Il Teorema Fondamentale del Calcolo

È davvero possibile che la strada più breve per la verità passi attraverso qualcosa di falso ? [6]

F. Zanasi[1]

[1] Corso di Laurea in Didattica e Comunicazione delle Scienze
Università di Modena e Reggio Emilia

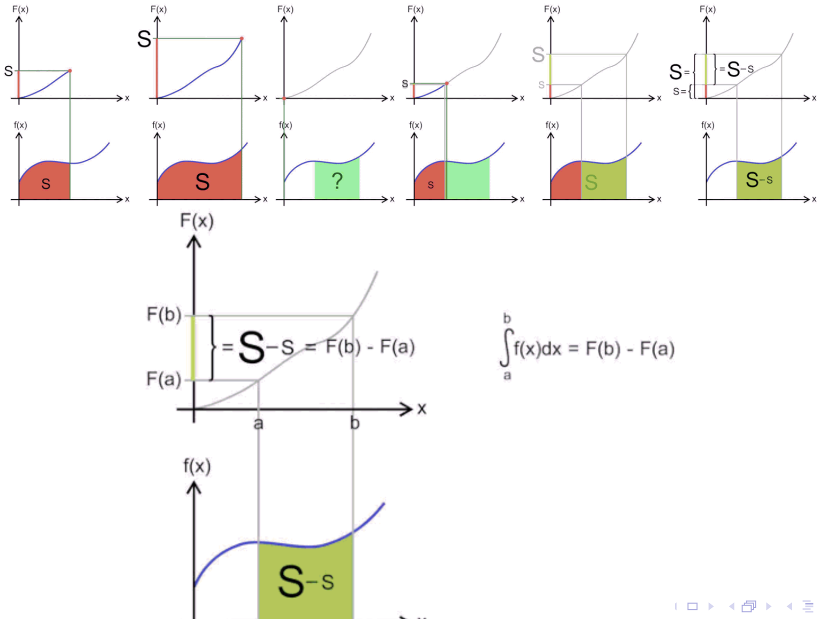
26 Novembre 2021 / Corso di Fondamenti di Matematica

È la continuità storica. La matematica pura progredisce nella misura in cui i problemi noti vengono approfonditi in modo dettagliato in seguito all'elaborazione di nuovi metodi; nella misura in cui si comprendono meglio gli antichi problemi, i nuovi si presentano spontaneamente.

Felix Klein

Sommario

Senza formule



Origine

Tangente e quadratura

Il teorema nacque nel XVII secolo, quando si scoprì che i processi per determinare

- la tangente a una curva.
- l'area (*quadratura*) racchiusa da una curva.

erano l'uno l'inverso dell'altro.

Spazio, velocità, tempo

L'altra origine del teorema fu lo studio della cinematica dei corpi solidi, quando si scoprì che nella curva velocità-tempo lo spazio percorso era (pari al)l'area, mentre nella curva spazio-tempo, la velocità era la tangente.

Sviluppi successivi

Da un contesto geometrico/cinematico, l'evoluzione successiva del calcolo, è nella direzione di una *algebrizzazione* progressiva dell'analisi infinitesimale, cioè la sua riduzione a un *calcolo operazionale*, con un sistema di notazione algebrico.
Nelle prime formulazioni il teorema stabiliva che la differenziazione e l'integrazione di funzioni rappresentano operazioni inverse. In seguito la formulazione del teorema continuò a trasformarsi e parallelamente si precisarono e ampliarono le nozioni di *differenziazione*, *integrazione* e *funzione*.

Origine

Tangente e quadratura

Il teorema nacque nel XVII secolo, quando si scoprì che i processi per determinare

- la tangente a una curva.
- l'area (*quadratura*) racchiusa da una curva.

erano l'uno l'inverso dell'altro.

Spazio, velocità, tempo

L'altra origine del teorema fu lo studio della cinematica dei corpi solidi, quando si scoprì che nella curva velocità-tempo lo spazio percorso era (pari al)l'area, mentre nella curva spazio-tempo, la velocità era la tangente.

Sviluppi successivi

Da un contesto geometrico/cinematico, l'evoluzione successiva del calcolo, è nella direzione di una *algebrizzazione* progressiva dell'analisi infinitesimale, cioè la sua riduzione a un *calcolo operazionale*, con un sistema di notazione algebrico.
Nelle prime formulazioni il teorema stabiliva che la differenziazione e l'integrazione di funzioni rappresentano operazioni inverse. In seguito la formulazione del teorema continuò a trasformarsi e parallelamente si precisarono e ampliarono le nozioni di *differenziazione*, *integrazione* e *funzione*.

Infinitesimi

Infinitesimi

Una delle caratteristiche piú salienti della storia di questo teorema è il ruolo problematico e in qualche modo irritante delle grandezze infinitesimali, un concetto che sembrò per lungo tempo assurdo, per quanto indispensabile.

Definizione

Infinitesimo in Matematica, si dice di quantità variabile che, in opportune condizioni, ha per limite lo zero. La definizione del concetto di i. è dovuta ad A.-L. Cauchy (1821). Secondo tale definizione, l'i. non va inteso in senso di i. attuale (quantità infinitamente piccola, evanescente, e tuttavia diversa dallo zero), ma nel senso di i. potenziale (quantità che tende ad annullarsi).

Ex malo, bonum

La ricerca di una soluzione al problema degli infinitesimi condusse non solo a chiarire il concetto di funzione, ma anche a precisare il concetto di *numero*.

Importanza

Il teorema fondamentale del Calcolo, (TFC) fu dunque all'origine della revisione della matematica, e ciò ne fa uno dei teoremi piú importanti della sua storia.

Infinitesimi

Infinitesimi

Una delle caratteristiche piú salienti della storia di questo teorema è il ruolo problematico e in qualche modo irritante delle grandezze infinitesimali, un concetto che sembrò per lungo tempo assurdo, per quanto indispensabile.

Definizione

Infinitesimo in Matematica, si dice di quantità variabile che, in opportune condizioni, ha per limite lo zero. La definizione del concetto di i. è dovuta ad A.-L. Cauchy (1821). Secondo tale definizione, l'i. non va inteso in senso di i. attuale (quantità infinitamente piccola, evanescente, e tuttavia diversa dallo zero), ma nel senso di i. potenziale (quantità che tende ad annullarsi).

Ex malo, bonum

La ricerca di una soluzione al problema degli infinitesimi condusse non solo a chiarire il concetto di funzione, ma anche a precisare il concetto di *numero*.

Importanza

Il teorema fondamentale del Calcolo, (TFC) fu dunque all'origine della revisione della matematica, e ciò ne fa uno dei teoremi piú importanti della sua storia.

