

Teoría de Perron-Frobenius: importancia, poder y centralidad

por

Regino Criado, Miguel Romance y Luis E. Solá

RESUMEN. A lo largo de los últimos 100 años, el teorema de Perron-Frobenius ha demostrado cómo un resultado esencialmente teórico puede tener potentes aplicaciones a muy diferentes ámbitos de la ciencia y la tecnología. Desde el análisis de las características demográficas de una población, pasando por la distribución del poder en una red social hasta el desarrollo de motores de búsqueda como **Google**, entre otros ejemplos, la teoría de Perron-Frobenius se ha revelado como una herramienta de trabajo fundamental.

En las siguientes páginas hacemos un recorrido sobre la evolución de la teoría de Perron-Frobenius y algunas de sus principales aplicaciones a la biología, la sociología e internet.

The tension between centrality, on the one hand, and competition, on the other, is probably the oldest of all market structure issues.

Arthur Levitt

INTRODUCCIÓN

Para alguien no cercano al mundo de las matemáticas puede resultar increíble que exista una técnica matemática específica que sirva de fundamento común a una gran variedad de procesos como el crecimiento de poblaciones de animales, la longitud de las colas en un supermercado, el análisis de la evolución de los precios de los bienes de consumo o, incluso, la navegación en Internet utilizando un buscador como **Google**. Una técnica de esas características se revelaría como una herramienta esencial que debería conocer cualquier especialista que se aproxime al mundo de la tecnología buscando comprender sus fundamentos. Esta técnica agrupa una serie de importantes resultados del *álgebra lineal* conocidos de forma genérica como *teoría de Perron-Frobenius*, y sirve de fundamento esencial, entre otras aplicaciones, para la resolución iterativa de los sistemas de ecuaciones lineales que aparecen en el tratamiento numérico de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, para la teoría de las cadenas de Markov finitas, o la teoría de colas, entre otras aplicaciones [3, 46, 48]. Ejemplos como el del buscador **Google**, fundamentado en esta técnica, y que acabó por convertirse en el estándar absoluto (imponiéndose de forma contundente a buscadores como **Altavista**, **Yahoo**, **Excite** o **Lycos**), muestran solo una parte de la fuerza y multitud de aplicaciones de este resultado, algunas de

las cuales analizaremos aquí. La herramienta matemática que constituye la teoría en la que se apoya se desarrolló a lo largo del siglo XX a partir de sus aplicaciones en contextos tan diferentes como la sociología y la psicología (centralidad, prestigio, poder [5, 6, 28, 36, 60]), la economía (modelos económicos [21, 22, 43, 38]), la biología [31, 33, 34], la ecología (modelos poblacionales [44, 45, 49, 50, 55, 62]), la informática (*data mining*, Google [10, 15, 54]) y, en general, en todas las disciplinas que hacen un uso habitual del cálculo matricial y el álgebra lineal. Particular atención merece la teoría de grafos y sus aplicaciones y, dentro de un ámbito multidisciplinar, la prolífica y muy reciente rama de la ciencia conocida como la *teoría de redes complejas*, en la que conceptos como *clustering*, centralidad, *betweenness* o *asortatividad* [4, 14, 51] han ido apareciendo de la mano de las diferentes aplicaciones.

Una de las aplicaciones más celebradas del teorema de Perron-Frobenius está relacionada con la obtención de diferentes *rankings*, ordenaciones por importancia o clasificaciones, ya sean estas deportivas (qué jugador o equipo es el mejor) [37], de páginas web o, incluso, de artículos, autores o revistas científicas (un autor es *bueno* si su trabajo es referenciado y reconocido por otros autores *buenos*, y lo mismo cabe decir de un artículo o, análogamente, de una revista científica).

Veamos cómo, a partir de las ideas de Bonacich [5], es posible formular el problema de la clasificación por orden de importancia como un *problema lineal* y aplicar directamente el teorema de Perron-Frobenius a este problema.

El problema consiste en ordenar a los participantes de mayor a menor, según su importancia. Para ello, supondremos que la *importancia* a repartir entre los diferentes elementos participantes es igual a 1, y que dicha importancia se reparte entre los diferentes participantes asignándoles a cada uno un valor entre 0 y 1, de manera que el coeficiente que le corresponde a cada uno indica lo *importante* (o bueno) que es en relación con el resto de participantes; es decir, habremos repartido la importancia *total* (el valor 1) entre todos ellos, resultando ser el participante (el equipo, la página web, el científico...) más importante aquel cuyo coeficiente es mayor. De este modo, si tenemos que distribuir la importancia entre n participantes, nuestro objetivo es encontrar un vector $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)$ tal que c_i represente la importancia del participante i y, como consecuencia, que se satisfagan los dos requisitos siguientes:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad 0 \leq c_i \leq 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n c_i = 1.$$

Una vez obtenidos los valores correspondientes a cada uno de los participantes c_1, \dots, c_n , podremos ordenar estos de mayor a menor según sea su *coeficiente de importancia*.

En este punto, y para analizar un ejemplo concreto, vamos a centrarnos en el ejemplo de la importancia de un artículo científico. Es evidente que la importancia (o influencia) de dicho artículo es proporcional tanto a la cantidad de artículos que lo incluyen entre sus referencias, como a la propia calidad de dichos artículos. Esta situación se puede representar empleando algunas nociones del álgebra lineal y de la teoría de grafos:

DEFINICIÓN 1. Un **grafo dirigido** (o **red dirigida**) es un par de conjuntos $G = (X, E)$, donde $X = \{1, \dots, n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $E \subseteq X \times X$. Si $(i, j) \in E$ se dice que (i, j) es la **arista dirigida** que une los nodos $i, j \in X$ y se denota $i \rightarrow j$.

En nuestro caso, los nodos serían los artículos y, en lo que a las aristas se refiere, colocaremos una arista $i \rightarrow j$ entre los nodos i y j si el artículo j aparece entre las referencias del artículo i .

En este punto, la definición de matriz de adyacencia de un grafo dirigido $G = (X, E)$ aparece de un modo natural: si G tiene $n \in \mathbb{N}$ nodos, la **matriz de adyacencia** $A(G) = (a_{ij}) \in M_{n \times n}$ de G es la matriz dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si existe una arista } i \rightarrow j \text{ en } G, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que, en nuestra representación, la importancia del artículo i debe ser proporcional a la importancia de los artículos en los que i aparece como referencia, dicha importancia vendría dada por la expresión

$$c_i = \lambda \sum_{j \rightarrow i} c_j,$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{\lambda} c_i = \sum_{j \rightarrow i} c_j,$$

donde $\sum_{j \rightarrow i} c_j$ indica la suma de las importancias de los nodos de los que parte una arista cuyo extremo es i .

En otras palabras, dado un grafo dirigido $G = (X, E)$ de n nodos, buscamos un vector $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga las siguientes propiedades:

- $c_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ (que se suele expresar mediante $c \geq 0$);
- $c_1 + \dots + c_n = \|c\|_1 = 1$;
- existe $\lambda > 0$ (el mismo para todo $1 \leq i \leq n$) tal que

$$c_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \rightarrow i} c_j = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n a_{ji} c_j.$$

Expresado de manera matricial, esto queda

$$c = \frac{1}{\lambda} A^T c,$$

lo que quiere decir que c es un autovector de A^T (traspuesta de la matriz de adyacencia de A) asociado al autovalor λ .

NOTA 2. En lo sucesivo, para no complicar innecesariamente la notación, c denotará indistintamente a los vectores $c = (c_1, \dots, c_n)$ y

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Llegados a este punto, ¿qué dice el teorema de Perron-Frobenius que parece ser la *panacea* para resolver el problema de clasificar por orden de importancia? En primer lugar, vamos a distinguir entre el **teorema de Perron**, cuya aplicabilidad alcanza a todas las **matrices positivas** (aquellas matrices $A = (a_{ij})$ cuyos coeficientes son todos positivos, $a_{ij} > 0$), y el **teorema de Perron-Frobenius** que, con ciertas condiciones adicionales, es válido para las **matrices no negativas** (aquellas matrices $A = (a_{ij})$ cuyos coeficientes son no negativos, $a_{ij} \geq 0$).

Recordemos que λ es un **autovalor** de la matriz cuadrada A si existe un vector no nulo c tal que $Ac = \lambda c$, en cuyo caso se dice que c es un **autovector asociado al autovalor** λ . También denotaremos, como es usual, al conjunto de los autovalores de A por $\sigma(A)$, y al máximo de los valores absolutos de los autovalores de la matriz A (que denominamos **radio espectral** de A) por $\rho(A)$, es decir,

$$\rho(A) = \max_{\lambda_i \in \sigma(A)} \{|\lambda_i|\}.$$

Recordemos también que un vector $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ es **positivo** si todas sus componentes son positivas (es decir, $c_1 > 0, \dots, c_n > 0$), en cuyo caso denotaremos $c > 0$. El teorema de Perron dice lo siguiente:

TEOREMA 3 (Perron [56]). *Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada positiva, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (i) $\rho(A) \in \sigma(A)$ y su multiplicidad como autovalor es 1.
- (ii) Existe un vector $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c > 0$, $\|c\|_1 = 1$ y es un autovector de A^T asociado al autovalor $\rho(A)$.
- (iii) Este vector c es el único vector no negativo y de norma $\|c\|_1 = 1$ que satisface las condiciones anteriores, es decir, que si existe otro autovector v de A^T que cumple que $v \geq 0$ y $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n c_i = 1$, entonces necesariamente $v = c$.

Volviendo a nuestro ejemplo de la importancia de un artículo científico, lo único que podemos garantizar es que nuestra matriz A^T es no negativa, pues en nuestro caso, para ser positiva, cada uno de los artículos debería ser referenciado por todos los demás (incluso el propio artículo debería referenciarse a sí mismo).

Por ello es importante señalar, en este punto, que el teorema de Perron es también válido para las matrices no negativas para las que una de sus potencias es una matriz positiva (i. e., aquellas matrices para las que existe un $p \in \mathbb{N}$ de manera que todos los coeficientes de la matriz A^p son positivos). A este tipo de matrices se les denomina **matrices primitivas**.

Cabría, pues, la posibilidad de analizar si la matriz A^T correspondiente a nuestro artículo científico es una matriz primitiva, pero en cualquier caso existe una herramienta más potente que podemos aplicar en este y otros casos en los que la matriz es no negativa, aunque para ello hay que exigir una condición adicional. Se dice que una matriz A es **irreducible** si no existe una matriz de permutación P tal que

$$P^T A P = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

siendo B y D matrices cuadradas (recuérdese que una matriz de permutación es una matriz que tiene las mismas columnas de la matriz identidad pero no necesariamente en el mismo orden). Para este tipo de matrices se tiene el siguiente resultado:

TEOREMA 4 (Perron-Frobenius [29, 30]). *Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada no negativa e irreducible, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (i) $\rho(A) \in \sigma(A)$ y su multiplicidad como autovalor es 1.
- (ii) Existe un vector $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c > 0$, $\|c\|_1 = 1$ y es un autovector de A^T asociado al autovalor $\rho(A)$.
- (iii) Este vector c es el único vector no negativo y de norma $\|c\|_1 = 1$ que satisface las condiciones anteriores, es decir, que si existe otro autovector v de A^T que cumple que $v \geq 0$ y $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n c_i = 1$, entonces necesariamente $v = c$.

