Федеральное агентство по образованию

ГОУ ВПО
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт математики, экономики и информатики
Кафедра дифференциальных и интегральных уравнений

Е.А.Головко

ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Методические указания

Иркутск 2008

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

В настоящих методических указаниях изложен теоретический материал и на конкретных примерах разобрано приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными для уравнений гиперболического, эллиптического и параболического типов.

Методические указания предназначены для студентов математических специальностей очной и заочной формы обучения.

§1. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными.

Задача. *Определить тип уравнения*

$$A(x,y)U_{xx} + 2B(x,y)U_{xy} + C(x,y)U_{yy} + a(x,y)U_x + b(x,y)U_y + c(x,y)U = f(x,y) \quad (1)$$

и привести его к каноническому виду.

1.1. Необходимый теоретический материал.

I. Тип уравнения (1) определяется знаком выражения $B^2 - AC$:

- если $B^2 - AC > 0$ в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением гиперболического типа в этой точке;
- если $B^2 - AC < 0$ в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением эллиптического типа в этой точке;
- если $B^2 - AC = 0$ в некоторой точке, то уравнение (1) называется уравнением параболического типа в этой точке.

Уравнение (1) будет являться уравнением гиперболического, эллиптического, параболического типа в области D, если оно гиперболично, эллиптично, параболично в каждой точке этой области.

Уравнение (1) может менять свой тип при переходе из одной точки (области) в другую. Например, уравнение $yU_{xx} + U_{yy} = 0$ является уравнением эллиптического типа в точках $(x,y),\ y > 0$; параболического типа в точках $(x,0)$; и гиперболического типа в точках $(x,y),\ y < 0$.

II. Чтобы привести уравнение к канонического виду, необходимо:

1. Определить коэффициенты $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$;
2. Вычислить выражение $B^2 - AC$;
3. Сделать вывод о типе уравнения (1) (в зависимости от знака выражения $B^2 - AC$);
4. Записать уравнение характеристик:
$$A(x,y)dy^2 - 2B(x,y)dxdy + C(x,y)dx^2 = 0; \quad (2)$$
5. Решить уравнение (2). Для этого:

   а) разрешить уравнение (2) как квадратное уравнение относительно *dy:*
$$dy = \frac{B(x,y) \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A(x,y)}dx; \quad (3)$$

   б) найти общие интегралы уравнений (3) (характеристики уравнения (1)):

- $\varphi_1(x,y) = C_1,$
  $\psi_1(x,y) = C_2,$
  (4)

в случае уравнения гиперболического типа;

- $\varphi_2(x,y) = C$,
  (5)

в случае уравнения параболического типа;

- $\varphi_3(x,y) \pm i\psi_3(x,y) = C,$
  (6)

в случае уравнения эллиптического типа.

