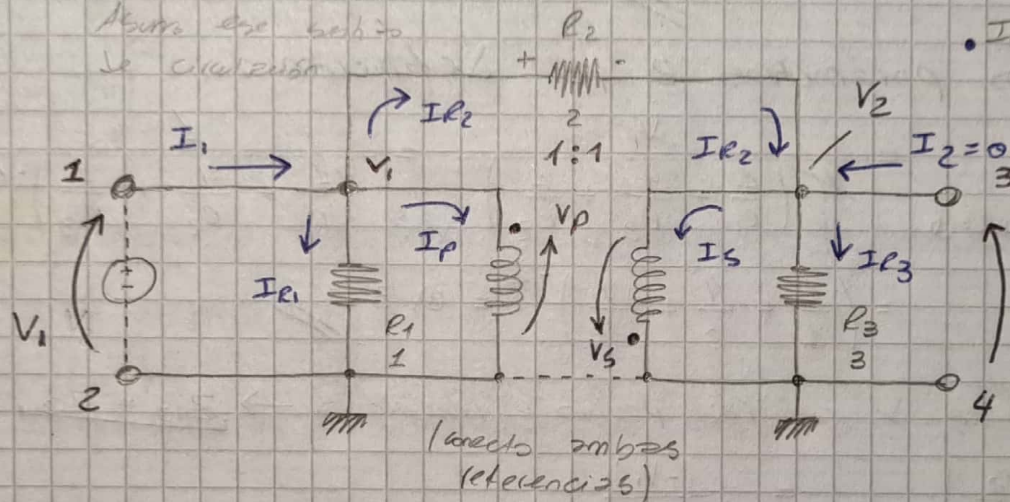
Trabajo Semanal VI

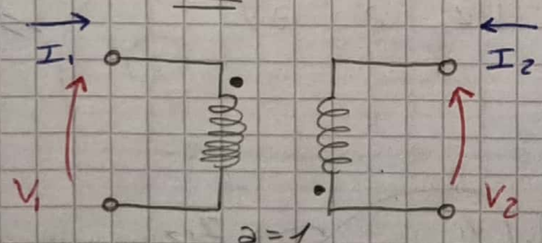
1) Para el siguiente cuadripolo se pide calcular los parámetros Z.



- $I_P \rightarrow$ corriente en el primario
- $I_S \rightarrow$ corriente en el secundario

$1:1 \rightarrow a = 1 \rightarrow$ relación de transformación unitaria

- Modelo ideal del transformador: (bornes no-homólogos)



$$\begin{cases} V_1 = -a \cdot V_2 \rightarrow V_1 = -V_2 \\ I_1 = -\dfrac{1}{a} \cdot (-I_2) \rightarrow I_1 = I_2 \end{cases}$$

$$T = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -1/a \end{pmatrix} ; \quad \Delta T = 1 \rightarrow \text{red pasiva}$$

[red pasiva → recíproca]

- Planteo nodos en V_1 y V_2:

$$\begin{cases} \text{nodo } V_1: \ I_1 = I_{R_2} + I_P + I_{R_1} & (\mathrm{I}) \\ \text{nodo } V_2: \ I_{R_2} = I_S + I_{R_3} & (\mathrm{II}) \ (\text{considerando } I_2 = 0) \end{cases}$$

- Relaciones de transformación: $\begin{cases} I_S = I_P = I \\ V_1 = -V_2 \end{cases}$

I) $I_1 = \dfrac{(V_1 - V_2)}{R_2} + I + \dfrac{V_1}{R_1}$

$I_1 = \dfrac{(V_1 + V_1)}{R_2} + I + \dfrac{V_1}{R_1}$

$I_1 = \dfrac{2V_1}{R_2} + I + \dfrac{V_1}{R_1}$

II) $\dfrac{(V_1 - V_2)}{R_2} = I + \dfrac{V_2}{R_3}$

$\dfrac{V_1 + V_1}{R_2} = I + \dfrac{V_1}{R_3}$

$I = \dfrac{2V_1}{R_2} + \dfrac{V_1}{R_3}$

$(II) \rightarrow (I)$

$$I_1 = \frac{2V_1}{R_2} + \underbrace{\left(\frac{2V_1}{R_2} + \frac{V_1}{R_3}\right)}_{I} + \frac{V_1}{R_1}$$

$$I_1 = V_1 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{4}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

