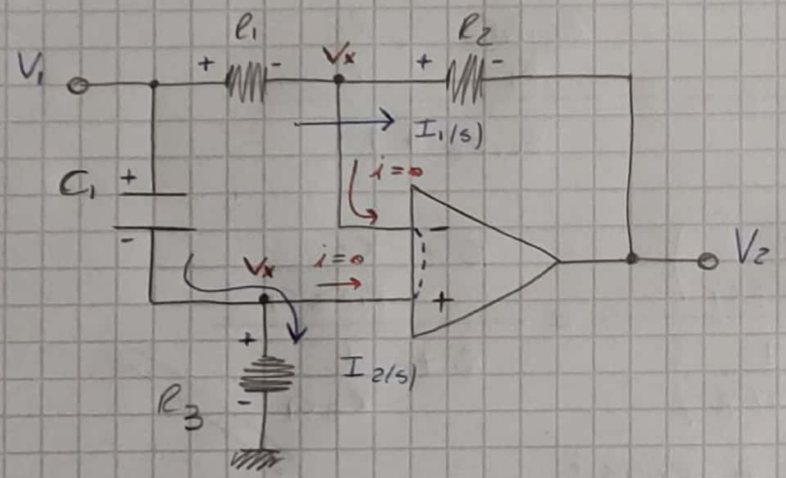
Albero Federico 1

Trabajo Semanal I



1_ Obtener la transferencia $\frac{V_2}{V_1}$ (módulo, fase y diagrama de polos y ceros)

• $I_{1(s)}: \frac{(V_1 - V_x)}{R_1} = \frac{(V_x - V_2)}{R_2} \longrightarrow \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = \frac{V_x}{R_2} + \frac{V_x}{R_1}$

$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = V_x \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)$$

$$\frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = V_x \quad (A)$$

• $I_{2(s)}: (V_1 - V_x) \cdot sC_1 = \frac{V_x}{R_3}$

$$\downarrow$$

$$V_1 \cdot sC_1 = \frac{V_x}{R_3} + V_x \cdot sC_1$$

$$V_1 sC_1 = V_x \cdot \left(\frac{1}{R_3} + sC_1\right)$$

$$\frac{V_1 sC_1}{\frac{1}{R_3} + sC_1} = V_x \quad (B)$$

$$\Longrightarrow (A) = (B)$$

$$\Longrightarrow \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{V_1 sC_1}{\frac{1}{R_3} + sC_1}$$

$$\left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}\right) \cdot \left(\frac{1}{R_3} + sC_1\right) = V_1 sC_1 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{V_1}{R_1 R_3} + \cancel{\frac{V_1 sC_1}{R_1}} + \frac{V_2}{R_2 R_3} + \frac{V_2 sC_1}{R_2} = \cancel{\frac{V_1 sC_1}{R_1}} + \frac{V_1 sC_1}{R_2}$$

$$\frac{V_2}{R_2 R_3} + \frac{V_2 sC_1}{R_2} = \frac{V_1 sC_1}{R_2} - \frac{V_1}{R_1 R_3}$$

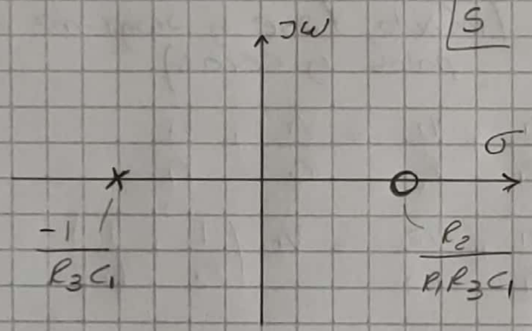
$$V_2 \cdot \left(\frac{1}{R_2 R_3} + \frac{sC_1}{R_2} \right) = V_1 \cdot \left(\frac{sC_1}{R_2} - \frac{1}{R_1 R_3} \right).$$

$$V_2 \cdot \left(\frac{sC_1 R_3 + 1}{R_2 R_3} \right) = V_1 \cdot \left(\frac{sC_1 R_1 R_3 - R_2}{R_1 R_2 R_3} \right)$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\dfrac{sC_1 R_1 R_3 - R_2}{R_1 \cancel{R_2} \cancel{R_3}}}{\dfrac{sC_1 R_3 + 1}{\cancel{R_2 R_3}}} = \frac{\dfrac{sC_1 \cancel{R_1} R_3}{\cancel{R_1}} - \dfrac{R_2}{R_1}}{sC_1 R_3 + 1}$$

