МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)» (МАИ)

Кафедра 805
«Математическая кибернетика»

Отчет

по лабораторной работе №3

на тему «Численные методы поиска безусловного экстремума ФМП»

Выполнил
студент группы М8О-306Б-19 **Аксенов А.Е.**

Проверила доцент каф. 805 **Лунева С.Ю.**

2022

Цель – изучение методов безусловной минимизации на примере квадратичной функции, не имеющей ярко выраженной овражной структуры.

Постановка задачи:

Дано: $f(X) = x^2 + xy + 2y^2 + (5-6)x + 10y$ – квадратичная функция 2-х переменных.

$NL = 10$ – номер компьютера, за которым выполняется работа.

$NG = 6$ – последние две цифры номера учебной группы.

Требуется найти: $\underset{X \in R^n}{f(X) \to \min}$

Аналитическое решение задачи с использованием аппарата необходимых и достаточных условий экстремума:

1. Запишем градиент целевой функции: $\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 2x + y - 1 \\ x + 4y + 10 \end{pmatrix}$

2. Запишем необходимые условия экстремума: $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 4y + 10 = 0 \end{cases}$

3. Решим полученную систему, решение системы – координаты стационарной точки $X^* = (2; -3)^T$

$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 2x + 8y + 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow 7y + 21 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow x = 2$

4. Составим матрицу Гессе и вычислим в точке X^*:

$H(X^*) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. Определим знакоопределённость матрицы по критерию Сильвестра ($\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 7$).

Т.к. $\Delta_1 > 0$ и $\Delta_2 > 0$, то матрица положительно определена и, следовательно, $X^* = (2; -3)^T$ – безусловный локальный минимум.

Ответ: получена точка $X^* = (2; -3)^T$ – безусловный локальный минимум функции $f(X) = x^2 + xy + 2y^2 + (5-6)x + 10y$; $f(X^*) = 2^2 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-3)^2 - 2 - 10 \cdot 3 = -16$

Численное решение задачи с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ из начальной точки $X^0 = (-1{,}1; 2{,}6)$

Методы 1-го порядка

- Метод градиентного спуска (предельное число итераций N=5):

Расчет окончен

Сохранить протокол | Выбрать другой метод | Выход

Протокол расчета

Выполнил: Аксенов Гаврилов, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1,x_2)=1x_1^2+ 1x_1x_2+ 2x_2^2+ -1x_1+ 10x_2+ 0$

Метод градиентного спуска

Точность метода: 0.01, N_{max} = 5, Количество итераций: 5

$N_{ит}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\|\|\nabla f(x_1,x_2)\|\|$
0	0.22	-1.1	2.6	38.97	-0.6	19.3	19.30932
1	0.58	-0.968	-1.646	-7.54302	-4.582	2.448	5.19494
2	0.25	1.68956	-3.06584	-15.87452	-0.68672	-0.5738	0.89489
3	0.6	1.86124	-2.92239	-15.97947	-0.19991	0.17168	0.26351
4	0.23	1.98119	-3.0254	-15.99788	-0.06303	-0.12041	0.1359
5	0	1.99568	-2.9977	-15.99998	-0.00634	0.00486	0.00799

Критерий окончания выполнен

$||x - x^*||$ = 0.00489

$|f(x) - f(x^*)|$ = 2.0E-5

- Метод градиентного наискорейшего спуска (предельное число итераций N=10):

Расчет окончен

Сохранить протокол | Выбрать другой метод | Выход

Протокол расчета

Выполнил: Аксенов Гаврилов, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1,x_2)=1x_1^2+ 1x_1x_2+ 2x_2^2+ -1x_1+ 10x_2+ 0$

Метод градиентного наискорейшего спуска

Точность метода: 0.01, N_{max} = 10, Количество итераций: 8

$N_{ит}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\|\|\nabla f(x_1,x_2)\|\|$
0	0.25404	-1.1	2.6	38.97	-0.6	19.3	19.30932
1	0.48462	-0.94757	-2.30304	-8.39464	-5.19819	-0.15974	5.20064
2	0.25404	1.57157	-2.22563	-14.94891	-0.08249	2.66905	2.67033
3	0.48458	1.59252	-2.90368	-15.85466	-0.71863	-0.02218	0.71897
4	0.25404	1.94076	-2.89293	-15.9799	-0.01141	0.36904	0.36922
5	0.48462	1.94366	-2.98668	-15.99722	-0.09937	-0.00306	0.09941
6	0.25402	1.99181	-2.9852	-15.99962	-0.00157	0.05103	0.05106
7	0.48469	1.99221	-2.99816	-15.99995	-0.01374	-0.00042	0.01374
8	0	1.99887	-2.99795	-15.99999	-0.00022	0.00705	0.00706