Al vector c cuya existencia y unicidad está garantizada en las condiciones del teorema anterior se le denomina *vector de Perron*. Es importante resaltar la trascendencia que tiene el que, en las condiciones establecidas, el vector de Perron sea único, puesto que, si no fuese así, si por ejemplo la dimensión del autoespacio asociado a $\rho(A)$ fuese mayor o igual que dos, no tendríamos un criterio para seleccionar un vector con las características buscadas que fuese de utilidad para resolver nuestro problema.

A lo largo de las siguientes secciones iremos viendo algunas aplicaciones de estos teoremas y ciertas condiciones suficientes para que una matriz sea irreducible. En cualquier caso, una demostración pormenorizada de los teoremas anteriores encuadrada en un curso general de álgebra lineal se puede encontrar, por ejemplo, en [41] y [48]. Por otra parte, la aplicación del resultado anterior a nuestro ejemplo relacionado con la importancia de un artículo científico, habida cuenta de que la matriz A^T es no negativa, pasaría por la necesaria comprobación de que dicha matriz es irreducible. Finalmente, algunas otras aplicaciones interesantes y curiosas de estos resultados, sobre las que no nos extenderemos más aquí y que abundan en la literatura, son, por ejemplo, las relativas a los siguientes problemas planteados en las referencias correspondientes:

EJEMPLO 5 ([57]). *Al cenar en un restaurante, hay ocasiones en las que se desea hablar con los compañeros de mesa, pero precisamente el ruido ocasionado por las conversaciones mantenidas en el resto de las mesas hace que cada grupo vaya elevando sistemáticamente su nivel de voz, de manera que el mantenimiento de las diferentes conversaciones se hace cada vez más difícil. Pues bien, una aplicación*

directa de estos resultados nos permite (satisfechas ciertas condiciones) determinar el volumen óptimo de voz que debe usarse en cada mesa para poder mantener cada una de las conversaciones de las correspondientes mesas sin «interferencias» con las conversaciones de las otras mesas.

EJEMPLO 6 ([37]). ¿Cómo determinar cuál es el mejor equipo de un campeonato en el que no se producen todos los emparejamientos posibles, es decir, en el que cada equipo no juega con todos los demás? Admitiendo, incluso, que haya equipos que se enfrenten entre sí varias veces a lo largo de un campeonato (como sucede, por ejemplo, en las ligas de baloncesto o béisbol americanas), determinar qué equipo es el mejor es una tarea complicada, pues lo «bueno» o «malo» que es un equipo no solo debe depender de los partidos que haya ganado, sino también de lo «bueno» o «malo» que sea el rival, lo que a su vez debe depender de lo «buenos» o «malos» que sean los equipos a los que ha ganado previamente. Visto lo anterior, el esquema relacionado con este problema nos debe resultar familiar.

1. PRIMERAS APLICACIONES

Technical skill is mastery of complexity while creativity is mastery of simplicity.

E. C. Zeeman, 1925

En esta sección se desarrollan algunas aplicaciones elementales de la teoría de Perron-Frobenius a las redes sociales y a los algoritmos de ordenación de páginas web. Con vistas a introducir estas aplicaciones es conveniente recordar que un **grafo** (no dirigido) es un par de conjuntos $G = (X, E)$, donde $X = \{1, \dots, n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $E \subseteq \{\{i, j\}; i, j \in X\}$. Al igual que en el caso de los grafos dirigidos, introducidos en la sección anterior, a los elementos del conjunto X se les denomina **nodos** y a cada elemento $\ell = \{i, j\} \in E$ se le denomina **arista** que une los nodos $i, j \in X$. Es evidente que todo grafo no dirigido $G = (X, E)$ puede verse como un grafo dirigido, sin más que tomar cada arista (no dirigida) $\{i, j\} \in E$ como dos aristas dirigidas (i, j) , (j, i) , es decir considerando el grafo dirigido $G = (X, \tilde{E})$, donde

$$\tilde{E} = \bigcup_{\{i, j\} \in E} \{(i, j), (j, i)\},$$

y que la matriz de adyacencia de un grafo es siempre una matriz no negativa. Además, es inmediato comprobar que un grafo $G = (X, E)$ es no dirigido si y solamente si su matriz de adyacencia A es simétrica.

Por otra parte, si $G = (X, E)$ es un grafo no dirigido y tenemos $k \in X$, llamamos **grado** de k al número de aristas de G que contienen a k , es decir el valor

$$\text{gr}(k) = |\{\{k, j\} \in E; j \in X\}|.$$

Si $G = (X, E)$ es un grafo dirigido y tenemos $k \in X$, llamamos **grado de salida** de k (denotado como $\text{gr}_{\text{out}}(k)$) al número de aristas de G que son de la forma $k \rightarrow j$

para algún $j \in X$, y **grado de entrada** (denotado como $\text{gr}_{\text{in}}(k)$) al número de aristas de G que son de la forma $j \rightarrow k$ para algún $j \in X$, es decir,

$$\begin{aligned}\text{gr}_{\text{out}}(k) &= |\{(k, j) \in E; j \in X\}|, \\ \text{gr}_{\text{in}}(k) &= |\{(j, k) \in E; j \in X\}|.\end{aligned}$$

Asimismo es fácil comprobar que si tenemos un grafo no dirigido $G = (X, E)$ y lo interpretamos como un grafo dirigido, entonces, para cada $k \in X$,

$$\text{gr}(k) = \text{gr}_{\text{in}}(k) = \text{gr}_{\text{out}}(k).$$

Además si A es la matriz de adyacencia de G , entonces

$$\begin{aligned}\text{gr}_{\text{in}}(k) &= \sum_{j=1}^n a_{jk}, \\ \text{gr}_{\text{out}}(k) &= \sum_{j=1}^n a_{kj}.\end{aligned}$$

Finalmente, hay que señalar que es usual utilizar los términos *grafo* y *red* indistintamente para referirse al mismo objeto matemático, aun cuando el término *red* suele emplearse, más allá de la teoría de grafos combinatoria, cuando el número de nodos y aristas del objeto considerado es un número grande, por lo que su análisis requiere tener especial cuidado en la complejidad computacional de los algoritmos que se vayan a emplear.

1.1. REDES SOCIALES: CENTRALIDAD, INFLUENCIA Y PODER

En esta sección vamos a ver cómo la teoría de Perron-Frobenius puede ser útil para resolver el siguiente problema procedente de la sociología:

PROBLEMA 7. Si tenemos una red social en la que varios individuos interactúan (ya sea a través de relaciones de amistad, sentimentales, laborales o de cualquier otro tipo), ¿podemos medir de alguna manera la influencia o centralidad de cada nodo en el resto de la red social?

Para responder a esta pregunta, emplearemos un *modelo matemático* en el que una red social se interpreta como una red compleja $G = (X, E)$ en la que cada nodo es uno de los individuos de la red, y si entre dos individuos i, j se produce una interacción social (ya sea una relación de amistad, sentimental, laboral o de cualquier otro tipo), entonces hay una arista entre ellos en el grafo G .

La red compleja que se asocia a una red social puede ser tanto no dirigida como dirigida, dependiendo de la tipología concreta de interacción social que se tenga. Así, por ejemplo, la red social **Facebook** es no dirigida (las relaciones de amistad entre individuos en esta red social son recíprocas, por lo que las aristas de G son no dirigidas), mientras que **twitter** se modela con una red dirigida (en este caso la interacción social es *ser seguidor de*, que puede ser no recíproca) y por tanto las

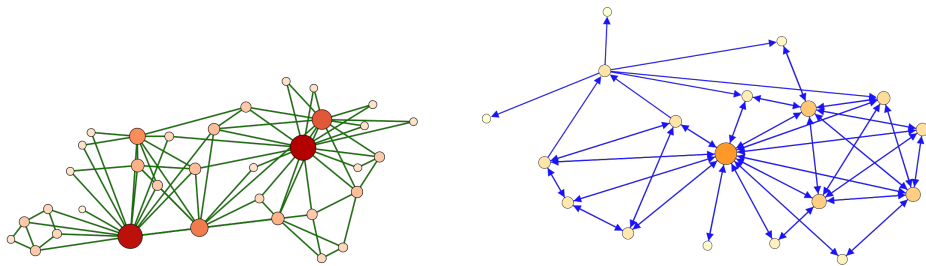


Figura 1: Una red social no dirigida (a la izquierda) y otra dirigida (a la derecha).

aristas de G son dirigidas, de forma que $i \rightarrow j$ quiere decir que el individuo i es seguidor de j .

Una vez introducido el modelo matemático, para resolver el problema 7 para un grafo $G = (X, E)$ de $n \in \mathbb{N}$ nodos debemos definir convenientemente una función (o varias) $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que

- (i) $f(i) \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.
- (ii) $f(1) + \dots + f(n) = 1$; esto nos permite *comparar* el valor de f para los diferentes nodos de X .
- (iii) $f(i)$ es *proporcional a la influencia* del nodo i de la red; es decir, si tenemos dos nodos $i, j \in X$ de forma que i es *más importante* que el nodo j entonces $f(i) > f(j)$ (y viceversa).

Como puede verse, este nuevo modelo es muy similar al estudiado en la sección anterior, pues teniendo en cuenta que el conjunto X es finito (y tiene tamaño $n \in \mathbb{N}$), encontrar una función $c(\cdot)$ que cumpla lo anterior es equivalente a definir un vector $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ de forma que $f(i) = c_i$ (la componente i -ésima del vector c) para cada $1 \leq i \leq n$. Una función f de este tipo se denomina *medida de centralidad* y existen diferentes formas alternativas de definir este tipo de funciones en sociología matemática, en particular, y en el análisis de redes complejas, en general, dependiendo del tipo de red que se considere.

Un primer ejemplo de medida de centralidad podría ser considerar

$$f(i) = \frac{\text{gr}_{\text{in}}(i)}{\sum_{k=1}^n \text{gr}_{\text{in}}(k)},$$

para cada $1 \leq i \leq n$, de forma que se considera que la influencia de un individuo dentro de una red es proporcional al número de contactos sociales que tiene. Esta medida de centralidad presenta serias limitaciones y hay muchos contraejemplos que desaconsejan su uso como una medida precisa de la influencia de los nodos en redes sociales.

