Clase nº5: Transformación en frecuencia (Paso altos y Paso banda)

Ejercicios de métodos de transformación de funciones transferencia (Videos 1-4)

ejemplo 1: Paso bajos → paso altos activo.

Datos plantilla: $\alpha_{max} = 3dB$ — $f_p = 4KHz$; $\alpha_{min} = 30dB$ — $f_s = 1KHz$ } Requisitos del filtro paso altos objetivo.

- Sintetizar con un circuito pasivo y utilizar la aproximación de Chebyshev.

1) normalizar la plantilla

$\Omega_w = 2\pi f_p = 2\pi \cdot 4KHz$

$w_p' = 1$ (normalizada)

$w_s' = \frac{2\pi 1KHz}{2\pi 4KHz} = 0,25$

- en los filtros pasa altos: $w_s < w_p$, por lo que al normalizar en base a w_p, $w_p' = 1$ pero $w_s' < 1$ (será menor que 1)

"Low pass Filter"

2) Obtener la plantilla equivalente del LPF equivalente (normalizada)

$\Omega_p = \frac{1}{w_p'} = 1$ $\quad \Omega_s = \frac{1}{w_s'} = \frac{1}{0,25} = 4$

- α_{max} y α_{min} se mantienen ctes, no sufren modificaciones.

3) Una vez obtenida la plantilla equivalente del LPF (normalizada) calculo el orden y los parámetros del filtro.

$\xi^2 = 10^{\frac{\alpha_{max}}{10}} - 1 = 0,99526... \approx 1$ (en el notebook realizo estos redondeos)

$\alpha_{min}(n) = 10 \cdot \log(1 + \xi^2 \cdot \cosh^2(n \cdot \cosh^{-1}(w_s)))$

$\alpha_{min}(n=2) = 29,81\ dB \approx 30\ dB \longrightarrow n = 2.$

Polinomio de Chebyshev: $C_2(w) = 2w\,C_{n-1} - C_{n-2}$

$C_2(w) = 2w \cdot C_1 - C_0 = 2w^2 - 1$

$|T(jw)|^2 = \frac{1}{1 + \xi^2 \cdot C_2^2(w)} = \frac{1}{1 + \xi^2 \cdot (2w^2-1)^2}$, Asumir $\xi^2 \approx 1$

$= \frac{1}{1 + \underbrace{\xi^2}_{=1} \cdot (4w^4 - 2 \cdot 2w^2 + 1)} = \left[\frac{1}{4w^4 - 4w^2 + 2}\right]_{w = \frac{s}{j}}$

$$|T(s)|^2 = \frac{1}{4s^4 + 4s^2 + 2} = \left(as^2 + bs + c\right)\cdot\left(as^2 - bs + c\right)$$

$s^0)$ $2 = c^2 \rightarrow c = \sqrt{2} = 1,4142$

$s^4)$ $4 = a^2 \rightarrow a = \sqrt{4} = 2$

$s^2)$ $4 = ac + ac - b^2 \rightarrow 4 = 2a.c - b^2$

$b^2 = 2ac - 4 = 2.(2.\sqrt{2}) - 4 \rightarrow b = \sqrt{4\sqrt{2} - 4} \approx 1,287$

$$T_2(s) = \frac{1}{2s^2 + 1,287.s + \sqrt{2}}$$; Para llevarlo en formato mónico saco factor común 2 en el denom.

$$T_2(s) = \frac{1/2}{s^2 + 0,6435\cdot s + \sqrt{2}/2}$$

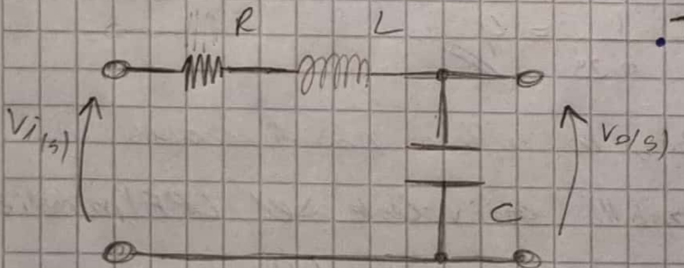
obtengo la transferencia del LPF equivalente.

no es el mismo coeficiente, hay una de metido por ahí.