Infinitesimi

Infinitesimi

Una delle caratteristiche piú salienti della storia di questo teorema è il ruolo problematico e in qualche modo irritante delle grandezze infinitesimali, un concetto che sembrò per lungo tempo assurdo, per quanto indispensabile.

Definizione

Infinitesimo in Matematica, si dice di quantità variabile che, in opportune condizioni, ha per limite lo zero. La definizione del concetto di i. è dovuta ad A.-L. Cauchy (1821). Secondo tale definizione, l'i. non va inteso in senso di i. attuale (quantità infinitamente piccola, evanescente, e tuttavia diversa dallo zero), ma nel senso di i. potenziale (quantità che tende ad annullarsi).

Ex malo, bonum

La ricerca di una soluzione al problema degli infinitesimi condusse non solo a chiarire il concetto di funzione, ma anche a precisare il concetto di *numero*.

Importanza

Il teorema fondamentale del Calcolo, (TFC) fu dunque all'origine della revisione della matematica, e ciò ne fa uno dei teoremi piú importanti della sua storia.

Infinitesimi

Infinitesimi

Una delle caratteristiche piú salienti della storia di questo teorema è il ruolo problematico e in qualche modo irritante delle grandezze infinitesimali, un concetto che sembrò per lungo tempo assurdo, per quanto indispensabile.

Definizione

Infinitesimo in Matematica, si dice di quantità variabile che, in opportune condizioni, ha per limite lo zero. La definizione del concetto di i. è dovuta ad A.-L. Cauchy (1821). Secondo tale definizione, l'i. non va inteso in senso di i. attuale (quantità infinitamente piccola, evanescente, e tuttavia diversa dallo zero), ma nel senso di i. potenziale (quantità che tende ad annullarsi).

Ex malo, bonum

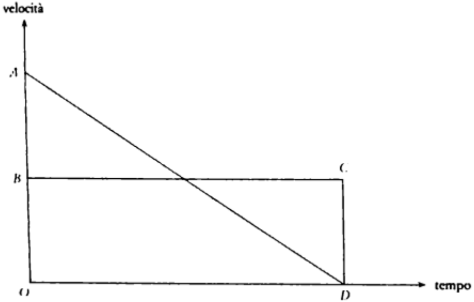
La ricerca di una soluzione al problema degli infinitesimi condusse non solo a chiarire il concetto di funzione, ma anche a precisare il concetto di *numero*.

Importanza

Il teorema fondamentale del Calcolo, (TFC) fu dunque all'origine della revisione della matematica, e ciò ne fa uno dei teoremi piú importanti della sua storia.

Oresme

Nel 1361,il matematico Oresme rappresentò il moto con una serie di grafici in cui la velocità dipendeva dal tempo.



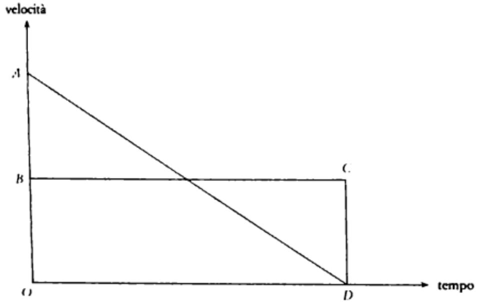
Egli dedusse che la distanza percorsa da un corpo A che si muove con accelerazione costante è pari a quella di un corpo B che si muove con velocità costante pari alla media delle velocità iniziale e finale del corpo a.

TFC secondo Oresme

Oresme assume che la distanza percorsa da un corpo qualsiasi è pari all' area sottesa dal grafico velocità-tempo.

Oresme

Nel 1361,il matematico Oresme rappresentò il moto con una serie di grafici in cui la velocità dipendeva dal tempo.



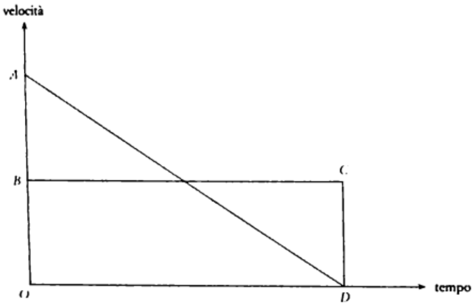
Egli dedusse che la distanza percorsa da un corpo A che si muove con accelerazione costante è pari a quella di un corpo B che si muove con velocità costante pari alla media delle velocità iniziale e finale del corpo a.

TFC secondo Oresme

Oresme assume che la distanza percorsa da un corpo qualsiasi è pari all' area sottesa dal grafico velocità-tempo.

Oresme

Nel 1361,il matematico Oresme rappresentò il moto con una serie di grafici in cui la velocità dipendeva dal tempo.



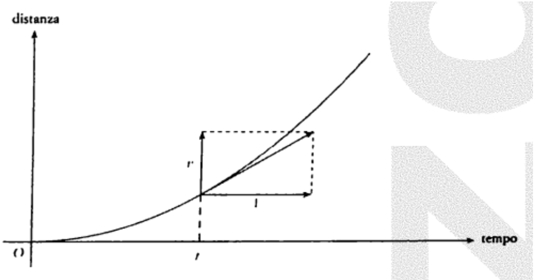
Egli dedusse che la distanza percorsa da un corpo A che si muove con accelerazione costante è pari a quella di un corpo B che si muove con velocità costante pari alla media delle velocità iniziale e finale del corpo a.

TFC secondo Oresme

Oresme assume che la distanza percorsa da un corpo qualsiasi è pari all' area sottesa dal grafico velocità-tempo.

Torricelli

Dato il grafico *distanza-tempo* di un punto che si muove, diciamo con velocità v al tempo t,



il coefficiente angolare misura l'inclinazione della tangente al tempo t. La velocità è il coefficiente angolare della curva nel grafico distanza-tempo) *(Torricelli 1640)*

TFC secondo Torricelli

- La distanza è l'area della velocità (in relazione al tempo)
- La velocità è il coefficiente angolare della tangente alla distanza (in relazione al tempo)

Cartesio

Geometria Algebrica

Descartes, in Francia, intorno al 1630, introduce la geometria algebrica che permette di definire e classificare la classe delle *curve algebriche* in base al loro *grado*. Una curva algebrica piana è l'insieme dei punti (x, y) che soddifano l'equazione

$$p(x, y) = 0, \text{ dove } p(x, y) \text{ è un polinomio}$$

Retta tangente a una curva

Il problema delle tangenti è, per Descartes,

il problema più utile e generale [...] in Geometria

La sua soluzione, pubblicata nel 1637 nella *Géométrie* è di considerare la circonferenza tangente alla curva in un punto dato $P_0 = (x_0, y_0)$. Una volta trovata quest'ultima, il suo raggio per P_0 sarà normale alla curva, e quindi la tangente sarà perpendicolare al raggio.

