За правильность не отвечаю………………..

Типы задач:

1.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Df 1 ДУ называется уравнением с РП, если его можно записать в виде

$$P(x)Q(y)dx + R(x)S(y)dy = 0 \quad | \cdot \frac{1}{R(x)Q(y)}$$

$$\frac{P(x)}{R(x)}dx = -\frac{S(y)}{Q(y)}dy$$

$$\int \frac{P(x)}{R(x)}dx = -\int \frac{S(y)}{Q(y)}dy + C$$

$$\varphi(x) + \psi(y) = C$$

Пример:

$$x(y^2-1)dx - y(x^2-1)dy = 0$$

$$\frac{xdx}{x^2-1} = \frac{ydy}{y^2-1}$$

$$\int \frac{2xdx}{x^2-1} = \int \frac{2ydy}{y^2-1} + C$$

$$\ln|x^2-1| = \ln|y^2-1| + \ln C$$

$$(x^2-1) = C(y^2-1)$$

Ответ можно представить как в общем виде, так и выразить $y(x)$[или $x(y)$].

Проверяем:

$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm1$ — при $C=0$

$y^2-1=0 \Rightarrow y=\pm1$ — не учтено в общем решении, значит, надо записать отдельно.

Сведение к ДУ с разделяющимися переменными:

Замечание Однородные ДУ сводятся к ДУ с разделяющимися переменными с помощью подстановки: $\begin{cases} y = ux \\ x = x \end{cases}$ или $\begin{cases} x = uy \\ y = y \end{cases}$

Пример:

$$xdy = (x+y)dx$$

$$\begin{cases} y = ux \\ x = x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} dy = xdu + udx \\ dx = dx \end{cases}$$

$$x^2du + xudx = xdx + uxdx$$

$$x^2du = xdx$$

$$x(xdu - dx) = 0$$

1) $x = 0$

2) $du = \dfrac{dx}{x}$
$u = \ln x + \ln C$
$e^u = Cx$
$Cx = e^{\frac{y}{x}}$

ЕСЛИ ВДРУГ ВИДИТЕ ДРОБЬ:

ДУ, приводящиеся к однородным уравнениям

Это уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, $c_1^2+c_2^2 \neq 0$ и $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Подстановка:

$$\begin{cases} x = u+\alpha & dx = du \\ y = v+\beta & dy = dv \end{cases}$$

α и β — решения системы (совместной и определенной по теореме Крамера):
$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0$
$a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0$

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u+b_1v+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}{a_2u+b_2v+a_2\alpha+b_2\beta+c_2}\right) = f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)$$

Пример:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-4}{2x-y-3}$$

$$\begin{cases} x = u+\alpha \\ y = v+\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha+2\beta = 4 \\ 2\alpha-\beta = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = x-2 \\ v = y-1 \end{cases}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 2v + 2 + 2 - 4}{2u - v + 4 - 1 - 3}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + 2v}{2u - v}$$

$$\begin{cases} v = zu \\ u = u \end{cases}$$

$$dv = udz + zdu$$

$$\frac{udz + zdu}{du} = \frac{u + 2uz}{2u - uz}$$

1) $u = 0 \Rightarrow v = 0$

$x = 2 \Rightarrow y = 1$

Но: в исходном уравнении получаем тогда $\frac{0}{0} \Rightarrow u = 0$ — не решение.

2) $u\frac{dz}{du} + z = \frac{1 + 2z}{2 - z}$

$$\frac{udz}{du} = \frac{1 + 2z - 2z + z^2}{2 - z}$$

$$\frac{udz}{du} = \frac{1 + z^2}{2 - z}$$

$$\frac{2 - z}{1 + z^2}dz = \frac{du}{u}$$

$$2arctgz - \frac{1}{2}\ln(1 + z^2) = \ln u + \ln C$$

$$e^{2arctgz} = \frac{Cu}{\left(\sqrt{1 + z^2}\right)^{-1}}$$

$$e^{2arctg\left(\frac{v}{u}\right)} = \frac{Cu}{\left(\sqrt{1 + \frac{v^2}{u^2}}\right)^{-1}} = C\sqrt{u^2 + v^2}$$

$$e^{2arctg\left(\frac{y - 1}{x - 2}\right)} = C\sqrt{x^2 - 4x + 5 + y^2 - 2y}$$

3) $2 - z = 0$

$z = 2 \Rightarrow v = 2u \Rightarrow$ не решение.

