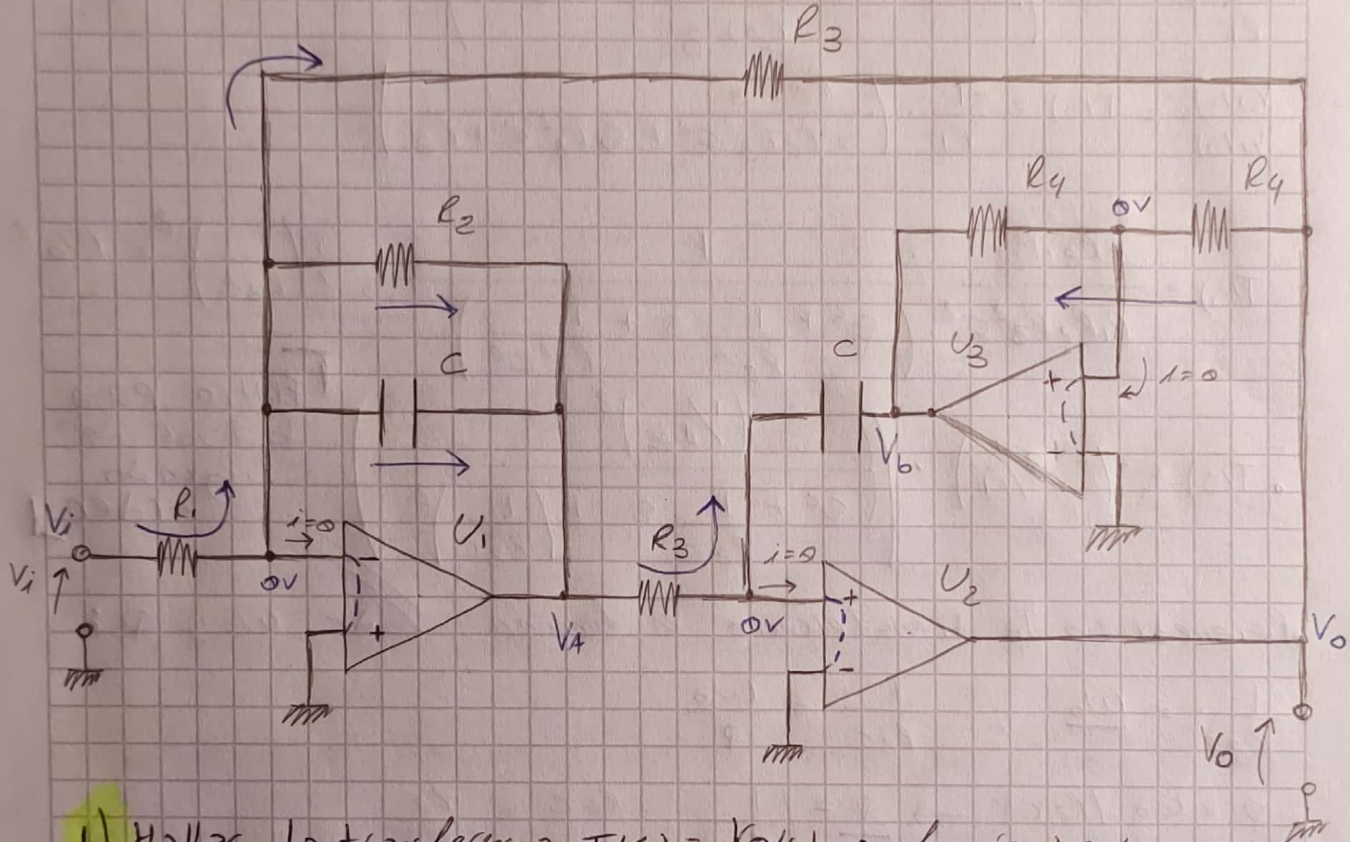
Albero Federico | 1 | TS2

Trabajo Semanal II

Red circuital: (Configuración Ackerberg - Mossberg)



1) Hallar la transferencia $T(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ en función de ω_o y Q.