Otra medida de centralidad ampliamente utilizada en sociología matemática es la basada en la siguiente *heurística sociológica*:

En una red social, la influencia de un individuo es proporcional tanto a la *cantidad* como a la *calidad* de sus contactos sociales.

En este punto, una vez vista la sección anterior, el modelo que estamos estudiando nos resulta bastante cercano. Teniendo en cuenta que la existencia de un vector de Perron la tenemos garantizada gracias al teorema de Perron-Frobenius, ya que la matriz A^T es no negativa, nuestro problema es la unicidad. Pero precisamente esta viene garantizada por el siguiente teorema, puesto que la matriz de adyacencia de una red fuertemente conexa es no negativa e irreducible (véase [48]):

TEOREMA 8. Si $G = (X, E)$ es una red de n nodos fuertemente conexa (lo que quiere decir que para cada par de nodos i y j hay una sucesión de aristas dirigidas de E : $\{i \rightarrow k, k \rightarrow h, \dots, r \rightarrow s, s \rightarrow j\}$ que conecta el nodo i con el nodo j), entonces:

- (i) Existe un vector $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c > 0$, $\|c\|_1 = 1$ y es un autovector de A^T asociado al autovalor $\rho(A)$.
- (ii) Este vector c es el único que existe, es decir, que si existe otro autovector v de A^T que cumple que $v \geq 0$ y $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n c_i = 1$, entonces $v = c$.

Como consecuencia de lo anterior aparece el siguiente concepto [5]:

DEFINICIÓN 9 (Bonacich, 1972). Si $G = (X, E)$ es una red de n nodos fuertemente conexa, se llama vector de **centralidad Bonacich** de G al único vector $c \in \mathbb{R}^n$ que cumple

- (i) $c > 0$,
- (ii) $\|c\|_1 = 1$,
- (iii) c es un autovector de A^T asociado al autovalor $\rho(A)$,

de forma que la centralidad (Bonacich) de cada nodo $1 \leq j \leq n$ será c_j (la componente j -ésima del vector c).

En el caso particular de que la red no sea fuertemente conexa (la mayoría de los casos en redes muy grandes, especialmente cuando la red social se ha modelado con una red dirigida), se suelen seguir dos alternativas:

1. Estudiar la centralidad Bonacich en cada una de las componentes fuertemente conexas de G (es decir, en cada una de las *partes* o *subredes* fuertemente conexas en que queda dividida G). Esto permite dar medidas de influencia en cada subgrupo social de la red, pero no permite comparar valores entre miembros de diferentes subgrupos que tengan diferente tamaño.
2. *Transformar* la matriz A^T para obtener una matriz irreducible a la que aplicar el teorema de Perron-Frobenius.

Siguiendo la segunda línea aparece el siguiente concepto [6]:

DEFINICIÓN 10 (Bonacich). Si $G = (X, E)$ es una red de n nodos y fijamos $\alpha > 0$, se llama **α -centralidad** de G al único vector $c \in \mathbb{R}^n$ que cumple

- (i) $c > 0$,
- (ii) $\|c\|_1 = 1$,

- (iii) c es un autovector de $\alpha A^T + E$ asociado al autovalor $\rho(\alpha A + E)$, donde $E = (e_{ij})$ es la matriz $n \times n$ tal que $e_{ij} = 1$ para todo $1 \leq i, j \leq n$,

de forma que la α -centralidad de cada nodo $1 \leq j \leq n$ será c_j (la componente j -ésima del vector c).

La interpretación *sociológica* de esta α es la relación entre

1. la *importancia* que tiene un individuo por pertenecer al grupo social;
2. la *influencia* que tiene cada individuo gracias a sus contactos sociales dentro de la red.

Por tanto, cuanto mayor sea el valor de α , mayor importancia le damos a los contactos individuales frente a la reputación global del grupo (de hecho, cuando α tiende a $+\infty$ despreciamos completamente la importancia del grupo, que repercute por igual en todos los miembros de la red social).

1.2. ALGORITMOS DE ORDENACIÓN DE PAGINAS WEB: PAGERANK

En esta subsección vamos a ver cómo la teoría de Perron-Frobenius puede ser útil para resolver el siguiente problema relacionado con buscadores de páginas web:

PROBLEMA 11. Si tenemos una lista de páginas web que tratan sobre un tema, ¿cómo podemos ordenarlas atendiendo a su relevancia?

De forma muy simplificada, un *buscador de páginas web* (como, por ejemplo, Google) se compone de dos partes fundamentales:

1. Una **araña** de páginas web, que se encarga de localizar las páginas web y los hiperenlaces que hay entre ellas.
2. Un método para *ordenar* páginas web, de acuerdo con su *relevancia*.

En esta sección vamos a presentar el algoritmo PageRank, que es una de las piedras angulares que emplea el buscador Google para ordenar las páginas web. Debemos hacer notar que el algoritmo aquí expuesto es el llamado **algoritmo PageRank teórico**, y que si bien originalmente fue el empleado por Brin y Page para desarrollar Google, en la actualidad este buscador emplea sutiles modificaciones de este algoritmo para ordenar sus páginas. De hecho, periódicamente los desarrolladores de Google introducen diferentes cambios en los algoritmos empleados, de forma que en la actualidad el PageRank, convenientemente modificado, es solo una parte de las herramientas empleadas para obtener una ordenación satisfactoria de los resultados de una búsqueda en internet.

Para abordar este problema desde el punto de vista matemático debemos usar el siguiente modelo. Si tenemos un grupo de $n \in \mathbb{N}$ páginas web (o toda la red WWW) con sus correspondientes hiperenlaces, se puede ver como un grafo dirigido $G = (X, E)$ de forma que cada uno de sus n nodos se identifica con una de las páginas web, y si entre dos páginas i y j hay un hiperenlace (por ejemplo de la página i hay un hiperenlace a la página j), entonces el grafo G tiene una arista (dirigida) de la forma $i \rightarrow j$ (es decir, $(i, j) \in E$).

La idea que subyace detrás de la ordenación de páginas web mediante un algoritmo automatizado es la siguiente:

Hipótesis del surfista aleatorio: Si navegamos de forma *aleatoria*, pasaremos con *mayor frecuencia* por los nodos de *mayor importancia*.

Para modelar matemáticamente esta idea, debemos echar mano de un tipo muy particular de cadenas de Markov: **los caminos aleatorios en una red**. Esencialmente, la idea es la siguiente:

1. Fijamos un valor $q \in (0, 1)$, que medirá la probabilidad de que un navegante aleatorio no cambie radicalmente su curso de navegación y se mueva a otra página web que esté conectada con la anterior, en lugar de saltar a otra que no tenga nada que ver con la página web en la que se encuentra. Típicamente (en el caso de Google) $q = 0.85$.
2. En el instante $t = 0$ elegimos un nodo *al azar*.
3. Si en el instante t estamos en el vértice j , en el instante $t + 1$ nos movemos, con probabilidad q y de forma *equiprobable* a uno de los vecinos de j , mientras que con probabilidad $1 - q$ saltamos a otra página que puede no tener que ver nada con j (la página destino la elegimos de forma también equiprobable). Es decir, para cada $1 \leq i \leq n$, la *probabilidad* de que pasemos de j a i es

$$p_{ji} = q \frac{a_{ji}}{\text{gr}_{\text{out}}(j)} + \frac{1 - q}{n}.$$

4. Por tanto, para cada $t > 0$ tenemos un vector $p_t = (p_t(1), \dots, p_t(n))$, de forma que cada $p_t(i)$ nos dice la probabilidad de que en el instante t estemos en el nodo i . A la vista de lo anterior,

$$p_t(i) = \sum_{j=1}^n p_{t-1}(j) p_{ji} = \sum_{j=1}^n p_{t-1}(j) \left(q \frac{a_{ji}}{\text{gr}_{\text{out}}(j)} + \frac{1 - q}{n} \right).$$

Visto de forma matricial, la expresión anterior dice que si consideramos el vector $p_t = (p_t(1), \dots, p_t(n)) \in \mathbb{R}^n$, entonces tenemos que

1. $p_t = \Psi p_{t-1}$, donde $\Psi = (\psi_{ij})$ es la matriz $n \times n$ dada por

$$\psi_{ij} = q \frac{a_{ji}}{\text{gr}_{\text{out}}(j)} + \frac{1 - q}{n}.$$

2. La frecuencia de pasar por cada nodo de la red, si navegamos de forma aleatoria, viene dada por el siguiente vector $p \in \mathbb{R}^n$:

$$p = \lim_{t \rightarrow \infty} p_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi^t p_0.$$

La existencia del límite anterior está garantizada por el hecho de que la matriz Ψ es positiva y, por tanto, empleando el método de las potencias, para cualquier

$0 \neq p_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $p_0 \geq 0$, este límite existe y da el mismo valor. De hecho, este límite corresponde al *único* (salvo normalizaciones) autovector positivo de Ψ (correspondiente al autovalor 1, porque las columnas de la matriz B suman 1 y por tanto es una *matriz estocástica por filas*). Este vector es el empleado para ordenar páginas web:

DEFINICIÓN 12. Si $G = (X, E)$ es una red (dirigida o no) de n nodos, $q \in (0, 1)$ y $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $v \geq 0$ y $\|v\|_1 = 1$, entonces se llama **vector PageRank** de G con **factor de salto** (también conocido como **damping factor**) q y **vector de personalización** v al único $PR \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$(i) \quad PR \geq 0 \text{ y } \|PR\|_1 = 1.$$

(ii) PR es autovector propio (asociado al autovalor 1) de la matriz $\Psi = (\psi_{ij})$ dada por

$$\psi_{ij} = q \frac{a_{ji}}{\text{gr}_{\text{out}}(j)} + (1 - q)v_i.$$

NOTA 13. La manera de ordenar los nodos de una red $G = (X, E)$ de acuerdo con el algoritmo PageRank será la siguiente: si tenemos dos nodos $i, j \in X$, si $PR_i > PR_j$ entonces i aparece por delante del nodo j en la ordenación de los nodos.

NOTA 14. Si en la definición anterior tomamos $v = \frac{1}{n}(1, \dots, 1)$, obtenemos el llamado *PageRank clásico* (el explicado al principio de esta subsección).

NOTA 15. En general, debemos considerar paseos aleatorios con factor de salto positivo (es decir, tomar $q < 1$), ya que en caso contrario la matriz Ψ solo sería no negativa, y para que el método de las potencias funcionara correctamente deberíamos garantizar que la matriz de adyacencia del grafo G fuera irreducible y primitiva. En la práctica, debido a la estructura que suelen tener las conexiones entre páginas web (casi arbóreas), la mayoría de las redes reales obtenidas en la red no cumplen esta propiedad.

2. ALGUNAS APLICACIONES A LA BIOLOGÍA

The elephant is reckoned to be the slowest breeder of all known animals, and I have taken some pains to estimate its probable minimum rate of natural increase: it will be safest to assume that it begins breeding when 30 years old, and goes on breeding till 90 years old, bringing forth six young in the interval, and surviving till one hundred years old; if this be so then, after a period of from 740 to 750 years there would be nearly nineteen million elephants alive descended from the first pair.