Критерий окончания выполнен

$||x - x^*||$ = 0.00234

$|f(x) - f(x^*)|$ = 1.0E-5

- Метод Гаусса-Зейделя (предельное число итераций N=10):

Расчет окончен

Сохранить протокол | Выбрать другой метод | Выход

Протокол расчета

Выполнил: Аксенов Гаврилов, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1,x_2)=1x_1^2+ 1x_1x_2+ 2x_2^2+ -1x_1+ 10x_2+ 0$

Метод Гаусса-Зейделя

Точность метода: 0.01, N_{max} = 10, Количество итераций: 8

$N_{ит}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\|\nabla f(x_1,x_2)\|$
0	0.25005	-1.1	2.6	38.97	-0.6	19.3	19.30932
1	0.49999	-1.1	-2.22594	-7.59125	-5.42594	-0.00377	5.42594
2	0.24997	1.6129	-2.22594	-14.95146	-0.00013	2.70914	2.70914
3	0.50003	1.6129	-2.90314	-15.86889	-0.67733	0.00033	0.67733
4	0.25003	1.95159	-2.90314	-15.98358	4.0E-5	0.33902	0.33902
5	0.49996	1.95159	-2.98791	-15.99795	-0.08472	-4.0E-5	0.08472
6	0.25003	1.99395	-2.98791	-15.99974	-1.0E-5	0.04232	0.04232
7	0.49996	1.99395	-2.99849	-15.99997	-0.01059	-1.0E-5	0.01059
8	0	1.99924	-2.99849	-16	-0	0.00529	0.00529

Критерий окончания выполнен

$\|x - x^*\| = 0.00169$

$|f(x) - f(x^*)| = 0$

- Метод сопряженных градиентов (предельное число итераций N=2):

Расчет окончен

Сохранить протокол | Выбрать другой метод | Выход

Протокол расчета

Выполнил: Аксенов Гаврилов, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1,x_2)=1x_1^2+ 1x_1x_2+ 2x_2^2+ -1x_1+ 10x_2+ 0$

Метод сопряженных градиентов

Точность метода: 0.01, N_{max} = 2, Количество итераций: 2

$N_{ит}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\|\nabla f(x_1,x_2)\|$
0	0.25406	-1.1	2.6	38.97	-0.6	19.3	19.30932
1	0.56231	-0.94756	-2.30334	-8.39464	-5.19846	-0.16091	5.20095
2	0	2.00005	-3.0002	-16	-0.0001	-0.00074	0.00075

Критерий окончания выполнен

$\|x - x^*\| = 0.0002$

$|f(x) - f(x^*)| = 0$

- Метод покоординатного спуска (предельное число итераций N=5):

Расчет окончен

Сохранить протокол | Выбрать другой метод | Выход

Протокол расчета

Выполнил: Аксенов Гаврилов, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1,x_2)=1x_1^2+ 1x_1x_2+ 2x_2^2+ -1x_1+ 10x_2+ 0$

Метод покоординатного спуска

Точность метода: 0.01, N_{max} = 5, Количество итераций: 5

$N_{нт}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\|\nabla f(x_1,x_2)\|$
0	0.28	-1.1	2.6	38.97	-0.6	19.3	19.30932
1	0.49	-1.1	-2.804	-6.92077	-6.004	-2.316	6.43521
2	0.26	1.84196	-2.804	-15.92917	-0.12008	0.62596	0.63737
3	0.56	1.84196	-2.96675	-15.97807	-0.28283	-0.02504	0.28394
4	0.24	2.00034	-2.96675	-15.99778	0.03394	0.13335	0.1376
5	0	2.00034	-2.99875	-16	0.00194	0.00533	0.00567

Критерий окончания выполнен

$\|x - x^*\|$ = 0.00129

$|f(x) - f(x^*)|$ = 0

Методы 2-го порядка

- Метод Ньютона (предельное число итераций N=1):

Расчет окончен

Сохранить протокол | Выбрать другой метод | Выход

Протокол расчета

Выполнил: Аксенов Гаврилов, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1,x_2)=1x_1^2+ 1x_1x_2+ 2x_2^2+ -1x_1+ 10x_2+ 0$

Метод Ньютона

Точность метода: 0.01, N_{max} = 1, Количество итераций: 1

$N_{нт}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\|\nabla f(x_1,x_2)\|$
0	0	-1.1	2.6	38.97	-0.6	19.3	19.30932
1	0	2	-3	-16	0	0	0