U_1: $\frac{(V_i - 0V)}{R_1} = \frac{(0V - V_A)}{R_2} + (0V - V_A)\cdot sC + \frac{(0V - V_o)}{R_3}$

$\frac{V_i}{R_1} = \frac{-V_A}{R_2} - V_A sC - \frac{V_o}{R_3}$; $\frac{V_i}{R_1} = -V_A\cdot\left(\frac{1}{R_2} + sC\right) - \frac{V_o}{R_3}$

$\frac{V_i}{R_1} = -V_A\cdot\left(\frac{1 + sCR_2}{R_2}\right) - \frac{V_o}{R_3}$ (1)

U_2: $\frac{(V_A - 0V)}{R_3} = (0V - V_b)\cdot sC$; $\frac{V_A}{R_3} = -V_b\cdot sC$ (2)

U_3: $\frac{(V_o - 0V)}{R_4} = \frac{(0V - V_b)}{R_4}$; $V_o = -V_b$ (3)

(3) → (2) $\frac{V_A}{R_3} = -\underbrace{(-V_o)}_{V_b}\cdot sC$; $\frac{V_A}{R_3} = V_o\cdot sC$ ⟶ $V_A = V_o\cdot sR_3C$ (4)

(4) → (1) $\frac{V_i}{R_1} = -\underbrace{(V_o\cdot sR_3C)}_{V_A}\cdot\left(\frac{1 + sCR_2}{R_2}\right) - \frac{V_o}{R_3}$

(⟶ sigue)

$$\frac{V_i}{R_1} = -V_0 \cdot \left(\frac{sR_3C + s^2R_2R_3C^2}{R_2}\right) - \frac{V_0}{R_3}$$

$$\frac{V_i}{R_1} = -V_0 \cdot \left(\frac{s^2R_2R_3C^2 + sR_3C}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$\frac{V_i}{R_1} = -V_0 \cdot \left(\frac{s^2R_2R_3^2C^2 + sR_3^2C + R_2}{R_2R_3}\right)$$

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = T(s) = \frac{-1}{R_1} \cdot \left(\frac{R_2R_3}{s^2R_2R_3^2C^2 + sR_3^2C + R_2}\right)$$

$$T(s) = \frac{-\cancel{R_2} \cdot R_3}{R_1\cancel{R_2}R_3^2C^2} \cdot \frac{1}{\left(s^2 + \frac{1}{R_2C}s + \frac{1}{R_3^2C^2}\right)} \quad ; \left(\frac{1}{R_3C}\right)^2 = \omega_0^2$$

$$\bullet\ T(s) = \left(-R_3/R_1\right) \cdot \left(\frac{(1/R_3C)^2}{s^2 + \frac{1}{R_2C}s + \left(\frac{1}{R_3C}\right)^2}\right)$$

Filtro pasa bajos de segundo orden

• Parametrizo la transferencia en función de ω_0 y Q:

• $\frac{1}{R_3C} = \omega_0$; $\frac{1}{R_2C} = \frac{\omega_0}{Q}$

• $Q = \omega_0 \cdot (R_2C) \rightarrow Q = \left(\frac{1}{R_3C}\right) \cdot R_2C = \frac{R_2}{R_3}$

$$\bullet\ T(s) = \left(-R_3/R_1\right) \cdot \left(\frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0/Q\, s + \omega_0^2}\right)$$

• Normalizo en frecuencia: $\omega_0 = \frac{1}{R_3C}$; $\Omega_\omega = \omega_0$ (norma de frecuencia)

$$T(\$) = T(s)\Big|_{s=\$\cdot\Omega_\omega}$$

$$T(\$) = \left(-R_3/R_1\right) \cdot \left(\frac{\omega_0^2}{\$^2\omega_0^2 + \frac{\omega_0^2}{Q}\$ + \omega_0^2}\right)$$

$$T(\$) = \left(-R_3/R_1\right) \cdot \left(\frac{\cancel{\omega_0^2}}{\cancel{\omega_0^2} \cdot (\$^2 + 1/Q\,\$ + 1)}\right)$$

$$\bullet\ T(\$) = \underbrace{\left(-R_3/R_1\right)}_{K} \cdot \left(\frac{1}{\$^2 + 1/Q\,\$ + 1}\right)$$

* K: ganancia del filtro activo

Alberto Federico | 2 | TS2

2) Obtener el valor de los componentes del circuito tal que $\omega_0 = 1$ y $Q = 3$

- $\omega_0 = \dfrac{1}{R_3 C} = 1 \longrightarrow C = \dfrac{1}{R_3}$ //

- $Q = \dfrac{R_2}{R_3} = 3 \longrightarrow R_2 = 3R_3$ //

- Normalización en impedancia: $\Omega_Z = R_3$ (así puedo simplificar R_3)

