

ALN - SVD

CeCal – In. Co.
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

■ Índice

- Definición
- Propiedades de SVD
- Ejemplo de SVD
- Métodos para calcular SVD
- Aplicaciones de SVD

■ Repaso de matrices:

- Una matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ es Unitaria si sus columnas forman una **base ortonormal** de vectores de \mathbb{C}^m .
- Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es Ortogonal si sus columnas forman una **base ortogonal** de vectores de \mathbb{R}^m .
- La inversa de una matriz unitaria es igual a su transpuesta
- Las transformaciones por matrices unitarias conservan la norma y el producto escalar

Definición SVD

- Sea m, n enteros positivos y $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Entonces una descomposición en valores singulares de A , es una factorización

$$A = U \Sigma V^H$$

Tal que $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ y $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ son unitarias

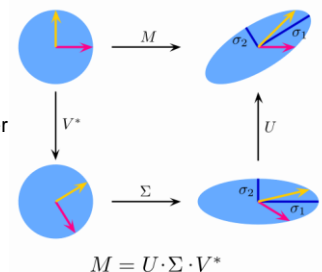
Σ es diagonal de tamaño $m \times n$.

Definición SVD (Cont.)

- Los elementos no nulos de la diagonal de Σ son los **VALORES SINGULARES** de la matriz A
- Se denotan como σ_i
- A los vectores u_1, \dots, u_m y v_1, \dots, v_n que forman las columnas de U y V respectivamente, se les llama: vectores singulares de A por la izquierda y por la derecha.
- Si A tiene entradas reales se cambia "matriz unitaria" por "matriz ortogonal"

■ Gráficamente

- Las transformaciones unitarias no afectan la norma de los vectores (son rotaciones).
- En la figura se puede ver el efecto de aplicar la matriz M al círculo unidad.
- Luego se muestra cómo llegar a M desde el círculo unidad a través de la SVD.



Teorema de SVD

- Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ admite una descomposición en valores singulares.
- Además, los valores singulares están determinados en forma única.

Propiedades valores singulares

- Los valores singulares $\neq 0$ de $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ son las raíces cuadradas positivas de los **valores propios** $\neq 0$ de $A^H A$ y también de los de $A A^H$ (Si estamos en los reales A^H pasa a ser A^T)

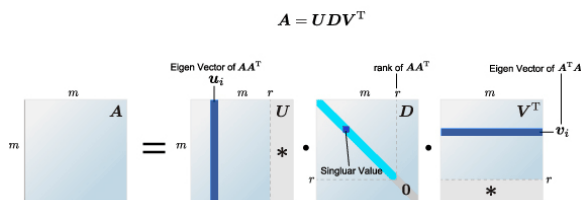
□ Dem:

□ $A = U \Sigma V^t$

$$A^t A = V \Sigma^t U^t U \Sigma V^t = V (\Sigma^t \Sigma) V^t$$

$$A A^t = U \Sigma V^t V \Sigma^t U^t = U (\Sigma \Sigma^t) U^t$$

Propiedades valores singulares



Propiedades de valores singulares (cont)

- $\text{rang}(A)$ = cantidad de valores singulares de A distintos de 0
- El valor absoluto de $\det(A) = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_n$ siendo A cuadrada de tamaño n
- Si $\sigma_n \neq 0$ entonces σ_1/σ_n es el número de condición de la matriz

Propiedades valores singulares (cont)

- Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es invertible y $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$ son sus valores singulares. Entonces los valores singulares de A^{-1} son $\frac{1}{\sigma_n} \geq \dots \geq \frac{1}{\sigma_1}$

Propiedades valores singulares (cont)

- Todo elemento de la diagonal σ_i cumple

$$A u_i = \sigma_i v_i \quad A^T v_i = \sigma_i u_i$$

- Siendo u_i la columna U correspondiente a σ_i
- Siendo v_i la columna V correspondiente a σ_i

Propiedades valores singulares (cont)

- $A = U \Sigma V^H$ es una descomposición de A en valores singulares y $\text{rang}(A) = r$,

$$\text{entonces } A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^H$$

u y v son los vectores columna de U y V respectivamente

Propiedades valores singulares (cont)

- La descomposición se puede representar como la suma de r matrices de rango 1.
- Este término $\sigma_i u_i v_i^H$ es conocido también como tripleta singular.
- El rango de la matriz A, nos da el máximo número de tripletas necesarias.

Aproximación de A por A_k

- A_k es la mejor aproximación de A, para cualquier norma unitariamente invariante

- La norma 2 es unitariamente invariante

Teorema:

- Dada la SVD de A con rango r , $p = \min(m, n)$ y $r < p$

- Sea: $A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$ con $k < r$

$$\text{Entonces } \min_{\text{rang}(B) \leq k} \|A - B\|_F^2 = \|A - A_k\|_F^2 = \sigma_{k+1}^2 + \dots + \sigma_p^2$$

Métodos para calcular SVD en matrices densas

- El método de Golub - Kahan – Reinsch
- Es un método eficaz basado en la iteración QR.
- Se divide en 2 fases.