* Planteo los parámetros Z por definición:

- $$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{\cancel{V_1}}{\cancel{V_1} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{4}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{4}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1}}$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{4}{2} + \frac{1}{3}\right)^{-1} = 0,3\ \Omega$$

- Como se trata de una red pasiva y recíproca $\rightarrow$ $Z_{12} = Z_{21}$

$\hookrightarrow$ $$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \left.\frac{(-V_1)}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

$$= \frac{-\cancel{V_1}}{\cancel{V_1} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{4}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)} = -1 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{4}{2} + \frac{1}{3}\right)^{-1} = -0,3\ \Omega$$

$\Longrightarrow Z_{21} = Z_{12} = -0,3\ \Omega$

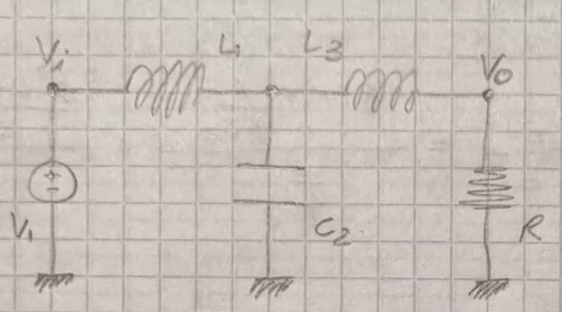
- $$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \left.\frac{-V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = (-1) \cdot \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \rightarrow Z_{12}$$ (por definición)

$$= (-1) \cdot Z_{12} = (-1) \cdot -0,3\ \Omega = +0,3\ \Omega$$

- $$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,3 \\ -0,3 & 0,3 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Albero Federico | 2 | TS6

(2) Dado el siguiente circuito:



$L_1 = 1,5\ Hy$

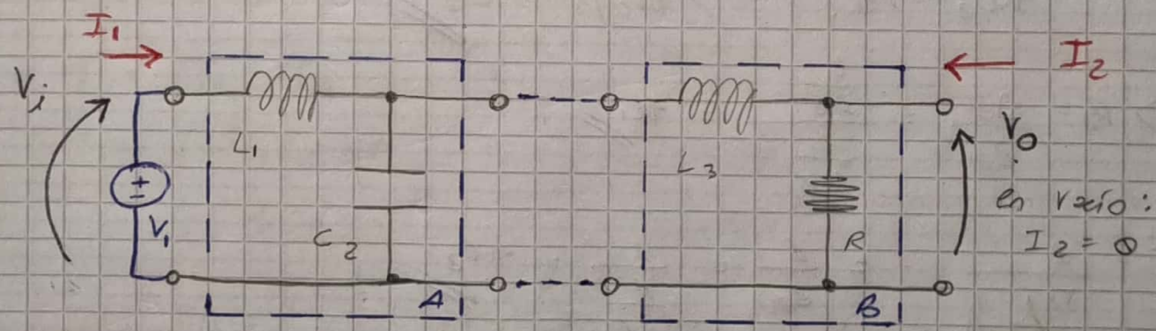
$L_3 = 0,5\ Hy$

$C_2 = 1,333\ F$

$R = 1\ \Omega$

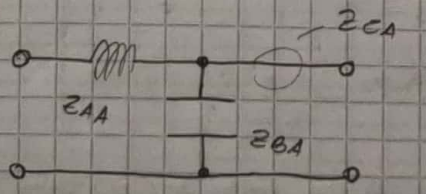
a- Obtener la transferencia de tensión $\frac{V_o}{V_i}$ por método de cuadripolos

- La red circuital planteada la puedo pensar como dos redes "T" incompletas, interconectadas en cascada.



Al tratarse de redes "T", por simple inspección, se pueden encontrar sus parámetros Z para luego obtener sus parámetros T necesarios para realizar la interconexión de los cuadripolos.

