Федеральное агенство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Санкт-Петербургский государственный университет
низкотемпературных и пищевых технологий

Кафедра математики

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методические указания для студентов 2-го курса

Санкт-Петербург
2009

УДК 518(07.07)

Подольский В.А., Прокуратова Е.И. Уравнения математической физики: Метод. указания для студентов 2-го курса всех спец. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2009. – 36 с.

Рассмотрены элементы теории уравнений математической физики на примере некоторых краевых задач для уравнения теплопроводности.

Рецензент
Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий – доц. кафедры математики, канд. физ.-мат. наук, Г.В. Карпухин

Рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом университета

1. Уравнения математической физики

1.1. Введение

Создание математических моделей различных физических процессов и построение методов решения физических задач является предметом математической физики. Постановка задач математической физики заключается в построении математических моделей, описывающих основные закономерности изучаемых физических явлений. Это моделирование состоит в выводе уравнений, которым удовлетворяют величины, характеризующие данный процесс. При этом исходят из основных физических законов, которые учитывают наиболее существенные черты явления, отвлекаясь от второстепенных характеристик.

Многие задачи механики и физики приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными. В ряде случаев приходится иметь дело с интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями. Однако в этом пособии мы будем рассматривать именно дифференциальные уравнения, как наиболее часто встречающиеся в задачах математической физики. Например, при изучении различных видов волн – упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений используется так называемое волновое уравнение. Процессы распространения тепла и явления диффузии описываются уравнением теплопроводности. При рассмотрении установившегося теплового состояния в изотропном теле мы приходим к уравнению Пуассона. Ряд установившихся процессов, в частности таких, как потенциальное движение несжимаемой жидкости или потенциал стационарного электрического тела, приводят к уравнению Лапласа. Уравнения, указанные выше, являются дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка и называются основными уравнениями математической физики.

Многочисленные задачи физики и техники приводят к сравнительно небольшому числу типов дифференциальных уравнений с частными производными. Чаще всего встречаются уравнения второго порядка, содержащие частные производные второго порядка, причем линейные по этим производным. Следует отметить, что в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение которых зависит от произвольных постоянных, общее решение дифференциальных уравнений с частными производными зависит от произвольных функций.

Пример 1. Найти решение уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

Интегрируя по x, получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y).$$

Здесь $f(y)$ – произвольная функция переменной y. Полученное уравнение интегрируем по y.

$$u(x, y) = \int f(y)\, dy + \varphi(x).$$

Так как $f(y)$ – произвольная функции переменной y, то и интеграл от этой функции будет произвольной функцией, которую обозначим $\psi(y)$, т.е.

$$u(x, y) = \psi(y) + \varphi(x).$$

Дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка в общем случае может быть записано в виде

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

где $f(x, y, u, u_x, u_y)$ – линейная функция относительно u, u_x, u_y, а a_{ik} – функции, определенные в области D двумерного пространства.

Здесь и далее в работе приняты обозначения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv u_y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv u_{xx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv u_{yy}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv u_{xy}.$$

.

1.2. Классификация уравнений математической физики

Л. Эйлер показал, что с помощью соответствующей замены переменных все многообразие уравнений вида (1) может быть сведено к уравнения трех типов.

Введем новые переменные:

$$\left\{\begin{array}{l}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{array}\right., \quad D=\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}\neq 0. \tag{2}$$

Тогда уравнение преобразуется к виду:

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi}+2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta}+\bar{a}_{22}u_{\eta\eta}=\bar{f}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta). \tag{3}$$

Здесь

$$\begin{array}{l}\bar{a}_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2\,,\\ \bar{a}_{11}=a_{11}\xi_x\eta_x+2a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_x\,,\\ \bar{a}_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2\,.\end{array} \tag{4}$$

Новые переменные ξ и η выбираем так, чтобы $\bar{a}_{11}=0$, т. е.

$$a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=0\,. \tag{5}$$

Фактически речь идет о нахождении какого-нибудь частного решения уравнения с частными производными:

$$a_{11}z_x^2+2a_{12}z_xz_y+a_{22}z_y^2=0\,. \tag{6}$$

Пусть $z=\varphi(x,y)$ – какое-нибудь частное решение этого уравнения, тогда, взяв $\xi=\varphi(x,y)$, мы обратим $\bar{a}_{11}$ в нуль. Таким образом, задача о выборе новых переменных связана с решением уравнения (6).

Лемма. Пусть $z=\varphi(x,y)$ – частное решение уравнения (6), тогда $\varphi(x,y)=C$ есть общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения:

$$a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0\,. \tag{7}$$

Верно и обратное: Если $\varphi(x,y)=C$ – общий интеграл уравнения (7), то $z=\varphi(x,y)$ – частное решение уравнения(6).

Уравнение (7) называется характеристическим уравнением для уравнения (1), а его общие интегралы – характеристиками. Оно распадается на два уравнения:

$$y'=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad \text{и} \quad y'=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}\,. \tag{8}$$

Дискриминант $\Delta(x,y)=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$ определяет тип уравнения (1). Если в точке $P(x,y)\in D$ $\Delta>0$, то (1) является уравнением гиперболического типа, $\Delta<0$ – эллиптического типа, $\Delta=0$ – параболического типа.

Замечание 1. Можно показать, что $\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2 \neq 0$ и, следовательно, тип уравнения (1) не меняется при переходе к переменным ξ, η.

Замечание 2. В различных точках области определения коэффициентов $a_{ik}(x, y)$ уравнение (1) может принадлежать различным типам.

1.3. Приведение уравнения к каноническому виду

1.3.1. Уравнения гиперболического типа

Так как $\Delta > 0$, уравнения (8) имеют вещественные линейно независимые общие интегралы $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$.