Abbandono

Il metodo comporta calcoli piuttosto complicati, anche nei casi più semplici. Si tratta di un metodo di *geometria algebrica* e non, come in Fermat, di *calcolo differenziale*. [1]

Cartesio

Geometria Algebrica

Descartes, in Francia, intorno al 1630, introduce la geometria algebrica che permette di definire e classificare la classe delle *curve algebriche* in base al loro *grado*. Una curva algebrica piana è l'insieme dei punti (x, y) che soddifano l'equazione

$$p(x, y) = 0, \text{ dove } p(x, y) \text{ è un polinomio}$$

Retta tangente a una curva

Il problema delle tangenti è, per Descartes,

> *il problema più utile e generale [...] in Geometria*

.

La sua soluzione, pubblicata nel 1637 nella *Géométrie* è di considerare la circonferenza tangente alla curva in un punto dato $P_0 = (x_0, y_0)$. Una volta trovata quest'ultima, il suo raggio per P_0 sarà normale alla curva, e quindi la tangente sarà perpendicolare al raggio.

Abbandono

Il metodo comporta calcoli piuttosto complicati, anche nei casi più semplici. Si tratta di un metodo di *geometria algebrica* e non, come in Fermat, di *calcolo differenziale*. [1]

Cartesio

Geometria Algebrica

Descartes, in Francia, intorno al 1630, introduce la geometria algebrica che permette di definire e classificare la classe delle *curve algebriche* in base al loro *grado*. Una curva algebrica piana è l'insieme dei punti (x, y) che soddifano l'equazione

$$p(x, y) = 0, \text{ dove } p(x, y) \text{ è un polinomio}$$

Retta tangente a una curva

Il problema delle tangenti è, per Descartes,

> *il problema più utile e generale [...] in Geometria*

.

La sua soluzione, pubblicata nel 1637 nella *Géométrie* è di considerare la circonferenza tangente alla curva in un punto dato $P_0 = (x_0, y_0)$. Una volta trovata quest'ultima, il suo raggio per P_0 sarà normale alla curva, e quindi la tangente sarà perpendicolare al raggio.

Abbandono

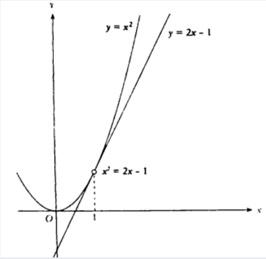
Il metodo comporta calcoli piuttosto complicati, anche nei casi più semplici. Si tratta di un metodo di *geometria algebrica* e non, come in Fermat, di *calcolo differenziale*. [1]

Fermat

Introduzione dell'infinitesimo

Fermat, intorno al 1630, aveva già un suo metodo per trovare la tangente a una curva, grazie ad un *espediente algebrico*, che divenne un concetto nuovo: l'infinitesimo. Cerchiamo il coefficiente angolare della retta tangente a una parabola $y = x^2$ nel punto $x = 1$. Dato il punto $P_0 = (1, 1)$, che giace sulla curva e ha ascissa $x = 1$ si consideri un punto *infinitamente vicino ad esso*, che ha per ascissa $x = 1 + dx$ (ove con dx indichiamo appunto un *infinitesimo*). L'ordinata sarà, secondo l'equazione data della parabola, $y = (1 + dx)^2 = 1 + 2dx + (dx)^2$. Il coefficiente angolare che congiunge questi due punti $P_0 = (1, 1)$ e $P_1 = (1 + dx, (1 + dx)^2)$ è dato dal rapporto fra le differenze fra le coordinate:

$$\frac{(1+dx)^2-1}{dx} = \frac{2dx+(dx)^2}{dx} = 2 + dx$$



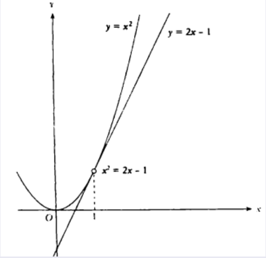
che è infinitamente vicino a 2. Sembra dunque ragionevole affermare che il coefficiente angolare della tangente nel punto $P_0 = (1, 1)$ è 2 e quindi l'equazione della retta tangente in questo punto è $(y - 1) = 2(x - 1)$, ovvero $y = 2x - 1$

Fermat

Introduzione dell'infinitesimo

Fermat, intorno al 1630, aveva già un suo metodo per trovare la tangente a una curva, grazie ad un *espediente algebrico*, che divenne un concetto nuovo: l'infinitesimo. Cerchiamo il coefficiente angolare della retta tangente a una parabola $y = x^2$ nel punto $x = 1$. Dato il punto $P_0 = (1, 1)$, che giace sulla curva e ha ascissa $x = 1$ si consideri un punto *infinitamente vicino ad esso*, che ha per ascissa $x = 1 + dx$ (ove con dx indichiamo appunto un *infinitesimo*). L'ordinata sarà, secondo l'equazione data della parabola, $y = (1 + dx)^2 = 1 + 2dx + (dx)^2$. Il coefficiente angolare che congiunge questi due punti $P_0 = (1, 1)$ e $P_1 = (1 + dx, (1 + dx)^2)$ è dato dal rapporto fra le differenze fra le coordinate:

$$\frac{(1+dx)^2-1}{dx} = \frac{2dx+(dx)^2}{dx} = 2 + dx$$



che è infinitamente vicino a 2. Sembra dunque ragionevole affermare che il coefficiente angolare della tangente nel punto $P_0 = (1, 1)$ è 2 e quindi l'equazione della retta tangente in questo punto è $(y - 1) = 2(x - 1)$, ovvero $y = 2x - 1$

Il metodo che non sbaglia mai

L'"*adeguagliazione*"[2]

Fermat, nel trattato *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (1636) scrive: "*L'intera dottrina della determinazione dei massimi e minimi è fondata su due espressioni simboliche e su questa sola regola:*"

1. La prima espressione contiene il termine da massimizzare : sia a.
2. La seconda espressione si ottenga sostituendo $a+e$ al posto di a.
3. Si "adeguaglino"[adaequentur] le due espressioni.
4. Dopo aver tolto i termini comuni, si divida per e
5. Si eliminino le quantità contenenti e, e si eguaglino [aequatur] i termini restanti
6. La soluzione di quest'ultima equazione da il valore di a.

Esampio: Rettangolo di area massima

Dividere un segmento di lunghezza b in due segmenti che siano base e altezza di un rettangolo di area massima.