Charles Darwin, 1872

Cuatro décadas antes de que Oskar Perron estableciese su teorema para matrices positivas, y Georg Frobenius lo generalizase para matrices no negativas irreducibles, Charles Darwin se encontraba ya con un problema de modelización cuya solución se convertiría en una de las herramientas más usadas por los ecólogos un siglo más tarde.

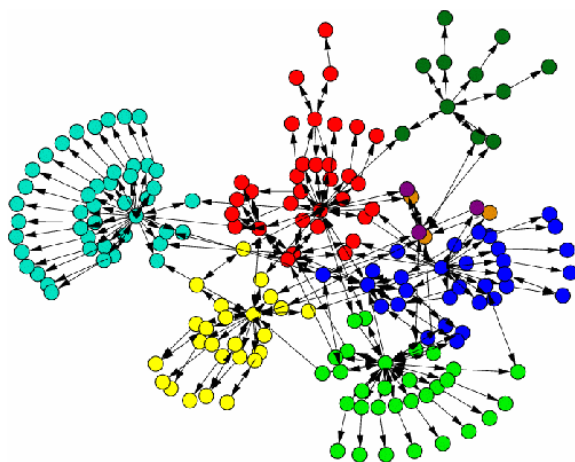


Figura 2: Un ejemplo típico de red de páginas web. Claramente no es fuertemente conexa (pues tiene puntos *sumidero*), por lo que no podemos estudiar el PageRank sin saltos aleatorios (es decir, tomando $q = 1$).

El *modelo malthusiano* establece que, mientras las condiciones del entorno se mantengan constantes, el crecimiento de una población queda determinado por el número de nacimientos (n) y de fallecimientos (f) por unidad de tiempo y habitante,¹ de acuerdo a la siguiente ley:

$$r = n - f \implies N(t) = N_0 e^{rt}.$$

Dado que el establecimiento de un censo preciso de una población que nos permita conocer los valores esperados de n y f es una tarea inabordable en la mayoría de los casos, los ecólogos que trabajan en dinámica de poblaciones suelen diseñar experimentos que les permiten estimar otro tipo de datos, como las tasas de natalidad y supervivencia, y calcular, a partir de estos, el crecimiento intrínseco r de la población. Dado que las tasas de natalidad y supervivencia de un individuo de una población varían de unos individuos a otros, y varían también a lo largo de sus vidas, *¿cómo calculamos r ?*

Hoy sabemos que el cálculo realizado por Darwin para estimar el crecimiento intrínseco de una población de elefantes era erróneo, y que una estimación más realista de la población al cabo de 750 años sería unas 20 veces menor; habrían de pasar todavía 70 años para que los biólogos dispusiesen de los métodos adecuados para la realización correcta de este cálculo. Los primeros trabajos sobre ecología en los que se usaron modelos matriciales datan de los años 40, siendo los más influyentes los del estadístico inglés Patrick H. Leslie (1900–1972).

Tras algunos años trabajando como asistente de Bacteriología en el Departamento de Patología de la Universidad de Oxford, Leslie se une en 1935 al Bureau of

¹Consideramos, por simplicidad, que las tasas de migración de la población estudiada son despreciables.

Animal Population, un centro de investigación creado por Charles Elton, dedicando sus labores investigadoras al estudio de roedores, tales como los topillos, a cuyas poblaciones Leslie intentaba aplicar los métodos demográficos desarrollados por Alfred Lotka.

Tras el fin de la Segunda Guerra Mundial, durante la que aplicaría sus conocimientos al control de poblaciones de roedores en almacenes de grano, Leslie publica en *Biometrika* (la revista creada por Galton, Pearson y Weldon) el artículo fundacional de la teoría de modelos matriciales en dinámica de poblaciones. La relevancia de esta teoría no se haría totalmente evidente hasta el último cuarto del siglo XX, cuando los avances en computación han facilitado la utilización de este tipo de técnicas por parte de la comunidad científica. Repasemos brevemente en qué consistían los métodos desarrollados por Leslie.

2.1. MATRICES DE LESLIE

El de Leslie, al igual que las generalizaciones que consideraremos más adelante, es un modelo en el que la variable tiempo toma valores discretos:

$$t \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Típicamente, el tiempo se mide en las unidades que definen ciclos vitales de la población considerada.

Para cada valor de t , Leslie representa mediante $v_i(t)$ el número de individuos² de edad³ i de la población en el momento t . De esta manera, la población a tiempo t se representa mediante un vector

$$v(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t)),$$

donde n es la edad máxima de un individuo de la población.

El modelo de Leslie asume que la probabilidad $a_{i+1,i}$ de que un individuo con edad i en el momento t sobreviva hasta el instante $t + 1$, en el que tendrá una edad $i + 1$, es constante y no depende de t . Igualmente se considera constante e independiente de t la tasa de fertilidad en cada estrato $a_{1,i}$, que debemos pensar como la contribución del estrato de población de edad i en tiempo t al estrato de población de edad 1 del instante siguiente. Nótese que, por definición, $a_{i+1,i} > 0$ para todo i , mientras que las tasas de fertilidad $a_{1,i}$ no son todas nulas, necesariamente. Escrito en forma matricial, el modelo nos dice simplemente que

$$\begin{pmatrix} v_1(t+1) \\ v_2(t+1) \\ \vdots \\ v_n(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix},$$

²En el caso estudiado por Leslie, se consideran solo los individuos hembra, de cuyo número puede deducirse el tamaño total de la población.

³La edad ha de medirse, obviamente, en las mismas unidades en las que se mide t . Por ejemplo, para una especie cuya época de cría se realiza en un momento determinado del año, mediríamos el tiempo en años.

es decir, $v(t+1) = Av(t)$, donde A se denomina *matriz de Leslie* o *matriz de transición*. Gráficamente, el modelo anterior suele representarse mediante un grafo llamado *diagrama de Leslie*, en el que cada nodo corresponde a un estrato de edad (figura 3).

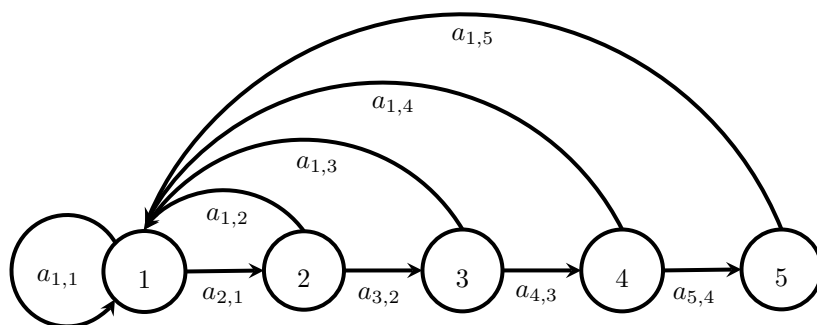


Figura 3: Diagrama de Leslie de una población con edad máxima 4.

Las matrices de Leslie no son, en general, irreducibles. En concreto, A es irreducible si y solo si $a_{1,n} > 0$. Sin embargo, la matriz A cumple las tesis del teorema de Perron-Frobenius en todo caso: de hecho, si $a_{1,n} = 0$, siendo k el mayor entero tal que $a_{1,k} > 0$, la submatriz A' obtenida de A quitando las últimas $n - k$ columnas y $n - k$ filas es una matriz irreducible, cuyo espectro coincide con el de A salvo en el autovalor cero. Así las dos matrices tienen el mismo radio espectral con la misma multiplicidad.⁴

Para que el vector de Perron de A pueda calcularse mediante aplicación del método de las potencias deben cumplirse algunas condiciones. En el caso de que A sea irreducible, basta pedir que el máximo común divisor de los r tales que $a_{1,r} \neq 0$ sea 1 (por ejemplo, si $a_{1,1} \neq 0$ o si $a_{i,1}a_{i+1,1} \neq 0$ para algún i): esta condición hace que la matriz A sea primitiva.

En el caso general, para una matriz de Leslie reducible correspondiente a una población en la que la edad máxima de un individuo fértil es k , y suponiendo que se verifique la condición $\text{mcd}\{i; a_{1,i} \neq 0\} = 1$, podemos asegurar que el método de las potencias converge al vector de Perron de A siempre y cuando el vector inicial $v(0)$ al que aplicamos dicho método tenga alguna componente no nula correspondiente a un estrato $i \leq k$. Con esta restricción, la teoría nos asegura la existencia de los siguientes límites:

$$v := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v(t)}{\|v(t)\|_1}, \quad \lambda := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|v(t+1)\|_1}{\|v(t)\|_1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v_i(t+1)}{v_i(t)} \quad (i \in \{1, \dots, n\}),$$

de manera que λ es el autovalor máximo de A , con multiplicidad algebraica y geométrica 1, y autovector asociado v .

⁴Por esta razón, en algunos estudios se consideran solamente los estratos de población potencialmente fértiles (los v_i tales que $a_{1,j} > 0$ para algún $j > i$); esta condición asegura directamente la irreducibilidad de la matriz de Leslie.

La interpretación biológica de este resultado es obvia: la estructura de la población tiende a estabilizarse, de acuerdo a los porcentajes indicados por el vector de norma uno v , que se llama *vector de población estable*; además, una vez alcanzada esta estructura estable, la población crecerá uniformemente, multiplicándose por λ cada unidad de tiempo. En otras palabras, su crecimiento intrínseco será

$$r = \log(\lambda).$$

2.2. MODELOS MATRICIALES EN DINÁMICA DE POBLACIONES

La generalización más sencilla del modelo de Leslie fue la introducida por el zoólogo Leonard Lefkovitch, que dotó al modelo de Leslie de la versatilidad necesaria para ser utilizado en muchas más situaciones. En efecto, la estratificación de una población por edades no resulta adecuada en gran cantidad de ocasiones, bien sea por la dificultad de determinar la edad de un individuo o por la variabilidad de las tasas vitales (fertilidad y supervivencia) dentro de un estrato de edades. Pensemos por ejemplo en una especie vegetal con flores; su fertilidad está relacionada con el número de flores que posea cada individuo, que suele estar más directamente relacionado con el tamaño de la planta que con la edad de esta.

La idea de Lefkovitch es simple: la estratificación más adecuada de una población a estudiar estará determinada por las características de la población, de manera que una de las premisas que habremos de satisfacer es que podamos suponer la constancia de las tasas vitales en cada uno de los estratos. Esto nos permite, además, adaptar el tipo de estratificación a los datos que obtendremos experimentalmente sobre nuestra población. Los estratos en los que dividiremos la población pueden reflejar estadios vitales, tamaños u otras características.