Положим $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$. Тогда $\bar{a}_{11} = 0$ и $\bar{a}_{22} = 0$. При этом уравнение (3) преобразуется к виду:

$$u_{\xi\eta} = \frac{f(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)}{2\bar{a}_{12}}\,.$$

Замечание 3. Можно выбрать новые переменные по-другому: $\xi = \dfrac{1}{2}[\varphi(x, y) + \psi(x, y)]$ и $\eta = \dfrac{1}{2}[\varphi(x, y) - \psi(x, y)]$, учитывая, что уравнение (7) однородное и линейная комбинация общих решений также является его общим решением. Тогда уравнение (3) можно записать следующим образом:

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = \frac{f(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)}{2\bar{a}_{12}}\,.$$

1.3.2. Уравнения параболического типа

В этом случае $\Delta(x, y) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, т.е. $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$. Уравнения (8) совпадают. Имеется только один общий интеграл $\varphi(x, y) = C$, поэтому берем $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$. Здесь $\eta(x, y)$ – любая линейно независимая от $\varphi(x, y)$ функция (при этом якобиан преобразования $D = \partial(\xi, \eta)/\partial(x, y) \neq 0$). Тогда

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0$$

$$\text{и} \quad \bar{a}_{12} = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0\,.$$

Уравнение (3) принимает вид:

$$u_{\eta\eta} = \frac{f(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)}{\bar{a}_{22}}\,.$$

1.3.3. Уравнения эллиптического типа

Так как $\Delta(x,y) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, правые части уравнений (8) комплексно сопряженные. Поэтому имеются две комплексно сопряженные характеристики $\varphi(x,y) = C_1$ и $\varphi^*(x,y) = C_2$. В качестве новых переменных выбираем линейные комбинации $\xi = \dfrac{1}{2}[Re\,\varphi(x,y) + Im\,\varphi(x,y)]$ и $\eta = \dfrac{1}{2}[Re\,\varphi(x,y) - Im\,\varphi(x,y)]$. После такого выбора переменных (при этом $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}$) уравнение (3) преобразуется в:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \frac{f(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)}{\bar{a}_{11}}\,.$$

Пример 2. Привести к каноническому виду дифференциальное уравнение

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0, \quad x > 0\,.$$

Решение. Здесь $a_{11} = x^2$, $a_{12} = xy$, $a_{22} = y^2$. Тогда дискриминант $\Delta(x,y) = x^2y^2 - x^2y^2 = 0$. Это уравнение параболического типа. Составляем характеристическое уравнение

$$x^2d^2y - 2xydxdy + y^2d^2x = 0 \quad \text{или} \quad (xdy - ydx)^2 = 0.$$

Это уравнение имеет единственный общий интеграл $y/x = C$. Новые переменные вводим по формулам $\xi = y/x$, $\eta = y$. Переменная η выбрана из соображений наибольшей простоты и условия отличия от нуля якобиана преобразования $D = \partial(\xi,\eta)/\partial(x,y)$. Выразим производные u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} через новые переменные.

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = u_\xi\left(-\frac{y}{x^2}\right), \\ u_y &= u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = u_\xi\left(\frac{1}{x}\right) + u_\eta\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(u_\xi\,\frac{y}{x^2}\right) = -\Big(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x\Big)\frac{y}{x^2} + u_\xi\,\frac{2y}{x^3} = u_{\xi\xi}\,\frac{y^2}{x^4} + u_\xi\,\frac{2y}{x^3}\,, \\ u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(u_\xi\left(\frac{1}{x}\right) + u_\eta\right) = u_{\xi\xi}\,\frac{1}{x^2} + 2u_{\xi\eta}\,\frac{1}{x} + u_{\eta\eta}\,, \\ u_{xy} &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(u_\xi\,\frac{y}{x^2}\right) = -\Big(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y\Big)\,\frac{y}{x^2} - u_\xi\,\frac{1}{x^2} = \\ &\qquad = -u_{\xi\xi}\,\frac{y}{x^3} - u_{\xi\eta}\,\frac{y}{x^2} - u_\xi\,\frac{1}{x^2}\,. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим

$$x^2\left(u_{\xi\xi}\,\frac{y^2}{x^4}+u_\xi\,\frac{2y}{x^3}\right)+2xy\left(-\,u_{\xi\xi}\,\frac{y}{x^3}-u_{\xi\eta}\,\frac{y}{x^2}-u_\xi\,\frac{1}{x^2}\right)+$$
$$+y^2\left(u_{\xi\xi}\,\frac{1}{x^2}+2u_{\xi\eta}\,\frac{1}{x}+u_{\eta\eta}\right)=0.$$

Откуда $u_{\eta\eta}\,y^2=0$ или $u_{\eta\eta}=0$. Это и есть канонический вид нашего уравнения. Легко найти его общее решение. Интегрируя первый раз по η, получим $u_\eta=F(\xi)$, Второе интегрирование дает $u=F(\xi)\eta+G(\xi)$, где $F(\xi)$ и $G(\xi)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции переменной ξ. Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение нашего уравнения

$$u(x,y)=yF\left(\frac{y}{x}\right)+G\left(\frac{y}{x}\right).$$

1.4. Постановка задач математической физики

Как видно из приведенных выше примеров общее решение дифференциального уравнения второго порядка с частными производными зависит от двух произвольных функций. На практике интерес представляет не бесчисленное множество функций, являющихся решениями данного уравнения, а одна из них, которая описывает конкретный реальный процесс. Для полного описания реального физического процесса одного дифференциального уравнения мало. Необходимо кроме него задать начальное состояние этого процесса, т.е. его состояние в тот момент времени, когда мы начали его наблюдать (начальное условие). Кроме того, необходимо задать режим на границе той области, в которой этот процесс совершается (граничное условие). Совокупность этих условий называется краевой задачей. В сущности построение математической модели реального физического процесса и заключается в написании дифференциального уравнения, описывающего этот процесс и формулировке начальных и граничных условий, отвечающих этому процессу. Здесь мы изучаем дифференциальные уравнения второго порядка, для неизвестной функции, зависящей от двух независимых переменных. Для таких уравнений различают три типа краевых задач.

1. Задача Коши для уравнений гиперболического типа (см. волновое уравнение) и параболического типа (уравнение теплопроводности). В этом случае область задания уравнения совпадает со всем простран-

ством – граничные условия отсутствуют. Задаются только начальные условия.

2. Краевая задача для уравнения эллиптического типа. Задаются условия на границе области задания уравнения. Начальные условия отсутствуют.

3. Смешанная задача для уравнений гиперболического и параболического типа: задаются начальные и граничные условия.

Замечание. Различают три типа граничных условий:

1. Граничные условия первого рода: $u(x,y)|_\Gamma = u_0$ – задано значение функции $u(x,y)$ на границе области.
2. Граничные условия второго рода: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_\Gamma = u_0$ – задан градиент функции $u(x,y)$ на границе.
3. Граничные условия третьего рода: $\left.\left(\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)\right|_\Gamma = u_0$.

Этим условиям соответствуют краевые задачи первого, второго и третьего рода.

Решение задачи математической физики описывает реальный физический процесс, поэтому оно должна удовлетворять некоторым требованиям.

Прежде всего надо убедиться, что решение поставленной краевой задачи существует и единственно. На практике на этот вопрос мы отвечаем, находя решение конкретной задачи.