1. Sia a il primo segmento. Il secondo sarà $b-a$. Si tratta di massimizzare l'espressione $a(b-a)$ (1).
2. Si prenda ora $a+e$ e la si sostituisca al posto di a nell'espressione da massimizzare, ottenendo l'espressione $((a+e)(b-(a+e))) = ba - a^2 + be - 2ae - e^2$ (2).
3. Si "adeguaglino" l'espressione (1) e la (2) ottenendo un'"adequazione" ($\approx$).
4. Semplificando e dividendo per e si ottiene $b \approx 2a + e$
5. Eliminando i termini che contengono e resta $b = 2a$
6. a è la metà di b, quindi i due segmenti sono uguali. Il rettangolo che massimizza l'area è un quadrato.

Il metodo che non sbaglia mai

L'"*adeguagliazione*"[2]

Fermat, nel trattato *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (1636) scrive: "*L'intera dottrina della determinazione dei massimi e minimi è fondata su due espressioni simboliche e su questa sola regola:*"

1. La prima espressione contiene il termine da massimizzare : sia a.
2. La seconda espressione si ottenga sostituendo $a + e$ al posto di a.
3. Si "adeguaglino"[adaequentur] le due espressioni.
4. Dopo aver tolto i termini comuni, si divida per e
5. Si eliminino le quantità contenenti e, e si eguaglino [aequatur] i termini restanti
6. La soluzione di quest'ultima equazione da il valore di a.

Esampio: Rettangolo di area massima

Dividere un segmento di lunghezza b in due segmenti che siano base e altezza di un rettangolo di area massima.

1. Sia a il primo segmento. Il secondo sarà $b - a$. Si tratta di massimizzare l'espressione $a(b - a)$ (1).
2. Si prenda ora $a + e$ e la si sostituisca al posto di a nell'espressione da massimizzare, ottenendo l'espressione $((a + e)(b - (a + e))) = ba - a^2 + be - 2ae - e^2$ (2).
3. Si "adeguaglino" l'espressione (1) e la (2) ottenendo un'"adequazione" ($\approx$).
4. Semplificando e dividendo per e si ottiene $b \approx 2a + e$
5. Eliminando i termini che contengono e resta $b = 2a$
6. a è la metà di b, quindi i due segmenti sono uguali. Il rettangolo che massimizza l'area è un quadrato.

Il metodo che non sbaglia mai

L'"*adeguagliazione*"[2]

Fermat, nel trattato *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (1636) scrive: "*L'intera dottrina della determinazione dei massimi e minimi è fondata su due espressioni simboliche e su questa sola regola:*"

1. La prima espressione contiene il termine da massimizzare : sia a.
2. La seconda espressione si ottenga sostituendo $a + e$ al posto di a.
3. Si "adeguaglino"[adaequentur] le due espressioni.
4. Dopo aver tolto i termini comuni, si divida per e
5. Si eliminino le quantità contenenti e, e si eguaglino [aequatur] i termini restanti
6. La soluzione di quest'ultima equazione da il valore di a.

Esampio: Rettangolo di area massima

Dividere un segmento di lunghezza b in due segmenti che siano base e altezza di un rettangolo di area massima.

1. Sia a il primo segmento. Il secondo sarà $b - a$. Si tratta di massimizzare l'espressione $a(b - a)$ (1).
2. Si prenda ora $a + e$ e la si sostituisca al posto di a nell'espressione da massimizzare, ottenendo l'espressione $((a + e)(b - (a + e))) = ba - a^2 + be - 2ae - e^2$ (2).
3. Si "adeguaglino" l'espressione (1) e la (2) ottenendo un'"adequazione" ($\approx$).
4. Semplificando e dividendo per e si ottiene $b \approx 2a + e$
5. Eliminando i termini che contengono e resta $b = 2a$
6. a è la metà di b, quindi i due segmenti sono uguali. Il rettangolo che massimizza l'area è un quadrato.

Il metodo che non sbaglia mai

L'"*adeguagliazione*"[2]

Fermat, nel trattato *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (1636) scrive: "*L'intera dottrina della determinazione dei massimi e minimi è fondata su due espressioni simboliche e su questa sola regola:*"

1. La prima espressione contiene il termine da massimizzare : sia a.
2. La seconda espressione si ottenga sostituendo $a + e$ al posto di a.
3. Si "adeguaglino"[adaequentur] le due espressioni.
4. Dopo aver tolto i termini comuni, si divida per e
5. Si eliminino le quantità contenenti e, e si eguaglino [aequatur] i termini restanti
6. La soluzione di quest'ultima equazione da il valore di a.

Esampio: Rettangolo di area massima

Dividere un segmento di lunghezza b in due segmenti che siano base e altezza di un rettangolo di area massima.

1. Sia a il primo segmento. Il secondo sarà $b - a$. Si tratta di massimizzare l'espressione $a(b - a)$ (1).
2. Si prenda ora $a + e$ e la si sostituisca al posto di a nell'espressione da massimizzare, ottenendo l'espressione $((a + e)(b - (a + e))) = ba - a^2 + be - 2ae - e^2$ (2).
3. Si "adeguaglino" l'espressione (1) e la (2) ottenendo un'"adequazione" ($\approx$).
4. Semplificando e dividendo per e si ottiene $b \approx 2a + e$
5. Eliminando i termini che contengono e resta $b = 2a$
6. a è la metà di b, quindi i due segmenti sono uguali. Il rettangolo che massimizza l'area è un quadrato.

Il metodo che non sbaglia mai

L'"*adeguagliazione*"[2]

Fermat, nel trattato *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (1636) scrive: "*L'intera dottrina della determinazione dei massimi e minimi è fondata su due espressioni simboliche e su questa sola regola:*"

1. La prima espressione contiene il termine da massimizzare : sia a.
2. La seconda espressione si ottenga sostituendo $a + e$ al posto di a.
3. Si "adeguaglino"[adaequentur] le due espressioni.
4. Dopo aver tolto i termini comuni, si divida per e
5. Si eliminino le quantità contenenti e, e si eguaglino [aequatur] i termini restanti
6. La soluzione di quest'ultima equazione da il valore di a.

Esampio: Rettangolo di area massima

Dividere un segmento di lunghezza b in due segmenti che siano base e altezza di un rettangolo di area massima.

1. Sia a il primo segmento. Il secondo sarà $b - a$. Si tratta di massimizzare l'espressione $a(b - a)$ (1).
2. Si prenda ora $a + e$ e la si sostituisca al posto di a nell'espressione da massimizzare, ottenendo l'espressione $((a + e)(b - (a + e))) = ba - a^2 + be - 2ae - e^2$ (2).
3. Si "adeguaglino" l'espressione (1) e la (2) ottenendo un'"adequazione" ($\approx$).
4. Semplificando e dividendo per e si ottiene $b \approx 2a + e$
5. Eliminando i termini che contengono e resta $b = 2a$
6. a è la metà di b, quindi i due segmenti sono uguali. Il rettangolo che massimizza l'area è un quadrato.