1.2. Однородные ДУ

Сначала проверяем, является ли ДЕЙСТВИТЕЛЬНО это уравнение однородным, а то может мы дебилы и теряем время:

Нужно проверить, а **не является ли данное уравнение однородным**? Проверка несложная, и сам алгоритм проверки можно сформулировать так:

В исходное уравнение:

вместо x подставляем λx, **вместо** y подставляем λy, **производную не трогаем**:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}$$

Буква лямбда – это условный параметр, и здесь он играет следующую роль: если в результате преобразований удастся «уничтожить» ВСЕ лямбды и получить исходное уравнение, то данное дифференциальное уравнение **является однородным**.

Очевидно, что лямбды сразу сокращаются в показателе степени:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{y}{x}}$$

Теперь в правой части выносим лямбду за скобки:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda(y - x e^{\frac{y}{x}})$$

и обе части делим на эту самую лямбду:

$$xy' = y - x e^{\frac{y}{x}}$$

В результате **все** лямбды исчезли как сон, как утренний туман, и мы получили исходное уравнение.

Вывод: Данное уравнение является однородным

Как решать:

Абсолютно все однородные уравнения можно решить с помощью одной-единственной стандартной замены: $y = tx$

Если $y = tx$**, то:**

$$y' = (tx)' = (t)'x + t(x)' = t'x + t$$

Подставляем $y = tx$ **и** $y' = t'x + t$ **в исходное уравнение.**

(Пример есть выше в пункте 1.1)

Еще есть обобщенные ОДУ:

Df 1 ДУ 1 порядка, разрешенное относительно производной, называется обобщенным однородным уравнением, если $\exists\alpha$ такое, что все слагаемые уравнения оказываются слагаемыми одинакового измерения, если x приписать измерение 1, y — измерение α, а константы считать 0-измерениями (при произведении измерения складываются, при делении — вычитаются).

Если уравнение оказалось обобщенным однородным, то это уравнение сводится к однородному с помощью подстановки $\begin{cases} y = u^\alpha \\ x = x \end{cases}$ или $\begin{cases} y = ux^\alpha \\ x = x \end{cases}$

Пример:

$$\underbrace{2x^2y'}_{2+\alpha-1} = \underbrace{y^3}_{3\alpha} + \underbrace{xy}_{\alpha+1}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y = u\sqrt{x} \\ x = x \end{cases}$$

$$2x^2\left(u'\sqrt{x} + \frac{u}{2\sqrt{x}}\right) = u^3x\sqrt{x} + xu\sqrt{x}$$

$$2u'x^2\sqrt{x} + ux\sqrt{x} = u^3x\sqrt{x} + xu\sqrt{x}$$

$$2u'x^2\sqrt{x} = u^3x\sqrt{x}$$

1) $x = 0$ — не является решением

2) $2u'x = u^3$
$$2\frac{du}{u^3} = \frac{dx}{x}$$
$$-\frac{1}{u^2} = \ln(x) + \ln C$$
$$e^{-\frac{1}{u^2}} = Cx$$
$$e^{-\frac{x}{y^2}} = Cx$$

3) $u = 0 \to y = 0$ — еще одно решение.

1.3 Уравнения Бернулли

Есть короче уравнение Бернулли и метод Бернулли. Метод см страницами ниже

.

Это уравнение:

Df 1 ДУ называется уравнением Бернулли, если его можно записать в виде
$y' + p(x)y = y^n q(x)$
или
$x' + p(y)x = x^n q(y)$
при этом $n \neq 0$ — иначе неоднородное и $n \neq 1$ — иначе однородное.