Решение поставленной задачи должно быть устойчивым. Дело в том, что в основе определения физических величин лежит процесс их измерения, который всегда связан с погрешностью измерения. С погрешностью определяются и исходные данные задачи (начальные и граничные условия). Если малые изменения данных задачи влекут за собой малые изменения ее решения, то говорят, что решение краевой задачи устойчиво относительно малых изменений ее данных (непрерывно зависит от данных задачи). В этом случае решение правильно отражает реальный физический процесс. В противном случае решение задачи неустойчивое и неправильно отражает течение физического процесса.

Таким образом, краевая задача должна быть поставлена так, чтобы соблюдались три условия:

1. Решение задачи должно существовать.

2. Решение должно быть единственным.

3. Решение должно быть устойчивым.

В этом случае задачу математической физики называют поставленной корректно.

2. Вывод основных уравнений математической физики

2.1. Уравнение колебаний струны

Рассмотрим натянутую струну закрепленную на концах. Здесь под струной понимается тонкая нить, которая может свободно изгибаться, то есть не оказывает сопротивления изменению ее формы, и предполагается, что сила натяжения струны T_0 много больше силы тяжести, которой можно пренебречь. Пусть в положении равновесия струна направлена вдоль оси Ox. Будем рассматривать поперечные колебания струны, предполагая, что движение происходит в одной плоскости и что все точки струны движутся перпендикулярно оси Ox (рис. 1). Обозначим через $u(x,t)$ вертикальное смещение точек струны от положения равновесия в момент времени t. Будем рассматривать лишь малые колебания струны, то есть будем считать, что смещение $u(x,t)$ и его производная u_x малы. Тогда их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с самими этими величинами.

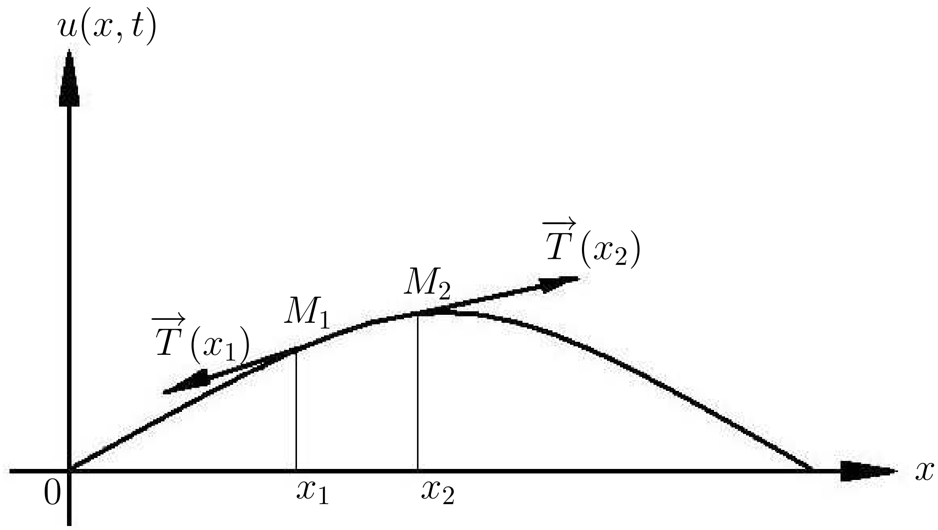

Рис. 1

Выделим произвольный участок струны (x_1, x_2), который при колебании деформируется в участок дуги M_1M_2. При этом длина дуги в момент времени t может быть выражена следующим интегралом:

$$S = M_1M_2 = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x^2}\,dx \approx x_2 - x_1.$$

Тогда можно считать, что в процессе малых колебаний, удлинения участков струны не происходит. Отсюда в силу закона Гука следует, что величина силы натяжения T в каждой точке струны не меняется со временем. Таким образом, изменением величины натяжения струны можно пренебречь по сравнению с её натяжением в положении равновесия. Кроме того, величину T можно считать не зависящей от x. Действительно, на участок струны M_1M_2 действуют силы натяжения, направленные по касательным к струне в точках M_1 и M_2 (рис.1), внешние силы и силы инерции. Так как силы инерции и внешние силы направлены параллельно оси Oy, то сумма проекций всех сил на ось Ox равна

$$T(x_1)\cos\alpha(x_1) - T(x_2)\cos\alpha(x_2) = 0\,,$$

где $\alpha(x)$ – угол между касательной к кривой в точке M в момент t и положительным направлением оси Ox. Так как $\cos\alpha(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx 1$, то $T(x_1) \approx T(x_2)$, то есть величина натяжения не зависит от x и равна T_0 для любого $\sin\alpha(x) = \dfrac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}$. Сумма проекций сил натяжения на ось Oy равняется

$$Y = T_0[\sin\alpha(x_2) - \sin\alpha(x_1)]\,,$$

но

$$\sin\alpha(x) = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}\,, \text{ и } Y = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=x_1}\right].$$

Ввиду того, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{x=x_1} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx\,,$$

окончательно получим

$$Y = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx\,.$$

Так как проекцию внешней силы, действующей на участок струны M_1M_2 параллельно оси Oy, можно представить интегралом $\int\limits_{x_1}^{x_2} p(x,t)\,dx$, а силу инерции, как $-\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, то по закону Ньютона

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \left[T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x,t)\right]\,dx = 0$$

и, следовательно, искомое уравнение колебаний струны будет иметь вид

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t)\,. \tag{9}$$

Если $\rho(x) = \mathrm{const}$, т.е струна является однородной, то уравнение (9) обычно записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,, \tag{10}$$

где $a = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}\,,\quad f(x,t) = \dfrac{p(x,t)}{\rho}$. В случае отсутствия внешней силы уравнение (10) превращается в уравнение свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,. \tag{11}$$

Уравнения (9), (10), (11) имеют бесконечное множество частных решений, поэтому для корректной постановки задачи необходимы дополнительные условия, вытекающие из конкретной физической модели.
А именно, следует дополнить уравнение начальными и граничными условиями.

Начальные условия определяют положение и скорость всех точек струны в начальный момент времени

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x)\,,\quad u_t\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)\,. \tag{12}$$

Граничные условия определяют поведение струны на её концах. Например, если струна на концах закреплена, то её смещение на концах будет равно нулю.

$$u\Big|_{x=0} = 0\,, \quad u\Big|_{x=l} = 0\,. \tag{13}$$

Таким образом задача о колебании струны в корректной постановке формулируется следующим образом: найти решение уравнения (9) , удовлетворяющее начальным условиям (12) и граничным условиям (13).

