misma constante independiente
211162 y abajo es 10 transfunción.

$$\bullet T_B(s) = \frac{105}{s^4 + 10s^3 + 4s^2 + 10s + 105}$$

$\bullet Z_{P,K} = \text{sig. besselap}(4, \text{norm}=\text{"delay"})$ norma de retraso

\rightarrow orden 4

$$\bullet \text{norm, den} = \text{sig. zpk2tf}(Z, P, K)$$

y ZPS es lo mismo de siempre!

Anotaciones
Python

Ahora lo resuelvo desde Ø este mismo ejercicio:

Luis: Aproximación de funciones transfunción

ejercicio n° 6

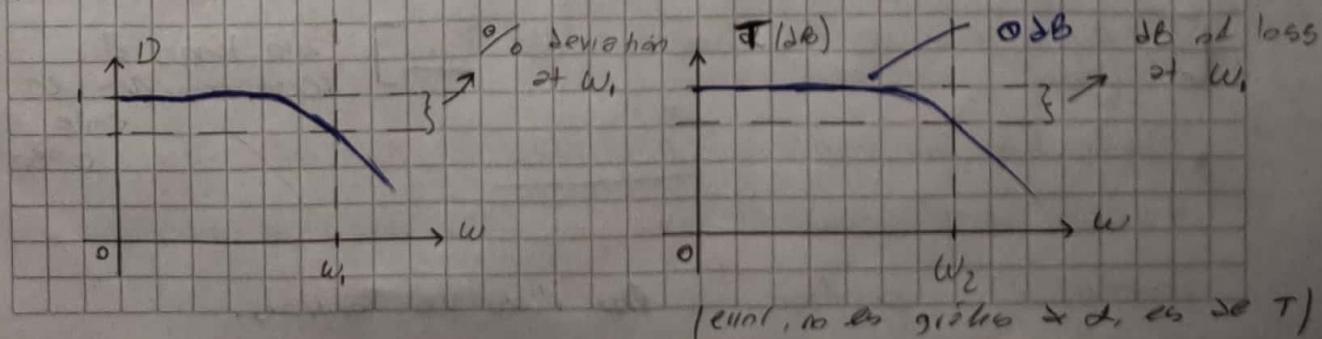
* Filtro pasa bajos con estructura MFB

Requisitos
plantilla de
diseño de
fase

* Retraso de de 100 µs en la banda de paso

* Desvío del retraso máximo de 10% para $W_1 = 25 \text{ rad/seg}$

* Máximo 1dB a alteración en $W_2 = 10 \text{ rad/seg}$



Retardo de 100 ns $\rightarrow T = 100 \text{ ns} \quad ; \quad \varphi(w) = -T \cdot w \quad (\text{base lineal})$

$$H(s) = e^{-j\varphi(w)} = e^{-j \cdot T \cdot w} \cdot e^{\frac{j}{T} w} \Rightarrow s_w = \frac{1}{T}$$

$$s_w = \frac{1}{T} = \frac{1}{100 \text{ ns}} = 10 \text{ kHz} = 10 \text{ K} \text{ V/seg} \equiv 10 \text{ K} \text{ rad/seg} //$$

Necesito hacer aparecer las razones en algún lado. Es una cuestión dimensional igualmente, no genera inconveniente.

w_2 es la frecuencia que marca el fin de la banda de paso.

$$w_2' = w_p = \frac{w_2}{s_w} = \frac{10 \text{ K rad/seg}}{10 \text{ K rad/seg}} = 1 //$$

w_1 es una frecuencia posterior a la banda de paso, que se podría considerar parte de la banda de atenuación (?)

$$w_1' = \frac{w_1}{s_w} = \frac{25 \text{ K rad/seg}}{10 \text{ K rad/seg}} = 2,5 //$$

Ahora empiezo a revisar los errores :

I) Passband attenuation in dB vs normalized frequency :

@ $w_p = 1$ (normalizada) \rightarrow máximo 1dB de atenuación

$\hookrightarrow n \geq 3$ ($n=3$ es el primer rebote que cumple con menos de 1dB en la banda de paso)

II) Delay error in % vs normalized frequency :

@ $w_2' = 2,5$ (normalizada) \rightarrow 10 % (máximo)

$\hookrightarrow n \geq 4$ ($n=3$ cumple, tiene más de 10 % de error, $n=4$ tiene 5% > error approx)

III) \rightarrow no tengo restricción de atenuación (dmin) para la banda de detención, por lo que no chillo dicho efecto.

\Rightarrow I) $n \geq 3$ } obtengo el orden del filtro
II) $n \geq 4$ } a implementar, que cumple con ambas condiciones simultáneamente.

\Rightarrow Ahora viene la parte operativa con $n=4$ para obtener

$B_3(s) \leftrightarrow H_{B3}(s)$ //

$$\begin{aligned}
 & \bullet \text{cotg}(iw) = \frac{1}{s} + \frac{\frac{3}{5}}{s} + \frac{1}{\frac{5}{s} + \frac{1}{\frac{s}{2}}} \\
 & = \frac{1}{s} + \frac{\frac{3}{5}}{s} + \frac{1}{\frac{5}{s} + \frac{s}{2}} = \frac{1}{s} + \frac{\frac{3}{5}}{s} + \frac{1}{\frac{s^2 + 3s}{7s}} \\
 & = \frac{1}{s} + \frac{\frac{3}{5}}{s} + \frac{1}{\frac{s^2 + 3s}{7s}} = \frac{1}{s} + \frac{\frac{3}{5}}{s} + \frac{1}{\frac{3s^2 + 10s + 7s^2}{s^3 + 3s^2}} \\
 & = \frac{1}{s} + \frac{6^3 + 35s}{10s^2 + 10s} \\
 & = \frac{10s^2 + 10s + s^4 + 2s \cdot s^2}{10s^3 + 10s \cdot s + 10s^2} \rightarrow \cosh(s) \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \rightarrow \sinh(s)
 \end{aligned}$$

$$B_3(s) = \sinh(s) + \cosh(s) = (10s^3 + 10s \cdot s) + (s^4 + 4s \cdot s^2 + 10s)$$

$$B_3(s) = s^4 + 10s^3 + 4s \cdot s^2 + 10s \cdot s + 10s // \text{Polinomio de Bessel de orden } n=4.$$

$$H_{B3}(s) = \frac{10s}{s^4 + 10s^3 + 4s \cdot s^2 + 10s \cdot s + 10s} //$$

Transformación de un filtro Bessel de orden 4 a Bessel de orden 4