4) Transformación en frecuencia:

Como el circuito se implementará con una red pasiva, utilizaremos la transformación en frecuencia a nivel componentes.

Primero sintetizamos una red circuital para el LPF y luego transformamos en frecuencia:



$$T_2(s) = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{R}{L}\cdot s + \frac{1}{LC}}$$

Asumo $R = 1$ (normalizado)

$\Omega_z = R$

$\frac{R}{L} = 0,6435 \rightarrow \frac{1}{L} = 0,6435 \rightarrow L = \frac{1}{0,6435} = 1,554$

$\frac{1}{LC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $LC = \frac{2}{\sqrt{2}} \rightarrow C = \frac{1}{L}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = 0,91$

$\begin{cases} R = 1 \\ L = 1,55 \\ C = 0,91 \end{cases} \Longrightarrow$ Ahora transformo el circuito pasa bajos en un pasa altos, transformando componente por componente.

$P = K(s) = 1/s$

$Z_{LP-R}(P) = R \rightarrow Z_{HP-R}(s) = R$

$Z_{LP-L}(P) = P.L \rightarrow Z_{HP-L}(s) = \frac{1}{s}.L = \frac{1}{s.(1/L)}$, $(1/L) = C_{eq}$

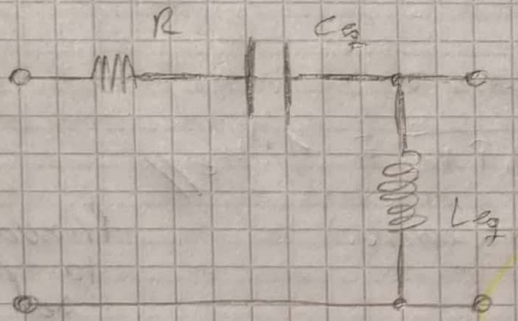
$C_{eq} = \frac{1}{L} = 0,644$, $Z_{HP-L} = \frac{1}{s.C_{eq}}$

Al transformar el circuito del LPF para un HPF, el inductor se transformó en un capacitor C_{eq}. Se reemplaza el componente anterior por el nuevo transformado.

$$Z_{LP-C}(p) = \frac{1}{p\cdot C} \rightarrow Z_{HP-C}(s) = \frac{1}{1/s} \cdot \frac{1}{C} = s\cdot\left(\frac{1}{C}\right) \; ; \; \left(\frac{1}{C}\right) = L_{eq}$$

- $L_{eq} = \frac{1}{C} = 1{,}098 \; ; \; Z_{HP-C}(s) = s \cdot L_{eq}$ //

- Circuito pasivo del filtro pasa altos:



$$\begin{cases} R = 1 \\ L_{eq} = 1{,}098 \\ C_{eq} = 0{,}644 \end{cases}$$

La desventaja de este método es que no tengo disponible la función transferencia matemática del HPF al haber trabajado directamente con los componentes circuitales

5) Desnormalizar:

Verificado en LTSpice

ejemplo 2: Pasabanda activo

datos plantilla pasabanda objetivo.

$$\begin{cases} f_p: 0,9\,MHz - 1,\hat{1}\,MHz \;—\; \alpha_{max} = 3\,dB \\ f_s: f \leq 0,6\,MHz \text{ y } f \geq 1,5\,MHz \;—\; \alpha_{min} = 15\,dB \end{cases}$$

* sintetizar con un circuito activo y utilizar un filtro de máxima planicidad.

- frecuencia central de la banda de paso:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{p_1} \cdot \omega_{p_2}} = \sqrt{0,9\,MHz \cdot 1,\hat{1}\,MHz} = 1\,MHz \,//$$

$\Omega_\omega = 2\pi \cdot \omega_0$ — norma de frecuencia.

