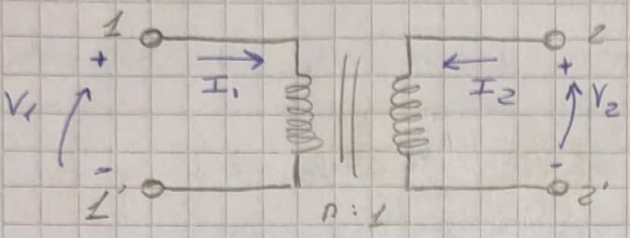
Albero Federico | Legajo: 175.698-9 | 1

**(3)** Dado el siguiente transformador ideal se pide:

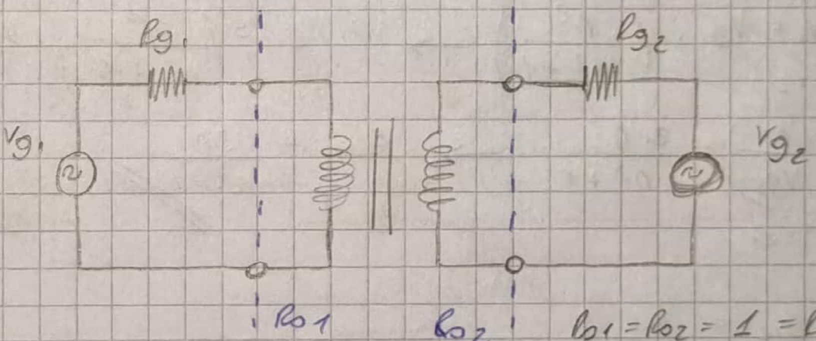



(a) Encuentre la matriz de parámetros Scattering. Considerar impedancias de referencia en cada puerto de 1 ohm ($R_{o1} = R_{o2} = 1\ \Omega$)

Ecuaciones características del transformador Ideal:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = n \cdot V_2 \\ I_1 = \dfrac{1}{n} \cdot I_2 \end{array}\right\} \quad \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2}{I_2} \cdot n^2 \longrightarrow Z_1 = Z_2 \cdot n^2$$

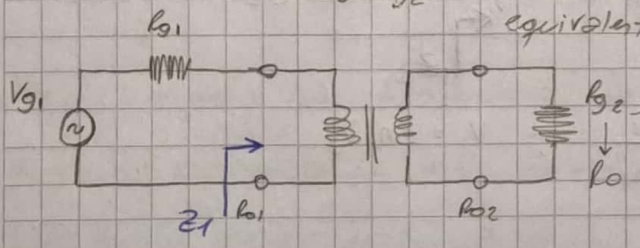
- $S_{11} = \left.\dfrac{b_1}{a_1}\right|_{\substack{a_2 = 0 \\ R_{o2} = R_{g2} \\ V_{g2} = 0}}$




$R_{o1} = R_{o2} = 1 = R_o$

$$S_{11} = \left.\frac{Z_1 - R_{o1}}{Z_1 + R_{o1}}\right|_{R_{o2} = R_{g2}}$$

circuito equivalente



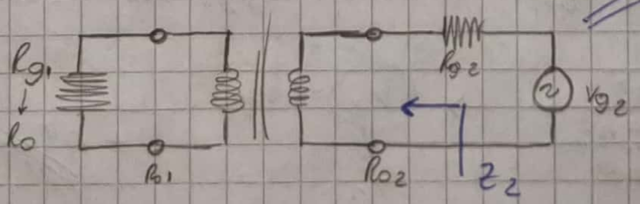

El secundario queda cargado con $R_o$.

$$S_{11} = \frac{Z_1 - R_{o1}}{Z_1 + R_{o1}}$$

$$= \frac{R_o \cdot n^2 - R_o}{R_o \cdot n^2 + R_o} = \frac{\cancel{R_o} \cdot (n^2 - 1)}{\cancel{R_o} \cdot (n^2 + 1)}$$

$$= \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

- $S_{22} = \left.\dfrac{b_2}{a_2}\right|_{\substack{a_1 = 0 \\ R_{g1} = R_{o1} \\ V_{g1} = 0}}$



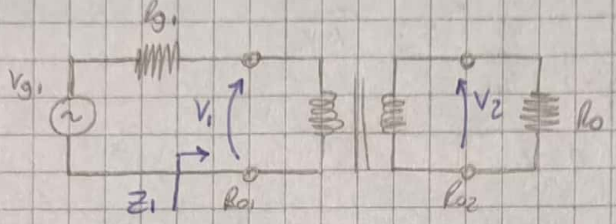

$$S_{22} = \left.\frac{Z_2 - R_{o2}}{Z_2 + R_{o2}}\right|_{R_{o1} = R_{g1}} = \frac{\dfrac{R_o}{n^2} - R_o}{\dfrac{R_o}{n^2} + R_o} = \frac{\cancel{R_o}}{\cancel{R_o}} \cdot \frac{\left(\dfrac{1}{n^2} - 1\right)}{\left(\dfrac{1}{n^2} + 1\right)}$$

