Facultad de Ingeniería
IMERL
MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2014

1. Errores

Ejercicio 1

1. Aplicando el Teorema de Taylor en un entorno de $x = a$ tenemos que:
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(\gamma)\frac{h^2}{2},$$
para cierto γ comprendido entre a y $a+h$. Reescribiendo tenemos que:
$$\delta_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \frac{h}{2}f''(\gamma).$$
Luego, el error de truncamiento E_T es:
$$E_T(h) = \delta_a(h) - f'(a) = \frac{h}{2}f''(\gamma) \approx \frac{h}{2}f''(a),$$
que es lineal en h. Nótese que la aproximación será mejor si f es similar a una función localmente constante, y/o el paso h es pequeño.

2. Para estimar el error de redondeo en las operaciones, consideremos que $f(a+h) = f(a\hat{+}h)(1+\delta_1)$, mientras que $f(a) = f(\hat{a})(1+\delta_2)$, donde tanto δ_1 como δ_2 son menores que ϵ, el épsilon de la máquina, y denotamos con el símbolo $\hat{f}$ al número almacenado en la máquina (posiblemente diferente del real f). Si despreciamos el error de redondeo para h y al tomar el cociente, tenemos que:
$$\begin{aligned} E_R(h) &= FP(\delta_a(h)) - \delta_a(h) \\ &= \frac{f(a+h)(1+\delta_1) - f(a)(1+\delta_2) - (f(a+h) - f(a))}{h} \\ &= \frac{f(a+h)\delta_1 - f(a)\delta_2}{h}. \end{aligned}$$
Utilizando propiedades del valor absoluto y el hecho que $\delta_i \leq \epsilon$, tenemos que:
$$|E_R(h)| \leq (|f(a+h)| + |f(a)|)\frac{\epsilon}{h} \approx \frac{2\epsilon f(a)}{h}$$

3. El error global está acotado por la suma de ambos errores, en valor absoluto. Vamos a minimizar entonces la siguiente función $E(h)$:
$$E(h) = \frac{h}{2}|f''(a)| + \frac{2\epsilon f(a)}{h}$$

Puesto que $E(h)$ es una función derivable en la variable h, para hallar el mínimo anulemos su derivada:

$$E'(h) = \frac{|f''(a)|}{2} - \frac{2\epsilon|f(a)|}{h^2} = 0.$$

Despejando, tenemos que el paso h debe verificar la siguiente identidad:

$$h^2 = \frac{4\epsilon|f(a)|}{|f''(a)|} \tag{1}$$

Es importante destacar que la Expresión (1) carece de utilidad práctica, pues nuestro objetivo es fijar un paso h para estimar la derivada primera $f'(a)$, y este paso obtenido depende de la derivada segunda (que también es desconocida). Entonces, asumiendo baja variación para f suponemos que $\frac{4|f(a)|}{|f''(a)|} = O(1)$, y estimamos el paso óptimo mediante

$$h_{opt} = \sqrt{\epsilon} \tag{2}$$

Ejercicio 2
Se debe repetir la misma lógica que el problema anterior con la diferencia centrada:

$$\Delta_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

Ejercicio 3

1. La Extrapolación de Richardson permite mejorar el orden del error de truncamiento de una estimación numérica. Si p es el número a estimar y tenemos el estimador $\overline{p}(h)$ que cumple:

$$\overline{p}(h) = p + a_k h^k + \sum_{i=k+1}^{+\infty} a_i h^i,$$

entonces, tomando un real $q > 1$ podemos construir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\overline{p}(h) = p + a_k h^k + \sum_{i=k+1}^{+\infty} a_i h^i,$$
$$\overline{p}(h/q) = p + a_k (h/q)^k + \sum_{i=k+1}^{+\infty} a_i (h/q)^i.$$

Finalmente, combinando ambas ecuaciones es posible definir el nuevo estimador $\hat{p}$ para p:

$$\hat{p}(h) = \frac{q^k \overline{p}(h/q) - \overline{p}(h)}{q^k - 1}$$

Obsérvese que el error de truncamiento de $\overline{p}$ es k, mientras que el de $\hat{p}$ es $k+1$, o superior.

2. Si $q = 1/2$, tenemos que
$$\hat{p}(h) = \frac{2^k \overline{p}(h/2) - \overline{p}(h)}{2^k - 1}$$
Para mejorar el estimador $\delta_a(h)$ de $f'(a)$, basta con notar que el orden de truncamiento en este caso es $k = 1$. Luego, el nuevo estimador es:
$$\begin{aligned}
\hat{p}(h) &= 2\delta_a(h/2) - \delta_a(h) \\
&= 2\frac{f(a+h/2) - f(a)}{h/2} - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \frac{4f(a+h/2) - 4f(a) - (f(a+h) - f(a))}{h} \\
&= \frac{4f(a+h/2) - 3f(a) - f(a+h)}{h}
\end{aligned}$$
La misma lógica aplica para la diferencia centrada $\Delta_a(h)$.

3. El estimador obtenido se puede evaluar en la mitad del paso y usar $q = 1/2$, aplicando nuevamente la interpolación de Richardson.

4. ¿Queda en manos del estudiante conocer las ventajas y desventajas del reiterado uso de la Extrapolación de Richardon. Se recomienda explorar los efectos de redondeo, que no fueron aquí incluidos en el estudio.

2. Sistemas Lineales

Ejercicio 1
Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ no singular. Sea α la solución del sistema $Ax = b$. Para obtener α se propone la siguiente iteración estacionaria de orden uno:

$$x^{k+1} = Qx^k + r, \tag{3}$$

siendo r un vector fijo de $\mathbb{R}^n$ y Q una matriz $n \times n$, tal que $\alpha = Q\alpha + r$.
Teorema 2.0.1. *La sucesión $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α para cualquier x^0 si y solamente si el radio espectral de Q es $\rho(Q) < 1$.*

Demostración. Sea $e_n = x^n - \alpha$ el error en el paso n. Utilizando que α es punto fijo de la iteración tenemos que:

$$e_{n+1} = x^{n+1} - \alpha = Qx^n + r - (Q\alpha + r) = Q(x^n - \alpha) = Qe_n.$$

Luego, por inducción en los naturales tenemos que $e_n = Q^n e_0$. Vamos ahora a probar el directo y el recíproco en partes:

($\rightarrow$) Supongamos por absurdo que $\rho(Q) \geq 1$. En tal caso, existe un valor propio λ de Q y un vector propio $v \neq 0$ tal que $Qv = \lambda v$. Elijamos x^0 de modo que $e_0 = v$. Esto es posible tomando $x^0 = \alpha + e_0$. Por lo anteriormente observado, tenemos que:

$$e_n = Q^n e_0 = Q^n v = \lambda^n v,$$

y tomando normas, tenemos que $\|e_n\| = |\lambda|^n \|v\|$. Tomando límites en ambos miembros, se consigue que $\text{lím}_n \|e_n\| \neq 0$, pues $|\lambda| \geq 1$ y $\|v\| \neq 0$. Esto es decir que el error no tiende al vector nulo, o equivalentemente, que la sucesión $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a α en contradiccuón con la hipótesis.

($\leftarrow$) Por el Teorema de Householder, el radio espectral es el ínfimo de las normas operadores. Sea ϵ igual a la mitad de la distancia entre $\rho(Q)$ y 1, es decir, $\epsilon = \frac{1-\rho(Q)}{2}$. Por definición de ínfimo, existe una norma operador $\|\|_\epsilon$ tal que $\|Q\|_\epsilon - \rho(Q) < \epsilon$. Pero entonces:

$$\|Q\|_\epsilon < \rho(Q) + \epsilon = \frac{2\rho(Q) + (1 - \rho(Q))}{2} = \frac{1 + \rho(Q)}{2} < 1.$$

Hemos conseguido así una norma $\|\|_\epsilon$ compatible con una vectorial tal que $\|Q\|_\epsilon < 1$. Como $e_n = Q^n e_0$, tomando normas en cada miembro tenemos que:

$$\|e_n\| = \|Q^n e_0\| \leq (\|Q\|_\epsilon)^n \|e_0\|,$$

y tomando límite con n tenemos que $0 \leq \text{lím}_n \|e_n\| \leq (\|Q\|_\epsilon)^n \|e_0\| = 0$. La única opción válida es que $\text{lím}_n \|e_n\| = 0$, y por la primera propiedad de una norma tenemos que la sucesión de vectores $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al vector nulo. Esto significa que $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a α. Obsérvese que el resultado vale independientemente del dato inicial x^0.

$\square$

Ejercicio 2

1. El método de Jacobi es $x^{k+1} = Q_J x^k + r_J$, siendo D ls la diagonal de A, $Q_J = -D^{-1}(A-D)$ y $r_J = D^{-1}b$.

2. Si A es matriz diagonal dominante por filas, entonces $\sum_{j\neq i} \frac{-a_{ij}}{a_i i} < 1$, y la norma infinito de operadores de Q_J es $\|Q_J\|_\infty = \text{máx}_i\{\sum_{j\neq i} \frac{-a_{ij}}{a_{ii}}\} < 1$. Como el radio espectral es el ínfimo de todas las normas operadores, tenemos en este caso que $\rho(Q_J) < 1$, y el método de Jacobi en este caso es convergente.

Ejercicio 3

1. El método de Jacobi es $x^{k+1} = Q_{GS}x^k + r_{GS}$, siendo L triangular inferior de A (incluyendo su diagonal), $Q_{GS} = -L^{-1}(A-L)$ y $r_{GS} = L^{-1}b$.

2. Si la matriz A es diagonal dominante por filas, el método de Gauss Seidel también converge.

Ejercicio 4
Se recomienda resolver analíticamente en base a los resultados anteriores y luego implementar los programas Jacobi y GS para comparar resultados.

Ejercicio 5

1. El polinomio característico de A es $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1$ y tiene dos raíces distintas. Luego, A es diagonalizable. Su radio espectral es $\rho = 3/2 + \sqrt{5}/2 > 1$.

2. *Atención:* para estudiar la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss Seidel se debe hallar el radio espectral de las matrices Q_J y Q_{GS}, y *no* el de A.

Ejercicio 6
Se desea resolver la ecuación diferencial $y''(x) + g(x)y(x) = f(x)$ con condiciones de borde $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$ en el intervalo $[a, b]$, siendo f y g dos funciones C^∞ en el intervalo $[a, b]$. Se divide el intervalo $[a, b]$ en N intervalos iguales de largo $h = \frac{b-a}{N}$.

1. Como primera aproximación, se sugiere utilizar $\delta_{a+ik}(h)$ para estimar derivadas primeras, y $\delta_{a+ik}(\delta_{a+ik}(h))$ para derivadas segundas. Junto con las condiciones de borde se puede construir un sistema lineal.

2. En el caso concreto, se prueba por sustitución que $y(x) = sen(x)$ es la solución exacta.

3. Se recomienda realizar un programa para resolver con diferente discretización (utilizando distintos valores para N).

Ejercicio 7
Se puede contar tanto la cantidad de sumas o de multiplicaciones, no viéndose afectado el orden computacional final. Para ganar dominio con el funcionamiento de la desomposición LU y la escalerización Gaussiana, se recomienda implementar ambas funciones.

Ejercicio 8
Vamos a obtener el Problema de mínimos Cuadrados Lineal (PMCL) partiendo de una ley teórica $y(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(x)$ y m datos experimentales $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, m$, con $m \geq n$.

Lo que se desea es elegir los coeficientes a_i de modo que el valor experimental yi sea próximo al teórico $y(x_i)$ para todo dato $i \in \{1, \ldots, m\}$. Una noción de proximidad que lleva al PMCL es la norma 2. Sean $a = (a_1, \ldots, a_n)$ el vector con n incógnitas, $y = (y(x_1, \ldots, y(x_m)))$ el vector con evaluaciones de la ley teórica e $y' = (y_1, \ldots, y_m)$ el vector experimental. Entonces, se debe hallar a tal que:

$$\min_{a \in \mathbb{R}^n} \|y - y'\|_2^2 = \min_{a \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{m} (y(x_j) - y_j)^2 \tag{4}$$

$$= \min_{a \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{m} ([\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x_j) a_i] - y_j)^2. \tag{5}$$

El PMCL también se puede reescribir en términos matriciales. Se debe hallar el vector $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\phi a - y'\|_2^2$ sea mínima, siendo ϕ una matriz tal que $\phi_{ij} = \phi_j(x_i)$.

Ejercicio 9
Se deja a cargo del estudiante notar la resolución eficiente de los sistemas tridiagonales, que lleva el nombre de Algoritmo de Thomas. Una vez resuelto este ejercicio, conviene analizar si es posible una resolución eficiente para la discretización de la ecuación diferencial anterior.

Ejercicio 10

Teorema 2.0.2. *El conjunto de soluciones del Problema de Mínimos Cuadrados Lineal (PMCL),* $\min_x \|Ax - b\|_2^2$ *coincide con el de las ecuaciones normales:* $A^t Ax = A^t b$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ solución de las ecuaciones normales, y tomemos $y \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Como x es solución de las ecuaciones normales, tenemos que $A^t(Ax - b) = 0$.

Luego:

$$\begin{aligned}
\|b - Ay\|_2^2 &= \|b - Ax + A(x-y)\|_2^2 \\
&= \|b - Ax\|_2^2 + \|A(x-y)\|_2^2 + (A(x-y))^t(b - Ax) + (b - Ax)^t(A(x-y)) \\
&= \|b - Ax\|_2^2 + \|A(x-y)\|_2^2,
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado en el último paso que $(A(x-y))^t(b-Ax) = (x-y)^t[A^t(b-Ax)] = 0$ y que $(b-Ax)^t(A(x-y)) = (x-y)^t[A^t(b-Ax)] = 0$. Luego, $\|b-Ay\|_2^2 \geq \|b-Ax\|_2^2$ para cualquier $y \in \mathbb{R}^n$, mostrando así que x alcanza la norma mínima en el PMCL, y es por tanto solución del PMCL.
Veamos por último que si x no es solución de las ecuaciones normales, entonces tampoco minimiza la expresión $\|Ay - b\|_2^2$. Sea $A^t(Ax - b) = z$ un vector no nulo, y elijamos y tal que $x - y = -hz$ para h pequeño positivo. Entonces:

$$\begin{aligned}
\|b - Ay\|_2^2 &= \|b - Ax\|_2^2 + h^2\|Az\|_2^2 - 2h(Az)^t(b - Ax) \\
&= \|b - Ax\|_2^2 + h^2\|Az\|_2^2 - 2h\|z\|_2^2 < \|b - Ax\|_2^2,
\end{aligned}$$

si se elige h suficientemente pequeño, donde se ha utilizado que $(Az)^t(b-Ax) = z^t[A^t(b-Ax)] = z^t z = \|z\|_2^2$. Luego, x no minimiza $\|b-Ay\|_2^2$, y por tanto no es solución del PMCL. Esto concluye el hecho que la soluciones de las ecuaciones normales y el PMCL coinciden, como se quería demostrar. $\square$

3. Ecuaciones No Lineales

Ejercicio 1

Teorema 3.0.3 (Punto Fijo)**.** *Si X es un espacio métrico completo y $\varphi : X \to X$ una r-contracción con $r < 1$, entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge al punto fijo de φ, que además es único. El resultado no depende del elemento inicial $x_0 \in X$.*

Demostración. Vamos a probar el Teorema 3.0.3 en cuatro etapas:

i Toda r-contracción es continua: sea $f : X \to X$ una r-contracción y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $x_n \to x$. Basta ver que $f(x_n) \to f(x)$. Efectivamente, como el espacio admite una métrica d tenemos que $d(f(x_n), f(x)) \leq rd(x_n, x) \to 0$. En particular, tenemos por hipótesis que φ es continua.

ii Probemos ahora que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Veamos que existe n_0 tal que si $m \geq n \geq n_0$ entonces $d(x_m, x_n) < \epsilon$. Por definición de la sucesión y la desigualdad triangular de una métrica, tenemos que:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) = d(\varphi^{(m)}(x_0), \varphi^{(n)}(x_0)) &\leq \sum_{i=0}^{m-n-1} d(\varphi^{(m-i)}(x_0), \varphi^{(m-i-1)}(x_0)) \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-n-1} r^{m-i-1} d(x_0, x_1) = d(x_0, x_1) \sum_{j=n}^{m-1} r^j = d(x_0, x_1) \frac{r^m - r^n}{r-1} \\ &= d(x_0, x, 1) \frac{r^n}{1-r} (1 - r^{m-n}) < \epsilon, \end{aligned}$$

eligiendo $m \geq n$ suficientemente grande. Luego, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como X es completo, converge a cierto elemento α perteneciente al espacio X: $\lim_n x_n = \alpha \in X$.

iii Veamos ahora α es además punto fijo de φ, es decir que $\varphi(\alpha) = \alpha$. De hecho, por continuidad de φ tenemos que:

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\lim_n x_n) = \lim_n \varphi(x_n) = \lim_n x_{n+1} = \alpha.$$

iv Finalmente, probemos la unicidad del punto fijo: si $\beta = \varphi(\beta)$, entonces:

$$d(\alpha, \beta) = d(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) \leq rd(\alpha, \beta),$$

o equivalentemente:

$$d(\alpha, \beta)(1 - r) \leq 0.$$

Como $1 - r > 0$ y $d(\alpha, \beta) \geq 0$, la única posibilidad es que $d(\alpha, \beta) = 0$, y como d es una métrica entonces $\alpha = \beta$.

Hemos probado así que en un espacio métrico completo X, la reiterada aplicación de una r-contracción a un punto inicial cualquiera $x_0 \in X$ genera una sucesión que converge siempre al único punto fijo α de la contracción, siempre que $r < 1$. □

Ejercicio 2

Corolario 3.0.1. *Si* $f : [a, b] \to [a, b]$ *tiene derivada continua en* $[a, b]$ *y* $|f'(x)| < 1$, $\forall x \in [a, b]$*, entonces existe un único punto fijo* $c \in [a, b]$ *de* f*, que es límite de toda sucesión* $x_{n+1} = f(x_n)$ *con* $x_0 \in [a, b]$*.*

Demostración. $X = [a, b]$ es un espacio métrico completo. Falta ver que la función $f : X \to X$ en las hipótesis propuestas es una r-contracción para algún $r < 1$. Dicho de otra manera, debemos hallar $r < 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq r|x - y|$ para todo $x, y \in [a, b]$.

Consideremos la función $g : [a, b] \to [-1, 1]$ tal que $g(x) = |f'(x)|$. La función g es continua por hipótesis, y está bien definida pues $|f'(x)| < 1$, $\forall x \in [a, b]$. Por el Teorema de Weierstrass, alcanza máximo y mínimo. Sea entonces $r = \max_{x\in[a,b]}\{g(x)\} = \max_{x\in[a,b]}\{|f'(x)|\}$. Probemos ahora que f es una r-contracción. Sean $x, y \in [a, b]$ arbitrarios. Entonces, por el Teorema del valor medio de Lagrange, tenemos que:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\gamma_{x,y})||x - y| \leq r|x - y|, \tag{6}$$

para algún $\gamma_{x,y}$ comprendido entre a y b. La desigualdad vale por definición de r. Entonces, la función f es una r-contracción en $X = [a, b]$. Por el Teorema 3.0.3, f tiene un único punto fijo $c \in [a, b]$, que es límite de toda sucesión $x_{n+1} = f(x_n)$ con $x_0 \in [a, b]$, como se quería demostrar. $\square$

Ejercicio 3

Teorema 3.0.4 (Orden de un MIG)**.** *Sea* α *punto fijo de* $g \in \mathbb{C}^p$*, y* x_0 *elegido de modo que la sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por el MIG* $x_{n+1} = g(x_n)$ *converge a* α*.*
Si las derivadas i-ésimas de g *verifican* $g^{(i)}(\alpha) = 0$ *para todo* $i = 1, \ldots, p-1$ *pero* $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$*, entonces la sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiene orden de convergencia* p*.*

Demostración. El error del paso $n+1$ es $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha)$, por ser α punto fijo de g. Para cada natural n, apliquemos un desarrollo de Taylor de $g(x_n)$ centrado en α. Como las derivadas de g son todas nulas hasta $p - 1$ inclusive, tenemos que:

$$|e_{n+1}| = |g(x_n) - g(\alpha)| = |\frac{g^{(p)}(\gamma_n)}{p!}||x_n - \alpha|^p = \frac{|g^{(p)}(\gamma_n)|}{p!}|e_n|^p,$$

para cierto γ_n comprendido entre x_n y α. Como sabemos que x_n converge a α, entonces $d(\gamma_n, \alpha) \leq d(x_n, \alpha) \to 0$, y en particular la sucesión $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a α. Como la función $|g^{(p)}|$ es continua, entonces $|g^{(p)}|(\gamma_n) \to |g^{(p)}|(\alpha)$. Reescribiendo, tenemos que para todo n existe γ_n comprendido entre α y x_n tal que:

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \frac{|g^{(p)}(\gamma_n)|}{p!} \tag{7}$$

Finalmente, tomando límite con n tendiendo a infinito, tenemos que:

$$\lim_n \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \lim_n \frac{|g^{(p)}(\gamma_n)|}{p!} = \frac{|g^{(p)}(\alpha)|}{p!} = \beta, \tag{8}$$

Por hipótesis $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$. Por definición tenemos que el orden de convergencia del MIG es p, y su tasa es $\beta > 0$. $\square$

4. Interpolación

Ejercicio 1
Las funciones lineales a trozos son densas en las continuas bajo la medida integral:
Teorema 4.0.5. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $\epsilon > 0$ arbitrarios. Existe una función g que es lineal a trozos interpolante en algunos puntos de f, tal que $\int_a^b |g(x) - f(x)| < \epsilon$.*

Demostración. Utilizaremos un resultado clásico, que asegura que la combinación lineal de funciones características son densas en las continuas [1]. Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, la función característica de I vale $1_I(x) = 1$ si $x \in I$, mientras que $1_I(x) = 0$ en otro caso. Probemos que es posible aproximar tanto como se desea a una función rectangular o característica, mediante funciones lineales a trozos.
Sin pérdida de generalidad, sea $I = [a,b]$ (el mismo razonamiento aplica si se abre uno o ambos extremos, o si $b = +\infty$).

Consideremos la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones tales que $f_n(x) = 1$ si $x \in [a,b]$, $f_n(x) = 0$ si $x \notin [a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}]$ y las porciones con valores 0 y 1 se unen mediante segmentos: $f_n(x) = n(x - (a - \frac{1}{n}))$, si $x \in [a - \frac{1}{n}, a]$ y $f_n(x) = n(x - (b + \frac{1}{n}))$ si $x \in [b.b + \frac{1}{n}]$. Veamos ahora que $f_n \to f$ bajo la medida integral. Por simetría:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - 1_{[a,b]}(x)|dx &= \int_{a-\frac{1}{n}}^{a} 2n(x - (a - \frac{1}{n})) \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} 2nudu = \frac{1}{n} < \epsilon,\end{aligned}$$

si se elige un entero $n : n > \frac{1}{\epsilon}$. Luego, las funciones lineales a trozos aproximan a las características. Como una combinación lineal de características aproximan a las funciones continuas, tenemos por transitiva que las poligonales aproximan (son densas) a las funciones continuas, como se quería demostrar. □

Por el Teorema de Stone-Weierstrass, los polinomios son también densos en las funciones continuas.

Ejercicio 2
Demostrar el Teorema de acotación del error en Interpolación Polinómica:

Teorema 4.0.6. *Sea f de clase C^{p+1} en el intervalo $[x_0, x_n]$ y p_n el polinomio interpolante a f por las abscisas $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Luego, para cada $x \in [x_0, x_n]$ existe $\gamma(x) \in [x_0, x_n]$ tal que se cumple la siguiente igualdad para el error $E(x)$:*

$$E(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{p+1}}{(p+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

[1] De hecho, en el Capítulo 2, Teorema 2.28 del libro "Real Analysis" de Gerald Folland se prueba que las funciones características son densas en una familia aún más rica que las continuas, que son las funciones medibles.

Demostración. Tomemos $x \in [x_0, x_n]$ fijo. Si $x = x_i$ para algún i, la igualdad es evidente, pues $E(x_i) = 0$. Supongamos entonces que x no coincide con ninguna de las abscisas. Consideremos la función auxiliar $F : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - (f(x) - p_n(x)) \frac{\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}.$$

Se observa que $F(x_i) = 0$ para cada $i = 0, \ldots, n$, y además $F(x) = 0$, por lo que F tiene al menos $n + 2$ raíces en $[x_0, x_n]$. Como f es de clase $\mathcal{C}^p$, resulta que F también es de clase $\mathcal{C}^p$. Sean $p_0 < p_1 \ldots < p_{n+1}$ las $n + 2$ raíces de F. Aplicando el Teorema de Rolle en cada intervalo podemos asegurar que existen $n + 1$ raíces $p'_0 < \ldots < p'_n$ para F'. Aplicando reiteradas veces el teorema de Rolle es posible asegurar la existencia de una raíz $\gamma_x \in [x_0, x_n]$ de la función $F^{(n+1)}$. Como p_n es un polinomio de grado n o menos, tenemos que su derivada de orden $n+1$ es nula. Entonces, al derivar $n+1$ veces la función F tenemos que:

$$F^{(n+1)}(\gamma_x) = f^{(n+1)}(\gamma_x) - (n + 1)! \frac{f(x) - p_n(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} = 0.$$

Finalmente despejando $f(x) - p_n(x)$ se prueba el enunciado. $\square$

5. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ejercicio 1

Teorema 5.0.7. *Todo sistema de ecuaciones difefrenciales lineal de grado n:*

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

con n datos iniciales $y^i(t_0) = y^{(i)}(0)$, $i = 0, \ldots, n-1$, es un Problema de Valores Iniciales (PVI).

Demostración. Vamos a probar que podemos llevar tal sistema a otro matricial de la forma $\dot{x} = Ax$, con vector inicial x^0, que es un Problema de Valores Iniciales. Definimos el vector de funciones $x = (x_1, \ldots, x_n)$, donde $x_i(t) = y^{(i-1)}(t)$. En palabras, la primera coordenada es la incógnita, $y(t)$, la segunda es $y'(t)$, y así sucesivamente.
Utilizando la definición del vector de incógnitas x y la ecuación diferencial, tenemos que:

$$x'_i(t) = x_{i+1}(t),\ \forall i = 1, \ldots, n-1$$
$$x'_n(t) = -a_{n-1}x_n(t) - \ldots - a_1 x_2(t) - a_0 x_1(t)$$

Las n ecuaciones anteriores junto con el dato inicial $x_i(t_0) = y^{(i-1)}(0)$, $i = 1, \ldots, n$ se pueden representar en términos matriciales como $\dot{x} = Ax$, con vector inicial x^0, como queríamos. $\square$

Ejercicio 2

Teorema 5.0.8. *Todo sistema $\dot{x} = Ax$, con vector inicial x^0 tiene una única solución.*

Demostración. Probemos que la función $f(x,t) = Ax$ es de Lypschitz. en efecto, si consideramos la norma operador asociada a una norma vectorial en $\mathbb{R}^n$ tenemos que $\|f(x) - f(y)\| = \|A(x-y)\| \leq \|A\|\|x-y\|$, para cualquier $x, y \in \mathbb{R}^n$. Luego, f es de Lypschitz en la primera variable, y continua en la segunda variable. Con un dato inicial x^0, estamos en las condiciones del Teorema de Picard, que asegura existencia y unicidad de la solución. $\square$

Más aún, sabemos en este caso que la solución es $x(t) = e^{A(t-t_0)}x^0$.

Corolario 5.0.2. *Toda ecuación diferencial lineal de orden n con n datos iniciales tiene una única solución.*

Sin embargo, no todo Problema de Valores Iniciales tiene una única solución. Se deja como ejercicio hallar al menos dos soluciones del PVI $y' = 3y^{2/3}$ con dato inicial $y(0) = 0$.

Ejercicio 3
Para calcular el orden del error global en Euler hacia adelante vamos a utilizar que el error

global tiene un orden menos que el local. El error local es, por definición, la diferencia entre el valor correcto $y(x_{n+1})$ y el valor y^*_{n+1} que se conseguiría si tuviésemos que $y_n = y(x_n)$:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y^*_{n+1} \\ &= y(x_n) + hf(x_n, t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\gamma_n) - (y(x_n) + hf(x_n, t_n)) \\ &= \frac{h^2}{2} y''(\gamma_n), \end{aligned}$$

para cierto γ_n comprendido entre x_n y $x_n + h$. Luego, el error local es de orden 2, y el error global es de oden uno. El método de Euler es consistente de orden 1.
Un razonamiento análogo aplica para probar que Euler hacia atrás es consistende de orden 1, y Trapecio es consistente de orden 2.

Ejercicio 4
Vamos a obtener la región de estabilidad bajo el Problema Test en los tres métodos anteriores. Recuérdese que el Problema Test consiste en $y' = qy$ para cierto número complejo q, sujeto a la condición inicial $y_0 = 1$. Debemos aplicar el método correspondiente a este problema para un paso h positovo, y estudiar qué conjunto de complejos $z = hq$ hacen que la sucesión obtenida permanezca acotada.

1. Euler hacia adelante: $y_{n+1} = y_n + hqy_n = (1 + hq)y_n$. Luego por inducción se prueba que $y_n = (1 + hq)^n y_0 = (1 + hq)^n = (1 + z)^n$. La región para Euler hacia adelante consiste entonces en los complejos z tales que $|1 + z| \leq 1$, es decir, el disco de radio 1 centrado en el complejo $-1 + 0i$.

2. Euler hacia atrás: $y_{n+1} = y_n + hqy_{n+1}$, y por inducción se consigue que $y_n = (1 - hq)^{-n} = (1 - z)^{-n}$. La región de estabilidad es los complejos z tales que $|1 - z| \geq 1$, es decir, aquellos que caen fuera del disco unidad de centro $1 + 0i$.

3. Trapecio: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(qy_n + qy_{n+1})$, y reescribiendo tenemos que $y_{n+1}(1 - hq/2) = y_n(1 + hq/2)$. Por inducción se tiene que $y_n = \frac{(1+z/2)^n}{(1-z/2)^n}$. La región de estabilidad es los complejos que cumplen $|1 + z/2| \leq |1 - z/2|$, es decir, que están más cerca del complejo -1 que de 1. Esto es todo el semiplano con parte real negativa o nula.

Se observa que de los tres métodos aquí estudiados, solo el método de Euler hacia adelante tiene una región de estabilidad pobre, acotada. En cambio, es explícito, ganando en simplicidad. Por otra parte, el que presenta mayor orden de consistencia es el del Trapecio, que usualmente requiere resolver ecuaciones no lineales para su avance, por ser implícito.