Primero normalizo la plantilla del BPF.

$$\begin{cases} \omega_0' = 1 \\ \omega_{p_1}' = 0,9 \;;\; \omega_{p_2}' = 1,\hat{1} \;;\; \omega_{s_1}' = 0,6 \;;\; \omega_{s_2}' = 1,5 \end{cases}$$

núcleo de transformación LPF → BPF normalizado:

- $p = K(s) = Q \cdot \dfrac{s^2+1}{s}$ // ; $Q = \dfrac{\omega_0}{BW}$; $BW = \omega_{p_2} - \omega_{p_1} = \dfrac{1}{A}$

$$\underline{BW} = \omega_{p_2}' - \omega_{p_1}' = 1,\hat{1} - 0,9 = 0,2\hat{1}$$

$$\Rightarrow \underline{Q} = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{1}{0,2\hat{1}} = 4,7368\ldots \,//$$

A través del núcleo de transformación K(s), se obtiene la plantilla prototipo del LPF

⟹ Ahora necesito obtener las frecuencias Ω_p y Ω_s del LPF equivalente, a través de $K(s)$.

$$K(s) = Q \cdot \frac{s^2+1}{s} \rightarrow K(j\omega) = K(s)\Big|_{s=j\omega} = Q \cdot \frac{(j\omega)^2+1}{j\omega}$$

19

$$K(j\omega) = Q \cdot \frac{(-\omega^2+1)}{j\omega} \cdot \frac{j}{j} = j\,Q \cdot \frac{(-1)\cdot(\omega^2-1)}{(-1)\cdot \omega}$$

$$p = \Sigma + j\Omega \longrightarrow \underline{\Omega} = Q \cdot \frac{(\omega^2-1)}{\omega} \,//$$

transformación en frecuencia LPF → BPF

- Con esta expresión, transformo las frecuencias de la plantilla del pasa banda normalizadas hacia el pasa bajos prototipo.

- $\Omega_{p_1} = Q \cdot \dfrac{(\omega_{p_1}^2-1)}{\omega_{p_1}} = 4,7368 \cdot \dfrac{(0,9^2-1)}{0,9} \simeq -1,000\ldots$ //

- $\Omega_{p_2} = Q \cdot \dfrac{(\omega_{p_2}^2-1)}{\omega_{p_2}} = 4,7368 \cdot \dfrac{(1,\hat{1}^2-1)}{1,\hat{1}} = +1,0000\ldots$ //

Ambos resultados son correctos, ya que el espectro de la frecuencia es par (en módulo)

$\Rightarrow |\Omega_{p_1}| = |\Omega_{p_2}| = 1$ → frecuencia de fin de banda de paso LPF.

- $\Omega_{s_1} = Q \cdot \dfrac{(w_{s_1}^2 - 1)}{w_{s_1}} = Q \cdot \dfrac{(0{,}6^2 - 1)}{0{,}6} = -5{,}05$
- $\Omega_{s_2} = Q \cdot \dfrac{(w_{s_2}^2 - 1)}{w_{s_2}} = Q \cdot \dfrac{(1{,}5^2 - 1)}{1{,}5} = 3{,}947$

} #

(#) Como en este caso no hay simetría geométrica en la banda de atenuación, $\Omega_{s_1} \neq \Omega_{s_2}$.

- Elijo la Ω_s de menor valor, ya que de esta manera me aseguro de cumplir con el requisito de atenuación para ambas dos frecuencias en sus respectivas bandas de detención.

$\Rightarrow \Omega_s = \Omega_{s_2} = 3{,}947$

$\Omega p = 1$
$\Omega_s = 3{,}94734$

} estos son los datos de la plantilla del LPF equivalente o prototipo a diseñar.

tmb $\alpha_{max} = 3\,dB$ y $\alpha_{min} = 15\,dB$, estos valores no sufren modificación.

- Como $\alpha_{max} = 3\,dB \longrightarrow \xi^2 = 1 \rightarrow$ Caso Butterworth

$\xi^2 = 10^{\frac{\alpha_{max}}{10}} - 1 = 0{,}995 \longrightarrow \xi = 0{,}997 \cong 1$

$\alpha_{min}(n) = 10 \cdot \log(1 + \xi^2 \cdot w_s^{2n})$

$\alpha_{min}(n=2) = 23{,}89\,dB > 15\,dB \longrightarrow \boxed{n = 2}$

Obtengo la transferencia del LPF prototipo: $(\xi^2 = 1 \wedge n = 2)$

$|T(jw)|^2 = T(jw) \cdot T(-jw) = \dfrac{1}{1 + \xi^2 \cdot \Omega^{2n}} = \dfrac{1}{1 + \Omega^4}$

$Q = \dfrac{1}{2 \cdot \cos(\psi)} = \dfrac{1}{2 \cdot \cos(\pi/4)} = \dfrac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\dfrac{1}{Q} = \sqrt{2}$

No confundir el Q del par de polos con el Q del filtro pasabanda, no son lo mismo.

$H_{LP}(p) = \dfrac{1}{p^2 + p \cdot \sqrt{2} + 1}$ } Aplico la transformación en frecuencia $p = K(s) = Q \cdot \dfrac{s^2 + 1}{s}$

- $H(s) = H_{LP}\left(p = Q \cdot \dfrac{s^2+1}{s}\right) = \dfrac{1}{Q^2 \cdot \dfrac{(s^2+1)^2}{s^2} + \sqrt{2} \cdot Q \cdot \dfrac{(s^2+1)}{s} + 1}$

hago común denominador s^2 y lo paso al numerador.

$$H(s) = \frac{1}{\dfrac{Q^2\cdot(s^2+1)^2 + s\cdot Q\cdot\sqrt{2}\cdot(s^2+1) + \boxed{s^2}}{s^2}}$$

$$H(s) = \frac{s^2}{Q^2\cdot(s^4+2s^2+1) + \sqrt{2}\,Q\cdot(s^3+s) + s^2}$$

$$H(s) = \frac{s^2}{Q^2\cdot s^4 + Q^2 2 s^2 + Q^2 + \sqrt{2}\,Q s^3 + \sqrt{2}\,Q s + s^2}$$

$$H(s) = \frac{s^2}{Q^2 s^4 + \sqrt{2}\,Q s^3 + (2Q^2+1)\cdot s^2 + \sqrt{2}\,Q s + Q^2}$$

factor común Q^2 en el denom así lo dejo mónico el polinomio.

$$H(s) = \frac{s^2}{Q^2\cdot\left[s^4 + \frac{\sqrt{2}}{Q}s^3 + \left(2+\frac{1}{Q^2}\right)\cdot s^2 + \frac{\sqrt{2}}{Q}s + 1\right]}$$

• $$H(s) = \underbrace{\left(1/Q^2\right)}_{K=?\ (*)}\cdot\frac{s^2}{s^4 + \frac{\sqrt{2}}{Q}s^3 + \left(2+\frac{1}{Q^2}\right)\cdot s^2 + \frac{\sqrt{2}}{Q}s + 1}$$

(*) Al utilizar los núcleos de transformación y pasar una transferencia de LPF a HPF (por ej.), puede aparecer una nueva cte. metida en la transferencia objetivo.

* Transferencia de un filtro pasa banda de segundo orden ($n=2$). Tengo el doble de polos que de ceros en el origen.

• Polos de $H(s)$: $-0{,}08021 \pm 1{,}07465\cdot j$

$$\underbrace{-0{,}06907}_{a} \pm \underbrace{0{,}92538}_{b}\cdot j$$

"Si las raíces son de la forma $(a+bj)$ y $(a-bj)$, componen la siguiente cuadrática: $x^2 - 2\cdot a\cdot x + (a^2+b^2)$"

Además, también se cumple que $\omega_0^2 = a^2+b^2$, ya que la frecuencia de dicho par de polos complejos conjugados es el radio de la circunferencia en la que están inscriptos.

Importante

$\Longrightarrow$ Esta propiedad me permite poder descomponer una transferencia de mayor orden en secciones de orden 2, conociendo la función transferencia de cada sección. [Ver resuelto en Spyder]