

1. INTRODUCCION	2
1.1 Qué es la Investigación de Operaciones	3
1.2 I.O como apoyo a la toma de decisiones	5
1.3 Problemas tipo en Investigación Operativa	7
2. OPTIMIZACIÓN	9
2.1 Introducción	9
2.2 Convexidad	13
2.3 Optimos Locales y Globales	16
2.4 Condiciones de Kuhn–Tucker	18
2.5 Relajaciones	20
2.6 Dualidad	30
2.7 Programacion Lineal	34
3. GRAFOS	55
3.1 Introducción	55
3.2 Definiciones Basicas	57
3.3 Conexidad. Clausura Transitiva.	65
3.4 Multiplicación Latina - Camino Hamiltoniano	72
4. ESQUELETOS Y CAMINOS OPTIMALES	73
4.1 Medida de conexión de grafos	73
4.2 Esqueletos optimales	75
4.3 Caminos optimales – Camino mínimo	77
5. REDES – FLUJOS	79
5.1 Corte mínimo – flujo máximo	80
5.2 Bases Para la Construcción de un Flujo Máximo.....	84
5.3 Algoritmo de Flujo Máximo	87
6. INTRODUCCIÓN A LOS PROBLEMAS DE ORDENAMIENTOS	89
6.1 Conceptos Generales	90
6.2 Modelado de los problemas de ordenamientos	92
6.3 Métodos de Camino Crítico	94
7. PROCESOS ESTOCÁSTICOS.....	101
7.1 Introducción	101
7.2 Procesos Estocásticos	108
7.3 Cadenas de Markov	111
7.4 Cadenas de Markov de Tiempo Contínuo	125
7.5 Procesos de Poisson	129
7.6 Procesos de Nacimiento y Muerte.....	131
7.7 Sistemas de Colas.....	132
7.8 Propiedad PASTA	145
8. SIMULACIÓN.....	146
8.1 Introducción	146
8.2 Modelos	147
8.3 Simulación de sistemas	148
8.4 Etapas en el proceso de Simulación de Sistemas	149
8.5 Clasificación de tipos de simulación	151
8.6 Generación de números aleatorios	153
8.7 Generación de variables aleatorias	158
8.8 Método Montecarlo	161

1. INTRODUCCION

El objetivo del curso es que el estudiante aprenda a **reconocer los problemas tipo** de la Investigación de Operaciones de modo que sepa a qué técnico recurrir en cada caso, para un adecuado estudio y solución del mismo.

Como su nombre lo indica, la Investigación de Operaciones (IO), o Investigación Operativa, es la investigación de las operaciones a realizar para el logro óptimo de los objetivos de un sistema o la mejora del mismo. Esta disciplina brinda y utiliza la **metodología científica** en la búsqueda de soluciones óptimas, como **apoyo en los procesos de decisión**, en cuanto a lo que se refiere a la toma de decisiones óptimas y en sistemas que se originan en la vida real.

Antecedentes históricos

El término IO se utiliza por primera vez en el año 1939 durante la 2da Guerra Mundial, específicamente cuando surge la necesidad de investigar las operaciones tácticas y estratégicas de la defensa aérea, ante la incorporación de un nuevo radar, en oportunidad de los ataques alemanes a Gran Bretaña. El avance acelerado de la tecnología militar hace que los ejecutivos y administradores militares británicos deban recurrir a los científicos, en pos de apoyo y orientación en la planificación de su defensa. El éxito de un pequeño grupo de científicos que trabajaron en conjunto con el ejecutivo militar a cargo de las operaciones en la “línea”, derivó en una mayor demanda de sus servicios y la extensión del uso de la metodología a USA, Canadá y Francia entre otros.

Sin embargo, el origen de la Investigación Operativa puede considerarse como anterior a la Revolución Industrial, aunque fue durante este período que comienzan a originarse los **problemas tipo** que la Investigación Operativa trata de resolver. A partir de la Revolución Industrial y a través de los años se origina una segmentación funcional y geográfica de la administración, lo que da origen a la función ejecutiva o de integración de la administración para servir a los intereses del sistema como un todo.

La Investigación Operativa tarda en desarrollarse en el campo de la administración industrial. El uso de la metodología científica en la industria se incorpora al principiar los años 50, a partir de la 2da Revolución Industrial, propiciada por los avances de las Comunicaciones, y la Computación, que sientan las bases para la automatización, y por sobre todo por el florecimiento y bienestar económico de ese período.

Los primeros desarrollos de esta disciplina (IO) se refirieron a problemas de **ordenamiento de tareas, reparto de cargas de trabajo, planificación y asignación de recursos** en el ámbito militar en sus inicios, diversificándose luego, y extendiéndose finalmente a organizaciones industriales, académicas y gubernamentales.

Algunas fechas, nombres y temas

1759	Quesnay (economista) - Programación Matemática
1874	Walras
1873	Jordan - Precursor de modelos lineales
1896	Minkowsky - Precursor de modelos lineales
1903	Farkas - Precursor de modelos lineales
189~	Markov - Precursor de modelos dinámicos probabilísticos
192~	- Primer desarrollo de modelos de inventarios
191~	Erlang - Primeros estudios de líneas de espera
1920-30	Koning y Egervary - Métodos de asignación (analíticos)
1937	von Neuman - Teoría de juegos y de preferencias
1939	Kantorovich - Problemas de distribución

1945	2da guerra - Logística estratégica para vencer al enemigo Finales 2da guerra - Logística de distribución de recursos de los aliados (Rand Corporation- Fuerza aérea norteamericana).
1947	Dantzig, George - Método simplex en base al trabajo de precursores, inicio a la Programación Lineal .
1950-60	- Bellman - Programación dinámica. - Kuhn y Tucker - Programación No Lineal. - Gomory - Programación Entera. - Ford y Fulkerson - Redes de optimización. - Markowitz - Simulación. - Arrow, Karloin, Scarf, Whitin - Inventarios. - Rafia - Análisis de Decisiones. - Howard - Procesos Markovianos de Decisión. - Churchman, Ackoff, Arnoff - Orientación a sistemas, generalización de la Investigación Operativa.
1970 y parte década 80	- Receso en el uso de la Investigación de Operaciones
1985 en delante	Reflorecimiento de la disciplina con el devenir del control automático industrial, las microcomputadoras y las nuevas interfaces gráficas que impulsan el desarrollo de los Sistemas Automatizados de Apoyo a la Toma de Decisiones, donde la Investigación Operativa juega un papel preponderante.
Actualmente	IO se aplica al sector privado y público, a la industria, los sistemas de comercialización, financieros, de transportes, de salud etc., en los países desarrollados, “en vías de” y en los del tercer mundo.

Existen varias asociaciones en todo el mundo, que agrupan a personas (estudiantes, científicos y profesionales) interesados por el estudio y aplicación de la Investigación Operativa. La más grande de todas es INFORMS, de Estados Unidos de Norteamérica asociación que nace de la unión de la ORSA = Operation Research Society of America, con 8 000 miembros y la TIMS = Institute of Management Science con 6 000 miembros. También existen Asociaciones Canadienses, Europeas, Latinoamericanas y Asiáticas federadas en la IFORS, International Federation of Operation Research Societies. La Asociación Latinoamericana de Investigación de Operaciones, ALIO, conglomera a la mayor parte de las Asociaciones de América Central y Sur.

Se publican decenas de revistas diferentes en todo el mundo. Existen programas de Posgrado (maestría y doctorado) en la especialidad, en América y Europa.

1.1 Qué es la Investigación de Operaciones

En esta disciplina se destacan las siguientes características esenciales:

- una fuerte orientación a Teoría de Sistemas,
- la participación de equipos interdisciplinarios,
- la aplicación del método científico en apoyo a la toma de decisiones.

En base a estas propiedades, una posible definición es: la Investigación Operativa es la aplicación del **método científico** por **equipos interdisciplinarios** a problemas que comprenden el control y gestión de **sistemas** organizados (hombre- máquina); con el objetivo de encontrar soluciones que **sirvan mejor** a los propósitos del sistema (u organización) como un todo, enmarcados en procesos de toma de decisiones.

Los pasos a seguir en la aplicación del método científico (coincidentes con los de la Teoría General de Sistemas) son, en su expresión mas simple:

- 1.- Planteo y Análisis del problema
- 2.- Construcción de un modelo
- 3.- Deducción de la(s) solucion(es)
- 4.- Prueba del modelo y evaluación de la(s) solucion(es)
- 5.- Ejecución y Control de la(s) solucion(es)

Otra definición: la Investigación Operativa es la aplicación del método científico a un mismo problema por diversas ciencias y técnicas, en apoyo a la selección de soluciones, en lo posible óptimas.

Observar que el problema es UNO SOLO, sin embargo existen maneras distintas de observar un mismo problema, dependiendo de los objetivos que se planteen para resolverlo.

Ejemplo: Un proceso de decisión respecto a la **política de inventarios** en una organización.

Existen 4 funciones administrativas que han dado lugar a departamentos cuyos objetivos son:

Función	Objetivo
Producción	Maximizar la cantidad de bienes (servicios) producidos y minimizar el costo unitario de la producción.
Comercialización	Maximizar la cantidad vendida y minimizar el costo unitario de las ventas.
Finanzas	Minimizar el capital requerido para mantener cierto nivel del negocio.
Personal	Mantener la moral y la alta productividad entre los empleados.

Con respecto al **INVENTARIO** y según estos **OBJETIVOS**:

El departamento de **producción** necesita producir tanto como sea posible a un costo mínimo, lo que se logra fabricando un solo producto en forma continua, pues se logra mayor eficiencia y se minimiza el tiempo perdido por cambio de equipo, al cambiar de artículo. **Con este procedimiento se logra un gran inventario con una línea de productos pequeña.**

El departamento de **mercado** también necesita un gran inventario, **pero** para vender tanto como sea posible, **debe surtir de la mas amplia variedad de productos**. Motivos de desencuentro con el departamento de producción.

Para minimizar el capital necesario para que el negocio marche, el departamento de **Finanzas** debe reducir la cantidad de dinero "comprometido", lo mas directo es reducir los inventarios. Se propone que los **inventarios deben aumentar o disminuir en proporción a la fluctuación de las ventas**.

En contraposición, cuando las ventas son bajas, ni producción ni personal requieren disminuir la producción, ni reducir personal. **Personal** le interesa mantener la producción a un nivel tan constante como sea posible, ya que el despido implica repercusiones en la moral del personal, pérdida de personal calificado, nuevos costos de formación de nuevo personal cuando así se requiera. Esto se traduce en **producir hasta el nivel del inventario cuando las ventas son bajas y agotarlo cuando éstas son altas.**

Los objetivos enumerados y definidos de esta manera son difíciles de llevar a la práctica por su inconsistencia desde el punto de vista de la organización y del sistema en su conjunto. Es tarea y responsabilidad del ejecutivo (gerente) determinar

una política de inventario que convenga a los intereses de toda la compañía y no de una sola de las funciones subordinadas. La tarea de organización y gerenciamiento requiere que se considere al SISTEMA en su conjunto y ésta es la esencia del trabajo gerencial. El ejecutivo debe decidir y para ello recurrirá a algún método. Le convendrá recurrir a un Investigador de Operaciones, dado que supuestamente éste estará apto para utilizar la investigación científica en **apoyo a las decisiones** que el ejecutivo deba tomar. Este apoyo se hace especialmente necesario cuando se trata de la búsqueda de soluciones “óptimas” a problemas que se originan en las organizaciones y servicios en general.

1.2 I.O como apoyo a la toma de decisiones

Los **procesos de decisión** pueden desarrollarse bajo situaciones deterministas, aleatorias, de incertidumbre, o de competencia (adversas). Estas situaciones se modelan a través de sistemas que también serán de tipo deterministas, aleatorios, inciertos o basados en situaciones de competencia (adversas). Los **sistemas determinísticos** interpretan la realidad bajo el principio de que todo es conocido con certeza. Los **sistemas basados en situaciones aleatorias, de incertidumbre o de competencia**, asocian la incertidumbre a los fenómenos a analizar, incertidumbre que puede resultar de la variación propia de los fenómenos (variaciones que eluden a nuestro control, pero que tienen un patrón específico) o incertidumbre resultante de la propia inconsistencia de esos fenómenos.

Aplicando el método científico, el Investigador de Operaciones construirá uno o más modelos (representaciones) del sistema, con sus operaciones correspondientes y sobre él realizará su investigación.

Los **modelos de IO** se pueden representar con ecuaciones las que, aunque puedan resultar complejas, tienen una estructura muy sencilla:

$$U = f(x_i, y_j)$$

según
restricciones

- U** es la utilidad o valor de ejecución del sistema,
- x_i** son las variables no controlables, o dependientes, cuyos valores dependerán de las interrelaciones y valores de las variables independientes.
- y_j** son las variables controlables, o independientes, con valores dados.
- f** es una función en x_i e y_j.

Frecuentemente se requieren una o más ecuaciones o inecuaciones de las llamadas restricciones, para expresar el hecho de que algunas de las variables no controlables (o todas), pueden manejarse dentro de ciertos límites. Por ejemplo, el tiempo de máquina asignado a la producción de un producto siempre tendrá valor positivo, y no será mayor que el tiempo total disponible o asignado para tal fin; otro ejemplo, la suma del dinero presupuestado para cada departamento en un organización o industria no puede exceder la suma de dinero disponible, etc.

Una vez obtenido el modelo, éste puede usarse para encontrar exacta o aproximadamente los valores óptimos de las variables no controlables, aquellas que producen la mejor ejecución del sistema, es decir, la solución al problema.

EJEMPLO: Modelo de un problema agrícola.

Supongamos que una empresa citrícola y el Estado pretenden hacer inversiones cuantiosas en el cultivo de naranja, limón, pomelo y mandarinas, con un doble objetivo: a) reducir el desempleo rural y b) aumentar las exportaciones para equilibrar la balanza de pagos.

Según estudios realizados, se maneja la siguiente información (datos inventados):

Tipo de árbol	Producción promedio anual en kgs / árbol	Área mínima por árbol (m^2)	Precio promedio mundial por kg	Costo por árbol	Horas-hombre de cuidado anual por árbol
Naranja	150	4	\$ 10	\$ 2.00	36
Limón	200	5	\$ 04	\$ 0.50	72
Pomelo	050	3	\$ 15	\$ 1.00	50
Mandarina	150	6	\$ 07	\$ 1.50	10

1. Existe una extensión propicia para este tipo de cultivo de $250.000 m^2$
2. Se asegura el suministro de agua, aproximadamente por 20 años (existencia de aguadas en la zona).
3. La financiera pretende hacer una inversión de 20 millones, pensando exportar toda su producción a partir del 3er año, que es cuando los árboles comienzan a ser productivos.
4. El gobierno ha determinado que éste proyecto emplee al menos 200 personas ininterrumpidamente.

Decisión a tomar: ¿Cuántos árboles de naranja, limón, pomelo y mandarina, deberán sembrarse con el objetivo de maximizar el valor de la futura exportación anual?

Formulación del problema:

Sean **X₁**: número de árboles de naranja a ser sembrados.
X₂: número de árboles de limón a ser sembrados.
X₃: número de árboles de pomelo a ser sembrados.
X₄: número de árboles de mandarinas a ser sembrados.

Valor medio de la export. anual: $U = 10 \cdot 150X_1 + 4 \cdot 200X_2 + 15 \cdot 50X_3 + 7 \cdot 150X_4$

Según las siguientes **restricciones**:

$$\text{Extensión de tierra: } 4X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 6X_4 \leq 250\ 000 m^2$$

$$\text{Inversión inicial: } 2X_1 + 0.5X_2 + 1X_3 + 1.50X_4 \leq \$20\ 000\ 000$$

$$\text{Desempleo mínimo: } 36X_1 + 72X_2 + 50X_3 + 10X_4 \geq 200 \cdot 8 \cdot 360 \quad (\text{horas hombre/día/año})$$

$$\text{Número de árboles a sembrar: } X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0$$

Obtuvimos un modelo del problema de tipo:

Maximizar $U = f()$
Sujeto a: Restricciones

Para ciertos tipos de funciones, como ser relaciones algebraicas elementales, si las restricciones no son demasiado numerosas, existen métodos analíticos que resuelven el problema ejemplo que hemos modelado como un problema de programación matemática lineal. Para problemas con gran número de restricciones, llamados “de gran tamaño”, se han desarrollado técnicas que los resuelven, la mayor de las veces en forma aproximada.

La función f , puede consistir en un conjunto de reglas de cómputo (un algoritmo p. ej.); reglas lógicas que nos permiten calcular la utilidad (U) de ejecución para

cualquier conjunto específico de valores de las variables tanto controlables como no controlables; generalmente obtenemos soluciones aproximadas a los valores óptimos de las variables correspondientes. Otras veces, nos vemos forzados a experimentar con el modelo y simularlo, seleccionando valores de las variables según una distribución de probabilidad, lo que nos permite calcular o0 muestrear un valor aproximado de la función U.

Ejemplo que muestrea un valor aproximado de la confiabilidad de un grafo mediante el Método Montecarlo:

Función de Utilidad de la Confiabilidad de G

```
cont := 0;  
Para n:= 1, N  
    sortear G  
    Si G conexo: cont := cont + 1  
fin para  
Conf (G) = cont / N.
```

Una vez obtenido un valor (o muestra) de la función de utilidad, podemos especificar un procedimiento que permita seleccionar valores sucesivos (de prueba) de variables no controlables, de manera que converjan hacia una solución óptima.

Una SOLUCIÓN ÓPTIMA es aquella que maximiza o minimiza (según convenga) la medida de ejecución de un modelo, sujeto a las condiciones y restricciones pertinentes al sistema. Muchas veces, independientemente del procedimiento utilizado, se busca una solución "mas" óptima, o mejor dicho, mas cercana a la óptima. En consecuencia, la optimización produce la "mejor" solución para el problema que se está modelando. La solución óptima será la mejor para el modelo en consideración, ya que un modelo nunca es una representación exacta del problema; en el mejor de los casos, el modelo es una "buena" representación del problema, de ahí que la solución óptima o cercana a la óptima derivada de ese modelo, es una "buena" aproximación a la solución óptima y, por lo tanto, se supone que será la "mejor" para el problema que se pretende resolver.

1.3 Problemas tipo en Investigación Operativa

Desde sus comienzos la Investigación de Operaciones se ha aplicado a una gran variedad de problemas; la gran mayoría de ellos han sido de naturaleza táctica, mas que estratégica. Un problema es más táctico que estratégico si cumple con las siguientes condiciones:

- 1) su solución puede modificarse o anularse fácilmente, tiene efecto de corta duración;
- 2) su solución afecta a una parte menor de la organización;
- 3) los resultados deseados se consideran como proporcionados (obtenidos), sin que medie una selección de medios, fines, metas u objetivos a largo plazo.

La planificación de una empresa u organización, con sus metas y objetivos, es un problema más estratégico que táctico. El minimizar los costos del transporte, en el que la minimización en sí es el resultado conveniente, es considerado un problema más táctico que estratégico.

La aplicación de la Investigación Operativa a una amplia variedad de problemas tácticos, y la frecuente recurrencia de esos problemas, ha permitido identificar **problemas tipo** que se agrupan según los modelos y procedimientos (técnicas) similares para su resolución. Esos problemas tipo son: asignación de

recursos escasos, ordenamiento, secuenciación y coordinación de tareas, líneas de espera, mantenimiento y reemplazo de equipos, inventarios, costos y tiempos, gestión de proyectos.

Asignación de recursos, Ordenamiento

Los primeros desarrollos de la Investigación Operativa se refirieron a problemas de asignación de recursos, ordenamientos de tareas, reparto de cargas de trabajo, planificación, todos con un objetivo preciso de optimización de la función económica U en un mundo determinista. Entre las técnicas de optimización citamos: la Programación Lineal (se verá en el curso), No lineal, Los métodos de ordenamiento, Programación Dinámica, Combinatoria, algoritmos de teoría de Grafos, etc. Un **ejemplo** clásico: determinar el número de piezas, de cada tipo, que debe producir un determinado taller, a fin de obtener el máximo beneficio. Existen varias máquinas, cada una de las cuales tiene determinadas propiedades y características, según las categorías o partes de piezas a producir por cada una de ellas; por lo general se conoce la capacidad máxima del taller y el beneficio que se obtendrá con cada categoría de pieza producida.

Líneas de espera, Reemplazo de equipos

Estos temas se desarrollan en mundo aleatorio por lo general. Se estudian las esperas y retrasos ocurridos en el sistema, o las fallas en las instalaciones, su reparación y posibles políticas de mantenimiento y/o reemplazo.

Inventario, Costos y tiempos

Se trata de la operación mas simple, la de almacenar y/o mantener recursos; se estudia cuánto y cuándo adquirir. Muchos casos se resuelven modelándolos como líneas de espera.

Gestión de proyectos

El conjunto de tareas de un proyecto se modelan mediante un grafo, sobre el que se determinan cuáles son los tiempos y las tareas críticas ("cuellos de botellas") del proyecto. Técnicas usadas: CPM-PERT, método del Camino Crítico.

Algunos de estos problemas, se estudiarán en el curso “Introducción a la Investigación de Operaciones”.

2. OPTIMIZACIÓN

2.1 Introducción

2.1.1 Motivos para estudiar Optimización

Existe una enorme variedad de actividades en el mundo cotidiano que pueden ser únicamente descritas como sistemas, desde sistemas físicos tales como una planta industrial hasta entidades teóricas tales como los modelos económicos. La operación eficiente de esos sistemas usualmente requiere un intento por optimizar varios índices que miden el desempeño del sistema. Algunas veces, esos índices son cuantificados y representados como variables algebraicas. Entonces se deben encontrar valores para esas variables, que maximicen la ganancia o beneficio del sistema, o bien minimicen los gastos o pérdidas. Se asume que las variables dependen de ciertos *factores*. Algunos de esos factores a veces están bajo el control (al menos parcialmente) del analista responsable del desempeño del sistema.

El proceso de administración de los recursos escasos de un sistema se suele dividir en seis fases:

- i* análisis matemático del sistema
- ii* construcción de un modelo matemático que refleja los aspectos importantes del sistema
- iii* validación del modelo
- iv* manipulación del modelo a fin de obtener una solución satisfactoria, si no óptima
- v* implementación de la solución seleccionada
- vi* introducción de una estrategia de control del desempeño del sistema después de la implementación efectuada.

La cuarta fase, la manipulación del modelo, es la que concierne a la teoría de la optimización. Las otras fases son muy importantes en la administración de cualquier sistema y probablemente requerirán mayor esfuerzo total que la fase de optimización. Sin embargo, en esta presentación de la optimización se asumirá que las demás fases fueron o serán resueltas aparte. Debido a que la teoría de la optimización brinda este eslabón en la cadena de la administración de sistemas constituye un cuerpo importante del conocimiento matemático.

2.1.2 El Alcance de la Optimización

Una de las herramientas más importantes de la optimización es la **programación lineal**. Un problema de programación lineal está dado por una función lineal de varias variables que debe ser optimizada (maximizada o minimizada) cumpliendo con cierto número de restricciones también lineales.

El matemático G.B. Dantzig desarrolló un algoritmo llamado el *método simplex* para resolver problemas de este tipo. El método simplex original ha sido modificado a fin de obtener un algoritmo eficiente para resolver grandes problemas de programación lineal por computadora.

Por medio de la programación lineal se pueden formular y resolver problemas de una gran variedad de campos del quehacer humano, entre los que se puede mencionar: asignación de recursos en la planificación de gobierno, análisis de redes para planificación urbana y regional, planificación de la producción en la industria, y la administración de sistemas de transporte y distribución. Por esto la programación lineal es uno de los éxitos de la moderna teoría de la optimización.

La **programación entera** está relacionada con la resolución de problemas de optimización en los cuales al menos algunas de las variables deben tomar sólo valores enteros. Cuando todos los términos son lineales se habla de *programación lineal entera*.

Muchos problemas de naturaleza combinatoria se pueden formular en términos de programación entera. Entre los ejemplos prácticos se puede citar: ubicación de insumos, secuenciamiento de trabajos en líneas de producción, balance de líneas de montaje, problemas de asignación biunívoca, control de inventarios, y reemplazo de máquinas.

Uno de los métodos importantes para resolver esos problemas, debido a R.E. Gomory, se basa en parte, en el método simplex antes mencionado. Otro método es de naturaleza combinatoria y consiste en reducir el problema original a otros más pequeños, y tal vez más fáciles, y partir el conjunto de soluciones posibles en subconjuntos más pequeños que pueden ser analizados más fácilmente. Este método se llama *branch and bound* (ramificación y acotación) o *branch and backtrack*. Dos de las contribuciones importantes a éste método las han hecho Balas y Dakin. Pese a las mejoras realizadas no existe aún un método unificado que sea eficaz para resolver problemas de programación entera de tamaño realista.

Otra clase de problemas involucran la **administración de una red**. Problemas de flujo de tráfico, comunicaciones, distribución de bienes, y planificación de proyectos son generalmente de este tipo.

Muchos de estos problemas se pueden resolver por los métodos mencionados previamente (programación entera o lineal). Sin embargo debido a que esos problemas usualmente tienen una estructura especial, se han desarrollado técnicas especializadas más eficientes para su resolución. En este campo las mayores contribuciones se deben a Ford y Fulkerson; quienes desarrollaron el *método de etiquetado* para maximizar el flujo de un producto a través de una red y un método para minimizar el costo de transportar una cantidad dada de producto a través de una red. Esas ideas se pueden combinar con las de programación entera para analizar toda una familia de problemas prácticos de redes.

Algunos problemas se pueden descomponer en partes y se optimizan los procesos de decisión de éstas. En algunas instancias es posible alcanzar el óptimo del problema original solamente descubriendo como optimizar esas partes constituyentes. Este proceso de descomposición es muy potente, pues permite resolver una serie de problemas más pequeños y fáciles en vez de uno grande que podría ser intratable.

Los sistemas para los cuales esta aproximación brinda un óptimo válido se llaman *sistemas seriales multi-etapa*. Una de las técnicas más conocidas para abordarlos fue bautizada **programación dinámica** por R. E. Bellman, el matemático que la desarrolló,. Los sistemas seriales multi-etapa se caracterizan por un proceso que se realiza en etapas, como los procesos de manufactura. En vez de intentar optimizar alguna medida de desempeño viendo a todo el problema como una unidad, la

programación dinámica optimiza una etapa por vez a fin de producir un conjunto de decisiones óptimas para todo el proceso.

Una variada gama de problemas tales como inversión de capital, confiabilidad de máquinas, y análisis de redes se pueden ver como sistemas seriales multi–etapa; de modo que la programación dinámica tiene una amplia aplicabilidad.

En la formulación de muchos problemas de optimización no se puede hacer la hipótesis de linealidad que caracteriza a la programación lineal. No existen procedimientos generales para problemas no lineales. Se han desarrollado un gran número de algoritmos especiales para tratar casos particulares. Muchos de esos procedimientos se basan en la teoría matemática relacionada con el análisis de la estructura de tales problemas. Esta teoría se llama generalmente *optimización clásica*. Una de las principales contribuciones modernas a esta teoría fue hecha por Kuhn y Tucker quienes desarrollaron lo que se conoce como las *condiciones de Kuhn – Tucker*.

La colección de técnicas desarrolladas por esta teoría se llama *programación no lineal*. Pese a que muchos problemas de programación no lineal son muy difíciles de resolver, hay cierto número de problemas prácticos que pueden ser formulados de manera no lineal y resueltos por los métodos existentes. Esto incluye el diseño de entidades tales como transformadores eléctricos, procesos químicos, condensadores de vapor y filtros digitales.

2.1.3 La Optimización como una rama de las Matemáticas

Se puede ver, por lo dicho en la sección anterior, que la teoría de la optimización es matemática por naturaleza. Típicamente involucra la maximización o minimización de una *función* (a veces desconocida) que representa el desempeño de algún sistema. Esto se resuelve encontrando los valores de las *variables* (cuantificables y controlables) que hacen que la función alcance su mejor valor. A fin de entender como operan los algoritmos se requieren conocimientos de álgebra lineal y cálculo diferencial con varias variables.

Algunos de los problemas de la teoría de optimización se pueden resolver por las técnicas clásicas del cálculo avanzado (tales como métodos Jacobianos y el uso de multiplicadores de Lagrange). Sin embargo, la mayoría de los problemas de optimización no satisfacen las condiciones necesarias para ser resueltos de esta manera. Muchos de los otros problemas, pese a poder ser tratados con las técnicas clásicas, se resuelven más eficazmente si se utilizan métodos diseñados para cada caso particular. A través de la historia de las matemáticas se ha construido una colección de tales técnicas. Algunas han sido olvidadas y reinventadas, otras recibieron poca atención hasta que las computadoras las hicieron utilizables.

El grueso de material al respecto es de origen reciente debido a que muchos de los problemas, tales como el flujo de tráfico, recién ahora cobran interés y también debido al gran número de investigadores disponibles actualmente para analizar tales problemas. Cuando ese material es catalogado dentro de un cuerpo autocontenido de conocimientos el resultado es una nueva rama de las matemáticas aplicadas.

2.1.4 Conceptos Básicos de Optimización

Esta sección introduce algunos de los conceptos básicos de optimización que se utilizan a lo largo del presente compendio. Cada concepto se ilustra por medio del siguiente ejemplo.

El problema es:

$$\text{Maximizar: } f(x_1, x_2) \quad (1.1)$$

$$\text{sujeto a: } h_1(x_1, x_2) \leq 0 \quad (1.2)$$

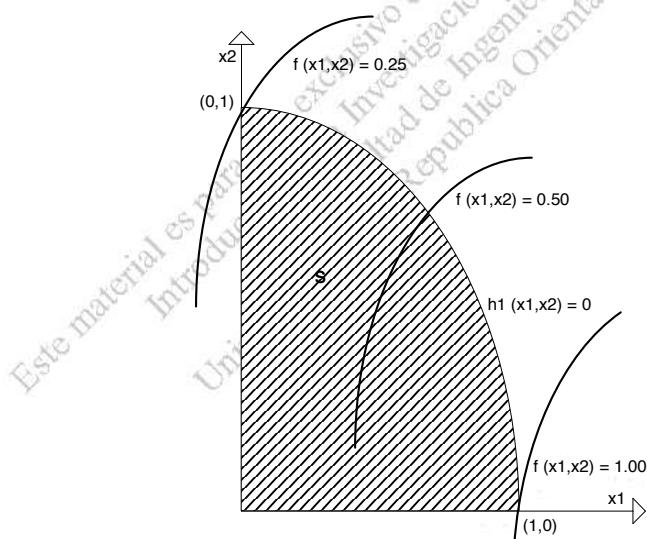
$$x_1 \geq 0 \quad (1.3)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (1.4)$$

Este es un problema típico en la teoría de optimización: la maximización (o minimización) de una función real de variables reales (a veces una sola variable) sujeta a un número de restricciones (a veces este número es cero).

La función f se llama *función objetivo*, x_1 y x_2 se llaman *variables independientes* o *variables decisionales*. El problema es encontrar valores reales para x_1 y x_2 , que satisfagan las *restricciones* (1.2), (1.3) y (1.4), los cuales introducidos en (1.1) hagan que $f(x_1, x_2)$ tome un valor no menor que para cualquier otro par x_1, x_2 .

En la figura siguiente se muestran tres contornos de la función objetivo.



La función objetivo tiene el mismo valor en todos los puntos de cada línea, de modo que los contornos pueden asimilarse a las isobaras (o isotermas) de un mapa climático.

No es difícil ver que la solución del problema es:

$$\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1, 0)$$

Esto significa que

$$f(\hat{X}) \geq f(X), \forall X \in S \quad (1.5)$$

Cuando una solución $\hat{X} \in S$ satisface (1.5) se llama *solución óptima*, y en este caso *solución máxima* (también solución óptima o maximal). Si el símbolo en (1.5) fuera “ \leq ”, \hat{X} sería una solución *mínima*. Además, $f(\hat{X})$ se llama *valor óptimo*, y no debe ser confundido con solución óptima.

En la figura se observa que se podrían obtener valores mayores de f eligiendo ciertos x_1, x_2 fuera de S .

Cualquier par ordenado de números reales se llama *solución* del problema y el valor correspondiente de f se llama *valor* de la solución. Una solución X tal que $X \in S$ se llama *solución factible*, en tanto que $S = \{(x_1, x_2) : h(x_1, x_2) \leq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$, que generalmente es una región conexa, se llama *región factible*.

2.2 Convexidad

Se revén a continuación las propiedades más importantes de los conjuntos convexos y de las funciones convexas, tales conjuntos y funciones juegan un rol muy importante en la optimización por dos motivos:

- Cuando se tienen funciones y conjuntos convexos se puede identificar con seguridad los llamados “óptimos globales”.
- Muchas operaciones y transformaciones conservan la convexidad, por lo que se puede construir funciones y conjuntos convexos más complicados a partir de los más sencillos.

Definición: Combinación Convexa.

Dados $(x, y) \in \mathbb{R}^n$, una *combinación convexa* de ellos es cualquier punto de la forma:

$$z = \alpha x + (1-\alpha) y$$

con $\alpha \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \alpha \leq 1$.

Notas:

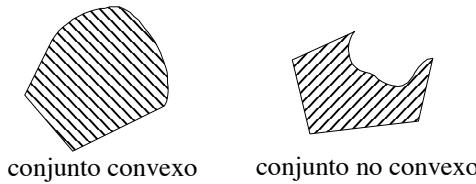
- Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$, se dice que z es una combinación convexa *estricta* (o *propia*).
- La interpretación geométrica es que z es un punto del segmento de recta determinado por (x, y) .

Definición: Conjunto Convexo.

$S \subset \mathbb{R}^n$ es un *conjunto convexo* si

$$[\alpha x + (1-\alpha) y] \in S$$

$$\forall (x, y) \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R} : 0 \leq \alpha \leq 1$$



Es decir que S es un conjunto convexo si contiene a todos los segmentos de recta que se pueden formar con los puntos que le pertenecen.

Definición: Función Convexa (en un conjunto convexo).

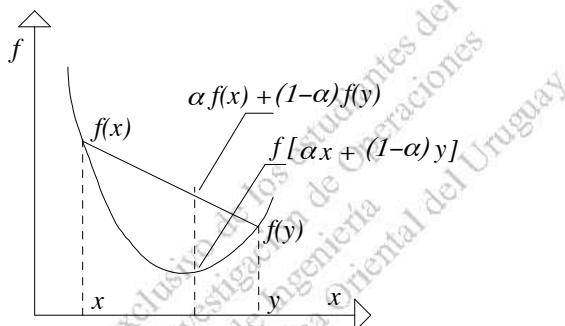
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, un conjunto convexo.

La función $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ es *convexa en S* si:

$$f[\alpha x + (1-\alpha)y] \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

$$\forall (x,y) \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R}: 0 \leq \alpha \leq 1$$

Si $S = \mathbb{R}^n$, se dice que f es *convexa*.



2.2.1 Composición de conjuntos y funciones convexas

La importancia de las funciones y conjuntos convexos radica en que las condiciones necesarias para que una solución sea un óptimo local se convierten en condiciones suficientes para que sea óptimo global, cuando las funciones y conjuntos en cuestión son convexos.

Sean S y T conjuntos convexos, $\alpha \in \mathbb{R}$ y f una función convexa. Entonces los siguientes conjuntos también son convexos:

- | | | | | | |
|----|-------------------------------------|-----|--------------------------------------|---|-------------------------------|
| i | $\alpha S = \{\alpha x x \in S\}$ | iii | $S + T = \{x+y x \in S, y \in T\}$ | v | $\{(x,\mu) f(x) \leq \mu\}$ |
| ii | $S \cap T$ | iv | $\{x f(x) \leq \alpha\}$ | | |

Sean f y g funciones convexas en un conjunto convexo S , y $\alpha \geq 0$.

Entonces las siguientes funciones también son convexas en S .

- | | |
|-----|-------------------------------|
| i | $h_1(x) = f(x) + g(x)$ |
| ii | $h_2(x) = \alpha f(x)$ |
| iii | $h_3(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ |

Sean $f_i: I_i \rightarrow \mathbb{R}, (i = 1, \dots, n)$ funciones convexas en el intervalo $I_i \subseteq \mathbb{R}$.

$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$ es una función convexa en $I = \{x \in \Re^n \mid x_i \in I_i\}$

2.2.2 Funciones convexas reales, de una sola variable

Para poder utilizar los resultados anteriormente expuestos es necesario poder reconocer las funciones convexas. Por tal motivo, en primer lugar se analizarán las funciones de una sola variable.

Una función $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa en el conjunto convexo S , si:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

$\forall x, y \in S$, con $\lambda \leq 0$ o bien $\lambda \geq 1$.

Una función diferenciable $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ es convexa si:

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$$

$\forall x, y \in I$

Una función diferenciable f en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ es convexa si f' es no decreciente.

Una función f diferenciable hasta el segundo orden en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ es convexa si $f'' \geq 0$ en I .

2.2.3 Funciones convexas en \mathbb{R}^n

Una función diferenciable f en un conjunto convexo S es convexa si:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y-x), \forall x, y \in S.$$

Una función f diferenciable hasta el segundo orden en $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo y abierto es convexa si la matriz de derivadas segundas: $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \end{pmatrix}$ es semidefinida positiva en \mathbb{R}^n

Proposición: desigualdad de Jensen

Sea $f : C \rightarrow R$ una función convexa sobre un conjunto convexo y $x_i \in C, m \geq 1, \lambda_i \geq 0$

$$\text{con } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Entonces se cumple que: $f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)$

Demostración por inducción en m :

Paso Base ($m = 2$): Sean $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 / \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y $x_1, x_2 \in C$.

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + (1 - \lambda_1)f(x_2)$$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

↑
f es convexa en

Paso Inductivo:

$$(\text{Hipótesis}) \quad f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i), \quad k \leq m-1$$

$$(\text{Tesis}) \quad f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) &= f\left(\lambda_m x_m + \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\lambda_m x_m + (1 - \lambda_m) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i x_i}{(1 - \lambda_m)}\right) = \\ &= f(\lambda_m x_m + (1 - \lambda_m) y) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{f convexa en } C}}{\leq} \lambda_m f(x_m) + (1 - \lambda_m) f(y) = \lambda_m f(x_m) + (1 - \lambda_m) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i x_i}{(1 - \lambda_m)} \leq \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{H.I.}}}{\leq} \lambda_m f(x_m) + (1 - \lambda_m) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{(1 - \lambda_m)} f(x_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) \end{aligned}$$

2.3 Optimos Locales y Globales

En este capítulo se estudian las propiedades de las soluciones óptimas. Se brinda además un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que una solución sea local o globalmente óptima.

2.3.1 Optimos locales y globales, direcciones factibles y direcciones de descenso

La siguiente es la forma general de un problema de optimización:

$$(G) \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{sujeto a :} \\ x \in F \end{cases}$$

y los problemas de programación matemática, tienen la forma siguiente:

$$(M) \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{sujeto a :} \\ g(x) \leq 0 \\ x \in X \end{cases}$$

Todos los problemas de optimización pueden ser escritos en la forma general (G).

Se supondrá que $F \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f: F \rightarrow \mathbb{R}$, donde F es la **región factible** y f la **función objetivo**.

En un problema de programación matemática se supone que

$$X \subseteq \mathbb{R}^n, g : X \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ y } f : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

En el problema (M) la región factible es el conjunto: $\{x \in X | g(x) \leq 0\}$

Definición: $\bar{x} \in F$ es un **óptimo global** de (G) si $f(x) \geq f(\bar{x}) \forall x \in F$.

Definición: $\bar{x} \in F$ es un **óptimo local** de (G) si $\exists \varepsilon > 0$, tal que se cumple que

$$f(x) \geq f(\bar{x}) \quad \forall x \in F, \text{ con } \|x - \bar{x}\| < \varepsilon.$$

La mayoría de los métodos para hallar un óptimo son por búsqueda direccional: partiendo de un punto de F, se define una dirección de búsqueda y se determina un nuevo punto a lo largo de ésta. Por ese motivo son de interés los conceptos de dirección factible y dirección de descenso.

Definición: d es una **dirección factible** de (G) en $\bar{x} \in F$ si $\exists \tau_0 > 0$ tal que $\bar{x} + \tau d \in F \quad \forall \tau \in (0, \tau_0)$

Definición: d es una **dirección de descenso** [o ascenso] de la función f en $\bar{x} \in F$ si $\exists \tau_0 > 0$ tal que

$$f(\bar{x} + \tau d) < f(\bar{x}) \quad \forall \tau \in (0, \tau_0)$$

en el caso de ascenso: $(f(\bar{x} + \tau d) > f(\bar{x})]$

Observación: Sea f una función diferenciable en $\bar{x} \in F$. Si $\nabla f(\bar{x})d < 0$, entonces d es una dirección de descenso en \bar{x} .

2.3.2 Condiciones necesarias y suficientes para óptimos

Con las definiciones que preceden, más las de convexidad, se puede definir un conjunto de condiciones de optimalidad. Previamente se deberá distinguir entre condición necesaria y condición suficiente.

Una condición **necesaria** para un óptimo (local) es una condición que se cumple en cada solución óptima, aunque también podría cumplirse en otras soluciones.

Puede ser utilizada para descartar, en la búsqueda del óptimo, aquellas soluciones que no cumplen la condición necesaria de optimalidad, o limitar a priori la búsqueda a aquellas soluciones que cumplen dicha condición.

Una condición **suficiente** para un óptimo (local) es una condición que si se cumple garantiza que la solución es óptima (local).

Se puede utilizar en un procedimiento en el que se trata de lograr que la condición se cumpla, para de ese modo obtener una solución óptima.

Teorema: Si $\bar{x} \in F$ es un óptimo local de (G) no existe en ese punto ninguna dirección de descenso que además sea factible.

En consecuencia: una condición **necesaria** para que $\bar{x} \in F$ sea un óptimo local, es que en ese punto no exista ninguna dirección factible de descenso.

Teorema: Si en un problema del tipo (G), la función objetivo f es diferenciable, y $\bar{x} \in F$ es un óptimo local de (G), entonces $\nabla f(\bar{x})d \geq 0$ para todas las direcciones factibles d en \bar{x} .

Corolario: Si la función objetivo f de (G) es diferenciable, y \bar{x} es un punto interior de F que cumple ser óptimo local, entonces: $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

Teorema: Si la función objetivo f , y la región factible F de (G) son convexas y además no existe una dirección factible de descenso en $\bar{x} \in F$, entonces \bar{x} es un óptimo global del problema (G).

Nótese que el teorema precedente establece una condición suficiente de optimalidad para un problema en que la función objetivo y la región factible son convexas.

Teorema: Sean f y F convexas en el problema (G), con f diferenciable. Si existe $\bar{x} \in F$ tal que $\nabla f(\bar{x})d \geq 0$ para todas las direcciones factibles d en \bar{x} , entonces \bar{x} es un óptimo global de (G).

2.4 Condiciones de Kuhn–Tucker

Para problemas de programación matemática también se pueden aplicar los teoremas anteriores. Para este tipo de problemas existen además condiciones de optimalidad especiales, las llamadas condiciones de Kuhn–Tucker. Estas serán introducidas a través de una analogía con la mecánica. Considérese el siguiente problema:

$$(M) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(x) \\ \text{sujeto a :} \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ x \in X \end{array} \right.$$

Los óptimos locales de (M) pueden ser vistos como las posiciones de equilibrio estable de una partícula que se mueve en un campo de fuerza cuyo potencial es f , en una región X , y condicionada a moverse en el interior de una región delimitada por ciertas “paredes”: $V_i = \{x | g_i(x) = 0\}$.

Supóngase que la partícula está en reposo en \bar{x} , punto interior de X .

La partícula está expuesta a fuerzas de reacción r_i perpendiculares a las paredes y orientadas hacia el interior, como los gradientes ∇g_i son también perpendiculares a las paredes, pero orientados hacia el exterior, las fuerzas reactivas de las paredes pueden expresarse como: $r_i = -\lambda_i \nabla g_i(\bar{x})$ para parámetros $\lambda_i \geq 0$, suponiendo que $\nabla g_i(\bar{x}) \neq 0$.

Las fuerzas reactivas sólo actúan en las paredes que están en contacto con la partícula, es decir que $\lambda_i \neq 0$ solamente cuando $g_i(\bar{x}) = 0$. Esto se expresa en la forma siguiente: $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

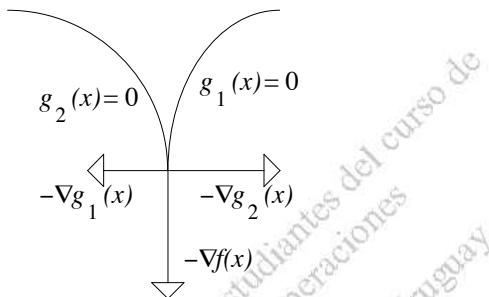
Finalmente, para que la partícula esté en reposo se exige balance de las fuerzas:

$$-\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m (-\lambda_i \nabla g_i(\bar{x})) = 0$$

El resumen de estas exigencias son las Condiciones de Kuhn – Tucker:

- i $g(\bar{x}) \leq 0$, es decir: que el punto esté en la región factible.
- ii $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$, fuerza sólo en las paredes “activas”.
- iii $\lambda_i \geq 0$, las fuerzas apuntan hacia el interior de la región factible.
- iv $\nabla f(\bar{x}) + \sum \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$, equilibrio de fuerzas.

Las condiciones de Kuhn – Tucker son necesarias para que un punto \bar{x} interior a X , sea óptimo local, salvo que ocurran casos excepcionales, por ejemplo: $\nabla g_i(\bar{x}) = 0$, o que $-\nabla f(\bar{x})$ no pueda ser balanceado por las fuerzas reactivas, como ocurre en la figura siguiente:



Estos casos excepcionales se evitan imponiendo “constraint qualifications”, que son condiciones que deben ser satisfechas por las restricciones del problema. Muchas de ellas se expresan en el punto óptimo potencial, por lo que no son muy útiles en la práctica, ya que no se sabe cual es el óptimo. Suele ser más útil imponer las siguientes:

- i que las restricciones sean lineales.
- ii que las g_i sean convexas y exista un \bar{x} tal que $g_i(\bar{x}) < 0$, $i = 1, \dots, m$

En resumen, se formula el:

Teorema de Kuhn – Tucker: Sea $\bar{x} \in X$ un punto interior que es óptimo local del problema (M) , y sean f y g_i funciones diferenciables. Si se cumplen las “constraint qualifications” apropiadas existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ que satisface las siguientes condiciones de Kuhn – Tucker:

- i $g(\bar{x}) \leq 0$
- ii $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$, $i = 1, \dots, m$
- iii $\bar{\lambda} \geq 0$
- iv $\nabla f(\bar{x}) + \sum \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$

El siguiente es un caso particular del Teorema anterior:

Teorema: Sea f una función diferenciable y \bar{x} una solución óptima de:

$$(P) \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{sujeto a :} \\ \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Entonces

- i $\bar{x} \geq 0$
- ii $\nabla f(\bar{x})\bar{x} = 0$
- iii $\nabla f(\bar{x}) \geq 0$

En caso de tener restricciones de igualdad, las fuerzas reactivas de la analogía mecánica anterior pueden apuntar hacia ambos lados de las paredes, y en consecuencia desaparece la exigencia de $\lambda_i \geq 0$.

Además, todas las “paredes” son tocadas por la partícula en todos los puntos factibles, por lo que $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$ también desaparece.

El teorema correspondiente se enuncia:

Teorema: Sea \bar{x} un óptimo local del problema

$$(M_{+}) \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{sujeto a :} \\ \quad g(x) = 0 \end{cases}$$

y sean las g_i tales que $\nabla g_i(\bar{x})$ son linealmente independientes para $i = 1, \dots, m$

Entonces $\exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\nabla f(\bar{x}) + \sum \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$

2.5 Relajaciones

Cuando se enfrenta un problema difícil de optimización, es posible reformularlo de un modo más fácil por medio de una relajación; ésta nueva versión se llama **problema relajado**

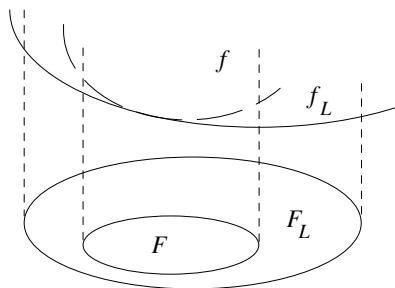
2.5.1 Generalidades sobre relajaciones

Considérense los siguientes problemas:

$$(G) \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{sujeto a :} \\ \quad x \in F \end{cases} \quad \text{y} \quad (G_L) \begin{cases} \text{Min } f_L(x) \\ \text{sujeto a :} \\ \quad x \in F_L \end{cases}$$

Definición: Se dice que (G_L) es una relajación de (G) si:

- i) $F_L \supseteq F$,
- ii) $f_L(x) \leq f(x), x \in F$.



