30/03

TC2 (Teoría de circuitos II)

• R4001

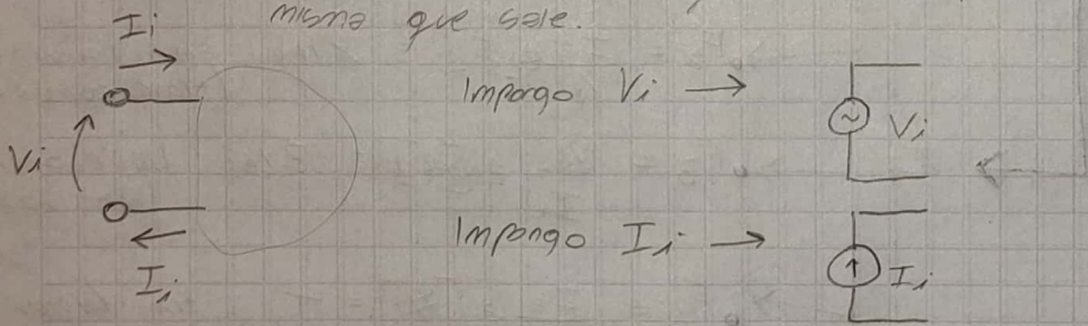
Repaso de TC1:

Red eléctrica

• Conjunto de elementos circuitales interconectados. circuito cerrado. puede tener o no una alimentación. Puede haber componentes activos o pasivos.

• Borne: un nodo expuesto de la red eléctrica. puedo hacer mediciones, tmb puedo imponer tensiones o corrientes.

• Puerto: dos bornes expuestos de una red. impongo tensión o corriente. La corriente que entra al puerto debe ser la misma que sale.



Función de excitación (en Laplace) (en un solo puerto)

solamente están definidas en un puerto

$$F(s) = \frac{R(s)}{E(s)}$$ respuesta / excitación.

R(E) { respuesta en función de la excitación.

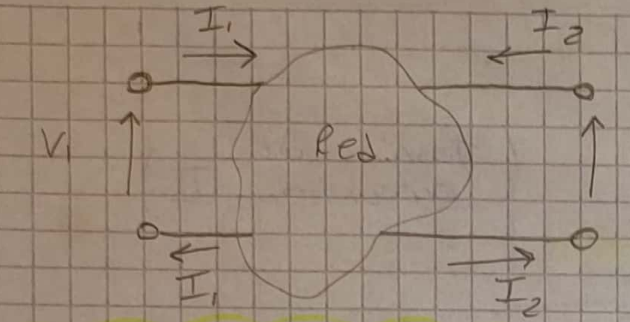
• Impongo tensión: en un puerto.

$$F = \frac{I}{V} = [S] = Y(s)$$ Admitancia.

• Impongo corriente:

$$Z = \frac{V}{I} = [\Omega]$$ respuesta / excitación

• tener cuidado ya que si bien se puede operar matemáticamente simple, hay que tener cuidado con las implicancias eléctricas que eso acarrea.



• Para que sea puerto, debe entrar lo mismo que sale. caso I_1 e I_2.

Función transferencia (2 puertos diferentes)
tengo 4 variables (I_1, V_1, I_2, V_2)

• $F = \frac{R}{E}$, tengo multiples posibilidades.
excitación en puerto 1
respuesta en el puerto 2

$F = \frac{R}{E}$

$E \to V_1 \to$ • $F_1 = \frac{V_2}{V_1} = [\ast] = T_V(s)$: transferencia de tensión. Adimensional.

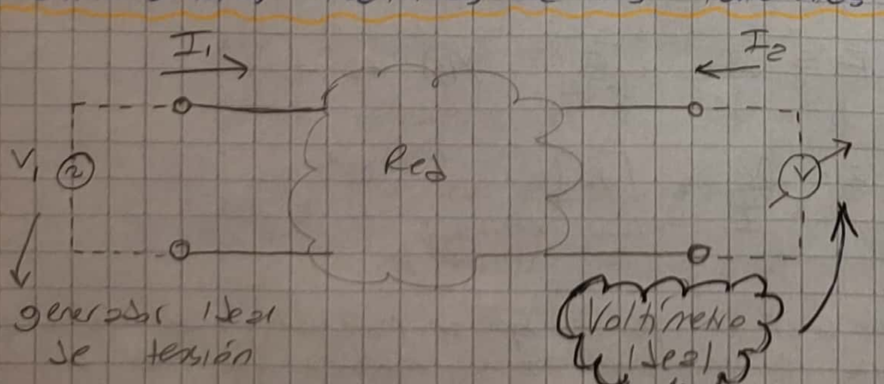
$\to$ • $F_2 = \frac{I_2}{V_1} = [S] = Y(s)$: admitancia? de transferencia (trans admitancia) → 2 puertos

$E \to I_1 \to$ • $F_3 = \frac{V_2}{I_1} = [\Omega] = Z(s)$: Impedancia. (trans impedancia) de transferencia.