Уравнение Бернулли сводится к однородному с помощью подстановки

$$\begin{cases} u = y^{1-n} \\ x = x \end{cases}$$

$$(y'y^{-n}) + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

$$\frac{1}{1-n}u' + p(x)u = q(x)$$

$$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$$

далее решается как линейное любым способом.

Можно сразу решать уравнение методом Бернулли.

Пример:

$$y' + 2y = y^2 e^x$$

$$\begin{cases} y = uv \\ x = x \end{cases}$$

$$u'v + \underline{uv'} + \underline{2uv} = u^2 v^2 e^x$$

$$uv' + 2uv = u(v' + 2v)$$

$$v' + 2v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -2v$$

$$\frac{dv}{v} = -2dv$$

$$\ln v = -2x$$

$v = e^{-2x} \Rightarrow y = ue^{-2x}$

Т.к. $uv' + 2uv = 0 \Rightarrow u'v = u^2v^2e^x$

$u'e^{-2x} = u^2e^{-ux}e^x$

$u' = u^2e^{-2x}e^x$

$\dfrac{du}{u^2} = e^{-x}dx$

$-\dfrac{1}{u} = -e^{-x} - C$

$u = \dfrac{1}{C + e^{-x}}$

$y = \dfrac{e^{-2x}}{C + e^{-}x}$

Рассмотрим также $v = 0 \rightarrow y = 0$ — тоже решение.

Метод Бернулли:

Метод Бернулли

1. $y' + p(x)y = q(x)$

2. $\begin{cases} y = uv \\ x = x \end{cases}$

3. $\underbrace{u'v + uv'}_{\text{любое из этих 2}} \quad + \underline{p(x)uv} = q(x)$ — любое из двух слагаемых остается и на следующем шаге рассматривается с подчеркнутым слагаемым (мы для наглядности выберем $u'v$)

4. $u'v + p(x)uv = v(u' + p(x)u)$

5. $u' + p(x)u = 0 \to \dfrac{du}{u} = -p(x)dx$
   $\ln u = \int -p(x)dx$
   $u = e^{-\int p(x)dx}$

6. благодаря выбору u:
   $u'v + p(x)uv = 0 \Rightarrow uv' = q(x)$
   $e^{-\int p(x)dx}\dfrac{dv}{dx} = q(x)$
   $dv = q(x)e^{\int p(x)dx}dx$
   $v = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

7. $y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

ие На 5 этапе алгоритма при первом интегрировании при применении метода Бернулли константа не ставится, во-первых, потому что если константу поставить, то при следующем интегрировании появится вторая постоянная и общее решение линейного ДУ будет иметь две постоянные, что противоречит тому, что решение линейного уравнения должно иметь одну постоянную, а во-вторых, благодаря тому, что мы получаем частное решение для функции $u(x)$ и, следовательно, замена на 2 этапе становится заменой на одну функцию, а не на две, т.е. $y = uv = v \cdot e^{-\int p(x)dx}$

1.4 ДУ в полных дифференциалах

Сначала нужно провести проверку, является ли ДУ в полных дифф-х:

Проверим, является ли уравнение $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$ уравнением в полных дифференциалах:

$P=2x-y+1, \quad Q=2y-x-1$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(2x-y+1)'_y=0-1+0=-1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=(2y-x-1)'_x=0-1-0=-1$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, значит, данное ДУ является уравнением в полных дифференциалах

"

***Важно не терять знаки перед многочленами P и Q**

Есть два метода решения, рассмотрим первый:

Ну, а коль скоро уравнение $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$ имеет вид $\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$, то:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-y+1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y-x-1$$

Таким образом, нам известны две частные производные, и наша задача состоит в том, чтобы восстановить общий интеграл $F(x;y)=0$.

Действие второе. Работаем с верхней производной $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - y + 1$. Нижнюю производную $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - x - 1$ пока запишем на листочек и спрячем в карман.

Если дана частная производная $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - y + 1$, то нужная нам функция F восстанавливается с помощью обратного действия – *частного интегрирования*:

$$F = \int (2x - y + 1)dx$$

Когда мы берём интеграл по «икс», то переменная «игрек» считается <u>константой</u>. Как видите, принцип точно такой же, как и при нахождении **частных производных**.