Observación: Si f está definida fuera de F , no es necesario que se cumpla $f_L \leq f$ para los x exteriores al dominio F .

Teorema 1:

Sea (G_L) una relajación de (G) ,

\hat{x}_L y \hat{x} soluciones optimales de (G_L) y (G) respectivamente

$\hat{x} \in F$.

En tales condiciones se cumple:

$$f_L(\hat{x}_L) \leq f(\hat{x}) \leq f(\hat{x}_L).$$

Prueba:

$f_L(\hat{x}_L) \leq f_L(\hat{x})$ por ser \hat{x}_L solución óptima de (G_L) .

$f_L(\hat{x}) \leq f(\hat{x})$ por la definición de relajación.

$f(\hat{x}) \leq f(\hat{x}_L)$ por ser \hat{x} solución óptima de (G) .

◆

Observación: En el teorema anterior se supone que existe por lo menos un valor de $x \in F$ en el cual la función f alcanza un mínimo. Para formular el teorema de un modo más general debería decir $\inf\{f(x): x \in F\}$ en vez de $f(\hat{x})$, y eventualmente lo mismo para $f_L(\hat{x}_L)$. De esa manera se pierde, lamentablemente, algo de claridad. Supondremos, por lo tanto, a partir de ahora, que siempre existe un valor $x \in F$ que es solución óptima de (G) .

Corolario 1.1:

Sean (G_L) una relajación de (G) , y \hat{x}_L una solución óptima de (G_L) que cumple las siguientes condiciones:

i) $\hat{x}_L \in F$,

ii) $f_L(\hat{x}_L) = f(\hat{x}_L)$

En tales condiciones se cumple que \hat{x}_L es también solución óptima de (G) .

Prueba:

Para que \hat{x}_L sea solución óptima de (G) debe, primero, ser una solución factible, lo cual es cierto por i). Para demostrar que brinda un valor de f menor o igual que el de cualquier otra solución factible; sea x una solución factible cualquiera de (G) .

$f(x) \geq f_L(x)$ por ser (G_L) una relajación de (G) .

$f_L(x) \geq f_L(\hat{x}_L)$ por ser \hat{x}_L una solución óptima de (G_L) .

$f_L(\hat{x}_L) = f(\hat{x}_L)$ por hipótesis ii

luego: $f(x) \geq f(\hat{x}_L)$.

Entre las relajaciones más típicas se puede citar:

- ignorar la exigencia de que algunas variables sean números enteros
- ignorar algunas restricciones de positividad.

2.5.2 Relajación Lagrangeana.

En los problemas de Programación Matemática, que son del tipo:

$$(M_{\leq}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(x) \\ \text{sujeto a :} \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ x \in X \end{array} \right.$$

se usa comúnmente la llamada **relajación lagrangeana** que consiste en agregar la variable $\lambda \in \mathbb{R}^m$ y construir el siguiente problema:

$$(M_{\lambda}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_x f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) \\ \text{sujeto a :} \\ x \in X \end{array} \right.$$

Los valores λ_j se llaman “multiplicadores de Lagrange” o “parámetros lagrangeanos”.

Atención: los multiplicadores de Lagrange no son variables sino *parámetros*, es decir que por cada λ , tenemos un problema de optimización (M_{λ}) en la *variable x*.

$f_{\lambda}(x) = f(x) + \lambda^T g(x) = f(x) + \sum \lambda_i g_i(x)$ es la llamada función lagrangeana de (M_{λ}) y se escribe $L(x, \lambda)$.

Teorema 2:

$\lambda \geq 0 \Rightarrow (M_{\lambda})$ es una relajación de (M_{\leq}) .

Prueba:

Deben cumplirse las dos condiciones de la definición de relajación:

- La región de soluciones factibles de M_{\leq} es $F = \{x \in X : g(x) \leq 0\}$, que es un subconjunto de X ; además la región de soluciones factibles de M_{λ} es $F_{\lambda} = X$; por lo tanto: $F_{\lambda} \supseteq F$.
- Sea $x \in F$, entonces $g_i(x) \leq 0, \forall i$.

Si $\lambda \geq 0$, es decir: $\lambda_i \geq 0, \forall i$, se cumple que $\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \leq 0$, por lo tanto,
 $f_\lambda(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \leq f(x)$. En consecuencia: M_λ es una relajación de M_{\leq}

En el caso de problemas con restricciones de igualdad

$$(M_+) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(x) \\ \text{sujeto a :} \\ \quad g(x) = 0 \\ \quad x \in X \end{array} \right.$$

La relajación lagrangeana se construye de forma análoga.

Teorema 3:

(M_λ) es una relajación de (M_-) para cualquier $\lambda \in \Re^m$.

Prueba:

Se deduce a partir de la prueba del teorema anterior.

Teorema 4: (Teorema fundamental de la Relajación Lagrangeana)

Si \hat{x}_λ es una solución óptima de M_λ que cumple:

- i $g(\hat{x}_\lambda) \leq 0$.
- ii $\lambda_i g_i(\hat{x}_\lambda) = 0, i=1 \dots m$.
- iii $\lambda \geq 0$.

entonces \hat{x}_λ es también una solución óptima de M_{\leq} .

Prueba:

- M_λ es una relajación de M_{\leq} debido a la condición *iii* y por el Teorema 2.
- \hat{x}_λ es solución óptima de M_λ por hipótesis.
- $\hat{x}_\lambda \in F$ debido a la condición *i*.
- $f_\lambda(\hat{x}_\lambda) = f(\hat{x}_\lambda) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\hat{x}_\lambda) = f(\hat{x}_\lambda)$ por la condición *ii*.

De todo lo anterior, y del Corolario 1.1 se deduce la tesis.

La condición *ii* se llama **condición de complementariedad** porque exige que $\lambda_i = 0$, o bien: que $g_i(\hat{x}_\lambda) = 0$.

Ejemplo 1: Considérese el siguiente problema:

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f(x) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{x_j^2}{2} \right) \\ \text{sujeto a :} \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq b \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

Se supone que b y a_j ($j = 1, \dots, n$) son positivos. Se comienza por escribir la primera restricción de la siguiente forma: $b - \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq 0$.

A continuación se introduce un parámetro lagrangeano (pues hay solamente una restricción) y se obtiene el problema lagrangeano relajado (P_λ):

$$(P_\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_x f_\lambda(x) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{x_j^2}{2} - \lambda a_j x_j \right) + \lambda b \\ \text{sujeto a :} \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

En la minimización con respecto a x , λb es una constante que no incide en la determinación de la solución óptima.

Puesto que en (P_λ) las distintas x_j son variables independientes, se puede descomponer el problema (P_λ) en n subproblemas de optimización $(P_{\lambda,j})$ independientes:

$$(P_{\lambda,j}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{x_j} f(x_j) = \frac{x_j^2}{2} - \lambda a_j x_j \\ \text{sujeto a :} \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

Se tiene que $\frac{\partial f_{\lambda,j}}{\partial x_j}(x_j) = x_j - \lambda a_j$

$$\text{Luego} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_{\lambda,j}}{\partial x_j}(x_j) > 0; \text{ si } x_j > \lambda a_j \\ \frac{\partial f_{\lambda,j}}{\partial x_j}(x_j) < 0; \text{ si } x_j < \lambda a_j \\ \frac{\partial f_{\lambda,j}}{\partial x_j}(x_j) = 0; \text{ si } x_j = \lambda a_j \end{array} \right.$$

Por lo tanto $(P_{\lambda,j})$ presenta un mínimo global cuando $x_j = \lambda a_j = \hat{x}_j(\lambda)$, y en consecuencia: (P_λ) tiene un óptimo global en $\hat{x}(\lambda)$.

Para resolver el problema (P) se trata de encontrar los valores de λ que satisfacen las condiciones *i* al *iii* del Teorema 4.

La condición *ii* (condición de complementariedad) establece que:

$$\lambda \left(b - \sum a_j \hat{x}_j(\lambda) \right) = 0, \text{ es decir que: } \begin{cases} \lambda = 0, \text{o bien :} \\ \sum a_j \hat{x}_j(\lambda) = b \end{cases}$$

Se discuten a continuación ambos casos.

- Si $\lambda = 0 \Rightarrow \hat{x}_j(\lambda) = 0$, y no se satisface la condición *i*: $\sum a_j \hat{x}_j(\lambda) \geq b$.
- Si $b = \sum a_j \hat{x}_j(\lambda) = \sum a_j \lambda a_j \Rightarrow b = \lambda \sum a_j^2$.

$$\text{Por lo tanto } \lambda = \bar{\lambda} = b / \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

Con este valor de λ es válido que $\lambda \geq 0$, lo cual equivale a *iii*; y es válido que $\sum a_j \hat{x}_j(\lambda) = b$, que equivale a *i* y *ii*. Por lo tanto $\bar{\lambda}$ satisface el Teorema 4, es decir que $\hat{x}_j = \hat{x}_j(\bar{\lambda}) = a_j b / \sum a_k^2$ es una solución óptima de (P). El valor óptimo es:

$$f(\hat{x}) = \frac{1}{2} \sum a_j^2 b^2 / (\sum a_k^2)^2 = \frac{1}{2} b^2 \sum a_k^2 / (\sum a_k^2)^2 = \frac{1}{2} b^2 / \sum a_k^2$$

Ejemplo 2: El problema del mochilero o “Knapsack Problem” (caso continuo).

Considérese el problema del mochilero, definido como sigue:

$$(KP) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \sum_{j=1}^n a_j x_j \\ \text{sujeto a :} \\ \sum_{j=1}^n b_j x_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq 1 \end{array} \right.$$

Siendo $a_j, b_j, b > 0$.

Se trata del problema de cargar de víveres una mochila de volumen b para un viaje.

Se debe elegir entre n comestibles; de cada uno de ellos hay existencias por un volumen b_j con un poder nutricional total a_j ; x_j representa la parte que el mochilero deberá cargar de las existencias del alimento j -ésimo.

Los alimentos tienen distinto “valor” que es su poder nutricional por unidad de volumen ($c_j = a_j / b_j$). Parece natural elegir a los comestibles en orden decreciente de valor nutricional. Supóngase que se cumple $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$.

Se propone el siguiente procedimiento para llenar la mochila:

“asignar $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, etc. hasta llegar al alimento k -ésimo, el cual no cabe totalmente, por lo que se coloca todo cuanto quepa ($0 \leq x_k < 1$)”.

Se probará que ésta es una solución óptima utilizando relajación lagrangeana.

Se construye la relajación lagrangeana (KP_λ) de (KP) (previamente se plantea el problema como uno de minimización)

$$(KP_\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_x \sum_{j=1}^n (-a_j + \lambda b_j)x_j - \lambda b \\ \text{sujeto a :} \\ 0 \leq x_j \leq 1 \end{array} \right.$$

(KP_λ) se descompone en un problema ($KP_{\lambda,j}$) para cada j .

$$(KP_{\lambda,j}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_{x_j} (-a_j + \lambda b_j)x_j \\ \text{sujeto a :} \\ 0 \leq x_j \leq 1 \end{array} \right.$$

Nótese que si $-a_j + \lambda b_j > 0$, es decir: si $\lambda > a_j / b_j = c_j$, el valor minimal se presenta en $x_j(\lambda) = 0$. De la misma forma, si $\lambda < c_j$ se obtiene $x_j(\lambda) = 1$, y si $\lambda = c_j$, se puede elegir $x_j \in [0,1]$.

Sea $\lambda = c_k$, donde k es el comestible que (de acuerdo a lo anterior) no entraba totalmente en la mochila.

Si $j < k$, entonces $c_j \geq \lambda$ y por lo tanto: $\hat{x}_j(\lambda) = 1$

Si $j > k$, entonces $c_j < \lambda$, y por lo tanto: $\hat{x}_j(\lambda) = 0$.

$x_k(\lambda)$ se puede elegir tal que $\hat{x}_k(\lambda) \in [0,1]$.

La solución hallada intuitivamente, soluciona el problema relajado con $\lambda = c_k$.

Además se cumple $\lambda \geq 0$ y $\sum a_j \hat{x}_j(\lambda) = b$ por lo cual $\hat{x}(\lambda)$ satisface las condiciones *i* al *iii* del Teorema 4. Por lo tanto $\hat{x}(\lambda)$ es solución óptima de (KP).

En resumen:

El Problema del mochilero:

$$(KP) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \sum_{j=1}^n a_j x_j \\ \text{sujeto a :} \\ \sum_{j=1}^n b_j x_j \leq b \\ 0 \leq x_j \leq 1 \end{array} \right.$$

(con a_j, b_j y $b > 0$) se soluciona, en el caso continuo, asignando variables iguales a 1 en orden de valor, es decir, en orden descendiente de a_j / b_j y sin exceder la disponibilidad b del recurso.

Sea x_k la variable que violaría la restricción si le fuera asignado el valor 1. Para esta variable se elige un valor menor que 1 y de modo que la restricción se satisfaga exactamente.

Ejemplo 3: Encontrar un óptimo global al siguiente problema:

$$(P) \begin{cases} \min \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \\ \text{sujeto a} \\ \sum_{i=1}^n \left(b_i x_i + a_i \sum_{j=1}^n p_j x_j \right) \geq b_0 \\ x_i > 0 \quad \forall i = 1..n \end{cases}$$

Sabiendo que $p_i > 0$, $a_i > 0$, $b_i > 0 \quad \forall i = 1..n$ y $b_0 > 0$

Primero reescribimos la restricción:

$$\sum_{i=1}^n \left(b_i x_i + a_i \sum_{j=1}^n p_j x_j \right) = b_1 x_1 + a_1 p_1 x_1 + a_1 p_2 x_2 + \dots + a_1 p_n x_n + \dots + b_n x_n + a_n p_1 x_1 + a_n p_2 x_2 + \dots + a_n p_n x_n =$$

$$\sum_{i=1}^n b_i x_i + p_i x_i A = \sum_{i=1}^n (b_i + A \cdot p_i) x_i$$

Siendo $A = \sum_{j=1}^n a_j$.

Por lo tanto, el problema puede ser reescrito así:

$$(P) \begin{cases} \min \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \\ \text{sujeto a} \\ b_0 - \sum_{i=1}^n (b_i + A \cdot p_i) x_i \leq 0 \\ x_i > 0 \quad \forall i = 1..n \end{cases}$$

Hallamos el problema P_λ , relajando la restricción:

$$(P_\lambda) \begin{cases} \min \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 - \lambda (b_i + A \cdot p_i) x_i + \lambda b_0 \\ \text{sujeto a} \\ x_i > 0 \quad \forall i = 1..n \end{cases}$$

Eliminando el término independiente y separando el problema, tenemos:

$$(P_{\lambda,j}) \begin{cases} \min & a_j x_j^2 - \lambda(b_j + A \cdot p_j)x_j \\ \text{sujeto a} & x_j > 0 \quad \forall j = 1..n \end{cases}$$

Como $a_j > 0$, la función objetivo es convexa. Entonces, encontramos el óptimo derivando:

$$2a_j x_j - \lambda(b_j + A \cdot p_j) = 0 \Rightarrow x_j(\lambda) = \frac{\lambda(b_j + A \cdot p_j)}{2a_j}$$

Imponiendo la condición de complementariedad, tenemos que

$$\lambda \left(b_0 - \sum_{i=1}^n (b_i + A \cdot p_i) x_i(\lambda) \right) = 0$$

Si $\lambda = 0$, la solución no es factible pues se violaría la restricción $x_i > 0$.

Entonces

$$\sum_{i=1}^n (b_i + A \cdot p_i) x_i = b_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (b_i + A \cdot p_i) \frac{\lambda(b_i + A \cdot p_i)}{2a_i} = b_0 \Rightarrow \lambda = \frac{b_0}{\sum_{i=1}^n \frac{(b_i + A \cdot p_i)^2}{2a_i}}$$

Finalmente, la solución óptima se obtiene sustituyendo ese valor de λ :

$$\bar{x}_j = \frac{b_0(b_j + A \cdot p_j)}{2a_j \sum_{i=1}^n \frac{(b_i + A \cdot p_i)^2}{2a_i}} = \frac{b_0(b_j + A \cdot p_j)}{a_j \sum_{i=1}^n \frac{(b_i + A \cdot p_i)^2}{a_i}}$$

Con condiciones de igualdad, el Teorema 4 tiene una forma más sencilla.

Teorema 5:

Si \hat{x}_λ es una solución óptima del problema (M_λ) que cumple:

$$g(\hat{x}_\lambda) = 0$$

entonces \hat{x}_λ es una solución óptima de (M_-) .

Prueba:

Se utiliza el Corolario 1.1 y su notación:

(M_λ) es una relajación de (M_-) $\forall \lambda \in \mathbb{R}^m$ por el Teorema 3.

\hat{x}_λ es solución óptima de (M_λ) por hipótesis.

$\hat{x}_\lambda \in F$ porque se cumple $\hat{x}_\lambda \in X$, y $g(\hat{x}_\lambda) = 0$.

$$f_L(\hat{x}_\lambda) = f(\hat{x}_\lambda) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\hat{x}_\lambda) = f(\hat{x}_\lambda) \text{ pues } g_i(\hat{x}_\lambda) = 0, \forall i.$$

la conclusión se desprende ahora del Corolario citado.

Teorema 6:

Sean f y g_i funciones convexas y diferenciables. Si $\bar{x} \in X$ y $\bar{\lambda} \in \Re^m$, satisfacen:

- i $g(\bar{x}) \leq 0$.
- ii $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0$.
- iii $\bar{\lambda} \geq 0$.
- iv $\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$

entonces \bar{x} es óptimo de (M_{\leq}) .

Prueba:

i – iii son las condiciones del Teorema 4.

Se demostrará a continuación que iv significa que \bar{x} es solución óptima de (M_λ) :

$f = f + \sum \lambda_i g_i$ es una función convexa porque $\lambda_i \geq 0$ implica que $\lambda_i g_i$ es convexa y las sumas de funciones convexas son convexas.

Como $\nabla f = \nabla f + \sum \lambda_i \nabla g_i$, la condición iv implica que $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

Por ser $f_\lambda(x)$ una función convexa, se cumple $\forall x \in X$ que:

$$f_\lambda(x) \geq f_\lambda(\bar{x}) + \nabla f_\lambda(\bar{x})(x - \bar{x}) = f_\lambda(\bar{x})$$

y por lo tanto, \bar{x} es solución óptima de (M_λ) .

La tesis se desprende del Teorema 4.

La mayoría de los teoremas de esta sección suponen que $\hat{x}_L \in F$, o sea que la solución óptima del problema relajado pertenece a la región factible del problema original. Si $\hat{x}_L \notin F$ se puede, a partir de \hat{x}_L , encontrar un punto $\tilde{x}_L \in F$ que no es mucho más caro, lo cual se deduce del siguiente teorema:

Teorema 7:

Sean

(G_L) una relajación de (G) .

\hat{x}_L y \hat{x} soluciones óptimas de (G_L) y (G) respectivamente.

\tilde{x}_L una solución no necesariamente óptima de (G_L) , que cumple $\tilde{x}_L \in F$.

En estas condiciones se cumple: $f_L(\hat{x}_L) \leq f(\hat{x}) \leq f(\tilde{x}_L)$.

Prueba:

$f_L(\hat{x}_L) \leq f(\hat{x})$, por el Teorema 1.

$f(\hat{x}) \leq f(\tilde{x}_L)$, por ser \hat{x} solución óptima de (G) .

luego: $f_L(\hat{x}_L) \leq f(\hat{x}) \leq f(\tilde{x}_L)$

2.6 Dualidad

En el capítulo anterior se resolvieron problemas de optimización determinando (análiticamente) los multiplicadores de Lagrange. Esto rara vez se puede hacer en la práctica, y en su lugar lo usual es determinar los multiplicadores de Lagrange resolviendo un nuevo problema de optimización, llamado *Problema Dual* el cual consiste en buscar la relajación “más fuerte posible”, o sea, una relajación cuyo valor óptimo esté tan próximo como sea posible del valor óptimo del problema original.

2.6.1 Problemas duales. Condiciones de optimalidad

Considérese un problema de Programación Matemática (P) cuyas restricciones son todas del tipo \leq (esta suposición será al sólo efecto de fijar ideas):

$$(P) \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{sujeto a :} \\ \quad g(x) \leq 0 \\ \quad x \in X \end{cases}$$

La relajación lagrangeana de este problema es (P_λ) :

$$(P_\lambda) \begin{cases} \text{Min } f(x) + \lambda^T g(x) \\ \text{sujeto a :} \\ \quad x \in X \end{cases}$$

Sean: p el valor óptimo de la función objetivo de (P) y $\Phi(\lambda)$ el valor óptimo de la función objetivo de (P_λ) , para cada λ .

$$p = \text{Min} \left\{ f(x) \mid g(x) \leq 0, x \in X \right\}$$

$$\Phi(\lambda) = \text{Min} \left\{ f(x) + \lambda^T g(x) \mid x \in X \right\}$$

Puesto que (P_λ) es una relajación de (P) se cumple que $\lambda \geq 0$ y entonces $\Phi(\lambda) \leq p$.

Es entonces natural elegir la relajación más fuerte posible, o sea: elegir $\lambda \geq 0$ tal que $\Phi(\lambda)$ sea maximal. Esto nos da el *problema dual*:

$$(D) \begin{cases} \text{Max } \Phi(\lambda) \\ \text{sujeto a :} \\ \quad \lambda \geq 0 \end{cases}$$

(P) se llama *problema primal* del problema (D) .

Si se tiene restricciones de igualdad en el problema primal no habrá exigencia de positividad en el problema dual. Los teoremas que siguen son válidos también en este

caso, ya que se construyen a partir de que $\Phi(\lambda) \leq p$ para los valores de λ que dan relajaciones.

Sea d el valor óptimo de (D) . p y d son entonces los valores óptimos *primal* y *dual* respectivamente.

Observación: $d \leq p$

Prueba:

(P_λ) es una relajación de (P) , por lo tanto $\Phi(\lambda) \leq p, \forall \lambda \geq 0$

Pero entonces: $d = \text{Max} \{ \Phi(\lambda) : \lambda \geq 0 \} \leq p$

No siempre ocurre que $d = p$, por eso se define la “discrepancia de dualidad” (*duality gap*): $\delta = p - d$

Nótese que siempre se cumple que $\delta \geq 0$.

Ejemplo 4:

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_x \sum_{j=1}^n x_j^2 / 2 \\ \text{sujeto a :} \\ \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq b \\ \quad x_j \geq 0 \end{array} \right.$$

con a_j y b positivos.

Se plantea el problema relajado lagrangeano, tal como se hizo en el capítulo de relajaciones:

$$(P_\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_x \sum_{j=1}^n (x_j^2 / 2 - \lambda a_j x_j) + \lambda b \\ \text{sujeto a :} \\ \quad x_j \geq 0 \end{array} \right.$$

La solución de (P_λ) es $\hat{x}_j(\lambda) = \lambda a_j$, según lo visto en relajaciones.

Entonces la función objetivo del problema dual es:

$$\Phi(\lambda) = \sum_{j=1}^n ((\lambda a_j)^2 / 2 - \lambda a_j \lambda a_j) + \lambda b = -\frac{1}{2} (\sum a_j^2) \lambda^2 + b \lambda$$

De modo que el problema dual es:

$$(D) \begin{cases} \text{Max}_{\lambda} \Phi(\lambda) = -\frac{1}{2} (\sum a_j^2) \lambda^2 + b\lambda \\ \text{sujeto a :} \\ \quad \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Φ es una función cóncava y tiene, por lo tanto, un valor máximo cuando $d\Phi/d\lambda = 0$ (suponiendo que ésto brinde una solución factible). Se obtiene entonces:

$$0 = \frac{d\Phi}{d\lambda} = -(\sum a_j^2)\lambda + b, \text{ o sea: } \hat{\lambda} = b/(\sum a_j^2) \geq 0, \text{ que es factible.}$$

Por lo tanto $\hat{\lambda} = b/(\sum a_j^2)$ es una solución óptima del problema dual. Este es el mismo multiplicador de Lagrange que se halló en el capítulo Relajaciones. Además:

$$d = \Phi(\hat{\lambda}) = -\frac{1}{2} (\sum a_j^2) b^2 / (\sum a_j^2)^2 + bb / \sum a_j^2 = \frac{1}{2} b^2 / \sum a_j^2$$

El valor óptimo del problema primal, calculado en el capítulo de Relajaciones es: $p = \frac{1}{2} b^2 / \sum a_j^2$. Por lo tanto en este caso: $\delta = p - d = 0$.

Nótese que la solución óptima del problema primal $\hat{x}_j = a_j b / \sum a_k^2 = \hat{x}_j(\lambda)$ es igual a la solución óptima del problema relajado con la solución óptima del problema dual como multiplicador de Lagrange. Por lo tanto, se puede determinar la solución primal óptima con la ayuda de la solución óptima dual.

Teorema 9:

Si \bar{x} y $\bar{\lambda}$ son soluciones factibles de (P) y (D) respectivamente, entonces cumplen:

$$\Phi(\bar{\lambda}) \leq f(\bar{x})$$

Prueba:

$$\Phi(\bar{\lambda}) \leq d \leq p \leq f(\bar{x})$$

Corolario 9.1:

Sean \bar{x} y $\bar{\lambda}$ soluciones factibles de (P) y (D) respectivamente, que cumplen:

$$\Phi(\bar{\lambda}) = f(\bar{x}).$$

En esas condiciones \bar{x} y $\bar{\lambda}$ son soluciones óptimas de (P) y (D) respectivamente.

Prueba:

Sea λ una solución factible cualquiera del problema dual, de acuerdo al Teorema anterior tenemos: $\Phi(\lambda) \leq f(\bar{x}) = \Phi(\bar{\lambda})$

y en consecuencia: $\bar{\lambda}$ es solución óptima del problema (D)

Análogamente se demuestra que \bar{x} es solución óptima de (P)

Este corolario brinda una nueva interpretación del Teorema 4. Bajo las condiciones del Teorema es válido que \hat{x}_λ y λ son factibles para (P) y (D) y además que $\Phi(\lambda) = f(\hat{x}_\lambda) + \sum \lambda_i g_i(\hat{x}_\lambda) = f(\hat{x}_\lambda)$. La optimalidad se desprende también del Corolario anterior.

Observación: $\Phi(\lambda)$ es una función cóncava.

En los casos en que se puede determinar en forma explícita (analítica) la función objetivo del problema dual (Φ) vale la pena, en general, resolver el problema dual en lugar del primal y después determinar una solución primal con la ayuda de los teoremas que siguen. El gradiente de la función objetivo dual se obtiene a través del siguiente teorema (además de tomar la derivada de la función Φ deducida analíticamente).

Teorema 10:

Si se cumple que X es cerrado y acotado, y que (P_λ) tiene solución óptima $\hat{x}(\lambda)$ única entonces: $\nabla\Phi(\lambda) = g(\hat{x}(\lambda))^T$

Prueba:

Sean

$$\Psi(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x) = f(x) + g(x)^T \lambda$$

$$\Phi(\lambda) = \text{Min}_{x \in X} \{f(x) + \lambda^T g(x)\} = \text{Min}_{x \in X} [\Psi(x, \lambda)]$$

Nótese que $\nabla_{\lambda} \Psi(x, \lambda) = g(x)^T$.

$$\text{Además } \nabla\Phi(\lambda) = \nabla_x \Psi[x(\lambda), \lambda] \nabla_{\lambda} x(\lambda) + \nabla_{\lambda} \Psi[x(\lambda), \lambda]$$

Como $x(\lambda)$ minimiza $\Psi(x, \lambda)$ en el sentido de las x ; $\nabla_x \Psi[x(\lambda), \lambda] = 0$

$$\text{Luego: } \nabla\Phi(\lambda) = \nabla_{\lambda} \Psi[x(\lambda), \lambda] = g(\hat{x}(\lambda))^T$$

Ejemplo (continuación): Se aplicará el Teorema en el ejemplo anterior

Sabemos que $\hat{x}_j(\lambda) = \lambda a_j$ y que $\Phi(\lambda) = -\frac{1}{2} \sum (a_j^2) \lambda^2 + \lambda b$

$$g(\hat{x}_{\lambda}) = b - \sum a_j x_j(\lambda) = b - \sum a_j \lambda a_j$$

Además $\Phi'(\lambda) = -\sum a_j^2 \lambda + b$, que concuerda con $\Phi'(\lambda) = g(\hat{x}(\lambda))$ como debía ser de acuerdo al teorema precedente.

Cuando $\lambda = \bar{\lambda}$ se cumple que $\Phi'(\lambda) = g(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) = 0$ y por lo tanto $x_{\bar{\lambda}}$ es una solución factible. Además $\bar{\lambda} g(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) = 0$, por lo tanto: $f(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) = f(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) + \bar{\lambda} g(\hat{x}_{\bar{\lambda}}) = \Phi(\bar{\lambda})$.

La optimalidad de $\hat{x}_{\bar{\lambda}}$ y de $\bar{\lambda}$ se desprende del Corolario 9.1.

Cabe preguntarse si en general se puede tener la esperanza de encontrar la solución óptima del problema primal a través de la solución óptima del dual. Los siguientes teoremas responden parcialmente a esta inquietud.

Teorema 11:

Si X es cerrado y acotado, $\bar{\lambda}$ es solución óptima de (D) y $(P_{\bar{\lambda}})$ tiene una solución óptima $\hat{x}(\bar{\lambda})$ única. Entonces se cumple:

$$i \quad \bar{\lambda}^T g(\hat{x}(\bar{\lambda})) = 0$$

$$ii \quad g(\hat{x}(\bar{\lambda})) \leq 0$$

Prueba:

$\hat{x}(\bar{\lambda})$ es solución óptima única de $(P_{\bar{\lambda}})$ entonces, por el Teorema 10

$$\nabla \Phi(\bar{\lambda}) = g(\hat{x}(\bar{\lambda}))^T \quad (*)$$

Como $\bar{\lambda}$ es solución óptima de (D) , y $\Phi(\lambda)$ es diferenciable, se cumple que:

a) $\nabla \Phi(\bar{\lambda})\bar{\lambda} = 0$ b) $\nabla \Phi(\bar{\lambda}) \leq 0$

Introduciendo $(*)$ en *a* y *b* se obtienen *i* y *ii*.

Los puntos *i* y *ii* del Teorema 11 coinciden con los *i* y *ii* del Teorema 4. La condición *iii* ($\lambda \geq 0$) se cumple automáticamente. Del Teorema 4 y del Corolario 9.1 se deduce el teorema siguiente.

Teorema 12:

Si X es cerrado y acotado, $\bar{\lambda}$ es solución óptima de (D) , y $(P_{\bar{\lambda}})$ tiene un óptimo único $\hat{x}(\bar{\lambda})$. Entonces $\hat{x}(\bar{\lambda})$ es solución óptima de (P) .

Solamente algunos problemas muy especiales pueden ser resueltos con la técnica del capítulo Relajaciones, que consiste en resolver analíticamente el problema relajado para valores fijos de los parámetros lagrangeanos, y posteriormente determinar dichos parámetros de modo que se cumplan las condiciones del Teorema 4.

Con la ayuda del problema dual se obtiene una técnica general para determinar los valores óptimos de los parámetros de Lagrange, a partir de los cuales se puede calcular las soluciones óptimas del problema primal, de forma que el “duality gap” sea nulo ($\delta=0$).

2.7 Programacion Lineal

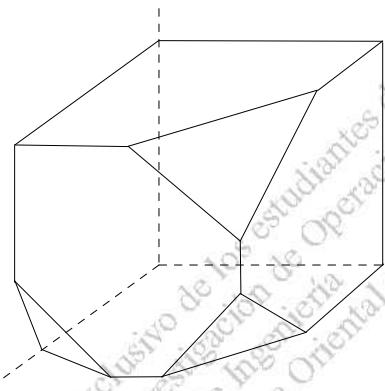
En este capítulo se exponen la teoría y los métodos de la Programación Lineal (PL), que comprende los problemas de optimización donde se tiene una función objetivo lineal y restricciones lineales. Esta es la clase de problemas más importante y más usada, entre otras cosas porque se puede resolver problemas muy grandes en poco tiempo de cálculo y con bajo consumo de recursos computacionales, y también porque esta teoría inspira el desarrollo de otras áreas.

2.7.1 Generalidades

En los problemas de programación lineal (PL) se tiene una función objetivo lineal y restricciones lineales. En general se exige también la positividad de las variables. Un problema general de PL se puede escribir en la forma siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sujeto a :} \\ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, k \\ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = k+1, \dots, m \\ \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, l \end{array} \right.$$

La región factible de un problema de PL es un **conjunto poliédrico**. En un espacio tridimensional, un poliedro es un conjunto limitado por superficies planas como lo muestra el ejemplo de la figura:



El método predominante para la resolución de problemas de PL es el llamado **método simplex**, el cual utiliza una estrategia “active set”, que en este caso implica que se recorran las aristas de la región factible, de vértice en vértice.

El método simplex exige que se haya formulado el problema en su forma “standard”, en la que sólo se tienen restricciones de igualdad (y la exigencia de positividad de las variables). Sin embargo, la formulación más usual en el contexto teórico es la forma “canónica”, en que se tienen solamente restricciones de desigualdad (y condiciones de positividad de las variables). Cualquier problema de PL se puede formular tanto en forma canónica como en forma standard.

2.7.2 Forma canónica y dualidad

La forma canónica es la más adecuada para razonamientos teóricos relacionados con la dualidad:

$$(PL_c) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sujeto a :} \\ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

Utilizando notación vectorial y matricial se obtiene una forma más compacta de escribir el problema (PL_c):

$$(PL_c) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = c^T x \\ \text{sujeto a :} \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

Donde $\{c, x\} \in \Re^n$, $b \in \Re^m$, y $A \in \Re^{m \times n}$.

El problema dual del problema de PL en la forma canónica tiene la forma que se deduce del teorema siguiente:

Teorema 13:

El problema dual (PD_c) del problema primal (PL_c) es:

$$(PD_c) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } b^T u \\ \text{sujeto a :} \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{array} \right.$$

Prueba:

Antes de hallar el dual se reescribe el problema primal en la forma utilizada para la definición de dualidad:

$$(PL_c) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } c^T x \\ \text{sujeto a :} \\ b - Ax \leq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

Se decide no relajar las exigencias de positividad ($x \geq 0$). La función objetivo del dual es $\Phi(\lambda) = \text{Min}_x \{c^T x + \lambda^T (b - Ax) | x \geq 0\} = \text{Min}_x \{(c^T - \lambda^T A)x + \lambda^T b | x \geq 0\}$, que equivale a:

$$\Phi(\lambda) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}_x \left\{ \sum_{j=1}^n (c^T - \lambda^T A)_j x_j + \lambda^T b | x_j \geq 0, \forall j \right\} = \\ \left\{ \begin{array}{l} \lambda^T b, \text{ si } (c^T - \lambda^T A)_j \geq 0, \forall j \\ -\infty, \text{ si } \exists j \text{ tal que } (c^T - \lambda^T A)_j < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Como se desea maximizar $\Phi(\lambda)$, el valor $-\infty$ no interesa. Se tiene una relajación si se cumple que $\lambda \geq 0$. El problema dual toma entonces la forma:

$$(PD_c) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \Phi(\lambda) \\ \text{sujeto a :} \\ \lambda \geq 0 \end{array} \right.$$

y puede ser escrito como:

$$(PD_c) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \lambda^T b \\ \text{sujeto a :} \\ \quad c^T - \lambda^T A \geq 0 \\ \quad \lambda \geq 0 \end{array} \right.$$

Transponiendo en la función objetivo y en la restricción se obtiene:

$$(PD_c) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } b^T \lambda \\ \text{sujeto a :} \\ \quad A^T \lambda \leq c \\ \quad \lambda \geq 0 \end{array} \right.$$

La tesis se deduce sustituyendo λ por u .



Teorema 14:

El problema dual del problema dual (PD_c) es el problema primal (PL_c) .

Prueba:

Se sugiere hacer la relajación lagrangeana de (PD_c) y continuar de la misma forma que en el Teorema 13.



Se pueden construir problemas duales de problemas cuyas restricciones sean de igualdad o desigualdad, y cuyas variables tengan o no restricción de signo.

Debido a que las variables duales se interpretan por medio de relajación lagrangeana, se observa que restricciones de desigualdad conducen a variables duales restringidas en su signo, en tanto que restricciones de igualdad conducen a variables duales sin limitación de signo.

Además, como las variables primales son variables duales para el problema dual, se concluye que variables primales con restricción de signo conducen a restricciones de desigualdad en el dual, mientras que las variables primales no restringidas respecto al signo se relacionan con restricciones de igualdad en el problema dual.

Todo lo que precede se formula en el siguiente teorema, en un modo más general.

Teorema 15:

$$\text{El problema general de PL: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } c_1^T x_1 + c_2^T x_2 \\ \text{sujeto a :} \\ \quad A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1 \\ \quad A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \geq b_2 \\ \quad x_1 \text{ libre,} \\ \quad x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Tiene como dual a } \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } b_1^T u_1 + b_2^T u_2 \\ \text{sujeto a :} \\ \quad A_{11}^T u_1 + A_{21}^T u_2 = c_1 \\ \quad A_{12}^T u_1 + A_{22}^T u_2 \leq c_2 \\ \quad u_1 \text{ libre,} \\ \quad u_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

2.7.3 Forma standard

Para la resolución numérica de problemas de PL se usa la llamada **forma standard**:

$$(PL_s) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } c^T x \\ \text{sujeto a :} \\ \quad Ax = b \quad (b \geq 0) \\ \quad x \geq 0 \end{array} \right.$$

En la forma standard se asume que $b \geq 0$. Si esta condición no se cumpliera en algún caso particular, basta multiplicar por -1 las ecuaciones que tienen signo negativo en b .

2.7.4 Transformaciones entre distintas formas

a) *de restricciones de desigualdad a restricciones de igualdad*

Una desigualdad puede llevarse a una igualdad introduciendo una nueva variable no negativa, llamada **variable de holgura**.

La restricción $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ se transforma en una restricción de igualdad, y se agrega una condición de positividad:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y = b_i \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

Así, con la ayuda de variables de holgura, se llevan a la forma standard los problemas expresados en forma canónica.

$$\text{El problema } (PL_c) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } c^T x \\ \text{sujeto a :} \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \text{ es equivalente a } (P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } c^T x \\ \text{sujeto a :} \\ Ax - y = b \\ x, y \geq 0 \end{array} \right.$$

b) de restricciones de igualdad a restricciones de desigualdad

El sistema de ecuaciones $Ax = b$ puede ser fácilmente transformado en dos desigualdades:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax \leq b \\ Ax \geq b \end{array} \right. \text{ o bien: } \left\{ \begin{array}{l} Ax \leq b \\ -Ax \leq -b \end{array} \right.$$

c) de variables libres a variables con restricción de signo

El método simplex puede ser aplicado con variables libres.

Una variable libre puede, de todas formas, ser transformada en una variable con restricción de signo si se la escribe como diferencia entre dos variables positivas:

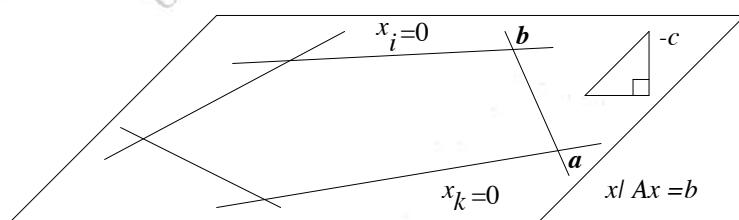
$$x = x^+ - x^- , \quad x^+, x^- \geq 0 .$$

2.7.5 Método Simplex

Considérese el siguiente problema en su forma standard:

$$(PL_s) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = c^T x \\ \text{sujeto a :} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \quad (x \in \Re^n) \end{array} \right.$$

Las soluciones del sistema de ecuaciones $Ax = b$ están contenidas en un hiperplano de \Re^n , en el cual además están presentes las restricciones de positividad $x \geq 0$.



Si $A \in \Re^{m \times n}$ es de rango completo, es decir: sus filas son linealmente independientes, entonces el hiperplano $\{x \mid Ax = b\}$ tiene dimensión $n-m$.

Si se conoce una solución factible (p. ej.: a), se busca una solución factible mejor en la dirección negativa del gradiente de z , para minimizar la función objetivo.

Hay dos formas de atacar este problema:

- a) proyectar $-c$ en el hiperplano $\{x \mid Ax = b\}$ y moverse en la dirección proyectada.
- b) resolver m variables con la ayuda de la ecuación $Ax = b$ y expresarlas con la ayuda de las restantes $n-m$ variables.

El método simplex utiliza la segunda variante.

Sean las primeras m variables las que se expresan con la ayuda de las demás.

La ecuación $Ax = b$ se puede escribir como

$$A_B x_B + A_N x_N = b$$

donde $x_B \in \Re^m$ contiene las m primeras componentes de x , $x_N \in \Re^{n-m}$ contiene a las $n-m$ restantes. La matriz $A_B \in \Re^{m \times m}$ contiene las primeras m columnas de A , en tanto que $A_N \in \Re^{m \times (n-m)}$ contiene a las restantes.

Si $A_B \in \Re^{m \times m}$ tiene rango completo, se la puede invertir (lo cual constituye una condición para poder calcular x_B). Asumiendo que A_B es invertible, se obtiene la siguiente expresión:

$$x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b$$

y luego se expresa x_B como función de x_N :

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$$

Variando libremente x_N , se obtiene a partir de la expresión precedente un valor de x_B que hace que se satisfaga la condición $Ax = b$. Si se elige $x_N = 0$ se obtiene $x_B = A_B^{-1} b$, éste tipo de soluciones se llama **solución básica**.

La matriz A_B es la correspondiente **matriz básica** (porque sus columnas forman una base de \Re^m). Las componentes de x_B se llaman **variables básicas**, y las de x_N : **variables no básicas**. La solución básica $x_B = A_B^{-1} b$, $x_N = 0$, es **factible** si $x \geq 0$, es decir, si $x_B \geq 0$.

Las soluciones básicas factibles se corresponden con los vértices (puntos extremos) de la región de soluciones factibles.

Se puede eliminar x_B de la función objetivo. Se comienza por expresar el vector $c^T \in \Re^n$ como $c^T = (c_B^T, c_N^T)$, se obtiene así la siguiente forma de la función objetivo:

$$\begin{aligned} z &= c_B^T x_B + c_N^T x_B \\ &= c_B^T A_B^{-1} b - c_B^T A_B^{-1} A_N x_N + c_N^T x_N \\ &= (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N + c_B^T A_B^{-1} b \\ &= \bar{c}_N^T x_N + \bar{z} \end{aligned}$$

En la solución básica $x_N = 0$ y $z = \bar{z}$.

$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$ se llama **costo reducido**. El costo reducido indica como varía la función objetivo al variar x_N , dos términos componen el costo reducido: c_N^T indica la

incidencia *directa* de x_N sobre la función objetivo, en tanto que $-c_B^T A_B^{-1} A_N$ refleja la influencia *indirecta* de x_N a través de las variaciones que provoca en x_B .

Definiendo $\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N$ y $\bar{b} = A_B^{-1} b$ se puede reescribir el problema de PL en su forma standard del siguiente modo:

$$(PL_s) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = \bar{c}_N^T x_N + \bar{z} = \bar{z} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j \\ \text{sujeto a :} \\ \quad x_B = \bar{b} - \bar{A}_N x_N \\ \quad x_B, x_N \geq 0. \end{array} \right.$$

La solución básica correspondiente es $(x_B, x_N) = (\bar{b}, 0)$. Supóngase que dicha solución básica es factible, es decir: $\bar{b} \geq 0$.

Si alguna componente de \bar{c}_N , por ejemplo \bar{c}_j , es negativa, se obtendrá un valor mejor de la función objetivo incrementando x_j desde su valor nulo actual.

Si sólo aumenta x_j , el incremento en x_B se calcula como $x_B = \bar{b} - \bar{a}_j x_j$ donde \bar{a}_j es la columna correspondiente a x_j en \bar{A}_N . Esta solución es factible si $x_B \geq 0$, a continuación se estudian las condiciones que deben cumplirse para asegurar la factibilidad.

La ecuación $x_B = \bar{b} - \bar{a}_j x_j$ expresada por componentes queda: $(x_B)_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{ij} x_j$.

Si $\bar{a}_{ij} \leq 0$, entonces $(x_B)_i$ no decrece al aumentar x_j . En consecuencia el cumplimiento de la restricción $(x_B)_i \geq 0$ no está condicionado por la variación de x_j .

Si $\bar{a}_{ij} > 0$, entonces $(x_B)_i$ disminuye al aumentar x_j , y se hace cero cuando $x_j = \bar{b}_i / \bar{a}_{ij}$.

En consecuencia, la solución es factible si las variaciones de x_j cumplen que:

$$x_j \leq \text{Min}_i \{ \bar{b}_i / \bar{a}_{ij} \mid \bar{a}_{ij} > 0 \}.$$

Cuando $x_j = \text{Min}_i \{ \bar{b}_i / \bar{a}_{ij} \mid \bar{a}_{ij} > 0 \}$, una de las variables básicas se hace cero (la o las variables básicas para las cuales se obtiene el mínimo), lo cual equivale a haberse desplazado hacia un vértice adyacente al de partida en la representación geométrica del problema (p. ej. el punto b de la figura).

Es adecuado entonces realizar un cambio de sistema de coordenadas en el hiperplano $\{x \mid Ax = b\}$, x_j es ahora mayor que cero y se convierte en variable básica, al tiempo que la variable básica que tomó el valor cero se hace no básica.

Esta es la esencia del funcionamiento del método simplex, que fuera desarrollado por G.B. Dantzig a fines de los '40. El método se basa en que una solución factible dada puede ser mejorada si alguna componente de \bar{c}_N es negativa. El siguiente teorema indica lo que sucede cuando $\bar{c}_N \geq 0$.

Teorema 16

Si en el problema (PL_s) se cumple que $\bar{b} \geq 0$ y además $\bar{c}_N \geq 0$, entonces la solución básica correspondiente es óptima.

Prueba:

Se demostrará a través de relajaciones, utilizando el Corolario 1.1.

El problema (PL_s) es el mismo que (\bar{PL}_s) aunque expresado en forma distinta.

Se obtiene una relajación de (\bar{PL}_s) ignorando la restricción $x_B = \bar{b} - \bar{A}_N x_N$, el problema relajado es:

$$(\bar{PL}_{sr}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = \bar{z} + \bar{c}_N^T x_N = \bar{z} + \sum_{x_j \in x_N} \bar{c}_j x_j \\ \text{sujeto a :} \\ \quad x_B, x_N \geq 0 \end{array} \right.$$

- $(x_B, x_N) = (\bar{b}, 0)$ es una solución óptima de (\bar{PL}_{sr}) , porque $\bar{c}_j \geq 0$ y además se puede minimizar por separado en (\bar{PL}_{sr}) .
- $(x_B, x_N) = (\bar{b}, 0)$ es una solución factible de (\bar{PL}_s) por ser $x_N = 0$, y $\bar{b} \geq 0$.
- $(x_B, x_N) = (\bar{b}, 0)$ da el mismo valor de la función objetivo en (\bar{PL}_s) y en (\bar{PL}_{sr}) , porque ambos problemas tienen la misma función objetivo.

En consecuencia, $(x_B, x_N) = (\bar{b}, 0)$ cumple todas las condiciones del Corolario 1.1, y por lo tanto es solución óptima de (\bar{PL}_s) , luego: es solución óptima de (PL_s) .



Estructura básica del método simplex

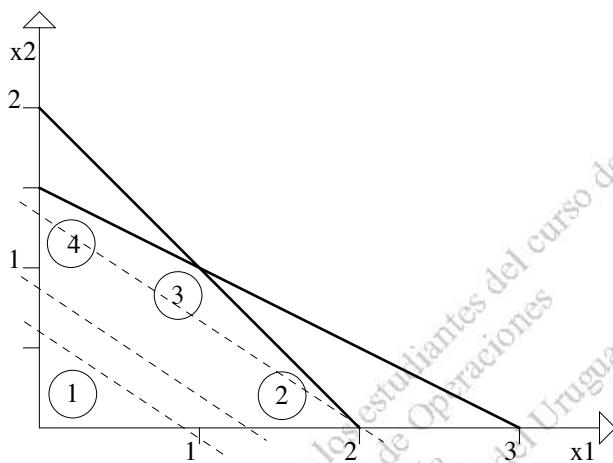
- 1.- Tomar una solución básica factible.
- 2.- Transformar el problema a la forma (\bar{PL}_s) resolviendo las variables básicas.
- 3.- Si $\bar{c}_j \geq 0 \ \forall j$ FIN: se halló una solución óptima.
- 4.- Si algún $\bar{c}_j < 0$, aumentar x_j hasta que algún $(x_B)_i = 0$. Se obtiene en ese caso una nueva solución básica. Volver al paso 2.

