MATLAB

Procedimientos numéricos

Inicio MATLAB Numérico

Raíces de ecuaciones
Sistemas de ecuaciones
Valores y vectores propios
Integración numérica
Ecuaciones diferenciales
Interpolación, regresión

Ejercicios

Valores y vectores propios

El cálculo de los valores propios y de los vectores propios de una matriz simétrica tiene gran importancia en las matemáticas y en la ingeniería, entre los que cabe destacar, el problema de la diagonalización de una matriz, el cálculo de los momentos de inercia y de los ejes principales de inercia de un sólido rígido, o de las frecuencias propias de oscilación de un sistema oscilante.

Se denominan valores propios o raíces características de una matriz cuadrada **A**, a los valores de λ tales que.

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ...a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{\mathrm{nn}}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

Desarrollando el determinante tenemos un polinomio de grado *n* en λ. Trataremos de encontrar los coeficientes del polinomio y luego, aplicaremos un método de hallar las raíces del polinomio.

Una vez hallados los valores propios, para hallar el vector propio **X** correspondiente al valor propio λ es necesario resolver el sistema homogéneo

$$\mathbf{AX}=\lambda\mathbf{X}$$

donde el vector **X** es $\mathbf{X}=\{x_1, x_{2,}...x_n\}$ Siempre podemos tomar x_1 como 1, y hallar las otras *n*-1 incógnitas. De las *n* ecuaciones podemos tomar *n*-1, y resolver el sistema lineal.

$$\begin{aligned} &(a_{22}-\lambda)x_2+a_{23}x_3+....+a_{2n}x_n=-a_{21} \\ &a_{32}x_2+(a_{33}-\lambda)x_3+....+a_{3n}x_n=-a_{31} \\ &... \\ &a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+....+(a_{nn}-\lambda)x_n=-a_{n1} \end{aligned}$$

El polinomio característico

Dada una matriz cuadrada **A** de dimensión *n*. El polinomio característico de la matriz es

$$p(\lambda)=\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+...p_{n-1}\lambda+p_n$$

Los coeficientes se hallan mediante las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -s_1 \\ p_2 &= -\tfrac{1}{2}(s_2+p_1s_1) \\ &.......................... \\ p_n &= -\tfrac{1}{n}(s_n+p_1s_{n-1}+....+p_{n-1}s_1) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Los valores $s_1, s_2, ...\ s_n$ son las trazas de las potencias de la matriz cuadrada *A*.

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \text{traza}\,\mathbf{A} \\ s_2 &= \text{traza}\,\mathbf{A}^2 \\ &.................... \\ s_n &= \text{traza}\,\mathbf{A}^n \end{aligned}\right\} \text{traza}\,\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{i\le n}a_{ii}$$

La aplicación de este método no reviste dificultad, se calculan:

- Las potencias de la matriz *A* y la traza de cada una de ellas,
- Los coeficientes p_i del polinomio característico
- Los valores propios o las raíces del polinomio mediante el comando *roots*
- Conocidos los valores propios se calculan los vectores propios

Hallar el polinomio característico de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

El desarrollo del determinante secular mediante el método de Leverrier conduce a la ecuación

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20 = 0$$

Conocidos los coeficientes del polinomio característico, se determinan las raíces por algún procedimiento numérico, el mejor procedimiento es utilizar la función MATLAB *roots* que veremos con más detalle en el capítulo raíces de una ecuación.

Vectores propios

Conocidos los valores propios de una matriz simétrica **A**, se pueden calcular el vector propio **X** correspondiente a cada valor propio λ.

AX=λ**X**

mediante el siguiente procedimiento. Supongamos una matriz simétrica **A** de dimensión 4.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

Conocido el valor propio λ, tenemos un sistema de ecuaciones homogéneo de 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Le damos a x_1 el valor arbitrario de 1 y lo convertimos en el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 + a_{34}x_4 = 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + (a_{44}-\lambda)x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = -a_{21}x_1 \\ a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 + a_{34}x_4 = -a_{31}x_1 \\ a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + (a_{44}-\lambda)x_4 = -a_{41}x_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} (a_{22}-\lambda) & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & (a_{33}-\lambda) & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & (a_{44}-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{21}x_1 \\ -a_{31}x_1 \\ -a_{41}x_1 \end{bmatrix}$$

La función *leverrier*

A la función *leverrier* se le pasa la matriz cuadrada *A* de dimensión *n* y devuelve dos matrices

- La matriz *V* de los vectores propios, cada vector propio correspondiente a un valor propio es un vector columna
- La matriz diagonal *D* que contiene los valores propios en las columnas ordenados, de modo que al valor propio λ_i que se guarda en el elemento diagonal $D(i,i)$ le corresponde el vector columna *i* de la matriz cuadrada $V(1:n,i)$

La función *leverrier* realiza dos tareas:

- **Calcula los valores propios**

1. Calcula las potencias de la matriz *A* y sus trazas guardándolas en el vector *s*.
2. Calcula *n* coeficientes del polinomio característico de acuerdo con las fórmulas (1) y los guarda en el vector *p*. Se ha de tener en cuenta que el coeficiente que falta es el de mayor grado y vale 1. El vector de los coeficientes del polinomio característico es el vector ampliado [1 *p*] cuyo primer término es 1 y a continuación el resto de los coeficienetes calculados.
3. Calcula las raíces del polinomio, que son los valores propios empleando la función MATLAB *roots*, a la cual se le pasa el vector de los coeficientes y devuelve el vector (columna) de las raíces.
4. Creamos una matriz *D* de dimensión *n* en cuya diagonal principal guardamos los valores propios, $D(i,i)=\lambda_i$

- **Calcula el vector propio para cada uno de los valores propios.**

1. Extraemos de la matriz *A* la submatriz *A*(2:*n*,2:*n*) y creamos otra matriz *B* de dimensión *n*-1. Los elementos de la diagonal de la matiz *B*, valen $B(i,i)=A(i,i)-\lambda_i$
2. Extraemos los elementos 2..*n* de la primera columna de la matriz *A* del siguiente modo, *A*(2:*n*,1), los cambiamos de signo y los asignamos al vector *C* de dimensión *n*-1.
3. Los *n*-1 elementos del vector popio correspondiente al valor propio λ_i se obtienen resolviendo un sistema de *n*-1 ecuaciones con *n*-1 incógnitas, mediante el operador división por la izquierda **** tal como hemos visto en la pÃ¡gina Vectores y matrices.
4. El vector propio *S* correspondiente al valor propio λ_i está formado por la unidad y los *n*-1 valores que hemos obtenido al resolver el sistema lineal de *n*-1 ecuaciones con *n*-1 incógnitas.
5. El vector propio *S* se normaliza (su módulo es la unidad). Recuérdese que el cuadrado del módulo de un vector es el producto escalar de dicho vector consigo mismo.
6. El vector propio *S* correspondiente al valor propio λ_i es la columna *i* de la matriz *V*. *V*(1:*n,i*)=*S*/*norm*(*S*). La funciÃ³n MATLAB *norm* calcula el módulo de un vector.

Finalmente podemos comprobar que los resultados son correctos realizando el producto

$V\times D\times V^{-1}$

cuyo resultado es la matriz original *A*.

```
function [V,D]=leverrier(A)
    %V vectores propios en columnas
    % D valores propios en la diagonal de la matriz
    n=length(A); %dimensión de la matriz
    p=zeros(1,n); %reserva memoria para n elementos
    s=zeros(n,1);
    B=zeros(n); %reserva memoria para la matriz cuadrada de dimensión n
    for i=1:n
        B=A^i; %potencia de la matriz A
        s(i)=trace(B); %calcula la traza de las sucesivas potencias de la matriz A
    end
    %calcula los coeficientes del polinomio característico
    p(1)=-s(1);
    for i=2:n
        p(i)=-s(i)/i;
        for j=1:i-1
            p(i)=p(i)-p(j)*s(i-j)/i;
        end
    end
    %raíces del polinomio característico
    raiz=roots([1 p]);
    %Los valores propios aparecen en la diagonal de la matriz D
    D=diag(raiz);
    %Vectores propios para cada valor propio
    C=-1.*A(2:n,1); %columna de A
    V=zeros(n);
    S=zeros(n,1); %vector propio
    for i=1:length(D)
        B=A(2:n,2:n)-D(i,i)*eye(n-1); %submatriz de A
        S=[1 (B\C)'];
        % vectores propios normalizados
        %cada vector propio es una columna de V
        V(1:n,i)=S/norm(S);
    end
end
```

Probamos la función *leverrier* en la ventana de comandos

```
>> A=[1 2 3 4; 2 1 2 3; 3 2 1 2; 4 3 2 1]
A =
     1     2     3     4
     2     1     2     3
     3     2     1     2
     4     3     2     1
>> [V,D]=leverrier(A)
V =
    0.5468    0.6533    0.4483    0.2706
    0.4483    0.2706   -0.5468   -0.6533
    0.4483   -0.2706   -0.5468    0.6533
    0.5468   -0.6533    0.4483   -0.2706
D =
    9.0990         0         0         0
         0   -3.4142         0         0
         0         0   -1.0990         0
         0         0         0   -0.5858
>> V*D*inv(V)
ans =
    1.0000    2.0000    3.0000    4.0000
    2.0000    1.0000    2.0000    3.0000
    3.0000    2.0000    1.0000    2.0000
```

```
    4.0000    3.0000    2.0000    1.0000
```

La función MATLAB *eig*

MATLAB dispone de la función *eig* que realiza las mismas tareas que la función *leverrier*.

```
>> A=[1 2 3 4; 2 1 2 3; 3 2 1 2; 4 3 2 1]
A =
     1     2     3     4
     2     1     2     3
     3     2     1     2
     4     3     2     1
>> [V,D]=eig(A)
V =
    0.6533   -0.4483    0.2706    0.5468
    0.2706    0.5468   -0.6533    0.4483
   -0.2706    0.5468    0.6533    0.4483
   -0.6533   -0.4483   -0.2706    0.5468
D =
   -3.4142         0         0         0
         0   -1.0990         0         0
         0         0   -0.5858         0
         0         0         0    9.0990
```

Ejercicio

Calcular los vectores propios y los valores propios de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$