- $R_3' = \dfrac{R_3}{\Omega_Z} = \dfrac{R_3}{R_3} = 1$

- $R_2' = \dfrac{R_2}{\Omega_Z} = \dfrac{3\cancel{R_3}}{\cancel{R_3}} = 3$

- $C' = C \cdot \Omega_Z = \dfrac{1}{\cancel{R_3}} \cdot \cancel{R_3} = 1$

- $R_1' = \dfrac{R_1}{\Omega_Z} = \dfrac{R_1}{R_3}$ (#)

- $R_4' = 1$ (le asigno valor unitario ya que R_4 no se ve involucrada en la transferencia del filtro)

(#) la ganancia K del filtro está en función de R_1 (punto 3)

3) Ajustar el valor de R_1 de tal forma que $|T(0)| = 20\,dB$

Utilizo la expresión sin normalizar:

$$T(\omega) = T(s)\Big|_{s=j\omega} = (-R_3/R_1) \cdot \frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2 + \omega_0/Q \cdot j\omega + \omega_0^2}$$

$$T(\omega) = (-R_3/R_1) \cdot \frac{\omega_0^2}{(\omega_0 - \omega) + j\dfrac{\omega_0 \cdot \omega}{Q}}$$

$$|T(\omega)| = |R_3/R_1| \cdot \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2 + \left(\dfrac{\omega_0 \cdot \omega}{Q}\right)^2}} \longrightarrow |T(\omega=0)| = \frac{R_3}{R_1}$$

(Utilizando la transferencia normalizada $T(\varphi)$ se hubiese llegado al mismo resultado)

$20\,dB = 20 \log(|K|) \longrightarrow \cancel{20}\,dB = \cancel{20} \log(R_3/R_1)$

$1 = \log_{10}(R_3/R_1) \longrightarrow \dfrac{R_3}{R_1} = 10$ (veces) → se debe cumplir esa relación entre componentes.

$\dfrac{R_3'}{R_1'} = 10$; $R_3' = 1 \longrightarrow \dfrac{1}{R_1'} = 10 \longrightarrow R_1' = \dfrac{1}{10}$

(normalizado) $R_1' = 0{,}1$ //

Bonus I: Obtener los valores de la red normalizados en frecuencia e Impedancia

$$\begin{cases} R_1' = 0{,}1 \quad (\text{Punto } 3) \\ R_2' = 3 \\ R_3' = 1 \\ R_4' = 1 \\ C' = 1 \end{cases}$$

Bonus II: Calcular las sensibilidades $S_C^{\omega_0}$, $S_{R_2}^{Q}$, $S_{R_3}^{Q}$

$$\omega_0 = \frac{1}{R_3 C} \quad ; \quad Q = \frac{R_2}{R_3}$$

- $S_C^{\omega_0}$ = "Sensibilidad de ω_0 respecto de C"

$$= \frac{C}{\omega_0(C)} \cdot \frac{\partial \omega_0(C)}{\partial C} = \frac{C}{1/R_3 C} \cdot \frac{\partial}{\partial C}\left\{\frac{1}{R_3} \cdot C^{-1}\right\}$$

$$= \cancel{R_3} C^2 \cdot \frac{1}{\cancel{R_3}} \cdot \frac{-1}{\cancel{C^2}} = (-1)$$

- Aclaración: $S_C^{\omega_0} = -1$, esto indica ω_0 es inversamente proporcional a C, lo cual tiene sentido ya que: $\omega_0 = \frac{1}{R_3 \cdot C}$

- $$S_{R_2}^{Q} = \frac{R_2}{Q(R_2)} \cdot \frac{\partial Q(R_2)}{\partial R_2}$$

$$= \frac{R_2}{R_2/R_3} \cdot \frac{\partial}{\partial R_2}\left\{\frac{1}{R_3} \cdot R_2\right\} = \frac{\cancel{R_2} \cdot \cancel{R_3}}{\cancel{R_2}} \cdot \frac{1}{\cancel{R_3}} \cdot 1 = 1$$

(correcciones)

- $S_{R_2}^{Q} = 1 \rightarrow Q$ y R_2 son directamente proporcionales, ya que: $Q = \frac{R_2}{R_3}$

