Método de las potencias

La resolución de sistemas por métodos iterativos, el estudio de la dinámica de una población y, en general, los problemas donde se obtiene la solución mediante una formulación recurrente del tipo

$$\text{Dado} \qquad x^{(0)},\ x^{(k+1)} = Ax^{(k)} \qquad \text{con} \quad k \in \mathbb{N}$$

con A una matriz cuadrada, requieren conocer cuál es el valor propio de A de mayor

valor absoluto, lo que denominaremos valor propio dominante.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de la matriz A. Entonces, λ_1 es el valor propio dominante si se cumple que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$$

Conocer el valor propio dominante permite analizar qué va a suceder a medio y largo plazo con $x^{(k)}$.

Si λ es valor propio de A (supongamos el v.p. dominante) y x un vector propio

asociado, entonces se cumple la implicación

$$Av = \lambda v \Rightarrow A^n v = \lambda^n v$$

Por tanto, se puede predecir el comportamiento de $x^{(n)}$ a partir del que tiene $\lambda^n v$, esto depende de a qué tiende λ^n.

El método de las potencias nos va a proporcionar dos sucesiones

$$\{x^{(k)}\}_{k \in N} \qquad \text{y} \qquad \{\lambda^{(k)}\}_{k \in N}$$

tales que, bajo determinadas condiciones, $\lambda^{(k)} \to \lambda_1$.

¿cómo se obtienen esas sucesiones?

Tomamos un vector inicial $x^{(0)}$ y a partir de él los vectores de la sucesión $\{x^{(k)}\}$ con $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_j^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ y la de escalares $\{\lambda^{(k)}\}$ se obtienen según se indica

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} \qquad \lambda^{(1)} = \frac{x_j^{(1)}}{x_j^{(0)}},\ \text{con } x_j^{(0)} \neq 0$$

$$x^{(2)} = Ax^{(1)} \qquad \lambda^{(2)} = \frac{x_j^{(2)}}{x_j^{(1)}},\ \text{con } x_j^{(1)} \neq 0$$

$$x^{(3)} = Ax^{(2)} \qquad \lambda^{(3)} = \frac{x_j^{(3)}}{x_j^{(2)}},\ \text{con } x_j^{(2)} \neq 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)} \qquad \lambda^{(k)} = \frac{x_j^{(k)}}{x_j^{(k-1)}},\ \text{con } x_j^{(k-1)} \neq 0$$

Los vectores $x^{(k)}$ y escalares $\lambda^{(k)}$ se recogen en una tabla tal como indicamos etapas que recogemos en una tabla

Etapa k	$x^{(k)}$ (por filas)	$\lambda^{(k)}$
0	$x^{(0)}$	-
1	$x^{(1)} = Ax^{(0)}$	$\lambda^{(1)} = \frac{x_j^{(1)}}{x_j^{(0)}}$
2	$x^{(2)} = Ax^{(1)}$	$\lambda^{(2)} = \frac{x_j^{(2)}}{x_j^{(1)}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$	$\lambda^{(k)} = \frac{x_j^{(k)}}{x_j^{(k-1)}}$

Se hacen las etapas necesarias para ver a qué tiende la sucesión $\{\lambda^{(k)}\}$.

Ejemplo

Sea la matriz A= $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ y el vector $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aplique el método de las potencias para aproximar el valor propio dominante

Solución:

Nota: Los valores propios de la matriz propuesta son $\lambda = 1,3$ y 6 y sus respectivos vectores propios son $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aplicamos el método de las potencias

k	$x^{(k)}$	$\lambda^{(k)}$
0	$(1,0,0)$	$-$
1	$(4,-1,1)$	$\lambda^{(1)}=\frac{4}{1}$
2	$(18,-9,9)$	$\lambda^{(2)}=\frac{18}{4}=4.5$
3	$(90,-63,63)$	$\lambda^{(3)}=\frac{90}{18}=5.0$
4	$(486,-405,405)$	$\lambda^{(4)}=\frac{486}{90}=5.4$
5	$(2754,-2511,2511)$	$\lambda^{(5)}=\frac{2754}{486}=5.6667$
6	$(16\,038,-15\,309,15\,309)$	$\lambda^{(6)}=\frac{16\,038}{2754}=5.8235$
7	$(94\,770,-92\,583,92\,583)$	$\lambda^{(7)}=\frac{94\,770}{16\,038}=5.9091$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Parece que el valor propio dominante va a ser $\lambda = 6$ y su vector propio asociado $(94\,770,-92\,583,92\,583)^t = \frac{1}{92583}(1.0236,-1,1)^t$, luego el vector $(1,-1,1)^t$ que es "proporcional" a $x^{(7)}$ salvo redondeos, es vector propio asociado al mismo valor propio $\lambda = 6$.