Forma tableau del método simplex

Se acostumbra exponer los cálculos manuales en una tabla (que puede ser fácilmente implementada en una computadora). Se explicará el uso a través de un ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a :} \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

El problema puede ser representado en la figura siguiente:



La región factible es el contorno delimitado por los vértices (1), (2), (3) y (4). Las líneas punteadas son la curvas de nivel de la función objetivo. La solución óptima se encuentra en el vértice (3). Se hallará dicha solución por el método simplex.

Se introducen en primer lugar las variables de holgura x_3 y x_4 para llevar el problema a la forma standard. También se cambia el signo a la función objetivo para obtener un problema de minimización:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } -2x_1 - 3x_2 \\ \text{sujeto a :} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{array} \right.$$

O en forma matricial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } (-2, -3, 0, 0)x \\ \text{sujeto a :} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}^4 \end{array} \right.$$

Nótese que las variables de holgura x_3 y x_4 son variables básicas adecuadas: están expresas en función de las otras variables, y están eliminadas de la función objetivo.

$$\begin{aligned}x_3 &= 2 - x_1 - x_2 \\x_4 &= 3 - x_1 - 2x_2\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones, en forma tableau, tiene la representación siguiente:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	1	1	0	2
1	2	0	1	3
-2	-3	0	0	0
•	•			

El tableau tiene la siguiente forma $\left[\begin{array}{c|c} A & b \\ c^T & 0 \end{array} \right]$.

Las variables básicas ya están resueltas, el tableau corresponde también al problema transformado (\overline{PL}_s).

Los puntos debajo de las columnas 3 y 4 indican que las variables x_3 y x_4 son básicas.

La solución básica correspondiente se obtiene asignando el valor cero a las variables no básicas (x_1, x_2).

Por lo tanto, la solución básica es: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 3$. Esta solución corresponde al vértice (1) en la figura.

La última línea del tableau muestra los costos reducidos. Debido a que $\bar{c}_1 < 0$ y $\bar{c}_2 < 0$, vale la pena aumentar x_1 o x_2 , como \bar{c}_2 es el más negativo, conviene elegir x_2 como nueva variable básica. El valor sombreado es aquel para el cual se obtiene el $\text{Min}_i \left\{ \bar{b}_i / \bar{a}_{ij} \mid \bar{a}_{ij} > 0 \right\}$. El sistema de ecuaciones, canonizando la columna correspondiente a x_2 , toma la forma:

x_1	X_2	x_3	x_4	b
1/2	0	1	-1/2	1/2
1/2	1	0	1/2	3/2
-1/2	0	0	3/2	9/2
•	•			

Puesto que sólo $\bar{c}_1 < 0$, conviene elegir x_1 como variable básica, obteniendo:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	2	-1	1
0	1	-1	0	1
0	0	1	1	5
•	•			

Se ha obtenido una solución óptima, pues $c_j > 0, \forall j$. Dicha solución óptima tiene las variables no básicas igualadas a cero y las variables básicas iguales a \bar{b} :

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0.$$

Método simplex, espacio de soluciones no acotado

Cuando $c_j < 0$, la variable no básica x_j correspondiente puede aumentar hasta hacer que alguna variable básica alcance el valor cero.

Si ocurre que $a_{ij} \leq 0 \forall i$, ninguna variable básica disminuye su valor al aumentar x_j , obteniéndose soluciones factibles para cualquier valor (positivo) de x_j .

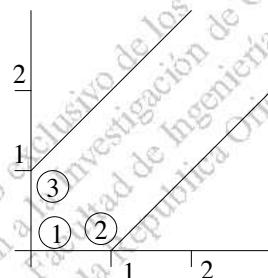
Además, como $c_j < 0$, la función objetivo disminuye con el aumento de x_j , de modo que decrecerá hacia $-\infty$ cuando x_j aumente hacia $+\infty$.

En estas condiciones se tiene un **valor óptimo no acotado**, en un **dominio infinito de soluciones factibles**.

El ejemplo siguiente ilustra estos conceptos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a :} \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_2 - x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

La región factible es la de la figura siguiente:



Introduciendo las variables de holgura x_3 y x_4 , y cambiando el signo de la función objetivo, el problema adquiere la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } -x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a :} \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_j \geq 0 \end{array} \right.$$

x_3 y x_4 son variables básicas adecuadas y el tableau es el siguiente:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	-1	1	0	1
-1	1	0	1	1
-1	-1	0	0	0

↑ • •

La solución básica correspondiente es $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1$, que corresponde al punto 1 de la figura. x_1 y x_2 tienen el mismo costo reducido negativo, se decide introducir x_1 como nueva variable básica.

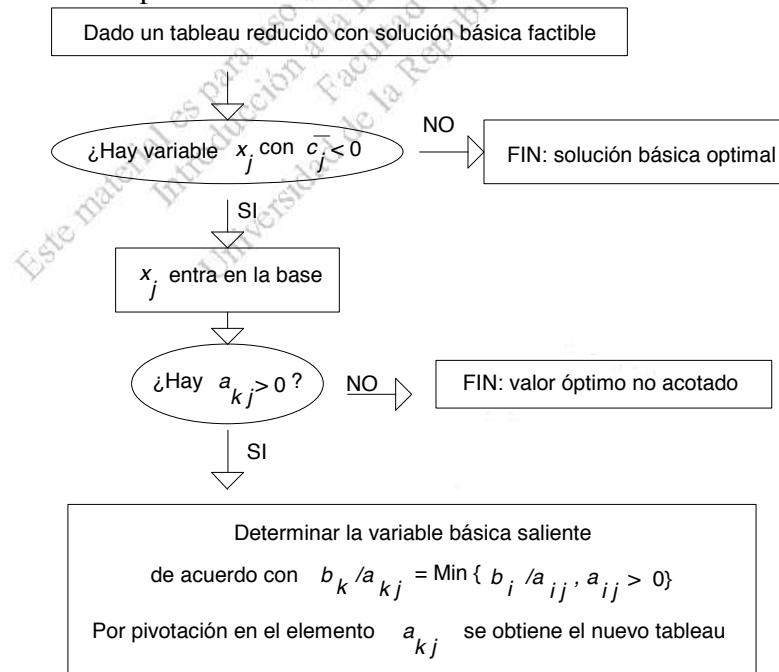
La variable saliente es la x_i (básica) correspondiente al $\text{Min}\{\bar{b}_i/\bar{a}_{i1} | \bar{a}_{i1} > 0\} = \text{Min}\{\frac{1}{1}, -\}\}$, lo cual ocurre en la fila 1. El elemento a_{11} se llama “pivot” y se utiliza para reformular el sistema de ecuaciones de modo que la columna correspondiente a x_1 sea canónica. Se obtiene el siguiente tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	-1	1	0	1
0	0	1	1	2
0	-2	1	0	1
•	↑	•		

La solución básica correspondiente es $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 2$, que es el punto 2 de la figura.

En este caso sólo x_2 tiene costo reducido negativo y en consecuencia es la única candidata a ser variable básica. La variable saliente se halla a partir de $\text{Min}\{\bar{b}_i/\bar{a}_{i2} | \bar{a}_{i2} > 0\} = \text{Min}\{-, -\} = \infty$, es decir que ninguna variable básica limita el crecimiento de x_2 por lo que se tiene un valor óptimo no acotado. Se observa en la figura que eligiendo la arista $[2, \infty)$ se puede obtener valores arbitrariamente altos de la función objetivo.

A modo de resumen de los dos últimos capítulos se presenta el siguiente diagrama de flujo del método simplex:



Método simplex – terminación

Hasta ahora se han discutido dos criterios de parada del método simplex:

- Si $\bar{c} \geq 0$ se ha alcanzado una solución óptima.
- Si para todo $\bar{c}_j < 0$ ocurre que $\bar{a}_{ij} \leq 0, \forall i$ se puede afirmar que no hay valor óptimal acotado (ni solución óptima).

La pregunta es: ¿debe darse, necesariamente, alguno de estos dos casos?

Sea x_j (con $\bar{c}_j < 0$) una variable no básica, que ha sido seleccionada para ingresar a la nueva base. Se introducirá x_j en sustitución de aquella variable básica x_i para la cual se alcanza el $\text{Min } \left\{ \bar{b}_i / \bar{a}_{ij} \mid \bar{a}_{ij} > 0 \right\}$.

Cuando dicho mínimo se alcanza para dos o más variables básicas simultáneamente, se dice estar ante un caso de **degeneración**.

Ya sea que haya o no degeneración, el incremento en la variable x_j es $\Delta x_j = \text{Min } \left\{ \bar{b}_i / \bar{a}_{ij} \mid \bar{a}_{ij} > 0 \right\} \geq 0$, y la función objetivo decrece $\Delta z = \bar{c}_j \Delta x_j \leq 0$. Una variable básica decrece hasta hacerse nula, y si hay degeneración una o más variables básicas continúan siéndolo, pero con valor cero.

Si hay degeneración, en alguna iteración podría ocurrir que $\Delta x_j = \text{Min } \left\{ \bar{b}_i / \bar{a}_{ij} \mid \bar{a}_{ij} > 0 \right\} = 0$ y por lo tanto: $\Delta z = 0$, es decir que el valor de la función objetivo no cambiaría al cambiar de base. En estas condiciones no se puede asegurar que el método no retornará a un vértice ya analizado. Si esto último ocurriera (el retorno a una solución ya analizada) se estaría ante la presencia de un fenómeno llamado “cycling”, que obstruye la terminación del método en tiempo finito.

Existen estrategias “anti-cycling” para lograr que el método simplex termine en tiempo finito, sin embargo, debido a que el “cycling” casi nunca sucede en la práctica, estas finezas no suelen estar implementadas en los programas comerciales.

Si no hay degeneración, en cada paso del método simplex se obtiene una solución factible cuyo costo es estrictamente menor que el de las anteriores, por lo tanto no se puede retornar a una solución ya analizada. Además el método es finito, porque en cada paso se eligen m variables básicas entre n posibles, hay C_m^n formas de hacerlo (aunque no todas ellas dan soluciones factibles). Por este motivo se puede afirmar que existe un número finito de soluciones básicas, y en consecuencia: **si no hay degeneración el método simplex llega en una cantidad limitada de pasos a una de las dos alternativas planteadas al principio**.

La cantidad de iteraciones requeridas para resolver un problema por el método simplex crece linealmente con el número de restricciones, mientras que el trabajo requerido en cada iteración crece aproximadamente con el cuadrado del número de restricciones.

Fase I - Encontrar una solución factible

Según lo visto hasta ahora, el método simplex comienza en una solución básica factible. A continuación se investiga el problema de obtener dicha solución factible inicial.

Supóngase que se busca una solución factible en el espacio de soluciones:

$$(E) \begin{cases} Ax = b \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Este problema se puede resolver con la ayuda del método simplex. Se introduce en primer lugar un conjunto de **variables artificiales** $y \geq 0$, que miden la diferencia entre el lado derecho y el izquierdo de la ecuación (en una solución factible estas variables deberán ser nulas).

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(E') \begin{cases} Ax + y = b \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Para el sistema (E') se obtiene fácilmente la solución básica factible $y = b, x = 0$. En cambio, una solución factible de (E) deberá tener $y = 0$. Para obtenerla se resuelve el siguiente problema de PL, llamado fase I, el cual se puede resolver con el método simplex porque se tiene una solución básica inicial factible.

$$(LP_1) \begin{cases} \text{Min } \sum_{i=1}^m y_i \\ \text{sujeto a :} \\ \quad Ax + y = b \\ \quad x, y \geq 0 \end{cases}$$

Teorema:

(LP_1) tiene siempre un valor óptimo finito ≥ 0 , dado por el método simplex. Si dicho valor óptimo es estrictamente mayor que cero, entonces (E) no tiene soluciones factibles. Si el valor óptimo de (LP_1) es igual a cero, entonces (E) tiene soluciones factibles y el método simplex brinda una de ellas.

Prueba:

Si el valor óptimo de (LP_1) es estrictamente mayor que cero, siempre existe por lo menos una $y_i > 0$, por lo tanto: $(Ax)_i = b_i - y_i \neq b_i$ y en consecuencia no existen soluciones factibles de (E) .

Si el valor óptimo de (LP_1) es igual a cero: $\sum y_i = 0$, como además $y \geq 0$ se concluye que $y = 0$ y la solución óptima de (LP_1) es factible para (E) .

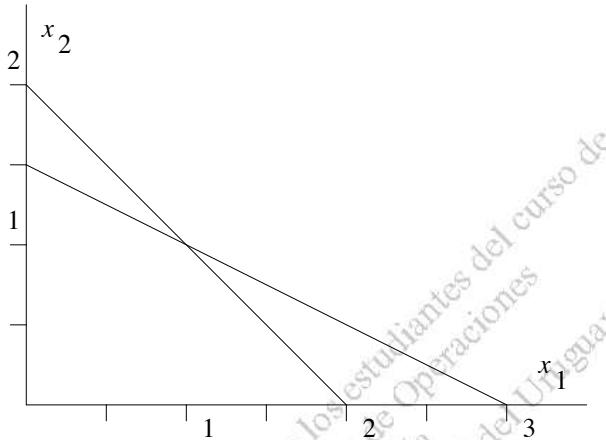


En resumen, el método simplex funciona del siguiente modo: En primer lugar, si es necesario, se aplica la fase I para encontrar una primera solución factible. A partir de dicha solución básica, se aplica la segunda fase, optimizando la función objetivo original.

El ejemplo siguiente ilustra el método:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a :} \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Este problema se representa gráficamente en la figura que sigue:



En primer lugar se agregan las variables de holgura x_3 y x_4 que permiten llevar el problema a la forma standard, obteniendo el siguiente tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	1	-1	0	2
1	2	0	-1	3
3	2	0	0	0

Puesto que no hay ninguna base por la cual sea intuitivo comenzar, se introducen las variables artificiales y_1 e y_2 . En la fase I se minimiza $y_1 + y_2$, lo cual arroja el siguiente tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	b
1	1	-1	0	1	0	2
1	2	0	-1	0	1	3
3	2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0

La última fila es la función objetivo de la fase I, en tanto que la tercera fila es la función objetivo original, que será minimizada en la segunda fase de la resolución.

Para la primera fase y_1 e y_2 son variables básicas adecuadas para comenzar la resolución de la primera fase. Sustrayendo de la fila 4 las filas 1 y 2 se obtiene:

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	b
1	1	-1	0	1	0	2
1	2	0	-1	0	1	3
3	2	0	0	0	0	0
-2	-3	1	1	0	0	-5

↑ • •

La solución básica correspondiente es $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, y las demás variables iguales a cero.

En esta solución $\bar{c}_1 < 0$ y $\bar{c}_2 < 0$ se puede elegir tanto x_1 como x_2 para ser ingresada en la nueva base, sea x_1 la variable seleccionada. La variable saliente se determina de acuerdo a $\text{Min} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i1}} \mid \bar{a}_{i1} > 0 \right\} = \text{Min} \left\{ 2/1, 3/1 \right\} = 2$, lo cual ocurre en la primera fila. Se canoniza el sistema de ecuaciones tomando como elemento canónico el a_{11} , obteniendo el siguiente tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	b
1	1	-1	0	1	0	2
0	1	1	-1	-1	1	1
0	-1	3	0	-3	0	-6
0	-1	-1	1	2	0	-1

• ↑ •

La solución básica es $x_1 = 2$, $y_2 = 1$, las demás variables iguales a cero. Se elige introducir la variable x_2 , por lo que el elemento “pivot” para la canonización del sistema sera el a_{22} .

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	b
1	0	-2	1	2	-1	1
0	1	1	-1	-1	1	1
0	0	4	-1	-4	1	-5
0	0	0	0	1	1	0

• •

Llegado este punto de la resolución se tiene $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, y el resto de las variables iguales a cero. Como y_1 e y_2 son iguales a cero, se ha alcanzado una solución factible del problema original y comienza la solución de la fase II.

La línea de costos de la función objetivo del problema auxiliar ya no interesa, por lo cual se la elimina del sistema, y la línea de costos pasa a ser la tercera fila (costos de la función objetivo del problema original), tampoco interesan las columnas correspondientes a las variables artificiales:

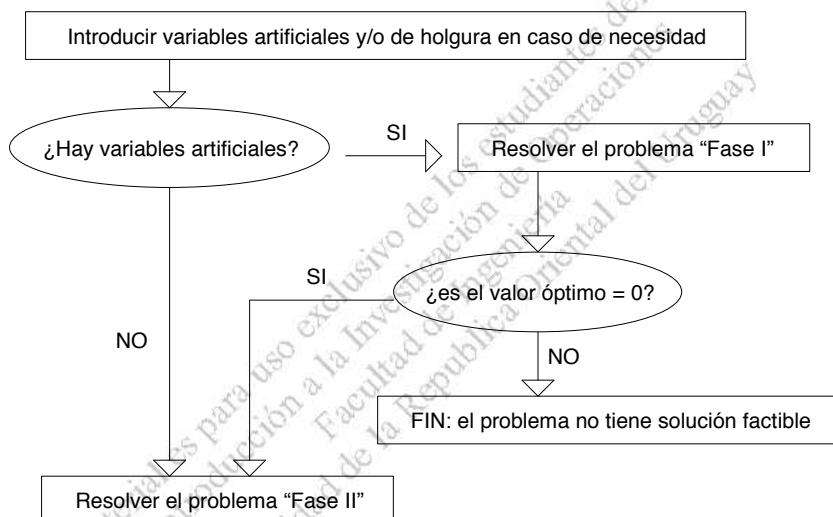
x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	-2	1	1
0	1	1	-1	1
0	0	4	-1	-5
•	•		↑	

Tomando como pivot el elemento a_{14} , se obtiene el siguiente tableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	-2	1	1
1	1	-1	0	2
1	0	2	0	-4
•	•			

Como ahora $\bar{c} \geq 0$ se ha llegado al óptimo. La solución es $x_1=0, x_2=2, x_3=0, x_4=1$.

La estructura del método simplex puede ahora ser resumida del siguiente modo:



Interpretación del tableau del simplex

Se analizará el tableau simplex en el cual las x_B son variables básicas. Supóngase que fueron introducidas variables artificiales, y que las columnas fueron ordenadas de modo que las variables x_B están todas al principio. Al comienzo de la fase I el tableau tiene la forma siguiente:

$$\begin{array}{cccc|c} x_B & x_N & y & & \\ A_B & A_N & I & b & \\ c_B^T & c_N^T & 0 & 0 & \end{array}$$

Una vez canonizado el sistema, el tableau cobra la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccc|c} x_B & x_N & y & & \\ I & \overline{A}_N & \bar{I} & \bar{b} & \\ \bar{c}_B^T & \bar{c}_N^T & \bar{c}_y^T & \bar{0} & \end{array}$$

Las operaciones que se realizan para obtener una fila a partir de la anterior corresponden a haber multiplicado desde la izquierda con cierta matriz M que se determinará:

$$MA_B = I \Rightarrow M = IA_B^{-1} \Rightarrow M = A_B^{-1}$$

por lo tanto: $\bar{A}_N = MA_N = A_B^{-1}A_N$, cosa que ya se sabía.

$$\bar{I} = MI = A_B^{-1}I = A_B^{-1}$$

$$\bar{b} = Mb = A_B^{-1}b, \text{ lo cual también se sabía.}$$

La línea transformada de costos se obtuvo sustrayéndole en forma sucesiva múltiplos de otras líneas. Por lo tanto, es válido para cierto “vector de multiplicadores” π , que $\bar{c}^T = c^T - \pi^T A$. La línea de costos reducidos transformados es:

$$(c_B^T - \pi^T A_B) \quad (c_N^T - \pi^T A_N) \quad (0 - \pi^T I) \quad (0 - \pi^T b)$$

Se acostumbra llamar “multiplicadores simplex” a las componentes de π .

Debido a que $\bar{c}_B^T = 0$ se cumple que:

$$c_B^T = \pi^T A_B \Rightarrow \pi^T = c_B^T A_B^{-1}$$

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$$

$$\bar{c}_y = 0 - \pi^T I = -\pi^T = -c_B^T A_B^{-1}$$

$$0 - \pi^T b = -c_B^T A_B^{-1} b = -c_B^T \bar{b} = -\bar{z} = \text{valor actual de la función objetivo.}$$

El tableau transformado se ve ahora de la siguiente forma:

x_B	x_N	y	
I	$(\bar{A}_N = A_B^{-1} \bar{A}_N)$	A_B^{-1}	$\bar{b} = A_B^{-1} b$
0	$(\bar{c}_N^T = c_N^T - \pi^T A_N)$	$(-\pi^T = c_B^T A_B^{-1})$	$(-\bar{z} = -\pi^T b)$

Costos reducidos y multiplicadores simplex

Se acaba de comprobar que el vector de multiplicadores simplex satisface las siguientes igualdades:

$$\pi^T = c_B^T A_B^{-1} \Rightarrow c_B^T = \pi^T A_B$$

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - \pi^T A_N$$

Por lo tanto, el costo reducido \bar{c}_j de x_j se puede escribir como $\bar{c}_j = c_j - \pi^T a_j$, siendo a_j la j -ésima columna de la matriz A. Esto significa que con la ayuda de los multiplicadores simplex se pueden hallar los costos reducidos de las variables, que no estaban en la formulación original del problema. Esta observación es de fundamental importancia en el uso avanzado de la programación lineal.

Soluciones duales y relación entre primal y dual

El problema dual de un problema de programación lineal expresado en forma standard (LP_S) es:

$$(LD_s) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } b^T u \\ \text{sujeto a :} \\ \quad A^T u \leq c \end{array} \right.$$

Ya fue demostrado que las variables u son los multiplicadores de Lagrange. A continuación se investiga la relación entre los multiplicadores simplex y el problema dual.

Supóngase que (LP_S) ha sido resuelto hasta su óptimo y que x_B son las variables básicas.

La exigencia de optimalidad de (LP_S) es $\bar{c}_N^T \geq 0$, es decir: $c_N^T - \pi^T A_N \geq 0$ que por medio de una traspósición queda $c_N \geq A_N^T \pi$.

Por otra parte, la restricción impuesta a la variable dual es $c \geq A^T u$, lo cual implica que $c_B \geq A_B^T u$ y que $c_N \geq A_N^T u$.

Por lo tanto, si se cumple la condición de optimalidad, los multiplicadores simplex constituyen una solución factible del problema dual, ya que además cumplen $c_B = A_B^T \pi \Rightarrow c_B \geq A_B^T \pi$

π sería además una solución óptima del problema dual si arrojase el mismo valor de la función objetivo que la solución óptima del problema primal.

El valor óptimo de la función objetivo del problema primal es $\bar{z} = c_B^T \bar{b} = c_B^T A_B^{-1} b$. El valor de la función objetivo del problema dual evaluada en $u = \pi$ es: $b^T \pi$, que se puede escribir: $b^T \pi = b^T (A_B^T)^{-1} c_B = c_B^T A_B^{-1} b = \bar{z}$.

Por lo tanto: ***los multiplicadores simplex correspondientes a la solución óptima del problema primal, constituyen una solución óptima del problema dual.***

Se acaba de demostrar el siguiente:

Teorema:

Sea $x_B = A_B^{-1} b$, $x_N = 0$ solución básica óptima del simplex (o sea $\bar{c} \geq 0$) para un problema de programación lineal expresado en forma standard:

$$(LP_S) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } c^T x \\ \text{sujeto a :} \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0 \end{array} \right.$$

Entonces $\pi^T = c_B^T A_B^{-1}$ (el vector de multiplicadores simplex) es una solución óptima del problema dual; además, los valores óptimos de ambos problemas coinciden.



Se verán a continuación algunas relaciones entre casos particulares de problemas primal y dual:

Cuando el problema primal se resuelve aplicando el método simplex puede ocurrir cualquiera de los casos siguientes:

1 la fase I da un valor óptimo > 0 , es decir que el problema no tiene soluciones factibles.

2 la fase I da un valor óptimo $= 0$ y la fase II da un óptimo finito.

3 la fase I da un valor óptimo $= 0$ y la fase II indica un valor óptimo no acotado.

Puesto que el dual es un problema de programación lineal, estos casos pueden darse también en el problema dual

Si en el primal ocurre (3), el problema dual no puede tener soluciones factibles, por lo tanto, en el dual ocurre (1).

Análogamente, si en el dual ocurre (3) en el primal ocurre (1).

Si en el primal ocurre (2), también ocurre (2) en el dual. Por simetría, si ocurre (2) en el dual, ocurre (2) también en el primal.

Queda por estudiar la posibilidad de que ocurra (1) en ambos problemas.

El siguiente es un ejemplo de que ésta posibilidad es cierta:

$$(PL) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } -x_2 \\ \text{sujeto a :} \\ \quad x_1 - x_2 \geq 1 \\ \quad -x_1 + x_2 \geq 0 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Este problema tiene una región factible vacía, su dual tiene la forma:

$$(PD) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } u_1 \\ \text{sujeto a :} \\ \quad u_1 - u_2 \leq 0 \\ \quad -u_1 + u_2 \leq -1 \\ \quad u_1, u_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

y tampoco tiene soluciones factibles.

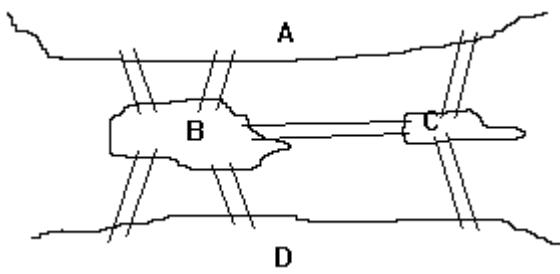
El cuadro siguiente resume estas afirmaciones, se indican sombreadas las combinaciones imposibles.

	dual (1)	dual (2)	dual (3)
primal (1)			
primal (2)			
primal (3)			

3. GRAFOS

3.1 Introducción

El nacimiento del concepto GRAFOS se puede situar, por el año 1730, cuando **Euler** (matemático) se convirtió en el **padre** de la Teoría de Grafos al modelar un famoso problema no resuelto, llamado el "**problema de los puentes de Königsberg**".

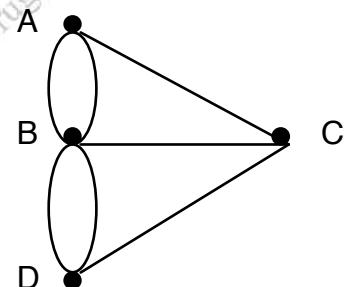


Un río con dos islas atraviesa la ciudad. Las islas están unidas, entre si y con las orillas, a través de siete puentes. El problema consistía en establecer un recorrido que pasara una y solo una vez por cada uno de los siete puentes, partiendo de cualquier punto y regresando al mismo lugar.

Para probar que no era posible, Euler sustituyó cada zona de partida por un punto y cada puente por un arco, creando así un grafo, el **primer grafo**, diseñado para resolver un problema.

Mostrar que el problema no tiene solución equivale a mostrar que el grafo no puede ser recorrido según criterios determinados.

Problema genérico: dado un grafo (con múltiples líneas entre pares de puntos) encontrar un camino que recorra el grafo pasando por cada arista exactamente una vez.



Solución: El grafo debe ser conexo, y en cada punto deben incidir un número par de líneas. Esta condición es suficiente para definir lo que se llama un **ciclo euleriano**.

A partir de Euler el modelado mediante grafos fue desarrollando esta metodología hasta convertirse en la actualidad, en una herramienta de trabajo para ciencias tan diferentes como la Física, la Química, la Sicosociología, la Economía, la Lingüística, etc. La teoría de grafos está íntimamente relacionada con varias ramas de la Matemáticas como por ejemplo la Teoría de Conjuntos, el Análisis Numérico, Probabilidad, Topología, etc. y es la base conceptual en el tratamiento de problemas combinatorios.

La eficacia de los grafos se basa en su **gran poderío de abstracción y la muy clara representación** de cualquier relación (de orden, precedencia, etc) lo que facilita enormemente tanto la fase de modelado como de resolución del problema. Gracias a la Teoría de Grafos se han desarrollado una gran variedad de algoritmos y métodos de resolución eficaces que nos permiten tomar una mejor decisión .

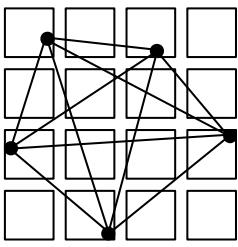
No se debe confundir el grafo con el sistema real al que está asociado. El grafo es una **estructura** que admitimos adecuada en lo concerniente a las propiedades que nos

interesan, donde luego **aplicamos** las deducciones y reglas matemáticas para obtener datos y poder decidir.

Una aplicación frecuente de la teoría de grafos es la del **método de camino hamiltoniano óptimo** para decidir el camino a seguir por un cobrador, de tal modo de economizar sus energías, las suelas de sus zapatos y su bolsillo.

El **objetivo** es hallar un camino que pase por todos las casas una y solo una vez y que nos de el costo menor en distancia. Dicho de otro modo, se deben buscar las permutaciones de las casas de forma tal que la distancia recorrida total sea mínima.

Se conoce la distancia entre cada par de casas, según si las calles son flechadas o no se orientarán o no las conexiones entre pares de casas.



Obsérvese que si se hicieran todas las permutaciones, suponiendo un caso muy reducido de diez casas, se tendrían más de 3 millones de permutaciones ($10!$).

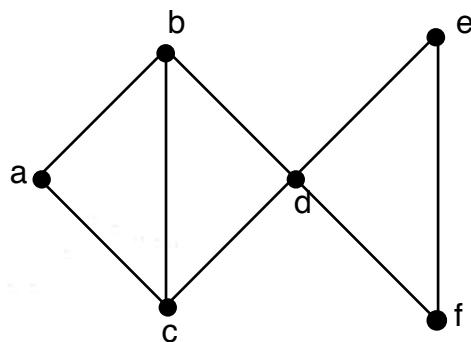
Si cada casa es representada por un vértice y cada camino entre par de casas por una arista ponderada por la distancia mínima entre pares de casas, tendremos un grafo completo y simétrico (cuando no hay calles flechadas).

El problema se reduce entonces, a obtener un camino hamiltoniano óptimo. Todo algoritmo conocido para encontrar ciclos hamiltonianos requiere al menos un tiempo exponencial de cálculo, o factorial en el peor de los casos.

Otro **ejemplo** para el que grafos provee un natural modelo matemático :

Supongamos que el siguiente grafo representa una red de líneas de teléfonos (o de comunicaciones). Estamos interesados en la vulnerabilidad respecto a interrupciones accidentales.

Problema 1: identificar esas líneas y centros de conexiones que deben permanecer en servicio para evitar la desconexión de la red. No existe ninguna línea que eliminada desconecte el grafo (red), pero hay un vértice, el vértice **d**, cuya desaparición (ruptura) desconecta el grafo.



Problema 2: encontrar un conjunto minimal de aristas necesarias para conectar los 6 vértices. Hay varios conjuntos mínimos posibles. Uno de ellos es el conjunto minimal: $\{(a,b),(b,c),(c,d),(d,e),(d,f)\}$.

Podemos enunciar el siguiente **resultado general**: dado un grafo G de n vértices, el conjunto mínimo de conexión de G (si existe) siempre tiene $n-1$ aristas.

3.2 Definiciones Basicas

Grafo: Un **grafo** G es una dupla $G = (X, U)$, donde X es un conjunto finito y no vacío de elementos llamados **vértices** y U es el conjunto cuyos elementos se componen de subconjuntos de X de cardinalidad dos (2), llamados **aristas**.

Los vértices de X se llaman usualmente $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ y se representan como puntos, las aristas $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$ se dibujan como líneas.

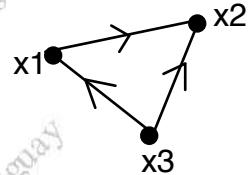
Grafo orientado: Un grafo G^* es **orientado**, cuando sus aristas tienen asignadas direcciones, o sea cuando existe una relación de precedencia entre los elementos. Sus puntos se llaman **nodos**, y sus líneas **arcos**. En estos casos U es una familia de pares ordenados resultantes del producto cartesiano de X .

$$U \subseteq X \times X = \{ u_i = (x_k, x_j) : 1 \leq i \leq |U|, 1 \leq j, k \leq |X|, x_k, x_j \in X \}$$

Ejemplo:

$$G^* = (\{x_1, x_2, x_3\}, \{(x_1, x_2), (x_3, x_1), (x_3, x_2)\}).$$

En realidad, no existen dos especies de grafos, orientados y no orientados, sino que **todos los grafos son orientados**, pero por razones conceptuales, es poco cómodo considerar las líneas orientadas para los problemas de naturaleza no orientada.



Cada vez que apliquemos un concepto orientado en un grafo $G = (X, U)$ ese concepto debe ser considerado como aplicable de hecho, en un grafo orientado G^* al que le corresponde la orientación en los dos sentidos de cada arista.

Orden es el número de vértices del grafo, el cardinal del conjunto X de vértices: $|X|$

Arcos incidentes a un nodo

Si un vértice x es extremidad inicial de un arco $u = (x, y)$ y $x \neq y$, diremos que el arco es **incidente a x hacia el exterior**. $I^+(x) = \{y / (x, y) \in U\}$. $I(x) = \{y / (y, x) \in U\}$

El número de los arcos incidentes hacia el exterior se llama **semigrado exterior de x** y se nota $d^+(x) = |I^+(x)|$

De igual forma se define arco incidente a x hacia el interior y **semigrado interior de x** . Este último se nota como $d^-(x) = |I^-(x)|$.

Grado de x , es la suma del semigrado exterior e interior de x . O sea, es el número de arcos con una extremidad en x .

$$d(x) = d^+(x) + d^-(x)$$

Si todos los vértices tienen el mismo grado, el grafo al que pertenecen se llama **grafo regular**.

3.2.1 Recorrido de grafos.

Cadena (concepto no orientado):

Es una secuencia de aristas de G , tal que cada arista de la secuencia tiene un extremo común con el arco precedente y otra con el siguiente.

Largo de una cadena, es el número de aristas de la secuencia.

Cadena elemental, es aquella que no repite vértices.

Cadena simple, es aquella que no repite aristas.

Camino (concepto orientado)

Es una cadena $\mu = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$ en la que para todo u_i (con $i < q$) el extremo terminal de u_i coincide con el extremo inicial de u_{i+1} .

Las definiciones de largo de un camino, camino elemental y camino simple son análogas a las de cadenas, con la salvedad de la orientación.

Sendero, es un camino elemental (que no repite nodos).

Vía, es un camino cuyos arcos se pueden recorrer en su sentido directo o contrario.

Ejemplo: problema del camino entre dos puntos. El siguiente es un ejemplo de como modelar una porción del universo, su problemática y como resolverla.

Supongamos que un hombre debe pasar a la otra orilla de un río llevando consigo una oveja, un repollo y un lobo. El inconveniente que se le plantea es que sólo puede cruzar con uno de ellos a la vez y sospecha que si deja solos a la oveja con la repollo ó con el lobo, la oveja se comerá al repollo ó el lobo se comerá a la oveja. Teniendo en cuenta estas restricciones, el sujeto dibuja sobre la arena de la orilla un grafo y aplicando alguna heurística o algún algoritmo conocido, encuentra el camino que debe seguir para llegar a la otra orilla con su carga intacta.

Utilice el siguiente procedimiento:

0) Dibuja el grafo: Existen 4 elementos que determinan las situaciones en cada orilla, ellos son:

H – Hombre C – Repollo L – Lobo O – Oveja

1) Enumera las situaciones en una de las orillas comenzando por H,C,L,O.

2) Luego las ordena considerando:

- a) se encuentra el hombre en esa orilla o no: H vs noH.
- b) pasaje o secuencia de una situación a otra. (obs. que no se puede pasar de una situación en la que esté el hombre a otra en la que también esté)

3) Por último busca en el grafo un camino del estado inicial al estado final.

3.2.2 Clasificación De Grafos

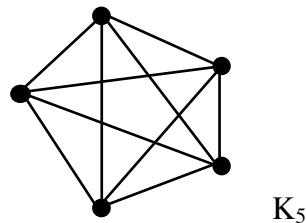
Multigrafo, es un grafo no orientado con múltiples aristas entre pares de nodos.

Grafo simple, es un grafo sin bucles, sin múltiples aristas entre pares de vértices.

Grafo completo

Para todo par de vértices de G , existe por lo menos una arista que los une. Por lo tanto, un grafo completo de n vértices es aquel que tiene sus n vértices mutuamente adyacentes.

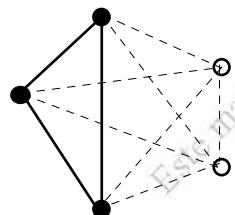
n -clique, es un grafo completo simple de n vértices. Se nota K_n .



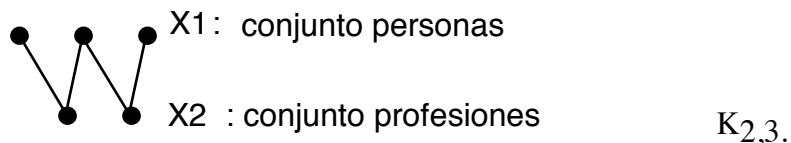
Subgrafo de $G = (X,U)$ engendrado por el conjunto $A \subset X$, es un grafo cuyos vértices pertenecen al conjunto A y cuyas aristas son aquellas de G que tienen las dos extremidades en A .

Grafo parcial de $G = (X,U)$ engendrado por $V \subset U$, es el grafo $G' = (X,V)$ cuyos vértices son los mismos de G y cuyas aristas son las que conforman el conjunto $V \subset U$.

Subgrafo parcial de G , es un subgrafo de un grafo parcial de G .



Grafo bipartito, es un grafo cuyo conjunto de vértices puede ser partitionado en dos clases X_1 y X_2 de tal forma que dos vértices de la misma clase no sean jamás adyacentes. Se nota $G = (X_1, X_2, U)$



Grafo bipartito completo, es aquel en el que para todo elemento de X_1 y todo elemento de X_2 existe por lo menos un arco que los liga.

Un grafo simple bipartito completo con p elementos en X_1 y q elementos en X_2 se nota $K_{p,q}$.

Grafo Regular, es aquel en el que todos sus vértices tienen el mismo grado.

Grafo Ponderado $G = (X, U, W)$ donde (X, U) es un grafo y W es una función $W: U \rightarrow \mathbb{Z}^+$ (\mathbb{Z}^+ : enteros positivos).

Si $u \in U$, $w(u)$ es llamado el peso de la arista u . Estos pesos corresponden, según la aplicación, a costos, capacidades u otras propiedades de las aristas o arcos.

Cuando se desea asignar valores negativos o reales a los pesos de las aristas, se debe tener especial cuidado en la elección de los algoritmos ya que la correctitud de los mismos puede depender de la restricción a \mathbb{Z}^+ .

Grafo Conexo, es aquel en el que para cada par de vértices de G , existe una cadena que los une.

En grafos orientados se definen 2 conceptos

- Débilmente conexo:** si existe una cadena (sin tener en cuenta la orientación) que une cada par de nodos distintos.
- Fuertemente conexo:** si para cada par ordenado de nodos x e y , existe un camino que va de x a y .

Una componente conexa de un grafo G , es un subgrafo de G engendrado por los vértices que pueden unirse a un vértice x_i dado, mediante una cadena (puede ser todo el grafo G).

3.2.3 Ciclos y Circuitos

Ciclo, es una cadena simple, cuyos dos vértices extremos, inicial y terminal, coinciden (no tiene en cuenta la orientación).

Si queremos describir la orientación en un ciclo designamos como:

$$u^+ = \{u_i : u_i \text{ orientada en el sentido del ciclo}\}$$

$$u^- = \{u_i : u_i \text{ orientada en el sentido contrario al ciclo}\}$$

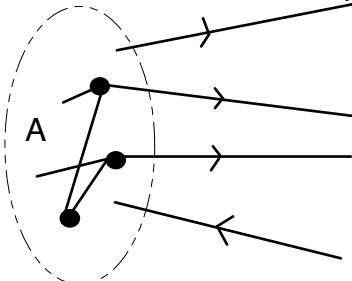
Ciclo elemental, es un ciclo donde no se repite ningún vértice (salvo el primero que coincide con el último). Lo notamos $u^E = (u_1, \dots, u_n)$.

Propiedad 1: Todo ciclo u^C es una suma de ciclos elementales sin aristas comunes.

Propiedad 2: Un ciclo es elemental si y solo si es un ciclo minimal (es decir que no se pueden deducir otros ciclos por supresión de aristas).

Seudociclo, es una cadena donde los extremos coinciden pero que una misma arista puede figurar más de una vez (también consecutivamente).

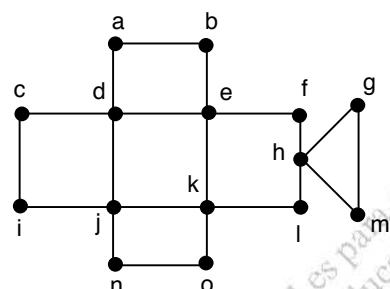
Ciclo del conjunto de vértices A, es el conjunto de aristas incidentes a A, del tipo $I(A)$ no vacío y particionado en dos clases $I^+(A)$ y $I^-(A)$.



Ciclo Euleriano es aquel que incluye todas las aristas del grafo una sola vez, conteniendo cada vértice por lo menos una vez.

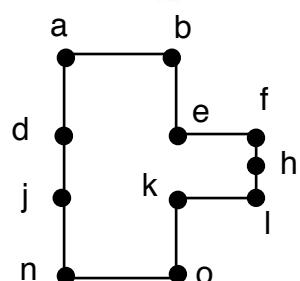
Cadena Euleriana, es aquella que recorre todas las aristas una sola vez (= simple) tocando todos los vértices del grafo.

Todo multigrafo que posee un **ciclo Euleriano** es **conexo** y todos sus vértices tienen **grado par**.



A partir del siguiente ejemplo daremos una idea del mecanismo utilizado por Euler para demostrar que la conectividad y el grado par de todos los vértices de un multigrafo, son condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de un ciclo Euleriano. Tenemos este grafo que es conexo y sus vértices tienen grado par.

1) Primero se comienza por trazar un camino simple desde un vértice, p. ej a. Supongamos que recorremos a-d-j-n-o-k-l-h-f-e-b-a. Volvimos a a.

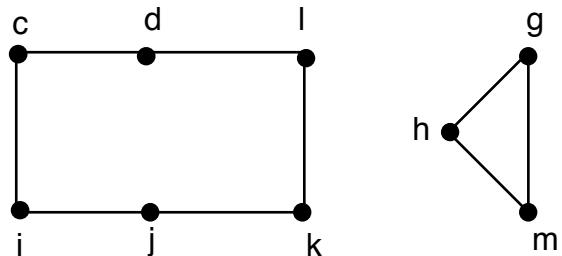


La propiedad del grado par, significa que siempre podemos abandonar cada vértice al que entramos, excepto a. Es decir que cualquier cadena que trazemos desde a debe volver a a, formando un ciclo.

2) Las restantes aristas del grafo inicial, conforman un grafo no conexo, pero todos sus vértices mantienen el grado par, ya que al retirar el ciclo encontrado, se redujo cada grado en una cantidad par.

Cada subgrafo conexo posee un ciclo Euleriano: d-c-i-j-k-e-d y h-g-m-h.

3) Estos dos ciclos pueden ser insertados en el ciclo encontrado en 2) en los vértices comunes d y h respectivamente, originando un ciclo Euleriano a-d-c-i-j-k-e-d-j-n-o-k-l-h-g-m-h-f-e-b-a, en el grafo original.



Teorema E.1: Un multigrafo (no orientado) $G = (X, U)$ posee un ciclo Euleriano si G es conexo y todos sus vértices son de grado par.

Una Cadena Euleriana es una cadena que recorre todas las aristas del grafo una sola vez incluyendo todos los vértices.

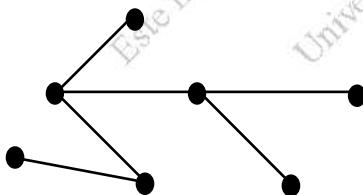
Corolario E.2: Un multigrafo posee una cadena Euleriana, si es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Se puede demostrar observando lo que sucede al agregarle una arista cuyas extremidades sean los dos vértices de grado impar. El concepto de ciclo Euleriano es utilizado en la planificación de redes de alta tensión entre varias ciudades.

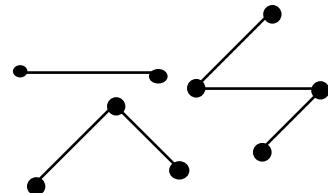
3.2.4 Arboles y Algoritmos de Búsqueda

Refiriéndonos al concepto de grafo no orientado en el estudio de grafos finitos, se introduce el concepto de un tipo especial de grafo, usado en una vasta variedad de aplicaciones.

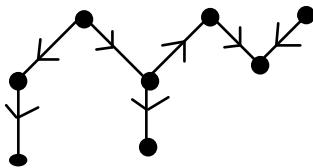
Arbol, es un grafo finito, conexo, sin ciclos y con por lo menos 2 vértices .



Bosque, es un grafo donde cada componente conexa es un árbol, es decir es un conjunto de árboles no conexos entre sí. Además es un grafo sin ciclos por estar compuesto por árboles.



Arborescencia, es un árbol dirigido con un nodo llamado raíz, tal que existe un único camino desde la raíz a cualquier otro nodo del árbol. Ese camino es elemental y simple.

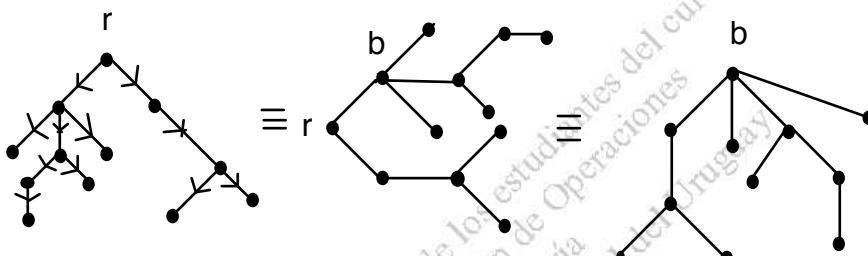


Proposición: Una arborecencia posee **una sola raíz**.

Es importante notar que la definición de arborecencia es válida para un árbol no orientado, ya que, cualquier vértice del árbol puede ser raíz y además un árbol no posee ciclos. Al determinar una raíz, se determina la existencia de una sola cadena que conecta la raíz con cada uno de todos los vértices restantes.

Entonces, un árbol lo puedo convertir en arborecencia tomando cualquier vértice como raíz y asignandole direcciones a las aristas desde el nodo raiz.

Por lo tanto, designaremos como árbol, indistintamente a un árbol o arborecencia.



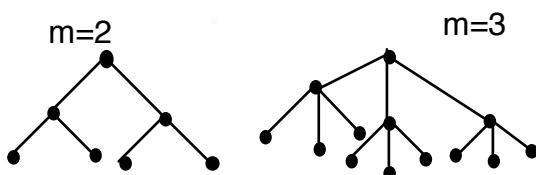
La manera standard de dibujar una arborecencia es colocando la raíz a en la cima de la figura. Así podemos definirle niveles a los vértices del grafo (la raíz tiene nivel 0).

El **número asignado al nivel** de un vértice x del árbol ($T = (X, U)$) corresponde al largo de la cadena (única, elemental) que une a r con x .

Se llama **padre** de un vértice x , al vértice y , próximo anterior a x en la cadena elemental y simple que va de la raíz a x , siendo x **hijo** de y y dos vértices con el mismo padre se llaman **hermanos**. La relación padre-hijo se extiende a **ascendiente y descendientes** de un vértice x . Además cada vértice x de T es la raíz de un subárbol de x y sus descendientes. Los vértices sin hijos se llaman **hojas**, y todos los otros vértices que tengan hijos se llaman **vértices internos** de T .

T se llama **árbol m-ario**, si cada vértice interno del árbol (arborecencia) T tiene m hijos. En particular si $m = 2$, T es un **árbol binario**.

Ejemplos:



Teorema T.1: Un árbol con n vértices tiene $n-1$ aristas.

Altura de un árbol (o arborecencia), es el número de aristas del camino más largo, es decir, el número de nivel más alto de cualquier vértice.

Arbol balanceado, es aquel árbol de altura h , en el cual todas sus hojas se encuentran en el nivel h ó $h-1$. Ver el ejemplo anterior en el que la cantidad de comparaciones a realizar se minimiza.

Los árboles se utilizan también en muchas aplicaciones para verificar la conectividad, o la cantidad de ocurrencias de ciclos o subgrafos completos, en la búsqueda de esas propiedades o estructuras, muchos algoritmos utilizan lo que llamamos un esqueleto o árbol de cubrimiento.

Esqueleto o árbol de cubrimiento (spanning tree) de un grafo G: es un subgrafo que es un árbol y que contiene todos los vértices de G .