6. Ввести новые (характеристические) переменные ξ и η :
   - в случае уравнения гиперболического типа в качестве ξ и η берут общие интегралы (4) уравнений (3), т.е.
   $$\xi = \varphi_1(x,y),$$
   $$\eta = \psi_1(x,y);$$
   - в случае уравнения параболического типа в качестве ξ берут общий интеграл (5) уравнения (3), т.е. $\xi = \varphi_2(x,y)$, в качестве η берут произвольную, дважды дифференцируемую функцию ψ_2, не выражающуюся через $\varphi_2(x,y)$, т.е. $\eta = \psi_2(x,y)$;
   - в случае уравнения эллиптического типа в качестве ξ и η берут вещественную и мнимую часть любого из общих интегралов (6) уравнений (3):
   $$\xi = \operatorname{Re}\big(\varphi_3(x,y) + i\psi_3(x,y)\big) = \varphi_3(x,y),$$
   $$\eta = \operatorname{Im}\big(\varphi_3(x,y) + i\psi_3(x,y)\big) = \psi_3(x,y).$$
7. Пересчитать все производные, входящие в уравнение (1), используя правило дифференцирования сложной функции:
   $$U\big(\xi(x,y);\eta(x,y)\big)$$
   $$U_x = U_\xi \cdot \xi_x + U_\eta \cdot \eta_x,$$
   $$U_y = U_\xi \cdot \xi_y + U_\eta \cdot \eta_y,$$
   $$U_{xx} = U_{\xi\xi} \cdot (\xi_x)^2 + 2U_{\xi\eta} \cdot \xi_x\eta_x + U_{\eta\eta} \cdot (\eta_x)^2 + U_\xi \cdot \xi_{xx} + U_\eta \cdot \eta_{xx} \ ,$$
(7)
   $$U_{yy} = U_{\xi\xi} \cdot (\xi_y)^2 + 2U_{\xi\eta} \cdot \xi_y\eta_y + U_{\eta\eta} \cdot (\eta_y)^2 + U_\xi \cdot \xi_{yy} + U_\eta \cdot \eta_{yy},$$
   $$U_{xy} = U_{\xi\xi} \cdot \xi_x\xi_y + U_{\xi\eta} \cdot (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + U_{\eta\eta} \cdot \eta_x\eta_y + U_\xi \cdot \xi_{xy} + U_\eta \cdot \eta_{xy}.$$
8. Подставить найденные производные в исходное уравнение (1) и привести подобные слагаемые. В результате уравнение (1) примет один из следующих видов:
   - в случае уравнения гиперболического типа:

   $$U_{\xi\eta} + F_1\big(U_\xi, U_\eta, U, \xi, \eta\big) = 0;$$

- в случае уравнения параболического типа:

$$U_{\eta\eta}+F_1(U_{\xi},U_{\eta},U,\xi,\eta)=0;$$

- в случае уравнения эллиптического типа:

$$U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta}+F_1(U_{\xi},U_{\eta},U,\xi,\eta)=0.$$

1.2. Пример выполнения задачи 1.

Определить тип уравнения

$$U_{xx}-4U_{xy}-21U_{yy}+2U_x-3U_y+5U=x^2 \qquad (8)$$

и привести его к каноническому виду.

Решение:

1. Определим коэффициенты $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$:

$$A=1,\quad B=-2,\quad C=-21.$$

2. Вычислим выражение B^2-AC:

$$B^2-AC=4+21=25.$$

3. $B^2-AC=25>0 \Rightarrow$ уравнение гиперболического типа во всей плоскости *XOY*.
4. Запишем уравнение характеристик:

$$dy^2+4dxdy-21dx^2=0\ . \qquad (9)$$

5. Решим уравнение (9). Для этого:

а) разрешаем уравнение (9) как квадратное уравнение относительно *dy:*

$$dy=\frac{-2\pm\sqrt{25}}{1}dx;$$

$$dy=(-2\pm5)dx;$$

$$dy=-7dx,\qquad dy=3dx, \qquad (10)$$

б) найдём общие интегралы уравнений (10) (характеристики уравнения (9)):

$$y=-7x+C_1,\qquad y=3x+C_2,$$

$$y+7x=C_1,\qquad y-3x=C_2.$$

6. Введём характеристические переменные:

$$\xi=y+7x,$$

$$\eta=y-3x.$$

7. Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение.

Найдем сначала

$$\xi_x = 7, \xi_y = 1, \ \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$
$$\eta_x = -3, \eta_y = 1, \ \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Используя формулы (7), получим:

$$\begin{array}{r|l} 2 & U_x = 7U_\xi - 3U_\eta, \\ -3 & U_y = U_\xi + U_\eta, \\ 1 & U_{xx} = 49U_{\xi\xi} - 42U_{\xi\eta} + 9U_{\eta\eta}, \\ 1 & U_{xy} = 7U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} - 3U_{\eta\eta}, \\ -21 & U_{yy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}. \end{array}$$

Здесь слева написаны коэффициенты уравнения (8) при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим:

$$U_{\xi\xi}\{49 - 28 - 21\} + U_{\xi\eta}\{-42 - 16 - 42\} + U_{\eta\eta}\{9 + 12 - 21\} +$$
$$+U_\xi\{14 - 3\} + U_\eta\{-6 - 3\} + 5U = \frac{(\xi - \eta)^2}{16}.$$