$\to$ • $F_4 = \frac{I_2}{I_1} = [\ast] = T_I$: transferencia de corriente.

• transadmitancia: puede ser transconductancia, Gob si tiene el mismo producto ganancia ancho de banda.

Consecuencias electricas de las funciones transferencia:



• Resistencia interna del voltímetro, tiende a ser infinita, se puede modelizar como un circuito abierto.

$I_2 = 0$

No deriva nada de corriente al ser ideal.

Me impone una condición de medición, la cual es $I_2 = 0$.

• I_1 la impone la red circuital.

• V_2 la mido con el voltímetro.

• Esto sería una transferencia de tensión en vacío.

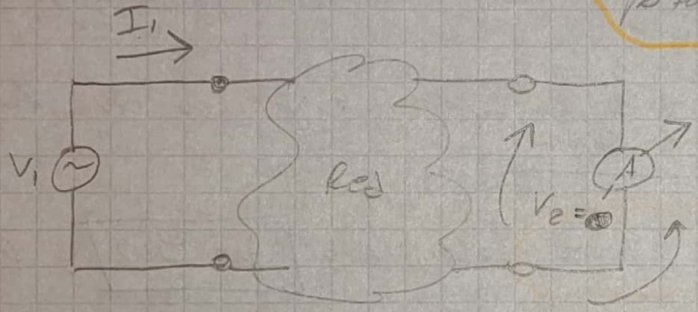
el amperímetro ideal se modeliza como un cortocircuito, ya que este se tiene que intercalar en serie al circuito para poder efectuar la medición. Su resistencia tiene que → 0 para así no interferir con la medición.

- $T_V = \frac{V_2}{V_1}\Big|_{I_2=0}$ → Condición extrema de carga en la cual se efectúa la medición.

- $Y(s) = \frac{I_2}{V_1}\Big|_{V_2=0}$ } Impongo V_1 pero mido I_2. el amperímetro ideal es un cortocircuito, condición extrema de carga. #

este ejemplo.

Condiciones extremas de carga → anulo tensión o corriente, de esta manera no producen potencia.



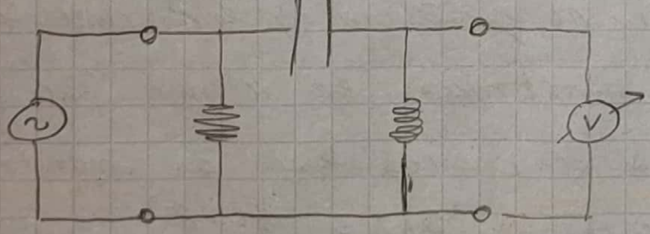
$I_2 = 0$

me anula V_2, $V_2 = 0$ al provocar el cortocircuito. (no hay dif de potencial si están los dos bornes unidos)

los otros dos casos que faltaban →

- $Z(s) = \frac{V_2}{I_1}\Big|_{I_2=0}$ (*) $T_I = \frac{I_2}{I_1}\Big|_{V_2=0}$.

- ejemplos:



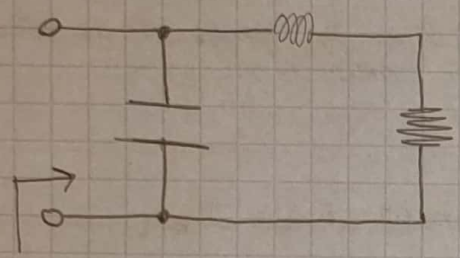
- la resistencia no interviene en la transferencia
- tiene implicancias el que empiece/termine en serie/paralelo la red eléctrica. Puede participar o no de la transferencia. tmb aparece la condición de medición.