* Cuadripolo A:



- $Z_{CA} = 0$, ya que se puede considerar que esa impedancia no está presente y se coloca un cable.
- $Z_{AA} = sL_1 = Z_{11} - Z_{12}$
- $Z_{BA} = \frac{1}{sC_2} = Z_{12} = Z_{21}$
- $Z_{CA} = 0 = Z_{22} - Z_{12} \rightarrow Z_{12} = Z_{22}$

$$\Rightarrow Z_A = \begin{pmatrix} sL_1 + \frac{1}{sC_2} & \frac{1}{sC_2} \\ \frac{1}{sC_2} & \frac{1}{sC_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{sC_2} \\ Z_{22} = Z_{12} = \frac{1}{sC_2} \\ Z_{11} = sL_1 + Z_{12} = sL_1 + \frac{1}{sC_2} \end{cases}$$

Parámetros Z:

- $Z_{11} = \left.\dfrac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$ $\quad Z_{12} = \left.\dfrac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$ $\quad Z_{21} = \left.\dfrac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$ $\quad Z_{22} = \left.\dfrac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$

Parámetros T:

- $A = \dfrac{1}{\left.V_2/V_1\right|_{I_2=0}} = \left.\dfrac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = \dfrac{Z_{11}}{Z_{21}} = \dfrac{sL_1 + \dfrac{1}{sC_2}}{\dfrac{1}{sC_2}} = \dfrac{\dfrac{s^2L_1C_2+1}{\cancel{sC_2}}}{\dfrac{1}{\cancel{sC_2}}}$

$$= s^2L_1C_2 + 1$$

- $B = \dfrac{1}{\left.-I_2/V_1\right|_{V_2=0}} = \dfrac{\Delta Z}{Z_{21}}$

* $\Delta Z = \left(sL_1 + 1/sC_2\right)\cdot\left(1/sC_2\right) - \left(1/sC_2\right)^2$

$$= \frac{\cancel{s}L_1}{\cancel{s}C_2} + \cancel{\left(\frac{1}{sC_2}\right)^2} - \cancel{\left(\frac{1}{sC_2}\right)^2} = \frac{L_1}{C_2}$$

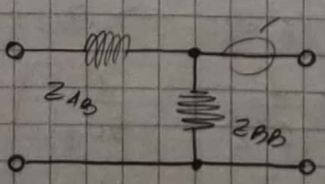
$$\Longrightarrow B = \frac{\Delta Z}{Z_{21}} = \frac{\dfrac{L_1}{\cancel{C_2}}}{\dfrac{1}{s\cancel{C_2}}} = sL_1$$

- $C = \dfrac{1}{\left.V_2/I_1\right|_{I_2=0}} = \dfrac{1}{Z_{21}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{sC_2}} = sC_2$

- $D = \dfrac{1}{\left.-I_2/I_1\right|_{V_2=0}} = \dfrac{Z_{22}}{Z_{21}} = \dfrac{\cancel{(1/sC_2)}}{\cancel{(1/sC_2)}} = 1$

* $T_A = \begin{pmatrix} s^2L_1C_2+1 & sL_1 \\ sC_2 & 1 \end{pmatrix}$

* Cuadripolo B:



- $Z_{CB} = 0$, se puede considerar como a un cable a esta impedancia.
- $Z_{BB} = R$; $Z_{BB} = Z_{12} = Z_{21} = R$
- $Z_{CB} = 0$, $Z_{CB} = Z_{22} - Z_{21} = 0$

$\hookrightarrow Z_{22} = Z_{21} = R$

- $Z_{AB} = Z_{11} - Z_{12} \rightarrow Z_{11} = Z_{AB} + Z_{12} = sL_3 + R$

$$\Rightarrow Z_B = \begin{pmatrix} sL_3 + R & R \\ R & R \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Parámetros Z cuadripolo B}}$

• $\Delta Z_B = (sL_3 + R) \cdot R - R^2 = sL_3 R + \cancel{R^2} - \cancel{R^2} = sL_3 R$

• $A = \dfrac{z_{11}}{z_{21}} = \dfrac{sL_3 + R}{R} = \dfrac{sL_3}{R} + 1$

• $B = \dfrac{\Delta Z_B}{z_{21}} = \dfrac{sL_3 \cancel{R}}{\cancel{R}} = sL_3$

• $C = \dfrac{1}{z_{21}} = \dfrac{1}{R}$

• $D = \dfrac{z_{22}}{z_{21}} = \dfrac{\cancel{R}}{\cancel{R}} = 1$

• $T_B = \begin{pmatrix} \dfrac{sL_3}{R} + 1 & sL_3 \\ \dfrac{1}{R} & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Parámetros T cuadripolo B}}$