Método de Golub - Kahan – Reinsch – Primera fase

Primera fase

- Se trata de reducir la matriz A a una bidiagonal mediante transformaciones ortogonales de Householder.

$$Q_B^T A \Pi_B = B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} d_1 & f_2 & & & \\ & d_2 & f_3 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & f_n \\ & & & & d_n \end{bmatrix}$$

Método de Golub - Kahan – Reinsch – Primera fase

- $Q_B = Q_1 \dots Q_n \in \mathfrak{R}^{m \times m}$
- $\Pi_B = \Pi_1 \dots \Pi_{n-2} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$

Método de Golub - Kahan – Reinsch – Segunda fase

- Una vez bidiagonalizada la matriz A se hacen 0 los elementos que no están en la diagonal principal con un algoritmo que obtenga

$$Q_S^T B_1 \Pi_S = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

- Q_S y Π_S son matrices ortogonales de $n \times n$

Método de Golub - Kahan – Reinsch – Segunda fase

- La descomposición en valores singulares de A es

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T$$

Donde: $U = Q_B \text{diag}(Q_S, I_{m-n})$

$$V = \Pi_B \Pi_S$$

Método de Golub - Kahan – Reinsch – Segunda fase

- Para obtener los valores singulares de la matriz bidiagonal B_1 , se procede iterativamente

$$B_{K+1} = U_K^T B_K V_K$$

- U_K y V_K son ortogonales

Otros métodos

- A partir de la primer propiedad presentada, (los valores singulares son iguales a las raíces cuadradas de los valores propios no nulos de $A^T A$)
- Se pueden usar otros métodos iterativos

Otros métodos (cont)

- En vez de calcular los valores singulares directamente, se podría calcular los valores propios de una nueva matriz que sea $B = A^T A$
- Tiene un costo extra (el cálculo de $A^T A$)
- Usando bibliotecas como BLAS o LAPACK, estas operaciones están optimizadas

Observaciones sobre estos métodos

- No son óptimas para matrices grandes o matrices dispersas.
- En estos métodos se aplican a transformaciones ortogonales (de semejanza), como Householder o Givens (sobre una matriz dispersa).
- Al emplear esas transformaciones, se incurre en fill-in de la matriz.

Observaciones sobre estos métodos

- Requieren mucha cantidad de memoria para su almacenamiento
- Computan todas las tripletas, cuando a veces sólo se desean unas pocas de las tripletas más grandes
 - O valores propios

Métodos SVD matrices dispersas

- SISVD (Subspace Iteration)
- TRSVD (Trace minimization)
- LASVD (Single-vector Lanczos)
- BLSVD (Block Lanczos)

Aplicaciones SVD

- Una herramienta común para resolver sistemas de ecuaciones mal condicionadas.
- Herramientas de regularización.


Aplicaciones – cálculo de inversa

- Se calcula en forma rápida la inversa de una matriz A (puede ser mal condicionada)
- $A^{-1} = V S^{-1} U^T$
- Recordar que U y V son ortogonales y S diagonal

Aplicaciones – mínimos cuadrados

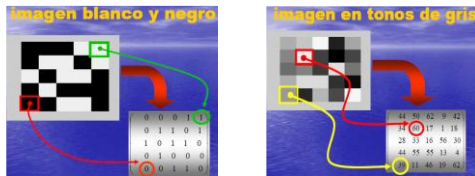
- Se quiere resolver $Ax = b$
- Se multiplica por A^T quedando $A^T A = A^T b$
- Se calcula la svd de $A = UDV^T$
- Es útil cuando la matriz A no es cuadrada (sería un sistema indeterminado)

Aplicaciones – Compresión de imágenes

- Una imagen a color es una matriz de $(n,m,3)$ números, a cada píxel se le asigna un vector en \mathbb{R}^3 , el vector representa la composición RGB del color
- Por ej. el vector $(1,0,0)$ representa el color rojo.
- El píxel se verá 

Aplicaciones – Compresión de imágenes

- Una imagen en escala de grises es una matriz de $n \times m$, a cada píxel se le asigna un valor entre 0 y k (donde k son los distintos niveles de gris):



Aplicaciones – Compresión de imágenes

- Este enfoque permite aplicar SVD al tratamiento de imágenes bidimensionales
- Una imagen contiene información redundante, o sea, que puede ser eliminada sin que el efecto visual sea notable.
- Se podría sustituir A por otra matriz B de rango prefijado más pequeño

Aplicaciones – Compresión de imágenes

- Descomponer la matriz de imagen y luego comprimir la información utilizando solo algunos valores singulares dependiendo de la calidad que deseamos obtener.
- Para recuperar la matriz original después de aplicarle la SVD podemos utilizar la definición de suma de tripletas.

Aplicaciones – Compresión de imágenes

- Para una imagen de 600x800 pixeles, el rango será 600.
- En vez de sumar todos los valores singulares, podemos reconstruirla hasta un número de valores singulares entre 1 y el rango de la matriz ($1 < k < r$).
- Mientras mayor sea k mejor será la calidad de imagen pero menor la compresión, y viceversa.
- Se desea encontrar un valor de k el cual nos permita comprimir la imagen sin perder mucha información visual

Aplicaciones – Compresión de imágenes

- Una imagen de 480 x 640 pixels requiere almacenar 307200 elementos
- Esto es, aproximadamente, 0.3 Mbytes.
- Para almacenar A_k se necesita $n \times k$ para U , $k \times m$ V^T , k para S
- En total, $(n + m + 1) \times k$

Aplicaciones – Compresión de imágenes

- la relación de compresión es
$$r = (n+m+1)k / nm$$
- Para la misma imagen $n=480$, $m=640$
- Tenemos con $k = 50$ que la imagen comprimida sólo requiere un 18% de la información original
- $50 * (480+640+1) / (480*640)$