(*) Aclaraciones: $F(s) = \frac{Respuesta(s)}{excitación(s)}$

- $T_V = \frac{V_2}{V_1}\Big|_{I_2=0}$: transferencia de tensión, mido la salida V_2, por lo que la condición de medición será $I_2 = 0$.
- $T_I = \frac{I_2}{I_1}\Big|_{V_2=0}$: transferencia de corriente, mido la salida I_2, por lo que la condición de medición será $V_2 = 0$.

Adm

ejercitación:



$Y(s)$

- $Y(s) = \dfrac{I}{V}$

$= sC$

$= \dfrac{s^2 L ...}{...}$

- Cociente de

Aclaración II:

En este caso, para obtener el tipo de comportamiento del circuito, planteo el cociente de polinomios $\dfrac{P(s)}{P(s)}$. Pero lo que hago al plantear el límite de $\omega \to \infty$ (luego de reemplazar $s = j\omega$) es hacer el cociente entre los términos de mayor grado de los polinomios y simplificar. De esta manera encontraré la expresión de una impedancia o admitancia de un R, L o C.

- Función excitación, es todo de entrada. tengo ...
  - ↳ no es una función de filtrado xq es la de excitación. Como se comporta la red, eso es lo que me dice.

polos y cero.

- Acá si puede haber más 0's que polos, ya que es una función de excitación, no de transferencia.

- Comportamientos de redes pasivas. reemplazar $\boxed{s = j\omega}$ y plantear el límite $\omega \to \infty$, salvar el límite. plantear cociente de polinomios de distinto grado/orden y ver cuál gana.

en este caso gana el s^2. • $\dfrac{s^2 LC}{sL} = sC$ // se puede

- ver que gana el capacitor, me queda una s en el numerador, gana el numerador. como es una admitancia, se ve que sC es la admitancia de un capacitor, por ende el circuito tendrá un comportamiento capacitivo. Caso impedancia: $Z(s) = \dfrac{sL + R}{s^2 LC + sCR + 1} = \dfrac{1}{Y(s)}$

- $Z(\omega \to \infty) = \dfrac{sL}{s^2 LC} = \dfrac{1}{sC}$ // tmb comportamiento capacitivo, coincide con la impedancia de un capacitor.

eléctricamente se ve en el capacitor en derivación. (ver papelitos)

en baja frecuencia, osea continua, se ve que el comportamiento es resistivo ya que el C es un circuito abierto y L es un cortocircuito. queda únicamente una resistencia R en serie con el puerto de entrada.

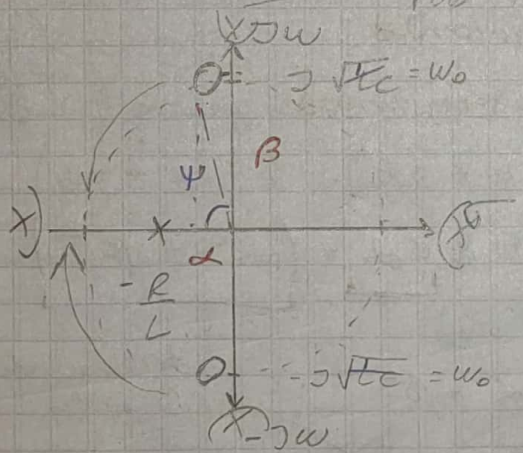
ver explicación más clara
en las páginas 4-5)

$$Y(s)\Big|_{s=jw} = \lim_{w\to\infty} = jwC \to \infty$$

en $w \to \infty$, la función admitancia tmb tiende a infinito.

Polo implícito → llegamos por consecuencia del numerador, no del denominador. Es un único polo que se ve repetido 4 veces por el infinito de la esfera de "Reeman". Esto se debe a que el orden del numerador impone, se va hacia infinito. Es el comportamiento de la red en alta frecuencia.

Polo implícito.



$sL + R = 0$

$sL = -R$

$s = -\frac{R}{L}$

$w_0 = \cancel{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{1}{LC}}$

el circuito coincide con el modelo real de un inductor o capacitor, con sus pérdidas y comportamiento en alta frecuencia.

la relación $\frac{R}{L}$ me cambia el recorrido de los ceros, su valor en σ

fenómeno de autoresonancia entre L y C.