2.2. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим физическое тело, температура которого в точке с координатами (x, y, z) в момент времени t определяется функцией $u(x, y, z, t)$. Если температура различных частей тела различна, то в теле будет происходить перенос тепла от более нагретых участков тела к менее нагретым. Рассмотрим какую-нибудь поверхность S внутри тела и обозначим ее малый элемент Δs. Тогда количество тепла, проходящего через элемент поверхности Δs за время Δt, будет определяться выражением

$$\Delta Q = -k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Delta s \Delta t = -k\Delta s\Delta t \bigtriangledown_n u\,,$$

где $k > 0$ – коэффициент теплопроводности, а $\vec{n}$ – нормаль к элементу поверхности Δs в направлении распространения тепла. Здесь и далее $\bigtriangledown_n u = (\bigtriangledown u \cdot \vec{n})$, а $\bigtriangledown u$ означает градиент функции u. Будем считать, что тело изотропно в отношении теплопроводности, т. е. коэффициент теплопроводности не зависит от направления нормали, а зависит только от координат точки. Кроме того, обозначим поток тепла через единичную площадку через q т. е.

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,.$$

4 Тогда для произвольного объема V, ограниченного замкнутой поверхностью S, изменение количества тепла за промежуток времени (t_1, t_2) будет определяться интегралом

$$Q_1 = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_{S} k(x, y, z)\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0}\,dS\,, \tag{14}$$

где $\vec{n}_0$ – внутренняя нормаль к поверхности S.

С другой стороны, количество тепла, необходимое для изменения температуры выделенного объема тела на $\Delta u = u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)$, равно

$$Q_2 = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V \rho\gamma \, \frac{\partial u}{\partial t} \, dV \,, \tag{15}$$

где ρ и γ – плотность и теплоемкость данного физического тела.

Если внутри рассматриваемого тела имеются источники тепла плотности $F(x,y,z,t)$, то количество тепла, выделяемого (или поглощаемого) ими в объеме V за промежуток времени (t_1,t_2), будет равно

$$Q_3 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V F(x,y,z,t) \, dV \,. \tag{16}$$

Очевидно, что баланс тепла для объема V определяется соотношением $Q_2 = Q_1 + Q_3$, т. е.

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V \rho\gamma \, \frac{\partial u}{\partial t} \, dV = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_S k(x,y,z) \, \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_0} \, dS + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V F(x,y,z,t) \, dV \,. \tag{17}$$

Применяя к поверхностному интегралу формулу Гаусса-Остроградского, получим

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_V \left[\rho\gamma \, \frac{\partial u}{\partial t} - div(k \, grad \, u) - F(x,y,z,t) \right] dV = 0 \,, \tag{18}$$

где $grad\, u = \bigtriangledown u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$.

Так как подынтегральная функция непрерывна, а объем V и промежуток времени (t_1,t_2) произвольны, то для любой точки (x,y,z) и любого момента времени справедливо соотношение

$$\rho\gamma \, \frac{\partial u}{\partial t} = div(k \, grad \, u) + F(x,y,z,t) \,. \tag{19}$$

Это уравнение называется уравнением теплопроводности неоднородного изотропного тела. Если тело однородно, то коэффициенты γ, ρ, k

являются постоянными и уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x,y,z,t)\,, \tag{20}$$

где $div(grad\, u) = \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,, \quad f(x,y,z,t) = \dfrac{F(x,y,z,t)}{\gamma\, \rho}\,,$ $a = \sqrt{\frac{k}{\gamma\, \rho}}\,.$

Если кроме того отсутствуют внутренние источники тепла, то получим однородное уравнение теплопроводности в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \tag{21}$$

Для ряда частных задач уравнение теплопроводности может быть сведено к двумерному или одномерному случаю. Так, для очень тонкой однородной пластины уравнение (21) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \tag{22}$$

В случае тонкого однородного стержня уравнение (21) сводится к одномерному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{23}$$

Следует заметить, что во всех описанных выше случаях тепловой обмен с окружающей средой не учитывается.

Для корректной постановки задачи о нахождении температуры в любой точке тела в каждый момент времени следует к уравнению теплопроводности, как и в случае струны, добавить начальные и граничные условия, которые будут определять начальное распределение температуры внутри тела и тепловой режим на границе. Начальные условия будут иметь вид

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y,z). \tag{24}$$

Граничные условия могут задаваться несколькими различными способами, например:

1. В каждой точке поверхности $M(x,y,z,t) \in S$ задается температура

$$u|_S = \mu_1(M,t). \tag{25}$$

2. На поверхности тела задается тепловой поток $q = -k\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$, который определяет граничные условия вида

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_S = \mu_2(M,t). \tag{26}$$

Таким образом, в общем случае задача о распространении тепла в изотропном теле корректно ставится следующим образом: найти решение уравнения (19) , удовлетворяющее начальному условию (24) и одному из граничных условий (25) или (26).

3. Метод характеристик. Формула Даламбера

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о колебаниях бесконечной струны.

Требуется найти функцию $u(x,t)$ в области $\{t \geq 0, \quad x \in (-\infty, +\infty)\}$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{27}$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, \tag{28}$$
$$u_t(x,0) = \psi(x)\,. \tag{29}$$

Здесь $\varphi(x)$ – начальный профиль струны, а $\psi(x)$ – начальные скорости точек струны. Фактически для струны поставлена задача Коши (граничные условия отсутствуют).

3.2. Метод Даламбера

Решаем задачу методом характеристик (методом Даламбера). Приведем уравнение (27) к каноническому виду. Харктеристическое уравнение для (27)

$$a^2 dt^2 - dx^2 = 0$$

имеет два вещественных общих интеграла $x - at = C_1$, $x + at = C_2$ (две характеристики). Преобразуем (27), введя новые переменные по формулам: $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ (см. *Пример 1*).

$$\begin{aligned}
&u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta\,,\\
&u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\,,\\
&u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = a(-u_\xi + u_\eta)\,,\\
&u_{tt} = a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})\,.
\end{aligned}$$

Подставив u_{tt} и u_{xx} в (27), получим

$$u_{\xi\eta} = 0\,, \tag{30}$$

общим решением которого является функция $u(\xi,\eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta)$ или

$$u(x,t) = \Phi(x - at) + \Psi(x + at)\,, \tag{31}$$

где $\Phi(x - at)$ и $\Psi(x + at)$ – произвольные функции своих аргументов.

