Билет 10 Аксенов А.Е.

1) Начально-краевая задача для ур-ия теплопроводности на полубесконечной прямой с однородными краевыми условиями. Метод продолжения для граничных условий 1-го и 2-го родов.

Метод ур-ия применим к следующей ~~[illegible]~~ начально-краевой задаче теплопроводности в полуограниченной области:

$$u_t = a^2 u_{xx},\ x>0,\ t>0 \quad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \geq 0 \quad (2)$$

$$u(0,t) = \mu(t),\ t>0 \quad (3)$$

Вместо граничного условия 1 рода может быть задано граничное условие 2 рода (тепловой поток):

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \mu(t),\ x=0,\ t>0$$

В этом случае для ф-ии $u_1(x,t)$ рассматр. задача:

$$u_{1t} = a^2 u_{xx},\ x \geq 0,\ t>0 \quad (4)$$

$$u_1(x,0) = \varphi(x),\ x \geq 0,\ t=0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = 0,\ x=0,\ t>0 \quad (6)$$

В этом случае решением задачи с условиями (4)-(6) будет ф-ия $u_1(x,t)$:

$$u_1(x,t) = \int_0^\infty \frac{\varphi(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)+\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right)\right]d\xi$$

$$\left.\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \int_0^\infty \frac{\varphi(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}\left.\left[\frac{2\xi}{4a^2t}\cdot\exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right)-\frac{2\xi}{4a^2t}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right)\right]\right|_{x=0} d\xi$$

$$\left.\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$ (решение задачи с однородным краевым условием 2 рода)

В случае условий (1)-(3) будет ф-ия $u_1(x,t)$:

$$u_1(x,t) = \int_0^\infty \frac{\varphi(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right)\right]d\xi$$

$$\left.\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$ (решение задачи с однородным краевым условием 1 рода)

31) Сформулировать и решить задачу о нагреве стержня с источником тепла в виде ф-ии пространственной переменной и времени с нулевым начальным распределением температуры, когда на концах поддерживается нулевая температура.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ 0 < x < l, \ t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \\ u(x, \ ) = 0 = \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau =$$

$$= \int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где $G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k}{l}x\right)\sin\left(\frac{\pi k}{l}\xi\right) e^{-\frac{\pi^2 k^2 a^2}{l^2}t}$