Или после деления на -100 (коэффициент при $U_{\xi\eta}$):

$$U_{\xi\eta} - 0{,}11U_\xi + 0{,}09U_\eta - 0{,}05U = -\frac{(\xi - \eta)^2}{1600}.$$

Ответ. Уравнение (8) является уравнением гиперболического типа на всей плоскости *XOY*. Канонический вид

$$U_{\xi\eta} - 0{,}11U_\xi + 0{,}09U_\eta - 0{,}05U = -\frac{(\xi - \eta)^2}{1600},$$

где $\xi = y + 7x, \quad \eta = y - 3x.$

1.3. Пример выполнения задачи 2.

Определить тип уравнения

$$25U_{xx} - 10U_{xy} + U_{yy} + U_y + 2U = 5y + 2x \tag{11}$$

и привести его к каноническому виду.

Решение:

1. Определим коэффициенты $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$. В нашем примере они постоянны:

   A=25, B= -5, C=*1*.

2. Вычислим выражение $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 25 - 25 = 0.$$

3. $B^2 - AC = 0 \Rightarrow$ уравнение параболического типа во всей плоскости XOY.
4. Запишем уравнение характеристик:

$$25dy^2 + 10dxdy + dx^2 = 0 \quad . \tag{12}$$

5. Решим уравнение (12). Для этого:

а) разрешаем уравнение (9) как квадратное уравнение относительно dy. Однако в этом случае левая часть уравнения является полным квадратом:

$$(5dy + dx)^2 = 0;$$

$$5dy = -dx; \tag{13}$$

б) имеем только одно уравнение характеристик (13). Найдём его общий интеграл (уравнения параболического типа имеют только одно семейство вещественных характеристик):

$$5y = -x + C,$$

$$5y + x = C.$$

6. Введём характеристические переменные: одну из переменных (ξ) вводим как и ранее

$$\xi = 5y + x,$$

а в качестве η берут произвольную, дважды дифференцируемую функцию, не выражающуюся через ξ, пусть

$$\eta = x;$$

7. Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение.
Найдем сначала

$\xi_x = 1, \xi_y = 5, \ \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$

$\eta_x = 1, \eta_y = 0, \ \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$

Используя формулы (7), получим:

$$\begin{array}{r|l} 0 & U_x = U_\xi + U_\eta, \\ 1 & U_y = 5U_\xi, \\ 25 & U_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \\ -10 & U_{xy} = 5U_{\xi\xi} + 5U_{\xi\eta}, \\ 1 & U_{yy} = 25U_{\xi\xi}. \end{array}$$

Здесь слева написаны коэффициенты уравнения (11) при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим:

$$U_{\xi\xi}\{25 - 50 + 25\} + U_{\xi\eta}\{50 - 50\} + U_{\eta\eta}\{25\} +$$

$$+ U_\xi\{5\} + 2U = \xi + \eta.$$

Функцию, стоящую в правой части уравнения (11) необходимо также выразить через характеристические переменные.

После деления на 25 (коэффициент при $U_{\eta\eta}$):

$$U_{\eta\eta} + 0{,}2U_{\xi} + 0{,}08U = 0{,}4(\xi + \eta).$$

Ответ. Уравнение (11) является уравнением параболического типа на всей плоскости *XOY*. Канонический вид

$$U_{\eta\eta} + 0{,}2U_{\xi} + 0{,}08U = 0{,}4(\xi + \eta).$$

где $\xi = 5y + x, \quad \eta = x.$

1.4. Пример выполнения задачи 3.

Определить тип уравнения

$$U_{xx} + 4U_{yy} + U_{x} - 3U_{y} + U = x^2 \qquad (14)$$

и привести его к каноническому виду.