Используем начальные условия (28) и (29) нашей задачи. Из (28) следует

$$\Phi(x) + \Psi(x) = \varphi(x)\,,$$

из формулы(29):

$$-a\Phi'(x) + a\Psi'(x) = \psi(x)\,.$$

Последнее равенство проинтегрируем на интервале (x_0, x).

$$-\Phi(x) + \Psi(x) + \Phi(x_0) - \Psi(x_0) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)\,dz$$

$$\text{или} \qquad -\Phi(x) + \Psi(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)\,dz + C\,, \quad \text{где} \quad C = \Phi(x_0) - \Psi(x_0)\,.$$

Таким образом, для функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \quad \Phi(x) + \Psi(x) = \varphi(x)\,,\\ -\Phi(x) + \Psi(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)\,dz + C\,. \end{cases}$$

Ее решение

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)\,dz - \frac{C}{2}\,,$$

$$\Psi(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)\,dz + \frac{C}{2}$$

дает

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x-at} \psi(z)\,dz - \frac{C}{2} + \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x+at} \psi(z)\,dz + \frac{C}{2}\,.$$

И, окончательно,

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz\,. \tag{32}$$

Это и есть искомая формула Даламбера, являющаяся решением нашей задачи.

Замечание. $\Phi(x-at)$ – волна, распространяющаяся вдоль оси Ox. Действительно, пусть в момент $t=0$ $\max\Phi(x)$ был в точке $x=0$, тогда в момент $t>0$ этот максимум будет в точке $x=at$, т.е. $\Phi(x-at)$ – волна, распространяющаяся вправо вдоль оси Ox со скоростью a, $\Psi(x+at)$ – обратная волна.

3.3. Частные случаи

1. Начальные скорости точек струны $\psi(x)=0$. Пусть $\varphi(x)\neq 0$ $\forall x \in (-\alpha,\alpha)$ в момент $t=0$:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}\,.$$

В момент времени $t\neq 0$ передний фронт волны окажется в точке $x=\alpha+at$, задний – в точке $x=\alpha-at$. То есть при $t<\dfrac{x-\alpha}{a}$ в точке x еще нет колебаний, а при $t>\dfrac{x+\alpha}{a}$ в ней уже нет колебаний. После прохождения волны в этой точке наступает покой.

2. Начальные смещения точек струны $\varphi(x)=0$ при $t=0$, а $\psi(x)\neq 0$ $\forall x\in(-\alpha,\alpha)$:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz\,.$$

В момент $t=0$ $\quad u(x,0)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x}^{x}\psi(z)\,dz=0$ – в точке x нет колебаний.

При $t>0$ промежуток интегрирования в $\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz$ расширяется, но при $t<(x-\alpha)/a$ пересечение $(x-at,x+at)\cap(-\alpha,\alpha)=\oslash$ и $u(x,t)$ еще равно 0. При $t>(x-\alpha)/a$ точка x начинает смещаться, так как $(x-at,x+at)\cap(-\alpha,\alpha)\neq\oslash$. Для всех значений $\quad t\geq(x+\alpha)/a$

$(-\alpha,\alpha)\subset(x-at,x+at)$ и $u(x,t)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\psi(z)\,dz=\mathrm{const}.$

4. Применение метода Фурье при решении уравнений математической физики

4.1. Метод Фурье для уравнения теплопроводности

Метод Фурье или метод разделения переменных является одним из самых простых и распространенных методов, применяемых при решении задач математической физики. В данной работе мы изложим этот метод на примере решения линейного однородного уравнения теплопроводности

$$u_t=a^2u_{xx} \tag{33}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0}=\varphi(x) \tag{34}$$

для двух различных типов краевых условий. В первом случае на границах стержня задается температура.

$$\begin{aligned} u|_{x=0}&=\psi_1(t)\,,\\ u|_{x=l}&=\psi_2(t)\,. \end{aligned} \tag{35}$$

Во втором случае задается тепловой поток.

$$\begin{aligned} \big(\alpha_1 u + \beta_1 u_x\big)\big|_{x=0} = \mu_1(t)\,, \\ \big(\alpha_2 u + \beta_2 u_x\big)\big|_{x=l} = \mu_2(t)\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Суть метода заключается в том, что решение задачи ищется в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от координат, а вторая – только от времени:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)\,. \tag{37}$$

Подставив искомую функцию в таком виде в (33), вместо уравнения в частных производных мы получим два обыкновенных дифференциальных уравнения, имеющих вид

$$T'(t) + a^2\,\lambda^2\,T(t) = 0\,, \tag{38}$$

$$X''(x) + \lambda^2\,X(x) = 0\,, \tag{39}$$

где λ^2 – постоянный множитель. Решения уравнений (38), (39) имеют вид

$$T(t) = \, e^{-a^2\lambda^2 t}, \quad X(x) = A(\lambda)\cos\lambda x + \, B(\lambda)\sin\lambda x\,.$$

Тогда частное решение уравнения теплопроводности, в соответствии с (37), будет иметь вид

$$u(x,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}\,[A(\lambda)\cos\lambda x + \, B(\lambda)\sin\lambda x]\,. \tag{40}$$

Значение параметра λ, а также коэффициентов A и B зависит от начальных и граничных условий задачи (можно показать, что λ должно быть положительным).

4.2. Распространение тепла в стержне конечных размеров с граничными условиями первого рода

В данном разделе мы рассмотрим задачу о распространении тепла в стержне, концы которого поддерживаются при нулевой температуре. Данная задача относится к задачам с граничными условиями первого рода и состоит в нахождении решения уравнения теплопроводности (33), удовлетворяющего начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \tag{41}$$

и граничным условиям на концах стержня

$$u|_{x=0} = 0\,, \quad u|_{x=l} = 0\,. \tag{42}$$

При этом предполагается, что функция $\varphi(x)$ является непрерывной, имеет кусочно-непрерывную производную и обращается в нуль при $x = 0$ и $x = l$.

Согласно методу Фурье частные решения уравнения теплопроводности ищем в виде

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)\,. \tag{43}$$

Чтобы получить нетривиальное решение задачи нужно найти нетривиальное решение обыкновенного дифференциального уравнения (39), удовлетворяющее граничным условиям $X(0) = 0,\ \ X(l) = 0$, т. е. решить задачу о собственных значениях (задача Штурма–Лиувилля). Нетривиальные решения существуют только для значений

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

и равны

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}\,. \tag{44}$$

Значениям параметра $\lambda = \lambda_n$ отвечают решения уравнения (38)

$$T_n(t) = a_n\,\exp\left\{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right\},$$

где a_n – произвольные константы. Итак, все функции

$$u_n(x,t) = a_n\,\exp\left\{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right\}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{45}$$

удовлетворяют уравнению теплопроводности (33) и граничным условиям (42) при любых постоянных a_n. Тогда ряд

$$u_(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\exp\left\{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right\}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{46}$$

также будет удовлетворять уравнению и тем же граничным условиям. Для нахождения коэффициентов a_n потребуем выполнения начального условия (41)

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\,. \tag{47}$$

Этот ряд представляет собой разложение функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам на промежутке $(0, l)$, тогда коэффициенты разложения a_n определяются по известной формуле

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx\,. \tag{48}$$

Так как мы предположили, что функция $\varphi(x)$ непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и обращается в нуль при $x = 0$ и $x = l$, то ряд (47) равномерно и абсолютно сходится к $\varphi(x)$.