Il metodo che non sbaglia mai

L'"*adeguagliazione*"[2]

Fermat, nel trattato *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* (1636) scrive: "*L'intera dottrina della determinazione dei massimi e minimi è fondata su due espressioni simboliche e su questa sola regola:*"

1. La prima espressione contiene il termine da massimizzare : sia a.
2. La seconda espressione si ottenga sostituendo $a + e$ al posto di a.
3. Si "adeguaglino"[adaequentur] le due espressioni.
4. Dopo aver tolto i termini comuni, si divida per e
5. Si eliminino le quantità contenenti e, e si eguaglino [aequatur] i termini restanti
6. La soluzione di quest'ultima equazione da il valore di a.

Esampio: Rettangolo di area massima

Dividere un segmento di lunghezza b in due segmenti che siano base e altezza di un rettangolo di area massima.

1. Sia a il primo segmento. Il secondo sarà $b - a$. Si tratta di massimizzare l'espressione $a(b - a)$ (1).
2. Si prenda ora $a + e$ e la si sostituisca al posto di a nell'espressione da massimizzare, ottenendo l'espressione $((a + e)(b - (a + e))) = ba - a^2 + be - 2ae - e^2$ (2).
3. Si "adeguaglino" l'espressione (1) e la (2) ottenendo un'"adequazione" ($\approx$).
4. Semplificando e dividendo per e si ottiene $b \approx 2a + e$
5. Eliminando i termini che contengono e resta $b = 2a$
6. a è la metà di b, quindi i due segmenti sono uguali. Il rettangolo che massimizza l'area è un quadrato.

Cavalieri-Torricelli

Tangente e area di $y = x^n$

Con il suo metodo, Fermat, trovò che il coefficiente angolare della curva $y = x^n$ in $x = a$ è na^{n-1}. Bonaventura Cavalieri, nella sua *Geometria indivisibilium* (1635) considerò l'area sottesa alla curva $y = x^n$ come la somma di una collezione di "indivisibili", e giunse a determinare che quest'area, delimitata dalle ascisse $x = 0$ e $x = 1$ per ogni valore di n è $\frac{1}{n+1}$.
Torricelli, nel 1640, considerò la curva $y = x^n$ come un grafico velocità-tempo, dove l'area rappresenta la distanza. Per il TFC, versione "Teorema fondamentale del moto", la velocità è il coefficiente angolare del grafico distanza-tempo. Quale curva ha coefficiente angolare x^n? Torricelli mostrò che $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ha ha coefficiente angolare x^n. Quindi l'equazione del grafico distanza-tempo è

$$y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

L'area sottesa da $y = x^{n+1}$ per $n = 0, 1, 2, 3$.

Newton

De methodis serierum et fluxionum. 1670-1672

Per illustrare l'arte analitica non rimane ora che affrontare alcuni problemi ad essa inerenti che emergono soprattutto a causa della natura delle curve [...] tali difficoltà possono essere ricondotte a due soli problemi, che vorrei presentare in relazione allo spazio percorso con un qualsiasi moto locale, sia esso accelerato o ritardato:

- *Data la lunghezza della traiettoria in maniera continua (cioè, in ogni istante), trovare la velocità del moto in ogni istante.*
- *Data la velocità del moto in maniera continua, trovare la lunghezza della traiettoria descritta (cioè della distanza percorsa) in ogni istante.*

[3, Giusti] Ogni quantità è variabile fluente rispetto al tempo. Due variabili x e y sono correlate dall'equazione data $P(x, y) = 0$ che determina la curva. Newton introduce due nuove grandezze $\dot{x}$ e $\dot{y}$, che sono le velocità istantanee o flussioni; i loro rapporti determinano la tangente / velocità alla curva e si possono ricavare operando secondo opportune regole su $P(x, y)$.

Calcolo delle flussioni : la regola del prodotto

Per trovare la velocità del prodotto, Newton considera un tempuscolo (Infinitesimo) o, dopo il quale x e y saranno diventate rispettivamente $x + o\dot{x}$ e $y + o\dot{y}$. Allora la velocità sarà

$$\frac{(x+o\dot{x})(y+o\dot{y})-xy}{o} = \frac{o(\dot{x}y+x\dot{y})+o^2\dot{x}\dot{y}}{o} = \dot{x}y + x\dot{y} + o\dot{x}\dot{y}$$

e, dato che l'ultimo termine $o\dot{x}\dot{y}$ è un infinitesimo per via di o, resta che la velocità del prodotto, denotata con $\dot{xy}$, è:

$$\dot{xy} = \dot{x}y + x\dot{y}$$

Estensione del metodo

Nel *De methodis* Newton estende la soluzione, nota a Torricelli e Barrow per la classe delle curve $y = x^n$, alla più ampia classe delle *serie infinite di potenze*. Newton è in grado di ottenere gli sviluppi in serie di tutte le quantità variabili (modenamente "funzioni"). Ecco come risorlve il problema della quadratura, riducendolo esenzialmente all'integrazione delle potenze.

1. *Se $x^{\frac{m}{n}}$ sono le ordinate alzate ad algolo retto, allora l'area della figura sarà $\frac{n}{n+m}x^{fracm+nn}$*
2. *Se l'ordinata è costituita da due o più ordinate unite dai segni $+$ e $-$, anche l'area sarà allora costituita da due o più aree congiunte insieme rispettivaemnte dai segni $+$ e $-$.*
3. *Ridurre le frazioni, i radicali, le radici affette da esponente in serie convergenti, quando non è possibile trovare altrimenti la quadratura; e nel quadrare, secondo le regole prima e seconda, le figure le cui ordinate sono i singoli termini della serie.*

TFC secondo Newton

Per ogni serie di potenze, l'operazione di differenziazione è inversa all'operazione di integrazione. Tuttavia occorre avere una serie di potenze in forma esplicita.

Leibniz

Nova Methodus

Nel 1684 Leibniz diede alle stampe l'opera *Nova Methodus pro maximis e minimis*, la prima pubblicazione sul calcolo differenziale inteso nell'accezione moderna: un metodo e un simbolismo generali per il calcolo delle tangenti alle curve.

Prima esposizione moderna del Calcolo Differenziale

Troviamo la notazione $\frac{dy}{dx}$, le regole di differenziazione e il concetto di funzione (anzi la parola stessa). Leibniz introduce la notazione dx per denotare un incremento infinitesimo di x (la "d" sta per differenza).