Matemáticamente, el modelo de Lefkovitch resulta completamente análogo al de Leslie, con la única diferencia de que la matriz de transición $A = (a_{i,j})$ no tiene la forma de la matriz de Leslie, y puede poseer coeficientes no nulos en cada una de sus entradas. En otras palabras: el grafo que representa el modelo tendrá, en general, más aristas que el modelo de Leslie (figura 4).

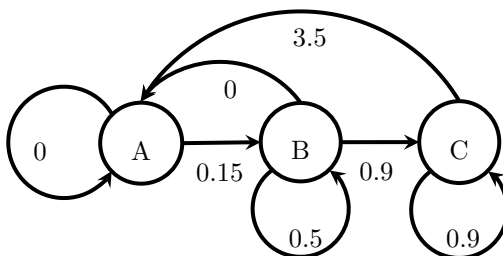


Figura 4: Un diagrama de Lefkovitch.

Las conclusiones serán, de nuevo, análogas. A partir de los datos del modelo obtendremos, bajo ciertas condiciones, vía Perron-Frobenius y el método de las poten-

cias, un vector de población estable v , autovector de A asociado al radio espectral λ , y un crecimiento intrínseco $r = \log(\lambda)$.

Los modelos de Leslie-Lefkovitch permiten responder a muchas otras cuestiones importantes relativas a una población. Uno de los problemas más destacados es el de las *sensibilidades de una población*. ¿De qué manera se transmite al crecimiento intrínseco r una variación (o un error) en $a_{i,j}$? Los biólogos denominan *sensibilidad* de r respecto a $a_{i,j}$ a la derivada parcial de r respecto de $a_{i,j}$. En el contexto del teorema de Perron-Frobenius, estas derivadas suelen calcularse mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma_{i,j} := \frac{\partial r}{\partial a_{i,j}} = \frac{\partial(\log(\lambda))}{\partial a_{i,j}} = \frac{1}{\lambda} \frac{w_i v_j}{\langle w, v \rangle},$$

donde w denomina un autovector asociado a λ de la matriz traspuesta A^T .

3. DINÁMICA POBLACIONAL CONTINUA: IPMS EN BIOLOGÍA

Es conocido que la elección de una estratificación u otra puede afectar considerablemente a la fiabilidad de un modelo matricial. Por esta razón, los biólogos han desarrollado técnicas que les permiten establecer, en muchas situaciones, una forma óptima de estratificación.

Por otro lado, resulta interesante señalar que uno de los problemas subyacentes aquí es aquel que precisamente motivó en los años 1940 la introducción de matrices en biología: las tasas de transición de unos estratos a otros no son constantes. Esto ha motivado que, en los últimos años, algunos biólogos hayan dedicado sus esfuerzos al establecimiento de un marco teórico matemático adecuado que nos permita hacer frente a este problema. Quizás el trabajo más importante en esta dirección es el de Ellner y Rees sobre modelos de proyección integral (IPM, de sus siglas en inglés) [26]. Hagamos una breve descripción del funcionamiento de este tipo de modelos, cuya fundamentación matemática, una generalización del teorema de Perron-Frobenius a operadores en espacios de Banach, está expuesta en la sección 5.

De nuevo, un IPM es un modelo en el que el tiempo se considera una variable que toma valores discretos $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Cada individuo de la población ha de poder ser descrito de acuerdo a unas ciertas características x , que varían en un cierto conjunto

$$C = \bigsqcup_{i=1}^N C_i = \text{espacio de características},$$

donde \bigsqcup denota la unión disjunta de conjuntos y cada C_i es un subconjunto compacto de dimensión n_i en \mathbb{R}^{n_i} (típicamente, un producto de intervalos cerrados). Permitimos $n_i = 0$ para algún i , para que nuestro modelo pueda dar cabida a características discretas.

De esta manera, en cada instante t tenemos una *función de distribución de la población* $v(x, t)$, que toma valores en C , de manera que

$$\|v(x, t)\|_1 := \int_C v(x, t) dx = \text{tamaño total de la población a tiempo } t < \infty.$$

En otras palabras, para cada t , $v(x, t)$ es una función en el *espacio de Banach* $L^1(C)$.

La población a tiempo $t + 1$ esperada quedará determinada por la función $v(x, t)$ de acuerdo a una ecuación de la forma

$$v(x, t + 1) = \int_C A(x, y)v(y, t) dy, \quad (1)$$

donde $A(x, y)$ representa, para cada par $x, y \in C$, la contribución del número de individuos de características y a tiempo t al número de individuos de características x a tiempo $t + 1$.

La función $A(\cdot, \cdot)$ recibe el nombre de *núcleo del modelo*. Su determinación es uno de los aspectos más importantes de este modelo, pero depende del tipo de población que estemos estudiando. En general, para cada tipo de población los biólogos disponen de ciertas familias de funciones con las que modelizar algunas propiedades de la misma. Por ejemplo, si la variable $x \in C$ representa el tamaño de una planta, es habitual que la densidad de probabilidad de que un individuo de tamaño x a tiempo t alcance un tamaño y en el momento $t + 1$ pueda modelizarse mediante una distribución normal en la variable y , que quedará totalmente determinada por su media y su desviación típica. De esta manera, nuestros trabajos experimentales han de estar enfocados a determinar, mediante los correspondientes estudios estadísticos, los valores de los parámetros de los que dependen las funciones vitales a partir de las que deduciremos el núcleo A . Señalamos también que el número de parámetros que deberemos determinar estadísticamente no es necesariamente superior al número de coeficientes que habríamos de determinar si usásemos un modelo matricial.

En otras palabras, el conocimiento teórico sobre la población de que disponemos se utiliza, no para producir una estratificación razonable sobre la que construir un modelo matricial, sino para determinar una familia de funciones —que dependerá de un cierto número de parámetros— dentro de la que se halla el núcleo del IPM que usaremos para modelizar la población.

Una vez calculado el núcleo del modelo $A(\cdot, \cdot)$, una generalización del teorema de Perron-Frobenius a operadores en espacios de Banach nos asegurará, de manera análoga al caso matricial, la existencia y *unicidad* de los siguientes límites (bajo ciertas condiciones sobre A):

$$v(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v(x, t)}{\|v(x, t)\|_1}, \quad \lambda := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|v(x, t + 1)\|_1}{\|v(x, t)\|_1},$$

donde $v(x)$ se denomina *distribución estable de la población* y $r = \log(\lambda)$ será, de nuevo, su crecimiento intrínseco.

3.1. ASPECTOS NUMÉRICOS DE UN IPM

Dados $A(x, y)$ y $v(y, t)$, el cálculo directo de $v(x, t + 1)$ a través de la ecuación (1) resulta generalmente inviable, de manera que hemos de recurrir a métodos numéricos de integración.

En otras palabras, consideramos una sucesión de particiones P_k del conjunto C y aproximamos las funciones $v(y, t)$ y $A(x, y)$ por sucesiones de funciones simples,

$v_k(y, t)$ y $A_k(x, y)$, con respecto a estas particiones. El resultado de integrar cada producto de $A_k(x, y)$ y $v_k(y, t)$ respecto de y es una sucesión de funciones simples que converge⁵ a $v(x, t + 1)$.

Nótese que la función simple $v_k(y, t)$ queda determinada por el vector $v_k(t)$ cuyas componentes son los valores que dicha función toma en cada subconjunto de la partición. De la misma manera podemos representar $A_k(x, y)$ por una matriz A_k , cuyas componentes son los valores de $A_k(x, y)$ en cada subconjunto de la partición correspondiente de $C \times C$, multiplicados por el tamaño del subconjunto de C correspondiente (típicamente, en cada uno de los subconjuntos C_i tomaremos particiones en subconjuntos de la misma medida). De esta manera, la integración es equivalente a considerar el producto $A_k v_k(t)$, y podemos considerar que el IPM (1) ha sido, en este sentido, aproximado por un modelo matricial

$$v_k(t + 1) = A_k v_k(t). \quad (2)$$

Tomando k suficientemente grande obtenemos de este modo un modelo matricial que suele ser más preciso que los modelos matriciales obtenidos de la manera tradicional. Además, estos modelos pueden ser utilizados para aproximar el crecimiento intrínseco y la distribución estable del IPM inicial. En efecto, para cada una de las particiones P_k , el modelo matricial correspondiente (2) posee un autovalor máximo λ_k y un vector de población estable v_k , que pueden ser aproximados convenientemente mediante el método de las potencias. De acuerdo con la teoría general, cuando k tiende a infinito, λ_k converge a λ , y las funciones simples $v_k(x)$ asociadas a los vectores v_k y las particiones P_k convergen a la función $v(x)$.

Finalmente, señalamos que, de la misma manera que $v(x)$, también podemos calcular el autovector $w(x)$ asociado a λ de la función traspuesta de $A(x, y)$, es decir, $A^T(x, y) := A(y, x)$. Análogamente al caso de los modelos matriciales, a través de la función $w(x)$ podemos calcular la *función de sensibilidades* del IPM:

$$\sigma(x, y) := \frac{1}{\lambda} \frac{w(x)v(y)}{\int_C w(z)v(z) dz},$$

que nos proporciona la tasa de variación del crecimiento intrínseco $r = \log(\lambda)$ cuando realizamos un pequeña perturbación de la función $A(x, y)$ en un entorno de (x, y) .

4. SOBRE LAS APLICACIONES A REDES SOCIALES Y TECNOLÓGICAS COMPLEJAS

I think the next century will be the century of complexity.

S. W. Hawking, 2000

La teoría de redes consiste en el estudio del comportamiento colectivo de un conjunto de elementos entre los que existe algún tipo de interacción. Es por ello que la

⁵Siempre y cuando el núcleo $A(x, y)$ sea una función continua.

teoría de redes se asienta sobre la base de la observación de diferentes elementos que interactúan entre sí, recogiendo dicha interacción en una base de datos que permite crear modelos predictivos que tratan de reproducir el comportamiento real de dichos elementos, y que tienen aplicación toda vez que el comportamiento colectivo es el resultado de la interacción entre los diferentes elementos que componen la red.

Según hemos visto, este tipo de modelos tienen múltiples aplicaciones tanto en el ámbito de la tecnología como en el de las ciencias sociales y en la biología [4, 34, 50, 63], siendo estas últimas de particular importancia, no solo en el contexto de la dinámica poblacional, sino también, por poner otros ejemplos, en el estudio de las redes metabólicas, neuronales o de proteínas, tratando de entender no solo qué procesos se ven afectados en un sistema (y en qué medida) cuando alguno de los mecanismos individuales que están interaccionando dentro del mismo falla [18], sino de qué manera el sistema reacciona para contrarrestar, compensar y restaurar su funcionamiento.

