Билет 29. Аксенов А.Е.

1) Общее решение ур-ий Лапласа внутри сферы радиуса $a$ имеет вид: $u(\rho, \theta, \varphi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n Y_n(\theta, \varphi)$, где $(\rho, \theta, \varphi)$ сфер. коорд.

$Y_n(\theta, \varphi) = \sum\limits_{m=0}^{n} \left[A_{nm}\cos(m\varphi) + B_{nm}\sin(m\varphi)\right] P_n^{(m)}\cos(\theta)$, где

$P_n^{(m)}(x)$ – присоединённые ф-ии Лежандра

Найдём решения для ур-ия Лапласа в шаре при граничном условии $u(a, \theta, \varphi) = \sin(3\theta)\cos\varphi$

В сферической СК постановка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta\,\partial\varphi^2}(\partial^2 u) = 0 \\ u(a, \theta, \varphi) = \sin(3\theta)\cos\varphi, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

полагая, что $u(\rho, \theta, \varphi) = R(\rho)Y(\theta, \varphi)$ и поставив в первое выражение получим:

$$Y\frac{d}{d\rho}(\rho^2 R') + R\left[\frac{1}{\sin\theta\,\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right] = 0$$

$$\frac{\frac{d}{d\rho}(\rho^2 R')}{R} + \frac{\frac{1}{\sin\theta\,\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}}{Y} = 0$$

Или же $\frac{\frac{d}{d\rho}(\rho^2 R')}{R} = - \ldots = \lambda$, где $\lambda$ – постоянная разделения.

Отсюда: 1) $\rho^2 R'' + 2\rho R' - \lambda R = 0$

2) $\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0$

при этом $Y(\theta,\varphi)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} Y(\theta,\varphi) = Y(\theta,\varphi+2\pi) \\ |Y(0,\varphi)| < +\infty, \quad |Y(\pi,\varphi)| < +\infty \end{cases}$$

Решение найдём методом разделения переменных, полагая $Y(\theta,\varphi) = T(\theta)\Phi(\varphi)$. Подставив $Y(\theta,\varphi)$ в ур-ие 2) получим:

$\Phi\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta T') + \frac{1}{\sin^2\theta}T\Phi'' + \lambda T\Phi = 0$, откуда

$$\frac{\sin\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta T')}{T} + \lambda\sin^2\theta = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu$$

$\Phi(\varphi)$ найдём, решив задачу $\begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi = 0 \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi+2\pi) \end{cases}$

Исходя из решения ур-Лапласа в круге:

$\mu = m^2$; $\Phi_m(\varphi) = C_1\cos(m\varphi) + C_2\sin(m\varphi)$, где $C_1, C_2$ – произв. постоянные

$m = 0, 1, \ldots$

27)
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l,\ t>0 \\ u(0,t) = u(t) \\ u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \\ w_{xx} = 0 \\ w = c_1 x + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_t + w_t = a^2 v_{xx} + a^2 w_{xx} \\ v(0,t) + w(0,t) = u_1(t) \\ v(l,t) + w(l,t) = 0 \\ v(x,0) + w(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w(0,t) = u_1(t) \Rightarrow c_1 \cdot 0 + c_2 = u_1 \Rightarrow \boxed{c_2 = u_1} \\ w(l,t) = 0 \Rightarrow c_1 l + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{c_2}{l} = \boxed{-\frac{u_1}{l} = c_1} \end{cases}$$

$$w = -\frac{u_1}{l} x + u_1 = \boxed{u_1\left(1 - \frac{1}{l}\right) = w}$$

$$w_t = u_{1t}\left(1 - \frac{1}{l}\right) \Rightarrow v_t + w_t = v_t + u_{1t}\left(1 - \frac{1}{l}\right) = a^2 v_{xx}$$

$$\begin{cases} v_t + u_{1t}\left(1 - \frac{1}{l}\right) = a^2 v_{xx} \Rightarrow v_0 = a^2 v_{xx} \underbrace{- u_{1t}\left(1 - \frac{1}{l}\right)}_{f(x,t)} \\ v(0,t) = 0 \\ v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = \varphi(x) - u_1(0) \cdot \left(1 - \frac{1}{l}\right) \end{cases}$$

$$v(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t) \cdot \left(\varphi(\xi) - u_1\left(1 - \frac{1}{l}\right)\right) d\xi +$$

$$+ \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau, \text{ где } f(\xi,\tau) = -u_{1t}\left(1-\frac{1}{l}\right)$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{\pi k}{l}x \cdot \sin\frac{\pi k}{l}\xi \cdot e^{-\frac{\pi^2 k^2 a^2 t}{l^2}}$$

Ответ: $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$