(→ sigue)

$$S_{22} = \frac{\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)}{\left(\frac{1}{n^2} + 1\right)} = \frac{1-n^2}{1+n^2} = (-1)\cdot\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right) = (-1)\cdot S_{11}$$

$\boxed{S_{22} = (-1)\cdot S_{11}} \rightarrow$ Red anti-métrica

- $S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{\substack{a_2=0 \\ R_{g2}=R_{02} \\ V_{g2}=0}}$




$$S_{21} = \frac{V_2}{V_{g1}/2}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{R_{01}}{R_{02}}}}_{=1}\Bigg|_{\substack{R_{g2}=R_{02} \\ R_{g1}=R_{01}}} = \frac{2\cdot V_2}{V_{g1}} \quad ; \quad V_1 = n\cdot V_2 \rightarrow V_2 = \frac{V_1}{n}$$

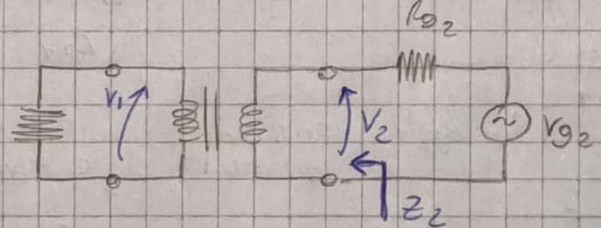
Recordar: $Z_1 = n^2 Z_2$

$$V_1 = V_{g1}\cdot\frac{Z_1}{Z_1+R_{g1}} = V_{g1}\cdot\frac{R_0\cdot n^2}{R_0 n^2 + R_0} = \frac{\cancel{R_0}}{\cancel{R_0}}\cdot\frac{n^2}{n^2+1}$$

$$\underset{n\cdot V_2}{V_1} = V_{g1}\cdot\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right) \rightarrow \cancel{n}\cdot V_2 = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)\cdot V_{g1}$$

$$\underset{S_{21}}{\frac{2\cdot V_2}{V_{g1}}} = \frac{2\cdot n}{n^2+1} \rightarrow S_{21} = \frac{2n}{n^2+1}$$

- $S_{12} = \left.\frac{b_1}{a_2}\right|_{\substack{a_1=0 \\ R_{g1}=R_{01} \\ V_{g1}=0}}$




$$S_{12} = \frac{V_1}{V_{g2}/2}\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{R_{02}}{R_{01}}}}_{=1}\Bigg|_{\substack{R_{g1}=R_{01} \\ R_{g2}=R_{02}}} = 2\cdot\frac{V_1}{V_{g2}} \quad ; \quad V_1 = n\cdot V_2$$

$$V_2 = V_{g2}\cdot\frac{Z_2}{Z_2+R_{g2}} = V_{g2}\cdot\frac{R_0/n^2}{R_0/n^2 + R_0} = V_{g2}\cdot\frac{\cancel{R_0}}{\cancel{R_0}}\left(\frac{1/n^2}{1/n^2+1}\right)$$

$$V_2 = V_{g2}\cdot\frac{\frac{1}{\cancel{n^2}}}{\frac{1+n^2}{\cancel{n^2}}} \rightarrow \underset{V_1/n}{V_2} = V_{g2}\cdot\frac{1}{1+n^2}$$

$$\frac{V_1}{n} = V_{g2}\cdot\frac{1}{1+n^2} \rightarrow \underset{S_{12}}{2\cdot\frac{V_1}{V_{g2}}} = \frac{2\cdot n}{n^2+1} \rightarrow S_{12} = \frac{2n}{n^2+1}$$

* $S_{12} = S_{21} = \dfrac{n}{n^2+1}$ → Cuadripolo pasivo y recíproco.

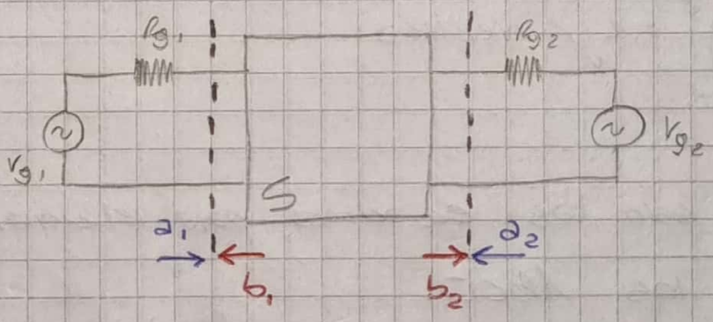
Matriz de parámetros scattering resultante:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{n^2-1}{n^2+1} & \dfrac{2n}{n^2+1} \\ \dfrac{2n}{n^2+1} & (-1)\cdot\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right) \end{bmatrix}$$

(b) Halle las pérdidas por inserción para $n=5$. Explique su significado físico.

$$[S]\Big|_{n=5} = \begin{bmatrix} \dfrac{5^2-1}{5^2+1} & \dfrac{2\cdot 5}{5^2+1} \\ \dfrac{2\cdot 5}{5^2+1} & (-1)\cdot\dfrac{5^2-1}{5^2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{12}{13} & \dfrac{5}{13} \\ \dfrac{5}{13} & \dfrac{-12}{13} \end{bmatrix}$$

$$S_{21} = \dfrac{b_2}{a_1}\Big|_{a_2=0}$$




• $S_{21}$: Ganancia de transducción directa o transferencia directa, ya que este relaciona a la onda incidente en el puerto 1 ($a_1$) con la onda reflejada en el puerto 2 ($b_2$).