La teoría de Perron-Frobenius es uno de los pilares sobre los que se fundamentan las medidas de *centralidad espectral* sobre redes que, por ejemplo, permiten cuantificar la influencia de individuos en grupos sociales, establecer *rankings* y ordenaciones de páginas web (algoritmo PageRank), determinar qué interacciones en un sistema biológico tienen la mayor importancia con vistas a un correcto funcionamiento del mismo e, incluso, ordenar y determinar el impacto de artículos y líneas de investigación.

Es preciso señalar que el uso de métodos espectrales en el contexto de la teoría de grafos y las redes complejas tiene una larga tradición. En el ámbito de la sociología, por ejemplo, fueron introducidos para medir la influencia de cada uno de los participantes en un grupo social, con bastante antelación a que esta herramienta se revelase como un mecanismo tremendamente útil en otro tipo de aplicaciones de no menor importancia tales como, por ejemplo, el desarrollo de motores de búsqueda en la web (Google) [10]. Como ya hemos comentado, Bonacich, en su trabajo [5], ya sugería que el autovector asociado al mayor de los autovalores de la matriz de adyacencia podría ser una buena medida de centralidad para el cálculo de la importancia de un nodo en una red, al tener en cuenta no solo la medida de centralidad dada por el grado de cada nodo (que implícitamente considera de igual valor todos los contactos), sino la propia centralidad de los nodos vecinos a uno dado (aquellos enlazados directamente con él) para el cálculo de su propia centralidad. En otras palabras, lo anterior se puede resumir en los aforismos «*no es más influyente aquel que más amigos tiene, sino aquel que tiene amigos más influyentes*» o también «*tener amigos populares es lo que permite ganar más popularidad*».

Este tipo de centralidad (centralidad espectral) puede interpretarse también como una suma ponderada en la que se tienen en cuenta no solo las conexiones directas de un nodo, sino también las conexiones de cualquier longitud [27], incorporando en su cálculo toda la estructura topológica y la forma de la red. A partir de aquí es posible considerar otras extensiones como la beta-centralidad [6], que permite evaluar el grado de importancia de un nodo en redes con pesos no positivos, y otras generalizaciones que permiten calcular incluso la centralidad de nodos en redes con pesos positivos y negativos en las aristas [7, 8]. Otras extensiones [11, 27] ofrecen

nuevas perspectivas y aplicaciones, permitiendo establecer un marco general para trabajar con este tipo de medidas de centralidad espectral [59] e, incluso, relacionar la centralidad de una red con la de su red de línea [16, 17], lo que resulta de aplicación a los métodos empleados en urbanismo y en la planificación del desarrollo de ciudades [19].

En este sentido, es posible demostrar [16, 17] que existe una fuerte correlación tanto entre los valores de la eficiencia de una red G y los valores de su red de línea G^* , como entre los valores de sus centralidades espectrales respectivas, y que ambas centralidades están en estrecha relación con la centralidad espectral de la red bipartita $B(G)$ asociada a la red G . A este respecto es importante recordar que la red bipartita $B(G)$ asociada a G , $B(G) = (X \cup E, E(B(G)))$ está determinada completamente por su matriz de adyacencia

$$A(B(G)) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I(G) \\ \hline I(G)^t & 0 \end{array} \right),$$

donde $I(G)$ es la matriz de incidencia de G , es decir, la matriz $n \times m$ tal que

$$I(G)_{i,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } i \text{ incide en la arista } \ell, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que

$$A(B(G))^2 = \left(\begin{array}{c|c} A(G) + \text{gr} & 0 \\ \hline 0 & A(G^*) + 2I_m \end{array} \right),$$

donde $A(G) + \text{gr} = I(G)I(G)^t$ denota la matriz obtenida añadiendo a la matriz de adyacencia de G , $A(G)$, la matriz diagonal (b_{ii}) en la que (b_{ii}) es el grado del vértice v_i , y G^* denota la red de línea asociada a G . Recuérdese también que el grafo (o red) de línea asociado al grafo $G = (V, E)$ es la red $G^* = (E, L)$ cuyo conjunto de nodos es el conjunto inicial de aristas del grafo G de tal manera que dos de tales nodos ℓ y ℓ' están conectados por la arista $\{\ell, \ell'\}$ si sobre el grafo inicial G las aristas ℓ y ℓ' comparten algún nodo. A partir de lo anterior es inmediato obtener la igualdad $I(G)^t I(G) = A(G^*) + 2I_m$, en la que I_m es la matriz identidad de orden m .

Si conocemos la centralidad de Bonacich de G y de G^* , podemos obtener la centralidad de $B(G)$ y, recíprocamente, a partir de la centralidad de $B(G)$ podemos obtener las centralidades de G y de G^* . Si, adicionalmente, el grafo (la red) es regular, entonces cada una de las tres centralidades puede ser recuperada a partir de cualquiera de las otras dos [16, 17].

En cualquier caso, uno de los inconvenientes de las centralidades espectrales con vistas a sus aplicaciones prácticas radica en que su cálculo involucra algoritmos de complejidad computacional alta (tanto en tiempo como en espacio), ya que para hallarlas es preciso calcular autovalores y autovectores de matrices de orden n para valores de n grandes, por lo que resulta computacionalmente muy costoso obtener el resultado. Por consiguiente, el problema de calcular aproximaciones de baja complejidad ha ido cobrando importancia en la literatura para evitar las limitaciones

computacionales de este tipo de medidas y, por ejemplo, se ha probado numéricamente que la centralidad introducida en [5] y en [7] está fuertemente correlada con el vector de grados normalizado [42, 59].

Hay una vasta literatura sobre los aspectos algebraicos de la teoría espectral de grafos y redes, y en particular de las aplicaciones a esta teoría del teorema de Perron-Frobenius, pues el espectro de una red (conjunto de autovalores asociados a su matriz de adyacencia) proporciona información crucial sobre el comportamiento de muchos procesos dinámicos que pueden ocurrir sobre dicha red [13, 20], o incluso sobre la controlabilidad de la misma [52]. Por ejemplo, resulta particularmente útil la siguiente relación entre el radio espectral de G , $\rho(G)$ (el máximo de los valores absolutos de los autovalores de la matriz de adyacencia de G), y el mayor de los grados de los nodos de G , $\Delta(G)$ [20]:

$$\sqrt{\Delta(G)} \leq \rho(G) \leq \Delta(G).$$

También es interesante destacar, dentro de las aplicaciones, el papel fundamental que el radio espectral juega en la modelización de la propagación de virus en redes de ordenadores: cuanto menor es el radio espectral, mayor es la robustez de la red en contra de la propagación de virus. De hecho, el umbral epidémico en la propagación de virus es directamente proporcional a $\frac{1}{\rho(G)}$ [65].

Además de las aplicaciones que hemos presentado y de otros interesantes usos en el ámbito del análisis de redes complejas, a día de hoy la teoría de Perron-Frobenius se muestra como una útil herramienta que ayudará a resolver nuevos problemas que se están planteando en la actualidad. Uno de los ejemplos más destacables lo encontramos en el estudio de las llamadas *redes multiplex*. De forma muy resumida, una **red multiplex** es una red compleja en la que las aristas son de diferente naturaleza, de forma que las interacciones entre los nodos deben ser consideradas de forma distinta. Por ejemplo, si consideramos una red social como **Facebook**, las interacciones entre dos personas pueden ser de muy diferente tipo (relaciones familiares, sentimentales, de amistad...), por lo que sería deseable disponer de una herramienta matemática para estudiar el comportamiento de la red teniendo en cuenta estas diferencias en la tipología de las conexiones. Este es uno de los tópicos centrales en los que se está desarrollando hoy en día el análisis de redes complejas y la extensión de la teoría de Perron-Frobenius a buen seguro que jugará un papel central. Notemos que si tenemos una red multiplex con interacciones de diferente naturaleza, en lugar de tener una única matriz de adyacencia tenemos tantas matrices como tipos de aristas, debiendo conjugar apropiadamente la información de cada una de las matrices para poder analizar la red multiplex en este conjunto. De esta forma, si se pretende poder usar la teoría de Perron-Frobenius en el ámbito de las redes multiplex, se deberá disponer de una teoría de Perron-Frobenius para tensores *no negativos* en lugar de para matrices. Existen diferentes extensiones de la teoría a tensores no negativos (véase, por ejemplo, [12, 66]), si bien en este momento todavía no se dispone de un modelo matemático consolidado de su aplicación al análisis de redes multiplex. Como primer resultado en esta línea, se ha extendido recientemente el concepto de centralidad Bonacich al contexto de redes multiplex [61], siendo

necesario el uso de una teoría de Perron-Frobenius para el producto de Khatri-Rao de matrices no negativas.

5. TEORÍA DE PERRON-FROBENIUS PARA OPERADORES EN ESPACIOS DE BANACH

Existen numerosas extensiones de la teoría de Perron en muy diferentes direcciones. Además del caso, ya comentado, de los tensores no negativos (véase, por ejemplo, [12, 66]), hay extensiones de esta teoría a conjuntos tan diversos como las matrices complejas [53] o los sistemas dinámicos homogéneos [1]. De entre todas ellas, destacamos las extensiones realizadas a operadores en espacios y retículos de Banach, por sus potenciales aplicaciones a la biología, como ya hemos visto al introducir los IPMs en la sección 3.

La extensión de la teoría de Perron-Frobenius a operadores entre espacios de Banach resulta natural, del mismo modo que resulta natural pasar de espacios vectoriales de dimensión finita a espacios de Banach (de dimensión infinita), de forma que las matrices (interpretadas como aplicaciones lineales) se transforman en operadores lineales. En este sentido, a mediados del siglo XX, M. G. Kreĭn y M. A. Rutman probaron el siguiente resultado, que corresponde a una extensión del teorema de Perron para matrices positivas:

TEOREMA 16 (Kreĭn-Rutman [40]). *Sea X un espacio de Banach y $K \subset X$ un cono convexo tal que $K - K = \{u - v; u, v \in K\}$ es denso en X . Si $T : X \rightarrow X$ es un operador compacto no nulo tal que $T(K) \subseteq K$ y el radio espectral de T (que denotamos por $\rho(T)$) es estrictamente positivo, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (i) $\rho(T)$ es un autovalor del operador T .
- (ii) Existe $u \in K \setminus \{0\}$ tal que $Tu = \rho(T)u$.

Notemos que la condición sobre la *positividad* de la matriz que aparece en el teorema de Perron original se ha sustituido por el hecho de que $T(K) \subseteq K$, ya que el papel del conjunto de vectores positivos de \mathbb{R}^n ha sido reemplazado por el cono K . De hecho, si K es un cono en un espacio de Banach X , es sencillo comprobar que este induce un orden parcial en X de forma que, si tenemos $u, v \in X$, se dice que $u \leq v$ si $v - u \in K$.