Interconexión de cuadripolos en cascada:

• $T = \overbrace{T_A \cdot T_B}^{\text{Producto matricial}}$

$$T = \begin{pmatrix} s^2 L_1 C_2 + 1 & sL_1 \\ sC_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} sL_3/R + 1 & sL_3 \\ 1/R & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} (s^2 L_1 C_2 + 1) \cdot \left(\dfrac{sL_3 + R}{R}\right) + \dfrac{sL_1}{R} & (s^2 L_1 C_2 + 1) \cdot sL_3 + sL_1 \\ sC_2 \cdot \left(\dfrac{sL_3 + R}{R}\right) + 1/R & (sC_2) \cdot (sL_3) + 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \dfrac{(s^2 L_1 C_2 + 1) \cdot (sL_3 + R) + sL_1}{R} & sL_3 (s^2 L_1 C_2 + 1) + sL_1 \\ \dfrac{sC_2 \cdot (sL_3 + R) + 1}{R} & s^2 L_3 C_2 + 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Para obtener la transferencia de tensión $\dfrac{V_o}{V_i}$, desarrollo el parámetro A de la matriz de parámetros T, ya que este por definición se calcula como:

• $A = \dfrac{1}{\left.\dfrac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0}} = \dfrac{1}{\left.\dfrac{V_o}{V_i}\right|_{I_2=0}} \longrightarrow \left.\dfrac{V_o}{V_i}\right|_{I_2=0} = \dfrac{1}{A}$

$$T = \frac{R}{(s^2 L_1 C_2 + 1)\cdot(sL_3 + R) + sL_1}$$

$$= \frac{R}{s^3 L_1 L_3 C_2 + s^2 R L_1 C_2 + sL_3 + R + sL_1}$$

$$= \frac{R}{L_1 L_3 C_2 \cdot \left(s^3 + \frac{R}{L_3} s^2 + \frac{L_1 + L_3}{L_1 L_3 C_2} s + \frac{R}{L_1 L_3 C_2} \right)}$$

$$\bullet\ T = \frac{\frac{R}{L_1 L_3 C_2}}{s^3 + \frac{R}{L_3} s^2 + \frac{L_1 + L_3}{L_1 L_3 C_2} s + \frac{R}{L_1 L_3 C_2}}$$

Reemplazando por los valores de los componentes:

$R = 1$

$L_1 = 1{,}5$

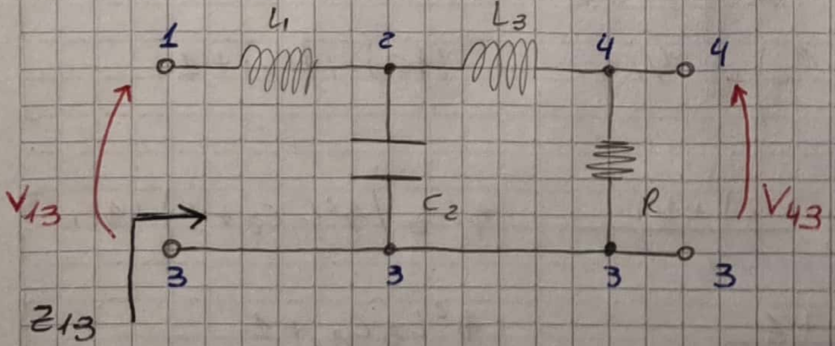
$L_3 = 0{,}5$

$C_2 = 4/3$

$$T = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)\cdot(s^2 + s + 1)}$$

↳ Verifica con que los polos de la transferencia estén ubicados en una circunferencia de radio unitario. } Ver simulación numérica en el notebook

b - Construya la matriz de admitancia indefinida (MAI) del circuito.



$$Y_{MAI} = \begin{bmatrix} 1/sL_1 & -1/sL_1 & 0 & 0 \\ -1/sL_1 & 1/sL_1 + 1/sL_3 + sC_2 & -sC_2 & -1/sL_3 \\ 0 & -sC_2 & sC_2 + 1/R & -1/R \\ 0 & -1/sL_3 & -1/R & 1/sL_3 + 1/R \end{bmatrix}$$

Albero Federico | 4 | TS6

• En la MAI obtenida se verifican sus propiedades de autocorrección, ya que se cumple que:

Suma de los elementos de cada columna igual cero:

$\hookrightarrow Y_{1j} + Y_{2j} + Y_{3j} + Y_{4j} = 0 \, ; \qquad j = 1,2,3,4$

Suma de los elementos de cada fila igual cero:

$\hookrightarrow Y_{i1} + Y_{i2} + Y_{i3} + Y_{i4} = 0 \, ; \qquad i = 1,2,3,4$

$* \ \Delta Y_{MAI} = 0$

C- Compute la transferencia de tensión con MAI:

$$\bullet \ A^{43}_{13} = \frac{V_{43} \sim \text{salida}}{V_{13} \sim \text{entrada}} = \text{sgn}(1-3) \cdot \text{sgn}(4-3) \cdot \frac{\underline{Y}^{13}_{43}}{\underline{Y}^{13}_{13}}$$

• $\text{sgn}(1-3) = \text{sgn}(-2) = -1$

• $\text{sgn}(4-3) = \text{sgn}(1) = 1$

$$* \ \underline{Y}^{13}_{43} = (-1)^{(1+3+4+3)} \cdot Y^{13}_{43}$$

$$\underline{Y}^{13}_{43} = (-1)^{11} \cdot \begin{vmatrix} -1/sL_1 & 1/sL_1 + 1/sL_3 + sC_2 \\ 0 & -1/sL_3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot \left[\left(-1/sL_1\right) \cdot \left(-1/sL_3\right) - 0 \right] = (-1) \cdot \frac{1}{s^2 L_1 L_3} = \frac{-1}{s^2 L_1 L_3}$$

$$\underline{Y}^{43}_{43} = (-1)^{(1+3+1+3)} \cdot Y^{13}_{13}$$

$$= \underbrace{(-1)^8}_{+1} \cdot \begin{vmatrix} 1/sL_1 + 1/sL_3 + sC_2 & -1/sL_3 \\ -1/sL_3 & 1/sL_3 + 1/R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{sL_1} + \frac{1}{sL_3} + sC_2 \right) \cdot \left(\frac{1}{sL_3} + \frac{1}{R} \right) - \left(\frac{1}{sL_3} \right)^2$$

$$= \frac{1}{s^2 L_1 L_3} + \cancel{\left(\frac{1}{sL_3} \right)^2} + \frac{sC_2}{sL_3} + \frac{1}{sRL_1} + \frac{1}{sRL_3} + \frac{sC_2}{R} - \cancel{\left(\frac{1}{sL_3} \right)^2}$$

$$= \frac{R + s^2 R L_1 C_2 + sL_3 + sL_1 + s^3 L_1 L_3 C_2}{s^2 R L_1 L_3}$$

$$\underline{Y}^{13}_{13} = \frac{s^3 L_1 L_3 C_2 + s^2 R L_1 C_2 + s\cdot(L_1+L_3) + R}{s^2 R L_1 L_3}$$

$$\Rightarrow A^{43}_{13} = \frac{V_{43}}{V_{13}} = sgn(1-3)\cdot sgn(4-3)\cdot \frac{\underline{Y}^{13}_{43}}{\underline{Y}^{13}_{13}}$$

$$A^{43}_{13} = \cancel{(-1)}\cdot(1)\,\frac{\cancel{(-1)}\cdot\frac{1}{\cancel{s^2 L_1 L_3}}}{\frac{s^3 L_1 L_3 C_2 + s^2 R L_1 C_2 + s\cdot(L_1+L_3)+R}{\cancel{s^2} R \cancel{L_1 L_3}}}$$

$$A^{43}_{13} = \frac{R}{s^3 L_1 L_3 C_2 + s^2 R L_1 C_2 + s\cdot(L_1+L_3)+R}$$

$$A^{43}_{13} = \frac{\frac{R}{L_1 L_3 C_2}}{s^3 + \frac{R}{L_3}s^2 + \frac{L_1+L_3}{L_1 L_3 C_2}\cdot s + \frac{R}{L_1 L_3 C_2}}$$

Se obtuvo la misma expresión de función transferencia de tensión que la deducida anteriormente mediante la interconexión de cuadripolos en cascada.