~~PSR~~ Parametrización de la función cuadrática.

polinomios mónicos hago factor común.

$$Y(s) = \frac{LC}{L} \cdot \frac{\left(s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}\right)}{s + \frac{R}{L}}$$

w_0^2

$\frac{w_0}{Q}$

$$Y(s) = C \cdot \left(\frac{s^2 + s\frac{w_0}{Q} + w_0^2}{s + \frac{w_0}{Q}}\right)$$

Origen del Q: que tan bueno/reactivo es tu componente.

$$Q = \frac{P_{reactiva}}{P_{activa}} = \frac{I^2 \cdot X_L}{I^2 \cdot R} = \frac{X_L}{R} = \frac{jwL}{R}$$

$Q = \frac{wL}{R}$ } el Q claramente varía en función de la frecuencia.

relación de que tan bueno es el componente.

$\hookrightarrow \frac{Q}{w_0} = \frac{R}{L}$

tmb coincide con la selectividad de un filtro pasabanda

Coincide, no quiere decir que sea lo mismo.

Se mide la elevación con respecto al eje $-\sigma$, en el semiplano izquierdo, ya que allí es donde aparecen las singularidades.

α : componente real de la singularidad

β : " imaginaria de la singularidad.

(vector en el plano complejo.)

$$s^2 + s\frac{w_0}{Q} + w_0^2 = (s + \alpha + j\beta) \cdot (s + \alpha - j\beta)$$

$$s^2 + s\underbrace{\frac{w_0}{Q}} + \underbrace{w_0^2} = s^2 + s\underbrace{2\alpha} + \underbrace{(\alpha^2 + \beta^2)}$$

es una igualdad miembro a miembro.

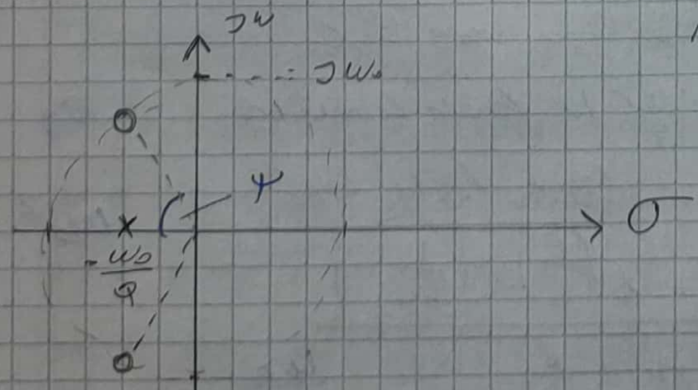
trigonometría en el diagrama de polos y ceros.

- $\frac{w_0}{Q} = 2\alpha$ (I) • $w_0^2 = \alpha^2 + \beta^2$

$\cos(\psi) = \frac{\alpha}{w_0}$ (II)

(reemplazo α) en, igualación de en I y II

$$\frac{w_0}{Q} = 2w_0 \cdot \cos(\psi) \quad ; \quad Q = \frac{1}{2 \cdot \cos(\psi)}$$



Mejor Q, más cerca las singularidades al eje jw

Parametrizo el circuito y el diagrama me queda todo en función de w_0 y Q. Usar esta parametrización siempre, simplifica el circuito.

repasar valores del Q → TC1.

Anotaciones de los videos:

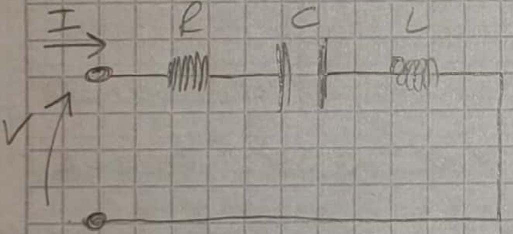
- En una red eléctrica puede haber más de 2 puertos, no necesariamente debe haber uno de entrada y otro de salida.

- $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ → Función excitación: medidas en el mismo puerto ambas magnitudes

  → Función transferencia: medidas en distintos puertos las magnitudes

- Para que ocurra/haya una transferencia, necesito de 2 puertos.

$Z_1 = \frac{V_1}{I_1}$; $Y_1 = \frac{I_1}{V_1}$ } ejemplo de funciones excitación en el puerto 1



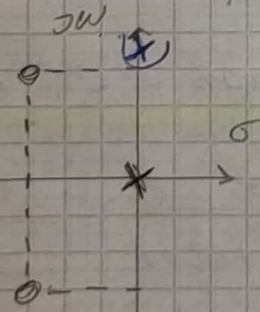
$$Z = R + sL + \frac{1}{sC}$$

$$= \frac{sRC + s^2LC + 1}{sC}$$

$$= \frac{\cancel{LC} \cdot \left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right)}{s\cancel{C}}$$

$$Z(s) = L \cdot \frac{\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right)}{s}$$