Критерий окончания выполнен

$\|x - x^*\|$ = 0

$|f(x) - f(x^*)|$ = 0

- Метод Ньютона-Рафсона (предельное число итераций N=5):

Расчет окончен

Сохранить протокол | Выбрать другой метод | Выход

Протокол расчета

Выполнил: Аксенов Гаврилов, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1,x_2)=1x_1^2+ 1x_1x_2+ 2x_2^2+ -1x_1+ 10x_2+ 0$

Метод Ньютона-Рафсона

Точность метода: 0.01, N_{max} = 5, Количество итераций: 2

$N_{нт}$	шаг t	x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$	f'_{x_1}	f'_{x_2}	$\|\nabla f(x_1,x_2)\|$
0	0.99	-1.1	2.6	38.97	-0.6	19.3	19.30932
1	0.99	1.969	-2.944	-15.9945	-0.006	0.193	0.19309
2	0	1.99969	-2.99944	-16	-6.0E-5	0.00193	0.00193

Критерий окончания выполнен

$\|x - x^*\|$ = 0.00064

$|f(x) - f(x^*)|$ = 0

Методы 0-го порядка

- Метод конфигураций (предельное число итераций N=8):

Расчет окончен

Сохранить протокол | Выбрать другой метод | Выход

Протокол расчета

Выполнил: Аксенов Гаврилов, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1,x_2)=1x_1^2+ 1x_1x_2+ 2x_2^2+ -1x_1+ 10x_2+ 0$

Метод конфигураций

Точность метода: 0.01, N_{max} = 8, Количество итераций: 6

$N_{нт}$	x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$	dx_1	dx_2	коэф-т k
0	-1.1	2.6	38.97	5	5	
1	-1.1	-2.4	-7.53	3	3	0
2	1.9	-2.4	-15.33	0.5	0.5	0
3	1.9	-2.9	-15.98	0.11	0.11	0
4	1.9	-3.01	-15.9888	0.117	0.117	0
5	2.017	-3.01	-15.99968	0.017	0.017	0
6	2	-2.993	-15.9999			0

Критерий окончания выполнен

$\|x - x^*\|$ = 0.007

$|f(x) - f(x^*)|$ = 0.0001

- Метод случайного поиска (предельное число итераций N=8):

Расчет окончен

Сохранить протокол | Выбрать другой метод | Выход

Протокол расчета

Выполнил: Аксенов Гаврилов, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1,x_2)=1x_1^2+ 1x_1x_2+ 2x_2^2+ -1x_1+ 10x_2+ 0$

Метод случайного поиска

Точность метода: 0.01, N_{max} = 8, Количество итераций: 5

$N_{нт}$	радиус r	коэф-т. k	x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	6	1	-1.1	2.6	38.97
1	0.7	1	2.35816	-2.30318	-14.65102
2	0.08	1	1.97509	-2.88906	-15.97753
3	0.04	1	1.9784	-2.96899	-15.99828
4	0.01	1	2.00928	-2.99442	-15.9998
5			1.99946	-2.99633	-15.99997

Критерий окончания выполнен

$||x - x^*||$ = 0.00371

$|f(x) - f(x^*)|$ = 3.0E-5

- Метод Нелдера-Мида (предельное число итераций N=8):

Расчет окончен

Сохранить протокол | Выбрать другой метод | Выход

Протокол расчета

Выполнил: Аксенов Гаврилов, группа 80-306, 06.04.2022

Квадратичная функция: $f(x_1,x_2)=1x_1^2+ 1x_1x_2+ 2x_2^2+ -1x_1+ 10x_2+ 0$

Метод Нелдера-Мида

Точность метода: 0.01, N_{max} = 8, Количество итераций: 7

$N_{нт}$	α	операция	коэффициент	x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	1	редукция		2 2 -1.1	-3 -3 2.6	-16 -16 38.97
1	1	редукция		2 2 0.45	-3 -3 -0.2	-16 -16 -2.2575
2	1	редукция		2 2 1.225	-3 -3 -1.6	-16 -16 -12.56437
3	1	редукция		2 2 1.6125	-3 -3 -2.3	-16 -16 -15.14109
4	1	сжатие	0.5	2 2 1.80625	-3 -3 -2.65	-16 -16 -15.78527
5	1	сжатие	0.5	2 2 1.90313	-3 -3 -2.825	-16 -16 -15.94632
6	1	сжатие	0.5	2 2 1.95156	-3 -3 -2.9125	-16 -16 -15.98658
7				2 2 1.97578	-3 -3 -2.95625	-16 -16 -15.99664

Критерий окончания выполнен

$||x - x^*||$ = 0

$|f(x) - f(x^*)|$ = 0