Calcolo differenziale: la regola del prodotto

Per esempio se $y = uv$ dove u,v sono funzioni della x. L'incremento dy diventa:

$$dy = (u + du)(v + dv) - uv = udv + vdu + dudv$$

e il coefficiente angolare $\frac{dy}{dx}$ della retta che passa per il punto (x, y) e il punto infinitamente vicino $(x + dx, y + dy)$ si ottiene, a meno di un infinitesimo, semplicemente dividendo per dx:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Il termine $dudv$ si elide in quanto e' un infinitesimo "di ordine superiore."

Leibniz

Nova Methodus

Nel 1684 Leibniz diede alle stampe l'opera *Nova Methodus pro maximis e minimis*, la prima pubblicazione sul calcolo differenziale inteso nell'accezione moderna: un metodo e un simbolismo generali per il calcolo delle tangenti alle curve.

Prima esposizione moderna del Calcolo Differenziale

Troviamo la notazione $\frac{dy}{dx}$, le regole di differenziazione e il concetto di funzione (anzi la parola stessa). Leibniz introduce la notazione dx per denotare un incremento infinitesimo di x (la "d" sta per differenza).

Calcolo differenziale: la regola del prodotto

Per esempio se $y = uv$ dove u,v sono funzioni della x. L'incremento dy diventa:

$$dy = (u + du)(v + dv) - uv = udv + vdu + dudv$$

e il coefficiente angolare $\frac{dy}{dx}$ della retta che passa per il punto (x, y) e il punto infinitamente vicino $(x + dx, y + dy)$ si ottiene, a meno di un infinitesimo, semplicemente dividendo per dx:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Il termine $dudv$ si elide in quanto e' un infinitesimo "di ordine superiore."

Leibniz

Nova Methodus

Nel 1684 Leibniz diede alle stampe l'opera *Nova Methodus pro maximis e minimis*, la prima pubblicazione sul calcolo differenziale inteso nell'accezione moderna: un metodo e un simbolismo generali per il calcolo delle tangenti alle curve.

Prima esposizione moderna del Calcolo Differenziale

Troviamo la notazione $\frac{dy}{dx}$, le regole di differenziazione e il concetto di funzione (anzi la parola stessa). Leibniz introduce la notazione dx per denotare un incremento infinitesimo di x (la "d" sta per differenza).

Calcolo differenziale: la regola del prodotto

Per esempio se $y = uv$ dove u,v sono funzioni della x. L'incremento dy diventa:

$$dy = (u + du)(v + dv) - uv = udv + vdu + dudv$$

e il coefficiente angolare $\frac{dy}{dx}$ della retta che passa per il punto (x, y) e il punto infinitamente vicino $(x + dx, y + dy)$ si ottiene, a meno di un infinitesimo, semplicemente dividendo per dx:

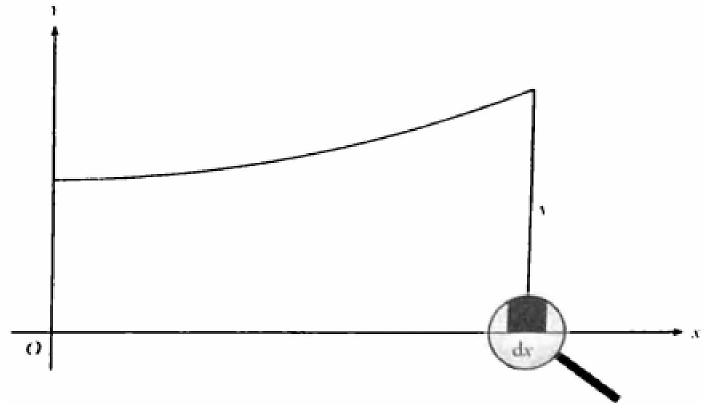
$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Il termine $dudv$ si elide in quanto e' un infinitesimo "di ordine superiore."

L'integrale secondo Leibniz

La definizione

Nel 1686 Leibniz da alle stampe la prima pubblicazione sul Calcolo integrale. Introduce la notazione $\int ydx$ per indicare la funzione y di x , dove $\int$, una S allungata sta per "somma". Il termine seguente, ydx, indica l'area di un rettangolo infinitesimo di altezza y e base dx. Quindi $\int ydx$ denota la somma di queste aree infinitesime: l'area sottesa alla curva la cui altezza in x è y.



Il TFC secondo Leibniz

Domanda

Che cosa significa $d\int ydx$?

Teorema

Poiché d significa "*incremento infinitesimo*" e $\int$ significa "*somma*", allora $d\int ydx$ significa "*incremento Infinitesimo della somma (di infiniti ydx)*", La risposta alla domanda precedente é sicuramente :

$$d\int ydx = ydx$$

Quindi

$$\frac{d}{dx}\int ydx = y$$

In parole: *Se si integra una funzione y e poi si differenzia il risultato si ottiene di nuovo la funzione y*

Fondamento del calcolo... nelle parole di Leibniz[5]

Le differenze e le somme sono sono tra loro reciproche, vale a dire che la somma delle differenze della successione è il termine della successione, mentre la differenza delle somme della successione è lo stesso termine della successione: la prima affermazione la enuncio così. $\int dx = x$, la seconda così: $d\int x = x$

Funzione

Funzione

La nozione di *funzione* viene introdotta e precisata in molti modi diversi durante il XVII secolo.
Nella cinematica si hanno quantità variabili con il tempo, ovvero funzioni del tempo. Si arriva in questo modo alle *fluenti* di Newton.
Per contro Descartes aveva escluso dalla "geometria" tutte le curve non analitiche (trascendenti o meccaniche).
Inoltre il successo degli sviluppi in serie di Newton, creò confusione fra funzioni suscettibili di definizione analitica e funzioni sviluppabili come serie di potenze (p.e.$sen(x)$).
Leibniz introduce i termini "costante","variabile" e "parametro". Nella sua corrispondenza con Bernoulli, propone $x\sqcup$ ove noi scriviamo $f(x)$ notazione introdotta da Eulero.
Cauchy definisce la funzione come facciamo noi oggi. Da essa derivano facilmente le nozioni di limite e di derivata la cui esistenza cessa di essere un articolo di fede, ma un problema da studiare con gli strumenti dell'analisi. Per l'integrale definito, Cauchy fa adottare la notazione $\int_a^b f(x)dx$ proposta da Fourier al posto della scomoda $\int f(x)dx \left[\begin{array}{c} x = a \\ x = b \end{array} \right]$ di Eulero

Cauchy

Prima definizione di integrale.