El esqueleto de un grafo puede ser construido ya sea por Búsqueda Primero en Profundidad: BPP (**depth -first search: DFS**) o por Búsqueda Primero a lo Ancho: BPA (**breadth-first-search: BFS**).

Algoritmo de Búsqueda Primero en Profundidad

Sea $G = (X, U)$, x, v pertenecen al conjunto X
DFS(x)
 Visite y marque x
 Mientras exista un vértice v no marcado adyacente a x
 DFS(v)
 fin mientras
fin

Usando **BPP (o DFS)** , se toma algún vértice como raíz y se comienza a construir una cadena desde la raíz. La cadena continúa hasta que no se puede continuar más abajo sin repetir un vértice que ya está en la cadena. El vértice donde esa cadena debe terminar es una hoja. Entonces se vuelve atrás (backtrack), se retrocede un nivel al padre de esa hoja, y se trata de construir una cadena desde ese padre en otra dirección u otro vértice no incluido en la cadena anterior, y así sucesivamente...

Algoritmo de Búsqueda Primero a lo Ancho

Sea $G = (X, U)$, x, v, s pertenecen al conjunto X , Q es una cola o lista FIFO.
BFS(x)
 Visite y marque x .
 Inserte x en Q
 Mientras Q no esté vacía **realice**
 Saco el primer elemento s de Q
 Para cada vértice v no marcado adyacente a s
 visite y marque v
 inserte v en Q
 fin para
 fin mientras
fin

Usando **BPA** (o **BFS**), se toma cualquier vértice x como raíz, insertando en la cadena todas las aristas incidentes a ese x . Luego, sucesivamente, se van agregando las aristas incidentes a los nodos adyacentes a x , siempre que no estén incluidos en la cadena que estamos construyendo, hasta que todos los nodos hayan sido visitados .

Es **importante** notar que si el grafo no es conexo, entonces no existe ningun esqueleto que lo recorra.

Algoritmo para verificar que un grafo es conexo

- 1) Use BPP (o BPA) para tratar de construir un esqueleto del grafo.
- 2) Si todos los vértices del árbol son alcanzados en la búsqueda, entonces se ha encontrado un esqueleto del grafo y por lo tanto el grafo es conexo.
- 3) Si la búsqueda no recorrio todos los vértices, entonces el grafo no es conexo.

3.3 Conexidad. Clausura Transitiva.

Un grafo se puede representar para su manipulación de las siguientes maneras :

- a) Gráficamente. Mediante puntos que representan los nodos y líneas que representan las aristas del grafo.
- b) Notación de conjuntos. Ya sea por extensión (enumerando vértices y aristas) o por comprensión.
- c) Estructuras de datos, como por ejemplo listas encadenadas, stacks, etc.
- d) Matrices

3.3.1 Representación Matricial

Una relación binaria en un conjunto X finito: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $|X| = n$, es el subconjunto $R = \{(x_i, x_j); x_i R x_j\}$, compuesto por el conjunto de pares ordenados resultantes del producto cartesiano de $X \times X$. Si $(x_i, x_j) \in R$, decimos que x_j esta relacionado con x_i y notamos $x_i R x_j$.

La relación R puede ser representada como una matriz $n \times n$ cuyos elementos son:

$$R = [r_{ij}] = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i R x_j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Podemos afirmar que todo grafo G es orientado, por lo que existe una relación binaria entre pares de elementos de $G = (X, U)$, que es la relación de **adyacencia A**.

Entonces, dado un grafo $G = (X, U)$, de orden n , se puede representar la relación de adyacencia , mediante una matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, llamada **matriz de adyacencia** de G , definida por

$$A = [a_{ij}] = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i A x_j, (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Es importante observar que en un grafo no orientado la relación de adyacencia es simétrica y por lo tanto también lo será su matriz asociada, ya que en el momento del almacenamiento solamente es necesario tratar la mitad de la matriz.

Observaciones

- 1) La matriz de adyacencia es una matriz booleana, sus elementos son 0 o 1.
- 2) $\sum_i x_{ij} =$ semigrado exterior de x_i
- 3) $\sum_j x_{ij} =$ semigrado interior de x_j

En aquellas aplicaciones en las que intervienen costos o propiedades propias de la relación entre los elementos del sistema, estamos ante un Grafo Ponderado: $G=(X,U,W)$

En estos casos la matriz de adyacencia se define como:

$$A = [a_{ij}] = \begin{cases} w(u) & \text{si } x_i A x_j, (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Esta matriz es booleana solamente en aquellos casos en que $w(u) = 1$, para toda arista u.

El concepto básico en grafos es el de relación binaria, ya que una relación binaria puede ser una relación de equivalencia, la que partitiona al conjunto X de vértices en clases de equivalencias.

Una relación binaria es una **relación de equivalencia** cuando es:

- 1) Reflexiva. $x \equiv x$
- 2) Simétrica. $x \equiv y$ entonces $y \equiv x$
- 3) Transitiva. $x \equiv y, y \equiv z$ entonces $x \equiv z$

Estas tres propiedades asociadas a un grafo $G = (X,U)$, $X=\{x_i ; 1 \leq i \leq n\}$, significan que:

$x_i \equiv x_j$ si $x_i = x_j$ o si existe algun camino de x_i a x_j y de x_j a x_i .

Definición:

Un grafo o subgrafo es fuertemente conexo, si $\forall (x_i, x_j), x_i \neq x_j, \exists$ camino de x_i a x_j .

Toda relación de equivalencia partitiona al conjunto X en clases de equivalencias $X_i = \{x_{i1}, \dots, x_{ip}\}$ que llamaremos **componentes fuertemente conexas** del grafo G.

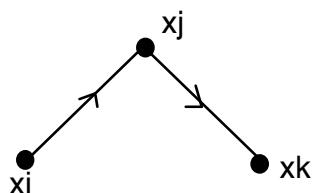
Por lo tanto, cada componente fuertemente conexa de un grafo G es un subgrafo fuertemente conexo, $G_i = (X_i, U_i)$, del grafo G .

Notar que la conexidad está muy relacionada a la existencia de caminos, existencia que se puede verificar mediante la propiedad transitiva.

Definición Una relación R es transitiva, en un conjunto X ,

si $\forall i, j, k = 1, 2, \dots | X$ se cumple que $x_i R x_j$ y $x_j R x_k$ entonces $x_i R x_k$

Ahora bien la relación de adyacencia A , no siempre es transitiva, observe el siguiente ejemplo donde $x_i A x_j$, $x_j A x_k$ no implica que $x_i A x_k$.



Introducimos entonces el concepto de **clausura transitiva o alcance de la relación A** en el conjunto X .

3.3.2 Clausura Transitiva, Matriz de Alcance

Definición: La clausura transitiva de una relación A en el conjunto X es la relación T definida por:

$$x_i T x_j \Leftrightarrow \begin{cases} x_i A x_j \\ \exists m \geq 2 \text{ y una secuencia de elementos } x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{km} \in X \\ \text{tales que } x_i = x_{k1}, x_{kt} A x_{k(t+1)} \text{ para } t = 1, 2, \dots, m-1, x_{km} = x_j \end{cases}$$

Observación: La clausura transitiva de una relación A , es la relación A en sí misma.

Si A es la relación de adyacencia en X , entonces la Clausura Transitiva en X es la Relación de Alcance definida por:

$$x_i T x_j \Leftrightarrow \exists C_{i,j} \text{ tal que } C_{i,j} \text{ es un camino de } x_i \text{ a } x_j, \quad C_{i,j} = \text{camino que va de } x_i \text{ a } x_j,$$

x_j es alcanzable desde x_i , o que x_j pertenece a la Clausura transitiva de x_i , lo notamos: $x_j \in \Gamma^*(x_i)$

La relación de alcance es una relación transitiva y cuando además cumple con las propiedades de simetría y reflexividad, es una relación de equivalencia que partitiona a X en clases de equivalencia

$$x_1, x_2, \dots, x_m \Leftrightarrow \forall x_i, x_j \in X \quad k=1, 2, \dots, m \text{ se verifica: } x_i = x_j \text{ o } x_i T x_j$$

Cada clase corresponde a una componente conexa del grafo. Es decir que se pueden determinar las componentes fuertemente conexas del grafo calculando la clausura transitiva en el conjunto X de nodos.

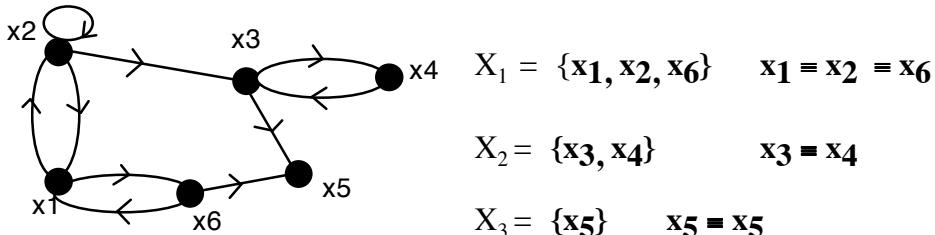


fig.CFC

La relación de alcance se representa matricialmente.

Definición : La **matriz de alcance** es una matriz $T = [t_{ij}]_{nxn}$,

$$T = [t_{ij}] = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i T x_j, (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

la que indica la **existencia de caminos entre pares de nodos** y se obtiene calculando la potencia booleana de la matriz de adyacencia A.

Definición: Matriz de potencias booleana de A es la matriz $A^{(p)}$ con $p > 0$

$$A^{(p)} = [a_{ij}^{(p)}] = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists C_{i,j}, l(C_{i,j}) = p \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$A^{(0)} = I, \quad A^{(1)} = A \quad y \quad A^{(p)} = A^{(p-1)} \otimes A, \quad (\otimes \text{ producto booleano}).$$

$$\text{Nota: } a_{ij}^{(2)} = \bigvee_{k=1,n} (a_{ik} \wedge a_{kj})$$

Teorema (Matriz de alcance): Sea A_{nxn} la matriz booleana de la relación de adyacencia en un grafo G de orden n entonces $T = A(I \vee A)^{(s-1)}$ $\forall s \geq n-1$, es la matriz de alcance de G.

La experiencia indica que alcanza con calcular $T = (I \vee A)^{(n-1)}$

Si al calcular T, $t_{ij} = 1 \forall x_i \text{ en } X$, entonces el grafo G es fuertemente conexo, o sea que $\forall x_i, x_j$ existe un camino de x_i a x_j . En caso contrario, si $t_{ij} = 0$ para algún par x_i, x_j , x_j no es alcanzable desde x_i pudiéndose diferenciar las distintas componentes fuertemente conexas de G, clasificando grupos de nodos equivalentes como aquellos que son alcanzables entre sí.

Si los nodos del grafo están ordenados por componentes, cada una de ellas se va a caracterizar por un bloque o submatriz cuadrada de 1s en la diagonal de la matriz T. En estos casos se dice que la matriz T es **triangular por bloques**, es decir que esta compuesta por bloques cuadrados dispuestos en la diagonal.

Justificación del Teorema

Sea $A^{(p)}$ la Matriz de Potencias Booleanas de A, $p \geq 0$,

$$a_{ij}^{(p)} = \begin{cases} 1 & \text{ssi } \exists C_{i,j}, l(C_{i,j}) = p \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Entonces la matriz de alcance $T = \bigvee_{p=1, \infty} A^{(p)}$ cuyos elementos se definen

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ssi } \exists C_{i,j}, l(C_{i,j}) > 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

La suma booleana de todas las potencias posibles de la matriz de Adyacencia A, implica un cálculo poco cómodo, entonces usamos el siguiente lema.

Lema 1: *Sea un grafo G de orden n, si $\exists C_{ij}$ simple y elemental entonces $l(C_{ij})$ es a lo sumo $n - 1$. (los otros caminos no interesan).*

Demostración:

$T = \bigvee_{p=1, s} A^{(p)} \quad \forall s \geq n-1$ (para no perder generalidad)

$$T = A^{(1)} \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \dots \vee A^{(s)} = (\text{por prop.distr}) = A (I \vee A \vee \dots A^{(s-1)})$$

$$T = A (I \vee A)^{(s-1)} \quad \forall s = n-1 \quad \text{LQQD}$$

Lema 2

Se cumple : $I \vee A \vee \dots A^{(s-1)} = (I \vee A)^{(s-1)}$, $\forall s \geq 1$ (se demuestra por Inducción Completa en s).

La experiencia indica que para calcular la matriz de alcance, alcanza con calcular

$$T = (I \vee A)^{(n-1)}$$

Intuitivamente se justifica dado que I incluye $x_i = x_j$, para cualquier i, j , (recordar definición de relación de alcance), además $A (I \vee A)^{(n-2)} \approx (I \vee A)^{(n-1)}$

Triangularización por bloques

Para una mejor manipulación de las componentes fuertemente conexas y para una mejor distinción de las mismas, se triangulariza la matriz de alcance T . Se define una nueva base mediante un reordenamiento de los nodos, permutando las filas y columnas de T . Siendo T la matriz del sistema de ecuaciones $\mathbf{Tx} = \mathbf{b}$, debo transformar este sistema a otro equivalente con otra base que llamaré \mathbf{Qx} . Entonces construyo una matriz Q , tal que $QTQ^t\mathbf{Qx} = \mathbf{Qb}$. La matriz de este nuevo sistema es QTQ^t que implica un nuevo orden del conjunto X de nodos, a partir de las componentes fuertemente conexas del grafo.

Ejemplo: La siguiente matriz de adyacencia corresponde al grafo de la fig. CFC:

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x1	1	1	0	0	0	1
x2	1	1	1	0	0	0
x3	0	0	1	1	1	0
x4	0	0	1	1	0	0
x5	0	0	0	0	1	0
x6	1	0	0	0	1	1

I V A =

(IV A)²

(IV A)⁴

$$(IV A)^5 = T$$

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_6\}, \quad X_2 = \{x_3, x_4\}, \quad X_3 = \{x_5\}$$

1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0

= Q

Mantengo x_1, x_2 : $x_1 \implies x_1, x_2 \implies x_2$
 Reordeno x_6, x_3, x_4, x_5 :

$$x_3 \implies x_4$$

$$x_4 \implies x_5$$

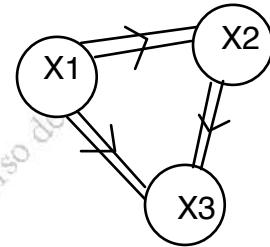
$$x_5 \implies x_6$$

$$x_6 \implies x_2$$

$$\begin{array}{|c|c|c||c|c|c|} \hline
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
 \end{array}
 = Q T Q^t$$

Las componentes fuertemente conexas de un grafo G , se pueden condensar en un punto, formando un nuevo grafo G_C sin ciclos, cuyos arcos son aquellos del grafo G que unen distintas componentes, al que se llama **grafo condensado**.

El siguiente es el G_C de la fig CFC. Los grafos condensados se utilizan en la planificación del tránsito y de transporte urbano.



Procedimiento para condensar un grafo:

- 1) Condensar G .
- 2) Encontrar algún camino hamiltoniano, si existe, en el grafo condensado G_C .
- 3) Encontrar un camino hamiltoniano en cada nodo del grafo condensado (en cada componente fuertemente conexa de G).
- 4) Si es posible, unir el o los caminos encontrados en el paso 3) con el encontrado en el paso 2).

Supongamos que el grafo condensado del ejemplo anterior describe el posible recorrido de una línea de ómnibus, y se desea determinar aquel recorrido que pasa una sola vez por cada una de las paradas (nodos del grafo).

Definición

*Un **camino hamiltoniano** en un grafo G , es aquel camino que pasa una y solo una vez por cada vértice del grafo.*

Si G es de orden n , el largo del camino hamiltoniano es el del cammino elemental de longitud máxima.

3.4 Multiplicación Latina - Camino Hamiltoniano

Procedimiento:

Se enumeran todos los caminos elementales posibles de longitud 1,2,... n-1.
Detenerse al encontrar todos los caminos de largo n-1.

Si no existe Camino Hamiltoniano, se conocerán todos los caminos elementales intermedios. La enumeración de los caminos elementales se realiza mediante el método de *Multiplicación Latina*.

Los elementos de la matriz Latina de largo 1, $[M]^{(1)} = ((m_{ij}^{(1)}))$ se definen

$$m_{ij}^{(1)} = \begin{cases} x_i x_j & \text{si } (x_i, x_j) \in U, i \neq j \\ 0 & \text{si } (x_i, x_j) \notin U, i \neq j \text{ o } i = j \end{cases}$$

Retirando la primera letra de los elementos distintos a 0 obtenemos $[M']^{(1)} = ((m'_{ij}^{(1)}))$ latina.

$$m'_{ij}^{(1)} = \begin{cases} x_j & \text{si } (x_i, x_j) \in U, i \neq j \\ 0 & \text{si } (x_i, x_j) \notin U, i \neq j \text{ o } i = j \end{cases}$$

Los caminos elementales de largo 2 se calculan de la siguiente manera

$$[M]^{(1)} \ L \ [M]^{(1)} = [M]^{(2)}$$

siendo

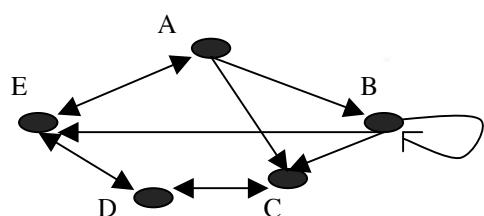
$$m_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1,n} (m_{ik}^{(1)} \otimes m'_{kj}^{(1)}), \text{ donde}$$

$$m_{ik}^{(1)} \otimes m'_{kj}^{(1)} = \begin{cases} m_{ik}^{(1)} \text{ conc. } m'_{kj}^{(1)} \text{ si } m'_{kj}^{(1)} \notin m_{ik}^{(1)} \text{ y } m_{ik}^{(1)} \wedge m'_{kj}^{(1)} = 1 \\ 0 \text{ si no.} \end{cases}$$

$$M^{(3)} = M^{(2)} \ L \ M'^{(1)}, \quad M^{(4)} = M^{(3)} \ L \ M'^{(1)}$$

Para encontrar los caminos hamiltonianos nos detenemos en el paso n-1 (4, en nuestro caso). Los elementos de la matriz $M^{(n-1)}$ contiene la sucesión de nodos de cada uno de los caminos hamiltonianos, si existe alguno.

Ejemplo:



$$M^{(1)}$$

$$M'^{(1)}$$

0	AB	AC	0	AE
0	0	BC	0	BE
0	0	0	CD	0
0	0	DC	0	DE
EA	0	0	ED	0

0	B	C	0	E
0	0	C	0	E
0	0	0	D	0
0	0	C	0	E
A	0	0	D	0

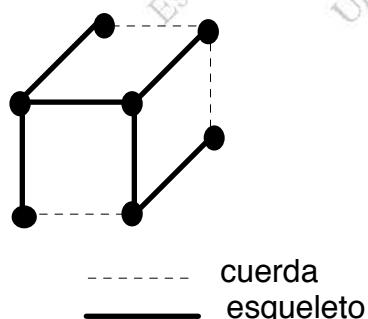
$$M(2) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & 0 & ABC & ACD \\ & BEA & 0 & 0 & AED \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & DEA & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & EAB & EAC & EDC \\ & & & 0 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & 0 & ABC & ABE \\ & BCD & BED & 0 & \\ \hline & 0 & 0 & 0 & CDE \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$= M(4) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 0 & 0 & ABEDC & 0 & ABCDE \\ & BCDEA & 0 & 0 & BEACD & 0 \\ \hline & 0 & CDEAB & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & DEABC & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & EABCD & 0 \\ \hline \end{array}$$

4. ESQUELETOS Y CAMINOS OPTIMALES

4.1 Medida de conexión de grafos

Cuerda de un esqueleto en un grafo conexo G , se le llama a cualquier arista de G que no pertenece al esqueleto E .



Cualquier subgrafo compuesto del esqueleto y una cuerda contiene **un ciclo**

Número ciclomático $v(G)$ de un grafo G , es el número de cuerdas de cualquier esqueleto en G .

Proposición: Sea un grafo G , m el número de aristas , n el número de vértices y c el número de componentes conexas, entonces $v(G) = m - n + c$.

Teorema: Sea G un grafo de orden n , $n > 2$. Las propiedades siguientes son equivalentes en cuanto a caracterizar a G como árbol.

- 1) G es conexo y sin ciclos.
- 2) G es sin ciclos y con $(n-1)$ aristas.
- 3) G es conexo y con $(n-1)$ aristas.
- 4) G es sin ciclos y maximal. G es maximal si al agregar una arista entre dos vértices no adyacentes se crea uno y solo un ciclo.
- 5) G es conexo y minimal. G es minimal si suprimiendo una arista cualquiera del grafo, éste deja de ser conexo
- 6) Todo par de vértices está unido por una y solo una cadena.

Teorema: Un árbol de orden $n > 2$ admite por lo menos dos vértices que son adyacentes a un solo vértice.

Teorema: Un grafo admite un grafo parcial que sea árbol (dicho de otra forma admite un **árbol parcial (esqueleto)** s. s. i. es conexo.

4.2 Esqueletos optimales

Esqueleto Mínimo de un grafo ponderado $G = (X, U, W)$ de orden n , es aquel esqueleto de valor mínimo.

Los esqueletos mínimos permiten, por ejemplo, calcular el costo mínimo de conexión de un grafo. Los algoritmos de Kruskal y Prim encuentran un esqueleto mínimo en G .

ALGORITMO DE KRUSKAL

Repita los siguientes pasos hasta que el conjunto T tenga $(n-1)$ aristas ($|T| = n-1$):

- 1) Al comenzar $T = \emptyset$ (vacío)
- 2) Agregue a T las aristas de menor valor que no formen un ciclo con las aristas que ya están en T .

ALGORITMO DE PRIM

Repita hasta que el árbol T tenga $(n-1)$ aristas:

- 1) Al comienzo tome cualquier arista que tenga el menor valor asignado.
- 2) Agregue a T la arista de valor mínimo, conformada por un vértice en T y otro vértice que no pertenezca a T .

Se puede demostrar que estos algoritmos construyen esqueletos mínimos. El siguiente teorema, demuestra la correctitud del algoritmo de Prim.

Teorema P1: *El algoritmo de Prim es válido, es decir al finalizar el algoritmo, el grafo resultante E es un esqueleto mínimo.*

Demostración:

Podemos afirmar que por construcción, al finalizar el algoritmo, E es un subgrafo parcial de G (conexo) y sin ciclos \implies es un ESQUELETO.

A continuación probamos que E es un esqueleto mínimo y lo hacemos por inducción en la K -ésima iteración del algoritmo.

Al demostrar que en la k -ésima iteración E_k está incluido en **un** esqueleto mínimo, estoy demostrando que al finalizar, E_{n-1} es un esqueleto mínimo.

1.-Paso base

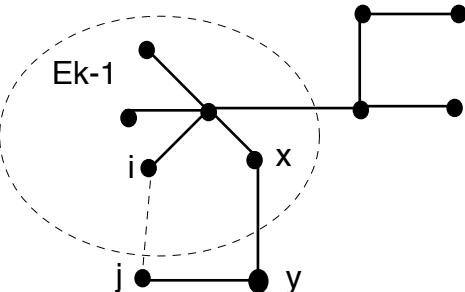
$k=1, n=2, E_1$ tiene una sola arista que es la mínima (o una de ellas)
 $\implies E_1 \subseteq$ en algún esqueleto mínimo de G . Se cumple.

2.- Paso inductivo

Suponemos verdadero para $k = k-1$ ($k-1$ -ésima iteración), o sea que
 $E_{k-1} \subseteq E'$ que es mínimo.

Sea V el conjunto de vértices de E_{k-1} : $V = \{ v_i, v_i \in E_{k-1} \}$

El algoritmo toma una arista $[i,j]$ de valor mínimo, tal que $i \in V$, y $j \notin V$ y lo agrega a E_{k-1} obteniendo $E_k = E_{k-1} \cup [i,j]$



- ° Si $[i,j] \in E'$, $\Rightarrow E_k \subseteq E'$ (esq. mín) **L.Q.Q.D**
- ° Si $[i,j] \notin E'$ $\Rightarrow E' \cup [i,j]$ contiene un ciclo C . Tomemos una arista $[x,y] \in$ ciclo C , y tal que $[x,y] \neq [i,j]$ con x en V e $y \notin V$. Consecuentemente $w[x,y] \geq w[i,j]$ y por lo tanto el grafo $E'' = \{ E' \cup [i,j] - [x,y] \}$ tiene valor \leq el valor de E' (*)

Como por construcción E'' es esqueleto, entonces por (*) es un esqueleto mínimo y como $E_k \subseteq E''$ se verifica el paso inductivo.

$E_k \subseteq$ en un esqueleto mínimo (E' o E'') **L.Q.Q.D.**

4.3 Caminos optimales – Camino mínimo

Algoritmo de DIJKSTRA

Este algoritmo calcula el camino mínimo de un nodo **a** a otro nodo **z** en particular, a la vez que calcula los caminos mínimos desde el nodo inicial **a** dado hasta **cada uno de los otros** nodos del grafo.

Algoritmo de Dijkstra

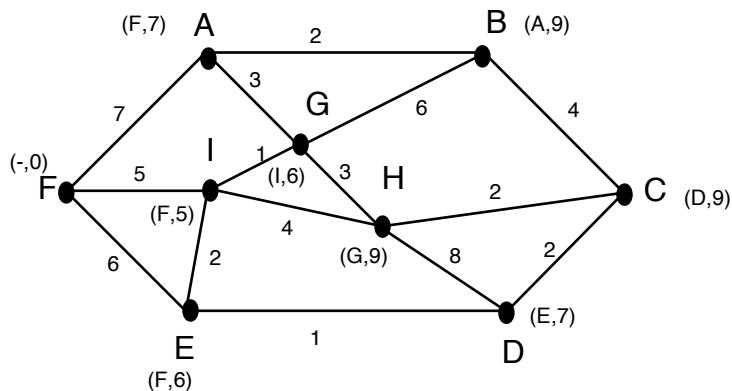
Sea $G = (X, U, W)$ un grafo ponderado,
 $w(u)$ el largo asignado a la arista u ,
 m un contador de distancia,
 $(r, d(p))$ etiqueta del vértice p ,
 r = antecesor de p en el camino desde a ,
 $d(p)$ = distancia mínima desde a hasta p .

Para valores **crecientes de m**, el algoritmo **marca** aquellos vértices que tienen **m** como distancia mínima desde el vértice **a**.

- 1) Empezar con **m = 1** y marcar **a** con **(-, 0)**
- 2) Chequear **cada** arista $u = (p,q)$ desde algún **p ya marcado**, hasta algún **q sin marcar**. Suponga que p está marcado con $(r, d(p))$
Si $d(p) + w(u) = m$, marcar q con (p,m)
- 3) Si $\exists x$ sin marcar: $m := m + 1$;
volver al punto 2
Si no: ejecutar el punto 4
- Si solamente estamos interesados en el camino hasta z , al marcar z , seguimos con el punto 4
- 4) Para cualquier vértice y , un camino más corto de a a y , tiene **largo $d(y)$** (la 2da parte de la etiqueta de y).
Ese camino lo **puedo encontrar retrocediendo desde y**, usando la 1era parte de las etiquetas de los vértices encontrados en el retroceso.

Este algoritmo permite calcular cuan lejos se puede llegar en 1, 2 m unidades. Como está especificado en Pero tiene una ineficiencia muy significante, **Si** la suma $d(p) + w(u)$ en 2) tiene valor **por lo menos $m' > m$ entonces** el contador de distancia **m**, debería ser **incrementado** inmediatamente a m' ($m := m'$).

Ejemplo: Encontrar el camino mínimo (mas corto) entre F y C del siguiente grafo



$m=1$ no puedo marcar

$m'=5$, incremento $m := m'$

$m=5$, marco I (**F**, 0+5)

$m=6$, encuentro G, $d(F) + 1 = 6$ marco G (**I**, 6)

$m=7$ marco A [0+7] (**F**, 7) y D [6 + 1] (**E**, 7)

$m=8$ no marco

$m=9$ marco H (G,9) y B (A,9) marco **C** (**D**,9)

Encontré C, $d(C) =$ largo del camino = 910

Retrocedo por la primera etiqueta: C->D->E->I->F.

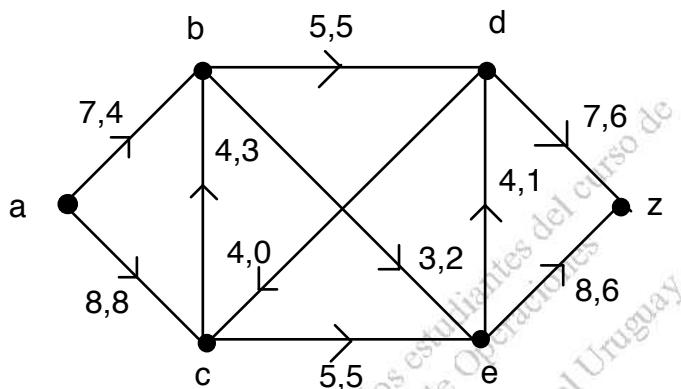
El camino mínimo es: F-I-E-D-C.

5. REDES – FLUJOS

Red es un grafo ponderado, con un nodo **a** llamado **fuente** y otro nodo **z** llamado **pozo**, terminal o resumidero (*sink*).

$$\begin{aligned} N &= (X, U, W) \\ X &= \{a, z, x_i, 1 \leq i \leq n-2\} \\ U &= \{(x_i, x_j), \dots\} \end{aligned}$$

Consideramos redes orientadas. Es viable afirmar que una red siempre es orientada.



Se llama red de transporte cuando a cada arco u de la red se le pondera asignándole un par de números enteros, positivos mediante las funciones capacidad, $k(u)$, y flujo, $\varphi(u)$.

$$w(u) = (k(u), \varphi(u))$$

$k(u)$ es la **capacidad** o cota superior de lo que puede transportar el arco u y $\varphi(u)$ el **flujo** o la cantidad de sustancia que realmente transporta el arco u .

Una red de transporte modela problemas del tipo:

- maximizar el flujo de petróleo, a través de una gran red de oleoductos;
- maximizar el número de llamadas telefónicas en la red de telefonía.
- otros.

Se transportan unidades de flujo de un sitio a otro a través de una red, con ciertas restricciones en cuanto a capacidades de envío en las líneas que componen la red. En el caso del transporte de petróleo, la capacidad de un arco representa la capacidad en barriles por minuto de una sección del oleoducto, el flujo es el fluido que se transporta o envía.

Lo que se busca es maximizar un "**flujo**" **desde el nodo a al nodo z**, de tal modo que el flujo (ó fluido) que pasa por cada arco no excede su capacidad permitida.

Es un problema típico de Investigación de Operaciones:

$$\begin{aligned} & \max \{ \text{Flujo} \} \\ & \text{según restricciones} \end{aligned}$$

La capacidad y flujo de los arcos pueden tener asignados otros valores, que no sean enteros positivos, pero se debe tener especial cuidado al aplicar un algoritmo de solución que sea adecuado a esa característica.

5.1 Corte mínimo – flujo máximo

El conjunto de los nodos **X** se puede **particionar** en dos subconjuntos **P**, y **P^c**, $P \cup P^c = X$, $P \cap P^c = \emptyset$.

Definición: *Un corte en la red N es el conjunto de los arcos incidentes hacia el exterior de P.*

$$(P, P^c) = \{ (x, y) , x \in P, y \in P^c, P \cup P^c = X, P \cap P^c = \emptyset \}$$

Un corte me determina posibles caminos desde **a** a **z**

En la red de la fig. 4.1, si $P = \{b, c\}$, $P^c = \{a, d, e, z\}$, $(P, P^c) = \{(b, d), (b, e), (c, e)\}$;

Nota: $\{(a, b), (a, c), (d, c)\} \notin$ al corte, sin embargo en redes no orientadas, (P, P^c) denota **todas** las arcos que van de P a P^c .

Definición: *Corte a-z (fuente-terminal) es aquel en que $a \in P$ y $z \in P^c$.*

En la red de la fig 4.1, si $P = \{a, b, c\}$, (P, P^c) es un corte a-z.

Definición: *Capacidad de un corte (P, P^c) viene dada por $k(P, P^c) = \sum_{u \in \text{corte}} k(u)$.*

Definición: *Flujo a-z, (flujo fuente-terminal) en una red N, es aquel en el que $\varphi(u)$ $\forall u \in U$, los nodos fuente **a** y pozo **z** satisfacen las siguientes condiciones:*

- a)** $0 \leq \varphi(u) \leq k(u) \quad \forall u \in U$
- b)** $\varphi(u) = 0, \quad \forall u \in I^-(a) \quad \text{y} \quad \forall u \in I^+(z)$
- c)** $\forall x \neq a, \quad \forall x \neq z, \quad \sum_{u \in I^+(x)} \varphi(u) = \sum_{u \in I^-(x)} \varphi(u)$

La condición b) nos asegura que el flujo vaya de la fuente al pozo y no al revés. La condición c) implica que el flujo parcial que entra a un nodo x, es igual al flujo parcial que sale de x, es llamada la **condición o ley de conservación de flujo** de Kirchhoff. Si se suman las ecuaciones en c) sobre todas las x pertenecientes a un subconjunto P de nodos de una red N que **no** contengan ni **a** ni **z**, se obtiene la siguiente expresión como consecuencia de c>:

$$\sum_{x \in P} \sum_{u \in I^+(x)} \varphi(u) = \sum_{x \in P} \sum_{u \in I^-(x)} \varphi(u)$$

Obs: algunos $\varphi(u)$ se repiten en ambos miembros de la igualdad, ya que en ambos lados se suman el flujo de aquellos arcos que van de un nodo en P a otro en P.

Por ejemplo tomando $P = \{b, c\}$ en el ejemplo de la fig. 4.1,

$$\sum_{u \in I^+(b)} \varphi(u) = 5+2 = \sum_{u \in I^-(b)} \varphi(u) = 4+3$$

$$\sum_{u \in I^+(c)} \varphi(u) = 5+3 = \sum_{u \in I^-(c)} \varphi(u) = 8+0$$

$$\sum_{x \in P} 5+2+5+3 = \sum_{x \in P} 4+3+8+0$$

Eliminando los flujos $\varphi(u)$ que se repiten en ambos miembros se obtiene una nueva condición

para todo subconjunto P de nodos que **no contengan ni a ni z**.

$$c') \quad \sum_{u \in (P, P^c)} \varphi(u) = \sum_{u \in (P^c, P)} \varphi(u)$$

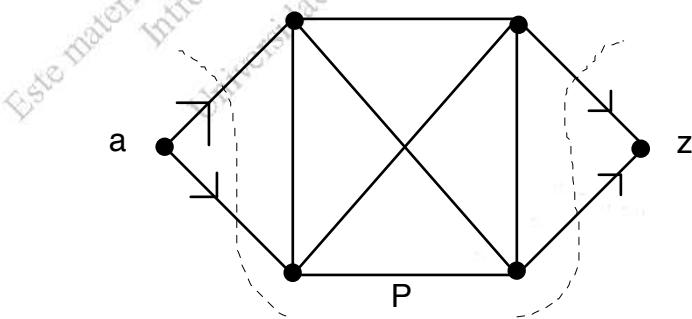
Es decir que $\forall P$ que no contenga ni a ni z, el flujo que ingresa a P es igual al flujo que sale de P.

Teorema N.1

Para cualquier flujo a-z, q en una red N, el flujo que sale de la fuente a es igual al flujo que ingresa (entra) al pozo z.

Demostración: Suponga momentáneamente que $N = (X, U, W)$ no contiene ningún arco (a,z). (nota: el teorema es válido también cuando existe un arco (a,z)).

Sea $P = \{ X - a - z \}$ y $P^c = \{ a, z \}$



Flujo saliente de a = $\sum_{u \in I^+(a)} \varphi(u)$

Por la condición b) de flujo a-z: $\sum_{u \in I^+(a)} \varphi(u) = \sum_{u \in (P^c, P)} \varphi(u)$

Por c'): $\sum_{u \in (P, P^c)} \varphi(u) = \sum_{u \in (P, P^c)} \varphi(u)$

Por b): $\sum_{u \in (P, P^c)} \varphi(u) = \sum_{u \in I^-(z)} \varphi(u) = \text{flujo entrante a } z$

Flujo saliente de a = $\sum_{u \in I^+(a)} \varphi(u) = \sum_{u \in I^-(z)} \varphi(u) = \text{flujo entrante a } z$ LQJD

La condición b) de flujo a-z determina que el único flujo hacia P desde $P^c = \{a, z\}$ debe ser desde a.

Cuantificación de un flujo a-z : $|\varphi|$.

$|\varphi|$ es el valor del flujo a-z, y se define como la suma del flujo que sale de a, (equivalente a decir que es la suma del flujo que entra a z). Entonces, una cota superior de $|\varphi|$ es la suma de las capacidades de los arcos incidentes hacia el exterior de a.

$$|\varphi| = \sum_{u \in I^+(a)} \varphi(u) \leq \sum_{u \in I^+(a)} k(u)$$

De la misma manera, la suma de las capacidades de los arcos incidentes hacia el interior de z es una cota superior del valor del flujo $|\varphi|$. Además, $|\varphi|$ está acotado también por la capacidad de cualquier corte a-z, es decir, por la suma de las capacidades de cualquier conjunto de arcos que corta todo flujo de a a z.

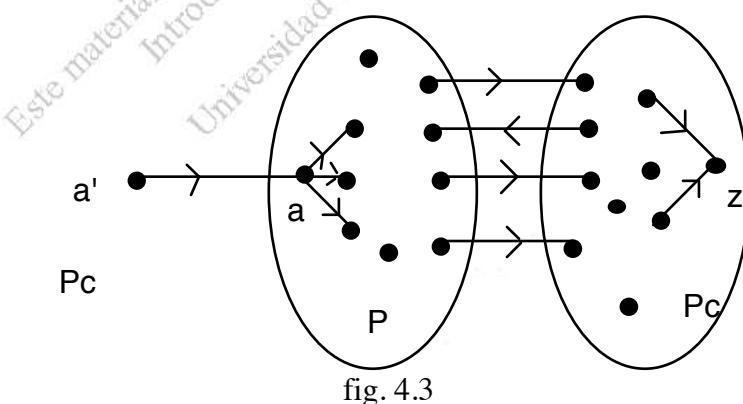
En el ejemplo primero, el corte con $P = \{a, b, c\}$, es de capacidad $k(P, P^c) = 13$ es, por lo que ningún flujo a-z en la red puede valer más de 13. (**Nota:** en este caso c' no es válida ya que $a \in P$.)

Teorema N.2: Para cualquier flujo a-z, φ , y cualquier corte a-z, (P, P^c) , en una red N ,

$$|\varphi| \leq k(P, P^c)$$

Demostración:

Expandimos la red N agregándole un nodo a' con un arco $u' = (a', a)$ de capacidad infinita (significa muy grande), $k(u') = \infty$, $a' \in P^c$.



A u' se le asigna el valor del flujo $|\varphi|$, $\varphi(u') = |\varphi|$, entonces φ se transforma en un flujo a'-z en la red expandida, la antigua fuente a ahora recibe su flujo de la super fuente a'.

En esta nueva red, N' , si se puede aplicar la condición c') a P, ya que P no contiene la fuente a'.

$$\sum_{u \in (P^c, P)} \varphi(u) = \sum_{u \in (P, P^c)} \varphi(u)$$

Además por construcción de N' , el flujo hacia P es de valor al menos $|\varphi|$ que es el valor de $\varphi(u')$, otros flujos podrían ingresar a P por arcos desde P^c .

$$|\varphi| = \varphi(u') \leq \sum_{u \in (P^c, P)} \varphi(u) = \sum_{u \in (P, P^c)} \varphi(u) \leq \sum_{u \in (P, P^c)} k(u) = k(P, P^c) \quad (*)$$

$$|\varphi| \leq k(P, P^c) \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

Corolario N.2

Para cualquier flujo a-z, φ , y cualquier corte a-z, (P, P^c) , en una red N ,

$$|\varphi| = k(P, P^c) \text{ s.s.i}$$

$$i) \varphi(u) = 0, \forall u \in (P^c, P)$$

$$ii) \varphi(u) = k(u), \forall u \in (P, P^c).$$

*En este caso decimos que φ es un **flujo máximo** y (P, P^c) es un **corte a-z de capacidad mínima**.*

Demostración:

Considere las inecuaciones en (*) de la demostración del Teorema N.2 y la red expandida.

$$|\varphi| = \varphi(u') \leq \sum_{u \in (P^c, P)} \varphi(u) = \sum_{u \in (P, P^c)} \varphi(u) \leq \sum_{u \in (P, P^c)} k(u) = k(P, P^c)$$

Directo

Si $|\varphi| = k(P, P^c)$ entonces se cumple la igualdad en la inecuación (*) es decir, $|\varphi| = \sum_{u \in (P^c, P)} \varphi(u) \rightarrow i)$ es verdadera,

(si fuese $\sum_{u \in (P^c, P)} \varphi(u) > |\varphi|$, habrían otros flujos positivos hacia P).

Además $\sum_{u \in (P, P^c)} \varphi(u) = \sum_{u \in (P, P^c)} k(u) = k(P, P^c)$ lo que implica $\varphi(u) = k(u) \forall u \in (P, P^c)$, porque si no $\sum_{u \in (P, P^c)} \varphi(u) < k(P, P^c)$ contradice la hipótesis.

Recíproco: vale el mismo argumento utilizado para demostrar el directo.

Por lo tanto la igualdad en (*) se cumple s s i **i)** y **ii)** se cumplen.

La última afirmación del corolario, se deriva directamente del Teorema N.2

Cuando en $|\varphi| \leq k(P, P^c)$ se cumple la igualdad, se obtiene el valor máximo de $|\varphi|$
 $\Rightarrow \varphi$ es un **flujo máximo**,

y también cuando se cumple la igualdad, se obtiene el valor mínimo posible de la capacidad del corte a-z en consideración,

$\Rightarrow (P, P^c)$ es un **corte a-z de capacidad mínima**.

5.2 Bases Para la Construcción de un Flujo Máximo

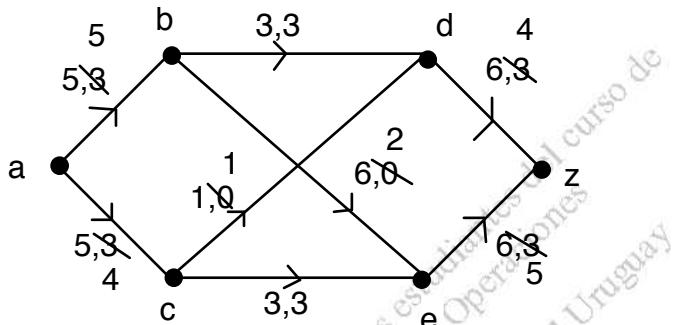
Arco Saturado El arco u de la red se dice saturado cuando $k(u) = \varphi(u)$;

La **holgura de un arco u** es la cantidad libre de su capacidad, aún posible de utilizar y se nota $s(u) = k(u) - \varphi(u)$

Holgura mínima en un camino que va de **a** a **z**, es la holgura mínima entre todos los arcos de ese camino.

Camino a-z, L_i , es un camino i que va de la fuente a la terminal.

Ejemplo:



Supongamos que a la red de la figura no se le asignaron flujos a sus arcos. Encontramos en esa red el camino $L_1 = \{(a,b), (b,d), (d,z)\} = \text{a-b-d-z}$. La holgura mínima de L_1 es 3, $\min s(u) = 3 \forall u \in L_1$. Esto quiere decir que podríamos sumarle un flujo de 3 unidades a cada uno de los arcos de L_1 .

Luego identificamos el camino $L_2 = \text{a-c-e-z}$, y hacemos lo mismo que con L_1 , en este caso también sumamos 3 unidades, $\min s(u) = 3 \forall u \in L_2$. Con el mismo procedimiento se podría ir aumentando el flujo de los arcos pertenecientes a caminos que van de **a** a **z**, con su holgura mínima, hasta encontrar un flujo que sea máximo.

Afirmación: Cualquier flujo en una red N , se puede descomponer unidades de flujo a-z en caminos que van de a a z.

Por ejemplo el flujo de llamadas de teléfonos de un país a otro puede ser descompuesto en llamadas individuales; el flujo de petróleo en su envío, puede descomponerse en los caminos del envío de cada tonelada.

Unidad de flujo a-z en L , siendo L un camino que va de a a z, es el flujo

$$\begin{aligned}\varphi_L &\quad \text{con } \varphi_L(u) = 1 \text{ si } u \in L \\ &\quad \text{y } \varphi_L(u) = 0 \text{ si } u \notin L\end{aligned}$$

En base a esta unidad, se define la suma de flujos al flujo de una red.

$$\varphi = \varphi + \varphi_{L_1}(u) + \varphi_{L_2}(u), \forall u \in U$$

El flujo de la red φ sigue siendo un flujo a-z, siempre que $\varphi(u) \leq k(u)$, $\forall u \in$ caminos en consideración.

Si s es la menor holgura en un camino L , es entonces la holgura mínima del camino L por lo que se puede sumar $s \cdot \varphi_L$ al flujo de la red.

$$s^* \varphi_L = \varphi_L + \varphi_L + \varphi_L + \varphi_L \dots \quad (s \text{ veces}).$$

$$\varphi = \varphi + s^* \varphi_L$$

Este mecanismo nos sugiere una manera de construir un flujo máximo: aumentando el flujo de la red mediante la suma de unidades de flujo a-z equivalentes a la holgura mínima de los caminos **a-z** que así lo permitan.

Volviendo al ejemplo, al comienzo el flujo de la red φ es $\varphi(u) = 0 \quad \forall u \in U$, luego encontramos el camino $L_1 = \mathbf{a-b-d-z}$ y le sumamos a φ flujo $3\varphi_{L_1}$. Observar que L_1 posee un único arco saturado: (b,d), el de la holgura mínima. Luego aumentamos en $3\varphi_{L_2}$, $L_2 = \mathbf{a-c-e-z}$. Continuamos con $L_3 = \mathbf{a-b-e-z}$ de holgura mínima 2, que se usa para aumentar el flujo en $2\varphi_{L_3}$ y $L_4 = \mathbf{a-c-d-z}$ de holgura mínima 1 el flujo aumenta en φ_{L_4} . Así se obtiene el flujo a-z

$$\varphi = 3\varphi_{L_1} + 3\varphi_{L_2} + 2\varphi_{L_3} + \varphi_{L_4}$$

Luego de aumentar el flujo con φ_{L_4} , todos los caminos que llevan a Z tienen holgura mínima 0 y en la búsqueda de caminos con alguna holgura mínima, no se puede seguir mas allá que de **a** hasta **c**.

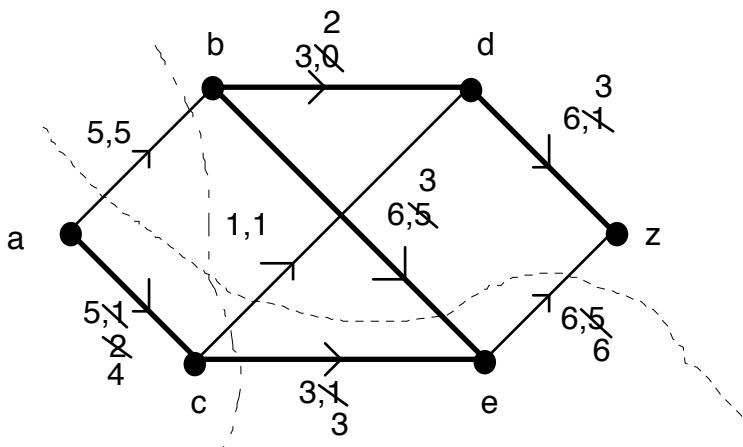
Se han saturado todos los arcos de un corte a-z; $\forall u \in (P, P^c)$, $P = \{a, c\}$, $\varphi(u) = k(u)$.

$$k(P, P^c) = 9 = |\varphi| \Rightarrow \varphi \text{ maximal} \quad (\text{por corolario N.2})$$

y el corte es mínimo, es el de capacidad mínima, observar que al estar saturado, no se puede enviar mas que $k(P, P^c)$ unidades desde **a**.

En este caso se tuvo la intuición necesaria para encontrar los caminos que llevaron al flujo máximo. Pero no siempre es tan fácil.

La siguiente figura muestra otro procedimiento de aumento a la red del ejemplo.



Se empieza con $L_1 = a-b-e-z$ saturando el arco (a,b) , sumandole $5\varphi_{L_1}$. Luego $L_2 = a-c-d-z$, saturando (c,d) y sumandole al flujo $1\varphi_{L_2}$. Queda nada mas que un camino sin saturar $L_3 = a-c-e-z$ holgura mínima 1, se sumando $1\varphi_{L_3}$ al flujo total.

$$\varphi = \varphi + 5\varphi_{L_1} + 1\varphi_{L_2} + 1\varphi_{L_3}$$

No hay mas caminos de a a z con holgura mínima positiva (>0), no es posible aumentar mas el flujo. De a puedo llegar nada mas que hasta e pasando por c .