- $\omega_0^2 = 1/LC$



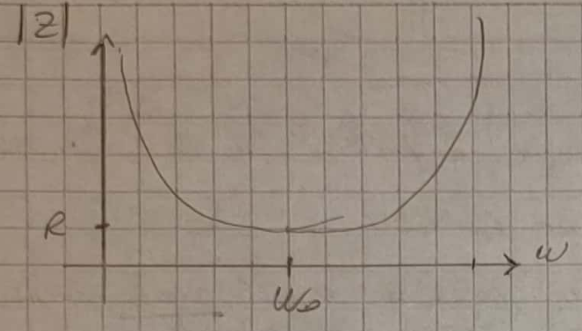
- En esta función impedancia, tengo un polo en el origen y dos ceros. No conozco la naturaleza de esos ceros ya que tengo un polinomio de segundo grado, pero como todos sus términos son positivos, puedo suponer que será un par de ceros complejos conjugados.

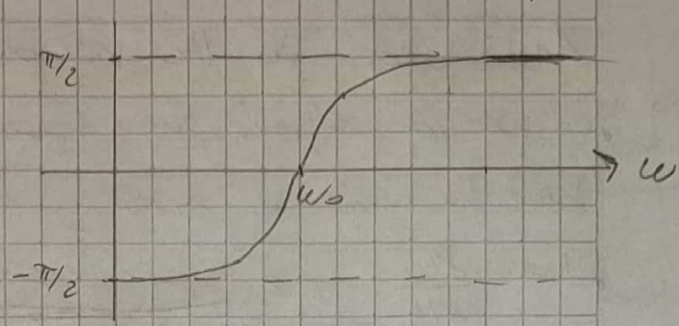
Por la naturaleza de la frecuencia compleja, me aparece también otro polo "oculto" en el infinito, que no se evidencia en la función transferencia. Cuando s crece en módulo ($\lim s \to \infty$), la función se va hacia el infinito, ya que el grado del numerador es mayor que el del denominador. El módulo de $|Z|$ se va hacia infinito, consecuencia de la esfera de Riemann. Este polo aparece si me alejo del origen en cualquier dirección.

Su comportamiento en el infinito es el de un polo.

$$\lim_{s \to \infty} Z(s) = |\to \infty|$$

Método gráfico para graficar el H(s) → ASyS.





• ω_0 = frec. de resonancia del circuito RLC.

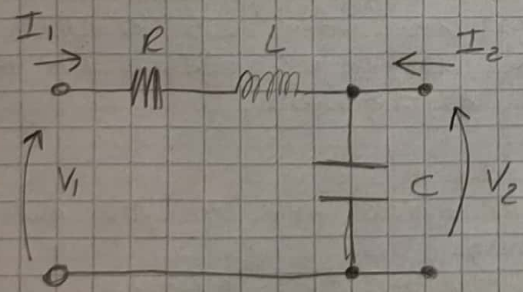
Análisis de fase: cuando $\omega = 0$, o sea, en frecuencia continua, el cap se comporta como un circuito abierto, mientras que el inductor se comporta como un cable, por ende prevalece el efecto del capacitor al dominar el circuito y la fase del circuito será de $-\pi/2$.

Luego, en $\omega = \omega_0$, como el circuito se encuentra en resonancia, la fase de L y C se anulan y queda la fase 0 del resistor.

Finalmente en $\omega \to \infty$, se impone el inductor al dominar el circuito, ya que el cap es un corto en alta frecuencia, por ende el comportamiento del circuito será de carácter inductivo, con fase $+\pi/2$.

— o —

Ejemplo de función transferencia, filtro pasa bajos de 2do orden



$$T(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1/sC}{1/sC + sL + R} = \frac{1/sC}{\frac{1 + s^2LC + sRC}{sC}}$$

$$T(s) = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1} = \frac{\overset{\omega_0^2}{1/LC}}{s^2 + sR/L + \underset{\omega_0^2}{1/LC}}$$

• Importante: parametrizar todas las funciones transferencia.

$Q = \frac{\text{Pot. Reactiva}}{\text{Pot. Activa}}$ (por definición) ; $Q = \frac{I^2 \cdot X_L}{I^2 \cdot R} = \frac{\omega \cdot L}{R}$ | el Q depende del ω.