Bonus: Compute la impedancia de entrada con la MAI:

$$Z_{mn} = \frac{V_{mn}}{I_{mn}} = \frac{\underline{Y}^{mn}_{mn}}{\underline{Y}^{n}_{n}} \longrightarrow Z_{13} = \frac{V_{13}}{I_{13}} = \frac{\underline{Y}^{13}_{13}}{\underline{Y}^{3}_{3}}$$

$$\underline{Y}^{13}_{13} = \frac{s^3 L_1 L_3 C_2 + s^2 R L_1 C_2 + s\cdot(L_1+L_3)+R}{s^2 R L_1 L_3}$$ (obtenido previamente)

$$\underline{Y}^{3}_{3} = \underbrace{(-1)^{3+3}}_{=1}\begin{vmatrix} 1/sL_1 & -1/sL_1 & 0 \\ -1/sL_1 & 1/sL_1 + 1/sL_3 + sC_2 & -1/sL_3 \\ 0 & -1/sL_3 & 1/sL_3 + 1/R \end{vmatrix}$$

Calculo el determinante a través de la primera fila.

$$(-1)^{1+1} = 1$$

$$= \frac{1}{sL_1}\cdot\left[\left(\frac{1}{sL_1}+\frac{1}{sL_3}+sC_2\right)\cdot\left(\frac{1}{sL_3}+\frac{1}{R}\right) - \left(\frac{1}{sL_3}\right)^2\right]$$
$$+ (-1)^{1+2}\cdot\left(\frac{-1}{sL_1}\right)\cdot\left[\left(\frac{-1}{sL_1}\right)\cdot\left(\frac{1}{sL_3}+\frac{1}{R}\right)\right] + 0$$

↳ sigue en hoja n° 5) este $1/sL_1$ puede salir como factor común.

(→)

$$\underline{Y}^{3}_{3} = \frac{1}{\$L_1} \cdot \left(\frac{\$^3 L_1 L_3 C_2 + \$^2 R L_1 C_2 + \$ \cdot (L_1 + L_3) + R}{\$^2 R L_1 L_3} \right)$$

$$+ \frac{1}{\$L_1} \cdot \left(\frac{-1}{\$^2 L_1 L_3} - \frac{1}{\$ R L_1} \right)$$

$$= \frac{1}{\$L_1} \cdot \left[\left(\cdots \right) + (-1) \cdot \frac{(R + \$L_3)}{\$^2 R L_1 L_3} \right]$$

$$= \frac{1}{\$L_1} \cdot \left[\frac{\$^3 L_1 L_3 C_2 + \$^2 R L_1 C_2 + \$ \cdot (L_1 + L_3) + R}{\$^2 R L_1 L_3} + \frac{(-R - \$L_3)}{\$^2 R L_1 L_3} \right]$$

mismo denom.

$$= \frac{1}{\$L_1} \cdot \left[\frac{\$^3 L_1 L_3 C_2 + \$^2 R L_1 C_2 + \$L_1}{\$^2 R L_1 L_3} \right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{\$L_1}} \cdot (\cancel{\$L_1}) \cdot \left(\frac{\$^2 L_3 C_2 + \$ R C_2 + 1}{\$^2 R L_1 L_3} \right)$$

$$\underline{Y}^{3}_{3} = \frac{\$^2 L_3 C_2 + \$ R C_2 + 1}{\$^2 R L_1 L_3}$$

$$\Longrightarrow Z_{13} = \frac{\underline{Y}^{13}_{13}}{\underline{Y}^{3}_{3}} = \frac{\dfrac{\$^3 L_1 L_3 C_2 + \$^2 R L_1 C_2 + \$ \cdot (L_1 + L_3) + R}{\cancel{(\$^2 R L_1 L_3)}}}{\dfrac{\$^2 L_3 C_2 + \$ R C_2 + 1}{\cancel{(\$^2 R L_1 L_3)}}}$$

- $$Z_{13} = \frac{\$^3 L_1 L_3 C_2 + \$^2 R L_1 C_2 + \$ \cdot (L_1 + L_3) + R}{\$^2 L_3 C_2 + \$ R C_2 + 1}$$

Impedancia de entrada de la red calculada a través de la MAI

- Reemplazando por los valores de los componentes:

$R = 1$; $L_1 = 1{,}5$; $L_3 = 0{,}5$; $C_2 = 4/3$

$$Z_{13} = \frac{\$^3 + 2\$^2 + 2\$ + 1}{2/3\,\$^2 + 4/3\,\$ + 1}$$