Queda determinado un corte saturado (P, P^c) , $P = \{a, c, e\}$. Luego observamos que

$$|\varphi| = 7 \text{ y } k(P, P^c) = 12. \Rightarrow |\varphi| < k(P, P^c)$$

¡El método de aumento puro, no siempre encuentra un flujo máximo!

Por el corolario N.2 un flujo es de valor máximo ssi

- i) $\varphi(u) = 0, \forall u \in (P^c, P)$
- ii) $\varphi(u) = k(u) \forall u \notin (P, P^c)$

En este caso observamos que el arco $u = (b, e) \in (P^c, P)$ y $\varphi(u) = 5 \neq 0$

Se ha cometido el error de haber aumentado de entrada todas unidades libres de L_1 , (5). Por eso en L_3 no se pudo mandar mas que 1 unidad de flujo de L_3 , y en L_2 nada mas que 1, (c,d) no lo permitía. En realidad se debería haber reservado alguna unidad de L_1 para asignarsela a L_3 , (c,e) sí lo permitía.

Con $L_4 = a-b-d-z$, se obtiene el flujo.

$$\varphi = 3\varphi_{L_1} + \varphi_{L_2} + 3\varphi_{L_3} + 2\varphi_{L_4}$$

Este método de reservar unidades de flujos es muy complicado y poco controlable ya que igualmente no asegura encontrar el máximo. Existe una manera de ir corrigiendo el aumento de los flujos y que evita caer en los errores mencionados.

En la red de la fig 4.5, el arco (b,e) contiene 5 unidades de flujo que van de P^c a P con (P, P^c) saturado, $\varphi(b,e) = 5 > 0$, esto se corrige reduciendo el flujo de (b,e) . Como

hacerlo? Por la condición c) de flujo a-z, se lo puede reducir solamente, si se compensa la reducción del flujo desde **b** hacia **e**, con un incremento hacia **e** desde cualquier arco $u \in I^-(e)$, con extremo inicial en P . Compensando desde P^c se corre el riesgo de encontrarse nuevamente con el caso de arcos que van de P^c a P con flujo positivo (ver corolario N.2).

El incremento de compensación debe venir de la fuente **a**, ya que necesitamos corregir el flujo en un camino desde **a** a **e** que contenga nodos en P . El único camino de esas características es $K_1 = a-c-e$. Del mismo modo, la reducción del flujo de **b** hacia **e**, debe ser compensado por un incremento en algún camino desde **b** hacia algún nodo en P^c , ya que necesitamos corregir flujo en algún camino de **b** a **z**, con nodos en P^c . El único camino con esas características es $K_2 = b-d-z$. La mínima holgura en K_1 es 2, y en K_2 es 3, el mínimo entre ellos es 2, entonces se disminuye el flujo de (b,e) en dos, $\varphi(b,e) := \varphi(b,e) - 2$, y se aumenta el flujo de K_1 y K_2 en 2. Con este aumento de corrección se obtiene el flujo máximo, en el corte a-z saturado con $P = \{a,c\}, P^c = \{b,d,e,z\}$.

Observen que el procedimiento ha consistido en realizar una corrección en la cadena **K = a-c-e-b-f-z** de 2 unidades de flujo.

Definición *Unidad de flujo a-z en una cadena K que va de a a z, es el flujo φ_K con*
 $\varphi_K(u) = 1 \quad \forall u \in K$ *con dirección igual al de la orientación de la cadena*
 $\varphi_K(u) = -1$ *en aquellos arcos con orientación contraria a la de la cadena,*
 $\varphi_K(u) = 0$ *en los otros arcos.*

φ_K en realidad no es un flujo ya que tiene valores negativos en algunos arcos, pero el flujo resultante de una corrección, $\varphi = \varphi + \varphi_K$ sí lo es. Aquellos arcos que van en la dirección contraria a la de K , tiene valores positivos, > 0 , que puedo reducir y existe holgura en los arcos que van en la misma dirección de K hacia **z** que puedo aumentar.

En el ejemplo anterior se corrige sumando a φ un flujo cadena de 2 unidades, $\varphi = \varphi + 2\varphi_K$.

5.3 Algoritmo de Flujo Máximo

El algoritmo de aumento que a continuación planteamos, de Ford y Fulkerson, construye un corte mínimo y un flujo máximo, corrigiendo e incrementando, mediante el aumento del valor del flujo φ con unidades de flujo a-z en cadenas.

Iterativamente va construyendo cadenas de flujos desde **a**, de una manera similar a la del camino mínimo de Dijkstra.

A cada nodo **q** va visitando le asigna una etiqueta: $(p^\pm, D(q))$ compuesta de dos etiquetas:

- 1) **p** es el nodo precedente a **q** en la cadena de flujo de **a** a **q**, el índice superior de **p** será el signo de + si el último arco en la cadena es (p,q) y el signo de - si el último arco es (q,p).

- 2) **D(q)** es la holgura mínima entre todos los arcos de la cadena que van de **a** a **q**. En un arco **u** de orientación contraria al de la cadena, la holgura es la cantidad de flujo que puedo quitar.

En caso de aplicar este algoritmo en una red con un flujo φ preasignado, controlar que φ sea $a-z$.

<i>Algoritmo de Flujo Máximo</i>
1.- Marcar la fuente a con $(-\infty)$ a es el primer nodo a examinar.
2.- Sea p el vértice que se examina cuya 2da etiqueta es $D(p)$
a) Examinar todo $u = (q,p) \in I^-(p)$ Si $\varphi(u) > 0$ y q no marcado entonces marcar q con $(p^-, D(q))$ siendo $D(q) = \min(D(p), \varphi(u))$
b) Examinar todo $u = (p,q) \in I^+(p)$ Si $s(u) = k(u) - \varphi(u) > 0$ y q no marcado entonces marcar q con $(p^+, D(q))$ siendo $D(q) = \min(D(p), s(u))$
3.- Si Z marcado, ir al punto 4.
Si no, elegir otro vértice marcado para examinar (que no haya sido examinado antes) e ir al punto 2. Si no existen mas vértices marcados para examinar se ha determinado un corte $a-z$ saturado(P, P^C) , con P el conjunto de los vértices marcados. $ P = k(P, P^C)$ y por eso φ maximal ==> FIN
4.- Encuentre una cadena $a-z$ K de arcos con holguras, retrocediendo desde z como en el algoritmo de camino mínimo. El flujo a incrementar φ_K es cadena flujo $a-z$, de valor $D(z)$ unidades $\varphi' = \varphi + D(z)\varphi_K$ Reasignar el flujo, y se aplicar nuevamente el agoritmo a φ' , es decir volver a 1)

Teorema: *Dado cualquier flujo $a-z$ φ , aplicando un número finito de veces el algoritmo de Ford y Fulkerson, se obtiene un flujo máximo. Además, si P es el conjunto de vértices marcados en la etapa final del algoritmo, el corte (P, P^C) es un corte $a-z$ mínimo.*

Corolario (Flujo máximo- Corte mínimo)

En cualquier red orientada, el valor de un flujo máximo $a-z$ es igual a la capacidad de un corte $a-z$ mínimo.

6. INTRODUCCIÓN A LOS PROBLEMAS DE ORDENAMIENTOS

Ordenar es programar la ejecución de la realización de un trabajo, asignando recursos y fijando las fechas de ejecución de las tareas que lo componen.

Los problemas de ordenamiento son inherentes a toda organización. Estos problemas se resolvieron en forma empírica, mediante diagramas de Gantt, hasta 1958. En esta fecha aparecen el método PERT, o americano, y el método de los potenciales de B. Roy que resuelven los problemas de ordenamiento en el caso particular en que las restricciones son de sucesión y de ubicación temporal de tareas. Estos dos métodos, que llamaremos de camino crítico, surgieron a partir de necesidades concretas de proyectos de gran envergadura con una organización muy compleja debido al gran número de tareas. A pesar de que el método del camino crítico resuelve un caso particular de los problemas de ordenamiento, y de los más simples, se ha convertido en elemento indispensable en la gestión de las organizaciones.

Los problemas de ordenamiento aparecen en diversas áreas: informática (jobs, gestión de recursos: procesos, memoria), construcción (seguimiento de proyectos), industria (problemas de talleres, gestión de la producción), administración (empleo de tiempo).

En los problemas de ordenamiento distinguimos: las tareas, las restricciones potenciales, los recursos y la función económica.

Las *tareas* son el común denominador de los problemas de ordenamiento, su definición no es siempre inmediata ni trivial. Cuando la duración y las fechas mas tempranas de comienzo de una tarea son conocidas, estamos ante un problema estático, por el contrario, cuando el conjunto de tareas evoluciona con el tiempo de forma no determinista, estamos ante problemas estocásticos y/o dinámicos.

Las tareas pueden estar ligadas por restricciones de sucesión y de localización temporal, que llamamos *restricciones potenciales*. Ejemplo de restricciones de sucesión: construir primero los cimientos de un edificio, luego las paredes, etc. Ejemplo de restricciones de localización temporal: tal tarea no puede comenzar antes de tal fecha o se tiene que terminar antes que tal otra.

Las tareas requieren de *recursos* para ejecutarse . Los recursos determinan dos tipos de restricciones: disjuntivas y acumulativas. Una restricción disjuntiva aparece cuando, por ejemplo, dos tareas usan la misma máquina y no se pueden ejecutar simultáneamente. Hay una restricción acumulativa cuando, por ejemplo, tres procesadores estan disponibles para ejecutar cuatro tareas, con lo cual una se retrasará y deberá necesariamente esperar la finalización de alguna de las otras.

La *función objetivo* se determina según cómo se programen las tareas de forma de *optimizar según un cierto criterio*. Por ejemplo, la minimización de la duración total de un trabajo (criterio más usado), respetando las fechas de los pedidos, o minimización de un costo, etc. En forma genérica hay tres tipos de función objetivo en los problemas de ordenamientos: 1) uso eficaz de recursos, 2) demora mínima en la

de ejecución de las tareas, 3) cumplimiento de las fechas de finalización fijadas a priori.

6.1 Conceptos Generales

Sean: $I = \text{conjunto de tareas}$, $n = \text{número de tareas a ejecutar} (\text{card } I)$,
 $d_i = \text{duración de la tarea } i$,
 $c_i = \text{fecha de disponibilidad, o de comienzo mas temprana}$
 $f_i = \text{fecha en que debería estar terminada la tarea } i$ ("deadline")
 $t_i = \text{fecha de comienzo de ejecución de la tarea } i$,
 $T_i = \text{fecha de fin de ejecución.}$

Si la tarea i no es interrumpida, entonces: $T_i = t_i + d_i$.

Una condición necesaria para que un ordenamiento sea realizable es:

$$c_i \leq t_i < T_i \leq f_i, \forall i \in I$$

En ciertos casos, p.ej. si hay un retardo tal que $T_i > f_i$, se podrá considerar un costo w_i asociado a esa tarea i .

6.1.1 Relación entre las tareas, Restricción Potencial

En general dos tareas cualesquiera $i, j \in I$, no son independientes y pueden estar ligadas por restricciones de anterioridad. Notaremos una restricción potencial entre las tareas j e i de la sg manera:

$$t_j - t_i \geq a_{ij}$$

En el caso particular cuando $a_{ij} = d_i$, estamos ante una sucesión simple. Sin embargo *no se puede representar mediante restricciones potenciales* el hecho de que dos tareas exijan el mismo recurso en el mismo momento y que por lo tanto no pueden ejecutarse simultáneamente.

El conjunto de restricciones potenciales se puede representar por un grafo ponderado y los métodos de camino crítico que estudiaremos trabajan esencialmente sobre este grafo.

6.1.2 Modos de ejecución de las tareas.

Las tareas se ejecutan en forma continua o discontinua. Cuando una tarea i puede ser ejecutada en forma discontinua, se dice entonces que es interrumpible ("preemtable"). O sea que una tarea i es pasible interrumpible ("preemtable") si cuando se está ejecutando y usando un determinado recurso, puede ser interrumpida por una tarea j de mayor prioridad, y el recurso pasa a ser utilizado por la tarea j . En general el hecho de tener este tipo de tareas disminuye la complejidad de los problemas tratados.

6.1.3 Recursos

Se distinguen dos tipos de recursos: renovables y consumibles.

Un recurso es *renovable* si después de haber sido usado en una tarea, es utilizable totalmente en las tareas posteriores. Ejemplos: máquinas, procesadores, archivos, personal, etc. Un recurso es *consumible* si después de haber sido utilizado en una tarea, ya no está más disponible para las posteriores. Ejemplos: materias primas, dinero, etc. Los recursos, sean renovables o no, pueden estar disponibles solamente en ciertos períodos, sujetos a una curva de disponibilidad.

6.1.4 Criterios de optimización.

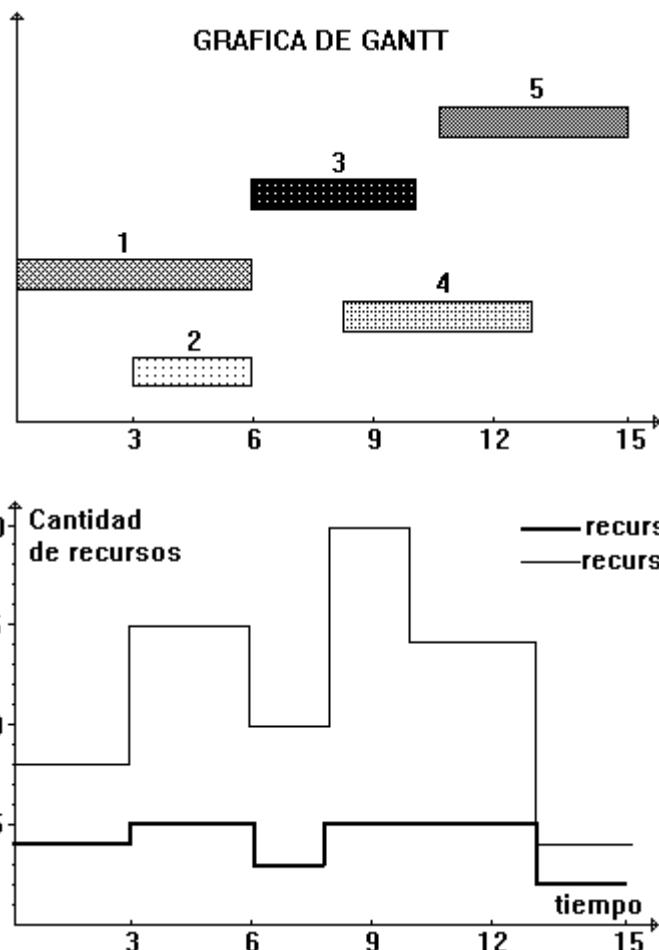
Los factores más importantes en la evaluación de un ordenamiento son: la utilización eficaz de los recursos, la disminución de la demora global y el respeto del mayor número posible de restricciones introducidas. A continuación describimos algunos de los criterios de optimización mas utilizados en problemas de ordenamientos:

- a) Duración total del ordenamiento: Si T_{\max} es la duración total del ordenamiento, y la fecha de comienzo es 0, entonces T_{\max} es igual a la fecha de finalización de la tarea que finaliza última, es decir, $T_{\max} = \max \{T_i\}, \forall i \in I$. La minimización de T_{\max} es la más utilizada y es probable que con este criterio se asegure además una utilización eficaz de los recursos. Los métodos de camino crítico tienen como objetivo la minimización de T_{\max} .
- b) Respeto de las fechas mas tardías de finalización: Muchos casos de problemas reales, deben respetar las demoras y esto se relaciona con las f_i . Una propuesta es tratar de minimizar el retraso mayor. Si r_i es el retraso de la tarea i , entonces $r_i = \max (0, T_i - f_i)$, y $R_{\max} = \max_{i \in I} \{r_i\}$. El criterio sería $\min(R_{\max})$. Otro criterio sería la minimización de la suma o la suma ponderada de los retardos, etc.
- c) Minimización de un costo: Este tipo de criterio puede expresarse de diversas formas, por ejemplo, minimizar la suma ponderada de fechas de finalización de tareas; es usado para minimizar costos de stock.
- d) Minimización de número de interrupciones: Si en los problemas de ordenamientos se autorizan las interrupciones y si una tarea es interrumpida n veces, la suma del número total de interrupciones para todas las tareas es considerado un criterio de optimización secundario importante. En multiprogramación, por ejemplo, a cada interrupción de tarea está asociado un cambio de contexto, cuya duración no es despreciable. Observar que en el ordenamiento de actividades en la producción de bienes, puede ser tolerado un número importante de interrupciones en el uso de recursos no críticos (cuyo costo de interrupción es nulo) si ello redunda en el uso eficaz de los factores limitativos.

6.1.5 Representación de las soluciones (diagrama de Gantt)

El diagrama de Gantt es un método gráfico de representación de la solución; es una valiosa ayuda para resolver en forma empírica el problema. El diagrama de Gantt no es, en sí mismo, un método de resolución de problemas de ordenamiento.

Ejemplo: Sean 5 tareas $I = (1, 2, 3, 4, 5)$ de duraciones $d = (6, 3, 4, 5, 5)$ que usan, respectivamente, 4, 1, 3, 2, 3 unidades de recurso 1 y 8, 7, 10, 10, 4 unidades de recurso 2, y las fechas de ejecución son: 0, 3, 6, 8, 10



6.2 Modelado de los problemas de ordenamientos

Clásicamente las tareas sujetas a restricciones temporales se modelan con un grafo ponderado. Si se considera entonces el problema sin restricciones de recursos, los algoritmos de caminos, aplicados a este grafo, permiten calcular las secuencias de fechas más tempranas y más tardías, de comienzo y finalización de las tareas, como veremos más adelante. Se trata entonces de encontrar un ordenamiento óptimo en el espacio de soluciones del problema, restringido solamente a ligaduras temporales, o relaciones de sucesión en el tiempo. Este es llamado problema central de los ordenamientos. Existen variantes de modelado que permiten la introducción de restricciones de recursos, por ejemplo redes de Petri temporizadas, grafos bivaluados, entre otros.

6.2.1 El problema central de los ordenamientos.

Se trata de ordenar, en una duración mínima, un conjunto $I = \{1, \dots, n\}$ de tareas sujetas a restricciones temporales del tipo desigualdad de potencial:

$$t_j - t_i \geq a_{ij}, \quad i, j \in I$$

donde t_i (respectivamente t_j) es la fecha de comienzo de la tarea i (resp. j) y a_{ij} un real cualquiera.

El objetivo es minimizar (T_{\max}):

$$\text{Min } (\max_i (t_i + d_i))$$

sujeto a:

$$t_i - t_j \geq a_{ij}$$

6.2.2 Modelado: grafo potencial-tareas.

El problema central se plantea fácilmente como un programa lineal, pero su resolución es más eficiente asociándole un grafo ponderado $G = (X, U, W)$, que llamaremos de potencial-tareas.

El conjunto de vértices X tiene asociado: al conjunto I de tareas, más dos tareas adicionales, ficticias, una de inicio que llamada tarea 0 y una de fin, la tarea $n+1$.

$$X = I \cup \{0, n+1\}.$$

Las tareas 0 y $(n+1)$ tienen duración nula.

El conjunto de arcos U contiene: arcos $(0, i)$, con ponderaciones $w(0,i) = 0$, arcos (i, j) asociados a las restricciones potenciales, con ponderaciones $w(i,j) = a_{ij}$, y arcos $(i, n+1)$ con $w(i,n+1) = d_i$.

En este modelo es importante destacar dos propiedades:

- las restricciones redundantes pueden suprimirse. La redundancia de restricciones se expresa de la siguiente manera: si tres arcos $(i,j), (j,k)$ y (i,k) son tales que $a_{ik} \leq a_{ij} + a_{jk}$, el arco (i, k) puede suprimirse.
- $t_0 = 0$, para asegurar la positividad de una solución.

Las desigualdades de potencial y sus arcos asociados permiten expresar una gran variedad de restricciones, como ser:

Fecha de disponibilidad c_i :

$$t_i \geq c_i, \text{ implica la restricción potencial } (t_i - t_0) \geq c_i \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \begin{matrix} 0 & \xrightarrow{c_i} & i \end{matrix}$$

Fecha más tardía admitida de finalización, f_i :

$$(t_i + d_i) \leq f_i, \Rightarrow (t_0 - t_i) \geq (d_i - f_i), \quad \xleftarrow{\hspace{1cm}} \begin{matrix} 0 & \xleftarrow{d_i - f_i} & i \end{matrix}$$

Sucesión larga, la tarea j no puede comenzar antes del fin de la tarea i :

$$t_j \geq t_i + d_i, \Rightarrow t_j - t_i \geq d_i \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \begin{matrix} i & \xrightarrow{d_i} & j \end{matrix}$$

Sucesión inmediata: la tarea j empieza exactamente cuando termina la tarea i : $(t_j \geq t_i + d_i)$ y $t_i \leq t_j + d_i \Rightarrow (t_j - t_i) \geq d_i$ y $(t_i - t_j) \geq -d_i$

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} \begin{matrix} i & \xrightarrow{d_i} & j \\ & \xleftarrow{-d_i} & \end{matrix}$$

Observar que con este modelo no se pueden tener en cuenta restricciones disyuntivas, es decir, sus intervalos de ejecución deben ser disjuntos (i antes que j o j antes que i). Esto ocurre por ejemplo, si dos tareas necesitan un mismo recurso, cuya disponibilidad no es suficiente para la ejecución de ambas en simultáneo, esta

restricción no puede ser representada por una conjunción de desigualdades de potencial.

Ejemplo: Sean 5 tareas $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y sus resp duraciones $d = \{1, 3, 1, 2, 1\}$. Las tareas están sujetas a las siguientes restricciones temporales:

la tarea **2** comienza en la fecha 3:

$$[t_2 - t_0 \geq 3] \text{ y } [t_0 - t_2 \geq -3]$$

las tareas **3** y **4** deben superponerse por al menos una unidad de tiempo:

$$[t_3 \leq t_4 + d_4 - 1] \text{ y } [t_4 \leq t_3 + d_3 - 1]$$

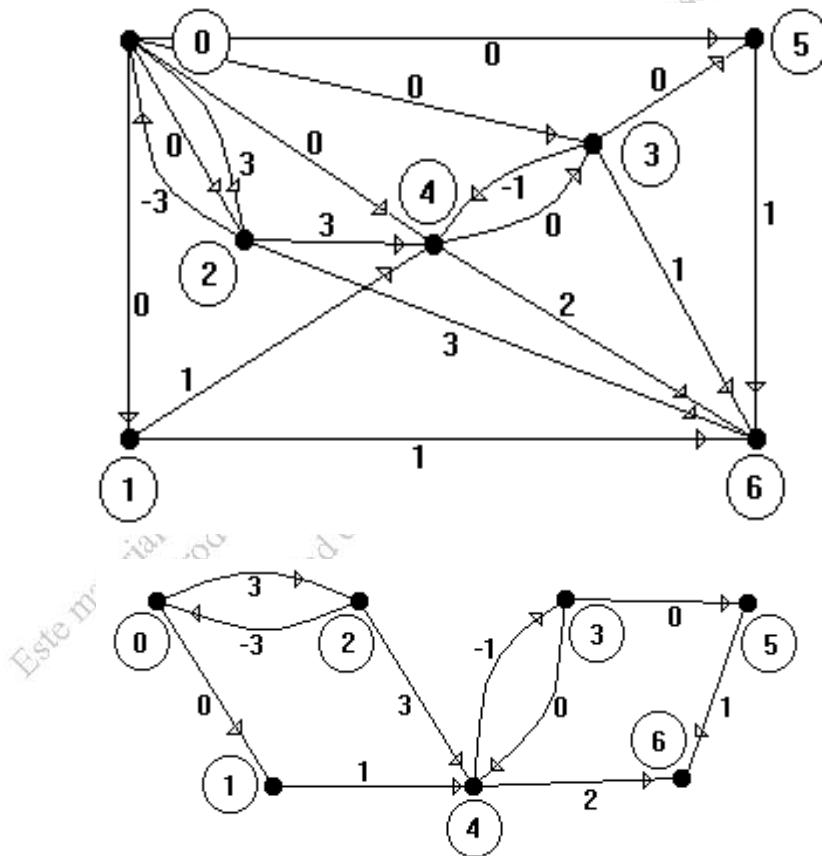
la tarea **4** puede comenzar solamente después del fin de las tareas **1** y **2**:

$$[t_4 - t_1 \geq d_1] \text{ y } [t_4 - t_2 \geq d_2]$$

la tarea **5** no puede empezar antes del comienzo de la tarea **3**

$$[t_5 \geq t_3]$$

Este problema lo modelamos mediante un grafo de potencial-tareas(primer figura), la segunda figura resulta de suprimir las restricciones redundantes:



6.3 Métodos de Camino Crítico

El método de camino crítico que presentamos es un método polinomial, no resuelve mas que un tipo de problema de ordenamiento, muy sencillo, en el cual sólo se consideran restricciones potenciales. Existen variantes a éste método que permiten introducir otro tipo de restricciones, aunque no asegura optimalidad.

6.3.1 Conceptos generales

Definición: *Grafo conjuntivo:* Un grafo conjuntivo es un grafo $G = (X, U, W)$, ponderado, con un nodo raíz 0 y otro final $n+1$, tal que existe un camino de valor positivo entre la raíz y todo otro nodo del grafo, y un camino de valor positivo entre todo nodo distinto del nodo final y el nodo final del grafo.

Definición: *Conjunto de potenciales:* Un conjunto de potenciales sobre un grafo conjuntivo $G=(X, U, W)$ es una aplicación $t : X \rightarrow R$, tal que $t_0 = 0$ y para todo arco conjuntivo (i,j) de ponderación $w(i,j)=w_{ij}$, se tiene la restricción potencial:

$$(t_j - t_i) \geq w_{ij}.$$

Teorema de Existencia: Una condición necesaria y suficiente para que exista un conjunto de potenciales sobre un grafo conjuntivo $G=(X, U, W)$ es que este grafo no contenga circuitos de valor estrictamente positivo.

Demostración:

(\Rightarrow) Por absurdo.

Sea $[1, 2, \dots, r, 1]$ un circuito de valor estrictamente positivo: $w_{12} + \dots + w_{r1} > 0$.

Si existiera un conjunto de potenciales sobre G , tendríamos

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &\geq w_{12} \\ &\dots \\ t_r - t_{r-1} &\geq w_{(r-1)r} \\ t_1 - t_r &\geq w_{r1} \end{aligned}$$

Sumando tendríamos $w_{12} + \dots + w_{r1} \leq 0$, absurdo.

(\Leftarrow) Por hipótesis, G conjuntivo (existe al menos un camino de valor positivo que va de 0 a i) y no existen circuitos de valor positivo.

Por lo tanto, tomando un camino que va de 0 a i y suprimiendo circuitos de valor negativo, se puede extraer un camino elemental de 0 a i de valor por lo menos la del camino original. El número de caminos elementales es finito, entonces existe un camino elemental de valor maximal de 0 a i . Notemos r_i el valor de este camino y verifiquemos que $R=\{r_i\} \forall i \in I$ es un conjunto de potenciales:

$r_0 = 0$, r_j es el valor máximo de los caminos elementales de 0 a j .

$r_i + w(i,j)$ es el valor de un camino de 0 a j pasando por i con un valor r_i ,

por lo tanto $r_i + w(i,j) \leq r_j$, $w(i,j) = w_{ij}$

o sea:

$$r_j - r_i \geq w_{ij}, \quad \forall i, j \in I \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

Corolario 1: Si un grafo conjuntivo no tiene circuitos, existe siempre al menos un conjunto de potenciales asociados.

Corolario 2: Si las ponderaciones de los arcos de un grafo conjuntivo son positivas o nulas, existe al menos un conjunto de potenciales si todos los circuitos son de valor nulo.

De ahora en adelante, suponemos que el grafo conjuntivo no contiene circuitos de valor positivo.

Sea $V(i,j)$ el valor maximal de un camino de i a j , por convención $V(i,i) = 0$ y si no hay camino de i a j $V(i,j) = -\infty$.

Lema 1: *Para toda pareja (i,j) de vértices se tiene $t_j - t_i \geq V(i,j)$.*

Demostración: Sea $[i, h, \dots, k, j]$ un camino de i a j de valor $V(i,j)$,
Por definición de potencial: $t_h - t_i \geq w_{ih}$, ..., $t_j - t_k \geq w_{kj}$,
sumando todos los términos obtenemos:

$$t_j - t_i \geq w_{ih} + \dots + w_{kj} = V(i,j). \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

Proposición 1: *Para todo conjunto de potenciales $T = \{t_i\}$, se tiene: $r_i \leq t_i$.*

Demostración: Según el lema anterior, $t_i - t_0 \geq V(0,i)$, luego $V(0,i) = r_i$, $t_0 = 0$, entonces,

$$r_i \leq t_i \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

Esta propiedad muestra que para el conjunto de potenciales R , las tareas se ejecutan lo más temprano posible.

Conjunto de potenciales optimales, camino crítico: En los métodos de potenciales se buscará un ordenamiento de duración total minimal. Este ordenamiento corresponderá a un conjunto de potenciales tal que t_{n+1} sea minimal. Según la proposición 1, t_{n+1} es minimal cuando se cumple la igualdad. Luego $r_{n+1} = V(0,n+1)$, o sea el valor maximal de un camino que va de 0 a $n+1$. Este camino se llama camino crítico y notaremos t^* su valor.

Proposición 2:

Sea $F = \{f_i = [V(0,n+1) - V(i,n+1)] / i \in X\}$. F es un conjunto de potenciales óptimo.

Además si T es otro conjunto de potenciales óptimal, se tendrá: $t_i \leq f_i$

F es un conjunto de potenciales en el cual todas las tareas se ejecutan lo más tarde posible.

Demostración: Veamos primero que F es un conjunto de potenciales

Si $(i,j) \in U, \Rightarrow w_{ij} + V(j,n+1) \leq V(i,n+1)$

$$\Rightarrow w_{ij} \leq [V(0,n+1) - V(j,n+1)] - [V(0,n+1) - V(i,n+1)]$$

$\Rightarrow w_{ij} \leq f_j - f_i$, y este conjunto de potenciales es óptimo ya que

$$f_{n+1} = V(0,n+1) = t^*$$

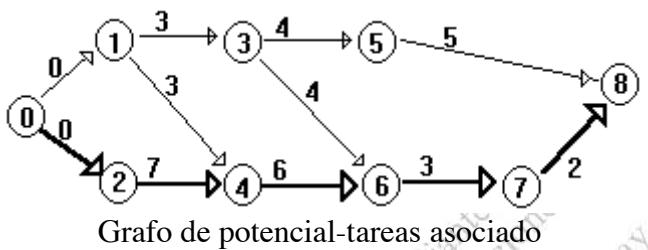
Si T es un ordenamiento óptimo, tomemos $j = n+1$ en (lema 1) : $t_i \leq t_j - V(i,j)$,

$$t_i \leq t_{n+1} - V(i,n+1) \leq V(0,n+1) - V(i,n+1) = f_i, \Rightarrow t_i \leq f_i$$

6.3.2 Método de potencial-tareas

Veamos el siguiente ejemplo: se debe ejecutar, en una duración minimal, siete tareas ligadas por las siguientes restricciones potenciales:

tarea	duración	restricciones potenciales
1	3	
2	7	
3	4	la tarea 1 precede a la tarea 3
4	6	las tareas 1 y 2 preceden a la 4
5	5	la tarea 3 precede a la 5
6	3	las tareas 3 y 4 preceden a la 6
7	2	la tarea 6 precede a la 7



Un ordenamiento es un conjunto de potenciales $T=\{t_i:i\in X\}$ sobre el grafo. La fecha t_i , es la fecha de comienzo de ejecución de la tarea i . Un ordenamiento de duración minimal es uno tal que minimiza t_{n+1} , o sea de valor $t_{n+1} = V(0,n+1) = t^*$.

Entre los ordenamientos optimales, los ordenamientos más tempranos, R, y los más tardíos, F, son particularmente los más interesantes, ya que $r_i \leq t_i \leq f_i$.

Resolver los ordenamientos más tempranos y más tardíos R y F que están definidos por $V(0,i) = r_i$ y $f_i = V(0,n+1) - V(i,n+1)$, equivale a resolver problemas de caminos en grafos. Se usa el algoritmo de Bellman sobre grafos conjuntivos, algoritmo de complejidad $O(m)$, $m = \text{nro. de restricciones potenciales}$. Lo más común son grafos con ponderaciones estrictamente positivas en sus arcos, y la existencia de circuitos implica la no existencia de soluciones. En presencia de circuitos de valor negativo se puede por ejemplo utilizar el algoritmo de Ford ($O(n^3)$).

Aplicando el algoritmo de Bellman al ejemplo anterior, encontramos:

$$r_0 = r_1 = r_2 = 0, r_3 = 3, r_4 = r_5 = 7, r_6 = 13, r_7 = 16, r_8 = 18;$$

el cálculo de las fechas más tardías es análogo,

$$f_0 = 0, f_4 = 4, f_2 = 0, f_3 = 9, f_4 = 7, f_5 = f_6 = 13, f_7 = 16, f_8 = 18.$$

Precondición: El grafo no tiene ciclos.

Algoritmo de Bellman para las fechas más tempranas r_i y más tardías f_i

```

    Marcar el nodo 0 con  $r_0 = 0$ ,
    Mientras existan nodos sin marcar;
        Sea  $j$  un nodo no marcado
            con todos sus predecesores marcados,
            marcar  $j$  con  $r_j = \max_{i \in U^- \setminus \{j\}} (r_i + w_{ij})$ ;
    Fin Mientras
  
```

Marcar el nodo $n+1$ con $f_{n+1} = r_{n+1}$

```

    Mientras existan nodos sin marcar;
        Sea  $i$  un nodo no marcado
            con todos sus sucesores marcados,
            marcar  $i$  con  $f_i = \min_{j \in U^+ \setminus \{i\}} (f_j - w_{ij})$ ;
    Fin Mientras
  
```

6.3.3 Holguras

Los márgenes u holguras tienen por función evaluar la demora o el retardo permitido en una tarea, sin modificar "demasiado" los resultados. Definiremos el margen u holgura total M_i , la holgura o margen libre m_i , y el margen seguro u_i .

Holgura total M_i de una tarea i es el tiempo que se puede retardar una tarea sin afectar la fecha de fin de proyecto. M_i es entonces, la diferencia entre la fecha más tardía y la más temprana:

$$M_i = f_i - r_i.$$

Holgura libre m_i de una tarea i es el tiempo que se puede retardar esa tarea de forma que las tareas sucesoras puedan empezar en la fecha más temprana:

$$m_i = \min_{[j \in U+(i)]} \{r_j - (r_i + w_{ij})\}$$

Margen seguro u_i de una tarea i es el tiempo disponible para comenzar la ejecución de una tarea, cuando las predecesoras empiezan en sus fechas más tardías y las sucesoras en sus fechas más tempranas, si existe y si no es nulo:

$$u_i = \max \{0, \min_{[j \in U+(i)]} (r_j - w_{ij}) - \max_{[k \in U-(i)]} (f_k + w_{ki})\}$$

Camino crítico: los caminos de valor maximal que van de 0 a $n+1$, juegan un rol central en este método, ya que toda tarea que compone alguno de estos caminos tienen un holgura total nula. Se dice que estas tareas son **críticas** ya que si se retardan λ unidades de tiempo, el ordenamiento se retardará también λ unidades.

Proposición: se cumple que $u_i \leq m_i \leq M_i$

Demostración:

- $M_i \geq m_i$

$$\begin{aligned}
 M_i &= f_i - r_i && [\text{definición de } M_i] \\
 &= \min [j \in U+(i)] \{f_j - w_{ij}\} - r_i && [\text{definición de } f_i] \\
 &= \min [j \in U+(i)] \{f_j - w_{ij} - r_i\} && [\text{propiedades de min}] \\
 &= \min [j \in U+(i)] \{f_j - (r_i + w_{ij})\} && [\text{aritmética}] \\
 &\geq \min [j \in U+(i)] \{r_j - (r_i + w_{ij})\} && [f_j \geq r_j] \\
 &= m_i && [\text{definición de } m_i]
 \end{aligned}$$

Queda probado que $M_i \geq m_i$

- $m_i \geq u_i$

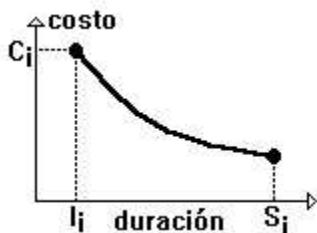
$$\begin{aligned}
 m_i &= \min [j \in U+(i)] \{r_j - (r_i + w_{ij})\} && [\text{definición de } m_i] \\
 &= \min [j \in U+(i)] \{r_j - w_{ij}\} - r_i && [\text{propiedades de min}] \\
 &= \min [j \in U+(i)] \{r_j - w_{ij}\} - \max [k \in U-(i)] \{r_k + w_{ki}\} && [\text{definición de } r_i] \\
 &\geq \max \{0, \min [j \in U+(i)] (r_j - w_{ij}) - \max [k \in U-(i)] (f_k + w_{ki})\} && [-r_k \geq -f_k] \\
 &= u_i && [\text{definición de } u_i]
 \end{aligned}$$

Queda probado que $m_i \geq u_i$

6.3.4 Optimización de la función de costos

Por razones técnicas o económicas la duración de cada tarea puede estar limitada entre dos cotas: I_i y S_i ($I_i \leq d_i \leq S_i$). El tiempo S_i corresponde a la duración normal de la tarea i , y es la duración correspondiente a un costo mínimo (inversión mínima en recursos de forma cumplir con la tarea i). El tiempo I_i por el contrario corresponde a la duración de la operación acelerada al máximo (invirtiendo todos los recursos necesarios y disponibles) y por consiguiente su costo sera también máximo.

Sean C_i el costo total de la tarea i y d_i la duración de la tarea i . Fijado un valor para d_i ; si se pretende que la tarea dure menos que dicho valor, en general, esto implica la utilización de un número mayor de recursos y por consiguiente un costo mayor. Es posible entonces, establecer una relación funcional entre la duración de la tarea i y el costo asociado. Sea $C_i = f(d_i)$ la curva de costos de la tarea i en función de la duración de la tarea i . Es común suponer que el costo crece cuando d_i decrece hasta I_i , más allá del cual ya no se puede efectuar el trabajo.

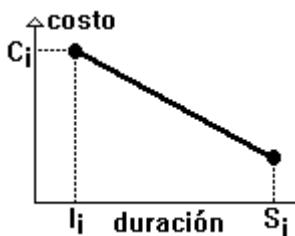


Disminución del costo total de un programa: No se trata aquí de buscar el óptimo de un programa, sino solamente de mostrar cómo los métodos de camino crítico permiten disminuir el costo total actuando sobre las tareas no críticas.

El costo total del proyecto es: $C = \sum_{[i \in U]} C_i$. Para disminuir el costo total C , manteniendo la misma duración de ejecución, será preciso disminuir los márgenes libres de las operaciones no críticas, dentro de los límites impuestos por las restricciones. Disminuir el margen libre de una tarea equivale, según la gráfica precedente, a disminuir los costos. Procediendo de esta forma puede suceder que se creen nuevos caminos críticos.

Variación lineal del costo en función de la duración. Programa lineal paramétrico: Se supone que, para cada tarea t_i la curva de costos $C_i = f(d_i)$ es de la forma:

$$C_i = K_i - n_i * t_i, \text{ con } I_i \leq t_i \leq S_i$$



El problema planteado se traduce al siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \sum_{[(i,j) \in U]} (K_i - n_i * t_i) \\ \text{sujeto a: } & I_i \leq d_i \leq S_i, \\ & \sum_{[(i,j) \in \mu]} d_i \leq \alpha \quad \forall \mu \text{ del grafo conjuntivo.} \end{aligned}$$

Donde μ representa los caminos que van de la raíz al final, y α es un parámetro que representa la duración total del proyecto.

7. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

7.1 Introducción

7.1.1 Experimentos, espacio muestral, evento.

Un **experimento** es un proceso (o un procedimiento) cuyo resultado se puede observar, pero cuyo valor no podemos determinar anticipadamente con certeza.

Cada resultado posible del experimento se llama punto muestral y se denomina w_i .

Un **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados del experimento que a priori se conocen como posibles:

$$\Omega = \{w_i; w_i \text{ es un resultado observable del experimento}\}.$$

Un espacio muestral define un modelo de experimento.

Un **evento** es un conjunto de puntos muestrales, pudiendo ser cualquier subconjunto del espacio muestral, un punto, una colección de puntos o el espacio muestral completo.

Un evento A consiste en el conjunto de aquellos puntos muestrales w_j que representan resultados del experimento en los cuales A ocurre.

¿Cómo describir la variación esperada (cuando Ω es numerable)?

1) Dado un espacio muestral discreto Ω , se partitiona Ω en una familia de eventos disjuntos (E_j) $j \geq 0$.

2) Se supone que a cada evento le corresponde un número llamado probabilidad del evento E_j , denotada $P(E_j)$, que es una medida de la posibilidad de ocurrencia del evento E_j en el espacio muestral, $P(E_j) \geq 0, \sum P(E_j) = 1, \forall E_j \subset \Omega$.

La imposibilidad de ocurrencia de E_j se denota: $P(E_j) = 0$. En ese caso, si el espacio muestral es finito, es posible eliminar E_j .

3) Se define un Álgebra A sobre los eventos que conforman el espacio muestral.

Así se obtiene la terna (Ω, A, P) que define un modelo probabilístico de la porción del universo o sistema que se quiere estudiar.

Cuando Ω no es numerable, es necesario definir una sigma-álgebra y una medida P sobre los eventos de la misma.

7.1.2 Variables aleatorias

Para operar naturalmente con los eventos observados, se introduce el concepto de variable aleatoria (v.a.).

Se llama variable aleatoria X a una función definida sobre un espacio muestral, es decir una regla única que asocia un número x_j a cada punto j del espacio muestral.

Se nota $(X = x_j)$ al evento en el que X toma el valor x_j (con notación de conjuntos, podríamos dar el evento como $\{w_j | X(w_j) = x_j\}$).

El dominio de la función variable aleatoria son los eventos, por lo que a cada valor posible de una variable aleatoria podemos asociar una medida de probabilidad, definiendo así la distribución de probabilidad de la variable.

Si X es una variable aleatoria discreta, y $\{x_j, j=1,2,3,\dots\}$ es el conjunto de los valores que puede tomar, entonces

$$P(X=x_j) = p(x_j) \geq 0, \quad j=1,2,3,\dots \text{ y } \sum_j p(x_j)=1.$$

es la distribución de probabilidades de la v.a. X .

Siempre que $p(x_j)$ satisfaga estas condiciones es lícito hablar de una v.a. que asume los valores x_1, x_2, \dots, x_N con probabilidad $p(x_1), p(x_2), \dots$, sin hacer más referencias al espacio muestral original; se forma un nuevo espacio con los puntos muestrales x_1, x_2, \dots, x_N .

Si Y es una v.a. continua (su recorrido es el conjunto de los Reales, R), la probabilidad de que tome un valor fijo es en general nula, y existe una función $f_Y(y)$ llamada función de densidad en R , que verifica la propiedad siguiente:

$$\forall B \in R, \quad P(Y \in B) = \int_B^\infty f_Y(y)dy, \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^\infty f_Y(y)dy = 1$$

Toda afirmación acerca de una v.a. X o Y se puede responder en términos de su distribución de probabilidad o de su Función de distribución, $F(a)$ (también notada como $F_X(a)$).

$$F(a) = P(X \leq a) = \begin{cases} \sum_{\forall x \leq a} p(x) & \text{si la v.a. } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^a f_X(x)dx & \text{si la v.a. } X \text{ es continua} \end{cases}$$

Para describir las distribuciones de probabilidades se utilizan además valores típicos, como ser mediana, término central, etc.

La Esperanza es el valor típico más importante de una v.a. por su estabilidad muestral.

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{\forall x \in X} x_j p(x_j) & \text{si la v.a. } X \text{ es discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx & \text{si la v.a. } X \text{ es continua} \end{cases}$$

Media, Valor Esperado y primer momento son sinónimos de Esperanza matemática de una distribución. El segundo momento es $E(X^2)$, el tercer momento $E(X^3)$, etc.

Sea X una v.a. con segundo momento $E(X^2)$ y esperanza $E(X)$, se define un número llamado **Varianza** de la v.a. X , $Var(X)$, como el segundo momento de X en torno a su media:

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \begin{cases} \sum_{\forall x_j \in \Omega} (x_j - E(X))^2 p(x_j) & \text{si } X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 f(x) dx & \text{si } X \text{ continua} \end{cases}$$

Es fácil demostrar la siguiente fórmula alternativa: $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

Dispersión es usualmente sinónimo de varianza ya que es una medida burda de la dispersión de la v.a. respecto de su media. Un valor elevado de la varianza indica que X toma valores alejados de la media.

Se define como **Desviación Estándar** a la raíz cuadrada de la varianza

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}.$$

El coeficiente de variación, r, es otra medida de la variación de una distribución, que tiene la ventaja de ser adimensional:

$$\rho = \sqrt{Var(X)} / E(x).$$

Ejemplo de v.a. discreta: Indicatriz de un evento

Sea A un evento cualquiera. Definimos la variable aleatoria "Indicatriz del evento A", que notamos por $IND(A)$, a una v.a. binaria, que toma valor 1 cuando el evento A se produce, y valor 0 en otro caso. Por lo tanto:

$$P(IND(A)=1) = P(A)$$

$$P(IND(A)=0) = 1-P(A)$$

Es fácil ver que:

$$E(A) = 1.P(A) + 0.(1-P(A)) = P(A)$$

y que

$$\begin{aligned} Var(IND(A)) &= E(IND(A)^2) - E^2(IND(A)) = (1^2.P(A) + 0^2.(1-P(A))) - P(A)^2 \\ &= P(A) - P(A)^2 = P(A)(1-P(A)). \end{aligned}$$

Ejemplo de v.a. discreta: Distribución de Poisson

N es una v.a. de distribución Poisson y parámetro $\lambda > 0$ si:

$$P(N = k) = p_N(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \forall k \geq 0, \lambda > 0$$

Se puede demostrar que

$$1) P(N = k) \geq 0$$

$$2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 1$$

$$3) E(N) = Var(N) = \lambda$$

Con frecuencia se supone que el número de llegadas de clientes a un negocio, durante un intervalo de tiempo, o la demanda de un producto, se comportan según una distribución Poisson. λ es el parámetro de la distribución, correspondiendo a la intensidad de llegadas por unidad de tiempo.

Aclaración: Modelando siempre es necesario realizar simplificaciones de la realidad, ahora, se debe simplificar lo suficiente para que el modelo sea tratable matemáticamente, pero no demasiado como para que el modelo ya no sea una representación del fenómeno real.

Ejemplo de v.a. continua: Distribución Exponencial

Decimos que una v.a. X continua es exponencial con parámetro λ , $\lambda > 0$, cuando:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Se puede demostrar que si X es una v.a. exponencial, entonces

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Generalmente se procura trabajar con v.a. que reflejen con la mayor simplicidad posible las propiedades realmente esenciales de los resultados del experimento.

En muchos casos la observación de un experimento aleatorio no viene expresada por una sola cantidad observada, sino simultáneamente por una cierta cantidad de variables aleatorias.

Definiciones

Se llama **Distribución Conjunta** de dos v.a. X e Y discretas, definidas en un mismo espacio muestral (discreto), a la función

$$P(X = x_j, Y = y_k) = P_{XY}(x_j, y_k) \quad \forall x_j, y_k \in \Omega$$

que asigna probabilidades a todos los eventos simultáneos que surgen de las combinaciones de los pares de valores (x_j, y_k) que toman X e Y respectivamente.

$(X = x_j, Y = y_k)$ es el evento definido por el par de sucesos que satisfacen simultáneamente las condiciones $X = x_j$, e $Y = y_k$.

Se dice que 2 variables son **estocásticamente independientes** si para toda combinación de pares de valores (x_j, y_k)

$$P(X = x_j, Y = y_k) = P(X = x_j)P(Y = y_k)$$

Estas nociones se extienden a un conjunto finito de v.a. X, Y, \dots, Z definidas en un mismo espacio muestral. Estas variables serán mutuamente independientes si se verifica que su probabilidad conjunta es igual al producto de las probabilidades individuales de cada una de ellas.