Замечание. Граничные условия первого рода в задаче о распространении тепла в однородном стержне конечных размеров могут иметь более сложный вид. Например,

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)\,.$$

Метод решения задачи при этом не меняется, но вычисление коэффициентов оказывается более сложным и вопрос о сходимости ряда решается не столь тривиально.

4.3. Задача о распространении тепла в стержне конечных размеров с граничными условиями третьего рода

В данной работе мы рассмотрим один из наиболее типичных случаев подобной задачи, а именно случай, когда на одном конце стержня $x = 0$ поддерживается температура равная нулю, а на конце $x = l$ тепло излучается в окружающую среду. При этом задача о распространении тепла в ограниченном стержне, боковая поверхность которого теплоизолирована, может быть математически сформулирована следующим образом: найти решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее заданным граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = -hu|_{x=l} \tag{49}$$

и начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x)\,. \tag{50}$$

Решение уравнения теплопроводности методом Фурье приводит к выражению

$$e^{-a^2\lambda^2 t}\, X(x) = e^{-a^2\lambda^2 t} \left[A \cos \lambda x + \ B \sin \lambda x\right].$$

Так как $u(x,t) = X(x)T(t)$, то $X(0) = 0$, т. е. $A = 0$. Из второго граничного условия в (49) следует $X'(l) = -h\,X(l)$, а значит

$$X(x) = \sin\lambda x \quad \text{и} \quad \lambda\cos\lambda l = -h\sin x\,.$$

Полагая $\lambda l = v$, получим трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg}\, v = -\frac{v}{hl}\,,$$

имеющее бесчисленное множество вещественных корней v_n, из которых мы будем рассматривать только положительные. Им, в свою очередь, соответствует бесчисленное множество положительных значений $\lambda_n = \dfrac{v_n}{l}$ и частных решений уравнения теплопроводности

$$e^{-a^2\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x\,.$$

Так как общим решением однородного дифференциального уравнения является сумма всех его частных решений, то оно будет иметь вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x\,. \tag{51}$$

Для определения коэффициентов B_n воспользуемся начальными условиями задачи (50)

$$u|_{t=0} = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\lambda_n x\,. \tag{52}$$

Откуда следует, что коэффициенты B_n являются коэффициентами разложения функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам и, следовательно, равны (собственные функции $\sin\lambda_n x$, соответствующие собственным значениям λ_n, ортогональны на $(0,l)$)

$$B_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\,\sin\lambda_n x\,dx\,. \tag{53}$$

Подставив (53) в (51), получим

$$u(x,t) = \int\limits_0^l d\xi\,\varphi(\xi)\,\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x\sin\lambda_n\xi = \int\limits_0^l d\xi\,\varphi(\xi)\,G(x,\xi,t)\,,$$

где $G(x,\xi,t) = \dfrac{2}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-a^2\lambda_n^2 t}\sin\lambda_n x\sin\lambda_n\xi$ называется функцией Грина краевой задачи.

5. Метод интегральных преобразований

5.1. Распространение тепла в бесконечном стержне

5.1.1. Постановка задачи

Бесконечный стержень (стержень бесконечной длины) – это абстракция. В природе не существует таких объектов. Однако можно использовать такое приближение к действительности, если будем рассматривать тепловые процессы происходящие достаточно далеко от обоих его концов и за времена достаточно малые, так что изменения температуры на концах стержня не успевают повлиять на рассматриваемый участок стержня. Задача о распространении тепла в неограниченном однородном стержне, поверхность которого теплоизолирована, формулируется так: найти ограниченное решение $u(x,t)$ $(t \geq 0,\ -\infty < x < +\infty)$ уравнения теплопроводности, удовлетворяющее некоторому начальному условию (граничных условий нет):

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= a^2 u_{xx} + f(x,t)\,, && (54)\\
u(x,0) &= \varphi(x), \quad x \in (-\infty,+\infty)\,, && (55)
\end{aligned}
$$

где $\varphi(x)$ – начальное распределение температуры, а $f(x,t)$ – плотность внутренних источников тепла, есть непрерывные ограниченные функции. Будем считать, что $u(x,t) \to 0$ и $u_x(x,t) \to 0$ при $x \to \infty$, и функция $u(x,y)$ абсолютно интегрируема по x на $(-\infty,+\infty)$ при любом значении $t \geq 0$, т.е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t)|\,dx = Q$, где Q – конечное число. Для нахождения решения применим интегральное преобразование Фурье. Пусть $g(x)$ есть непрерывная на всей числовой оси функция. Тогда прямое преобразование Фурье дается формулой:

$$
g_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\lambda x}\,dx\,, \tag{56}
$$

обратное:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda e^{i\lambda x}\, d\lambda\,. \qquad (57)$$

5.1.2. Прямое преобразование

Умножим уравнение (54) на $e^{-i\lambda x}/\sqrt{2\pi}$ и проинтегрируем по x на $(-\infty, +\infty)$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,t) e^{-i\lambda x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-i\lambda x} dx = \frac{\partial}{\partial t} u_\lambda(t) \equiv \dot{u}_\lambda(t).$$

К интегралу

$$a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}(x,t) e^{-i\lambda x} dx$$

дважды применим интегрирование по частям. Первое нтегрирование дает :

$$a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}(x,t) e^{-i\lambda x} dx = \begin{bmatrix} \xi = e^{-i\lambda x}, & d\xi = -i\lambda e^{-i\lambda x} dx, \\ d\eta = u_{xx} dx, & \eta = u_x; \end{bmatrix} =$$

$$= a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[u_x(x,t) e^{-i\lambda x} \Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} + i\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x(x,t) e^{-i\lambda x} dx \right] =$$

$$= i\lambda a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x(x,t) e^{-i\lambda x} dx\,.$$

Первое слагаемое в квадратных скобках обращатеся в 0, так как функция $e^{-i\lambda x}$ ограничена при всех $x \in (-\infty, +\infty)$ $\left(\left|e^{-i\lambda x}\right| = \left|\cos\lambda x - -i\sin\lambda x\right| = \sqrt{\cos^2\lambda x + \sin^2\lambda x} = 1\right)$, а $u_x(x,t) \to 0$ при $x \to \infty$. Полученный интеграл снова интегрируем по частям:

$$i\lambda a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_x(x,t) e^{-i\lambda x} dx = \begin{bmatrix} \xi = e^{-i\lambda x}, & d\xi = -i\lambda e^{-i\lambda x} dx, \\ & \\ d\eta = u_x dx, & \eta = u_x; \end{bmatrix} =$$

$$= a^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[u(x,t)e^{-i\lambda x}\Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} + i\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-i\lambda x}dx\right] =$$

$$= -\lambda^2 a^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-i\lambda x}dx = -\lambda^2 a^2 u_\lambda(t).$$

Первое слагаемое в квадратных скобках опять обращается в 0.