• $$T(s) = \frac{\cancel{C_1 R_3} \cdot \left(s - \dfrac{R_2}{R_1 R_3 C_1} \right)}{\cancel{C_1 R_3} \cdot \left(s + \dfrac{1}{C_1 R_3} \right)} = \frac{s - \dfrac{R_2}{R_1 R_3 C_1}}{s + \dfrac{1}{R_3 C_1}}$$

• Diagrama de polos y ceros:



• $$T(\omega) = T(s) \Big|_{s = j\omega}$$

$$T(\omega) = \frac{j\omega - \dfrac{R_2}{R_1} \cdot \dfrac{1}{R_3 C_1}}{j\omega + \dfrac{1}{R_3 C_1}}$$

• $$|T(\omega)| = \frac{\sqrt{\left(\dfrac{R_2}{R_1} \cdot \dfrac{1}{R_3 C_1} \right)^2 + \omega^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{R_3 C_1} \right)^2 + \omega^2}}$$

: • módulo de la transferencia.

• $$\varphi_{T(\omega)} = \text{arc tg}\left(\frac{\omega}{-\dfrac{R_2}{R_1 R_3 C_1}} \right) - \text{arc tg}\left(\frac{\omega}{\dfrac{1}{R_3 C_1}} \right)$$; $-\text{arc tg}(x) = \text{arc tg}(-x)$

• fase de la transferencia.

$$\varphi_{T(\omega)} = -\text{arc tg}\left(\frac{\omega R_1 R_3 C_1}{R_2} \right) - \text{arc tg}(\omega R_3 C_1)$$

2 - ¿Que tipo de filtro es?

• La transferencia T(s) obtenida, para el caso de $\boxed{R_1 = R_2}$, es la de un filtro pasa todo de primer orden, ya que el polo y el cero quedan en imagen especular, es decir, espejados con respecto al eje jω.

$$\lim_{\omega \to \infty} |T(\omega)| = \frac{\to \infty}{\to \infty} = 1$$

En alta frecuencia, el filtro tiene 0 dB de ganancia.

• En baja frecuencia, el comportamiento del filtro estará sujeto al factor R_2/R_1 que multiplica la frecuencia del cero, ya que este desplazará el cero en el eje σ, acercándolo o alejándolo del eje $j\omega$.

Siendo:
ω_p: frecuencia del polo
ω_o: frecuencia del cero.

• $\omega_p = \frac{1}{R_3 C_1}$

* Si $\frac{R_2}{R_1} < 1 \rightarrow R_2 < R_1 \rightarrow \omega_p > \omega_o$

$$\lim_{\omega \to 0} |T(\omega)| = \frac{\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{R_3 C_1}}{\frac{1}{R_3 C_1}} = \frac{R_2}{R_1}$$

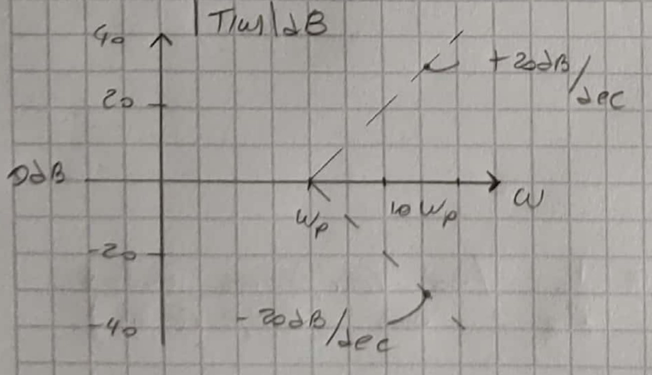
$20 \log \Big(\underbrace{\frac{R_2}{R_1}}_{<1} \Big) < 0\,dB \Rightarrow$ tendré una atenuación en baja frecuencia hasta llegar a la frecuencia del polo.

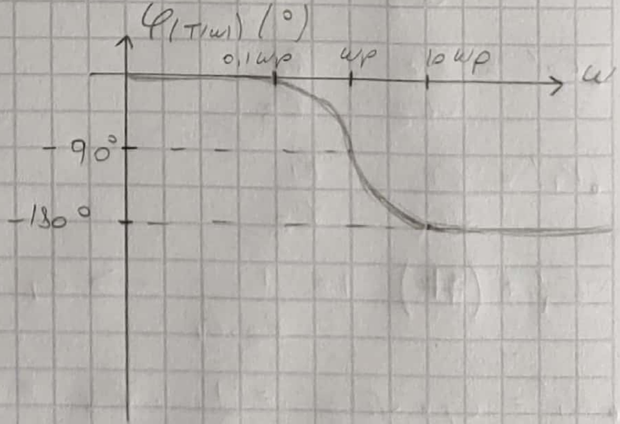
* Si $\frac{R_2}{R_1} > 1 \rightarrow R_2 > R_1 \rightarrow \omega_p < \omega_o$

$20 \log \Big(\underbrace{\frac{R_2}{R_1}}_{>1} \Big) > 0\,dB \Rightarrow$ tendré una ganancia en baja frecuencia, hasta que la transferencia tienda a 0dB en alta frecuencia.