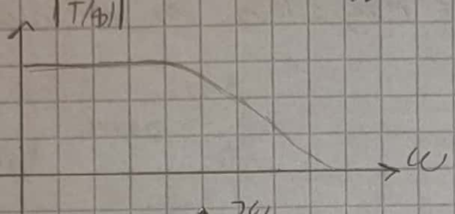
Puedo particularizar la expresión anterior para el Q medido @ ω_0, por ende: $Q_0 = \frac{L}{R} \cdot \omega_0 \rightarrow \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{R}{L}$ necesario para la parametrización

Expreso el polinomio cuadrático en función de los parámetros que no tienen que ver con los elementos circuitales.

sigue siendo la pulsación de resonancia del circuito.

• $T(s) = \dfrac{\omega_0^2}{s^2 + s\cdot\dfrac{\omega_0}{Q_0} + \omega_0^2}$; $\lim\limits_{s\to\infty} T(s) = \dfrac{1}{\omega^2} = \to 0$

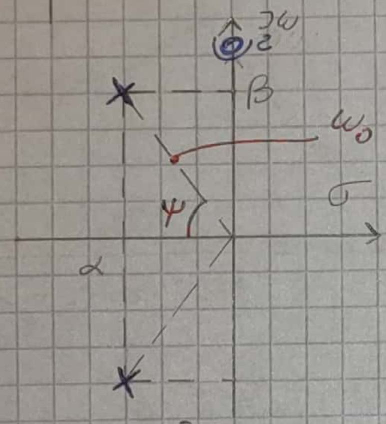
esto me provoca un 0 (doble) en el infinito, me atenúa la transferencia. tiene sentido al ser un F.P.B.



Ahora factorizo las raíces del denominador y lo expreso de esta manera:

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{(s+\alpha+j\beta)\cdot(s+\alpha-j\beta)}$$

xq α es un num negativo, los polos están en el semiplano izq.



$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + s\alpha - \cancel{sj\beta} + s\alpha + \alpha^2 - \cancel{\alpha j\beta} + \cancel{j\beta s} + \cancel{j\beta\alpha} - \underbrace{j^2}_{(-1)}\beta^2}$$

• $T(s) = \dfrac{\omega_0^2}{s^2 + (2\alpha)s + (\alpha^2+\beta^2)}$

Comparo miembro a miembro ambas expresiones.

• Término independiente: $\omega_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 \to$ tiene pinta de pitágoras en el diagrama de polos y ceros. ω_0 es la distancia radial a la singularidad, siendo α y β los catetos y ω_0 la hipotenusa.

Termino lineal: $\dfrac{\omega_0}{Q_0} = 2\alpha \to Q_0 = \dfrac{\omega_0}{2\alpha}$

Ψ relaciona a α con ω_0: $\cos(\Psi) = \dfrac{Ady}{hip} = \dfrac{\alpha}{\omega_0}$; $\cos(\Psi) = \dfrac{\alpha}{\omega_0}$

Planteo sustitución con α:

$\alpha = \cos(\Psi)\cdot\omega_0 \Longrightarrow Q_0 = \dfrac{\cancel{\omega_0}}{2\cdot(\cos(\Psi)\cdot\cancel{\omega_0})}$; $Q_0 = \dfrac{1}{2\cdot\cos(\Psi)}$

• $Q_0 = \dfrac{\omega_0}{2\alpha}$

• $Q_0 = \dfrac{1}{2\cos(\Psi)}$

• Ambas expresiones me relacionan la ubicación geométrica de las singularidades con los parámetros de la parametrización.

Importante: la distancia radial de las singularidades depende de ω_0 (pitágoras).

$Q \equiv Q_0$, antes lo particularicé para el caso en donde este es medido a la frecuencia $\omega = \omega_0$. $Q_0 = Q|_{\omega=\omega_0}$. Lo importante es que $\omega \neq \omega_0$

• Importante: la distancia α de las singularidades en el eje σ, es inversamente proporcional al factor de selectividad Q, por ende, cuando las singularidades estén muy pegadas al eje $j\omega$ (osea, con α muy bajo), esto denotará un Q muy alto en el circuito.