Я запишу подробно, сначала используем *свойства линейности интеграла*:

$$F = \int (2x - y + 1)dx = 2\int xdx - y\int dx + \int dx$$

Еще раз подчеркиваю, что «игрек» в данном случае является константой и выносится за знак интеграла (т.е. не участвует в интегрировании).

В итоге:

$$F = \int (2x - y + 1)dx = 2\int xdx - y\int dx + \int dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} - y \cdot x + x + \varphi(y) = x^2 - xy + x + \varphi(y)$$

Здесь $\varphi(y)$ – некоторая, *пока ещё* неизвестная функция, зависящая <u>только от «игрек»</u>.

Правильно ли вычислен интеграл? В этом легко убедиться, если выполнить проверку, т.е. найти частную производную:

$F'_x = (x^2 - xy + x + \varphi(y))'_x = 2x - y + 1 + 0 = 2x - y + 1$ – получена исходная подынтегральная функция.

Надеюсь всем, понятно, почему $(\varphi(y))'_x = 0$. Функция $\varphi(y)$ зависит только от «игрек», а, значит, является константой.

Действие третье.
Берем «недоделанный» результат $F = x^2 - xy + x + \varphi(y)$ и дифференцируем его по «игрек»:
$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^2 - xy + x + \varphi(y))'_y = 0 - x + 0 + \varphi'_y(y) = -x + \varphi'_y(y)$$

Функцию $\varphi(y)$ мы пока не знаем, но производная-то по «игрек» у неё существует, поэтому запись $\varphi'_y(y)$ – совершенно законна.

Действие четвертое.
Перепишем результат предыдущего пункта: $\frac{\partial F}{\partial y} = -x + \varphi'_y(y)$
А теперь достаем из широких штанин листочек с производной:
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - x - 1$$

Приравниваем:
$$-x + \varphi'_y(y) = 2y - x - 1$$
И сокращаем всё, что можно сократить:
$$\varphi'_y(y) = 2y - 1$$

Находим функцию $\varphi(y)$, для этого необходимо взять интеграл от правой части:
$$\varphi(y) = \int (2y - 1)dy = y^2 - y + C$$

Заключительный аккорд: Подставим найденную функцию $\varphi(y) = y^2 - y + C$ в «недоделанный» результат $F = x^2 - xy + x + \varphi(y)$:
$$F = x^2 - xy + x + y^2 - y + C$$

Ответ: общий интеграл: $x^2 + y^2 - xy + x - y + C = 0$, где $C = const$

Второй метод:

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$$

Решение:
Начало решения точно такое же, необходимо убедиться, что перед нами уравнение в полных дифференциалах:

$$P=\frac{\sin 2x}{y}+x,\ Q=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)'_y=-\frac{\sin 2x}{y^2}+0=-\frac{\sin 2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)'_x=0-\frac{2\sin x}{y^2}\cdot(\sin x)'_x=-\frac{2\sin x\cos x}{y^2}=-\frac{\sin 2x}{y^2}$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, значит, данное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах и имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\sin 2x}{y}+x$ – про эту производную пока забываем.

$\frac{\partial F}{\partial y}=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$ – будем работать с этой производной.

Отличие состоит в том, что пляска начинается от другой производной. Может показаться, что второй способ «рассматривать не обязательно», но время от времени выручает именно он. Когда? Когда вы пытаетесь стандартно начать решение с верхней производной $\frac{\partial F}{\partial x}$, но в результате получается очень трудный интеграл. В такой ситуации всегда следует попробовать начать решение с нижней производной $\frac{\partial F}{\partial y}$, вполне возможно, что интеграл получится значительно проще.

Итак, если $\frac{\partial F}{\partial y}=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$, то:

$$F=\int\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=\int ydy-\sin^2 x\int\frac{dy}{y^2}=\frac{y^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}+\varphi(x)$$

Восстановление общего интеграла F проведено *частным интегрированием* по «игрек».
Когда мы берём интеграл по «игрек», то переменная «икс» считается константой.
Именно поэтому константа $\sin^2 x$ вынесена за знак интеграла и не принимает участия в интегрировании.
Функция $\varphi(x)$ зависит только от «икс» и *пока ещё* неизвестна.