- $$S_{R_3}^{Q} = \frac{R_3}{Q(R_3)} \cdot \frac{\partial Q(R_3)}{\partial R_3}$$

$$= \frac{R_3}{R_2/R_3} \cdot \frac{\partial}{\partial R_3}\left\{R_2 \cdot \frac{1}{R_3}\right\} = \frac{\cancel{R_3^2}}{\cancel{R_2}} \cdot \cancel{R_2} \cdot \left(\frac{-1}{\cancel{R_3^2}}\right) = (-1)$$

- $S_{R_3}^{Q} = -1 \longrightarrow Q = \frac{R_2}{R_3}$, inversamente proporcionales

Bonus V: Simulación circuital

- Para simular el circuito en LTspice, debo desnormalizar los componentes para así poder obtener los valores reales de los mismos.

* Adopto $\Omega_z = R_3 = 1K\Omega$ y $\omega_0 = 1$ 1/s

- $R_1 = R_1' \cdot \Omega_z = 0{,}1 \cdot 1K = 0{,}1K$
- $R_2 = R_2' \cdot \Omega_z = 3 \cdot 1K = 3K$
- $R_3 = R_3' \cdot \Omega_z = 1 \cdot 1K = 1K$
- $R_4 = R_4' \cdot \Omega_z = 1 \cdot 1K = 1K$
- $C = \frac{C'}{\Omega_z \cdot \Omega_\omega} = \frac{1}{1K \cdot 1} = 1mF$

recordar que $\omega_0 = 2\pi \cdot f_0$

- $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} = 0{,}159$ Hz

(ya que en LTspice, los ejes están en Hz y no en rad/sg)

Escaneado con CamScanner

Bonus III: Recalcular los valores de la red para que cumpla con una transferencia Butterworth.

- Filtro pasa bajos de segundo orden ($n=2$) Butterworth
  - $n = 2$
  - $\xi^2 = 1$

$$T(s) = \left(-R_3/R_1\right) \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0/Q\, s + \omega_0^2}$$

(normalizada)

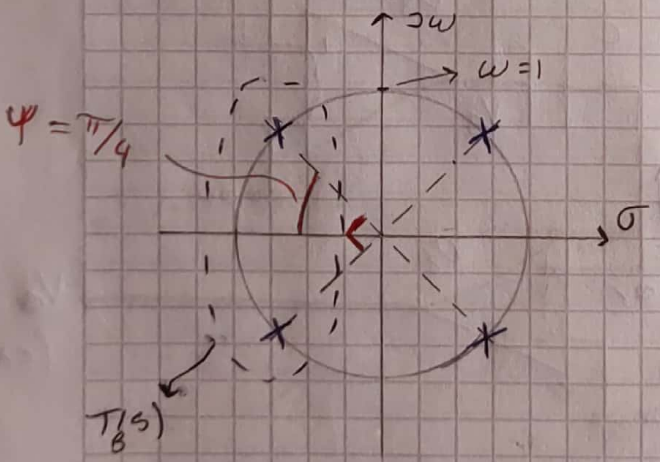
$$T(s) = \left(-R_3/R_1\right) \cdot \frac{1}{s^2 + 1/Q\, s + 1}$$

Butterworth:

- $$|T(\omega)|_B^2 = \frac{1}{1+\xi^2 \cdot \omega^{2n}} = \frac{1}{1+\omega^4}$$

$$|T(s)|_B^2 = |T(j\omega)|^2\Big|_{\omega = \frac{s}{j}} = \frac{1}{1+\left(\frac{s}{j}\right)^4} = \frac{1}{s^4+1} \; ; \; (j^4 = 1)$$

- Como $n = 2$ (par) y $\xi^2 = 1$, se cumple que:
  - no hay polos sobre el eje σ
  - primer singularidad en $\pi/2 \cdot n = \pi/2 \cdot 2 = \pi/4$
  - separación angular entre polos de $\pi/n = \pi/2$



$\omega_0^2 = 1$

$$T_B(s) = \left(-R_3/R_1\right) \cdot \frac{1}{s^2 + 1/Q + 1}$$

$$= \left(-R_3/R_1\right) \cdot \frac{1}{s^2 + s\, 2\cos(\psi) + 1}$$

- $$\frac{1}{Q} = 2 \cdot \cos(\pi/4) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{Q} = \sqrt{2} \rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

* Como cambio el valor del Q, tengo que recalcular el valor de los componentes como en ②. Importante, $\omega_0 = 1$, se mantiene este valor.

