《微积分（1)》练习题

一．　单项选择题

1．设 $f'(x_0)$ 存在，则下列等式成立的有（　）

A． $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$　　B． $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-f'(x_0)$

C． $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$　　D． $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=\frac{1}{2}f'(x_0)$

2．下列极限不存在的有（　）

A． $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}$　　B． $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x+1}$

C． $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$　　D． $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{(3x^2-1)^3}{2x^6+x}$

3．设 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-2x}，则 $f(x)=$（　）

A． $-2e^{-2x}$　　B． e^{-2x}　　C． $4e^{-2x}$　　D． $-2xe^{-2x}$

4．函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的间断点 $x=1$ 为（　）间断点。

A．跳跃间断点;　　B．无穷间断点;
C．可去间断点;　　D．振荡间断点

5． 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 (a,b) 内可导，则下列结论成立的有（　）

A．当 $f(a)f(b)<0$ 时，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$；

B．对任何 $\xi\in(a,b)$，有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$；

C．当 $f(a)=f(b)$ 时，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$；

D．至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$；

6． 已知 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=-1$，则下列结论成立的有（　）

A． $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点;　　B． $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点;

C．$(a, f(a))$是曲线 $y = f(x)$的拐点;

D． $x = a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a, f(a))$也不是曲线 $y = f(x)$的拐点;

二．　填空:

1．设 $y = f\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)$， f 可微，则 $y'(x) =$ ______________________

2．若 $y = 3x^5 - 2x^2 + x - 3$，则 $y^{(6)} =$ ________________

3．过原点$(0,1)$作曲线 $y = e^{2x}$ 的切线，则切线方程为____________________

4．曲线 $y = \dfrac{4(x+1)}{x^2} - 2$ 的水平渐近线方程为________________________________

铅垂渐近线方程为 __________________________

5．设 $f'(\ln x) = 1 + x$，则 $f'(x) =$ __________ $f(x) =$ _________________

三．　计算题:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{x+3}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x\sin 3x}$　　(4) $y = [\ln(1-2x)]^2$　求 dy

(5) $e^{xy} + y^3 - 5x = 0$　　求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$

四．　试确定 a，b，使函数 $f(x) = \begin{cases} b(1+\sin x) + a + 2, & x \geq 0 \\ e^{ax} - 1, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续且可导。

五．　试证明不等式：当 $x > 1$时，$e \cdot x < e^x < \dfrac{1}{2}(xe^x + e)$

六．　设 $F(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$，$(x > a)$，其中 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$上连续，$f''(x)$在$(a,+\infty)$内存在且大于零，求证 $F(x)$ 在$(a,+\infty)$内单调递增。

《微积分》练习题参考答案

七． 单项选择题

1．(B) 2．(C) 3．(A) 4．(C) 5．(B) 6．(B)

八． 填空：(每小题 3 分，共 15 分)

1． $-\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\, f'\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)$

2． $y^{(6)}=0$

3． $y=2x+1$

4． $y=-2$ ， $x=0$

5． $f'(x)=1+e^x$， $f(x)=x+e^x+c$

三,计算题：(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{x+3}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{2x+2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{x+3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{-\frac{x}{2}\bullet\left(-\frac{2}{x}\right)(x+3)}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{2x+6}{x}}=e^{-2}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x\sin 3x}$ (4) $y=[\ln(1-2x)]^2$ 求 dy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x\sin 3x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cdot 3x}=\frac{1}{3}$$

$$dy=2[\ln(1-2x)]\cdot\frac{1}{1-2x}\cdot(-2)dx$$
$$=-\frac{4[\ln(1-2x)]}{1-2x}dx$$

(5) $e^{xy}+y^3-5x=0$ 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$

$$e^{xy}(y+xy')+3y^2y'-5=0$$

$$\Rightarrow y'=\frac{5-ye^{xy}}{3y^2+xe^{xy}}$$

又 $x=0\Rightarrow y=-1$

$$y'\Big|_{x=0} = \frac{5 - ye^{xy}}{3y^2 + xe^{xy}}\Bigg|_{\substack{x=0\\ y=-1}} = 2$$

(

九． 试确定 a， b， 使函数 $f(x)=\begin{cases} b(1+\sin x)+a+2, & x \ge 0 \\ e^{ax}-1, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续且可导。 （8 分）

解： $f(0+0) = \lim\limits_{x\to 0^+}[b(1+\sin x)+a+2] = a+b+2$

$f(0-0) = \lim\limits_{x\to 0^-}[e^{ax}-1] = 0$， 函 数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 连 续 $f(0+0) = f(0-0)$

$a+b+2=0$， （1）

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{[b(1+\sin x)+a+2]-[b+a+2]}{x} = b$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}-1-[a+b+2]}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x} = a$$

函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $f'_+(0) = f'_-(0)$，故 $a=b$ （2）

由（1）（2）知 $a=b=-1$

十． 试证明不等式：当 $x>1$ 时， $\mathrm{e}\cdot \mathrm{x} < \mathrm{e}^{\mathrm{x}} < \frac{1}{2}(\mathrm{xe}^{\mathrm{x}} + \mathrm{e})$ （8 分）

证：（法一）设 $f(t) = e^t \quad t\in[1, x]$ 则由拉格朗日中值定理有

$$e(x-1) < e^x - e = e^{\xi}(x-1) < e^x(x-1) \qquad \xi \in (1, x)$$

整理得： $\mathrm{e}\cdot\mathrm{x} < \mathrm{e}^{\mathrm{x}} < \frac{1}{2}(\mathrm{xe}^{\mathrm{x}}+\mathrm{e})$

法二：设 $f(x) = e^x - ex$

$f'(x) = e^x - e > 0 \quad (x>1)$ 故 $f(x) = e^x - ex$ 在 $x>1$ 时，为增函数，

$f(x) = e^x - ex > f(1) = 0$，即 $e^x > ex$

设 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}(xe^x + e)$

$f'(x) = e^x - \frac{1}{2}(e^x + xe^x) = \frac{1}{2}e^x(1-x) < 0 \quad (x>1)$ 故 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}(xe^x+e)$ 在 $x>1$ 时，为减函数，

$f(x) = e^x - \frac{1}{2}(e^x + xe^x) < f(1) = 0$，即 $\mathrm{e}^{\mathrm{x}} < \frac{1}{2}(\mathrm{xe}^{\mathrm{x}}+\mathrm{e})$

综上，$e\cdot x < e^{x} < \frac{1}{2}(xe^{x} + e)$

十一． 设 $F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x>a)$，其中 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续， $f''(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内存在且大于零，求证 $F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内单调递增。 （5 分）

证： $F'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^{2}}$

$$=\frac{f'(x)(x-a)-f'(\xi)(x-a)}{(x-a)^{2}}(a<\xi<x)$$

$$=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-a}$$

$$=\frac{f''(\eta)(x-\xi)}{x-a}>0(\xi<\eta<x)$$

故 $F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内单调递增。