Теперь находим частную производную по «икс»:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\left(\frac{y^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}+\varphi(x)\right)'_x=0+\frac{2\sin x\cos x}{y}+\varphi'_x(x)=\frac{\sin 2x}{y}+\varphi'_x(x)$$

Вспоминаем о «забытой» производной: $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\sin 2x}{y}+x$

Приравниваем результаты и проводим сокращения:

$$\frac{\sin 2x}{y}+\varphi'_x(x)=\frac{\sin 2x}{y}+x$$

$$\varphi'_x(x)=x$$

Функцию $\varphi(x)$ восстанавливаем интегрированием:

$$\varphi(x)=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C$$

Найденную функцию $\varphi(x)=\frac{x^2}{2}+C$ подставляем в недостроенный общий интеграл

$$F=\frac{y^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}+\varphi(x)$$

Ответ: общий интеграл: $\frac{y^2+x^2}{2}+\frac{\sin^2 x}{y}+C=0$, где $C=const$

Вторым способом можно было решить все примеры, которые мы рассмотрели до этого. Оба способа решения абсолютно равноценны, используйте тот, который вам удобнее.

1.5 Не разрешенные относительно производной (Лагранжа и Клеро)

6) Уравнения Лагранжа и Клеро

Df 1 Уравнение называется уравнением Лагранжа, если:
$y=x\psi(y')+\varphi(y')$ (похоже на 4 случай)

Df 2 Уравнение Клеро (частный случай уравнения Лагранжа):
$y=x\cdot y'+\varphi(y')$

$$\begin{cases} y=xp+\varphi(p) \\ y'=p \end{cases} \to \begin{cases} p=p+\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}\cdot\dfrac{dp}{dx}+x\dfrac{dp}{dx} \\ y'=p \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{dp}{dx}(x+\varphi'_p(p))=0 \\ y'=p \end{cases}$$

рассмотрим два множества решений:

1. $\frac{dp}{dx}\Rightarrow p=const\Rightarrow y=Cx+\varphi(C)$ — множество прямых с разным углом наклона
2. $\begin{cases} x=-\varphi'(p) \\ y=-p\cdot\varphi'(p)+\varphi(p) \end{cases}$

Пример Лагранжа:

Найти все решения дифференциального уравнения $y = 2xy' - 3(y')^2$.

Решение.
Здесь мы имеем дело с уравнением Лагранжа. Будем решать его методом введения параметра. Обозначим $y' = p$, так что уравнение можно записать в форме:

$$y = 2xp - 3p^2.$$

Дифференцируя обе части, получаем:

$$dy = 2xdp + 2pdx - 6pdp.$$

Дифференциал dy можно заменить на pdx :

$$pdx = 2xdp + 2pdx - 6pdp, \;\Rightarrow -pdx = 2xdp - 6pdp.$$

Разделив на p, можно записать следующее уравнение (позже мы проверим, не является ли $p = 0$ решением исходного уравнения):

$$-dx = \frac{2x}{p}dp - 6dp, \;\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x - 6 = 0.$$

Как видно, мы получили линейное уравнение для функции $x(p)$. Интегрирующий множитель будет равен:

$$u(p) = \exp\left(\int \frac{2}{p}dp\right) = \exp(2\ln|p|) = \exp\left(\ln|p|^2\right) = |p|^2 = p^2.$$

Тогда общее решение линейного дифференциального уравнения имеет вид:

$$x(p) = \frac{\int p^2 \cdot 6dp + C}{p^2} = \frac{\frac{6p^3}{3} + C}{p^2} = 2p + \frac{C}{p^2}.$$

Подставляя это выражение для x в уравнение Лагранжа, находим:

$$y = 2\left(2p + \frac{C}{p^2}\right)p - 3p^2 = 4p^2 + \frac{2C}{p} - 3p^2 = p^2 + \frac{2C}{p}.$$

Таким образом, общее решение в параметрической форме определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} x(p) = 2p + \frac{C}{p^2} \\ y(p) = p^2 + \frac{2C}{p} \end{cases}.$$

Кроме общего решения, уравнение Лагранжа может иметь еще особое решение. Решая алгебраическое уравнение $\varphi(p) - p = 0$, находим корень:

$$2p - p = 0, \;\Rightarrow p = 0.$$

Следовательно, особое решение представляется в виде следующей линейной функции:

$$y = \varphi(0)x + \psi(0) = 0 \cdot x + 0 = 0.$$

Еще пример Лагранжа:

Найти общее и особое решения уравнения $2y - 4xy' - \ln y' = 0$.