Otro importante hecho a destacar es que en el teorema de Kreĭn-Rutman se ha perdido la condición de *unicidad* del autovector, de forma que no se puede garantizar que el subespacio fundamental asociado al autovalor $\rho(T)$ tenga dimensión 1. Como consecuencia de esto no podemos esperar que, en general, exista un método tipo *método de las potencias* para calcular el autovector correspondiente. A pesar de esta limitación, el teorema de Kreĭn-Rutman es una herramienta muy importante en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, en teoría de bifurcación, y en el análisis de la estabilidad de soluciones de ecuaciones elípticas.

Para encontrar una extensión del teorema de Perron-Frobenius (para matrices irreducibles) en el contexto de los operadores en espacios de Banach, en lugar de

considerar un espacio de Banach X junto con un cono convexo K (que induce un orden parcial en X), debemos ir un paso más allá y considerar operadores entre retículos de Banach.

Recordemos que si X es un retículo de Banach cuyo orden denotamos por \leq , entonces un *ideal* de X es cualquier subespacio vectorial S de X que cumple que, si $x \in S$ y además $|y| \leq |x|$, entonces $y \in S$ (donde $|x|$ es la menor cota superior común de x y $-x$ de acuerdo con el orden del retículo). Un operador $T : X \rightarrow X$ es *irreducible por ideales* si los únicos ideales cerrados J del retículo que son T -invariantes (es decir, que cumplen que $T(J) \subseteq J$) son 0 y el propio X . Esta propiedad es la que viene a sustituir la *irreducibilidad* en el teorema de Perron-Frobenius, puesto que puede probarse (véase [23]) que si $T : X \rightarrow X$ es un operador compacto y positivo que es irreducible por ideales, entonces $\rho(T) > 0$. Por tanto se deduce de forma fácil el siguiente teorema, que puede verse como una extensión del teorema de Perron-Frobenius al contexto de operadores compactos entre retículos:

TEOREMA 17. *Sea X un retículo de Banach de dimensión mayor o igual que 2 y $T : X \rightarrow X$ un operador compacto no nulo y positivo (es decir, si $0 < x \in X$, entonces $0 \leq Tx$). Si T es irreducible por ideales entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (i) $\rho(T)$ es un autovalor del operador T .
- (ii) Existe $0 \leq u \in X$ tal que $Tu = \rho(T)u$.

De nuevo, como ocurría en el teorema de Kreĭn-Rutman, se ha perdido la condición de *unicidad* del autovector, de forma que no se puede garantizar que el subespacio fundamental asociado al autovalor $\rho(T)$ tenga dimensión 1, si bien en algunos casos particulares, como veremos, se puede arreglar esta situación.

Si queremos emplear este tipo de resultados para garantizar la existencia y unicidad de la *distribución estable* de la población de un IPM de los introducidos en la sección 3, en primer lugar debemos escribir el problema en el lenguaje de operadores entre espacios de Banach. Si seguimos la notación introducida en la sección 3, la población esperada para el tiempo $t+1$ queda determinada por la función $v(\cdot, t) \in L^1(C)$, que de acuerdo con la ecuación (1) será de la forma $v(\cdot, t+1) = Tv(\cdot, t)$, donde $T : L^1(C) \rightarrow L^1(T)$ es el operador dado para cada $v(\cdot, t) \in L^1(C)$ por

$$Tv(\cdot, t) = \int_C A(\cdot, y)v(y, t) dy \in L^1(C). \quad (3)$$

Si $A(\cdot, \cdot)$ es una función continua en $C \times C$ y C es compacto, se puede demostrar (véase, por ejemplo [24, 39]) que:

- (i) $T : L^2(C) \rightarrow L^2(T)$ es un operador compacto.
- (ii) Si Λ es el cono de funciones no negativas de $L^2(C)$, entonces Λ es T -invariante, es decir, $T(\Lambda) \subseteq \Lambda$.

En este caso particular, y a la vista de la forma particular que tiene el operador T , podemos obtener más información que la que nos da el teorema de Kreĭn-Rutman si

existe $m \in \mathbb{N}$ y $K > 0$ tal que para todo $x, y \in C$ se cumple que $A^{(m)}(x, y) \geq K > 0$, donde $A^{(m)}$ viene dada, para cada $m \in \mathbb{N}$, por

$$A^{(m)}(x, y) = \begin{cases} A(x, y), & \text{si } m = 1, \\ \int_C A(x, z)A^{(m-1)}(z, y) dz, & \text{si } m \geq 2. \end{cases}$$

En este caso se cumple el siguiente resultado (véase el apéndice C de [26]):

TEOREMA 18 (Perron-Frobenius para IPMs). *Si $T : L^1(C) \rightarrow L^1(T)$ es el operador dado por la ecuación (3), donde C es compacto, $A(\cdot, \cdot)$ es continua en $C \times C$ y existe $m \in \mathbb{N}$ y $K > 0$ tal que para todo $x, y \in C$ se cumple que $A^{(m)}(x, y) \geq K > 0$, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- (i) $\rho(T)$ es un autovalor del operador T .
- (ii) Existe una función $0 \neq v \in L^2(C)$ en el cono de funciones no negativas de $L^2(C)$ que es autovector de T asociado a $\rho(T)$.
- (iii) $\rho(T)$ es un autovector simple, es decir su subespacio fundamental tiene dimensión 1.

Nótese que la condición de *ser primitiva* exigida en la primera extensión del teorema de Perron para matrices no negativas ha sido sustituida, de forma natural, por la condición de que $A^{(m)}(x, y) \geq K > 0$.

Es más, se puede comprobar (véase [26]) que, usando el resultado anterior, para cualquier distribución de población inicial $v(\cdot, 0) \in L^1(C)$, siempre que se cumplan las hipótesis del teorema, se tiene que

$$v(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v(x, t)}{\|v(x, t)\|_1}, \quad \rho(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|v(x, t+1)\|_1}{\|v(x, t)\|_1},$$

donde $v(\cdot) \in L^2(T)$ es el único autovector de T asociado a $\rho(T)$ que pertenece al cono de funciones no negativas de $L^2(C)$ y tal que $\|v\|_1 = 1$.

APÉNDICE: ORIGEN DE LA TEORÍA DE PERRON

Intuition makes much of it; I mean by this the faculty of seeing a connection between things that in appearance are completely different; it does not fail to lead us astray quite often.

André Weil

Al igual que en el caso de otros descubrimientos científicos, también en este el descubridor de la herramienta conocida como «teorema de Perron» [56] no podía sospechar las numerosas aplicaciones que tendría su resultado. Perron estableció el teorema considerado como origen de esta teoría en 1907, para aquellas matrices cuyos coeficientes son todos positivos. Este resultado fue posteriormente extendido por Frobenius en sendos trabajos fechados en 1908–1909 y 1912 [29, 30] a las matrices con coeficientes no negativos siempre que se satisficieran ciertas hipótesis adicionales. Las múltiples aplicaciones de estos resultados aluden a las diferentes situaciones

en las que las interacciones entre los diferentes elementos de un sistema vienen parametrizadas por números positivos o, al menos, por números no negativos. Es, por ejemplo, el caso de la tasa de supervivencia de una especie entre dos estratos de edad, el del tiempo que se tarda en llevar una mercancía entre dos almacenes, o el de la cantidad de energía necesaria para producir una unidad de un producto de una determinada industria.

Oskar Perron (1880–1975) obtuvo su doctorado en la Universidad de Múnich bajo la dirección de Ferdinand Lindemann sobre un problema relacionado con la rotación de un cuerpo rígido. Su interés por los trabajos de Alfred Pringsheim (1890–1941) le llevó a estudiar el problema de determinar criterios de convergencia para ciertos tipos de fracciones continuas, lo que le condujo a su vez a estudiar las propiedades de las matrices no negativas y a obtener lo que posteriormente sería conocido como *teorema de Perron*. El propio Perron fue consciente de que sus resultados podían ser fácilmente extendidos a otros contextos [32], aunque la historia del teorema de Perron-Frobenius constituye uno de los ejemplos más significativos de la forma en la que las matemáticas, desarrolladas por motivos puramente teóricos (es decir, por una motivación *ajena a las aplicaciones*), proporcionan una sólida fundamentación teórica a aplicaciones que no pertenecen al reino de la *matemática pura*. Perron, gran aficionado al alpinismo, fue un hombre de una vitalidad extraordinaria que continuó con su labor docente en la Universidad de Múnich hasta los ochenta años (aunque su jubilación *formal* tuvo lugar a los setenta y uno), siendo destacable que dieciocho de sus doscientos dieciocho artículos los publicó después de cumplir ochenta y cuatro años.

Por otra parte, Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917) a quien se recuerda por ser, junto con Cayley y Sylvester, uno de los fundadores del núcleo principal de la teoría de matrices, fue uno de los primeros que estudiaron esta teoría como una disciplina en sí misma. Al parecer, fue al leer en un volumen de 1907 de la revista *Mathematische Annalen* el artículo de Perron «*Hacia la teoría de matrices*» [56] cuando Frobenius se interesó por el trabajo de este último. No es sorprendente que Frobenius, un experto en la teoría de matrices, respondiese al reto planteado por Perron de encontrar una demostración de su teorema que evitase utilizar su *lema del límite*. Frobenius encontró una demostración del teorema de Perron que evitaba el uso del *lema del límite* mencionado, demostración que publicó en 1908 [29]. Tras publicar una continuación de este trabajo sobre matrices positivas en 1909, se propuso resolver (tal y como se cuenta en [32]) el siguiente problema: «*dada una matriz no negativa A, determinar los autovalores de A para los que existen autovectores no negativos*». Fue este problema el que le llevó a obtener su célebre teorema sobre matrices no negativas publicado en 1912 [30].

Desde el establecimiento del teorema de Perron hasta la reciente introducción del concepto de matriz con la propiedad de Perron-Frobenius [25, 35, 64], diferentes extensiones y estrategias de demostración, tanto analíticas como algebraicas y topológicas, han ido apareciendo en la literatura. Así, por ejemplo, Alexandroff y Hopf [2] publicaron en 1935 una nueva demostración topológica del teorema clásico de Perron empleando el teorema del punto fijo de Brower, herramienta que fue posteriormente utilizada para obtener nuevas demostraciones de dicho teorema [9, 47, 58]. En [46]

se puede encontrar una narración sobre diversas demostraciones del teorema de Perron y sus aplicaciones en diferentes ámbitos de la ciencia, y en textos como [41] y [48] se pueden encontrar demostraciones pormenorizadas y adaptadas a un curso tradicional de álgebra lineal.