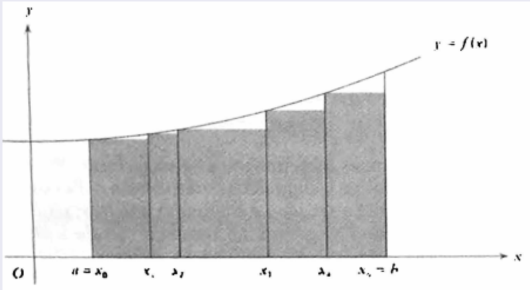
Nel 1821, A.L.Cauchy diede la prima defnzione precisa di integrale $\int_a^b f(x)dx$. Egli divise l'intervallo di estremi a e b in un numero finito di sottointervalli aventi estremi.

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

per poi considerare la somma finita

$$(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + ... + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

che rappresenta l'area totale dei rettangoli in figura.



Integrale come limite.

Ammesso che la cosa sia possibile, l'area sottesa alla curva, è il numero approssimato da somme di questo genere, quando l'ampiezza dei rettangoli tende a zero. Cauchy definí l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ come il valore limite, quando esiste, di queste somme. Dimostrò inoltre che l'esistenza dell'integrale dipende dall'essere al curva $y = f(x)$ *continua*, dopo aver definito il concetto di *continuità*.

1. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione *continua*
2. Dividiamo $[a, b]$ in N parti uguali medianti i punti $x_i := a + i\frac{b-a}{N}$
3. Definiamo $\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=0}^N f(x_{i-1})\frac{b-a}{N}$

Data l'ipotesi di continuità il limite esiste.

La continuità

Una funzione f è *continua in* x se la differenza $f(x + \alpha) - f(\alpha)$ tende a zero quando α tende a zero. f è *continua* se lo è in ogni punto del dominio di definizione.

Dirichlet

Continuità e integrabilità

Nel 1829 Dirichlet scopre che vi sono funzioni che restano integrabili anche se hanno *qualche* discontinuità. Questo pone la questione: fino a che punto una funzione può essere discontinua e ammettere tuttavia un integrale?

La funzione di Dirichlet

Dirichlet propone un esempio di funzione che è *troppo discontinua* per essere integrabile nel senso di Cauchy.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se x è razionale} \\ 0 & \text{se x è irrazionale} \end{cases}$$

In qualsiasi intervallo della retta reale ci sono sia punti razionali che punti irrazionali. Quindi data una qualsiasi suddivisione $0 = x_0 < x_1 < \ldots > x_n = 1$, si possono sempre segliere le somme di Cauchy

$$(x_1 - x_0)D(x_0) + (x_2 - x_1)D(x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1})D(x_{n-1})$$

in modo che i valori $D(x_0)$,$D(x_1)$, ... , $D(x_{n-1})$ siano tutti uguali a 0 o tutti uguali a 1. Di conseguenza non esiste un unico valore limite, per cui l'integrale di Cauchy di $D(x)$ non esiste.

Riemann

La funzione di Dirichlet modificata

Nel 1854 Riemann presentò una esempio di funzione che ha discontinuità in ogni intervallo ma rimane comunque integrabile secondo Cauchy. L'esempio più semplice di funzione con queste caratteristiche è:

$$d(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q} \text{ dove } \frac{p}{q} \text{ è ridotta ai minimi termini} \\ 0 & \text{se è irrazionale} \end{cases}$$

Calcoliamo l'integrale. Per ogni $q \in \mathbb{N}$:

- $d(x) > \frac{1}{q}$ solo per un numero finito di punti. Racchiusi in intervalli sufficientemente piccoli, il loro contributo alla somma di Cauchy diventa arbitrariamente basso ($< \frac{1}{q}$)
- Nell'intervallo $x \in [0, 1]$, il resto dell'integrale è sempre racchiuso in un numero di rettangoli di altezza $\leq \frac{1}{q}$ e quindi di area totale $< \frac{1}{q}$

Sommando i due contributi, l'area totale $< \frac{2}{q}$ per ogni $q \in \mathbb{N}$ quando l'ampiezza dei sottointervalli tende a zero. Quindi

$$\int_0^1 d(x)\, dx = 0$$

L'integrale di Riemann

L'integrale di Riemann

Dato un intervallo $[a, b]$, *suddivisione* è ogni *sottoinsieme finito* σ di $[a, b]$ che contiene gli estremi a e b.
Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitata* e $\mathcal{D} = \{x_0, ..., x_n\}$ una suddivisione di $[a, b]$, chiamiamo rispettivamente *somma inferiore* $s(\mathcal{D}, f)$ e *somma superiore* $S(\mathcal{D}, f)$ di Riemann :

$$s(\mathcal{D}, f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{(x_{k-1}, x_k)} f$$

$$S(\mathcal{D}, f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{(x_{k-1}, x_k)} f$$

Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitata* è integrabile secondo Riemann se è unico il numero reale I compreso fra *tutte* le somme inferiori di f e tutte le somme superiori di f. Se f è integrabile secondo Riemann, l'unico numero I nelle condizioni dette è chiamato integrale di Riemann di f

$$I := \int_{(a,b)} f(x)\, dx := \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$$

Proprietà della continuità

Il problema della continuità

Cauchy aveva definito l'integrale come limite di una somma, e dimostrato che esiste per ogni funzione continua. Ma la continuità ha una proprietà, detta del *valore intermedio*, indimostrata: *se una funzione f è continua nell'intervallo [a,b], se f(a) < 0 e f(b) > 0 allora esiste un x in cui f si annulla*. Questo è però chiaramente falso in $\mathbb{Q}$, se $f(x) = x^2 - 2$ nell'intervallo [0,2]: non si annulla mai in $\mathbb{Q}$ dato che le sue soluzioni $\pm\sqrt{2}$ non sono razionali.

La proprietà di completezza

I tentativi di dimostrare la proprietà del valore intermedio dipendeva a sua volta da una proprietà indimostrata di $\mathbb{R}$, la proprietà dell' estremo superiore: *ogni insieme limitato di numeri reali ha estremo superiore*.

Dedekind

La costruzione di $\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{Q}$ [7]

Nel 1858, Dedekind si rese conto che i problemi relativi alla fondazione dell'Analisi potevano essere risolti solo con una *precisa definizione di numero Reale*.
Dato l'insieme dei razionali $\mathbb{Q}$, un numero irrazionale è un "taglio" (o "sezione") in esso. Costruire una sezione significa separare $\mathbb{Q}$ in due insiemi I ed S in modo tale che ogni elemento di I sia minore di ogni elemento di S.
Se I non ha un massimo e S non ha un minimo, allora la sezione (I,S) è un numero irrazionale.
Per esempio, l'insieme dei numeri razionali positivi $\{r : r^2 > 2\}$ costituiscono l'insieme S, $\{r : r^2 > 2\}$ è l'insieme S, la coppia (I,S) corrisponde al numero reale $\sqrt{2}$.