$\dfrac{1}{|S_{21}|}$ → Pérdidas por inserción, representan una atenuación.

$$P.I. = 10.\log\left(\dfrac{1}{|S_{21}|}\right) = 10.\log\left(\dfrac{1}{5/13}\right) = 4,15\ dB$$

Otra expresión de cálculo válida podría ser:

$$-|S_{21}|_{dB} = -10.\log\left(|5/13|\right) = 4,15\ dB$$

• Para explicar el significado físico de las pérdidas por inserción (P.I.), se puede valer del teorema de Darlington, ya que en este caso nos encontramos en un cuadripolo pasivo y no disipativo

$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1$, esto se lo puede interpretar como que de toda la potencia que tenga disponible el cuadripolo, esta solamente podrá reflejarse en el puerto 1 ($S_{11}$) o ser transmitida ($S_{21}$), por lo que toda la potencia que no sea reflejada por desadaptación, será transmitida.

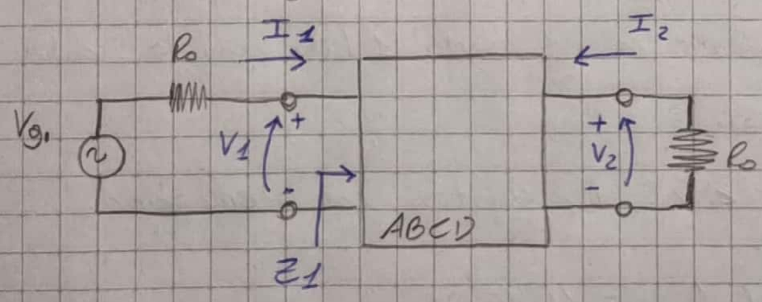
• En este caso, como existe onda reflejada ($|S_{11}| > 0$), no toda la potencia se transmitirá del puerto 1 al puerto 2 y se pierde energía, por lo que tiene sentido analizar el recíproco de la transmisión, las cuales son las pérdidas por inserción, una atenuación.

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1$$

$$\underbrace{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2}_{=1} = 1 \checkmark \text{ verifica}$$

(c) Plantee solo las ecuaciones para relacionar el parámetro $S_{11}$ con los ABCD.

• En base al siguiente cuadripolo:




Recordando los parámetros ABCD o T

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} V_1 = A \cdot V_2 + B \cdot (-I_2) \\ I_1 = C \cdot V_2 + D \cdot (-I_2) \end{cases}$$

$$S_{11} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} = \frac{Z_1 - R_0}{Z_1 + R_0}$$

$Z_1 = \frac{V_1}{I_1}$ (puerto 1) $\qquad V_2 = (-I_2) \cdot R_0$

Albero Federico | Legajo: 175.698-9 | 3

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{A \cdot V_2 - B I_2}{C V_2 - D I_2} = \frac{A \cdot (-I_2 \cdot R_0) - B I_2}{C \cdot (-I_2 R_0) - D I_2} = \frac{(-1) \cdot (A I_2 R_0 + B I_2)}{(-1) \cdot (C I_2 R_0 + D I_2)}$$

$$= \frac{\cancel{I_2} \cdot (A R_0 + B)}{\cancel{I_2} \cdot (C R_0 + D)} = \frac{A \cdot R_0 + B}{C \cdot R_0 + D}$$ } Ahora lo reemplazo en la expresión de $S_{11}$

$$\Rightarrow S_{11} = \frac{Z_1 - R_0}{Z_1 + R_0} = \frac{\left(\frac{A R_0 + B}{C R_0 + D}\right) - R_0}{\left(\frac{A R_0 + B}{C R_0 + D}\right) + R_0}$$

$$S_{11} = \frac{\frac{A R_0 + B - C R_0^2 - D R_0}{\cancel{C R_0 + D}}}{\frac{A R_0 + B + C R_0^2 + D R_0}{\cancel{C R_0 + D}}} = \frac{A R_0 + B - C R_0^2 - D R_0}{A R_0 + B + C R_0^2 + D R_0}$$

$$S_{11} = \frac{\cancel{R_0} \cdot (A + B/R_0 - C \cdot R_0 - D)}{\cancel{R_0} \cdot (A + B/R_0 + C \cdot R_0 + D)} = \frac{A + B/R_0 - C \cdot R_0 - D}{A + B/R_0 + C \cdot R_0 + D}$$