Решение:

1. Определим коэффициенты $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$:
$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 4.$$
2. Вычислим выражение $B^2 - AC$:
$$B^2 - AC = 0 - 4 = -4.$$
3. $B^2 - AC = -4 < 0 \Rightarrow$ уравнение эллиптического типа во всей плоскости *XOY*.
4. Запишем уравнение характеристик:
$$dy^2 + 4dx^2 = 0 \,. \qquad (15)$$

5. Решим уравнение (15). Для этого:

а) разрешаем уравнение (15) как квадратное уравнение относительно *dy:*

$$dy = \pm 2idx\,; \qquad (16)$$

б) уравнения (16) – это пара комплексно-сопряженных уравнений . Они имеют пару комплексно-сопряженных общих интегралов. (Уравнения эллиптического типа не имеют вещественных характеристик)

$$\begin{aligned} &y = \pm 2xi + C, \\ &y \mp 2xi = C. \end{aligned} \qquad (17)$$

6. Введём характеристические переменные как вещественную и мнимую части одного из общих интегралов (17):

$$\xi = \mathrm{Re}(y + 2xi) = y,$$

$$\eta = \mathrm{Im}(y + 2xi) = 2x.$$

7. Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение.

Найдем сначала

$$\xi_x = 0, \xi_y = 1, \ \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = 2, \eta_y = 0, \ \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Используя формулы (7), получим:

$$\begin{array}{r|l} 1 & U_x = 2U_\eta, \\ -3 & U_y = U_\xi, \\ 1 & U_{xx} = 4U_{\eta\eta}, \\ 4 & U_{yy} = U_{\xi\xi} \end{array}$$

Здесь слева написаны коэффициенты уравнения (14) при соответствующих производных.

8. Собирая подобные слагаемые, получим:

$$U_{\xi\xi}\{4\} + U_{\eta\eta}\{4\} +$$
$$+ U_\xi\{-3\} + U_\eta\{2\} + U = \xi.$$

Или после деления на 4 (коэффициент при $U_{\xi\xi}$ и $U_{\eta\eta}$):

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} - 0{,}75U_\xi + 0{,}5U_\eta + 0{,}25U = \xi.$$

Ответ. Уравнение (14) является уравнением эллиптического типа на всей плоскости *XOY*. Канонический вид

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} - 0{,}75U_\xi + 0{,}5U_\eta + 0{,}25U = \xi.$$

где $\xi = y, \quad \eta = 2x.$

1.5. Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1.

Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду.

1.1. $U_{xx} - 8U_{xy} - 9U_{yy} + 21U_x + 3U_y - U = 0$.

1.2. $2U_{xx} - 4U_{xy} - 6U_{yy} - U_x + 7U_y + 3U = 0$.

1.3. $3U_{xx} - 4U_{xy} + U_x - 3U_y + U = 0$.

1.4. $-7U_{xy} - 21U_{yy} + 2U_x - U_y + 4U = 0$.

1.5 $U_{xx} - 2U_{xy} - 8U_{yy} + 3U_y - U = 0$.

1.6 $U_{xx} - U_{xy} - 6U_{yy} + 2U_x - U = x$.

1.7 $4U_{xx} - 2U_{xy} - 6U_{yy} + 8U_x + U_y - U = y$.

1.8 $U_{xx} - 16U_{yy} + U_x + 3U_y - 6U = 0$.

1.9 $U_{xx} - 8U_{xy} + 2U_x - U_y - 5U = x + y$.

1.10 $6U_{xx} - U_{xy} - U_{yy} + U_x + U_y - U = 0$.

Задача 2.

Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду.

2.1. $U_{xx} - 4U_{xy} + 4U_{yy} + 2U_x - U_y + U = x$

2.2. $2U_{xx} - 4U_{xy} + 2U_{yy} + U_x - 3U_y + U = y^2$

2.3. $U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy} + U_x - 3U_y + 5U = 0$

2.4. $3U_{xx} - 6U_{xy} + 3U_{yy} + 5U_x - 3U_y + 2U = y - x$

2.5. $4U_{xx} - 4U_{xy} + U_{yy} + U_x - 2U_y + U = 0$

2.6. $U_{xx} - 4U_{xy} + 4U_{yy} - U_y + U = x + y$

2.7. $9U_{xx} - 6U_{xy} + U_{yy} + 7U_x - 2U_y - U = 0$

2.8. $2U_{xx} - 8U_{xy} + 8U_{yy} + U_x - U_y + U = 0$

2.9. $U_{xx} - 6U_{xy} + 9U_{yy} + 5U_x + U_y - 3U = y$

2.10. $9U_{xx} - 12U_{xy} + 4U_{yy} - 3U_x - 2U_y + U = 0$

Задача 3.