7.1.3 Probabilidad Condicional

Para eventos: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ si $P(B) > 0$

Para v.a. (caso particular del anterior):

$$P(Y = y_k | X = x_j) = \frac{P(Y = y_k, X = x_k)}{P(X = x_k)} \quad P(X = x_k) > 0$$

Se deduce, extendiéndolo a más de dos variables:

$$P(Y = y_k, X = x_j, W = w_n) = P(Y = y_k | X = x_j, W = w_n)P(X = x_j | W = w_n)P(W = w_n).$$

Cálculo de la Probabilidad de un evento E, condicionándolo a la ocurrencia de eventos exhaustivos y mutuamente excluyentes (teorema de la probabilidad total):

Sea $\{B_i, i \in N\}$ una partición de Ω , es decir un conjunto de eventos B_i tales que

a) son dos a dos disjuntos: $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i, j \in N$

b) su unión es Ω : $\bigcup_i B_i = \Omega$

Entonces $P(E) = \sum_k P(E \cap B_k)$, y si los eventos son tales que $P(B_k) \neq 0 \quad \forall k$, tenemos que $P(E) = \sum_k P(E|B_k)P(B_k)$ (teorema de probabilidad total).

Si tenemos que Y es una variable aleatoria discreta, entonces los eventos $B_k = (Y = y_k)$ son exhaustivos y mutuamente excluyentes, es decir conforman una partición de Ω , por lo que E se puede expresar de la siguiente manera:

$$E = (E, Y = y_1) \bigcup (E, Y = y_2) \bigcup \dots (E, Y = y_k) \bigcup \dots$$

$$\Rightarrow P(E) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E, Y = y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E|Y = y_k)P(Y = y_k)$$

Existe una propiedad análoga en el caso continuo, pero es necesario que la varianza de Y sea finita: si $Var(Y) < \infty$, entonces

$$P(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(E|Y = y) f_Y(y) dy$$

Ejemplo 7.1.1:

Un cliente que entra a una tienda compra un sombrero con probabilidad p .

Si el número de clientes que ingresan por día sigue una distribución Poisson de valor esperado λ , ¿Cuál es la probabilidad de que no se venda ningún sombrero en un día?

Se define X como el número de sombreros vendidos y N como el número de clientes que llegan a la tienda.

Condicionando en N

$$P(X = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = 0 | N = n) P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}$$

Esperanza Condicional

La esperanza condicional $E(X|Y)$ es una nueva variable aleatoria definida en base a dos variables X e Y , definida de la siguiente forma:

$$E(X|Y) = \sum_y \left(\sum_x x P(X = x | Y = y) \right) IND(Y = y).$$

Tenemos que si Y toma el valor y , entonces entonces $E(X|Y)$ tomará el valor: $E(X|Y = y) = \sum_x x P(X = x | Y = y) = \sum_x x p_{X|Y}(x | y)$

Si X es independiente de Y , la esperanza condicional será una v.a. constante, de valor igual a la esperanza incondicional, ya que para todo y ,

$$E[X | Y = y] = \sum_x x P(X = x | Y = y) = \sum_x x P(X = x) = E(X)$$

Ejemplo 7.1.2:

Sea $p(x,y)$: $p(1,1) = 0.5$, $p(1,2) = 0.1$, $p(2,1) = 0.1$, $p(2,2) = 0.3$.

$$\begin{aligned} E[X | Y = 1] &= \sum_x x P(X = x | Y = 1) = \sum_x x \frac{P(x = x, Y = 1)}{P(Y = 1)} = 1 p_{X|Y}(1 | 1) + 2 p_{X|Y}(2 | 1) = \\ &= \frac{p(1,1)}{p_Y(1)} + 2 \frac{p(2,1)}{p_Y(1)} = \frac{5}{6} + \frac{2}{6} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

7.1.4 Propiedades de v.a. Exponenciales

Propiedad 1

La propiedad fundamental de la distribución exponencial es que no tiene memoria.

Se dice que una v.a. X no tiene memoria si:

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s) \quad \forall s, t \geq 0$$

lo que es equivalente a

$$\frac{P(X > s + t, X > t)}{P(X > t)} = P(X > s)$$

y entonces

$$P(X > s + t) = P(X > s)P(X > t).$$

Esta ecuación se satisface cuando X es exponencial ya que $e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} e^{-\lambda t}$.

También se demuestra que la distribución exponencial es la única distribución continua que verifica esa propiedad (así como la distribución geométrica es la única distribución discreta que verifica esta propiedad).

Propiedad 2

Sea T_1 y T_2 variables aleatorias exponenciales independientes de tasa λ_1 y λ_2 respectivamente. Entonces $T = \min(T_1, T_2)$ es una v.a. exponencial de parámetro $(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Dem:

$$1 - F_T(t) = P(T_1 > t, T_2 > t) = (\text{indep. } T_1 \text{ y } T_2) = P(T_1 > t)P(T_2 > t) = e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

por lo tanto T tiene la distribución de una v.a. exponencial de parámetro $(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Ejemplo 7.1.3

Consideré el negocio de venta de sombreros.

Si T_1 representa el tiempo entre la llegada de un cliente y el siguiente, y T_2 el tiempo de atención al cliente, suponemos que ambos tiempos son exponenciales (no tienen memoria). Se quiere estudiar el comportamiento conjunto de ambas distribuciones. Observemos el tiempo T transcurrido hasta que uno de los eventos T_1 ó T_2 ocurra. Interesa entonces:

$$T = \min(T_1, T_2)$$

Consideremos $T \leq t$

$$\begin{aligned} P(T \leq t) &= 1 - P(T > t) = 1 - P(\min(T_1, T_2) > t) = 1 - P(T_1 > t, T_2 > t) \\ &= 1 - P(T_1 > t)P(T_2 > t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \end{aligned}$$

Ya que T_1 y T_2 son independientes y sí $\min(T_1, T_2) > t \Rightarrow (T_1 > t, T_2 > t)$

Si dos v.a. exponenciales independientes ocurren simultáneamente, en conjunto se comportan según una distribución exponencial, con tasa igual a la suma de las tasas individuales de cada una de ellas.

Propiedad 3

Cálculo de la probabilidad de que una v.a. exponencial ocurra antes que otra.

Sean X_1 y X_2 v.a. exponenciales independientes, con respectivas esperanzas $1/\lambda_1$ y $1/\lambda_2$.

Se desea calcular $P(X_1 > X_2)$ [similar para $P(X_2 > X_1)$]. Condicionando en X_2

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2) &= \int_0^{\infty} P(X_1 < X_2 \mid X_2 = x) f_{X_2}(x) dx = \int_0^{\infty} P(X_1 < x) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx \\ &= \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda_1 x}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx = 1 - \lambda_2 \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} dx \\ &= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^{\infty} (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} dx = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.1.4:

Suponga un sistema de colas (negocio de venta de sombreros) con un solo empleado. El intervalo de tiempo que transcurre entre la llegada de un cliente y el siguiente se describe con una v.a. exponencial X_1 , de esperanza 1/2 hora. El tiempo que le

lleva al empleado atender a cada cliente se comporta según otra v.a. exponencial, X_2 , independiente de X_1 , de valor esperado 15 minutos.

¿Cuál es la probabilidad de que un nuevo cliente llegue antes de que el servidor termine de atender al cliente que está atendiendo? ¿y viceversa?

X_1 = tiempo entre llegadas sucesivas

X_2 = tiempo de atención al cliente

$E(X_1) = 1/\lambda_1 = 0,5$ horas; $\lambda_1 = 2$

$E(X_2) = 1/\lambda_2 = 0,25$ horas; $\lambda_2 = 4$

$$P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{3}$$

7.2 Procesos Estocásticos

7.2.1 Definiciones

En la sección anterior hemos visto como realizar modelos que describan situaciones correspondientes a la observación del resultado de un experimento puntual.

Ahora estudiaremos las herramientas a utilizar cuando el experimento que queremos modelar no es puntual, sino que evoluciona en el tiempo.

Para estos casos se introduce el concepto de proceso estocástico, definiéndolo como una familia de v.a. que describen la evolución, a través del tiempo, de un proceso físico o experimento.

Definimos un **proceso estocástico** $X=(X_t, t \in T)$ como una familia de variables aleatorias, cuyo índice $t \in T$ es llamado el conjunto de los índices (o parámetro de tiempo) del proceso X .

Para cada $t \in T$, X_t es una variable aleatoria sobre el espacio de estado del proceso X . Definimos el **espacio de estado** de un proceso estocástico X como el conjunto mínimo E de todos los valores posibles que las v.a. X_t puedan asumir; cada uno de estos valores es un **estado** posible del sistema.

Notamos $(X_t = e)$ el evento que indica que en el instante t el proceso se encuentra en el estado e .

Si E es un conjunto finito o infinito numerable de estados se dice que el proceso X es **de espacio de estado discreto**.

Si en cambio las v.a. X_t toman sus valores en un conjunto E continuo (por ejemplo, los reales positivos) se dice que el proceso es **de espacio de estado continuo**.

Cuando T es un conjunto numerable el proceso $(X_t, t \in T)$ es **de tiempo discreto** (también llamado sucesión estocástica o proceso en etapas). El caso más común es cuando $T=\mathbb{N}$ (los naturales) o $T=\mathbb{N}^*$ (los enteros positivos).

Cuando T es un intervalo real, finito o no, el proceso es **de tiempo continuo**.

Ejemplo 7.2.1

Consideremos un sistema de atención al público.

Podemos definir el proceso estocástico X tomando X_t = número de clientes esperando en el instante t . En este caso tenemos que $E=\mathbb{N}$ y $T=\mathbb{R}^+$, por lo que X es un proceso de espacio de estado discreto y tiempo continuo.

Si en cambio consideramos el proceso estocástico Y tal que $Y_n =$ tiempo de espera del n -ésimo cliente, tendremos que $E=R^+$ y $T=N$, por lo que Y es de espacio de estado continuo y tiempo discreto.

7.2.2 Procesos estocásticos de tiempo y espacio de estado discretos

Estudiaremos a continuación los procesos estocásticos de tiempo y espacio de estado discretos $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, de parámetro de tiempo que varía sobre los números naturales. En este caso tenemos que e pertenece al mínimo espacio de estado E del proceso X , $e \in E \Leftrightarrow \exists N > 0$ tal que $P(X_N = e) > 0$.

Para estudiar estos procesos supondremos conocida la probabilidad condicional de que el proceso esté en el estado e_n en la etapa n , bajo la hipótesis de que sabemos que el proceso estuvo en el estado e_1 en la etapa 1, en el estado e_2 en la etapa 2, y así hasta la etapa $n-1$:

$$P(X_n = e_n | X_0 = e_0, X_1 = e_1, X_2 = e_2, \dots, X_{n-1} = e_{n-1})$$

Esto nos da las leyes de probabilidad que determinan el comportamiento del proceso en cada etapa.

Definimos la **evolución** del proceso como la sucesión de estados por los que va pasando el mismo. Cada evolución posible del proceso tiene una probabilidad de ocurrencia dada por la distribución conjunta de las probabilidades de ocurrencia en cada etapa, $P(X_n = e_n, X_{n-1} = e_{n-1}, \dots, X_2 = e_2, X_1 = e_1, X_0 = e_0)$.

Para calcular esta probabilidad utilizamos el producto de las probabilidades condicionales dadas para cada etapa:

$$\begin{aligned} & P(X_n = e_n, X_{n-1} = e_{n-1}, \dots, X_2 = e_2, X_1 = e_1, X_0 = e_0) \\ &= P(X_n = e_n | X_{n-1} = e_{n-1}, \dots, X_2 = e_2, X_1 = e_1, X_0 = e_0)P(X_{n-1} = e_{n-1}, \dots, X_1 = e_1, X_0 = e_0) \\ &= P(X_n = e_n | X_{n-1} = e_{n-1}, \dots, X_2 = e_2, X_1 = e_1, X_0 = e_0) \dots P(X_1 = e_1 | X_0 = e_0)P(X_0 = e_0) \\ &= P(X_0 = e_0) \prod_{i=2}^n P(X_i = e_i | X_{i-1} = e_{i-1}, \dots, X_0 = e_0) \end{aligned}$$

Cada evolución corresponde a un punto muestral de nuestro espacio de probabilidades de base, por lo que la probabilidad de la unión de todas las evoluciones posibles debe ser 1.

Ejemplo 7.2.2

Consideremos el siguiente experimento. Sean A y B dos monedas distintas, con A una moneda normal y B una moneda con una cara de cada lado. Se elige al azar una moneda entre las dos posibles. A continuación se lanza la moneda elegida y se observa el resultado. Si es un número lanzamos un dado y observamos el resultado. Si es cara, la moneda se lanza nuevamente.

Este es un experimento que evoluciona en el tiempo, y donde además cada resultado depende de los resultados obtenidos anteriormente.

Los estados posibles son:

- A = la moneda con cara y número fue elegida,
- B = la moneda con dos caras fue elegida,
- C = el resultado del lanzamiento de una moneda fue una cara,
- N = el resultado del lanzamiento de una moneda fue un número,
- 1 = el resultado del lanzamiento del dado fue 1,
- ...
- 6 = el resultado del lanzamiento del dado fue 6.

Entonces el espacio de estado es $E = \{A, B, C, N, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, discreto.
Además el proceso consta de tres etapas, por lo tanto T también es discreto.

Esas etapas son:

- 1 selección de una moneda,
- 2 una moneda es lanzada,
- 3 se lanza una moneda o un dado.

Sabemos que las probabilidades de que se elija A ó B es de $1/2$ para cada una:

$$P(X_1 = A) = P(X_1 = B) = 0,5$$

Tenemos también:

$$P(X_2 = C | X_1 = A) = P(X_2 = N | X_1 = A) = 0,5 \text{ y}$$

$$P(X_2 = C | X_1 = B) = 1$$

Por último:

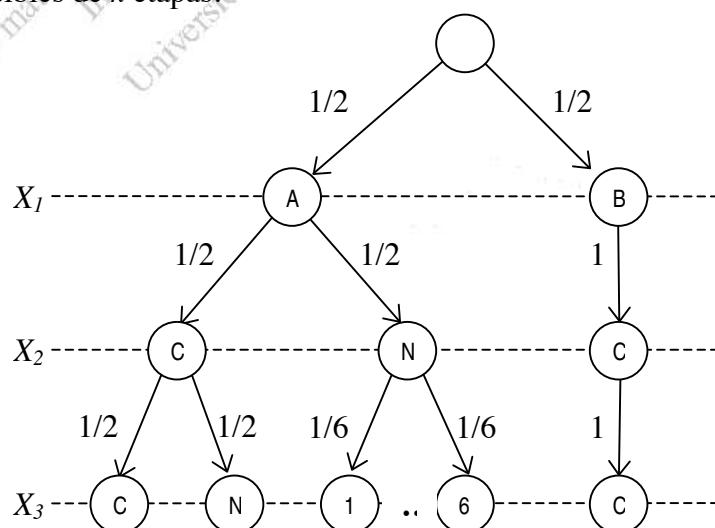
$$P(X_3 = C | X_2 = C, X_1 = B) = 1$$

$$P(X_3 = C | X_2 = C, X_1 = A) = 1/2$$

$$P(X_3 = N | X_2 = C, X_1 = A) = 1/2$$

$$P(X_3 = i | X_2 = N, X_1 = A) = 1/6, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

Entonces podemos calcular la distribución conjunta de probabilidades para cada evolución del proceso. Dado un proceso estocástico de tiempo y espacio de estado discretos, es posible representar mediante un árbol de profundidad k todas las evoluciones posibles de k etapas.



La raíz del árbol corresponde al estado inicial del proceso estocástico. A cada resultado posible de la n -ésima etapa del proceso estocástico le corresponde un nodo

del nivel $n+1$ del árbol. Los arcos están ponderados por las probabilidades condicionales de transición entre estados del proceso. La utilidad de esta representación gráfica consiste en:

- identificar todas las posibles evoluciones del proceso, como cadenas del árbol,
- calcular la probabilidad de ocurrencia de cada posible evolución del proceso,
- calcular las distribuciones de probabilidad de los caminos de las etapas intermedias.

Pero cuando el espacio de estado contiene muchos estados, o el número de etapas es grande, no es posible utilizar este árbol.

7.3 Cadenas de Markov

7.3.1 Introducción

Entre las diferentes clases de procesos estocásticos se destacan los **procesos markovianos**, en los cuales el comportamiento y la evolución futura del proceso no dependen más que del estado actual del proceso, y no de su evolución pasada.

Las **cadenas de Markov** (C.M.) son procesos markovianos de espacio de estado discreto. Al igual que para cualquier proceso, se distingue entre cadenas de Markov de tiempo discreto y aquellas de tiempo continuo.

El resto de esta sección se ocupa de las cadenas de Markov finitas de tiempo discreto, es decir aquellas cuyo espacio de estado E es finito, y que evolucionan en etapas o pasos (T es discreto).

Definimos formalmente una cadena de Markov como una secuencia de v.a. discretas $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ que poseen la propiedad siguiente:

$$P(X_{n+1} = e_{n+1} | X_0 = e_0, X_1 = e_1, \dots, X_n = e_n) = P(X_{n+1} = e_{n+1} | X_n = e_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall e_0, e_1, \dots, e_n, e_{n+1} \in E$$

(siempre que estas probabilidades estén bien definidas).

Esta propiedad se interpreta como la afirmación de que la probabilidad (condicional) de que el proceso alcance el estado futuro x_{n+1} dados los estados pasados x_0, x_1, \dots, x_{n-1} y el estado actual x_n es independiente de los estados pasados y depende solamente del estado presente x_n (el pasado no influye en el futuro más que a través del presente).

7.3.2 Cadenas de Markov homogéneas

Cuando las probabilidades condicionales de pasaje de un estado al otro son también independientes de la etapa n decimos que la cadena correspondiente es **homogénea en el tiempo** (las v.a. del proceso conservan su distribución en una traslación en el tiempo). Entonces las probabilidades condicionales se reducen a la expresión:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}, \quad \forall i, j \in E, \forall n \geq 0$$

siempre que éstas estén definidas.

Los números p_{ij} , $\forall i, j \in E$, se llaman **probabilidades de transición** y definen la probabilidad de que el proceso estando actualmente en el estado i pase al estado j en su próxima transición, independientemente de la etapa n en que se encuentre el proceso. De aquí en más solo consideraremos cadenas homogéneas, salvo indicación contraria.

A cada estado $i \in E$ está asociado un conjunto de probabilidades de transición $p_{ij} \geq 0$ que describen el comportamiento de la cadena en su próxima etapa, indicando cuales son los estados j que pueden ser alcanzados desde el estado i y con qué probabilidad.

El conjunto de los p_{ij} , $\forall i, j \in E$ forman la **matriz de transición** de la cadena, que notaremos P . Los elementos de P son las p_{ij} ordenadas a partir de una numeración fija de los elementos de E (eventualmente puede ser una matriz infinita):

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & j & \cdots & r \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ i & p_{00} & \cdots & p_{0j} & \cdots & p_{0r} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ r & p_{r0} & \cdots & p_{rj} & \cdots & p_{rr} \end{bmatrix} \quad 0 \leq i, j \leq r = |E|$$

Cada fila i representa un estado presente i y cada columna j representa un posible estado futuro. La entrada i, j es la probabilidad de que la próxima transición tenga al estado j por destino.

La matriz P describe entonces para cada estado $i \in E$ cuales son los estados $j \in E$ que la cadena puede alcanzar en su próxima etapa y con que probabilidad, por lo que cada fila i es la distribución de probabilidad (condicional) de la v.a. X_{n+1} dado que $X_n = i$. Al ser cada fila una distribución de probabilidad, se verifican las siguientes propiedades:

$$p_{ij} \geq 0, \forall i, j \in E$$

$$\sum_{j \in E} p_{ij} = 1, \forall i \in E$$

Una matriz cualquiera que verifica estas ecuaciones recibe el nombre de matriz estocástica. Cuando además la suma de las probabilidades de cada columna es 1 se dice que P es bi-estocástica.

Ejemplo 7.3.1

Consideremos un sistema de comunicaciones que transmite los dígitos 0 y 1. Cada dígito transmitido debe pasar por varios nodos (o centrales). Existe una probabilidad p , $0 < p < 1$, de que el dígito enviado desde un nodo continúe incambiado cuando llega al nodo siguiente y sea reenviado, pero con probabilidad $1-p$ surgen perturbaciones en la línea que modifican el dígito.

Denominemos X_n al dígito enviado desde el nodo n , entonces X_{n+1} es el dígito recibido en el nodo siguiente y retransmitido. Para cualquier n , X_n solamente puede tomar los valores 0 o 1. Entonces el espacio de estado es $E = \{0, 1\}$

Esta cadena es homogénea ya que las probabilidades de transición no dependen de la etapa en la que nos encontramos; para cualquier par de etapas n y $n+1$, la probabilidad de que el proceso continúe en el mismo estado cumple:

$$P(\text{dígito transmitido por la central } n = \text{dígito recibido por la central } n+1) = p, \forall n$$

Definimos sus probabilidades de transición:

$$P(X_{n+1}=0 \mid X_n=0) = p_{00} = p$$

$$P(X_{n+1}=1 \mid X_n=0) = p_{01} = 1-p$$

$$P(X_{n+1}=0 \mid X_n=1) = p_{10} = 1-p$$

$$P(X_{n+1}=1 \mid X_n=1) = p_{11} = p$$

Con estos datos se construye la matriz P de transición, ordenada como el espacio de estado E :

$P =$

	0	1
0	p	$1-p$
1	$1-p$	p

Vemos que se verifica:

$$\sum_j p_{ij} = \sum_i p_{ij} = 1, \quad \forall i, j \in \{0,1\}$$

por lo que la matriz P es no sólo estocástica sino también biestocástica.

Grafo asociado a una C. M. finita homogénea

Sea $X=\{X_n, n \geq 0\}$ una cadena de Markov finita de espacio de estado $E=\{1, 2, \dots, r\}$, $|E|=r$, y matriz de transición P . Podemos asociar un grafo orientado ponderado $G=(E, U, W)$ a la cadena X de la forma siguiente:

- E (espacio de estado de la cadena) es el conjunto de nodos
- $U = \{u_{ij} = (i, j) | i, j \in E, p_{ij} > 0\}$ es el conjunto de arcos orientados
- W es la función de ponderación que asigna $\forall u_{ij} \in \Gamma^+(i)$ la probabilidad de transición $p_{ij} > 0$ correspondiente, $W(u_{ij}) = p_{ij} > 0$.

Como la suma de todas las probabilidades de transición p_{ij} para cada fila i debe ser igual a 1, entonces el grafo asociado a una C. M. finita homogénea no puede ser cualquiera, sino que la suma de las probabilidades asignadas a los arcos incidentes exteriormente a cada nodo debe ser igual a 1.

Aunque el grafo retiene nada más que las probabilidades de transición entre dos estados, su estudio es muchas veces suficiente para conocer cualitativamente la evolución del proceso.

Ecuaciones de Chapman–Kolmogorov

Hasta aquí nos hemos ocupado solamente de las transiciones en una sola etapa de una cadena. Veremos a continuación cómo estudiar de forma analítica la evolución y las probabilidades de transición en n etapas de una cadena de Markov.

Definimos la probabilidad de transición en n pasos,

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_{n+m} = j \mid X_m = i), \quad \forall n, m \geq 0, \quad \forall i, j \in E$$

como la probabilidad de que el proceso, partiendo del estado i , llegue al estado j luego de n transiciones adicionales. Como consideramos cadenas homogéneas estas probabilidades no dependen de cuál es la etapa inicial m .

Un caso particular de esta definición se da cuando $n=1$:

$$p_{ij}^{(1)} = P(X_{m+1} = j | X_m = i) = p_{ij}, \forall m \geq 0, \forall i, j \in E$$

que es la probabilidad de transición en un paso ya estudiada, cuyos valores conforman la matriz de transición P .

Consideremos una evolución $(X_0=e_0, X_1=e_1, X_2=e_2, X_3=e_3, \dots, X_n=e_n)$ de la cadena X , que en el grafo asociado corresponde a un camino $(e_0, e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$. Recordemos que la probabilidad de que el proceso siga esta evolución es:

$$\begin{aligned} P(X_n = e_n, \dots, X_1 = e_1, X_0 = e_0) &= \\ &= P(X_n = e_n | X_{n-1} = e_{n-1}, \dots, X_1 = e_1, X_0 = e_0) P(X_{n-1} = e_{n-1} | \dots, X_1 = e_1, X_0 = e_0) \dots \\ &\dots P(X_1 = e_1 | X_0 = e_0) P(X_0 = e_0) = p_{e_{n-1}e_n} p_{e_{n-2}e_{n-1}} \dots p_{e_0e_1} p_{e_0} \end{aligned}$$

donde p_{e_0} es la probabilidad de que el proceso en su etapa inicial comience por el estado e_0 . Entonces la probabilidad de una evolución del proceso es equivalente a la probabilidad $P(c)$ de un camino c en el grafo asociado (si conocemos el estado de partida e_0). Esta probabilidad se calcula como el producto de las p_{ij} , asignadas a los arcos involucrados en el camino.

Si llamamos $C_n(i, j)$ al conjunto de todos los caminos de n arcos que unen e_i con e_j entonces:

$P(c) = \text{probabilidad del camino } c$

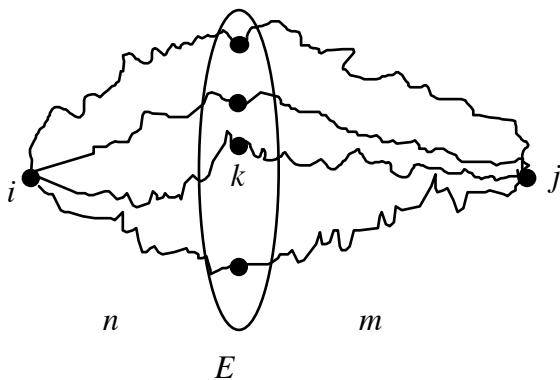
$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{c \in C_n(i, j)} P(c)$$

Las ecuaciones de Chapman–Kolmogorov nos dan una relación recursiva entre las probabilidades de transición en varios pasos. La primer formulación de estas ecuaciones es la siguiente:

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)}, \forall n, m \geq 0, \forall i, j \in E$$

Como justificación intuitiva de esta ecuación, vemos que $p_{ik} p_{kj}$ representa la probabilidad de que partiendo del estado i el proceso llegará al estado j luego de $n+m$ transiciones, siguiendo un camino que lo hace pasar por el estado k en la n -ésima transición.

Por lo tanto, tomando la sumatoria sobre todos los estados intermedios $k \in E$, obtenemos la probabilidad de que el proceso alcance el estado j luego de $n+m$ transiciones (se suman ya que cada camino es una evolución del proceso y las evoluciones del proceso son sucesos disjuntos).



Demostraremos a continuación las ecuaciones de Chapman–Kolmogorov:

$$\begin{aligned}
 p_{ij}^{(n+m)} &\stackrel{\text{def}}{=} P(X_{n+m} = j | X_o = i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(X_{n+m} = j, X_o = i)}{P(X_o = i)} \stackrel{\text{teo. prob.}}{=} \\
 &= \sum_{k \in E} \frac{P(X_{n+m} = j, X_n = k, X_o = i)}{P(X_o = i)} \stackrel{\text{def. prob.}}{=} \\
 &= \sum_{k \in E} \frac{P(X_{n+m} = j | X_n = k, X_o = i) P(X_n = k, X_o = i)}{P(X_o = i)} \stackrel{\text{prop. de Markov}}{=} \\
 &= \sum_{k \in E} \frac{P(X_{n+m} = j | X_n = k) P(X_n = k, X_o = i)}{P(X_o = i)} = \\
 &\stackrel{\text{simplif.}}{=} \sum_{k \in E} P(X_{n+m} = j | X_n = k) P(X_n = k | X_o = i) \stackrel{\text{por def.}}{=} \sum_{k \in E} p_{kj}^{(m)} p_{ik}^{(n)} \quad \text{QED.}
 \end{aligned}$$

En el caso particular $m=1$, las ecuaciones de Chapman–Kolmogorov se reducen a la expresión siguiente:

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$$

Esta expresión sugiere el uso de matrices para el cálculo de las probabilidades $p_{ij}^{(n)}$.

Recordemos que si A es una matriz $n \times m$ de elemento genérico a_{ij} y B es una matriz $m \times q$ de elemento genérico b_{ij} , entonces AxB se define como la matriz $n \times q$ cuyo elemento genérico (i,j) está dado por $\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$.

Si A y B son estocásticas, AxB también es estocástica.

Llamemos $P^{(n)}$ a la matriz estocástica de la n -ésima transición, es decir cuyos elementos son las probabilidades $p_{ij}^{(n)}$ que queremos obtener. Entonces las ecuaciones de Chapman–Kolmogorov se pueden reescribir como

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)} \quad \text{en el caso general,}$$

$$P^{(n+1)} = P^{(n)} P \quad \text{cuando } m = 1.$$

Una propiedad importante que se puede demostrar a partir de esta formulación es que la matriz de transición en n pasos es igual a la n -ésima potencia de la matriz de transición en un paso, P :

$$P^{(n)} = (P)^n$$

Para demostrar esta afirmación utilizaremos inducción completa:

- Paso base: observamos que $P^{(1)} = P$, por definición.
- Para $n=2$, $P^{(2)} = P^{(1+1)} = P^{(1)}P^{(1)} = PP = P^2$
- Paso inductivo: suponemos que para $n-1$ la fórmula es cierta, $P^{(n-1)} = P^{n-1}$
Entonces

$$P^{(n)} = P^{(n-1+1)} \stackrel{ec. C-K}{=} P^{(n-1)}P^{(1)} = P^{(n-1)}P \stackrel{hip. de inducción}{=} P^{n-1}P = P^n \quad QED$$

Clasificación de estados en una C. M. finita homogénea

Para clasificar los estados de una C.M. finita vamos a definir la relación de alcance entre los mismos.

Decimos que el estado j es alcanzable desde i si y sólo si es posible que el proceso alguna vez alcance o se encuentre en el estado j , habiendo partido de i . Esto es equivalente a pedir $p_{ij}^{(n)} > 0$ para algún $n \geq 0$, ya que

$$\begin{aligned} \text{si } \forall n, p_{ij}^{(n)} = 0, \text{ entonces } P(X \text{ pasa por } j | X_0 = i) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = j | X_0 = i\}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = j | X_0 = i) = 0 \\ \text{si } \exists N \mid p_{ij}^{(N)} > 0, \text{ entonces } P(X \text{ pasa por } j | X_0 = i) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = j | X_0 = i\}\right) \geq P(X_N = j | X_0 = i) > 0 \end{aligned}$$

Decimos que dos estados i y j se comunican (notación $i \leftrightarrow j$) cuando son alcanzables el uno desde el otro (o de forma equivalente cuando existen $n, m \geq 0$ tales que $p_{ij}^{(n)} > 0$ y $p_{ji}^{(m)} > 0$).

Se define así la **relación de comunicación** que satisface las siguientes propiedades:

- 1) Reflexiva, $i \leftrightarrow i \quad \forall i \in E$ ya que por definición:

$$p_{ii}^{(0)} = P(X_0 = i | X_0 = i) = 1 > 0$$

- 2) Simétrica, si $i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i, \forall i, j \in E$

se verifica por definición de la relación comunicación.

- 3) Transitiva, si $i \leftrightarrow j$ y $j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k, \forall i, j, k \in E$

por hipótesis $i \leftrightarrow j$ y $j \leftrightarrow k$, entonces por definición de la relación de comunicación

$$\exists n, m > 0 \mid p_{ij}^{(n)} > 0, p_{ji}^{(m)} > 0$$

$$\exists r, t > 0 \mid p_{jk}^{(r)} > 0, p_{kj}^{(t)} > 0$$

Veamos primero que k es alcanzable desde i . Aplicando las ecuaciones de Chapman–Kolmogorov,

$$p_{ik}^{(n+r)} = \sum_{l \in E} p_{il}^{(n)} p_{lk}^{(r)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(r)} \stackrel{\text{por H.}}{>} 0$$

Entonces k es alcanzable desde i . Con el mismo procedimiento vemos que i es alcanzable desde k , entonces por definición i y k se comunican.

Por lo tanto la relación de comunicación es una relación de equivalencia en el conjunto de estados del proceso, y por ende partitiona al espacio de estado en clases

disjuntas de equivalencia. Si consideramos el grafo asociado a la cadena, podemos ver que la relación de comunicación lo divide en sus componentes fuertemente conexas.

En efecto, la relación de comunicación implica la existencia de caminos entre ambos nodos del grafo, es decir que si i y k se comunican entonces:

$\exists n, m \exists c_1 \in C_n(i,j) \text{ y } \exists c_2 \in C_m(j,i)$. Por lo tanto los dos estados i y k pertenecen a la misma componente fuertemente conexa del grafo asociado a la cadena.

Cuando una C.M. finita y homogénea posee una sola clase, es decir si todos sus estados se comunican entre sí, $i \leftrightarrow j \forall i, j \in E$, se dice que la cadena es **irreducible**.

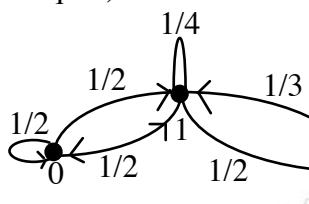
Ejemplo 7.3.3

Consideremos la siguiente cadena de Markov de espacio de estado $E = \{0, 1, 2\}$ con la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Comprobamos que todos sus estados se comunican, por lo tanto esta cadena es irreducible (tiene una sola clase en el espacio de estado).

Si observamos el grafo asociado, vemos que posee una sola componente fuertemente conexa, por lo tanto es irreducible (también podemos llegar a esta conclusión a partir del hecho que la matriz es tridiagonal, por lo que no se la puede triangularizar por bloques).



Ejemplo 7.3.4

Sea la cadena de Markov de espacio de estado $E = \{0, 1, 2, 3\}$ y matriz de transición P ,

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las clases de esta cadena son: $\{0, 1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$.

Nota: si bien los estados 0, 1 y 3 son alcanzables desde el estado 2, la acción inversa no es posible. En particular, como $p_{33} = 1$, desde el estado 3 no es posible acceder a ningún otro estado, por lo que decimos que 3 es un estado **absorbente**.

El subgrafo asociado tiene 3 componentes fuertemente conexas.

Estados recurrentes y transitorios

Un estado i es **recurrente** si partiendo de él existe la seguridad de que el proceso en algún momento retorne a él. Un estado i es **transitorio** cuando partiendo de él existe una probabilidad no nula de abandonarlo definitivamente (el proceso no retornará jamás a ese estado).

Definimos φ_i la probabilidad de que el proceso, partiendo del estado i , retorne al mismo: $\varphi_i = P \bigcup_n (X_n = i) | X_0 = i$.

Entonces otra forma de expresar las definiciones es decir que el estado i es

- recurrente si $\varphi_i = 1$,
- transitorio si $\varphi_i < 1$.

Definimos R_i el número esperado de retornos al estado i (contando el pasaje inicial).

Definimos la variable aleatoria indicatriz del pasaje por el estado i en la n -ésima etapa, $A_n = \begin{cases} 1, & \text{si } X_n = i \\ 0, & \text{si } X_n \neq i \end{cases}$

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} A_n = \text{nro. de etapas en las que el proceso está en } i$,

$$\text{y } R_i = E \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n | X_0 = i \right)^{\text{props. de la esperanza}} = \sum_{n=0}^{\infty} E(A_n | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = i | X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}.$$

Proposición

El estado i es recurrente si $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ (diverge)

El estado i es transitorio si $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$ (converge)

Demostración:

Supongamos que el proceso comienza su evolución en el estado i , $X_0 = i$. Si i es recurrente, con probabilidad 1 el proceso eventualmente alcanzará el estado i por segunda vez. Repitiendo el razonamiento, vemos que el proceso pasará por el estado i una infinidad de veces, con probabilidad 1.

Si en cambio i es transitorio, cada vez que el estado i es alcanzado existe una probabilidad de no volver jamás igual a $1 - \varphi_i$, por lo que tenemos que la probabilidad de efectuar exactamente n pasajes por el estado i (contando como uno la estadía inicial) se puede expresar como:

$$P(X \text{ pase exactamente } n \text{ veces al estado } i | X_0 = i) = \varphi_i^{n-1} (1 - \varphi_i),$$

probabilidad en la que reconocemos una distribución geométrica de esperanza finita $1/(1-\varphi_i)$; entonces, el número esperado de retornos al estado i es $R_i = 1 / (1 - \varphi_i)$, que es finito.

Por lo tanto, si logramos calcular la esperanza del número de retornos del proceso al estado i , podemos saber si dicho estado es transitorio (esperanza finita) o recurrente (número infinito de regresos).

Propiedad

En una C.M. finita homogénea existe por lo menos un estado recurrente (no pueden ser todos transitorios).

Para justificar esta propiedad por el absurdo, supongamos que todos los estados $\{0,1,2,\dots,n\}$ de una C.M.F.H. son transitorios. Tomemos una trayectoria cualquiera de la cadena. Al ser el estado 0 transitorio, existirá una etapa N_0 luego de la cual el estado 0 será abandonado para siempre. Al ser el estado 1 transitorio, existirá también una etapa N_1 luego de la cual el estado 1 tampoco será visitado. Y así sucesivamente con todos los n estados. Si tomamos ahora $N = \max\{N_0, N_1, \dots, N_n\}$, N es un número natural por ser el máximo de un número finito de naturales. Consideremos las etapas siguientes a la N , por ejemplo la etapa $N+1$: por definición del espacio de estado, $X_{N+1} = i \in E = \{0,1,2,\dots,n\}$; pero por ser $N \geq N_k, \forall k \in E = \{0,1,2,\dots,n\}$, entonces $X_{N+1} \neq k, \forall k \in E = \{0,1,2,\dots,n\}$, es decir $X_{N+1} \notin E = \{0,1,2,\dots,n\}$, y hemos llegado a un absurdo. Por lo tanto no todos los estados de una C.M.F.H. son transitorios, lo que implica que existe al menos un estado recurrente.

Corolario 1

La recurrencia es una propiedad de clase: si un estado i es recurrente, e $i \leftrightarrow j$, entonces j es recurrente.

Demostración

$$\begin{aligned} i \leftrightarrow j &\stackrel{\text{por def.}}{\Rightarrow} \exists k, m \geq 0, p_{ij}^{(k)} > 0 \text{ y } p_{ji}^{(m)} > 0 \\ i \text{ recurrente} &\stackrel{\text{por prop. anterior}}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty \end{aligned}$$

Aplicando las ecuaciones de Chapman–Kolmogorov dos veces, tenemos

$$\forall n \geq 0, p_{jj}^{(m+n+k)} = \sum_{l \in E} p_{jl}^{(m)} p_{lj}^{(n+k)} = \sum_{l \in E} \sum_{r \in E} p_{jl}^{(m)} p_{lr}^{(n)} p_{rj}^{(k)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(k)}$$

donde el miembro de la izquierda es la probabilidad de ir de j a j en $(m+n+k)$ pasos (incluyendo todos los caminos) y el de la derecha es la probabilidad de ir de j a j vía aquellos caminos que pasan por i .

Sumando en n tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(m+n+k)} &\geq p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(k)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty \\ &> 0 \quad \infty \text{ ya que } i \text{ es recurrente por H} \end{aligned}$$

Entonces j es también recurrente.

Corolario 2

El corolario anterior implica que la transitoriedad también es una propiedad de clase: si i transitorio, $i \leftrightarrow j$, entonces j es transitorio.

Demostración:

Si j fuese recurrente, como por hipótesis $j \leftrightarrow i$, aplicando el corolario anterior tendríamos i recurrente, lo que es absurdo. Por lo tanto j es transitorio.

Corolario 3

El hecho de que la recurrencia es una propiedad de clase y además que no todos los estados de una C.M.F pueden ser transitorios, nos permite afirmar que todos los estados de una C.M. finita irreductible son recurrentes.

Demostración:

Por definición, una cadena de Markov irreductible posee una sola clase de estados.

Por lo tanto, $i \leftrightarrow j, \forall i, j \in E$

Aplicando la propiedad anterior, como la cadena es finita, existe al menos un estado $i \in E$ recurrente. Por el corolario 1, todos los estados que comunican con i son también recurrentes, por lo tanto $\forall j \in E, j$ es recurrente.

Ejemplo 7.3.5

Sea la C.M. cuya matriz de transición es:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comprobamos que todos los estados se comunican, por lo tanto pertenecen a la misma clase, como además esta cadena es finita podemos entonces afirmar que todos sus estados son recurrentes.

Ejemplo 7.3.6

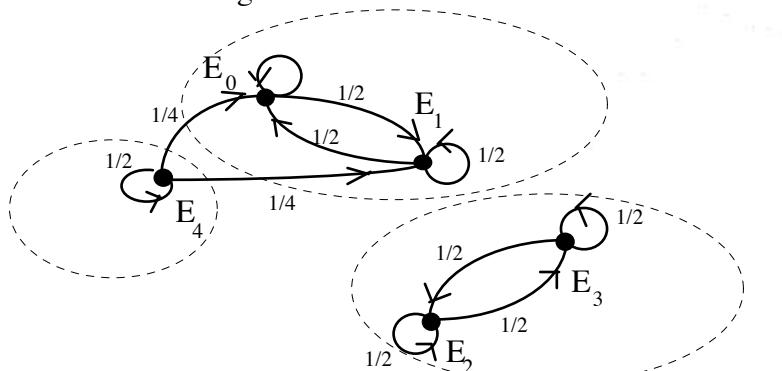
Consideremos la C.M. con matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz está triangularizada por bloques. Podemos diferenciar 3 clases de equivalencia en el espacio de estado: $\{0,1\}$, $\{2,3\}$ y $\{4\}$.

Las dos primeras clases son recurrentes. En cambio, la clase $\{4\}$ es transitoria.

Verificando en el grafo asociado:



Definimos $f_{ii}(n)$ como la probabilidad de que el primer retorno al estado i se realice en exactamente n etapas, dado que el estado inicial de la cadena es i :

$$f_{ii}(n) = P(X_n = i, X_k \neq i, \forall k = 1, \dots, n-1 | X_0 = i)$$

El cálculo de las probabilidades de primer pasaje en n etapas, $f_{ij}(n)$, se pueden realizar a través de las siguientes fórmulas de recurrencia

$$f_{ij}(1) = p_{ij}$$

$$f_{ij}(2) = p_{ij}^{(2)} - f_{ij}(1)p_{jj}$$

...

$$f_{ij}(n) = p_{ij}^{(n)} - f_{ij}(1)p_{jj}^{(n-1)} - f_{ij}(2)p_{jj}^{(n-2)} - \dots - f_{ij}(n-1)p_{jj}$$

Para un estado i recurrente, definimos m_{ii} como la esperanza del tiempo del primer retorno al estado i :

$$m_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n)$$

Los estados recurrentes se pueden diferenciar en:

- 1) **recurrentes positivos**
- 2) **recurrente nulos.**

Un estado i es recurrente positivo, si partiendo de i , el tiempo esperado hasta que el proceso retorne al estado i por vez primera es finito, es decir si $m_{ii} < \infty$. Es posible demostrar que todos los estados recurrentes de una cadena de Markov finita son recurrentes positivos.

Un estado es recurrente nulo si $m_{ii} = \infty$. En este curso no trataremos este tipo de estados ya que solo aparecen en cadenas de Markov de espacio de estado infinito.

Periodicidad

Se dice que el estado i es **periódico** si $d(i) = \text{MCD}\left(n \mid p_{ii}^{(n)} > 0\right) > 1$, y es **aperiódico** si $d(i) = 1$.

Si un estado i es periódico de período $d(i)$, el proceso puede retornar a dicho estado solamente en las etapas múltiples de $d(i)$.

Propiedad (dem. trivial)

Si el estado i tiene un lazo (es decir, si $p_{ii} > 0$) entonces su periodicidad será 1.

Propiedad (sin demostración)

Se demuestra también que la periodicidad es una propiedad de clase: si i tiene período $d(i)$, e $i \leftrightarrow j$, entonces j tendrá también período $d(i)$.

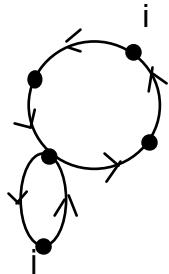
Propiedad (sin demostración; ver p.ejemplo Chretienne-Faure, pag. 27)

Sea i un estado de una componente conexa C cualquiera. Entonces se puede demostrar que para calcular la periodicidad de i , es suficiente con examinar todos los ciclos de la componente conexa:

$$d(i) = \text{MCD}\left(n \mid \text{existe un ciclo simple de largo } n \text{ en } C\right).$$

Una cadena es aperiódica si todos sus estados lo son, y periódica en caso contrario.

Ejemplo



En esta cadena, tenemos que $p_{ii}^{(n)} > 0$ para $n = 4, 6, 8, \dots (2 + 2k)$. Por lo tanto, $d(i)=2$, o sea que el estado i es periódico de período 2. Como además la cadena es irreductible, todos los estados de la misma tendrán período 2.

Ejemplo



Esta cadena es aperiódica, ya que el estado i tiene un lazo, por lo tanto $d(i)=1$, y como existe una sola clase de estados, todos tendrán periodicidad 1.

Ergodicidad

Se define un estado **ergódico** como aquel que es recurrente positivo y aperiódico. Un conjunto K de estados es ergódico si todos los estados que lo componen son ergódicos. Una cadena de Markov es **ergódica** cuando es irreductible y su espacio de estado es un conjunto de estados ergódicos. Si una cadena de Markov es finita y ergódica, diremos que es una cadena **regular**.

Vector distribución de estados

El vector de distribución de estados de la cadena en la etapa n , $Q(n)$, es un vector fila estocástico (estocástico= suma de sus elementos igual a 1) que contiene las probabilidades para la n -ésima etapa del estado de la cadena:

$$Q(n) = [\pi_1(n) \ \pi_2(n) \ \dots \ \pi_j(n) \ \dots \ \pi_r(n)], \quad E = \{1, 2, \dots, r\}, \quad |E| = r, \quad \sum_{j=1}^r \pi_j(n) = 1$$

donde $\pi_j(n) = P(X_n = j), j \in E$ es la probabilidad de que el estado de la cadena en la n -ésima etapa sea j , independientemente del estado inicial.

Condicionando respecto del estado inicial, tenemos que

$$\pi_j(n) = \sum_{i \in E} P(X_n = j | X_0 = i) P(X_0 = i) \stackrel{\text{cadena homogénea}}{=} \sum_{i \in E} p_{ij}^{(n)} \pi_i(0)$$

que expresado en notación matricial nos da $Q(n) = Q(0)P^n$.

Podemos obtener el mismo resultado de la siguiente manera:

$$\pi_j(n) = \sum_{i \in E} P(X_n = j | X_{n-1} = i) P(X_{n-1} = i) \stackrel{\text{cadena homogénea}}{=} \sum_{i \in E} p_{ij} \pi_i(n-1)$$

que corresponde a la ecuación $Q(n) = Q(n-1)P$, la cual aplicada recursivamente nos permite llegar a $Q(n) = Q(0)P^n$.

Ejemplo:

Sea una CMTDH con dos estados, A y B, y matriz de transición

2/4	2/4
3/4	1/4

Si la distribución inicial

$Q(0)=(0,1)$, entonces $Q(1)=(3/4,1/4)$, $Q(2)=(9/16,7/16)$, $Q(3)=(39/64,25/64)$

Si $Q(0)=(1,0)$, entonces $Q(1)=(2/4,2/4)$, $Q(2)=(10/16,6/16)$, $Q(3)=(38/64,26/64)$

Si $Q(0)=(1/2,1/2)$, entonces $Q(1)=(5/8,3/8)$, $Q(2)=(19/32,13/32)$, ...

Definición.

Un vector estocástico π es una **distribución estacionaria** cuando si $Q(n)=\pi$, entonces $Q(m)=\pi$, para todo $m>n$.

Si π estacionaria, si $Q(n)=\pi$, entonces $Q(n+1)=\pi$; como $Q(n+1)=Q(n)P$, tenemos que $Q(n+1)=\pi P=\pi$. Por lo tanto, toda distribución estacionaria π verifica la ecuación $\pi=\pi P$.

Recíprocamente, todo vector π que verifique las ecuaciones $\pi=\pi P$ y $\sum_{i \in E} \pi_i = 1$ será una distribución estacionaria de la cadena de Markov de espacio de estado E y matriz de transición P . Estas ecuaciones constituyen un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones y n incógnitas. Para resolver este sistema, debemos eliminar una de las ecuaciones redundantes, que puede ser cualquiera exceptuando $\sum_{i \in E} \pi_i = 1$.

Es posible que una cadena de Markov admita más de una distribución estacionaria, como vemos en el ejemplo siguiente. Sea una cadena de Markov de matriz de transición P ,

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Al plantear el sistema lineal correspondiente para hallar la distribución estacionaria constatamos que es indeterminado, admitiendo infinitas soluciones, entre ellas están las siguientes: $[1/2, 1/2, 0]$, $[1/5, 1/5, 3/5]$, etc.