* Si $\frac{R_2}{R_1} = 1 \rightarrow R_1 = R_2 \rightarrow \omega_p = \omega_o$

• el polo y el cero quedan espejados, por ende se cancelan sus efectos y obtengo una ganancia de 0dB $\forall \omega$.





3- Obtenga la función transferencia, pero normalizada.

¿Cuál sería en este caso la norma de frecuencia y qué interpretación circuital podría tener?

$$\bullet\, T(s) = \frac{s - \frac{R_2}{R_1 R_3 C_1}}{s + \frac{1}{R_3 C_1}}$$

$\omega_p = \frac{1}{R_3 C_1}$ (frecuencia del cero)

* normalizo en frecuencia:

$\underline{\Omega_\omega = \omega_p}$, (norma de frecuencia) $= \frac{1}{R_3 C_1}$

$$T(\$) = T(s)\Big|_{s = \$ \cdot \Omega_\omega}$$

$$\bullet\, T(\$) = \frac{\$\omega_p - \frac{R_2}{R_1}\cdot\omega_p}{\$\omega_p + \omega_p} = \frac{\cancel{\omega_p}\cdot\left(\$ - \frac{R_2}{R_1}\right)}{\cancel{\omega_p}\cdot(\$ + 1)} = \frac{\$ - R_2/R_1}{\$ + 1}$$

ω_0'

ω_p'

• Ahora con la transferencia $T(\$)$ se puede ver claramente como el comportamiento del filtro está en función de la relación R_2/R_1, tal como se describió anteriormente.

* normalización en impedancia:

$1 = \omega_p = \frac{1}{R_3 C_1} \longrightarrow 1 = \frac{1}{R_3 C_1}$ (#) (igualación de términos independientes de $T(s)$ y $T(\$)$)

tomo como norma: $\underline{\Omega_z = R_3}$, normalizando así los componentes del circuito

$\bullet\, R_3' = \frac{R_3}{\Omega_z} = \frac{R_3}{R_3} = 1$

$\bullet\, R_2' = \frac{R_2}{\Omega_z} = \frac{R_2}{R_3}$

$\bullet\, R_1' = \frac{R_1}{\Omega_z} = \frac{R_1}{R_3}$

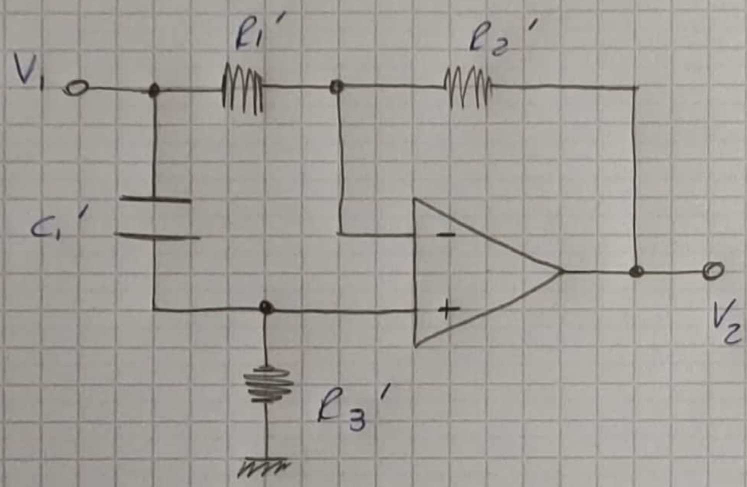
C_1 : (#) $1 = \frac{1}{R_3 \cdot C_1} \longrightarrow C_1 = \frac{1}{R_3}$ (son recíprocos estos dos componentes)

$\bullet\, C_1' = C_1 \cdot \Omega_z = \frac{1}{R_3}\cdot R_3 = 1$

Albero Federico

Bonus I) Obtener una red circuital que responda a la función hallada en 13.

Red circuital normalizada:



Referencias:

- $R_1' = \frac{R_1}{R_3}$
- $R_2' = \frac{R_2}{R_3}$
- $R_3' = 1$
- $C_1' = 1$