Определить тип уравнения и привести его к каноническому виду.

3.1. $-U_{xx} - 2U_{xy} - 5U_{yy} + 2U_x - 3U_y + 5U = 0$

3.2. $U_{xx} - 2U_{xy} + 10U_{yy} + U_x + 3U_y - 5U = 0$

3.3. $2U_{xx} + 4U_{xy} + 10U_{yy} + 8U_x - 3U_y + U = \sin x$

3.4. $U_{xx} - 4U_{xy} + 13U_{yy} + 7U_x + 6U_y = 0$

3.5. $2U_{xx} + 6U_{xy} + 8U_{yy} + U_x + 5U_y - 2U = y - \frac{3x}{2}$

3.6. $3U_{xx} - 8U_{xy} + 7U_{yy} + 3U_x - U_y + 2U = 0$

3.7. $3U_{xx} + 8U_{xy} + 6U_{yy} + 3U_x + U_y - 2 = \frac{\sqrt{2}x}{3}$

3.8. $U_{xx} - 6U_{xy} + 13U_{yy} + 3U_x - U_y + 4U = 0$

3.9. $13U_{xx} - 4U_{xy} + U_{yy} + 3U_x + 6U_y - U = 0$

3.10. $10U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} + U_x + 3U_y = 0$

§2. Упрощение группы младших производных для уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

2. 1. Необходимый теоретический материал

В самом общем виде линейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными имеет вид

$$\begin{gathered} A(x,y)U_{xx} + 2B(x,y)U_{xy} + C(x,y)U_{yy} + \\ + a(x,y)U_x + b(x,y)U_y + c(x,y)U = f(x,y) \end{gathered} \tag{1}$$

Преобразованием независимых переменных группа старших производных уравнения может быть упрощена. Уравнение (1) приводится к одному из следующих видов

- в случае уравнения гиперболического типа:

$$U_{\xi\eta} + a_1 U_\xi + b_1 U_\eta + c_1 U = f_1(\xi,\eta); \tag{11}$$

- в случае уравнения параболического типа:

$$U_{\eta\eta} + a_2 U_\xi + b_2 U_\eta + c_2 U = f_2(\xi,\eta); \tag{12}$$

- в случае уравнения эллиптического типа:

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + a_3 U_\xi + b_3 U_\eta + c_3 U = f_3(\xi,\eta). \tag{13}$$

Если коэффициенты исходного уравнения постоянны, то для дальнейшего упрощения уравнения любого типа нужно сделать замену неизвестной функции

$$U(\xi,\eta) = e^{\lambda\xi+\mu\eta} V(\xi,\eta), \tag{14}$$

где $V(\xi,\eta)$ - новая неизвестная функция, λ, μ - параметры, подлежащие определению. Такая замена не «испортит» канонического вида, но при этом позволит подобрать параметры λ, μ так, чтобы из трех слагаемых группы младших производных в уравнении осталось только одно. Уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типов соответственно примут вид

$$U_{\xi\eta} + \tilde{c}_1 U = \tilde{f}_1(\xi,\eta);$$

$$U_{\eta\eta} + \tilde{a}_2 U_\xi = \tilde{f}_2(\xi,\eta);$$

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \tilde{c}_3 U = \tilde{f}_3(\xi,\eta).$$