Módulo de la transferencia:

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} \cdot s + \omega_0^2}$$

• $$T(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q_0} \cdot j\omega + \omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\left(\frac{\omega_0 \cdot \omega}{Q_0}\right)}$$

$$|T(j\omega)| = \frac{\sqrt{(\omega_0^2)^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega)^2 + \left(\frac{\omega_0 \cdot \omega}{Q_0}\right)^2}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \cdot \omega}{Q_0}\right)^2}}$$

$$|T(j\omega)|\Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\underbrace{(\omega_0^2 - \omega_0^2)^2}_{0} + \left(\frac{\omega_0 \cdot \omega_0}{Q_0}\right)^2}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\frac{\omega_0^4}{Q_0^2}}}$$

• $$|T(j\omega)|\Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{\cancel{\omega_0^2}}{\frac{\cancel{\omega_0^2}}{Q_0}} = Q_0$$

Evalúo la transferencia (en módulo) para la frecuencia de resonancia $\omega = \omega_0$

tendré una ganancia de Q veces, en la frec. de resonancia.

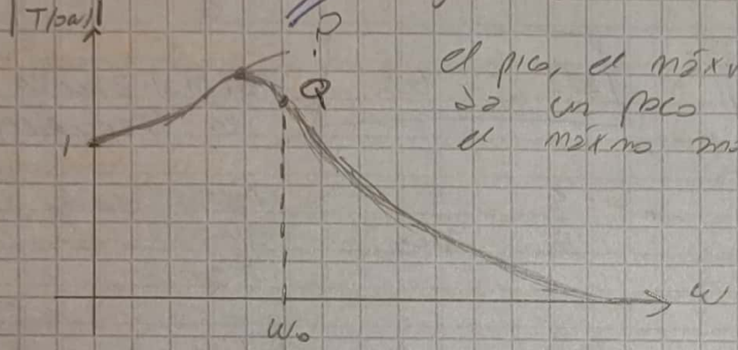
• Tiene sentido, ya que en resonancia estoy en la condición de menor impedancia del circuito (debido a las cancelaciones de $X_C = X_L$), por ende tendré la mayor corriente en el circuito. Tener la mayor corriente significa tener mayores ddp, lo cual me influye al estar tomando la salida del circuito en la ddp del capacitor. Aumenta la transferencia ya que aumenta la relación de la salida en comparación con la entrada.

$\Rightarrow$ quizás evidenciamos que el gráfico de la transferencia dependerá del Q del circuito (hay que corregirlo)

$$\left|T(j\omega)\right|\Big|_{\omega=0} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-0)^2 + \underbrace{\left(\frac{\omega_0 \cdot 0}{Q_0}\right)^2}_{0}}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^4}} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} = 1$$

$$\left|T(j\omega)\right|\Big|_{\omega=0} = 1$$

ganancia 1 en continua.



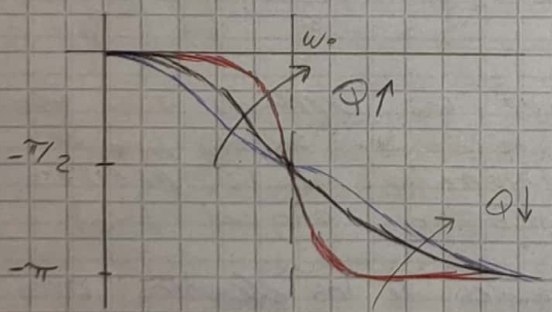
el pico, el máximo no se da en $W=W_0$, se da un poco antes, eso tiene que ver con el máximo analítico de la función.

en $W=W_0$ tengo la ganancia de Q veces.

$$\left|T(j\omega)\right|\Big|_{\lim\limits_{\omega\to\infty}} = \frac{1}{\omega^2} = (\to 0)$$ tendencia de la pendiente con que decrece la función transferencia.

$$\frac{1}{\omega^2} = -40 \text{ dB/dec}$$

Gráfico de Fase



En el caso de un Q muy cerca del eje $j\omega$ (un Q muy grande), el escalón de la fase será el más abrupto

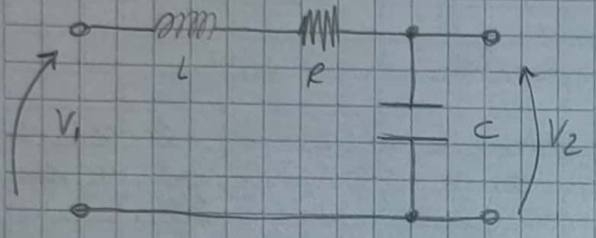
la que más Q tiene

la que menos Q tiene

Preguntar ¿

Normalización de Redes → Frecuencia
↳ Impedancia

- Normalización de Redes en frecuencia



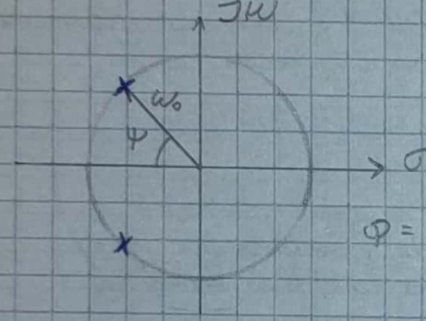
$$T(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

$$\boxed{\Omega_\omega = \omega_0}$$ normalización en frecuencia

↳ "norma" de la normalización en frecuencia.