$$\begin{cases} \omega_0 = 1 \\ Q = 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{R_3 C} = 1 \longrightarrow C = \frac{1}{R_3}$$

$$Q = \frac{R_2}{R_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot R_3$$

Cambia R_2 al cambiar el Q

- normalización en impedancia: $\Omega_Z = R_3$

• $R_1' = 1/10$ (me determina la ganancia en la banda de paso)

$|T(w=0)| = 20\,dB$

• $R_2' = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$

• $R_3' = 1$

• $R_4' = 1$

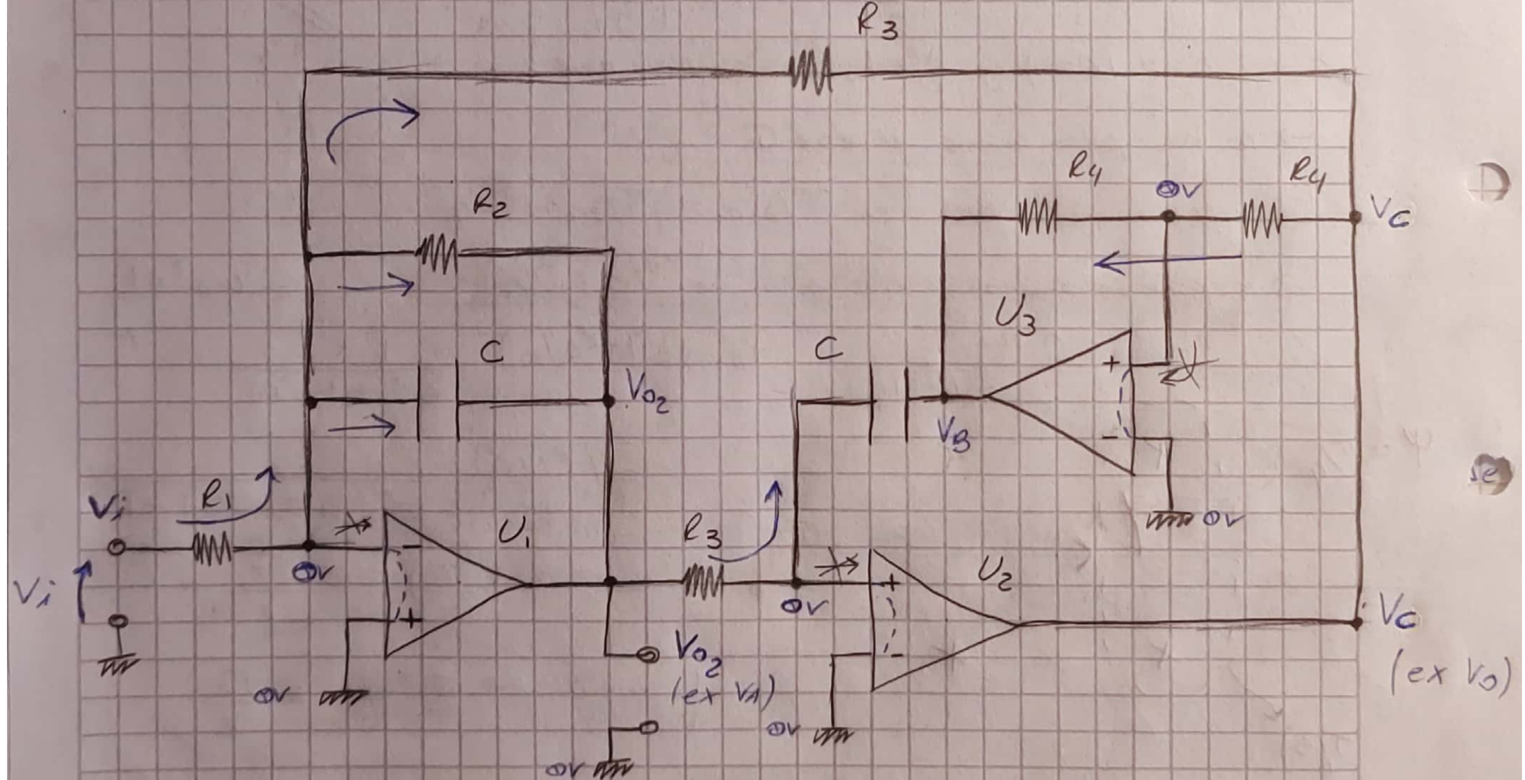
• $C' = 1$

• Valores de los componentes normalizados y recalculados para una transferencia Butterworth.