Чтобы реализовать замену (14) в уравнениях (11), (12), (13), необходимо пересчитать все производные, входящие в эти уравнения по формулам

$$
\begin{aligned}
&U(\xi,\eta) = e^{\lambda\xi+\mu\eta}V(\xi,\eta),\\
&U_{\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda V + V_{\xi}),\\
&U_{\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\mu V + V_{\eta}),\\
&U_{\xi\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda^2 V + 2\lambda V_{\xi} + V_{\xi\xi}),\\
&U_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda\mu V + \mu V_{\xi} + \lambda V_{\eta} + V_{\xi\eta}),\\
&U_{\eta\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\mu^2 V + 2\mu V_{\eta} + V_{\eta\eta}).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Подробно рассмотрим этот процесс на примере уравнения гиперболического типа, т.е. уравнения (11). Пересчитаем производные, входящие в это уравнение, используя формулы (15).

$$
\begin{array}{c|l}
c_1 & U(\xi,\eta) = e^{\lambda\xi+\mu\eta}V(\xi,\eta),\\
a_1 & U_{\xi} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda V + V_{\xi}),\\
b_1 & U_{\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\mu V + V_{\eta}),\\
1 & U_{\xi\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda\mu V + \mu V_{\xi} + \lambda V_{\eta} + V_{\xi\eta})
\end{array}
$$

Здесь слева расставлены соответствующие коэффициенты уравнения (11). Собирая подобные слагаемые, получим

$$
e^{\lambda\xi+\mu\eta}\{V_{\xi\eta} + V_{\xi}(a_1+\mu) + V_{\eta}(b_1+\lambda) + V(a_1\lambda + b_1\mu + \lambda\mu + c_1)\} = f_1(\xi,\eta). \tag{16}
$$

В уравнении (16) приравняем к нулю коэффициенты при V_{ξ} и V_{η}

$$
\begin{aligned}
&a_1 + \mu = 0,\\
&b_1 + \lambda = 0.
\end{aligned}
$$

Откуда $\mu = -a_1, \lambda = -b_1$. Подставив эти значения параметров в уравнение (16) и разделив его на $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, придем к уравнению

$$
U_{\xi\eta} + \tilde{c}_1 U = \tilde{f}_1(\xi,\eta),
$$

где $\tilde{c}_1 = -2a_1b_1 + a_1b_1 + c_1, \quad \tilde{f}_1(\xi,\eta) = f_1 e^{-b_1\xi - a_1\eta}$.

.

2.2. Пример выполнения задачи 4

Привести уравнение

$$
U_{xx} - 4U_{xy} + 5U_{yy} - 3U_x + U_y + U = 0 \tag{17}
$$

к каноническому виду и упростить группу младших производных.

<u>Решение:</u>

9. Определим коэффициенты $A(x,y), B(x,y), C(x,y)$:

$$
A=1, \quad B=-2, \quad C=5.
$$

10. Вычислим выражение $B^2 - AC$:

$$B^2 - AC = 4 - 5 = -1.$$

11. $B^2 - AC = -1 < 0 \Rightarrow$ уравнение эллиптического типа во всей плоскости *XOY*.

12. Запишем уравнение характеристик:

$$dy^2 + 4dxdy + 5dx^2 = 0 \;. \tag{18}$$

5. Решим уравнение (18). Для этого:

а) разрешаем уравнение (18) как квадратное уравнение относительно *dy:*

$$dy = \frac{-2 \pm \sqrt{-1}}{1} dx;$$

$$dy = (-2 \pm i)dx; \tag{19}$$

б) найдём общие интегралы уравнений (19) (характеристики уравнения (17)):

$$y = (-2 \pm i)x + C \;,$$

$$y + 2x \pm xi = C \;,$$

6. Введём характеристические переменные:

$$\xi = y + 2x,$$

$$\eta = x.$$

13. Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение.

Найдем сначала

$$\xi_x = 2, \xi_y = 1, \;\; \xi_{xx} = 0, \xi_{xy} = 0, \xi_{yy} = 0,$$

$$\eta_x = 1, \eta_y = 0, \;\; \eta_{xx} = 0, \eta_{xy} = 0, \eta_{yy} = 0.$$

Используя формулы (7), получим:

$$\begin{array}{r|l}
-3 & U_x = 2U_\xi + U_\eta, \\
1 & U_y = U_\xi, \\
1 & U_{xx} = 4U_{\xi\xi} + 4U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \\
-4 & U_{xy} = 2U_{\xi\xi} + U_{\xi\eta}, \\
5 & U_{yy} = U_{\xi\xi}.
\end{array}$$

Здесь слева написаны коэффициенты уравнения (17) при соответствующих производных.