L'aritmetizzazione dell'Analisi

Dedekind pubbicò nel 1872 *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Continuità e numeri irrazionali). Altri matematici proposero definizioni equivalenti. Essi portarono avanti quella che fu chiamata l'"aritmetizzazione dell'Analisi", ovvero la ricostruzione dei fondamenti del calcolo sul concetto aritmetico di numero reale e sull'uso rigoroso del concetto di limite.

La forza della tradizione nella notazione

Tuttavia i matematici non abbandonarono l'uso dei simboli dx e dy, che rappresentavano (p.e. in Leibniz) gli infinitesimi, ma dissero che l'espressione $\frac{dy}{dx}$ ha senso (limite di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$), anche se dx e dy presi singolarmente non hanno significato.

Lebesgue

Nuovi problemi

La scoperta di Riemann dell'esistenza di funzioni integrabili con un insieme denso di punti di discontinuità pose la seguente questione: "esiste un concetto più generale di integrale?". L'espressione $\int_0^1 \mathcal{D}(x)dx$ ha un significato?

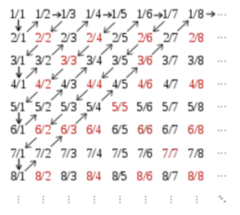
Generalizzazione del concetto di integrale

Lebesgue (1902) propose che l'area sottesa ad una curva poteva essere approssimata con un insieme *infinito* (in atto) di rettangoli, e questo fa una grande differenza.
Data la funzione

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se x è razionale} \\ 0 & \text{se x è irrazionale} \end{cases}$$

l'area sottesa al grafico $y = \mathcal{D}(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$ è l'area che sta sotto i punti per qui $\mathcal{D}(x) = 1$; gli altri non danno contributo all'area. Tali punti sono i razionali dell'intervallo $[0, 1]$ che sono un insieme *numerabile*.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$$



Prima le frazioni che hanno al
denominatore 2, poi quelle che hanno al denominatore 3, poi 4, 5 e così via.

Lebesgue

Generalizzazione del concetto di integrale (...segue)

Al punto x, razionale, corrisponde una linea verticale. Se pensiamo di racchiudere questa linea con un rettangolo di altezza $1 = \mathcal{D}(x)$ e per base $\frac{\epsilon}{2^n}$ per $n \in \mathbb{N}$. L'area è quindi ricoperta di rettangoli la cui somma è

$$\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon}{16} + \frac{\epsilon}{32} + ... = \epsilon$$

Poiché possiamo segliere ϵ piccolo a piacere, il valore di quest'area tende a 0. Quindi

$$\int_0^1 \mathcal{D}(x)dx = 0$$

quando l'integrale è inteso nel senso di Lebesgue.
Poiché la lunghezza dell'intervallo $[0, 1]$ è pari a 1 e l'insieme dei razionali può essere ricoperto da intervalli di lunghezza totale (o "misura") ϵ, l'insieme degli irrazionali ha misura pari a 1. Per questo si dice che che *quasi* tutti i punti di $[0, 1]$ sono irrazionali. *La funzione di Dirichlet $\mathcal{D}(x)$ ha integrale uguale a zero perchè $\mathcal{D}(x)$ è zero quasi ovunque.*

Robinson

Quanto è comodo l'infinitesimo

Negli anni 60 del secolo XX, A.Robinson ri-propone la nozione di infinitesimo: un numero che è infinitamente piccolo e tuttavia maggiore di zero. Fermat prima e poi Newton e Leibniz lo avevano usato con estrema disinvoltura, benchè palesemente contradditorio. Ma Berkeley nel suo trattato *The Analyst*, pubblicato nel 1734 scrive:

> *Essi non sono nè quantità finite, nè quantità infinitamente piccole e neppure nulla. Non dobbiamo forse chiamarli i fantasmi di quantità defunte?*

Per soddisfare le esigenze della logica, il Calcolo viene riformulato nel XIX secolo da Weierstass con l'argomentazione $\epsilon - \delta$, senza infinitesimi. Ma proprio grazie ricorrendo alla logica che Robinson ha riportato di nuovo in vita l'infinitesimo.

La pietra cade $s = 4,9t^2$ [4]

WEIERSTASS

Sia $t = 1$ e $t' = 1 + \Delta t$
Δt è un numero reale positivo.
$s' = 4.9 + 9.8\Delta t + 4.9(\Delta t)^2$

$\Delta s = s' - s = 9.8\Delta t + 4.9(\Delta t)^2$
$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 9.8 + 4.9\Delta t$

Assegnato un qualsiasi numero reale positivo ϵ, arbitrariamente piccolo, scegliamo $\delta = \frac{\epsilon}{4,9}$.

Allora per tutti i $\Delta t < \delta$
$\frac{\Delta s}{\Delta t} - 9.8 = 4.9\Delta t < 4.9\delta = 4.9\frac{\epsilon}{4.9} = \epsilon$
Quindi: Velocità istantanea $= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 9.8$

ROBINSON

Sia $t = 1$ e $t' = 1 + dt$
dt è un numero positivo infinitesimo.
$s' = 4.9 + 9.8dt + 4.9(dt)^2$

$\Delta s = s' - s = 9.8dt + 4.9(dt)^2$
$\frac{ds}{dt} = 9.8 + 4.9dt$

Poichè dt è un infinitesimo, lo è anche $4.9dt$. 9.8 è un numero reale standard.

Quindi: Velocità istantanea = parte standard di $\frac{ds}{dt} = 9.8$

Riferimenti bibliografici

[1] Nikolas. Bourbaki.
Elementi di storia della matematica. Calcolo infinitesimale, Cap.sedicesimo.
Feltrinelli, 1963.

[2] Giulio. Giorello e Corrado.Sinigaglia.
Fermat.
Le Scienze, collana I grandi della scienza, numero 24, pages 26–27, 2001.

[3] Enrico. Giusti.
Dalla géométrie al calcolo: il problema delle tangenti e le origini del calcolo infinitesimale.
Matematica,Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol.1, pages 209–239, 2016.

[4] Reuben Hersh Martin Davis.
Analisi non-standard.
Le Scienze, numero 40, 1972.

[5] Massimo Mugnai.
Leibniz.
Le Scienze, collana *I grandi della scienza*, numero 29, 2002.

[6] John. Stillwell.
Il teorema fondamentale del calcolo.
Einaudi, La matematica, Volume I, "I luoghi e i tempi", 1973.

[7] John. Truss.
I fondamenti dell'analisi.
Einaudi, La matematica, Volume I, "I luoghi e i tempi", 1973.