Comportamiento asintótico de una cadena de Markov

Estudiaremos ahora el comportamiento de las cadenas de Markov cuando el número de etapas n tiende a infinito.

Para esto, estudiaremos $\forall j \in E, \alpha_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\forall i \in E} \pi_i(0) p_{ij}^{(n)}$, que formulado en notación matricial se escribe $\vec{\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q(0) P^n = Q(0) \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$. El límite de P^n

puede estudiarse de forma genérica con técnicas de transformada z, fuera del alcance de este curso.

Cuando $\vec{\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = Q(0) \lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ existe y es independiente del valor de la distribución inicial $Q(0)$, decimos que α es la **distribución límite** de la cadena.

Se puede demostrar

- 1) Que para una cadena de Markov ergódica, siempre existe la distribución límite, y que además coincide con la distribución estacionaria que es única en este caso.
- 2) Que para una cadena de Markov finita, irreductible y periódica, siempre existe una única distribución estacionaria.

Para cadenas periódicas puede no existir una distribución límite. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.3.8

Sea la cadena de matriz de transición P , $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En esta cadena, si el estado inicial X_0 del proceso es el estado 1, en todas las etapas pares la cadena pasará por el estado 1, y en las etapas impares por el estado 2. Podemos ver que $P^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $P^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para todo $n \geq 0$. Por lo tanto, no existe $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$, es decir que no tenemos distribución límite. Sin embargo existe la distribución estacionaria $[1/2, 1/2]$.

7.3.3 Proporción de tiempo pasado en un estado

En una cadena de Markov finita irreductible podemos considerar la distribución estacionaria $\pi_j, j \in E$ como la proporción del tiempo en el que el proceso va a estar a largo plazo en el estado j . Ya habíamos definido para un estado $j \in E$ de una C.M finita irreductible, la esperanza del tiempo de retorno a j , m_{jj} . De forma intuitiva, como π_j es la proporción del tiempo en que el proceso está en el estado j , y como la cadena está en el estado j una unidad de tiempo por cada m_{jj} unidades de tiempo que no lo está, tenemos entonces que $\pi_j = \frac{1}{m_{jj}}$. Es decir que la proporción de tiempo que el proceso pasa en el estado j es igual a la inversa del tiempo medio entre las visitas a j , para toda cadena de Markov finita irreductible.

Ejemplo 7.3.9

Un vigilante tiene una manzana para cuidar. La vigilancia comienza en una de las esquinas, dirigiéndose a las otras de acuerdo a las siguientes probabilidades:

$p_{12} = p_{23} = p_{41} = 1$, $p_{33} = 1 - p$, $p_{34} = p$. Es decir que le lleva una unidad de tiempo el ir de una esquina a la siguiente, y en la única esquina donde puede permanecer más tiempo es en la esquina 3, donde con probabilidad $(1-p)$ decide quedarse por otra unidad de tiempo.

El espacio de estado de esta cadena es $\{1,2,3,4\}$, donde cada estado corresponde a una esquina en nuestro problema. La cadena se encuentra en el estado i durante la etapa n , $X_n=i$, cuando el vigilante está en la esquina i durante la n -ésima unidad de tiempo.

Como el espacio de estado de esta cadena posee una sola clase de equivalencia, entonces la cadena es irreductible, y como es finita, entonces todos los estados son recurrentes positivos. Para estudiar la periodicidad, alcanza con ver que como el estado 3 posee un bucle, por lo tanto $d(3)=1$; al existir una sola clase, todos los estados tienen la misma periodicidad, 1 en este caso. Tenemos entonces que esta cadena es finita, irreductible y aperiódica, entonces es ergódica. Por lo tanto, existe una distribución límite que coincide con la estacionaria, $\pi_1 = \pi_2 = \pi_4 = \frac{p}{3p+1}$,

$$\pi_3 = \frac{1}{3p+1}.$$

7.4 Cadenas de Markov de Tiempo Contínuo

Un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ es de tiempo continuo cuando T es un intervalo de los reales (y por lo tanto, un conjunto no numerable). Como T es continuo, notamos $(X_t = x)$ al evento en que el proceso toma el valor x en el instante t (denominamos instante a un elemento del conjunto T).

Una **cadena de Markov de tiempo continuo** es un proceso estocástico de tiempo continuo y espacio de estado discreto cuyo comportamiento en el futuro solamente depende de su estado presente, es decir cuando la siguiente condición se verifica:

$$P(X_{t+s} = j | X_t = i, X_u = x(u), 0 \leq u < t) = P(X_{t+s} = j | X_t = i),$$

$$\forall i, j \in E, \forall x(u) \in \Phi : T \rightarrow E, \forall s, t \in T$$

(propiedad de ausencia de memoria).

En esta sección consideraremos solamente cadenas homogéneas, es decir aquellas cuyas probabilidades de transición son independientes del instante de tiempo en el que ocurren:

$$P(X_{t+s} = j | X_t = i) = p_{ij}(s), \quad \forall i, j \in E, \forall t, s \in T$$

Para las cadenas de Markov de tiempo continuo homogéneas podemos dar otra definición equivalente a la anterior, basada en la propiedad de ausencia de memoria.

Diremos entonces que una cadena de Markov de tiempo continuo es un proceso estocástico cuya evolución respeta las reglas siguientes:

1. el tiempo de permanencia del proceso en el estado i es una variable aleatoria independiente, de ley exponencial y parámetro v_i (por lo tanto, su media es $1/v_i$), para todo estado i de E . Notaremos TP_i a la variable exponencial del tiempo de permanencia en el estado i .

2. Cuando el proceso abandona el estado i , la elección del próximo estado j se realiza de acuerdo a las probabilidades de transición p_{ij} definidas para todos los estados i, j de E . Estas probabilidades deben satisfacer $p_{ii} = 0$, $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$, $\forall i \in E$.

Es posible entonces considerar que una cadena de Markov en tiempo continuo es un proceso estocástico cuyas transiciones de un estado a otro se realizan de acuerdo a una cadena de Markov discreta, pero donde el tiempo de permanencia en cada estado es una v.a. exponencial en lugar de un valor constante.

En una cadena de Markov de tiempo continuo, definimos el generador infinitesimal Q como la matriz tal que $q_{ij} = \begin{cases} p_{ij}\nu_i & i \neq j \\ -\nu_i & i = j \end{cases}$. El generador infinitesimal de una cadena de Markov en tiempo continuo cumple un papel similar al de la matriz de transición en tiempo discreto. En particular, la distribución estacionaria de una CMTA X es aquella que se obtiene de resolver el sistema lineal $\pi Q = 0$, con la restricción adicional $\sum_i \pi_i = 1$; si la cadena es ergódica, la distribución estacionaria coincide con la distribución límite, que existe.

Grafo asociado a una C. M. de tiempo continuo homogénea

Sea $X=\{X_n, n \geq 0\}$ una cadena de Markov de tiempo continuo de espacio de estado $E=\{1,2,\dots,r\}$, $|E|=r$, y generador infinitesimal Q . Podemos asociar un grafo orientado ponderado $G=(E,U,W)$ a la cadena X de la forma siguiente:

- E (espacio de estado de la cadena) es el conjunto de nodos
- $U = \{u_{ij} = (i,j) | i, j \in E, p_{ij} > 0\}$ es el conjunto de arcos orientados
- W es la función de ponderación que asigna $\forall u_{ij} \in \Gamma^+$ (i) la probabilidad de transición $p_{ij} = q_{ij} / (-q_{ii}) > 0$ correspondiente, $W(u_{ij}) = p_{ij} > 0$; y a cada nodo $i \in E$ la esperanza del tiempo de permanencia $1/\nu_i = 1/(-q_{ii})$.

Como la suma de todas las probabilidades de transición p_{ij} para cada fila i debe ser igual a 1, entonces el grafo asociado a una C. M. finita homogénea no puede ser cualquiera, sino que la suma de las probabilidades asignadas a los arcos incidentes exteriormente a cada nodo debe ser igual a 1.

Aunque el grafo retiene nada más que las probabilidades de transición entre dos estados, su estudio es muchas veces suficiente para conocer cualitativamente la evolución del proceso.

Ejemplo 7.4.1

En un negocio de lustrar zapatos hay 2 sillas (silla 1 y sillla 2). Un cliente que llega se dirige primero a la sillla 1, donde le limpian los zapatos y le ponen pomada. Después va a la sillla 2 donde le lustran los zapatos. Estos dos servicios se consideran variables aleatorias exponenciales independientes con parámetros respectivos μ_1 y μ_2 . Supongamos además que los clientes entran según una distribución Poisson de tasa 1 y que cualquier cliente entra solamente si las dos sillas estan desocupadas.

Para analizarlo como una C.M. en tiempo continuo, establecemos un espacio de estados apropiado. En este sistema tendremos siempre 0 ó 1 cliente, siendo además relevante el saber en que silla se encuentra el cliente por los tiempos del servicio. Entonces $E=\{0,1,2\}$, donde

- estado 0 - ningún cliente
- estado 1 - un cliente, en la silla 1
- estado 2 - un cliente, en la silla 2

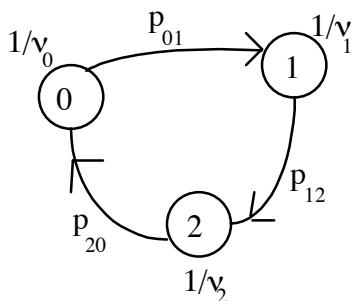
En cuanto a los tiempos de permanencia en cada estado tenemos:

- TP_0 - intervalo de tiempo hasta que llega el primer cliente, exponencial de tasa 1. $E(TP_0) = 1/\nu_o = 1 \Rightarrow \nu_o = 1$
- TP_1 - tiempo de permanencia del cliente en la silla 1, exponencial de tasa μ_1 .
 $E(TP_1) = 1/\mu_1 \Rightarrow \nu_1 = \mu_1$
- TP_2 - tiempo de permanencia del cliente en la silla 2, exponencial de tasa μ_2 .
 $E(TP_2) = 1/\mu_2 \Rightarrow \nu_2 = \mu_2$

Las probabilidades de transición son:

$$p_{01} = p_{12} = p_{20} = 1.$$

El grafo asociado es:



Comunicación, clases de equivalencia, componentes fuertemente conexas, recurrencia y transitoriedad:

Son conceptos análogos a los de las CM de tiempo discreto.

Periodicidad:

En CM de tiempo continuo todos los estados son aperiódicos (no existe concepto de estado periódico).

Ergodicidad:

Toda CM de tiempo continuo homogénea finita e irreductible es ergódica.

Si la cadena es infinita, puede no ser ergódica (una condición suficiente para que una cadena irreductible sea ergódica es que los valores ν_i estén acotados superiormente).

Vector distribución de estados

El vector de distribución de estados de la cadena en el instante t , $Q(t)$, es un vector fila estocástico (estocástico= suma de sus elementos igual a 1) que contiene las probabilidades en el instante t del estado de la cadena:

$$Q(t) = [\pi_1(t) \ \pi_2(t) \ \dots \ \pi_j(t) \ \dots \ \pi_r(t)], E = \{1, 2, \dots, r\}, |E| = r, \sum_{j=1}^r \pi_j(t) = 1$$

donde $\pi_j(t) = P(X_n = j)$, $j \in E$ es la probabilidad de que el estado de la cadena en la n -ésima etapa sea j , independientemente del estado inicial.

Condicionando respecto del estado inicial, tenemos que

$$\pi_j(t) = \sum_{i \in E} P(X_t = j | X_0 = i) P(X_0 = i) \stackrel{\text{cadena homogénea}}{=} \sum_{i \in E} p_{ij}(t) \pi_i(0).$$

Distribución estacionaria.

Si $Q(t) = \pi$ es una distribución estacionaria, entonces, $Q(s) = \pi$, $\forall s > t$.

Todo vector π que verifique las ecuaciones $\pi Q = 0$ y $\sum_{i \in E} \pi_i = 1$ será una distribución estacionaria de la cadena de Markov de tiempo continuo de espacio de estado E y generador infinitesimal Q . Estas ecuaciones constituyen un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones y n incógnitas. Para resolver este sistema, debemos eliminar una de las ecuaciones redundantes, que puede ser cualquiera exceptuando $\sum_{i \in E} \pi_i = 1$.

Es posible que una cadena de Markov admita más de una distribución estacionaria, en cuyo caso el sistema lineal correspondiente para hallar la distribución estacionaria será compatible indeterminado.

Comportamiento asintótico de una cadena de Markov

Estudiaremos ahora el comportamiento de las cadenas de Markov cuando t tiende a infinito.

Para esto, estudiaremos $\forall j \in E$, $\alpha_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_j(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i \in E} \pi_i(0) p_{ij}(t)$.

Cuando $\vec{\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t)$ existe y es independiente del valor de la distribución inicial $Q(0)$, decimos que α es la **distribución límite** de la cadena.

Se puede demostrar que para una cadena de Markov de tiempo continuo finita y ergódica, siempre existe la distribución límite, y que además coincide con la distribución estacionaria que es única en este caso. (ver en las páginas anteriores la discusión sobre ergodicidad).

Ecuaciones de balance de flujo:

Si π es una distribución estacionaria, entonces para cualquier subconjunto A del espacio de estados E , se verifica la siguiente propiedad (que corresponde a las llamadas ecuaciones de balances de flujo):

$$\sum_{i \in A} \left(\sum_{j \in E / A} q_{ij} \right) \pi_i = \sum_{j \in E / A} \left(\sum_{i \in A} q_{ji} \right) \pi_j.$$

De manera recíproca, un conjunto independiente de $n-1$ de estas ecuaciones junto con la condición de estocásticidad pueden ser empleadas para generar un sistema lineal cuya solución es son las distribuciones estacionarias (si existen).

7.5 Procesos de Poisson

Una subfamilia importante de los procesos estocásticos de tiempo continuo y espacio de estado el conjunto de los naturales son los procesos de conteo $\{N_t, t \geq 0\}$, que se caracterizan por cumplir las condiciones siguientes:

- $N_t \in \mathbb{N}, \forall t$ (y lo interpretamos como el número de eventos en el intervalo $(0, t]$)
 - $N_0 = 0$
 - $N_t \geq 0, \forall t$
- $$s < t \Rightarrow N_s \leq N_t$$

Un proceso de conteo es homogéneo en el tiempo si el número de eventos en un intervalo depende solamente de la longitud del mismo, y no de su instante inicial:

$$\forall r_1 < r_2, s > 0 : \forall n \geq 0 : P(N_{r_2+s} - N_{r_1+s} = n) = P(N_{r_2} - N_{r_1} = n).$$

Un proceso de conteo es de incrementos independientes si el número de eventos contados en intervalos de tiempos disjuntos son independientes:

$$\forall s, t : \forall n, m \geq 0 : P(N_t - N_s = n, N_s = m) = P(N_t - N_s = n)P(N_s = m).$$

Un caso particular de los procesos de conteo son los procesos de Poisson. Un proceso de conteo $\{N_t, t \geq 0\}$ es de Poisson si verifica las siguientes propiedades adicionales:

- el proceso es homogéneo en el tiempo y de incrementos independientes.
- $P(N_h = 1) = \lambda h + o(h) = p_1(h)$ probabilidad de un evento en el intervalo $(0, h]$.
- $P(N_h \geq 2) = o(h), \lim_{h \rightarrow 0} o(h) \rightarrow 0$ probabilidad de más de un evento en $(0, h]$.

A partir de estas condiciones se demuestra que la probabilidad de que ocurran n eventos en el intervalo $(0, t]$ corresponde a una distribución de Poisson,

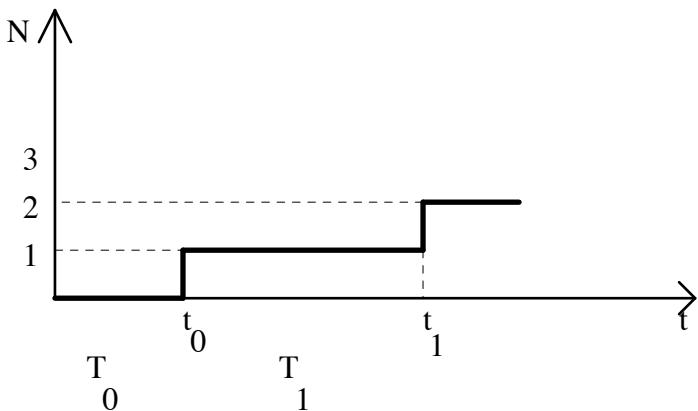
$$p_n(t) = P(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \text{ de esperanza } E(N_t) = \lambda t = \text{Var}(N_t).$$

Es decir que el proceso resultante de contar el número de eventos sucedidos en un intervalo de tiempo t posee una distribución de Poisson de tasa λt .

Distribución de los tiempos entre llegadas

Consideremos un Proceso de Poisson $\{N_t, t \in T\}$, notemos T_1 el intervalo de tiempo hasta que ocurre el primer evento y para $n > 1$ notemos T_n el lapso de tiempo entre el $(n-1)$ -ésimo evento y el n -ésimo evento.

La secuencia $\{T_n, n=1,2,3,\dots\}$ es llamada secuencia de los tiempos entre llegadas sucesivas.



Determinemos la distribución de la variable aleatoria continua T_n .
Estudiemos primero T_1 .

El evento $\{T_1 > t\} = \{N(t) = 0\}$ corresponde a la no ocurrencia de ningún evento del proceso en el intervalo $(0, t]$, entonces

$$P(T_1 > t) = P(N_t = 0) = p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Por lo tanto T_1 posee distribución exponencial, de media $1/\lambda$.

Veamos ahora T_2 .

$$P(T_2 > t) \stackrel{\text{prob. condicional}}{=} \int_0^{\infty} P(T_2 > t | T_1 = s) f_{T_1}(s) ds \stackrel{\text{por ser } T_1 \text{ exponencial}}{=} \int_0^{\infty} P(T_2 > t | T_1 = s) \lambda e^{-\lambda s} ds$$

Tenemos que

$$P(T_2 > t | T_1 = s) = P(N_{t+s} - N_s = 0 | N_s = 1) \stackrel{\substack{\text{incrementos} \\ \text{independientes}}}{=} P(N_{t+s} - N_s = 0) \stackrel{\text{crecimiento homogéneo}}{=} P(N_t = 0) = p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior

$$P(T_2 > t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda s} ds \stackrel{\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda s} ds = 1}{=} e^{-\lambda t} = P(T_2 > t | T_1 = s)$$

Por lo tanto concluimos que la variable aleatoria T_2 también es exponencial, y su esperanza es $1/\lambda$.

Ademas T_1 y T_2 son independientes ya que $P(T_2 > t | T_1 = s) = P(T_2 > t)$.

Con el mismo esquema, podemos demostrar que T_3, T_4, T_5 , etc., son variables aleatorias exponenciales independientes, cuyo valor esperado es $1/\lambda$.

Recíprocamente, una secuencia $\{T_n, n > 1\}$ de variables aleatorias exponenciales independientes de esperanza $1/\lambda$ define un proceso de Poisson de tasa λ , $N_t = \{\max\{n / S_n \leq t\}\}$ con $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ el instante en que ocurre el evento n .

Ejemplo 7.5.1

Supongamos que la inmigración a un país se realiza según un proceso de Poisson, de tasa $\lambda = 1$ inmigrante/día. Calculemos la probabilidad de que el tiempo transcurrido entre el décimo y el undécimo inmigrante exceda los dos días:

$$P\{T_{11} > 2\} = e^{-2\lambda} = e^{-2} \approx 0,133$$

7.6 Procesos de Nacimiento y Muerte

Estudiaremos a continuación una clase de sistemas cuyo estado está completamente determinado por el número de individuos presentes en el sistema en cada instante de tiempo. Supongamos que siempre que haya n individuos en el sistema:

1. los nuevos arribos al sistema se realizan a una tasa exponencial λ_n
2. los individuos abandonan el sistema a una tasa exponencial μ_n

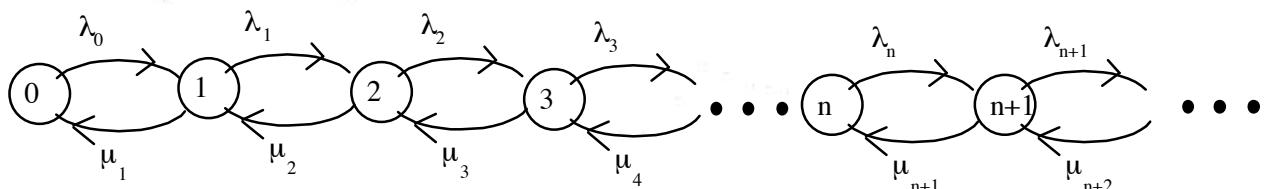
Es decir que siempre que haya n individuos en el sistema, el tiempo hasta la llegada de un nuevo individuo es una variable aleatoria exponencial de esperanza $1/\lambda_n$, el tiempo hasta la partida de un individuo presente en el sistema es una variable aleatoria exponencial de esperanza $1/\mu_n$, y ambas v.a. son independientes.

Modelamos un sistema de este tipo a través de un proceso estocástico $X=\{X_t, t \geq 0\}$, con X_t =número de individuos presentes en el sistema en el instante t . Este proceso estocástico, de tiempo continuo y espacio de estado discreto, es un **proceso de nacimiento y muerte**. Decimos que los parámetros $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ son las tasas de nacimiento y muerte respectivamente de este proceso.

Propiedad

Todo proceso de nacimiento y muerte de parámetros $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es equivalente a una cadena de Markov de tiempo continuo con espacio de estado $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ y en la que desde cualquier estado n solamente hay transiciones hacia los estados $n+1$ y $n-1$ (donde n corresponde al número de individuos en el sistema modelado).

El grafo asociado al proceso de nacimiento y muerte tiene la siguiente forma:



Algunos casos particulares de procesos de nacimiento y muerte son los siguientes:

1. procesos de Yule $\lambda_n = n\lambda, \forall n, \mu_n = 0, \forall n$ (nacimiento puro, tasa lineal).
2. modelo de crecimiento lineal $\lambda_n = n\lambda, \forall n, \mu_n = n\mu, \forall n$.
3. procesos de Poisson $\lambda_n = \lambda \forall n, \mu_n = 0 \forall n$ (nacimiento puro, tasa constante).

Propiedad - Condición de estabilidad de un proceso de nacimiento y muerte

- A) Todo proceso de nacimiento y muerte con espacio de estados finito es estable.
- B) Todo proceso de nacimiento y muerte con espacio de estados infinito y de parámetros $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es estable (su cadena de Markov subyacente posee una distribución estacionaria única que coincide con la distribución límite) si y solo si se verifican las siguientes condiciones:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=o}^n \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} < \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=o}^n \frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1}} = \infty$$

7.7 Sistemas de Colas

En un sistema de filas de espera encontramos diversos componentes: fuentes de entrada, clientes, las colas propiamente dichas, y los servidores. Estos componentes tienen comportamientos característicos que deben ser especificados al describir el sistema.

Los clientes en un sistema de colas no tienen porque ser personas, pueden ser llamadas telefónicas, aviones, máquinas y los servidores pueden ser buffers de memoria, pistas de aterrizaje, equipos de reparadores.

Cuando estudiamos un sistema de filas de espera, interesa determinar diversos datos del mismo. Entre los más comunes encontramos:

- \bar{n} número esperado de clientes en el sistema,
- \bar{v} número esperado de clientes en la cola,
- ρ número medio de servidores ocupados ,
- \bar{t}_f tiempo medio de espera en la cola,
- \bar{t}_s tiempo medio de permanencia en el sistema.

En los modelos más utilizados de sistemas de colas, el sistema queda determinado por la distribución de probabilidad de los tiempos de llegada de los clientes, la distribución del tiempo de servicio, y el número de servidores existentes. Nosotros presentaremos sistemas de colas en los que la disciplina de espera en la fila es FIFO (el primer cliente en llegar es el primer cliente que es atendido), y donde las distribuciones definidas son exponenciales. Estos modelos de cola se pueden modelar como cadenas de Markov de tiempo continuo, $\{X(t), t>0\}$, procesos estocásticos sin memoria, donde el comportamiento futuro depende solamente del estado presente.

Para caracterizar en forma suscinta uno de estos modelos, se utiliza la siguiente notación (llamada *Notación de Kendall*): distribución de llegadas / distribución del servicio / número de servidores [/ tamaño de la fila de espera / población total del sistema/disciplina de la fila]. Las distribuciones de llegadas y servicios más comunes se especifican mediante un código de una letra: M para la distribución exponencial ("markoviana"), Ek para la distribución Erlang de k etapas, D para la distribución determinística (tiempo constante), G para la distribución "general" (distribución de probabilidad arbitraria). Las disciplinas de la fila se suelen especificar con un acrónimo, del estilo "First In First Out" o "Primero Entrar Primero Salir": los más comunes son FIFO (primero en llegar - primero en ser atendido), LIFO (último en llegar primero en ser atendido), Random (elección aleatoria entre los clientes que esperan), PS (processor sharing - atención multiplexada entre todos los clientes que esperan), etc.

Filas de espera con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales

Puesto que a cada una de las tasas ($\lambda_0, \lambda_1, \dots, \mu_1, \mu_2, \dots$) de un proceso de nacimiento y muerte se puede asignar cualquier valor no negativo, esto proporciona gran flexibilidad para modelar sistemas de colas. Una cantidad muy importante de los modelos más estudiados en la teoría de colas se basan en este proceso. Todas las filas de espera con entradas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales, pueden modelarse como un proceso de nacimiento y muerte. Los modelos difieren únicamente en sus hipótesis respecto a como varían las tasas λ_n y μ_n con n .

Excepto para algunos casos especiales, el estudio analítico del proceso de nacimiento y muerte es muy difícil cuando el sistema se encuentra en una condición transitoria. Se han obtenido algunos resultados sobre la distribución de probabilidades de los estados, pero son muy complicados como para tener aplicación práctica amplia. Por otra parte, es relativamente sencillo obtener una distribución después de que el sistema ha alcanzado un estado estacionario (suponiendo que el sistema lo alcanza). Esto puede realizarse directamente del diagrama de tasas, como se explica a continuación.

Para analizar un sistema de filas de espera debemos determinar las probabilidades $p_n(t)$ $\forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ de que en el instante t haya exactamente n clientes en el sistema. Estas probabilidades se llaman **probabilidades de estado**.

Estudiaremos los casos en que el proceso se realiza en régimen estacionario, es decir cuando las probabilidades son independientes del intervalo de tiempo t :
$$p_n(t) = p_n, \quad \forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Bajo hipótesis de regularidad del sistema, esta distribución estacionaria coincide con la distribución de probabilidades límite del sistema. En ese caso, podemos interpretar el valor p_n como la probabilidad asintótica de que haya n unidades en el sistema, o también como la proporción del tiempo total (cuando $t \rightarrow \infty$) durante la cual hay n unidades en el sistema.

Para poder determinar las p_n haremos uso de la propiedad de equilibrio de flujos (vista al estudiar las cadenas de Markov de tiempo continuo). Esta propiedad puede reexpresarse en este contexto con la siguiente formulación:

Para cualquier estado n ($n = 0, 1, \dots$) del sistema, la tasa media (número esperado de ocurrencias por unidad de tiempo) a la que ocurren los eventos de entrada a un estado o conjunto de estados debe ser igual a la tasa media a la que ocurren los eventos de salida de ese estado o conjunto de estados.

Este principio se expresa mediante las **ecuaciones de balance** para el estado n o para un conjunto de estados C_n . Luego de construir las ecuaciones de balance para cada estado, en términos de probabilidades estacionarias p_n desconocidas, puede resolverse el sistema para hallar las probabilidades.

Veamos ahora como determinar las ecuaciones de balance. Considérese el estado 0. El proceso entra a este estado solamente desde el estado 1. Por tanto, la probabilidad en estado estacionario de encontrarse en el estado 0 (es decir, p_0), representa la proporción de veces que es posible llegar al estado 0. Dado que si el proceso se encuentra en el estado 1, la tasa media de entrar al estado 0 es μ_1 . Es decir, la tasa media global a la cual el proceso entra al estado 0 es $\mu_1 p_1$. Con el mismo razonamiento, la tasa media global a la cual el proceso sale del estado 0 es $\lambda_1 p_1$.

Entonces, la ecuación de balance para el estado 0 es

$$\mu_1 p_1 = \lambda_0 p_0$$

Para el resto de los estados, existen dos transiciones posibles, tanto hacia adentro como hacia fuera del estado.

Las ecuaciones de balance se resumen a continuación:

Estados	Ecuación de balance
0	$\mu_1 p_1 = \lambda_0 p_0$
0, 1	$\mu_2 p_2 = \lambda_1 p_1$
0, 1, 2	$\mu_3 p_3 = \lambda_2 p_2$
...	...
0, 1, ..., n-1	$\mu_n p_n = \lambda_{n-1} p_{n-1}$
0, 1, ..., n-1, n	$\mu_{n+1} p_{n+1} = \lambda_n p_n$
...	...

Dado que el sistema formado por las ecuaciones de balance hasta el n -ésimo conjunto de estados contiene siempre $n + 1$ ecuaciones, podemos resolverlo en función de p_0 . Luego, imponiendo que los p_n sean una distribución de probabilidades, es decir que sumen 1, puede hallarse p_0 .

Aplicando el procedimiento, llegamos a

Estado	Ecuación de balance
0	$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$
1	$p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0$
2	$p_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} p_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} p_0$
...	...
n	$p_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} p_n = \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \dots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_{n-1} \dots \mu_1} p_0$
...	...

Es decir, las probabilidades en estado estacionario son $p_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} p_0$ para $n = 1, 2, \dots$

Debe cumplirse que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, o sea $p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} p_0 \right) = 1$. Por lo tanto, obtenemos la siguiente expresión para p_0 :

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} \right)}$$

Resumiendo, la distribución de probabilidades en estado estacionario para una fila de espera con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales es:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} \right)} \quad p_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_1} p_0$$

Condición de estabilidad del sistema

El resultado anterior y los siguientes se obtienen suponiendo que las tasas permiten alcanzar un estado estacionario. Esto siempre se cumple si $\lambda_n = 0$ para algún valor de n (es decir, cuando sólo es posible un número finito de estados).

En el caso general, aplicando la propiedad vista para los procesos de nacimiento y muerte, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \dots \lambda_0}{\mu_n \dots \mu_1}$ converge, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n \dots \mu_1}{\lambda_n \dots \lambda_1}$ diverge, la estabilidad del sistema está garantizada, pues P_0 está bien definido (y por ende, todas las demás probabilidades en estado estacionario).

Cantidad esperada de clientes en el sistema

Con esta información podemos calcular la cantidad media de clientes en el sistema como el valor esperado del estado del proceso:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n$$

Número medio de clientes en la cola

Sea s el número de servidores del sistema. El largo esperado de la fila está dado por la esperanza de la cantidad de personas en la fila (nótese que decimos la cantidad de personas en la fila y no en el sistema). Supongamos que el proceso se encuentra en el estado n (es decir, hay n clientes en el sistema). Si $n \leq s$, entonces todos los clientes están siendo atendidos y la fila tiene largo 0. Si $n > s$, habrá $n - s$ clientes en la fila y s clientes siendo atendidos (fuera de la fila).

En resumen, el largo esperado de la fila es:

$$\bar{v} = \sum_{n=s}^{\infty} (n - s) p_n$$

Cantidad esperada de servidores ocupados

De manera similar, podemos definir la cantidad esperada de servidores ocupados. Sea s la cantidad de servidores del sistema. Supongamos que hay n clientes en el sistema. Si $n \leq s$ entonces la cantidad de servidores ocupados es n . En cambio, si $n > s$ la cantidad de servidores ocupados es s (pues no hay mas de s servidores). Por lo tanto, definimos

$$\rho = \sum_{n=1}^s n P_n + \sum_{n=s+1}^{\infty} s p_n$$

Observe que se cumple $\bar{n} = \bar{v} + \rho$.

Ecuaciones de Little

Las ecuaciones de Little expresan que para cualquier sistema o subsistema dado, en estado estacionario el número medio de clientes dentro es igual a la tasa media de entrada de clientes por el tiempo medio de permanencia en ese sistema o subsistema.

Casos particulares: el número medio de clientes en el sistema, el número medio de clientes en la cola, el tiempo esperado de permanencia en el sistema y el tiempo esperado de permanencia en la fila satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \overline{\lambda t_s} \\ \bar{v} &= \overline{\lambda t_f}\end{aligned}$$

Donde $\bar{\lambda}$ es la tasa media de llegadas, que viene dada por $\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n$.

Asimismo, si \bar{t}_{at} es el tiempo medio de atención, tenemos que $\rho = \overline{\lambda t_{at}}$.

Tiempo esperado de permanencia en el sistema

Utilizando las igualdades de Little, tenemos que

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}}{\bar{\lambda}}$$

Tiempo esperado de permanencia en la fila

Aplicando nuevamente las igualdades de Little, llegamos a

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}}$$

Hemos obtenido ecuaciones para diversas medidas de interés (en estado estacionario) sobre filas de espera con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales sin hacer suposiciones acerca de las tasas de llegada y de atención. A continuación aplicaremos estos resultados “genéricos” para establecer resultados en modelos específicos.

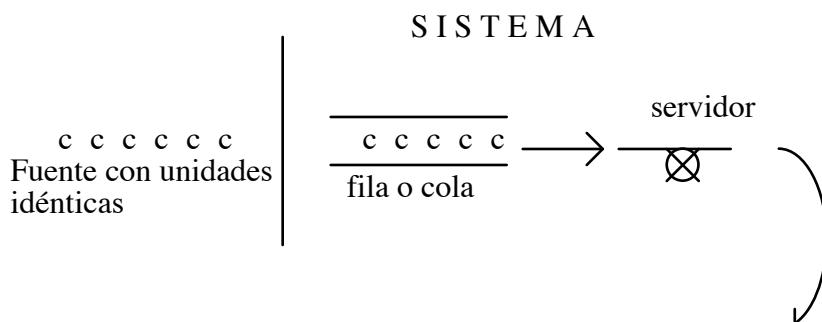
A continuación presentamos un estudio de algunos modelos simples de filas de espera con llegadas de Poisson y tiempos de servicio exponenciales.

7.7.1 El modelo M/M/1

Este es el más simple de los modelos de filas de espera. Como hipótesis tenemos que los clientes llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro λ , y por lo tanto los tiempos entre llegadas son exponenciales (M). Además estos clientes son atendidos o servidos uno por vez, por un solo servidor (o equipo) cuyo tiempo de servicio también es exponencial (M) de parámetro μ .

Cuando un cliente llega al sistema, y el servidor está libre, es atendido por el mismo. Si el servidor no está libre, el cliente ocupa el último lugar de la cola, y espera su turno. Cuando el servidor termina de atender un cliente, éste abandona el sistema, y el servidor comenzará a atender al cliente que ocupa el primer lugar de la cola.

Si notamos $NC(t)$ al número de clientes en el sistema en el instante t , entonces es posible demostrar que $\{NC(t), t \geq 0\}$ es un proceso de nacimiento y muerte cuya tasa de nacimiento es $\lambda_n = \lambda \forall n \geq 0$, y cuya tasa de muerte es $\mu_n = \mu \forall n \geq 1$.



Vamos a calcular las probabilidades de estado p_n para nuestra fila M/M/1. Considerando el estado 0 (aquel en el que no hay clientes en el sistema), vemos que este estado se abandona solamente cuando ocurre un arribo, por lo que la tasa de salida es λp_0 (λ es la intensidad de llegadas, p_0 es la probabilidad de que el proceso se encuentre en el estado 0, o lo que es lo mismo la proporción del tiempo total en que el proceso está en el estado 0). Las entradas al estado 0 se realizan desde el estado 1, cuando un cliente abandona el sistema. La tasa de servicio es μ y la probabilidad de que haya un solo cliente en el sistema es p_1 , entonces la tasa con que el sistema entra o alcanza el estado 0 es μp_1 . Aplicando el principio de equilibrio de tasas, tenemos entonces la siguiente ecuación: $\lambda p_0 = \mu p_1$.

Consideremos ahora los estados 0 y 1. El proceso abandona este conjunto de estados solamente por un arribo en el estado 1, que ocurre a una tasa λ . Por otro lado, el proceso ingresa al estado 1 desde el estado 2 cuando hay una partida. Entonces la intensidad de entrada es μp_1 . La ecuación a la que se llega luego de aplicar el principio de equilibrio es $(\lambda)p_1 = \mu p_2$.

Con un razonamiento similar para los demás estados, obtenemos las siguientes ecuaciones, llamadas ecuaciones de balance:

- $\lambda p_0 = \mu p_1$
- $\lambda p_n = \mu p_{n+1} \quad \forall n > 0$.

Reescribiendo, tenemos

- $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$
- $p_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu} p_n \quad , \quad n \geq 1$

que puede ser resuelto en términos de p_0 :

- $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$
- $p_2 = \frac{\lambda}{\mu} p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$
- $p_3 = \frac{\lambda}{\mu} p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0$
- $p_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu} p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} p_0$

Por ser p_n una distribución de probabilidad, tenemos que

$$\bullet \quad 1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \stackrel{\text{si } \lambda/\mu < 1}{=} p_0 \frac{1}{1 - \lambda/\mu}.$$

La condición de que $\lambda/\mu < 1$ es necesaria para que la serie sea convergente. Es también la condición de estabilidad de este sistema de colas.

Resolviendo ese conjunto de ecuaciones, llegamos a:

- $p_0 = 1 - \lambda/\mu$
- $p_n = (\lambda/\mu)^n (1 - \lambda/\mu), n \geq 1$

Condición de estabilidad de la fila

Supongamos que $\lambda > \mu$. Como los clientes llegan según un proceso de Poisson de tasa λ , el número esperado de clientes que llegan en un intervalo de tiempo t , es λt , $E(N_t) = \lambda t, \forall t \geq 0$.

Si siempre hay clientes para atender, el número de clientes atendidos es un proceso Poisson de tasa μ , ya que los tiempos de servicio, que son los tiempos entre servicios sucesivos, son v.a. exponenciales independientes de valor esperado $1/\mu$.

Por eso el número esperado de clientes atendidos en el mismo intervalo de tiempo t es $E(A(t)) \leq \mu t$.

Por ende el número esperado de clientes en el sistema durante el intervalo de tiempo t es $E(NC_t) \geq \lambda t - \mu t = (\lambda - \mu)t =$ número esperado de llegadas menos número esperado de atendidos.

Si $\lambda > \mu$, cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $E(NC_t)$ tiende a infinito, es decir que la cola crecería indefinidamente sin límite y entonces no existiría régimen estable. En este caso no tiene sentido intentar calcular las probabilidades p_n .

Entonces la condición para que exista un régimen estable es que $\lambda < \mu$, o equivalentemente $\lambda/\mu < 1$. Esta condición puede ser expresada lo como la condición de que la esperanza del tiempo de servicio $1/\mu$ sea menor que el valor esperado del tiempo entre arribos sucesivos $1/\lambda$.

Derivamos ahora los valores de algunas cantidades en términos de las probabilidades estacionarias.

Número esperado de clientes en el sistema¹

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) = \frac{\lambda/\mu}{(1 - \lambda/\mu)^2} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)}$$

Tiempo medio de permanencia en el sistema

$$\bar{t}_s = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Tiempo medio de espera en la fila

$$\bar{t}_f = \bar{t}_s - E(\text{tiempo de servicio}) = \bar{t}_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Número esperado de clientes en la cola

¹aplicamos la siguiente identidad algebraica: $x \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1+x)^2}, |x| < 1$.

Utilizando igualdad de Little: $\bar{v} = \lambda \bar{t}_f = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$

Tiempo de espera en el sistema

El tiempo de espera en el sistema es una variable aleatoria W . En el caso de la fila M/M/1, su distribución es exponencial de tasa ($\mu - \lambda$). Esto nos permite derivar de otra forma el valor de $\bar{t}_s = E(W) = \frac{1}{\mu - \lambda}$

Ejemplo 7.7.1

- a) Supongamos que los clientes llegan según un Proceso Poisson a razón de 1 cada 12 minutos y que el tiempo de atención o servicio es exponencial de tasa un servicio cada 8 minutos. Calculando, tenemos que $\bar{n} = 2$
 $\bar{t}_s = 24$
- b) Aumentamos la tasa de arribos en un 20%. Al calcular, llegamos a $\bar{n} = 4$
 $\bar{t}_s = 40$

Observamos que aumentando un 20 % la tasa de arribo, el número esperado de clientes en el sistema se duplica. Esto sucede porque cuando λ/μ se acerca a 1, un pequeño aumento en la carga del sistema, λ/μ , lleva a una gran disminución en el rendimiento del mismo.

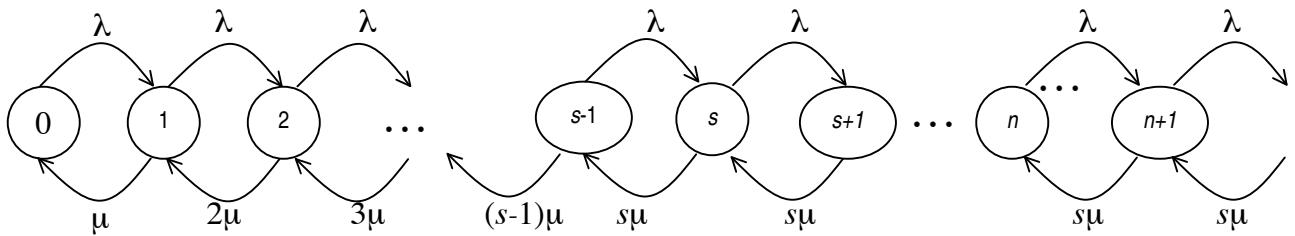
7.7.2 El modelo M/M/s

En este modelo, tanto las tasas de llegadas como los tiempos de servicio de cada servidor son constantes (λ y μ respectivamente). Por lo tanto, podemos decir que $\lambda_n = \lambda$ para todo n . Para expresar los μ_n , debemos tener en cuenta que ellas representan la tasa media de servicio global, es decir de todo el sistema y no de cada servidor por separado, cuando se tiene n clientes en el sistema. Dicha tasa global corresponde al tiempo que demore el servidor que termine primero. Entonces, cuando se tiene n servidores ocupados y cada uno tiene tiempo de servicio exponencial de tasa μ , la tasa global de servicio² es $n\mu$. Es decir,

$$\begin{cases} \mu_n = n\mu & \text{si } n < s \\ \mu_n = s\mu & \text{si } n \geq s \end{cases}$$

² Recordar que si se tiene n V.A. exponenciales **independientes** T_1, \dots, T_n de parámetros μ_1, \dots, μ_n entonces $\min(T_1, \dots, T_n)$ es una V.A. exponencial de parámetro $\sum \mu_i$.

Por tanto, el diagrama de tasas toma la siguiente forma:



Condición de estabilidad

Empleando las condiciones de estabilidad precedentes, podemos deducir que un sistema de este tipo alcanzará un estado estacionario si se cumple la siguiente condición: $\lambda < s\mu$

Distribución estacionaria

En ese caso, la distribución de probabilidades en estado estacionario de cada estado (que se obtiene aplicando las ecuaciones genéricas de la sección anterior) están dadas por:

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{1}{1 - (\lambda/s\mu)} \right]}$$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 \quad \text{si } 0 \leq n \leq s$$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} P_0 \quad \text{si } s \leq n$$

Cantidad esperada de clientes en la fila

$$\bar{v} = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n$$

aplicando la fórmula general de la sección anterior

$$= \sum_{j=0}^{\infty} j P_{j+s}$$

cambio de variable $j = n - s$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{(\lambda/\mu)^{j+s}}{s! s^j} P_0$$

sustituyendo P_n por su valor

$$= \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{\lambda}{s\mu} P_0 \sum_{j=0}^{\infty} j \left(\frac{\lambda}{s\mu} \right)^{j-1}$$

separando los términos independientes de j

$$= \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{\lambda}{s\mu} P_0 \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{s\mu} \right)^2}$$

sabiendo que $\sum_{j=0}^{\infty} j \rho^{j-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$ cuando $\rho < 1$

$$= \frac{P_0(\lambda/\mu)^s(\lambda/s\mu)}{s!\left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)^2} \quad \text{reordenando términos}$$

Tiempo esperado de permanencia en la fila

Aplicando la fórmula genérica, tenemos

$$\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\lambda} = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s(\lambda/s\mu)}{s!\left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)^2} \frac{1}{\lambda}$$

Tiempo esperado de permanencia en el sistema

En este caso no utilizaremos la fórmula genérica. El tiempo de permanencia en el sistema es el tiempo de permanencia en la fila más el tiempo de atención. Por tanto, el tiempo esperado de permanencia en el sistema está dado por

$$\bar{t}_s = \bar{t}_f + \frac{1}{\mu}$$

Cantidad esperada de clientes en el sistema

Utilizando las igualdades de Little y operando, tenemos

$$\bar{n} = \bar{\lambda}t_s = \bar{\lambda}\left(\bar{t}_f + \frac{1}{\mu}\right) = \bar{\lambda}\left(\bar{t}_f + \frac{1}{\mu}\right) = \bar{\lambda}t_f + \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = \bar{v} + \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

Cantidad esperada de servidores ocupados

Utilizando los resultados anteriores para n y v tenemos

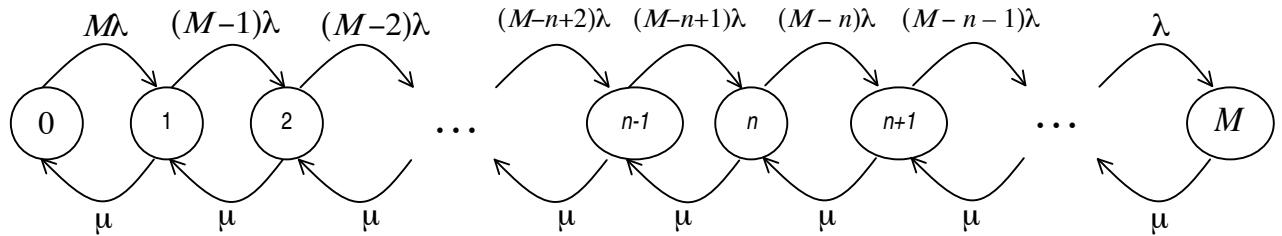
$$\rho = \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

7.7.3 El modelo M/M/1 con fuente de entrada finita

Supongamos ahora que la cantidad de potenciales clientes del sistema es finita. Denotamos con M el tamaño de la población potencial. Por lo tanto, cuando la cantidad de clientes en el sistema es n , la cantidad de clientes fuera del sistema es $M - n$.

El tiempo que transcurre entre una entrada al sistema y la siguiente, tiene una distribución exponencial de parámetro λ . Por lo tanto, cuando hay n clientes en el sistema y $M - n$ fuera, el tiempo hasta la próxima entrada es el mínimo de los $M - n$ tiempos entre entradas (que son exponenciales de parámetro λ); por lo tanto el tiempo hasta la próxima llegada tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda(M - n)$.

La información se resume en el siguiente diagrama de tasas:



Es decir,

$$\begin{aligned}\lambda_n &= (M - n)\lambda && \text{si } n < M \\ \lambda_n &= 0 && \text{si } n \geq M \\ \mu_n &= \mu && \text{para todo } n > 0\end{aligned}$$

Condición de estabilidad

Al ser $\lambda_n = 0$ a partir de $n = M$, el sistema siempre alcanzará un estado estacionario (por propiedades vistas en estabilidad de cadenas de Markov y procesos de nacimiento y muerte).

Distribución estacionaria

Aplicando las ecuaciones genéricas, hallamos la distribución estacionaria del sistema:

$$\begin{aligned}P_0 &= 1 \left/ \sum_{n=0}^M \left[\frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] \right. \\ P_n &= \frac{M!}{(M-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 && \text{para } n = 1, 2, \dots, M-1 \\ P_n &= 0 && \text{para } n \geq M\end{aligned}$$

Cantidad esperada de clientes en la fila

Aplicando la ecuación genérica, tenemos

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \sum_{n=1}^M (n-1)P_n \\ &= \sum_{n=1}^M nP_n - \sum_{n=1}^M P_n && \text{separando los términos} \\ &= \sum_{n=1}^M nP_n - (1 - P_0) && \text{pues } P_1 + \dots + P_M = 1 - P_0 \\ &= M - \frac{\lambda + \mu}{\lambda}(1 - P_0) && \text{Realizando diversas operaciones}\end{aligned}$$

Cantidad esperada de clientes en el sistema

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^M nP_n = \bar{v} + (1 - P_0) = M - \frac{\mu}{\lambda}(1 - P_0)$$

Cantidad esperada de servidores ocupados

Utilizando los resultados anteriores para n y v tenemos $\rho = 1 - P_0$.

Tiempo esperado de permanencia en la fila

Aplicando la ecuación genérica tenemos $\bar{t}_f = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}}$.