14. Собирая подобные слагаемые, получим:

$$U_{\xi\xi}\{4 - 8 + 5\} + U_{\xi\eta}\{4 - 4\} + U_{\eta\eta}\{1\} +$$

$$+ U_\xi\{-6 + 1\} + U_\eta\{-3\} + U \;\; = 0.$$

Или

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} - 5U_\xi - 3U_\eta + U = 0. \tag{20}$$

Теперь с помощью замены неизвестной функции (14)

$$U(\xi,\eta)=e^{\lambda\xi+\mu\eta}V(\xi,\eta)$$

упростим группу младших производных.

Пересчитаем производные, входящие в уравнение (20), используя формулы (15).

$$\begin{array}{r|l}
1 & U(\xi,\eta)=e^{\lambda\xi+\mu\eta}V(\xi,\eta),\\
-5 & U_{\xi}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda V+V_{\xi}),\\
-3 & U_{\eta}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\mu V+V_{\eta}),\\
1 & U_{\xi\xi}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda^2V+2\lambda V_{\xi}+V_{\xi\xi}),\\
1 & U_{\eta\eta}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}(\mu^2V+2\mu V_{\eta}+V_{\eta\eta}).
\end{array}$$

Здесь слева расставлены соответствующие коэффициенты уравнения (20). Собирая подобные слагаемые, получим

$$e^{\lambda\xi+\mu\eta}\{V_{\xi\xi}+V_{\eta\eta}+V_{\xi}(-5+2\lambda)+V_{\eta}(-3+2\mu)+V(-5\lambda-3\mu+\lambda^2+\mu^2+1)\}=0. \qquad (21)$$

В уравнении (21) приравняем к нулю коэффициенты при V_{ξ} и V_{η}

$$-5+2\lambda=0,$$
$$-3+2\mu=0.$$

Откуда $\mu=\dfrac{3}{2},\lambda=\dfrac{5}{2}$. Подставив эти значения параметров в уравнение (21) и разделив его на $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, придем к уравнению

$$V_{\xi\xi}+V_{\eta\eta}-\frac{15}{2}V=0.$$

Ответ. Уравнение (20) является уравнением эллиптического типа на всей плоскости *XOY*. Его канонический вид

$$V_{\xi\xi}+V_{\eta\eta}-\frac{15}{2}V=0,$$

где $\xi=y+2x,\eta=x,\quad U(\xi,\eta)=e^{\frac{5\xi+3\eta}{2}}V(\xi,\eta)$.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 4. Привести уравнения к каноническому виду и упростить группу младших производных.

4.1.	$3U_{xx}+8U_{xy}+6U_{yy}+3U_x+U_y-2U=0$.
4.2.	$3U_{xx}-8U_{xy}+7U_{yy}+3U_x-U_y+2U=0$.
4.3.	$2U_{xx}+6U_{xy}+8U_{yy}+U_x+5U_y-2U=0$.
4.4.	$U_{xx}-4U_{xy}+4U_{yy}+4U_x-9U_y-3U=0$.
4.5.	$U_{xx}-6U_{xy}+9U_{yy}+4U_x-3U_y-7U=0$.
4.6.	$2U_{xx}+8U_{xy}+8U_{yy}-U_x-2U_y-5U=0$.
4.7.	$U_{xx}-2U_{xy}+U_{yy}-3U_x+2U_y-5U=0$.
4.8.	$8U_{xx}-6U_{xy}-U_{yy}-U_x-3U_y-U=0$.
4.9.	$4U_{xx}-8U_{xy}+U_{yy}-2U_x+2U_y-3U=0$.
4.10.	$U_{xx}+2U_{xy}-3U_{yy}+2U_x+7U_y-3U=0$.