REFERENCIAS

- [1] D. AEYELS Y P. DE LEENHEER, Extension of the Perron-Frobenius Theorem to Homogeneous Systems, *SIAM J. Control Optim.* **41** (2) (2002), 563–582.
- [2] P. ALEXANDROFF Y H. HOPF, *Topologie*, Springer, Berlin (1935). Reimpresión: Chelsea, New York (1965). Páginas 480–481.
- [3] A. BERMAN Y R. J. PLEMMONS, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, SIAM, Philadelphia, 1994.
- [4] S. BOCCALETTI, V. LATORA, Y. MORENO, M. CHAVEZ Y D.-U. HWANG, Complex networks: structure and dynamics, *Phys. Rep.* **424** (2006), 175–308.
- [5] P. BONACICH, Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification, *J. Math. Sociol.* **2** (1) (1972), 113–120.
- [6] P. BONACICH, Power and centrality: a family of measures, *Amer. J. Sociol.* **92** (1987), 1170–1172.
- [7] P. BONACICH Y P. LLOYD, Eigenvector-like measures of centrality for asymmetric relations, *Social Networks* **23** (2001), 191–201.
- [8] P. BONACICH Y P. LLOYD, Calculating statuts with negative relations, *Social Networks* **26** (2004), 331–338.
- [9] A. BOROBIA Y U. R. TRÍAS, A geometric proof of the Perron-Frobenius theorem, *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid* **5** (1992), 57–63.
- [10] S. BRIN Y L. PAGE, The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine, en *Seventh International World-Wide Web Conference (WWW 1998)* (1998), 107–117. Accesible en <http://ilpubs.stanford.edu:8090/361/>
- [11] U. BRANDES Y S. CORNELSEN, Visual ranking of link structures, *J. Graph Algorithms Appl.* **7** (2003), 181–201.
- [12] K. C. CHANG, K. PEARSON Y T. ZHANG, Perron-Frobenius theorem for non-negative tensors, *Commun. Math. Sci.* **6** (2) (2008), 507–520.
- [13] F. R. K. CHUNG, *Spectral graph theory*, Conference Board of the Mathematical Sciences 92, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [14] R. COHEN Y S. HAVLIN, *Complex Networks: Structure, Robustness and Function*, Cambridge University Press, 2010.
- [15] R. COHEN, K. EREZ, D. BEN-AVRAHAM, Y S. HAVLIN, Resilience of the Internet to Random Breakdowns, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000), 4626–4628.
- [16] R. CRIADO, J. FLORES, A. GARCÍA DEL AMO Y M. ROMANCE, Analytical relationships between metric and centrality measures of a network and its dual, *J. Comput. Appl. Math.* **235** (2011), 1775–1780.

- [17] R. CRIADO, J. FLORES, A. J. GARCÍA DEL AMO Y M. ROMANCE, Structural properties of the line-graphs associated to directed networks *Netw. Heterog. Media* **7** (3) (2012), 373–384.
- [18] R. CRIADO Y M. ROMANCE, Structural vulnerability and robustness in complex networks: different approaches and relationships between them, *Handbook of optimization in complex networks*, 3–36, Springer Optim. Appl., **58**, Springer, New York, 2012.
- [19] P. CRUCITTI, V. LATORA Y S. PORTA, Centrality in networks of urban streets, *Chaos* **16** (1) (2006), 015113.
- [20] D. M. CVETKOVIĆ, M. DOOB Y H. SACHS, *Spectra of graphs: theory and applications*, Johann Ambrosius Barth, Heidelberg, 1995.
- [21] M. H. DEGROOT, Reaching a consensus, *J. Amer. Statist. Assoc.* **69** (345) (1974), 118–121.
- [22] P. M. DEMARZO, D. VAYANOS, Y J. ZWIEBEL, Persuasion Bias, Social Influence, and Unidimensional Opinions, *Quart. J. Econ.* **118** (2003), 909–968.
- [23] B. DE PAGTER, Irreducible compact operators, *Math. Z* **192** (1) (1986), 149–153.
- [24] N. DUNFORD Y J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators. Part I. General Theory*, Wiley, New York, 1988.
- [25] A. ELHASHASH Y D. B. SZYLD, On general matrices having the Perron-Frobenius property, *Electron. J. Linear Algebra* **17** (2008), 389–413.
- [26] S. P. ELLNER Y M. REES, Integral projection models for species with complex demography, *Amer. Naturalist* **167** (3) (2006), 410–428.
- [27] E. ESTRADA Y J. A. RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, Subgraph centrality in complex networks, *Phys. Rev. E* (3) **71** (5) (2005), 056103, 9 páginas.
- [28] L. C. FREEMAN, A Set of Measures of Centrality Based on Betweenness, *Sociometry* **40** (1977), 35–41.
- [29] G. FROBENIUS, Über Matrizen aus positiven Elementen. I, II, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* **1908** (1908), 471–476 y **1909** (1909), 514–518.
- [30] G. FROBENIUS, Über Matrizen aus nicht negativen Elementen, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* **1912** (1912), 456–477.
- [31] M. GIRVAN Y M. E. J. NEWMAN, Community structure in social and biological networks, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **99** (12) (2002), 7821–7826.
- [32] T. HAWKINS, Continued fractions and the origins of the Perron-Frobenius theorem, *Arch. Hist. Exact. Sci.* **62** (2008), 655–717.
- [33] F. C. HOPPENSTEADT, *Mathematical methods of population biology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [34] H. JEONG, S. P. MASON, A.-L. BARABÁSI Y Z. N. OLTVAI, Lethality and centrality in protein networks, *Nature* **411** (2001), 41–42.
- [35] C. R. JOHNSON Y P. TARAZAGA, On matrices with Perron-Frobenius properties and some negative entries, *Positivity* **8** (2004), 327–338.

- [36] L. KATZ, A new status index derived from sociometric analysis, *Psychometrika* **18** (1953), 39–43.
- [37] J. P. KEENER, The Perron-Frobenius theorem and the ranking of football teams, *SIAM Rev.* **35** (1) (1993), 80–93.
- [38] A. P. KIRMAN, Communication in markets. A suggested approach, *Econom. Lett.* **12** (2) (1983), 101–108.
- [39] M. A. KRASNOSEL'SKII, J. A. LIFSHITS Y A. V. SOBOLEV, *Positive linear systems: a method of positive operators*, Heldermann, Berlin, 1989.
- [40] M. G. KREĬN Y M. A. RUTMAN, Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space, *Amer. Math. Soc. Translation* **1950** (26) (1950), 128 páginas.
- [41] K. KUTLER, *Linear algebra, theory and applications*, disponible en <http://www.math.byu.edu/~klkuttle/linearalgebra.pdf>.
- [42] C. LEE, Correlation among centrality measures in complex networks, *preprint*, 1–18, 2009.
- [43] W. LEONTIEF, *Input-output economics*, 2nd ed., New York, Oxford University Press, 1986.
- [44] P. H. LESLIE, On the use of matrices in certain population mathematics, *Biometrika* **33** (1945), 183–212.
- [45] P. H. LESLIE, Some further notes on the use of matrices in population mathematics, *Biometrika* **35** (1948), 213–245.
- [46] C. R. MACCLUER, The many proofs and applications of Perron's theorem, *SIAM Rev.* **42** (3) (2000), 487–498.
- [47] G. MALTESE, A simple proof of the fundamental theorem of finite Markov chains, *Amer. Math. Monthly* **93** (8) (1986), 629–630.
- [48] C. MEYER, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [49] M. E. J. NEWMAN, Spread of epidemic disease on networks, *Phys. Rev. E* (3) **66** (1) (2002), 016128, 11 páginas.
- [50] M. E. J. NEWMAN, Finding community structure in networks using the eigenvectors of matrices, *Phys. Rev. E* (3) **74** (3) (2006), 036104, 19 páginas.
- [51] M. E. J. NEWMAN, A.-L. BARABÁSI Y D. J. WATTS (editores), *The structure and dynamics of networks*, Princeton University Press, Princeton, 2006.
- [52] V. NICOSIA, R. CRIADO, M. ROMANCE, G. RUSSO Y V. LATORA, Controlling centrality in complex networks, *Sci. Rep. (Nature)* **2** (2012), 218.
- [53] D. NOUTSOS Y R. S. VARGA, On the Perron-Frobenius theory for complex matrices, *Linear Algebra Appl.* **437** (2012), 1071–1088.
- [54] L. PAGE, S. BRIN, R. MOTWANI Y T. WINOGRAD, The PageRank citation ranking: bringing order to the web, *Technical Report*, Stanford InfoLab, 1999. Accesible en <http://ilpubs.stanford.edu:8090/422/>
- [55] R. PASTOR-SATORRAS Y A. VESPIGNANI, Immunization of complex networks, *Phys. Rev. E* (3) **65** (3) (2002), 036104, 8 páginas.

- [56] O. PERRON, Zur Theorie der Matrices, *Mathematische Annalen* **64** (1907), 248–263.
- [57] S. U. PILLAI, T. SUEL Y S. CHA, The Perron-Frobenius theorem: some of its applications, *IEEE Signal Process. Mag.* **22** (2) (2005), 62–75.
- [58] N. J. PULLMAN, A geometric approach to the theory of nonnegative matrices, *Linear Algebra Appl.* **4** (1971), 297–312.
- [59] M. ROMANCE, Local estimates for eigenvector-like centralities of complex networks, *J. Comput. Appl. Math.* **235** (2011), 1868–1874.
- [60] J. R. SEELY, The Net Reciprocal Influence: A Problem in Treating Sociometric Data, *Canad. J. Psych.* **3** (1949), 234–240.
- [61] L. SOLÁ, M. ROMANCE, R. CRIADO, J. FLORES, A. GARCÍA DEL AMO Y S. BOCCALETTI, Eigenvector centrality of nodes in multiplex networks, *Chaos* **23** (3) (2013), 033131.
- [62] R. V. SOLÉ Y J. M. MONTOYA, Complexity and fragility in ecological networks, *Proc. R. Soc. Lond. B.* **268** (1480) (2001), 2039–2045.
- [63] S. H. STROGATZ, Exploring complex networks, *Nature* **410** (2001), 268–276.
- [64] P. TARAZAGA, M. RAYDAN Y A. HURMAN, Perron-Frobenius theorem for matrices with some negative entries, *Linear Algebra Appl.* **328** (2001), 57–68.
- [65] Y. WANG, D. CHAKRABARTI, C. WANG, Y C. FALOUTSOS, Epidemic spreading in real networks: an eigenvalue viewpoint, en *22nd International Symposium on Reliable Distributed Computing*, Florence, Italy, 2003 (IEEE).
- [66] Y. YANG Y Q. YANG, Further results for Perron-Frobenius theorem for non-negative tensors, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **31** (5) (2010), 2517–2530.

REGINO CRIADO HERRERO, DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA (UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS)
Y CENTRO DE TECNOLOGÍA BIOMÉDICA (UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID)
Correo electrónico: regino.criado@urjc.es

MIGUEL ROMANCE DEL RÍO, DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA (UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS)
Y CENTRO DE TECNOLOGÍA BIOMÉDICA (UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID)
Correo electrónico: miguel.romance@urjc.es

LUIS E. SOLÁ CONDE, KIAS, 85 HOEGIRO, DONGDAEMUN-GU 130–722 SEÚL (REP. DE COREA)
Correo electrónico: lesolac@gmail.com