Наконец, $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)e^{-i\lambda x}dx = f_\lambda(t)$. Итак интегральное преобразование, примененное к (54), приводит нас к обыкновенному дифференциальному уравнению для $u_\lambda(t)$ – Фурье-образа функции $u(x,t)$:

$$\dot{u}_\lambda(t) + \lambda^2 a^2 u_\lambda(t) = f_\lambda(t)\,. \tag{58}$$

Преобразование начального условия (55) дает:

$$u_\lambda(0) = \varphi_\lambda\,, \tag{59}$$

здесь

$$\varphi_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-i\lambda x}dx\,.$$

В результате мы пришли к задаче Коши (58), (59). Общее решение уравнения (58) будем искать методом Бернулли: $u_\lambda(t) = p_\lambda(t)q_\lambda(t)$. Подстановка этого выражения в (58) приводит к уравнению

$$\dot{p}_\lambda(t)q_\lambda(t) + p_\lambda(t)\big[\dot{q}_\lambda(t) + \lambda^2 a^2 q_\lambda(t)\big] = f_\lambda(t)\,. \tag{60}$$

Приравняв выражение в квадратных скобках нулю, найдем $q_\lambda(t) = e^{-\lambda^2 a^2 t}$. После этого (60) превращается в уравнение $\dot{p}_\lambda(t) = f_\lambda(t)e^{\lambda^2 a^2 t}$, общее решение которого запишем в форме Коши:

$$p_\lambda(t) = \int\limits_0^t f_\lambda(\tau)e^{\lambda^2 a^2 \tau}d\tau + C\,.$$

И, наконец, общее решение уравнения (58) запишем в виде:

$$u_\lambda(t) = e^{-\lambda^2 a^2 t}\left[\int\limits_0^t f_\lambda(\tau)e^{\lambda^2 a^2 \tau}d\tau + C\right].$$

Учитывая начальное условие (59), получим решение задачи (58), (59):

$$u_\lambda(t) = \varphi_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t} + \int\limits_0^t f_\lambda(\tau) e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} d\tau\,. \tag{61}$$

5.1.3. Обратное преобразование

Применив к (61) обратное преобразование, запишем решение задачи (54), (55) в виде:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_\lambda(t) e^{i\lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t} + \int\limits_0^t f_\lambda(\tau) e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} d\tau \right) e^{i\lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^t f_\lambda(\tau) e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} e^{i\lambda x} d\tau d\lambda\,. \end{aligned} \tag{62}$$

Подставив в (62) φ_λ и $f_\lambda(\tau)$ и поменяв порядок интегрирования, получим следующее выражение для $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, \varphi(\xi) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x-\xi)} e^{-\lambda^2 a^2 t} d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi f(\xi,\tau) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x-\xi)} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} d\lambda\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x-\xi)} e^{-\lambda^2 a^2 t} d\lambda = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \left[e^{i\lambda(x-\xi)} + e^{-i\lambda(x-\xi)} \right] d\lambda = \\ = 2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos\lambda(x-\xi)\, d\lambda\,. \end{aligned} \tag{63}$$

Соответственно

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x-\xi)} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} d\lambda = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \cos\lambda(x-\xi)\, d\lambda \,. \tag{64}$$

С учетом (63) и (64) формула для $u(x,t)$ примет вид:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, \varphi(\xi) \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos\lambda(x-\xi)\, d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi f(\xi,\tau) \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \cos\lambda(x-\xi)\, d\lambda \,.$$

5.1.4. Вычисление $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos\lambda(x-\xi)\, d\lambda$

Введем новую переменную $\beta = x - \xi$ и обозначим $\alpha^2 = a^2 t$. Тогда

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos\lambda(x-\xi)\, d\lambda = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2} \cos\beta\lambda\, d\lambda = J(\beta) \,. \tag{65}$$

Дифференцируем (65) по параметру β.

$$J'(\beta) = - \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2} \lambda \sin\beta\lambda\, d\lambda \,.$$

Дифференцирование по параметру законно, так как полученный в результате интеграл равномерно сходится для всех $\beta \in (-\infty, +\infty)$. Вычисляем его по частям:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2} \lambda \sin\beta\lambda\, d\lambda = \left[\begin{array}{ll} \xi = sin\beta\lambda \,, & d\xi = \beta\cos\beta\lambda\, d\lambda, \\ d\eta = e^{-\alpha^2\lambda^2}\lambda\, d\lambda \,, & \eta = -e^{-\alpha^2\lambda^2}/2\alpha^2; \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{e^{-\alpha^2\lambda^2}}{2\alpha^2} \sin\beta\lambda \Bigg|_{0}^{x\to+\infty} + \frac{\beta}{2\alpha^2} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2} \cos\beta\lambda\, d\lambda = \frac{\beta}{2\alpha^2} J(\beta) \,.$$

Таким образом для $J(\beta)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$J'(\beta) = -\frac{\beta}{2\alpha^2} J(\beta)\,,$$

общее решение которого имеет вид: $J(\beta) = Ce^{-\beta^2/4\alpha^2}$. Константу интегрирования C найдем, положив $\beta = 0$.

$$J(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2} d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} = C\,.$$

Итак

$$J(\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2} \cos\beta\lambda \, d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\beta^2/4\alpha^2}.$$

После возвращения к старой переменной:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos\lambda(x-\xi)\, d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t}\,.$$

Запишем решение нашей задачи (54), (55) в окончателном виде:

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t} + \\ &+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, f(\xi,\tau) \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}\,. \end{aligned} \tag{66}$$

Функция $G(x,\xi,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t}$ – функция Грина, есть фундамнтальное решение однородного уравнения теплопроводности. Используя это понятие, запишем (66) в виде:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, \varphi(\xi)\, G(x,\xi,t) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, f(\xi,\tau) G(x,\xi,(t-\tau))\,.$$

5.2. Распространение тепла в полубесконечном стержне

5.2.1. Постановка задачи

Требуется найти ограниченное решение $u(x,t)$ ($t \geq 0,\ 0 < x < +\infty$) уравнения теплопроводности, удовлетворяющее некоторому начальному условию и условию, поставленному на одном из концов стержня:

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= a^2 u_{xx}\,, && (67)\\
u(x,0) &= \varphi(x), \quad x \in [0,+\infty)\,, && (68)\\
u(0,t) &= \mu(t), \quad t \geq 0\,. && (69)
\end{aligned}
$$

Здесь $\mu(t)$ – температура, заданная на левом конце стержня. Функция $u(x,t)$ и ее производная по x стремятся к нулю, как и в предыдущей главе. Для нахождения решения нашей задачи применим sin-преобразование Фурье:

$$
g_\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} g(x) \sin \lambda x\, dx - \text{прямое преобразование}, \tag{70}
$$

$$
g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} g_\lambda \sin \lambda x\, d\lambda - \text{обратное преобразование}. \tag{71}
$$

5.2.2. Прямое преобразование

Применим (70) к уравнению (67).

$$
\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} u_t(x,t) \sin \lambda x\, dx = \dot{u}_\lambda(t)\,.
$$

$$
a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} u_{xx}(x,t) \sin \lambda x\, dx = \left[\begin{array}{ll} \xi = \sin \lambda x, & d\xi = \lambda \cos \lambda x\, dx, \\ d\eta = u_{xx} dx, & \eta = u_x; \end{array} \right] =
$$

$$
= a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[u_x(x,t) \sin \lambda x \Big|_0^{x \to +\infty} - \lambda \int\limits_0^{+\infty} u_x(x,t) \cos \lambda x\, dx \right] =
$$

$$= -\lambda a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} u_x(x,t) \cos \lambda x \, dx \, .$$

Еще раз интегрируем по частям:

$$-\lambda a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} u_x(x,t) \cos \lambda x \, dx =$$

$$= -\lambda a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[u(x,t) \cos \lambda x \Big|_0^{x \to +\infty} + \lambda \int\limits_0^{+\infty} u_x(x,t) \sin \lambda x \, dx \right] =$$

$$= -\lambda a^2 \left[-\sqrt{\frac{2}{\pi}} u(0,t) + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} u(x,t) \sin \lambda x \, dx \right] = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} a^2 \mu(t) - \lambda^2 a^2 u_\lambda(t) \, .$$

В результате получим уравнение (граничное условие (69) учитывается автоматически):

$$\dot{u}_\lambda(t) + \lambda^2 a^2 u_\lambda(t) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} a^2 \mu(t) \, . \tag{72}$$

Преобразуем начальное условие.

$$u(\lambda, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} u(x,0) \sin \lambda x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x) \sin \lambda x \, dx = \varphi_\lambda \, . \tag{73}$$

Общее решение уравнения (72) (см. предыдущий раздел):

$$u_\lambda(t) = C e^{-\lambda^2 a^2 t} + \lambda a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^t \mu(\tau) e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} d\tau \, .$$

Учет начального условия (73) дает следующее решение задачи Коши (72), (73):

$$u_\lambda(t) = \varphi_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t} + \lambda a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^t \mu(\tau) e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} d\tau \, . \tag{74}$$

5.2.3. Обратное преобразование

Применим к (74) обратное sin – преобразование Фурье:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} u_\lambda(t) \sin\lambda x\, d\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin\lambda x\, d\lambda + \\
+\frac{2}{\pi} a^2 \int\limits_0^t d\tau\, \mu(\tau) \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \lambda \sin\lambda x\, d\lambda.
\end{aligned}
\tag{75}
$$

Рассмотрим первое слагаемое в (75):

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin\lambda x\, d\lambda = \\
&\qquad = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \varphi(\xi) \sin\lambda\xi\, d\xi \right) e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin\lambda x\, d\lambda = \\
&= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} d\xi\, \varphi(\xi) \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin\lambda\xi \sin\lambda x d\lambda = \\
&\qquad = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} d\xi \varphi(\xi) \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \big[\cos\lambda(x-\xi) - \cos\lambda(x+\xi) \big] d\lambda.
\end{aligned}
$$

Во втором слагаемом в (75) интеграл по переменной λ интегрируем по частям:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \lambda \sin\lambda x\, d\lambda = \\
&\qquad = \left[\begin{array}{ll} p = \sin\lambda x, & dp = x\cos\lambda x\, d\lambda, \\ dq = e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \lambda d\lambda, & q = -\frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)}, \end{array} \right] = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \left[e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \sin\lambda x \Big|_0^{x\to+\infty} - x \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \cos\lambda x \right] = \\
&\qquad = \frac{x}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \cos\lambda x\, d\lambda.
\end{aligned}
$$

Оставшиеся интегралы по переменной λ уже были вычислены раньше (см. разд. 5.2.3). После этого получаем окончательное решение задачи:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} d\xi\, \varphi(\xi) \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \left(e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t} - \mathrm{e}^{-(x+\xi)^2/4a^2 t} \right) + \\
+ \int\limits_0^t \frac{a^2}{\sqrt{\pi}\sqrt{a^2 (t-\tau)^{3/2}}}\, x e^{-(x)^2/4a^2(t-\tau)} \mu(\tau)\, d\tau\,.
\end{aligned}
\tag{76}
$$

Введя, как и ранее, функцию Грина

$$
G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \left(e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t} - \mathrm{e}^{-(x+\xi)^2/4a^2 t} \right),
$$

выражение (76) можно записать более компактно:

$$
u(x,t) = \int\limits_0^{+\infty} d\xi\, \varphi(\xi)\, G(x,\xi,t) + \int\limits_0^t \frac{a^2}{\sqrt{\pi}\sqrt{a^2 (t-\tau)^{3/2}}}\, x e^{-(x)^2/4a^2(t-\tau)} \mu(\tau)\, d\tau\,.
$$

Список литературы

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. I–V.– М.: Физматгиз, 1958–1960.

2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения математической физики.– М.: Физматгиз, 1962.

3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. I–II.– М.: Гостехиздат, 1957.

4. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка.– М.: Наука, 1964.

5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1972.

6. Соболев С.Л. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1966.

7. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980.

8. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1981.

9. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука, 1965.

Содержание

Подольский Владимир Александрович
Прокуратова Елена Ивановна

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методические указания для студентов 2-го курса

Методические указания выполнены
в редакционно-издательской системе
LATEX

Редактор
Л.Г. Лебедева

Корректор
Н.И. Михайлова

Компьютерная верстка
Н.В. Гуравльник

Директор ИПЦ
Т.Г. Смирнова

Подписано к печати 10.09.2004 . Формат 60x84 1/16. Бумага писчая. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,86. Печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 1,81. Тираж 350 экз. Заказ N С 59

СПбГУНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9
ИПЦ СПбГНиПТ. 191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9