

The Art of Computer Programming Exercises 解答集

原田 崇司[†]

2016 年 5 月 2 日

補題 1.1.

$$\forall k. \forall l. k \in \mathbb{R} \Rightarrow l \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\lfloor k \rfloor < l \iff k < l \right)$$

補題 1.2.

$$\forall k. \forall l. k \in \mathbb{R} \Rightarrow l \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(l \leq \lfloor k \rfloor \iff l \leq k \right)$$

補題 1.3.

$$\forall k. \forall l. k \in \mathbb{R} \Rightarrow l \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\lceil k \rceil \leq l \iff k \leq l \right)$$

補題 1.4.

$$\forall k. \forall l. k \in \mathbb{R} \Rightarrow l \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(l < \lceil k \rceil \iff l < k \right)$$

補題 1.5.

$$\forall k. \forall l. k \in \mathbb{R} \Rightarrow l \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\lfloor k \rfloor = l \iff l \leq k < l + 1 \right)$$

補題 1.6.

$$\forall k. \forall l. k \in \mathbb{R} \Rightarrow l \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\lceil k \rceil = l \iff l - 1 < k \leq l \right)$$

1.2.4 35. [M20]

$$\forall x. \forall m. \forall n. x \in \mathbb{R} \Rightarrow m \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \left\lfloor \frac{x + m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor \quad (1)$$

を示す.

Proof. 実数 x , 整数 m , 正の整数 n をそれぞれ任意に取る.

$$\left\lfloor \frac{x + m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor \quad (2)$$

を示す.

[†] 神奈川大学大学院理学研究科理学専攻情報科学領域

$$\begin{aligned}
& ((x+m) \bmod n) \geq 0 \\
& \iff ((x+m) \bmod n) - x \geq -x \\
& \iff x - ((x+m) \bmod n) \leq x \\
& \iff x - ((x+m) \bmod n) \leq \lfloor x \rfloor \\
& \iff (x+m) - ((x+m) \bmod n) \leq \lfloor x \rfloor + m \\
& \iff n \lfloor \frac{x+m}{n} \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + m \\
& \iff \lfloor \frac{x+m}{n} \rfloor \leq \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n}
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
& ((x+m) \bmod n) < n \\
& \iff x < x - ((x+m) \bmod n) + n \\
& \iff \lfloor x \rfloor < x - ((x+m) \bmod n) + n \\
& \iff \lfloor x \rfloor + m < (x+m) - ((x+m) \bmod n) + n \\
& \iff \lfloor x \rfloor + m < n \lfloor \frac{x+m}{n} \rfloor + n \\
& \iff \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} < \lfloor \frac{x+m}{n} \rfloor + 1
\end{aligned} \tag{4}$$

(3),(4) より

$$\lfloor \frac{x+m}{n} \rfloor \leq \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} < \lfloor \frac{x+m}{n} \rfloor + 1 \tag{5}$$

が成り立つ. (5) と (2) は (1.5) より同値である.

ここで, x, m, n は任意であったので (1) が成り立つ.

□