- $\$ = \frac{s}{\omega_0} = \frac{s}{\Omega_\omega}$

frec. compleja



$$Q = \frac{1}{2\cos(\varphi)}$$

redefinimos la variable s y la vamos a escalar

- s → vieja variable
- $\$$ → nueva variable, normalizada.

Transferencia normalizada: $\underline{s = \omega_0 . \$}$

$$T(\$) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 \$^2 + \$\frac{\omega_0^2}{Q} + \omega_0^2} = \frac{\cancel{\omega_0^2}}{\cancel{\omega_0^2}.(\$^2 + \$\frac{1}{Q} + 1)} =$$

- $$T(\$) = \frac{1}{\$^2 + \$\frac{1}{Q} + 1}$$ //

- se obtiene una expresión mas sencilla y me saco de encima uno de los parámetros de la primera parametrización original (ω_0).

- Como afecta la normalización a los valores de los elementos circuitales:

$Z_{1(s)} = sL + R \rightarrow Z_1(\$) = \$\underbrace{(\omega_0 L)}_{L'} + R$

$Z_{2(s)} = \frac{1}{sC} \rightarrow Z_2(\$) = \frac{1}{\$\underbrace{(\omega_0 C)}_{C'}}$

$\left.\begin{array}{l} L' = \omega_0 L \\ C' = \omega_0 C \end{array}\right\}$ ecuaciones de normalización

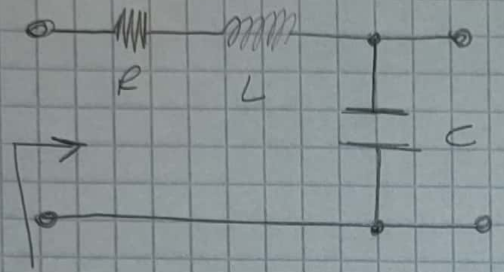
$\underbrace{L = \frac{L'}{\omega_0} \; ; \; C = \frac{C'}{\omega_0}}$

ecuaciones de desnormalización

- la red que tenga la transferencia $T(\$)$, normalizado, deberá haber sido generada por un C' y un L'

- Estos componentes son versiones aumentadas (ya que $\omega_0 > 1$), muchísimo mas grandes que los componentes comunes. Esto me da una facilidad para trabajar. Luego, la desnormalización me permiten obtener los valores reales de los componentes. Numeros mas sencillos, ya que me saco de encima ω_0. numeros mas manejables.

Normalización de impedancias:



$$Z = R + sL + \frac{1}{sC}$$

$$\mathcal{Z} = \frac{Z}{\Omega_z}$$

normalizaciones

$$\mathcal{Z} = \underbrace{\frac{R}{\Omega_z}}_{R''} + \underbrace{\frac{sL}{\Omega_z}}_{L''} + \frac{1}{s\underbrace{C\Omega_z}_{C''}}$$

ecuaciones de normalización

Z

$$\boxed{\Omega_z = R} \Longrightarrow \mathcal{Z} = 1 + sL'' + \frac{1}{sC''}$$

Desnormalización:

$$\begin{cases} R = R''\cdot\Omega_z \\ L = L''\cdot\Omega_z \\ C = \dfrac{C''}{\Omega_z} \end{cases}$$

me permite simplificar la expresión de la impedancia dando así un valor unitario.

Desnormalización conjunta: (Aplico ambos procesos a la vez)

$$L = \frac{L^{\circ}\cdot\Omega_z}{\Omega_\omega} \;;\quad C = \frac{C^{\circ}}{\Omega_z\cdot\Omega_\omega} \;;\quad R = R^{\circ}\cdot\Omega_z$$

Indica que el componente está normalizado tanto en frecuencia como en impedancia.

- Estas expresiones son producto de unir las ecuaciones de desnormalización de ambos casos. Tener en cuenta que R no se desnormaliza en frecuencia, solo en impedancia.