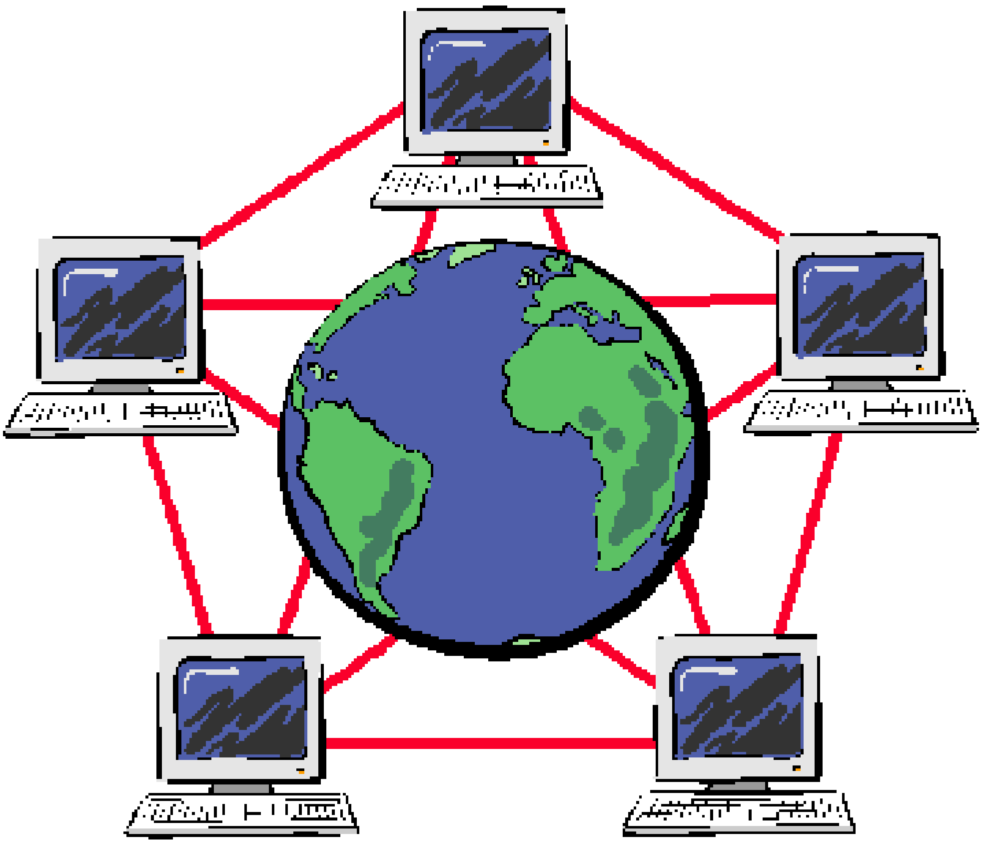
OBLIGATORIO 1 - Métodos Numéricos.

Noviembre 2014.



Redes P2P

Nombre	Cédula
Fernando Fagúndez	4.296.514-1
Germán Faller	4.520.304-7
Andrés Grignola	4.435.560-9
Juan Lima	4.730.889-7

Contenido

OBLIGATORIO 1 - Métodos Numéricos. 1
Contenido 2
Políticas de incentivo en redes de pares. 2
Parte 1: problema de valores iniciales. 2
Parte 2: Resolución del Sistema. 3
Método de Euler: 3
Método del Trapecio: 9
Diferencias entre métodos 14
Conclusiones 17

Políticas de incentivo en redes de pares.

Las redes P2P son comunidades virtuales auto gestionadas, montadas sobre internet, donde los usuarios (o pares), tienen un fin común, que es compartir un archivo o recursos de cómputo. Los protocolos de incentivo en estas redes, promueven a que los pares cooperen eficientemente, brindando de forma altruista los recursos, y evitando así la presencia de pares "parásitos" en el sistema, que consumen recursos sin compartir. Estos protocolos de incentivo, usualmente castigan a los pares que no cooperan y premian o generan créditos a los que sí.

En este caso estudiaremos un mecanismo matemático que nos permita modelar la estabilidad y la evolución de los pares según distintas políticas aplicables. En particular, nos permitirá ver si una política lleva a la estabilidad del sistema; idealmente, que los pares adquieran políticas altruistas, o en cambio, lleva al colapso del mismo; cuando los pares toman políticas parásitas.

Parte 1: problema de valores iniciales.

Partimos de la simplificación de los pares en tres clases; altruistas, justos y parásitos. Donde los primeros sirven al par sin importar su clase, los segundos sirven con reciprocidad según el par solicitante y los últimos se niegan a servir.

Definimos $x_i(t)$ como la proporción de pares siguiendo una estrategia s_i en un tiempo t; $x_h(t)$ como la proporción de pares siguiendo la mejor estrategia en un tiempo (s_h).

Aplicando una política espejo; las probabilidades de cooperación entre pares nos quedarían como la siguiente matriz $M(i,j)$, con $i,j = 1, 2, 3$ donde 1=altruista, 2=justo y 3=parásito.

$$M(i,j) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \dfrac{x_1(t)}{1 - x_2(t)} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sabemos que la ganancia total es de la forma:

$$G(t) = (\propto -1)x^T(t)Mx(t)$$

Donde $\propto > 0$ es la cantidad de puntos ganados por par cuando recibe servicio de otro.

Además, aplicando la fórmula de la ganancia de cada clase, nos queda:

$$G_i(t) = \propto E(R_i)(t) - E(S_i)(t)$$

$$G_1 = \propto \left(x_1(t) - x_2(t)\right) - 1$$

$$G_2 = (\propto -1)\left(\frac{x_1(t)}{1 - x_2(t)}\right)$$

$$G_3 = \propto x_1(t)$$

Los pares "aprenden" las mejores estrategias, siguiendo un modelo de aprendizaje, de forma que si la ganancia esperada luego de un tiempo t no es la máxima que se puede esperar, entonces el par se mudará a la estrategia s_h con probabilidad $\gamma[G_h(t) - G(t)]$ donde γ es la taza de aprendizaje.

Asumiendo tasas de arribo Poisson, se puede aproximar el modelo discreto a uno continuo en el tiempo;

$$\dot{x}_h(t) = \gamma[G_h(t) - G(t)]$$

$$\dot{x}_i(t) = -\gamma x_i[G_h(t) - G_i(t)], \forall i \neq h$$

En definitiva, el problema de valores iniciales para una política de espejo queda:

$$\begin{cases} G_1 = \propto \left(x_1(t) - x_2(t)\right) - 1 \\ G_2 = (\propto -1)\left(\frac{x_1(t)}{1 - x_2(t)}\right) \\ G_3 = \propto x_1(t) \\ \dot{x}_h(t) = \gamma[G_h(t) - G(t)] \\ \dot{x}_i(t) = -\gamma x_i[G_h(t) - G_i(t)], \forall i \neq h \\ x_1(0) = x_{1_0} \\ x_2(0) = x_{2_0} \\ x_3(0) = x_{3_0} \end{cases}$$

Parte 2: Resolución del Sistema.

Con las hipótesis anteriores, con $x_i(0) = \frac{1}{3}, i = 1,2,3$ resolveremos el problema de condiciones iniciales al que llegamos en la Parte 1 mediante dos métodos:

- Método de Euler
- Método del Trapecio

Método de Euler:

El método de Euler es un método de un paso, ya que en la ecuación intervienen y_{n+1} e y_n y explícito, ya que de la misma ecuación se puede despejar directamente y_{n+1}. La ecuación nos queda:

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(x_n)$$

El objetivo es poder resolver problemas del estilo de $\dot{x}(t) = f(x)$ suponiendo conocido x_0 .

A partir de la definición de derivada;

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Se despeja;

$$x(t+h) = x(t) + h \cdot \dot{x}(t)$$

De forma tal que podemos calcularlo mediante el método iterativo, desde el paso

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(x_n)\ .$$

En este caso, para cada iteración, previo a resolver el problema de valores iniciales, hay que calcular la ganancia de la mejor estrategia en ese tiempo ($G_h(t)$), para utilizarla en cada una de las ecuaciones y para definir si aumenta o disminuye la proporción de cada clase en el total de los pares.

Finalmente, la iteración queda planteada de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x_{h_{n+1}} = x_{h_n} + C \cdot \gamma[G_h(n) - G(n)] \\ x_{i_{n+1}} = x_{i_n} - C \cdot \gamma x_i[G_h(n) - G_i(n)], \forall i \neq h \\ x_{i_{n+1}} = x_{i_n} + x_{h_{n+1}}\ si\ i = h \\ x_1(0) = x_{1_0} \\ x_2(0) = x_{2_0} \\ x_3(0) = x_{3_0} \end{cases}$$

En el programa de Matlab Obligatorio1.m se plantean las ecuaciones anteriores, iterando 6000 veces, como resultado se obtienen las siguientes figuras para distintos valores de alfa elegidos.

Gráficas:

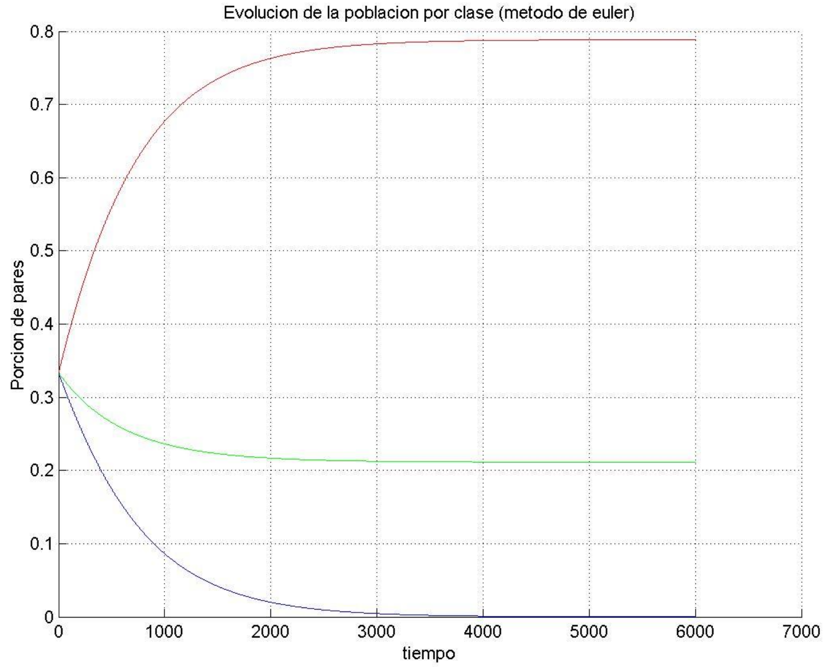


Ilustración 1 - Evolución con alfa=1,2. La línea roja representa los pares parásitos, la verde los justos y la azul los altruístas.

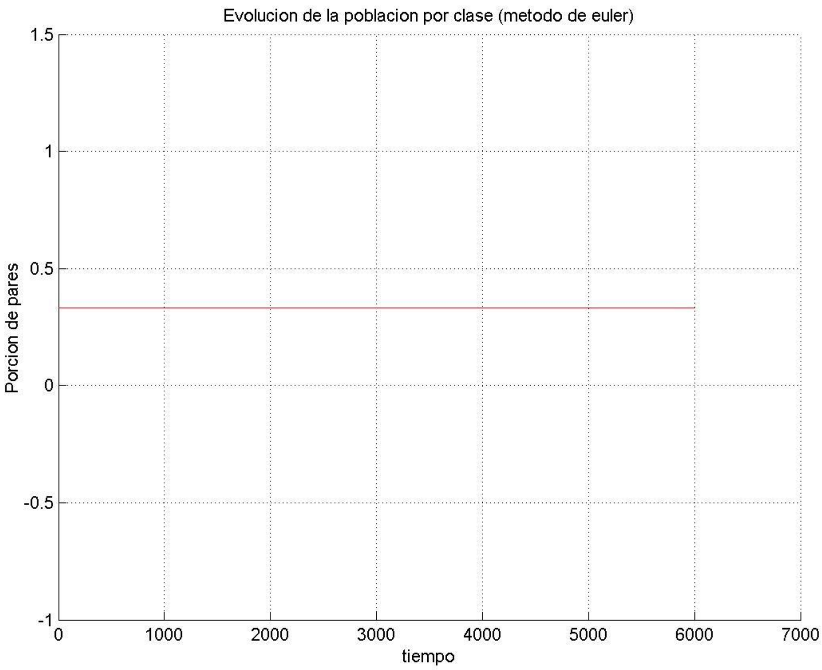


Ilustración 2 - Evolución con alfa igual a tres. La línea roja representa los pares parásitos, la verde los justos y la azul los altruístas.

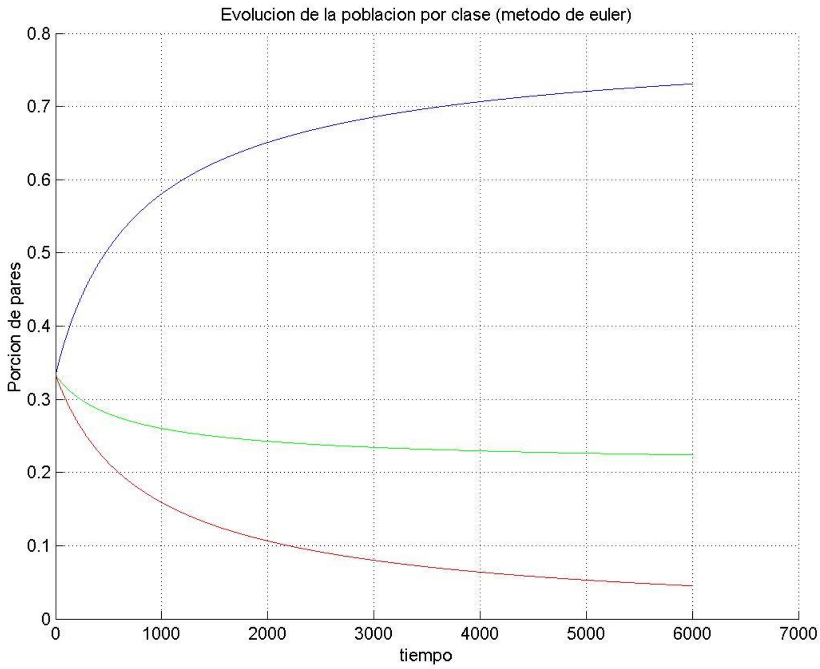


Ilustración 3 - Evolución con alfa=4,8. La línea roja representa los pares parásitos, la verde los justos y la azul los altruístas.

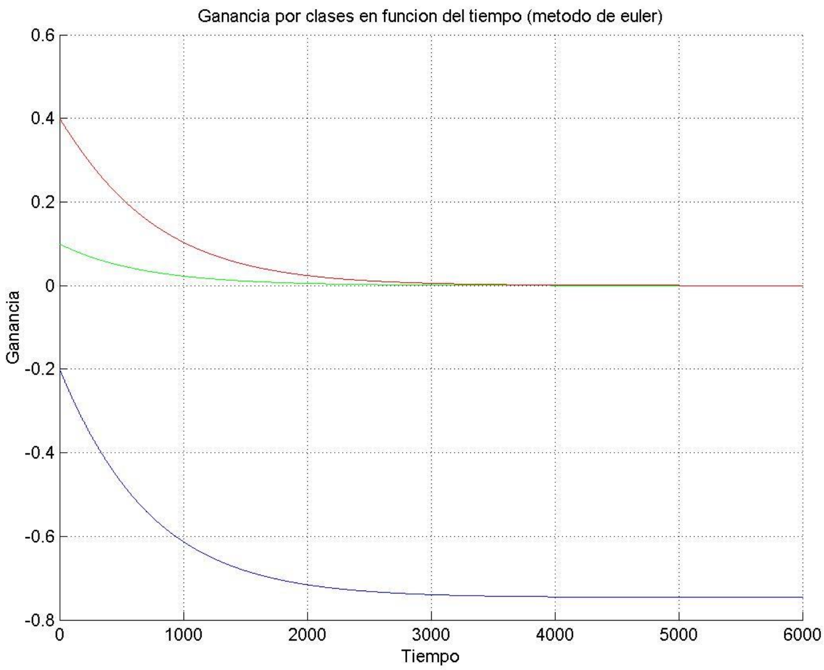


Ilustración 4 - Ganancia por clase. Caso alfa=1,2

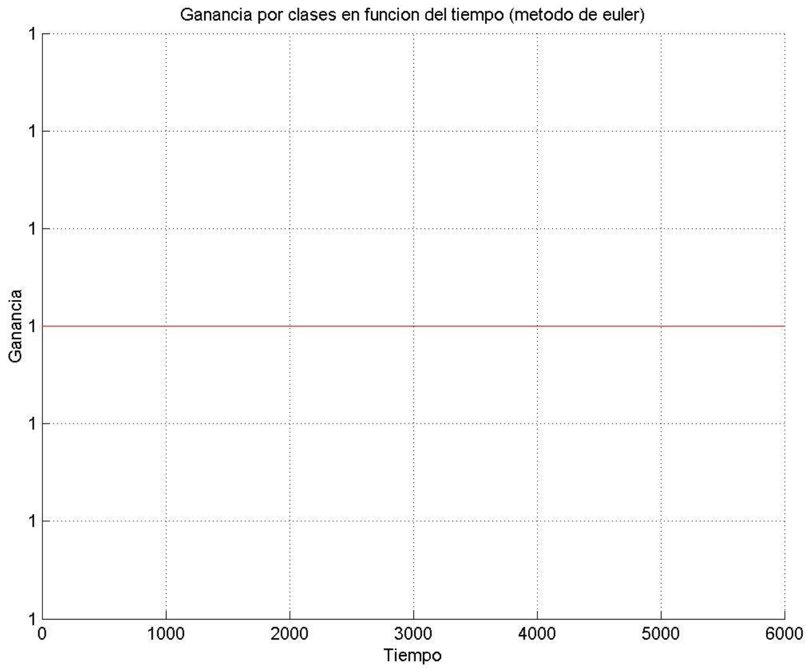


Ilustración 5 - Ganancia por clase. Caso alfa=3

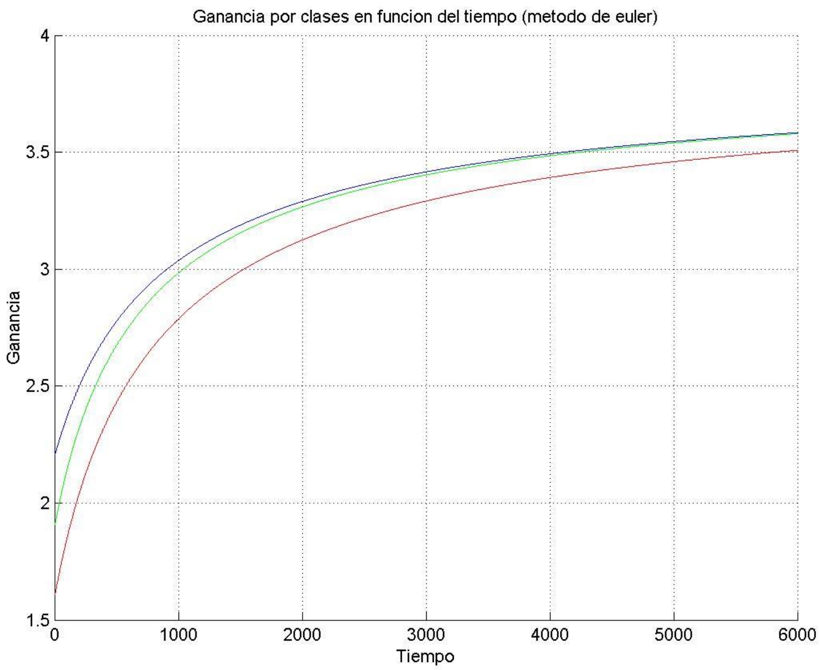


Ilustración 6 - Ganancia por clase. Caso alfa=4,8

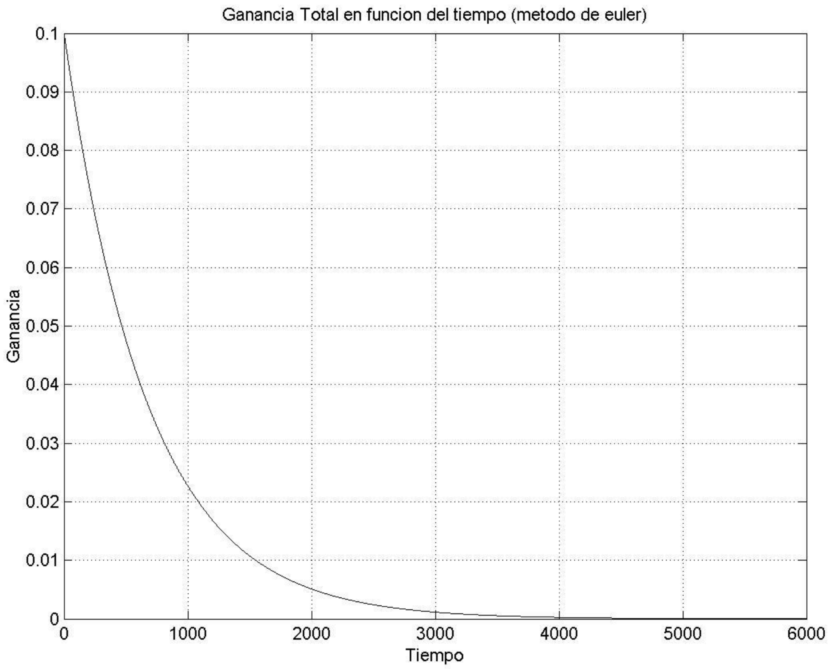


Ilustración 7 - Ganancia total del sistema. Caso alfa=1,2

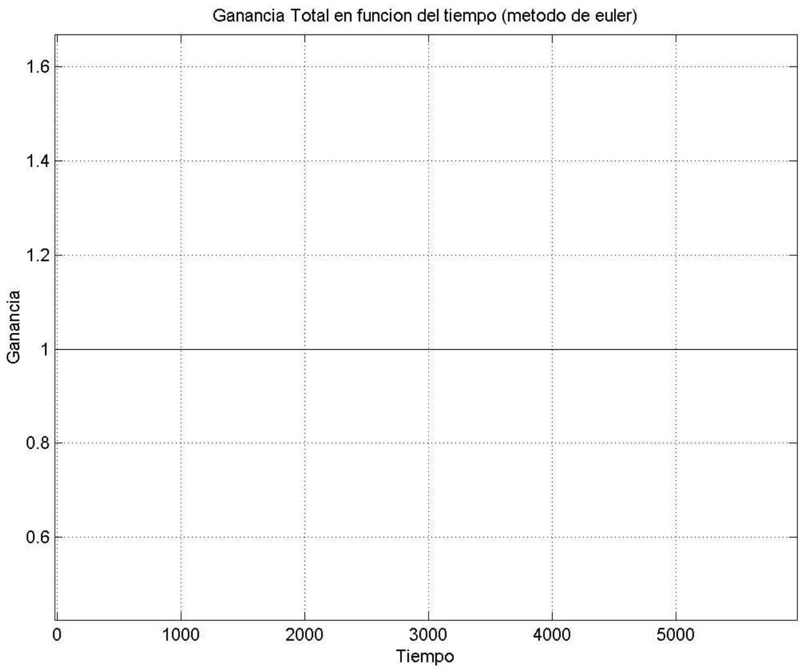


Ilustración 8 - Ganancia total del sistema. Caso alfa=3

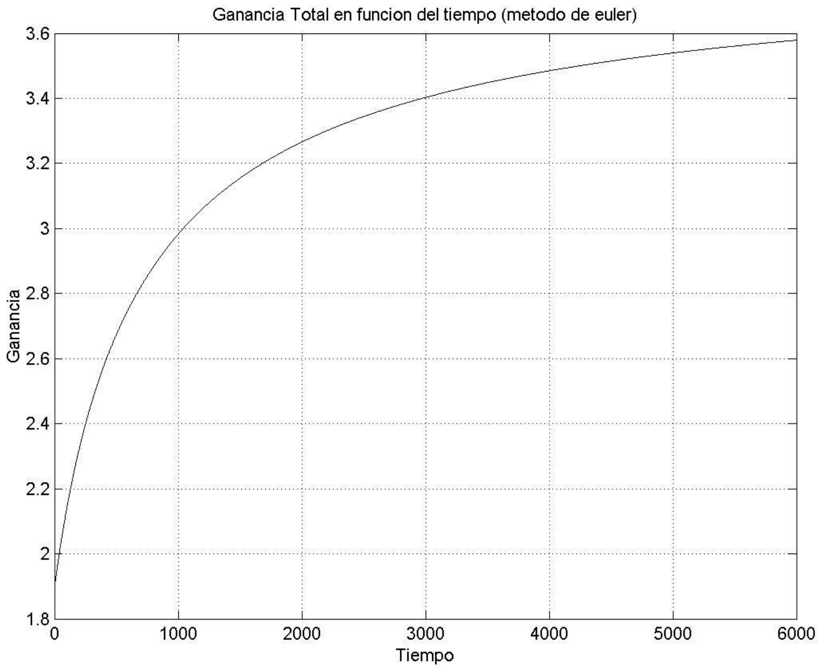


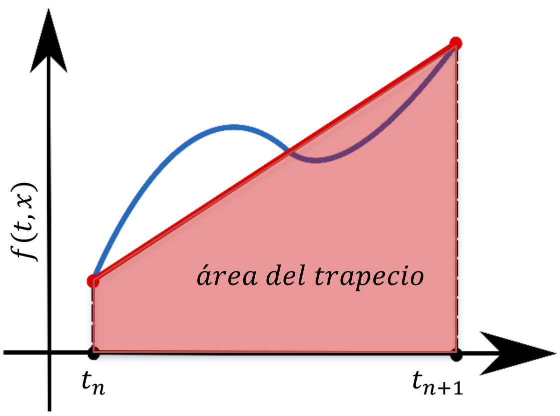
Ilustración 9 - Ganancia total del sistema. Caso alfa=4,8

Método del Trapecio:

El método del Trapecio es un método de un paso e implícito, donde x_{n+1} es de la forma $x_{n+1} = g(f(t_{n+1}, x_{n+1}))$.

Como nuestro objetivo es resolver ecuaciones diferenciales del estilo de $\dot{x}(t) = f(t, x)$, integrando de ambos lados, obtenemos $x(t) = \int \dot{x}(t)\, dt = \int f(t, x(t))\ dt$.

La expresión de la derecha es la integral de una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por lo cual podríamos inferir que el área bajo la curva es aproximable por el área de un trapecio, teniendo en cuenta que, a menor base de trapecio (ver figura) mejor aproximación de la integral.



$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{k}{2} \cdot \left(f(t_{n+1}, x_{n+1}) + f(t_n, x_n)\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

En este caso, para poder implementar el método del trapecio, es necesario estimar el valor de $f(t_{n+1}, x_{n+1})$, para salvar este problema, usamos el método del predictor-corrector:

Predictor (Euler):

$$x_{n+1}^{(0)} = x_n + h \cdot f(t_n, x_n)$$

Corrector:

$$x_{n+1}^{(k+1)} = x_n + \frac{h}{2} \cdot \left(f\left(t_{n+1}, x_{n+1}^{(k)}\right) + f(t_n, x_n) \right)$$

En el programa, se toma en primera instancia el valor del método predictor, luego se aplica el paso corrector 6000 veces.

Obteniendo, a distintos alfa, las gráficas siguientes

Gráficas:

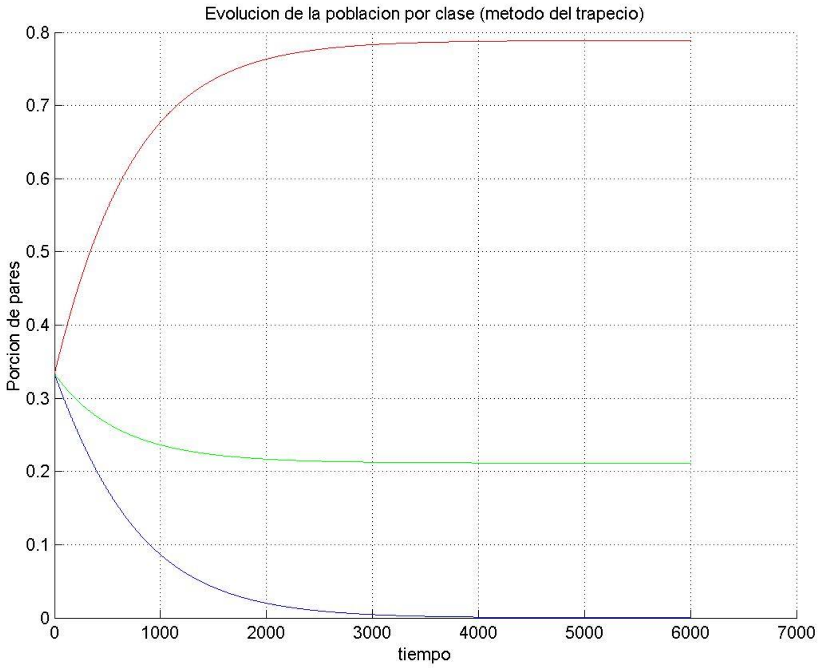


Ilustración 10 - Evolución con alfa=1,2. La línea roja representa los pares parásitos, la verde los justos y la azul los altruístas.

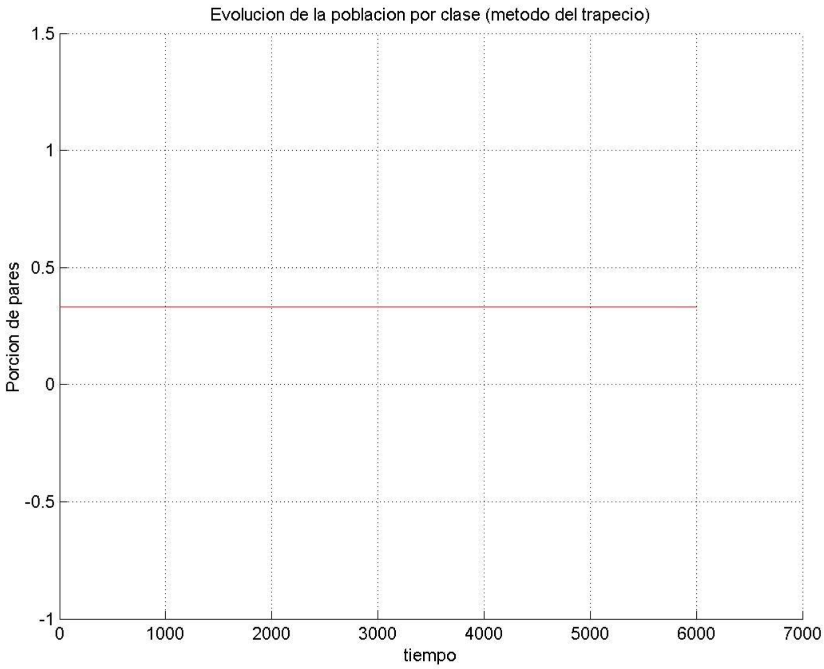


Ilustración 11 - Evolución con alfa igual a tres. La línea roja representa los pares parásitos, la verde los justos y la azul los altruístas.

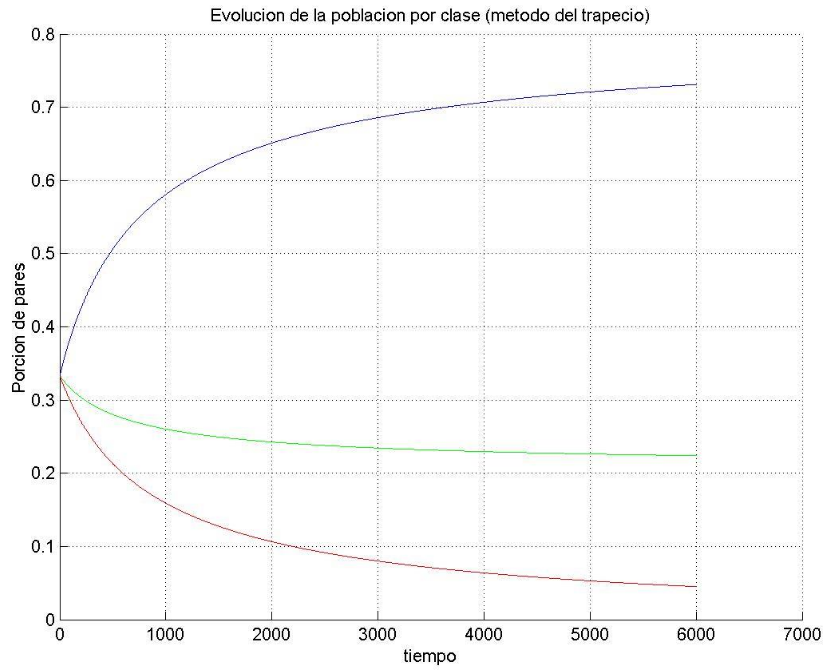


Ilustración 12 - Evolución con alfa=4,8. La línea roja representa los pares parásitos, la verde los justos y la azul los altruístas.

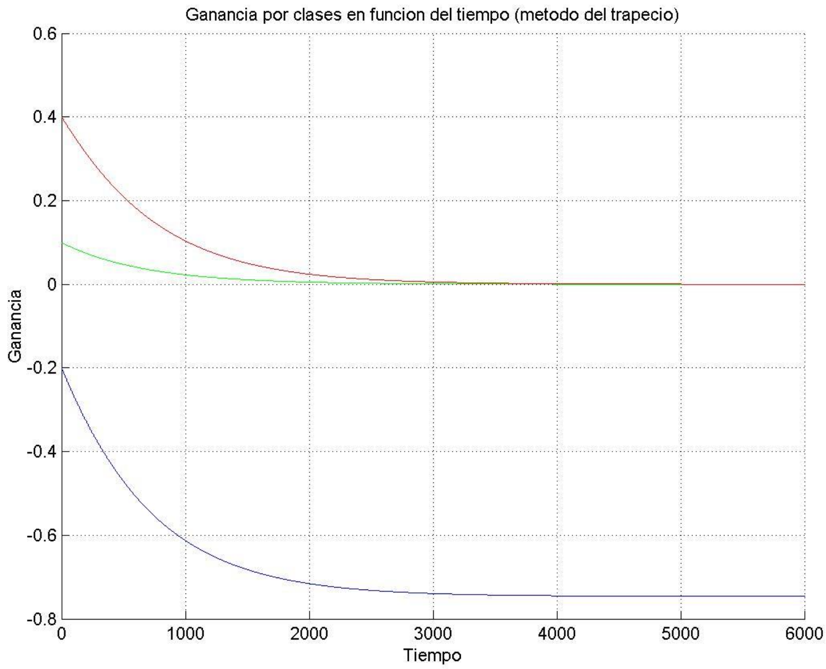


Ilustración 13 - Ganancia por clase. Caso alfa=1,2

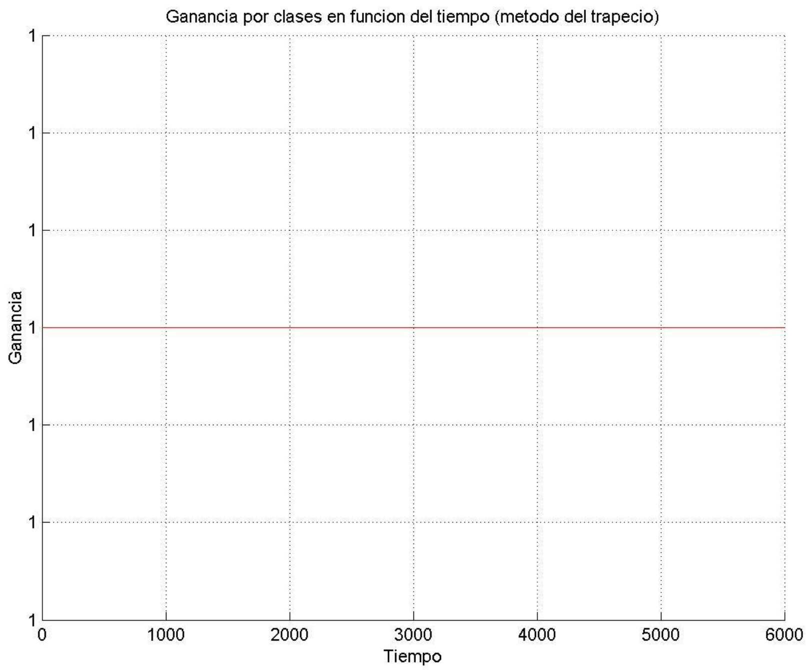


Ilustración 14 - Ganancia por clase. Caso alfa=3

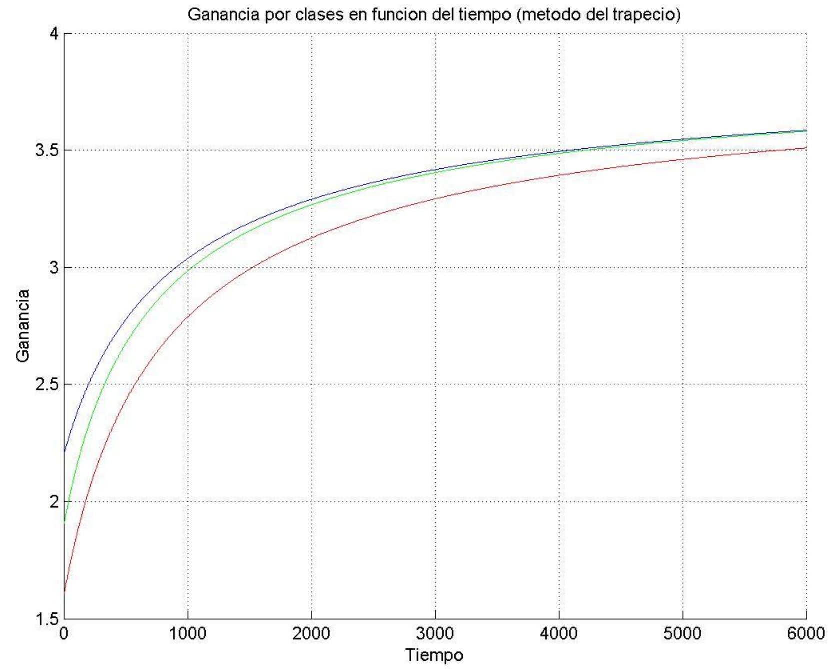


Ilustración 15 - Ganancia por clase. Caso alfa=4,8

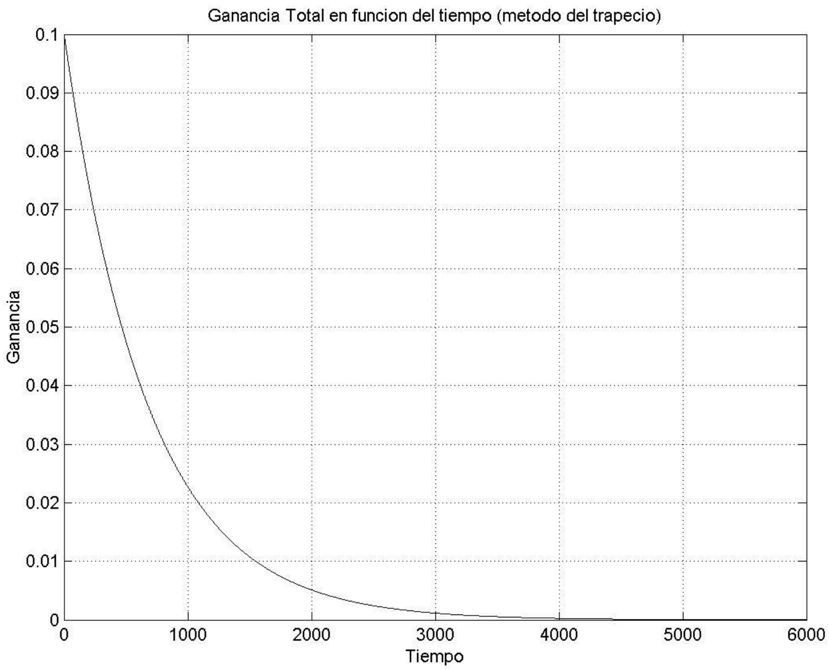


Ilustración 16 - Ganancia total del sistema. Caso alfa=1,2

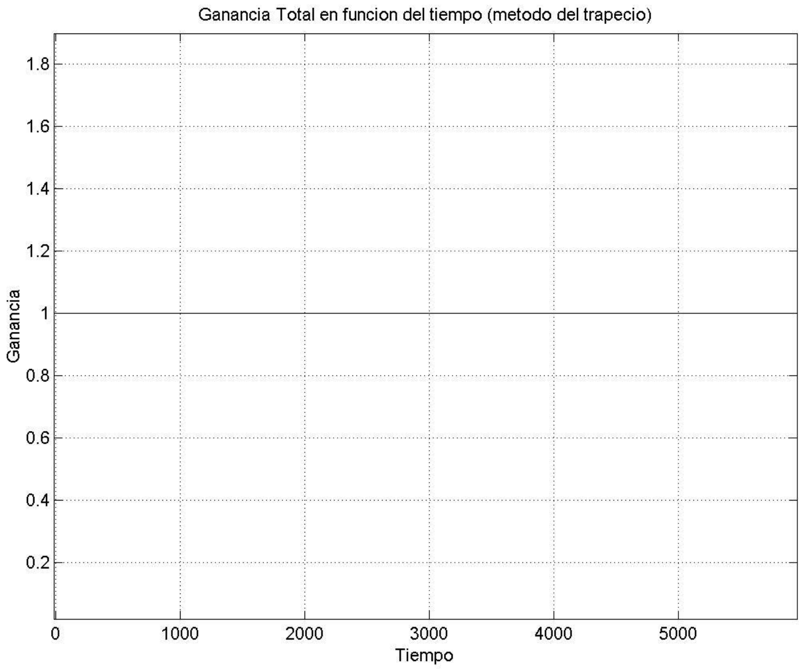


Ilustración 17 - Ganancia total del sistema. Caso alfa=3

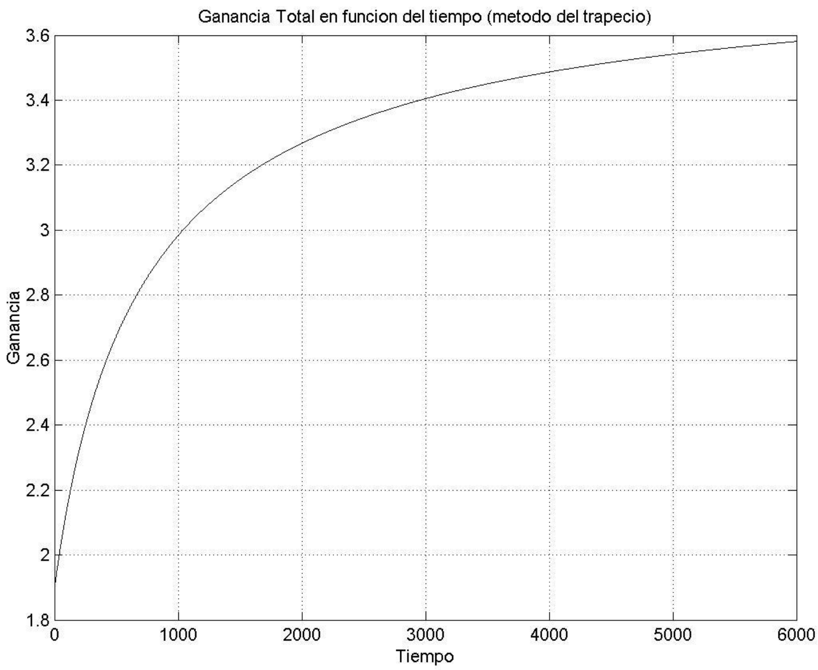


Ilustración 18 - Ganancia total del sistema. Caso alfa=4,8

Diferencias entre métodos

En estas gráficas se observa la distancia entre los resultados en cada caso entre cada método.

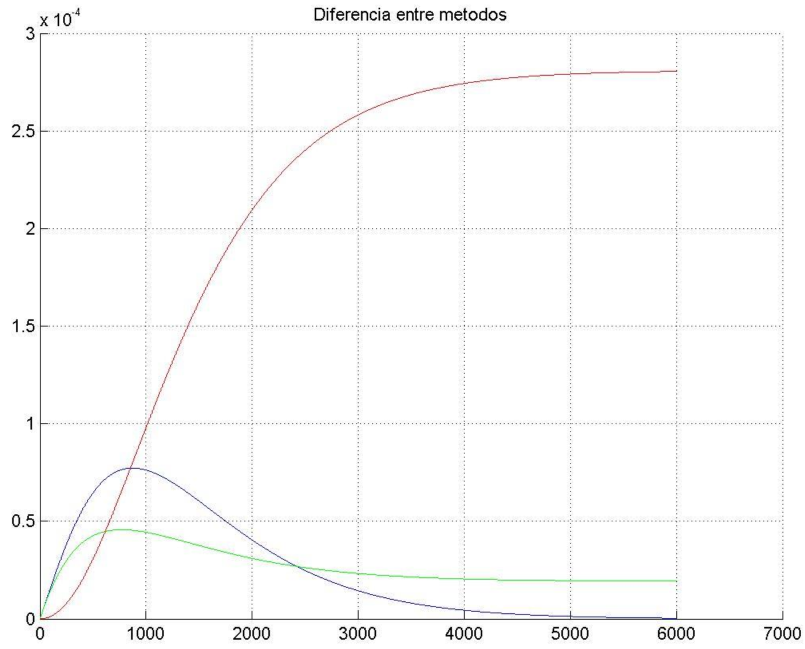


Ilustración 19 - Distancia entre métodos, alfa =1,2

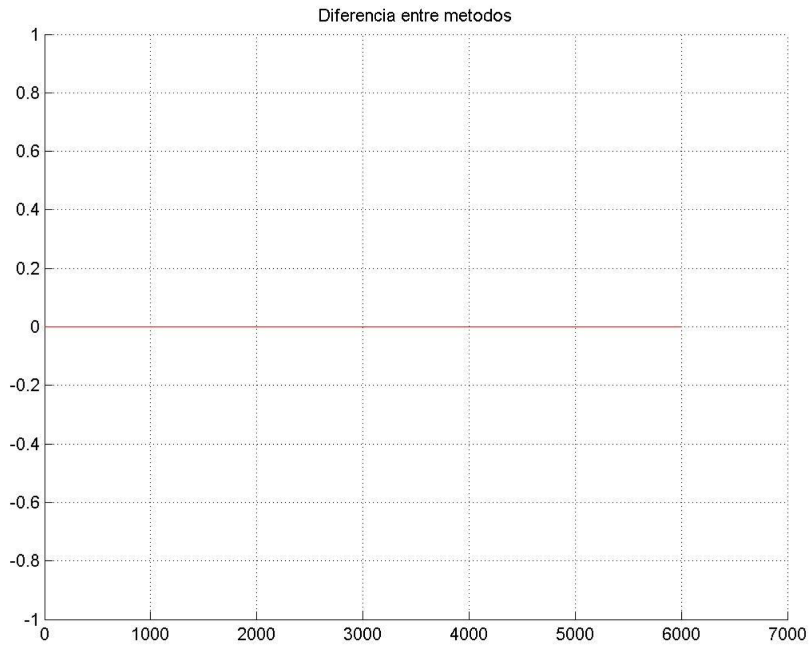


Ilustración 20 - Distancia entre métodos, alfa =3

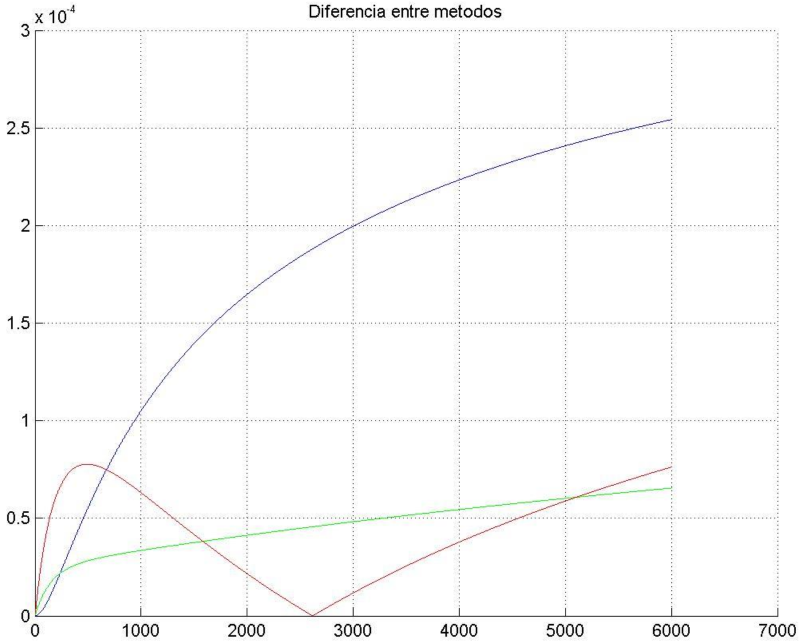


Ilustración 21 - Distancia entre métodos, alfa =4,8

Conclusiones

Se puede ver en las gráficas la variación de las proporciones de pares por clase; en particular, la relación entre las variaciones y los valores de $\propto$ (ganancia según la política utilizada).

Se observa que si $\propto > \frac{1}{x_2}$, los pares altruistas son los que reciben mayor ganancia, por lo tanto aumenta su proporción respecto al total a medida que el sistema evoluciona. Si en cambio, $\propto = \frac{1}{x_2}$ la ganancia de las tres tesituras es igual, y no hay cambios. Por último, si $\propto < \frac{1}{x_2}$, los pares parásitos son los que sacan mejor partido, llevando al sistema al colapso.

En cuanto a la Ganancia en cada clase, se ve la coherencia entre el pasaje de pares a las diferentes posturas, dependiendo de la pertenencia o no al grupo de mayor ganancia, hasta alcanzar las condiciones finales.

Si analizamos la Ganancia general del sistema, es evidente que cuando la política de la red beneficia a los pares altruistas, la ganancia total del sistema aumenta, mientras que en el caso opuesto, la ganancia disminuye hasta hacerse nula, llevando al colapso del sistema.

En cuanto a los métodos numéricos empleados para resolver el sistema, podemos afirmar que el error relativo entre ellos está dentro de lo aceptable; en ninguno de los casos estudiados superó un 3×10^{-4}. Lo cual, si bien es incontrastable con el valor real del sistema planteado ya que no lo conocemos, nos permite inferir cierto grado de confianza para con la solución. Esto último en gran parte debido a que son métodos de resolución del problema de condiciones iniciales distintas.