Bonus IV: Como podría obtener un circuito pasabanda con los mismos componentes originales y con qué parámetros quedaría diseñado.

• Para obtener un filtro pasa-banda con los mismos componentes originales, lo que hago es aprovechar la topología Ackerberg-Mosberg del circuito y cambio la salida de lugar.

• Ahora, en vez de salir por el OPAMP U2, salgo por el OPAMP U1.



• Reutilizo algunas expresiones del ejercicio 1

$$U_1: \frac{V_i}{R_1} = -\frac{V_{O2}}{R_2} - V_{O2}\cdot SC - \frac{V_C}{R_3}$$

$$\frac{V_i}{R_1} = -V_{O2}\cdot\left(\frac{1}{R_2} + SC\right) - \frac{V_C}{R_3}$$

$$\frac{V_i}{R_1} = -V_{O2}\cdot\left(\frac{1 + SCR_2}{R_2}\right) - \frac{V_C}{R_3} \quad (1)$$

$U_2: \frac{V_{o2}}{R_3} = -V_b \cdot sC \quad (2)$

$U_3: \frac{V_c}{\cancel{R_4}} = -\frac{V_b}{\cancel{R_4}} \longrightarrow V_c = -V_b \; (3) \;, \quad V_b = -V_c$

$(3) \to (2) \quad \frac{V_{o2}}{R_3} = -\underbrace{(-V_c)}_{V_b} \cdot sC \;, \quad \frac{V_{o2}}{R_3} = V_c \cdot sC$

$$V_c = \frac{V_{o2}}{sR_3C} \quad (4)$$

$(4) \to (1) \quad \frac{V_i}{R_1} = -V_{o2} \cdot \left(\frac{sR_2C+1}{R_2}\right) - \frac{1}{R_3} \cdot \overbrace{\left(\frac{V_{o2}}{sR_3C}\right)}^{V_c}$

$$\frac{V_i}{R_1} = -V_{o2} \cdot \left(\frac{sR_2C+1}{R_2} + \frac{1}{sR_3^2C}\right)$$

$$\frac{V_i}{R_1} = -V_{o2} \cdot \left(\frac{s^2R_2R_3^2C^2 + sR_3^2C + R_2}{sR_2R_3^2C}\right)$$

$$\frac{V_{o2}}{V_i} = \frac{-sR_2R_3^2C}{s^2R_1R_2R_3^2C^2 + sR_1R_3^2C + R_1R_2}$$

$$T_2(s) = \frac{V_{o2}(s)}{V_i(s)} = \frac{-s\cancel{R_2}\cancel{R_3^2}\cancel{C}}{R_1\cancel{R_2}\cancel{R_3^2}C^{\cancel{2}} \cdot \left(s^2 + s\frac{1}{R_2C} + \frac{1}{R_3^2C^2}\right)}$$

$$\bullet\; T_2(s) = \frac{V_{o2}(s)}{V_i(s)} = \frac{-s\frac{1}{R_1C}}{\left(s^2 + s\frac{1}{R_2C} + \frac{1}{R_3^2C^2}\right)}$$

Transferencia de un filtro-pasa-banda, configuración Ackerberg-Mossberg

$\bullet\; \omega_0 = \frac{1}{R_3C} \qquad \bullet\; \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{R_2C}$ (mismo denominador que la función transferencia del filtro pasa banda).

- Asumiendo $\omega_0 = 1$ y $Q = 3$ como en el filtro pasa banda, se obtienen los siguientes valores de componentes normalizados:

$\begin{cases} R_1' = 0.1 \\ R_2' = 3 \\ R_3' = 1 \\ R_4' = 1 \\ C' = 1 \end{cases}$ (ω_0 y Q son los parámetros de diseño)

ganancia en la banda de paso $\omega = \omega_0$

$$|T(\omega=\omega_0)| = \frac{|1/R_1C|}{1/R_2C} = \frac{R_2 \cdot \cancel{C}}{R_1 \cdot \cancel{C}} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{3}{0.1} = 30 \text{ (veces)}$$

$\bullet\; |T(\omega=\omega_0)|_{dB} = 20\log(30) = 29{,}5\,dB$