Donde

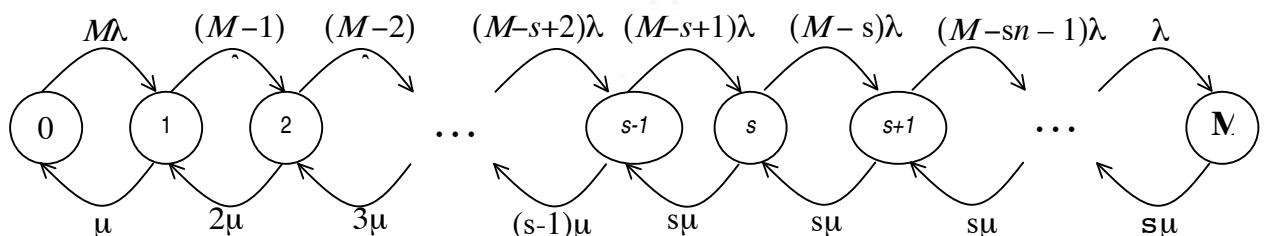
$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda} &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n && \text{aplicando la definición} \\
 &= \sum_{n=0}^M (M-n)\lambda P_n && \text{pues } P_n = (M-n)P_n \text{ cuando } 0 \leq n \leq M \\
 &\quad \text{y } P_n = 0 \text{ en otro caso} \\
 &= \sum_{n=0}^M M\lambda P_n - \sum_{n=0}^M n\lambda P_n && \text{separando términos} \\
 &= M\lambda \sum_{n=0}^M P_n - \lambda \sum_{n=0}^M nP_n && \text{sacando las constantes fuera de la sumatoria} \\
 &= M\lambda - \lambda \bar{n} && \text{por ser } P_0 + \dots + P_M = 1 \\
 &= \lambda(M - \bar{n}) && \text{sacando factor común}
 \end{aligned}$$

Tiempo esperado de permanencia en el sistema

Del mismo modo, tenemos $\bar{t}_s = \frac{\bar{n}}{\bar{\lambda}}$.

7.7.4 El modelo M/M/s con fuente de entrada finita

Supongamos ahora las mismas hipótesis que el caso anterior, pero ahora con s servidores. El diagrama de tasas queda



Es decir,

$$\begin{aligned}
 \lambda_n &= (M - n)\lambda && \text{si } n < M \\
 \lambda_n &= 0 && \text{si } n \geq M \\
 \mu_n &= n\mu && \text{para todo } 0 < n < s \\
 \mu_n &= s\mu && n \geq s
 \end{aligned}$$

Condición de estabilidad

Al igual que para el caso con un solo servidor con fuente de entrada limitada, el sistema siempre alcanzará un estado estacionario, pues el número de estados alcanzables es finito.

Distribución estacionaria

Aplicando las ecuaciones genéricas, hallamos la distribución estacionaria del sistema:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= 1 \left/ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{M!}{(M-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=s}^M \frac{M!}{(M-n)!s!s^{n-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] \right. \\
 P_n &= \frac{M!}{(m-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 && \text{para } 0 \leq n \leq s \\
 P_n &= \frac{M!}{(m-n)!s!s^{n-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 && \text{para } s \leq n \leq M \\
 P_n &= 0 && n > M
 \end{aligned}$$

Los cálculos de las cantidades de interés se realizan de manera similar a los casos anteriores.

7.8 Propiedad PASTA

(Poisson Arrivals See Time Averages) (versión sencilla, sin demostración)

“Para todo sistema de filas de espera en equilibrio, y tal que el proceso de llegada de clientes es un proceso de Poisson, la probabilidad que un cliente al llegar observe al sistema en un estado n dado es igual a la probabilidad asintótica de que el sistema se encuentre en ese estado (p_n)”

Esta propiedad permite calcular diversas medidas. A manera de ejemplo:

- la probabilidad de que un cliente al llegar encuentre el sistema vacío, es igual a la probabilidad de que el sistema esté vacío, p_0 ;
- en un sistema con un número finito de lugares de espera, la probabilidad de que un cliente al llegar sea rechazado es igual a la probabilidad del sistema se encuentre en el estado correspondiente a esa cantidad de clientes en espera.

8. SIMULACIÓN

8.1 Introducción

La palabra simulación es un término genérico que describe muy diferentes tipos de actividades incluyendo: roles que se juegan en la vida social o en experimentos sicológicos, juegos de videos complejos, modelos a escala creados por ingenieros que describen la conducta de puentes o aeropuertos, etc.

Para un computólogo, estadístico, científico o gerente, se refiere a la construcción de un modelo abstracto que representa algún sistema de la vida real, con la subsiguiente descripción a través del tiempo de los pertinentes al sistema como una serie de ecuaciones y relaciones, generalmente a través de un programa de computadora.

Definimos como simulación de sistemas a la exploración de mundos posibles y al estudio del desarrollo en el tiempo de esos mundos.

Recordemos que:

Sistema: es una porción del universo respecto de un observador o colaborador definido (interior o exterior al mismo), compuesta por un conjunto de elementos y relaciones entre los mismos.

Al estudiar un sistema, como observadores, podemos apreciar que hay determinados objetos distintos, llamados entidades. También observamos interacciones entre ellos (que llamamos actividades), las cuales producen cambios en el sistema.

Pero para estudiar realmente un sistema se debe poder experimentar con él y ocurre que no se podrá experimentar con el sistema real siempre que:

- a) el sistema aún no existe (Ej: al planificar alguna facilidad en la producción- ej. redes en creación -, o planificar el abastecimiento de materia prima para un producto nuevo).
- b) la experimentación con el sistema sea muy cara (ej: el modelo permitirá determinar si es cuerto asignar cierta cantidad de dinero en un nuevo equipo).
- c) la experimentación con el sistema sea inapropiada (ej: planificación de las actuaciones ante catástrofes por parte de hospitales, policías y servicio de ambulancias).

En algunos de estos casos es posible construir un prototipo y probarlo. Pero esto puede ser muy costoso, o poco práctico y a veces imposible.

En consecuencia los estudios de los sistemas se realizan con un modelo de los mismos.

8.2 Modelos

Un modelo es el cuerpo de información relativa a un sistema recabado con el fin de estudiarlo, un modelo no es sólo un sustituto del sistema, es también su simplificación.

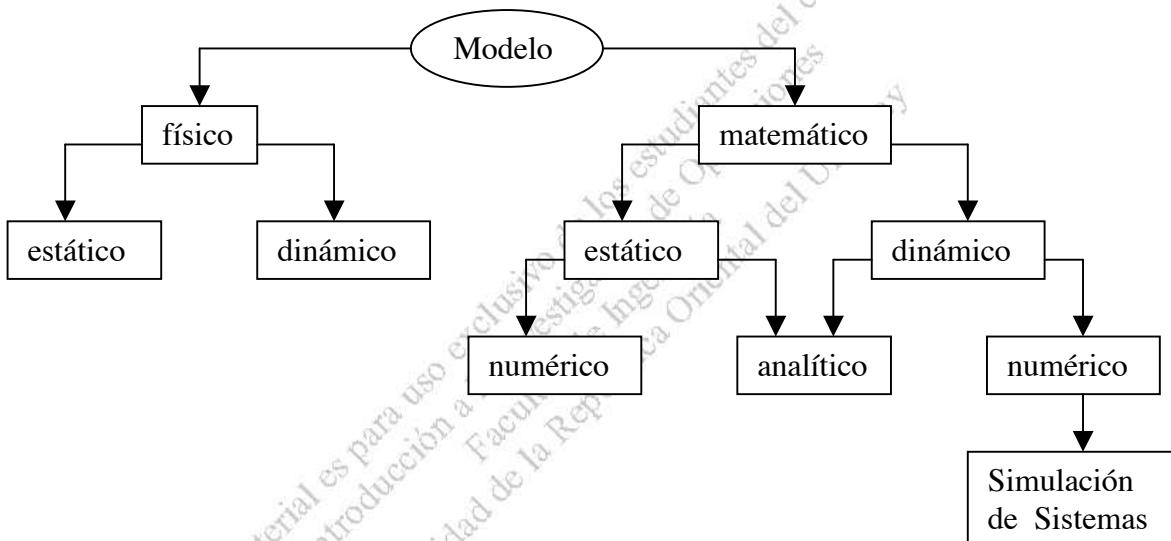
Además no existe un modelo único de un sistema, ya que cada objeto de estudio establecido determinará la naturaleza de la información a reunir.

Existe una gran diversidad en la manera de clasificar los tipos de modelos en el estudio de sistemas.

A veces la clasificación se realiza según la naturaleza del sistema a estudiar, a saber:

- 1) continuo vs. discreto
- 2) determinístico vs. aleatorio.

Consideremos una primera división en modelos físicos y matemáticos:



Esta primera división se realiza para tener en cuenta que un modelo no es necesariamente una descripción matemática del sistema, existen por ejemplo: modelos a escala que se utilizan en los túneles de viento, tanques de agua para estudiar el diseño de naves acuáticas, modelos a escala de cursos de ríos, de puertos (ej: Puerto de la Paloma, estudiado por el IMFIA), diversos tipos de modelos.

La tercera distinción (nivel) se realiza según la técnica empleada para resolver el modelo.

En un modelo matemático, las entidades de un sistema y sus atributos se representan mediante variables y las actividades mediante funciones que interrelacionan las variables (ej. restricciones).

Un modelo estático despliega las relaciones entre los atributos del sistema cuando está en equilibrio, sin mostrar la manera en que cambian los valores de los atributos (no existen actividades).

Un modelo matemático dinámico permite deducir los cambios de los atributos del sistema en función del tiempo y dependiendo de la complejidad del modelo, la deducción puede hacerse con una solución analítica o por cálculo numérico (ej: el comportamiento de la llanta de un auto en movimiento se modela con ecuaciones diferenciales de 2º orden).

Los modelos matemáticos dinámicos que se pueden resolver analíticamente y que dan resultados prácticos aplicables no son del todo comunes. Lo más frecuente es que esos problemas deban resolverse mediante métodos numéricos y la simulación es uno de esos métodos.

Un ejemplo de modelo matemático dinámico es el que describe las condiciones bajo las cuales vibra la estructura de una aeronave, modelo que se puede plantear pero no resolver analíticamente. La cuestión de si habrá o no vibraciones se puede determinar numéricamente calculando las raíces de determinadas ecuaciones asociadas. En este caso los cálculos numéricos no constituyen simulación, ya que el cálculo no sigue el movimiento de la estructura de la aeronave en el tiempo, es sencillamente un procedimiento para determinar las raíces de una ecuación, es un método numérico puro.

Se tratará de simulación si los cálculos tienen en cuenta los cambios producidos en el tiempo, es decir si describimos a través de algún mecanismo la distintas variaciones producidas en determinado intervalo de tiempo.

8.3 Simulación de sistemas

Simulación de sistemas es equivalente a la exploración de mundos posibles. Es una técnica identificada con la resolución simultánea de todas las ecuaciones del modelo con valores continuamente crecientes del tiempo, es decir la técnica de resolver problemas siguiendo los cambios en el tiempo de un modelo dinámico de un sistema.

¿Cómo se enmarca la simulación en la Investigación de Operaciones? La simulación se ha convertido en la rama experimental del área.

Durante el curso se hace hincapié en el planteo y resolución de los modelos matemáticos en forma analítica, ya que por lo general el enfoque analítico es superior al de la simulación en cuanto a la exactitud de la resolución del problema. Sin embargo muchos problemas son tan complejos que no se pueden resolver analíticamente, lo que nos impedirá tomar una decisión. Sólo entonces se deberá recurrir a la simulación, cuando sea el único enfoque práctico del problema.

Se debe destacar que a medida que aparecieron computadoras más rápidas se comenzó a experimentar más y más en la utilización de modelos numéricos y en la simulación hasta que en la actualidad esta técnica se usa en áreas tan diversas como:

- construcción de prototipos de automóviles, aviones, armas de guerra
- medicina
- procesos de producción
- modelos económétricos
- problemas logísticos.

Toma también gran importancia para algunas aplicaciones la simulación gráfica o icónica, la cual, como su nombre indica, no sólo está basada en un modelo numérico matemático que permite obtener los valores que se desea estudiar, sino que permite visualizar el desarrollo de la simulación.

Ventajas de la simulación en computadoras:

- 1) Permite estudiar y experimentar en las complejas relaciones e interacciones que existen y ocurren en el interior de un sistema real.
- 2) Permite experimentar sobre un sistema que puede no existir en la realidad (de otra manera sería imposible) y en este caso asiste a la decisión de construirlo o no.
- 3) Se ahorra mucho tiempo y dinero y se evitan riesgos.
- 4) Se logra independencia de la duración real del evento. Por ejemplo se puede simular procesos muy largos como muy cortos:
 - Estudiar el crecimiento de una cierta planta mediante simulación en poco tiempo, lo que en la realidad puede llevar mas de 400 años.
 - Estudiar las reacciones nucleares que son eventos que ocurren en millonésimas de segundo.
- 5) Se puede estudiar como reacciona el sistema al introducir variantes, sin correr riesgos (estudio de sensibilidad).
- 6) Se puede aplicar para verificar soluciones analíticas (Montecarlo). Ofrece mayor facilidad para estudiar sistemas dinámicos y no determinísticos

8.4 Etapas en el proceso de Simulación de Sistemas

La simulación se puede aplicar a una infinidad de tipos de sistemas lo que produce una amplia variedad en la forma en que se desarrolla su aplicación. A pesar de esta variedad se pueden identificar determinados pasos básicos en un proceso de (estudio de la) simulación, en los que reconocemos los pasos de una metodología científica. Estas etapas, que se enumeran a continuación, no son totalmente secuenciales dado que muchas veces se debe reiterar y volver atrás, realizando nuevamente etapas anteriores.

- 1) FORMULACIÓN DEL PROBLEMA
- 2) PLAN DE ESTUDIO
- 3) FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO
- 4) CONSTRUCCIÓN DEL PROGRAMA EN COMPUTADORA PARA EL MODELO
- 5) VALIDACIÓN DEL MODELO
- 6) DISEÑO DE EXPERIMENTOS
- 7) EJECUCIÓN DE LAS CORRIDAS DE SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los dos primeros pasos parecen obvios pero son de fundamental importancia; no debe comenzarse ningún tipo de simulación sin antes enunciar claramente el problema y los objetivos de su estudio.

Luego podrá establecerse un plan de trabajo que permitirá controlar el desarrollo del trabajo, impidiendo que el estudio se desbalancee concentrándose en algún aspecto del problema a costa de otro.

Un fracaso común en los estudios de simulación es concentrarse demasiado en estas fases y extraer más datos de los necesarios o de los que pueden validarse con los datos disponibles.

En el tercer paso para construir un modelo, debemos

- a) establecer la estructura del modelo, decidiendo cuales son los aspectos significativos del problema en el comportamiento del sistema.
- b) reunir los datos necesarios que proporcionen parámetros correctos para el modelo

El cuarto paso, la construcción de un programa, es una tarea relativamente bien definida y no necesariamente fácil. El modelo establecerá las especificaciones de lo que se debe programar.

En algunas ocasiones, las etapas 3 y 4 pueden realizarse en paralelo.

Se puede contar con lenguajes específicos de simulación que brindan al usuario no solamente el lenguaje en sí, sino también un conjunto de conceptos de modelado que se utilizan para describir el sistema, con herramientas de especificación del mismo, facilitando la conversión del modelo a programa de computadora, e incluso en algunos casos liberando al usuario de mucho detalle de programación, brindando facilidades de generación de código a través de esqueletos estándar.

Simulación Continua: 1130/CSMP, 360 CSMP y DYNAMO.

Simulación a Eventos Discretos: GPSS, SIMSCRIPT, SDL/SIM.

Para ambos: SIMULA, lenguaje nórdico orientado a objetos, que a pesar de su edad, continua siendo el más elegante creado para simular, que engloba varios conceptos de sistemas y modelado, entidad, atributos, actitudes...

Por supuesto que se puede programar simuladores en C++, ADA, PROLOG, MODULA, FORTRAN , PASCAL, etc.

El quinto paso: validación del modelo, requiere una gran cuota de juicio y criterio común, ya que las hipótesis hechas al establecer el modelo deben comprobarse observando si el modelo se comporta como se esperó.

En realidad se debería validar el modelo matemático antes de iniciar la programación, pero generalmente la razón de la simulación es que el modelo no es manejable, entonces por regla general la validación se desarrolla examinando la versión programada del modelo (a la vez que se pueden observar errores de programación).

El sexto paso es el diseño de un conjunto de experimentos de acuerdo a las objetivos del estudio. Una falla común es la obtención de una masa abrumadora de resultados

que se recaban sin plan determinado. Se debe tener en cuenta también el significado estadístico de los resultados ante la presencia de eventos aleatorios en la simulación.

Por último el séptimo paso es ejecutar las corridas planificadas y estudiar o interpretar los resultados.

Si el estudio ha sido bien planificado se habrá planteado un conjunto bien definido de preguntas y el análisis tratará de responderlas. Por supuesto, estas etapas no son del todo secuenciales sino que muchas veces debe volverse atrás y afinar incluso los objetivos e hipótesis planteadas.

8.5 Clasificación de tipos de simulación

La simulación se puede clasificar en tres tipos:

1. Simulación Continua
2. Simulación a eventos discretos
3. Simulación estadística o Método Monte Carlo

- Simulación Continua: modela sistemas continuos, donde el interés primordial son los cambios suaves. Por ejemplo el comportamiento de algunos parásitos (las fluctuaciones en el número de su población con respecto a la población de sus anfitriones), la posición relativa de un conjunto de astros, etc.

Para ello se utilizan conjunto de ecuaciones diferenciales que se resuelven simultáneamente.

- Simulación a eventos discretos: se aplica en sistemas discretos, donde el interés primario está en los eventos, siendo las ecuaciones que los describen ecuaciones lógicas que expresan las condiciones para que ocurra un evento.

La simulación consiste en seguir los cambios en el estado del sistema producidos por la sucesión de eventos.

Un evento describe la ocurrencia de un cambio en un instante de tiempo y por lo tanto puede provocar un cambio en el valor de algún atributo de una entidad o de la entidad en sí (crear o destruir una entidad, iniciar o detener una actividad), lo cual requiere la construcción de un programa que permita seguir la secuencia de eventos.

Llamamos entidad a cualquier objeto de interés en el sistema, atributo denota una propiedad de una entidad, y todo lo que provoque cambios en el sistema se conocerá como actividad del mismo.

El término estado del sistema indica una descripción de todas las entidades, atributos y actividades según su existencia en algún instante del tiempo. El progreso o desarrollo en el tiempo del sistema se estudia siguiendo sus cambios de estado.

Por ello es necesario llevar un registro del paso del tiempo, al que llamamos "tiempo de reloj" que es un número, inicializado en 0 al comienzo de la simulación, y que va indicando cuantas unidades de tiempo simulado han transcurrido desde el comienzo..

Al menos que específicamente se exprese de manera contraria, el término "tiempo de simulación", significa el tiempo del reloj indicado y no el tiempo que ha necesitado la computadora para realizar la simulación (tiempo de cómputo) es más, por lo general, no existe una relación directa entre ambos.

Si simulásemos el sistema operativo de una computadora, en el que los eventos reales ocurren en intervalos medios en fracciones de microsegundos, aunque la realizásemos en una máquina de alta velocidad, notaríamos que la simulación tomaría fácilmente miles de veces más tiempo que la operación real del sistema.

Por otro lado, para la simulación de un sistema económico, en el que se ha estudiado eventos que ocurren una vez al año, es fácil realizar una operación de cien años en unos cuantos minutos de cálculo.

Existen dos métodos para actualizar el tiempo del reloj, a los que llamamos mecanismo de control de flujo de tiempo.

- a) el reloj avanza a la hora en que debe ocurrir el siguiente evento, conocido como mecanismo orientado al evento.
- b) el reloj avanza en intervalos pequeños (generalmente uniformes) y en cada intervalo se determina si debe ocurrir un evento o no, llamado mecanismo orientado a intervalos, usado normalmente en simulación continua.

Ejemplo:

Simulamos la llegada de barcos a un muelle, para contabilizar la cantidad de barcos que llegan a él y su tiempo de espera para atracar.

Comienzo

```
<Max := tiempo del período de simulación>
<Sortear el tiempo de la próxima llegada: T(próx.lleg)>
<Crear una entidad barco, asignarle atributo tiempo de llegada: barco.t(lleg)>
<Reloj := T(próx.lleg)>
```

Mientras reloj < Max

```
    <Actualizar contador de barcos llegados>
    <Actualizar la cola de barcos en espera por muelles según el tiempo
     del Reloj y tomar los datos pertinentes>
    Si <hay algún muelle libre>
        <Quitar el primero de la cola>
        <Calcular tiempo de espera: Reloj-barco.t(lleg)>
        <Sortear tiempo de ocupación del muelle>
        <Ocupar el muelle libre>
```

Si no

```
    <Colocar el barco llegado como último en la cola>
```

Fin si

```
    <Sortear T(próx. lleg)>
```

```
    Reloj := Reloj + T(próx. lleg)
```

Fin mientras

```
<Procesar los resultados (estadísticos) de la corrida>
```

Fin

- Simulación estadística: a veces llamada Método Monte Carlo, es el muestreo de los mundos posibles de nuestro sistema, método que estudiaremos con más detalle.

8.6 Generación de números aleatorios

La generación de valores de variables aleatorias tiene un rol preponderante en el proceso de simulación, para generar variables aleatorias es necesario contar con un generador de números aleatorios.

Los números aleatorios deben tener las siguientes características :

1) Distribución Uniforme. Lo que significa que cualquier número que pertenezca al rango de interés debe tener la misma chance de resultar sorteado.

2) No existe Correlación Serial. Lo que significa que la aparición de un número no afecta de ninguna manera la chance de aparecer de otro número o de sí mismo.

Por ejemplo si un generador de números naturales del 1 al 5 nos entrega la sucesión 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 ... la misma es uniforme pero esta totalmente correlacionada ==> no hay aleatoriedad.

Existen Tests para comprobar que un generador cumpla estas dos condiciones.

Veremos tres formas diferentes de generar números aleatorios:

- 1) Utilización de tablas de números aleatorios.
- 2) Números generados en forma aleatoria.
- 3) Números pseudoaleatorios

8.6.1 Utilización de tablas de números aleatorios

Existen tablas de números aleatorios, las cuales pueden ser cargadas en la memoria de la máquina, en 1955 la compañía RAND (Research & Development) publicó una tabla con un millón de números.

Estas tablas se generan con métodos aleatorios puros como ser ruletas, extracción de números al azar, dados, etc.

Tienen como ventaja el ser números aleatorios puros pero sus desventajas son, entre otras:

- pueden ocupar mucha memoria
- hay que cargar la tabla en memoria
- la sucesión de números es finita

8.6.2 Números generados en forma aleatoria

En base a algún circuito o característica de la máquina se generan números que son totalmente aleatorios.

El método básicamente consiste en interrumpir un proceso uniforme en forma aleatoria (que es esencialmente lo que ocurre cuando la bola cae en un casillero de la ruleta).

Estos métodos tienen la misma ventaja que el primero o sea que se obtienen números aleatorios puros y como desventajas se puede decir que si se desea generar la misma secuencia de números más de una vez, es necesario grabarla puesto que no hay forma de asegurarse de obtener la misma secuencia automáticamente.

Veremos dos ejemplos, uno en base a la utilización de un circuito especial y el otro simplemente con un programa y la participación de un operador.

Ejemplo 1. HARDWARE GENERATOR

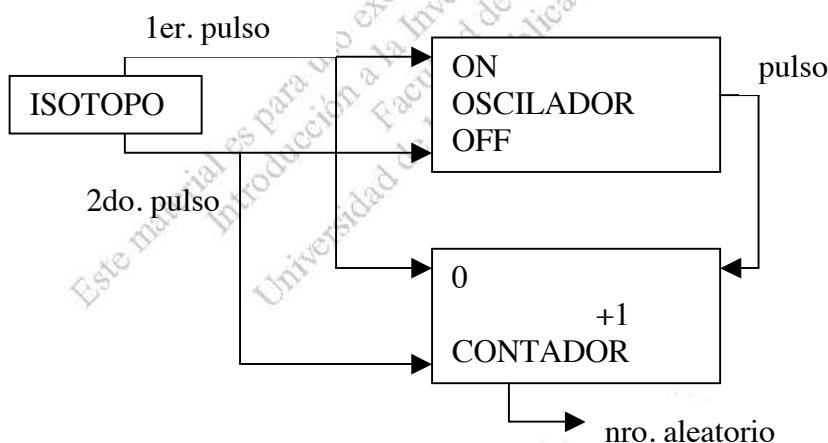
Es una tarjeta que se coloca en el slot de un PC, genera números aleatorios reales y su costo en 1985 era de 600 dólares (lo que representa un costo que no aparece si utilizamos generadores de números pseudoaleatorios).

Funciona de la siguiente forma:

Tiene un oscilador que envía pulsos que son contados por un contador digital.

Los momentos de arranque y parada del oscilador se controlan en forma aleatoria con los pulsos que provee la descarga de un isótopo radioactivo (el primero prende el oscilador y pone el contador en 0, el segundo apaga el oscilador y devuelve el número).

El números de pulsos del oscilador que cuente el contador será el número aleatorio generado.



Ejemplo 2. Programa que al ser interrumpido por el operador entrega un número aleatorio entre 1 y 100.

While not exit

For i:=1 to 100

Char := inkey

If Char= " " then print i

End For

End While

Como la máquina hace más de 1 millón de operaciones por segundo existe una gran disparidad entre el toque de tecla por intermedio del operador el programa y la velocidad con que se ejecuta el loop, por lo que no se podrá gobernar el ritmo, ya que si así fuera el operador podría "manejar" los resultados.

8.6.3 Números pseudoaleatorios

Se generan a través de una fórmula e imitan los valores de una variable aleatoria y cumplen los tests como si fueran esa variable aleatoria.

Se llaman pseudoaleatorios porque se obtienen realizando un conjunto de operaciones sobre el número generado antes (recurrencia) por lo que no son realmente aleatorios según lo expuesto antes. A pesar de esto muchos de los métodos de generación de números pseudoaleatorios se comportan correctamente y pasan todos los tests.

Presenta la gran ventaja de ser un método muy veloz y barato y la mayor desventaja es que son de período finito.

La secuencia de números generados debe cumplir con las 2 hipótesis ya mencionadas:

- 1) Distribución Uniforme
- 2) Independencia (no correlacionados)

y además son importantes los siguientes aspectos :

- a) las subsecuencias también deben cumplir 1) y 2)
- b) deben ser secuencias largas y sin huecos (densas)
- c) algoritmos rápidos y que no ocupen mucha memoria.

Método de Centros de Cuadrados

Este método fue planteado por Von Neumann en 1950. Se basa en tomar un número, elevarlo al cuadrado y tomar los dígitos del centro como nuevo número, luego repetir el procedimiento.

Ejemplo con 4 dígitos : $2061 \rightarrow 4\cancel{2}47721$
 $2477 \rightarrow 6\cancel{1}35529$
 $1355 \rightarrow \dots$

La desventaja es que la secuencia generada por lo general es corta.

El ejemplo anterior luego de 34 números degenera a 0; y si en lugar de empezar con 2061 empezamos con 2500, se repite 2500 en la primer iteración (y por lo tanto, en todas las restantes).

Aún así si se toman números muy largo se puede llegar a secuencias de 100,000 números diferentes.

Método Congruencial Lineal

Este método es el utilizado por excelencia y se basa en la siguiente recurrencia :

$$Z_i = (A * Z_{i-1} + C) \bmod M$$

de donde se deduce que :

$$Z_i = A * Z_{i-1} + C - \lfloor (A * Z_{i-1} + C) / M \rfloor * M$$

(notación: $\lfloor x \rfloor$: mayor entero menor o igual a x)

y se puede demostrar por inducción completa que :

$$Z_n = (Z_0 * A^n + (A^n - 1)/(A - 1) * C) \bmod M$$

Si se quieren obtener número Uniformes (0,1) se normaliza el resultado:

$$U_i = Z_i / M$$

Ejemplos: a) $A = 3, C = 0, M = 5$ y $Z_0 = 4$: $\rightarrow 2,1,3,4,2,1,\dots$

b) $A = 3, C = 0, M = 9$ y $Z_0 = 4$: $\rightarrow 3,0,0,\dots$

Se desprende del ejemplo que en este método si se repite un número ya se repite toda la secuencia.

Presenta la ventaja de gastar poca memoria y ser muy rápido. Además es muy fácil volver a generar la misma secuencia guardando un solo número (alcanza con partir de la misma semilla Z_0).

Es muy importante la elección de las constantes A, C, M y la semilla Z_0 ya sea para la velocidad de generación como sobre todo para el largo de la secuencia.

En la práctica para aumentar la velocidad de cálculo se suele tomar $M=\alpha^\beta$, donde α es el número base de operación de la máquina, por lo que en máquinas binarias $\alpha=2$, esto permite calcular muy fácilmente el resto y efectuar la normalización a $U(0,1)$ operando con desplazamientos y no con divisiones y multiplicaciones.

Con respecto al largo del período de la secuencia siempre será menor o igual a M y es deseable obtener el largo máximo (o sea M) aunque no siempre es posible. Cuando se obtiene largo máximo se dice que el método es de Período Completo.

Se distinguen dos casos según el valor de C.

Si $C = 0$, se llama **MÉTODO CONGRUENCIAL MULTIPLICATIVO PURO**

Si $C \neq 0$, se llama **MÉTODO CONGRUENCIAL MULTIPLICATIVO MIXTO**

8.6.4 Tests o pruebas de Independencia y Uniformidad

Veremos a continuación a manera de ejemplo algunos test que como mencionamos anteriormente se utilizan para comprobar la uniformidad e Independencia de las secuencias de números generados.

Test de χ^2

Este test sirve para probar la uniformidad de la secuencia de los números generados (aunque se puede utilizar para comprobar otras funciones de distribución).

El método consiste en tomar n observaciones independientes de la variable aleatoria (en nuestro caso los números generados) que llamaremos X_1, X_2, \dots, X_n

Se divide el intervalo de variación de la variable aleatoria (V.A.) en K categorías, debiendo conocer la probabilidad P_s de que la v.a. caiga en cada categoría s .

Sea Y_s la cantidad de valores de X_i que caen en la categoría s.

Tenemos entonces :

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = n$$

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$$

Construimos el estimador: $V = \sum_{s=1}^k \frac{(Y_s - nP_s)^2}{nP_s}$

Se puede demostrar que V es una V.A. con distribución χ^2 con $k-1$ grados de libertad para $n \rightarrow \infty$

Se desprende que el n debe ser grande para que el test sea válido y además se debe cumplir que $nP_s > 5$ para todo s.

Para aplicar el método se calcula el valor de V y se analiza el mismo utilizando la tabla de χ^2 (ver por ejemplo el Apéndice 5 del Hillier-Lieberman).

Dado un nivel de significación (por ejemplo 0,05 o 95 %) nos fijamos en la tabla el valor correspondiente a ese nivel y a los $k-1$ grados de libertad. Si V es mayor que el valor crítico fijado en la tabla se rechaza la hipótesis de que la V.A. tenga la distribución en cuestión y sino se acepta.

Para probar que los números estén uniformemente distribuidos planteamos la hipótesis de que tienen distribución uniforme, por lo tanto dividimos el intervalo en K categorías con la probabilidad de caer en cada una igual a $1/K$.

Ejemplo: tomo 10 categorías, 95 % de significación, me fijo en la tabla de χ^2 y el valor crítico es 16,9.

Calculo V, con los Y_i obtenidos contando los 1000 X_i generados con el programa ($n = 1000$) y con $P_s = 1/10$ para todo s.

Si para un caso concreto V resultó ser 3,76 (o sea menor que 16,9) se dice que "se pasa" la prueba y se puede concluir que el programa genera números aleatorios uniformemente distribuidos.

Test Serial

Este test sirve para probar la correlación seria de la secuencia de números observados. Se agrupa la muestra en pares de valores los cuales deben estar distribuidos uniformemente y en forma independiente. La muestra es de $2n$ valores.

Considero las n parejas X_{2j}, X_{2j+1} con $0 \leq j \leq n$:

$$(X_0, X_1) \quad (X_2, X_3) \quad \dots \quad (X_{2n-2}, X_{2n-1})$$

1 2 $n-1$

Cada pareja tiene probabilidad $P(X_{2j}, X_{2j+1}) = 1/K^2$, y tendremos K^2 categorías (que son la cantidad de combinaciones posibles de las parejas de valores).

Se aplica el test de χ^2 con K^2-1 grados de libertad con el mismo criterio que definimos anteriormente.

Aplicando el método al mismo ejemplo que tomamos en la sección anterior se calcula el V pero ahora tendremos $10^2 = 100$ categorías y cada una con $P_s = 1/100$.

8.7 Generación de variables aleatorias

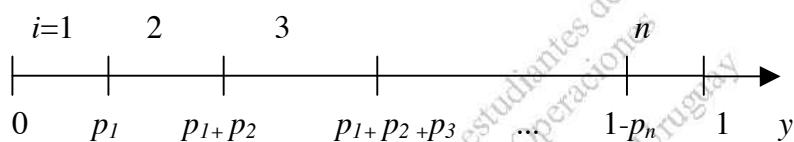
Ahora pasemos a ver como sortear variables aleatorias discretas y continuas.

Llamamos sorteo de la v.a. X al proceso de determinación de un valor de esta v.a. X , mediante la transformación de varios valores de otra v.a. u , uniformemente distribuida en el intervalo $U(0,1)$ llamada esta última: semilla del sorteo, generadas con algunos de los métodos de la sección anterior.

8.7.1 Generación de variables aleatorias discretas

Consideramos la v.a X , cuyos valores posibles son x_1, x_2, \dots, x_n con probabilidad respectiva p_1, p_2, \dots, p_n (por lo tanto $\sum_{i=1}^n p_i = 1$).

Dividimos un intervalo $0 < y < 1$ en intervalos de longitud p_1, p_2, \dots, p_n :



de tal modo que al intervalo i le corresponden aquellos valores x_i que cumplen:

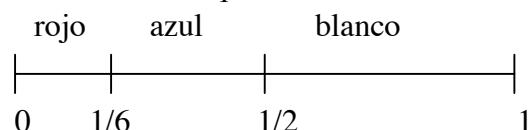
$$\sum_{j=1}^{i-1} p_j \leq x_i \leq \sum_{j=1}^i p_j$$

entonces cada vez que realicemos un experimento para sortear X , tomamos un valor u de distribución $U(0,1)$ y construimos el punto $y=u$. Si este punto aparece en el intervalo correspondiente al número i aceptamos que $X=x_i$ en este sorteo.

La validez de este método se debe a que al estar u uniformemente distribuida en $[0,1]$ la probabilidad de que u pertenezca a uno de los intervalos es igual a la longitud del mismo.

$$\begin{aligned} P(0 \leq u \leq p_1) &= p_1 \\ P(p_1 \leq u \leq p_1 + p_2) &= p_2 \\ &\vdots \\ P(1 - p_{n-1} \leq u \leq 1) &= p_n \end{aligned}$$

Ejemplo: Una V.A. X puede tomar los valores : rojo con prob. $1/6$, azul con prob. $1/3$ y blanco con prob. $1/2$. Armo el esquema:



Sorteo $u =$	0,1212	$X =$ rojo
	0,9432	blanco
	0,6111	blanco

0,4343 azul

Generación de variables aleatorias con distribución Geométrica

Se define la V.A. X con distribución geométrica donde X es el número de pruebas de Bernoulli (experimento con solo 2 resultados que llamaremos éxito o fracaso) con éxito antes de que ocurra un fracaso en la prueba $(X+1)$ -ésima. La v.a. X tiene la siguiente ley de probabilidad :

$$P(X = a) = p^a(1 - p)^{a-1} \quad \text{donde } p \text{ es la probabilidad de éxito y } (1-p) \text{ la de fracaso.}$$

Se puede generar una V.A. geométrica con el siguiente algoritmo :

- 1) $i := 0$
- 2) Generar u , v.a. $U(0,1)$
- 3) Si $u \leq p$ hacer $i := i + 1$ e ir al paso 2
Sino devolver i como la V.A. geométrica de parámetro p

8.7.2 Generación de variables aleatorias continuas

Veremos algunos métodos para la generación de v.a. genéricas y algún ejemplo de v.a. particulares.

El Método de la Transformación Inversa

Se utiliza para generar v.a. continuas.

Para generar una v.a. X con distribución $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$, tomamos una v.a U de distribución uniforme $U(0,1)$ y hacemos $X = F_X^{-1}(U)$.

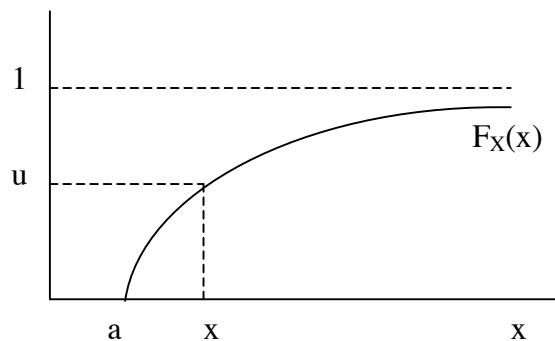
Calculando, vemos que $P(X \leq x) = P[F_X^{-1}(U) \leq x] = P[U \leq F_X(x)] = F_X(x)$, es decir que la v.a. X generada de esta manera posee la distribución deseada.

En resumen el método consiste en igualar la función de distribución a una V.A. U uniforme $(0,1)$ y poder despejar X en función de U , como ya sabemos como generar las V.A. $U(0,1)$, teniendo las mismas generamos las X deseadas.

$$U = F_X(x) \Rightarrow X = F_X^{-1}(U)$$

El problema se reduce a encontrar una expresión analítica de la función inversa a la de distribución. Esto no necesariamente es una tarea sencilla, aunque siempre existe solución dado que la derivada de F_X es f_X , que es siempre ≥ 0 y monótona creciente. Otro problema con el enfoque es el hecho de que aun cuando se encuentre la expresión analítica de la inversa de la distribución, su cálculo puede insumir demasiados recursos.

Interpretación Geométrica :



Ejemplo: Distribución Uniforme $U(a,b)$

$F_X(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt$; entonces se toma $u = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt$; integrando llegamos a $u = \frac{x-a}{b-a} \Rightarrow x = a + u(b-a)$, donde x será una v.a. $U(a,b)$ si tomamos u una v.a. $U(0,1)$ (que puede ser obtenida a partir de un número seudoaleatorio, generado con los métodos vistos en la sección 2).

Ejemplo: Distribución Exponencial de parámetro a .

$$F_X(x) = 1 - e^{-ax}$$

Tomamos $u = 1 - e^{-ax} \Rightarrow e^{-ax} = 1 - u \Rightarrow -ax = \ln(1-u) \Rightarrow x = -(1/a)\ln(u)$ ya que tomar la V.A. $1-u$ es lo mismo que u (porque u es $U(0,1)$).

Entonces $x = -(1/a)\ln(u)$ es una v.a. exponencial de parámetro a con u v.a.. $U(0,1)$ que se genera con uno de los métodos vistos en la sección 2.

Generación de variables aleatorias con distribución Normal(0,1)

X es una V.A. con distribución $N(0,1)$ si su función de densidad $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Describiremos el método Polar para la generación de v.a. $N(0,1)$, ya que la función de distribución de una v.a. normal no tiene inversa de resolución analítica.

1) Sean u_1 y u_2 v.a. de distribución $U(0,1)$; definimos

$$v_1 = 2u_1 - 1$$

$$v_2 = 2u_2 - 1$$

$$s = v_1^2 + v_2^2$$

2) Si $s \geq 1$ vuelvo a 1

Si no tomo $x_1 = v_1 \left(\sqrt{-2 \ln(s)} \right) / 2$, que son v.a. $N(0,1)$.

El método genera 2 v.a. por vez y se llama Polar porque es equivalente a hacer:

Generar $R \sim U(0,1)$, $\Theta \sim U(0,2\pi)$ y tomar

$$x_1 = \sqrt{-2R \ln(R^2)} \cos \Theta$$

$$x_2 = \sqrt{-2R \ln(R^2)} \sin \Theta$$

Teniendo una v.a. X que sea $N(0,1)$ se pasa directamente a una Y que es $N(a,\sigma^2)$

con densidad $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(y-a)^2/2\sigma^2}$, tomando $y = x\sigma + a$ es $N(a,\sigma^2)$.

Resumiendo, en una simulación se toman muestras de distribuciones para proveer a las actividades de tiempos reales, y establecer criterios realistas de decisión.

Puede usarse muchas distribuciones diferentes; muchas veces es necesario hacer hipótesis sobre a qué distribución corresponden los eventos que se estudian, esto debe ser realizado con especial cuidado, basando la elección de las distribuciones y los valores de sus parámetros en información recogida o brindada por las personas que trabajan con el sistema real a simular.

8.8 Método Montecarlo

Los primeros experimentos de simulación se realizaron en el año 1940 en EEUU bajo el nombre de análisis MonteCarlo. Los pioneros fueron Von Neumann y Ulam que publicaron un artículo intitulado "The MonteCarlo method" en 1949.

Las primeras aplicaciones realizadas fueron en el campo bélico (2da guerra mundial) para el estudio de la bomba atómica y las armas nucleares, estudiando el comportamiento aleatorio de los neutrones y su difusión.

El método en si ya era conocido en estadística, disciplina donde muchos problemas se resuelven utilizando muestras aleatorias (de hecho, aplicando este método).

Entonces podemos definir el método MonteCarlo como el método numérico de simulación que permite resolver problemas matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias.

El nombre proviene del principado de Mónaco, ya que el aparato más sencillo para obtener valores aleatorios es la ruleta.

Propiedades y características importantes del M.M.C.

1) algoritmo de estructura muy sencilla.

Como regla se elabora primero un programa para la realización de una prueba aleatoria (una muestra, por ejemplo: escoger un punto aleatorio en una superficie, y comprobar si ese punto pertenece o no a una figura de la superficie). Esta prueba se repite N veces de modo que cada experimento sea independiente de los restantes, y se toma la media de todos los resultados de los experimentos.

2) El error del valor obtenido es como regla proporcional a la magnitud $\sqrt{\sigma^2 / N}$ siendo σ^2 la varianza (constante) y N el número de pruebas. De esta forma, para disminuir el error 10 veces deberemos aumentar N (volumen de trabajo) 100 veces.

Es de notar que es imposible alcanzar una elevada exactitud, por eso el Método Monte Carlo resulta especialmente eficaz en la solución de problemas en los que se necesita conocer los resultados con una exactitud del 5 al 10% (intervalo de confianza 95%, 97,5%). La exactitud de los resultados se puede mejorar con técnicas de reducción de varianza, sin tener que aumentar el volumen de trabajo (N).

Un mismo problema puede ser resuelto utilizando distintas variantes del método, es decir mediante la simulación de distintas variables aleatorias.

El método es aplicable en situaciones de diversa índole:

a) Problemas aleatorios diversos, orientados a eventos o no.

Se resuelven creando un modelo probabilístico artificial, que cumpla con las leyes de probabilidad que se dan en el sistema real.

Ejemplos:

- estudio de la demanda de energía eléctrica en un cierto período: depende de factores puramente aleatorios, como el clima
- juegos de azar
- estudio de la cantidad de barcos llegados a un puerto por día

b) Problemas matemáticos determinísticos.

Cuando los problemas determinísticos son imposibles de resolver analíticamente o muy complicados se puede llegar a una solución aproximada mediante el uso de un modelo artificial cuyas funciones de distribución y densidad satisfagan las relaciones funcionales del problema determinístico.

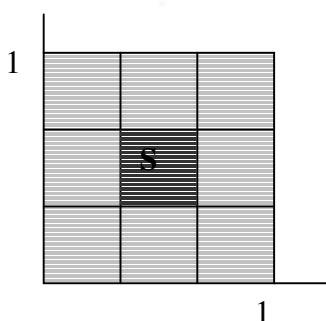
Ejemplos:

- cálculo de integrales múltiples
- ecuaciones diferenciales de orden mayor que dos.

Por ello se puede hablar del MMC como un método universal de resolución de problemas matemáticos.

Utilicemos el método para calcular el **área de un cuadrado** de lado <1.

Planteamos un experimento aleatorio tal que colocamos una tabla como en la figura:



y hacemos que alguien con los ojos vendados tire dardos a la tabla.

Los dardos van a perforar la tabla en N puntos aleatorios. ¿Cómo podemos estimar el área del cuadrado S a partir de esos puntos?

Nos fijamos cuántos puntos están dentro de S (sean N'); supongamos que $N'=5$, siendo $N=40$. Entonces la estimación del área de S está dada por $N'/N=5/40=1/8=0,125$, siendo el valor exacto en este dibujo $0,3*0,3=0,09$.

Nótese que el área buscada cumple la relación N'/N (independiente de la forma del área incógnita) y que cuanto mayor sea N más nos vamos a acercar a la relación S/1.

Para que este método de calcular el área tenga validez, los puntos aleatorios deben estar distribuidos en forma uniforme en la superficie total, y deben ser obtenidos en forma independiente.

Cálculo de π

Veremos, a modo de ejemplo, como calcular una aproximación del valor π , mediante el método MonteCarlo (este problema tiene soluciones eficientes en forma analítica o numérica).

- 1) Tomamos un círculo de radio 1 centrado en el origen, sabemos que el área del cuarto de círculo inscrito en el ortante positivo es $\pi/4$.
- 2) Sorteamos puntos en el ortante positivo de lado 1 y lo hacemos obteniendo dos valores, uno para x (abscisa) y otro para y (ordenada) cada vez, obteniendo un punto (x,y).
- 3) Contamos cuantos puntos de los sorteados caen dentro del área del cuarto de círculo (In) y cuántos fuera (Out), sabiendo que si $x^2+y^2>1$ el punto está fuera, y si no dentro.
- 4) El valor estimado del área que queremos hallar es $In/(In+Out)$, y ese valor será aproximadamente el de $\pi/4$, por lo que π será aproximadamente igual a $4*In/(In+Out)$ (en este caso, $N=In+Out$).

Esta forma de calcular π es relativamente lenta y poco precisa, pero muestra la forma de utilizar MonteCarlo, que en el caso de otras constantes es el único método disponible.

Justificación teórica

Sea X una v.a. con esperanza $E(X) = m$ y varianza $Var(X) = \sigma^2$. Tomo una sucesión de n v.a. X_i independientes y con igual distribución , siendo $E(X_i) = m$ y $Var(X_i) = \sigma^2$.

Por el teorema Central del Límite la v.a. $Z = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ se aproxima (y es asintóticamente igual) a una v.a. con distribución normal $N(nm, n\sigma^2)$.

Aplicando la "regla de las 3σ ", tenemos que para una v.a. Y de distribución $N(a, \sigma^2)$:

$$\int_{a-3\sigma}^{a+3\sigma} f_Y(t)dt = 0,997$$

siendo $f_Y(t)$ la función de densidad de la v.a. Y , por lo que $P(a - 3\sigma \leq Y \leq a + 3\sigma) \approx 0,997$.

Aplicando esto a la V.A. Z tenemos :

$$\begin{aligned} P(Nm - 3\sigma\sqrt{N} \leq Z \leq Nm + 3\sigma\sqrt{N}) &\approx 0,997 \\ P(m - 3\sigma/\sqrt{N} \leq Z/N \leq m + 3\sigma/\sqrt{N}) &\approx 0,997 \\ P(-3\sigma/\sqrt{N} \leq Z/N - m \leq 3\sigma/\sqrt{N}) &\approx 0,997 \\ P(|Z/N - m| \leq 3\sigma/\sqrt{N}) &\approx 0,997 \\ P\left(\left|\sum X_i/N - m\right| \leq 3\sigma/\sqrt{N}\right) &\approx 0,997 \end{aligned}$$

Lo que significa que podemos estimar m , es decir la esperanza o valor medio de la v.a. X , calculando el promedio de las distintas muestras obtenidas: $(\sum X_i)/N$, sabiendo que con probabilidad muy cercana a 1, el error de este promedio está acotado por la cifra $3\sigma/\sqrt{N}$. Esto sugiere que para que el método tenga un buen resultado N debe ser grande y σ pequeña, por lo que es importante saber cual es el valor de la varianza obtenida, con ello sabemos cuál es la dispersión de las muestras obtenidas.

La varianza σ^2 se estima con el siguiente cálculo:

$$Var(X) \approx \frac{1}{N-1} \left(\sum_{j=1}^N (X_j)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N X_j \right)^2 \right)$$

Se debe tener especial cuidado en que todas las N corridas sean independientes entre sí, para asegurar que los valores X_i son muestras de v.a. independientes y que por lo tanto estamos dentro de las hipótesis del teorema central del límite.

Esta independencia se asegura utilizando distintas semillas en el sorteo de las v.a. X_i , de acuerdo a lo visto en las secciones anteriores.