Este método tiene varios inconvenientes, el primero es que en cada etapa, hay que vigilar que $x_j^{(k)}$ sea distinto de cero, pues en la siguiente etapa tenemos que dividir por él. Si $x_j^{(k)} = 0$ hay que tomar otra componente del vector $x^{(k)}$ que sea distinta de cero para seguir elaborando la tabla y así cada vez que se anule la opción elegida.

El otro inconveniente es que las componentes de los vectores pueden aumentar de forma exagerada o bien tender a cero con lo que la manipulación de las coordenadas puede producir errores en los cálculos.

Para evitar este problema se propone un segundo método de las potencias, llamado Método de las potencias normalizado.

Método de las potencias normalizado

Un vector x se dice normalizado si su componente de máximo valor absoluto es 1. Normalizar un vector consiste en dividir el vector por el máximo valor absoluto de sus componentes

$$x \text{ no normalizado} \Rightarrow y = \frac{1}{|x_i|}x \text{ es normalizado, con } |x_i| = máx\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\}$$

En el método de la potencias normalizado se forman dos sucesiones de vectores y una de escalares

k	$y^{(k-1)}$	$x^{(k)}$	$\lambda^{(k)}$
1	$y^{(0)} = \frac{1}{\lvert x_{i_0} \rvert} x^{(0)}$	$x^{(1)} = Ay^{(0)}$	$x_{i_1}^{(1)}$
2	$y^{(1)} = \frac{1}{\lvert x_{i_1} \rvert} x^{(1)}$	$x^{(2)} = Ay^{(1)}$	$x_{i_2}^{(2)}$
3	$y^{(2)} = \frac{1}{\lvert x_{i_2} \rvert} x^{(2)}$	$x^{(3)} = Ay^{(2)}$	$x_{i_3}^{(3)}$
4	$y^{(3)} = \frac{1}{\lvert x_{i_3} \rvert} x^{(3)}$	$x^{(4)} = Ay^{(3)}$	$x_{i_4}^{(4)}$
		$\vdots$	$\vdots$
k	$y^{(1)} = \frac{1}{\lvert x_{i_{k-1}} \rvert} x^{(1)}$	$x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$	$x_{i_k}^{(k)}$

$$\{x^{(k)}\}_{k\in N} \ ,\{y^{(k)}\}_{k\in N} \ \text{ y } \ \{\lambda^{(k)}\}_{k\in N}$$

siguiendo el proceso:

Dado un vector inicial $x^{(0)}$, se toma su normalizado $y^{(0)}$ y $\lambda^{(0)}$ es la componente del vector $x^{(0)}$ de máximo valor absoluto

k	$y^{(k-1)}$	$x^{(k)}$	$\lambda^{(k)}$
1	$y^{(0)} = \frac{1}{\lvert x_{i_0}^{(0)} \rvert} x^{(0)}$	$x^{(1)} = Ay^{(0)}$	$x_{i_1}^{(1)}$=componente de máximo valor absoluto en $x^{(1)}$
2	$y^{(1)} = \frac{1}{\lvert x_{i_1}^{(1)} \rvert} x^{(1)}$	$x^{(2)} = Ay^{(1)}$	$x_{i_2}^{(2)}$=componente de máximo valor absoluto en $x^{(2)}$
3	$y^{(2)} = \frac{1}{\lvert x_{i_2}^{(2)} \rvert} x^{(2)}$	$x^{(3)} = Ay^{(2)}$	$x_{i_3}^{(3)}$=componente de máximo valor absoluto en $x^{(3)}$
4	$y^{(3)} = \frac{1}{\lvert x_{i_3}^{(3)} \rvert} x^{(3)}$	$x^{(4)} = Ay^{(3)}$	$x_{i_4}^{(4)}$=componente de máximo valor absoluto en $x^{(4)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$y^{(k-1)} = \frac{1}{\lvert x_{i_{k-1}}^{(k-1)} \rvert} x^{(k-1)}$	$x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$	$x_{i_k}^{(k)}$=componente de máximo valor absoluto en $x^{(k)}$

donde $x_{i_p}^{(p)}$ es la componente de mayor valor absoluto del vector $x^{(p)}$.

Ejemplo

Aproxime el valor propio dominante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ aplicando el método de las potencias normalizado, partiendo del vector $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución.