Métodos Numéricos: Resumen y ejemplos
Tema 7: Valores y vectores propios

Francisco Palacios
Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Manresa
Universidad Politécnica de Cataluña

Abril 2009, Versión 1.7

Contenido

---

1 Definiciones y propiedades

Notaciones

- $\mathbf{A}$ matriz cuadrada $n \times n$.
- $\mathbf{v}$ vector de dimensión n.
- λ escalar.

Objetivo
Buscar escalares λ y vectores *no nulos* $\mathbf{v}$ tales que

$$\mathbf{A}\,\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \implies \begin{cases} \lambda \text{ valor propio de } \mathbf{A}. \\ \mathbf{v} \text{ vector propio asociado a } \lambda. \end{cases}$$

Polinomio característico

$$p(\lambda) = \det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right).$$

Los valores propios de $\mathbf{A}$ son las raíces del polinomio característico

$$\boxed{\lambda \text{ valor propio} \iff p(\lambda) = 0.}$$

Cálculo de vectores propios

Para cada valor propio λ resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\boxed{(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{v} = 0,}$$

que debe ser un sistema compatible indeterminado.

Espectro. Radio espectral

El *espectro de una matriz* es el conjunto de sus valores propios, lo representamos por $\sigma(\mathbf{A})$.

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda : \lambda \text{ es valor propio de } \mathbf{A}\}.$$

El *radio espectral* de la matriz es el módulo máximo de sus valores propios, lo representamos por $\rho(\mathbf{A})$.

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es valor propio de } \mathbf{A}\}.$$

Diagonalización

Sea $\mathbf{A}$ una matriz $n \times n$.
Si $\mathbf{A}$ tiene n valores propios distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ son vectores propios asociados, entonces

$$\boxed{\mathbf{D} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}.}$$

- $\mathbf{D}$ es matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

- $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\cdots|\mathbf{v}_n)$ tiene en columnas los vectores propios de $\mathbf{A}$.

Ejemplo 1.1 *Dada la matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

calcula:
(a) Valores propios. Radio espectral.
(b) Vectores propios asociados.
(d) Diagonaliza la matriz $\mathbf{A}$*.*

(a) Cálculo de los valores propios.

Empezamos por calcular el polinomio característico

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (3-\lambda)^2(2-\lambda) - (3-\lambda) - (3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)\left[(3-\lambda)(2-\lambda) - 2\right] \\ &= (3-\lambda)\underbrace{\left(\lambda^2 - 5\lambda + 4\right)}_{\text{factorizamos}} \end{aligned}$$

Factorizamos el polinomio característico.

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4, \\ \frac{5-3}{2} = 1. \end{cases}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(3-\lambda)(\lambda - 4).$$

Los valores propios son las soluciones de la ecuación característica $p(\lambda) = 0$.

$$\boxed{\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 4.}$$

El espectro de $\mathbf{A}$ es

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{1, 3, 4\}.$$

El radio espectral de $\mathbf{A}$ es

$$\rho(\mathbf{A}) = 4.$$

(b) Cálculo de vectores propios.

Para cada valor propio λ, tenemos que resolver el sistema $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\ \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Vectores propios asociados a $\lambda = 1$.

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\ \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ -x + y - z = 0, \\ -y + 2z = 0. \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por reducción.

$$(1^a + 2 \cdot 2^a) \to 1^a \quad \begin{cases} y - 2z = 0, \\ -x + y - z = 0, \\ -y + 2z = 0. \end{cases}$$

Eliminamos la tercera ecuación y resolvemos paramétricamente

$$\left\{\begin{array}{l} y-2z=0, \\ -x+y-z=0, \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=t, \\ y=2t, \\ z=t, \quad t\in\mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Los vectores propios asociados a $\lambda=1$ son de la forma

$$\mathbf{v}=t\mathbf{v}_1 \ \text{, con } \mathbf{v}_1=\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}\right).$$

Vectores propios asociados a $\lambda=3$. Tenemos el sistema

$$(\mathbf{A}-3\mathbf{I})\ \mathbf{v}=\mathbf{0},$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right),$$

$$\left\{\begin{array}{l} -x-y-z=0, \\ -y=0. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=t, \quad t\in\mathbb{R}. \\ y=0, \\ z=-t. \end{array}\right.$$

Los vectores propios asociados a $\lambda=3$ son de la forma

$$\mathbf{v}=t\mathbf{v}_2, \text{ con } \mathbf{v}_2=\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right).$$

Vectores propios asociados a $\lambda=4$. Resolvemos

$$(\mathbf{A}-4\mathbf{I})\ \mathbf{v}=0,$$

$$\left(\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right).$$

$$\left\{\begin{array}{l} -x-y=0, \\ -x-2y-z=0, \\ -y-z=0. \end{array}\right. \Rightarrow \quad (2^a-1^a)\rightarrow(2^a) \left\{\begin{array}{l} -x-y=0, \\ -y-z=0, \\ -y-z=0. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=0, \\ y+z=0. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=t, \quad t\in\mathbb{R}. \\ y=-t, \\ z=t. \end{array}\right.$$

Vectores propios asociados a $\lambda=4$

$$\mathbf{v}=t\,\mathbf{v}_3, \text{ con } \mathbf{v}_3=\left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right).$$

(c) Diagonalización

Formamos la base de vectores propios

$$\mathbf{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\,.$$

La matriz de cambio tiene en columnas los vectores propios

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalización. Se cumple

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$$

donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Verificamos la diagonalización

$$\mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Ejemplo 1.2 *Cálculo de* $\mathbf{V}^{-1}$ *por Gauss-Jordan.*

Partimos de $(\mathbf{V}|\mathbf{I}_3)$ y operamos por filas hasta obtener $(\mathbf{I}_3|\mathbf{V}^{-1})$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$
\begin{array}{r}
(2^a - 2\times 1^a) \to (2^a) \\
(3^a - 1^a) \to (3^a)
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{array}\right),
$$

$$
\begin{array}{r}
(-3^a) \to (2^a) \\
(2^a) \to (3^a)
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0
\end{array}\right),
$$

$$
(3^a + 2^a) \to (3^a)
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -1
\end{array}\right),
$$

$$
\begin{array}{r}
\left(\frac{1}{2}\times 2^a\right) \to (2^a) \\
\left(-\frac{1}{3}\times 3^a\right) \to (3^a)
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\
0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3
\end{array}\right),
$$

$$
(1^a - 2^a - 3^a) \to (1^a)
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/6 \\
0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\
0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3
\end{array}\right),
$$

Resulta

$$
\mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}. \quad \square
$$

2 Método de la potencia

2.1 Definiciones

Valor propio dominante

Es el de mayor módulo. Si

$$
|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|,
$$

entonces λ_1 es el *valor propio dominante.*

Vector normalizado

Dado un vector

$$
\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},
$$

decimos que la componente v_j es una *componente dominante* si

$$
|v_j| = \|\mathbf{v}\|_\infty = \max_j |v_j|.
$$

Observa que un vector puede tener más de una componente dominante, pero todas las componentes dominantes deben tener el mismo valor absoluto.
Un vector está normalizado si sus componentes dominantes valen ± 1. Si v_{dom} es una componente dominante de $\mathbf{v}$, podemos obtener un vector normalizado $\hat{\mathbf{v}}$ en la dirección de $\mathbf{v}$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{v_{dom}} \cdot \mathbf{v}.$$

Ejemplo 2.1 *Dado el vector*

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

determina las componente dominantes y calcula un vector normalizado.

La componente dominante es

$$v_{\mathrm{dom}} = v_3 = -4,$$

vemos que

$$|v_3| = \|\mathbf{v}\|_\infty .$$

Vector normalizado

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{v_{\mathrm{dom}}}\mathbf{v} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/2 \\ 1 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

Observamos que la componente dominante el vector normalizado vale 1. $\square$

2.2 Método de la potencia

Dada una matriz $\mathbf{A}$ matriz de dimensión $n \times n$, el objetivo es calcular el valor propio dominante y un vector propio asociado.
Supondremos que la matriz $\mathbf{A}$ tiene valores propios distintos

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|,$$

con vectores propios asociados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$. También suponemos que tenemos un vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ que se puede escribir

$$\mathbf{x}^{(0)} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n \quad \text{con } \alpha_1 \neq 0.$$

Método

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}^{(j+1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(j)}, \\ c_{j+1} = \text{ componente dominante de } \mathbf{y}^{(j+1)}, \\ \mathbf{x}^{(j+1)} = \frac{1}{c_{j+1}}\mathbf{y}^{(j+1)} \ \left(\text{Normalizado de } \mathbf{y}^{(j+1)}\right). \end{array} \right.$$

Si las hipótesis citadas son ciertas, entonces se cumple:
• *La sucesión de escalares* (c_j) *tiende al valor propio dominante* λ_1

$$c_1, c_2, \cdots, c_j, \cdots \overset{j\to\infty}{\to} \lambda_1.$$

• *La sucesión de vectores* $\left(\mathbf{x}^{(j)}\right)$ *tiende a un vector propio normalizado asociado a* λ_1 .

$$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \cdots, \mathbf{x}^{(j)} \ \cdots \overset{j\to\infty}{\to} \hat{\mathbf{v}}_1.$$

Ejemplo 2.2 *Aproxima el valor propio dominante y un vector propio asociado de la matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Inicia las iteraciones con

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fase 1.

$$\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$c_1 = 2 \quad (\text{componente dominante de } \mathbf{y}^{(0)}),$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{2}\mathbf{y}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fase 2.

$$\mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$c_2 = 3,$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ -0.\,6667 \\ 1.0 \end{pmatrix}.$$

Fase 3.

$$\mathbf{y}^{(3)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 \\ -0.\,6667 \\ 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.6667 \\ -3.3333 \\ 3.6667 \end{pmatrix},$$

$$c_3 = 3.6667,$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.9091 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fase 4.

$$\mathbf{y}^{(4)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3.9091 \\ -3.8181 \\ 3.9091 \end{pmatrix},$$

$$c_4 = 3.9091,$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = \frac{1}{c_4}\mathbf{y}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.9767 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fase 5.

$$\mathbf{y}^{(5)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 3.9767 \\ -3.9534 \\ 3.9767 \end{pmatrix},$$

$$c_5 = 3.9767,$$

$$\mathbf{x}^{(5)} = \frac{1}{c_5}\mathbf{y}^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.9942 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fase 6.

$$\mathbf{y}^{(6)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} 3.9942 \\ -3.9883 \\ 3.9942 \end{pmatrix},$$

$$c_6 = 3.9942,$$

$$\mathbf{x}^{(6)} = \frac{1}{c_6}\mathbf{y}^{(6)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.9985 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fase 7.

$$\mathbf{y}^{(7)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(6)} = \begin{pmatrix} 3.9985 \\ -3.9970 \\ 3.9985 \end{pmatrix}.$$

$$c_7 = 3.9985.$$

$$\mathbf{x}^{(7)} = \frac{1}{c_7}\mathbf{y}^{(7)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.9996 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fase 8.

$$\mathbf{y}^{(8)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(7)} = \begin{pmatrix} 3.9996 \\ -3.9993 \\ 3.9996 \end{pmatrix},$$

$$c_8 = 3.9996,$$

$$\mathbf{x}^{(8)} = \frac{1}{c_8}\mathbf{y}^{(8)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.9999 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fase 9.

$$\mathbf{y}^{(9)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(8)} = \begin{pmatrix} 3.9999 \\ -3.9998 \\ 3.9999 \end{pmatrix},$$

$$c_9 = 3.9999,$$

$$\mathbf{x}^{(9)} = \frac{1}{c_9}\mathbf{y}^{(9)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Fase 10.

$$\mathbf{y}^{(10)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$C_{10} = 4,$$

$$\mathbf{x}^{(10)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^{(9)}.$$

El valor propio dominante es

$$\lambda = \lim_j c_j = 4,$$

y un vector propio asociado es

$$\mathbf{v} = \lim_j \mathbf{x}^{(j)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En el Ejemplo 1.1, hemos visto que $\mathbf{A}$ tiene valores propios

$$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 1,$$

y que los vectores propios asociados a λ_1 son de la forma

$$\mathbf{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = t\mathbf{v}_1$$

$\mathbf{v}_1$ está normalizado. $\square$

3 Método de la potencia inversa

Objetivo. Calcular el *valor propio de módulo mínimo* y un vector propio asociado. Es decir si los valores propios de $\mathbf{A}$, que cumplen

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0,$$

queremos calcular λ_n.

Valores propios de la matriz inversa
Sean

- $(\lambda, \mathbf{v})$ *par valor-vector propio de* $\mathbf{A}$.
- $\mathbf{A}$ *invertible.*

Entonces

- $\left(\frac{1}{\lambda}, \mathbf{v}\right)$ *es un par valor-vector propio de* $\mathbf{A}^{-1}$.

Demostración.
Sabemos que se cumple

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

premultiplicamos por la matriz inversa

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{v}) = \mathbf{A}^{-1}(\lambda\mathbf{v}),$$

$$\mathbf{I}_n\mathbf{v} = \lambda\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\mathbf{v},$$

$$\mathbf{v} = \lambda\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\mathbf{v}.$$

Si una matriz es invertible, sus valores propios no pueden ser nulos (¿por qué?), por lo tanto podemos multiplicar la útima igualdad por $1/\lambda$ y resulta

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}.$$

Es decir, $\mu = 1/\lambda$ es un valor propio de $\mathbf{A}^{-1}$ con vector propio asociado $\mathbf{v}$. □

Método
Sea $\mathbf{A}$ matriz $n \times n$ invertible con valores propios

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0$$

y vectores propios asociados $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.
Según hemos visto, la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ tiene valores propios

$$\mu_j = \frac{1}{\lambda_j}.$$

Como se cumple
$$\left|\frac{1}{\lambda_1}\right| < \left|\frac{1}{\lambda_2}\right| < \cdots < \left|\frac{1}{\lambda_n}\right|,$$
resulta
$$|\mu_1| < |\mu_2| < \cdots < |\mu_n|$$
Además $\mathbf{v}_j$ es un vector propio asociado a μ_j.

1. Calculamos $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$
2. Aplicamos el *método de la potencia* a $\mathbf{B}$ y obtenemos el par
$$(\ \mu_{\max}, \mathbf{v}\ ) \rightarrow \begin{cases} \mu_{\max} \text{ valor propio dominante de } \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}, \\ \mathbf{v} \text{ vector propio asociado a } \mu_{\max}. \end{cases}$$
3. Entonces
$$\begin{cases} \lambda_{\min} = \dfrac{1}{\mu_{\max}} \text{ es el valor propio de módulo mínimo de } \mathbf{A} \\ \mathbf{v} \text{ es un vector propio asociado a } \lambda_{\max}. \end{cases}$$

Ejemplo 3.1 *Dada la matriz*
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -18 & 40 \\ -12 & 26 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcula el valor propio de módulo mínimo y un vector propio asociado. Toma como vector inicial
$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Verifica el resultado.

(a) Empezamos calculando la inversa de $\mathbf{A}$.
$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -18 & 40 \\ -12 & 26 \end{vmatrix} = -468 + 480 = 12$$
$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 26 & -40 \\ 12 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/6 & -10/3 \\ 1 & -3/2 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2.1667 & -3.3333 \\ 1 & -1.5 \end{pmatrix}$$

Fase 0.
$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fase 1.

$$\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2.1667 & -3.3333 \\ 1 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.1666 \\ -0.5 \end{pmatrix},$$

$$c_1 = -1.1666,$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{c_1}\mathbf{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.4286 \end{pmatrix}.$$

Fase 2.

$$\mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2.1667 & -3.3333 \\ 1 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.4286 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7381 \\ 0.3571 \end{pmatrix},$$

$$c_2 = 0.7381,$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.4839 \end{pmatrix}.$$

Fase 3.

$$\mathbf{y}^{(3)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.5538 \\ 0.2742 \end{pmatrix},$$

$$c_3 = 0.5538,$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = \frac{1}{c_3}\mathbf{y}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.4951 \end{pmatrix}.$$

Fase 4.

$$\mathbf{y}^{(4)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.5162 \\ 0.2574 \end{pmatrix},$$

$$c_4 = 0.5162,$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = \frac{1}{c_4}\mathbf{y}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.4984 \end{pmatrix}.$$

Fase 5.

$$\mathbf{y}^{(5)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.5052 \\ 0.2524 \end{pmatrix},$$

$$c_4 = 0.5054,$$

$$\mathbf{x}^{(5)} = \frac{1}{c_5}\mathbf{y}^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.4995 \end{pmatrix}.$$

Fase 6

$$\mathbf{y}^{(6)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.5018 \\ 0.2508 \end{pmatrix},$$

$$c_6 = 0.5018,$$

$$\mathbf{x}^{(6)} = \frac{1}{c_6}\mathbf{y}^{(6)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.4998 \end{pmatrix}.$$

Fase 7.

$$\mathbf{y}^{(7)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(6)} = \begin{pmatrix} 0.5006 \\ 0.2503 \end{pmatrix},$$

$$c_7 = 0.5006,$$

$$\mathbf{x}^{(7)} = \frac{1}{c_7}\mathbf{y}^{(7)} = \begin{pmatrix} 1. \\ 0.4999 \end{pmatrix}.$$

Fase 8.

$$\mathbf{y}^{(8)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(7)} = \begin{pmatrix} 0.5002 \\ 0.2501 \end{pmatrix},$$

$$c_8 = 0.5002,$$

$$\mathbf{x}^{(8)} = \frac{1}{c_8}\mathbf{y}^{(8)} = \begin{pmatrix} 1. \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Fase 9.

$$\mathbf{y}^{(9)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(8)} = \begin{pmatrix} 0.5001 \\ 0.2501 \end{pmatrix},$$

$$c_9 = 0.5001,$$

$$\mathbf{x}^{(9)} = \frac{1}{c_9}\mathbf{y}^{(9)} = \begin{pmatrix} 1. \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Podemos tomar como valor propio de módulo máximo de $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mu_{\max} = 0.500,$$

vector propio asociado de $\mu_{\max}$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Entonces, el valor propio de módulo mínimo de $\mathbf{A}$ será

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{\mu_{\max}} = \frac{1}{0.5} = 2,$$

con vector propio asociado

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

(b) Para verificar el resultado, calculamos los valores y vectores propios de $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -18 & 40 \\ -12 & 26 \end{pmatrix}.$$

Polinomio característico

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -18-\lambda & 40 \\ -12 & 26-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-18-\lambda)(26-\lambda)+480 \\ &= \lambda^2-8\lambda+12. \end{aligned}$$

Valores propios

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0 \Rightarrow \lambda^2-8x+12=0, \\ \lambda &= \frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2} = \frac{8\pm\sqrt{16}}{2} = \begin{cases} \frac{8+4}{2}=6, \\ \frac{8-4}{2}=2. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 2.}$$

El vector propio de módulo mínimo es $\lambda_2 = 2$.
Calculamos los vectores propios asociado al valor propio de módulo mínimo.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}-2\mathbf{I})\,\mathbf{v} &= 0, \\ \begin{pmatrix} -20 & 40 \\ -12 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -20x+40y=0, \\ -12x+24y=0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x+2y=0, \\ -x+2y=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2t, \\ y=t, \quad t\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Los vectores propios asociados a $\lambda = 2$ son de la forma

$$\mathbf{v} = t\mathbf{v}_1, \quad \text{con } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un vector propio normalizado es

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

4 Método de la potencia inversa desplazada

Objetivo Aproximar un valor propio λ y un vector propio asociado a partir de una estimación $\bar{\lambda} \backsimeq \lambda$.

Valores propios de $\mathbf{C} = (\mathbf{A}-\alpha\mathbf{I})$.
Sea

- $(\lambda, \mathbf{v})$ *par de valor-vector propio de* $\mathbf{A}$

Entonces

- $(\lambda - \alpha, \mathbf{v})$ *es par valor-vector propio de* $\mathbf{C} = (\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})$.

Demostración

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v} \\ \mathbf{A}\mathbf{v} - \alpha\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v} - \alpha\mathbf{v} \\ (\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})\,\mathbf{v} &= (\lambda - \alpha)\,\mathbf{v} \quad \square \end{aligned}$$

Fundamento del método

Si $\bar{\lambda}$ está próximo al valor propio λ de $\mathbf{A}$ entonces $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \bar{\lambda}\mathbf{I}$ tiene un valor propio $\delta = \lambda - \bar{\lambda}$ con $|\delta|$ pequeño y podemos aplicar el método de la potencia inversa a $\mathbf{C}$ para determinar $\delta = \lambda - \bar{\lambda}$.

Partimos de una matriz $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$ con valores propios

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_j| > \cdots > |\lambda_n|,$$

y vectores propios asociados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Disponemos además de una estimación inicial $\bar{\lambda} \backsimeq \lambda_j$. El objetivo es aproximar el valor de λ_j y obtener un vector propio asociado.

1. Calculamos $\mathbf{C} = A - \bar{\lambda}I$ que tiene un valor propio de módulo mínimo
$$\delta_{\min} = \lambda_j - \bar{\lambda}.$$

2. Calculamos $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}$ que tiene un valor propio dominante
$$\mu_{\max} = \frac{1}{\delta_{\min}} = \frac{1}{\lambda_j - \bar{\lambda}},$$
y aplicamos el método de la potencia a $\mathbf{B}$ para obtener $\mu_{\max}$ y un vector propio asociado $\mathbf{v}$.

3. Entonces
$$\mu_{\max} = \frac{1}{\lambda_j - \bar{\lambda}} \Rightarrow \boxed{\lambda_j = \frac{1}{\mu_{\max}} + \bar{\lambda}.}$$

Ejemplo 4.1 *Sabemos que la matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

tiene un valor propio $\lambda \cong 2.8$. *Calcula el valor de* λ *y determina un vector propio asociado. Empieza las iteraciones con el vector*

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos la aproximación $\bar{\lambda} = 2.8$. Calculamos $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \bar{\lambda}\mathbf{I}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \bar{\lambda}\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.8 & 0 & 0 \\ 0 & 2.8 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & -1 & 0 \\ -1 & -0.8 & -1 \\ 0 & -1 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Vamos a calcular el valor propio de módulo mínimo de $\mathbf{C}$ aplicando el método de la potencia inversa. Calculamos $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}$.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2.6852 & -.46296 & -2.3148 \\ -.46296 & -9.2593 \times 10^{-2} & -.46296 \\ -2.3148 & -.46296 & 2.6852 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos el método de la potencia a $\mathbf{B}$ y determinamos $\mu_{\max}$.
Fase 0.

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Fase 1

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)} &= \mathbf{B}\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2.6852 & -.46296 & -2.3148 \\ -.46296 & -9.2593 \times 10^{-2} & -.46296 \\ -2.3148 & -.46296 & 2.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10.648 \\ -2.8704 \\ -9.3518 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$c_1 = 10.648,$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \frac{1}{c_1}\mathbf{y}^{(1)} = \frac{1}{10.648} \begin{pmatrix} 10.648 \\ -2.8704 \\ -9.3518 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ -.26957 \\ -.87827 \end{pmatrix}.$$

Fase 2.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(2)} &= \mathbf{B}\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2.6852 & -.46296 & -2.3148 \\ -.46296 & -9.2593 \times 10^{-2} & -.46296 \\ -2.3148 & -.46296 & 2.6852 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 \\ -.26957 \\ -.87827 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4.843 \\ -3.1396 \times 10^{-2} \\ -4.5483 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$c_2 = 4.843,$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \frac{1}{4.843} \begin{pmatrix} 4.843 \\ -3.1396 \times 10^{-2} \\ -4.5483 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ -6.4828 \times 10^{-3} \\ -.93915 \end{pmatrix}.$$

Fase 3.

$$\mathbf{y}^{(3)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4.8621 \\ -2.7571 \times 10^{-2} \\ -4.8336 \end{pmatrix},$$

$$c_3 = 4.8621,$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = \frac{1}{c_3}\mathbf{y}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ -5.6706 \times 10^{-3} \\ -.99414 \end{pmatrix}.$$

Fase 4.

$$\mathbf{y}^{(4)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 4.9891 \\ -2.1879 \times 10^{-3} \\ -4.9816 \end{pmatrix},$$

$$c_4 = 4.9891,$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = \frac{1}{c_4}\mathbf{y}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ -4.3854 \times 10^{-4} \\ -.9985 \end{pmatrix}.$$

Fase 5.

$$\mathbf{y}^{(5)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 4.9967 \\ -6.5383 \times 10^{-4} \\ -4.9958 \end{pmatrix},$$

$$c_4 = 4.9967,$$

$$\mathbf{x}^{(5)} = \frac{1}{c_5}\mathbf{y}^{(5)} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ -1.3085 \times 10^{-4} \\ -.99982 \end{pmatrix}.$$

Fase 6.

$$\mathbf{y}^{(6)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} 4.9996 \\ -7.1217 \times 10^{-5} \\ -4.9995 \end{pmatrix},$$

$$c_6 = 4.9996,$$

$$\mathbf{x}^{(6)} = \frac{1}{c_6}\mathbf{y}^{(6)} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ -1.4245 \times 10^{-5} \\ -.99998 \end{pmatrix}.$$

Fase 7.

$$\mathbf{y}^{(7)} = \left(\mathbf{B}^{-1}\right)\mathbf{x}^{(6)} = \begin{pmatrix} 5.0 \\ -7.9402 \times 10^{-6} \\ -4.9999 \end{pmatrix},$$

$$c_7 = 5,$$

$$\mathbf{x}^{(7)} = \frac{1}{c_7}\mathbf{y}^{(7)} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ -1.588 \times 10^{-6} \\ -.99998 \end{pmatrix}.$$

Fase 8.

$$\mathbf{y}^{(8)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(7)} = \begin{pmatrix} 5.0 \\ -9.1122 \times 10^{-6} \\ -4.9999 \end{pmatrix},$$

$$c_8 = 5,$$

$$\mathbf{x}^{(8)} = \frac{1}{c_8}\mathbf{y}^{(8)} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ -1.8224 \times 10^{-6} \\ -.99998 \end{pmatrix}.$$

Podemos tomar como valor propio de módulo máximo de $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}$

$$\mu_{\max} = 5,$$

El vector propio asociado de $\mu_{\max}$, con 4 decimales es

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

El valor propio de $\mathbf{A}$ próximo a $\bar{\lambda} = 2.8$ es

$$\lambda = \frac{1}{\mu_{\max}} + \bar{\lambda} = \frac{1}{5} + 2.8 = 3.0$$

y el vector propio asociado es

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \square$$