Solution.
Здесь мы снова имеем дело с уравнением Лагранжа. Полагая $y' = p$, можно записать:

$$2y = 4xp + \ln p.$$

Дифференцируем обе части уравнения:

$$2dy = 4xdp + 4pdx + \frac{dp}{p}.$$

Поскольку $dy = pdx$, то получаем:

$$2pdx = 4xdp + 4pdx + \frac{dp}{p}, \;\Rightarrow -2pdx = 4xdp + \frac{dp}{p}, \;\Rightarrow -2p\frac{dx}{dp} = 4x + \frac{1}{p}, \;\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -\frac{1}{2p^2}.$$

При делении на p мы потеряли корень $p = 0$, который соответствует решению $y = 0$.

Таким образом, мы получаем линейное дифференциальное уравнение для функции $x(p)$. Решим его с помощью интегрирующего множителя:

$$u(p) = \exp\left(\int \frac{2}{p}dp\right) = \exp(2\ln|p|) = \exp\left(\ln|p|^2\right) = |p|^2 = p^2.$$

Функция $x(p)$ определяется формулой

$$x(p) = \frac{\int p^2 \cdot \left(-\frac{1}{2p^2}\right)dp + C}{p^2} = \frac{-\frac{p}{2} + C}{p^2} = -\frac{1}{2p} + \frac{C}{p^2}.$$

Подставляя это в исходное уравнение, находим параметрическое выражение для y :

$$2y = 4xp + \ln p, \;\Rightarrow 2y = 4p\left(-\frac{1}{2p} + \frac{C}{p^2}\right) + \ln p, \;\Rightarrow 2y = -2 + \frac{4C}{p} + \ln p, \;\Rightarrow y = \frac{2C}{p} - 1 + \frac{\ln p}{2}.$$

Следовательно, общее решение уравнения в параметрической форме записывается в виде:

$$\begin{cases} x(p) = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{2p} \\ y(p) = \frac{2C}{p} - 1 + \frac{\ln p}{2} \end{cases}.$$

Чтобы найти особое решение, решим следующее алгебраическое уравнение:

$$\varphi(p) - p = 0, \;\Rightarrow 2p - p = 0, \;\Rightarrow p = 0.$$

Отсюда следует, что $y = C$. Путем прямой подстановки можно убедиться, что постоянная C должна быть равна нулю.

Итак, заданное дифференциальное уравнение имеет особое решение $y = 0$. Мы уже встречались с этим корнем выше при делении уравнения на p.

Пример Клеро:

Найти общее и особое решения дифференциального уравнения $y = xy' + (y')^2$.

Решение.
Здесь мы имеем дело с уравнением Клеро. Полагая $y' = p$, его можно записать в виде

$$y = xp + p^2.$$

Продифференцировав по переменной x, находим:

$$dy = xdp + pdx + 2pdp.$$

Заменим dy на pdx :

$$\cancel{pdx} = xdp + \cancel{pdx} + 2pdp, \ \Rightarrow dp\,(x + 2p) = 0.$$

Приравнивая первый множитель к нулю, получаем:

$$dp = 0, \ \ \Rightarrow p = C.$$

Теперь подставим это во второе уравнение:

$$y = Cx + C^2.$$

В результате получаем общее решение заданного уравнения Клеро. Графически, это решение представляется в виде однопараметрического семейства прямых.

Приравнивая нулю второй сомножитель, находим еще одно решение:

$$x + 2p = 0, \ \ \Rightarrow x = -2p.$$

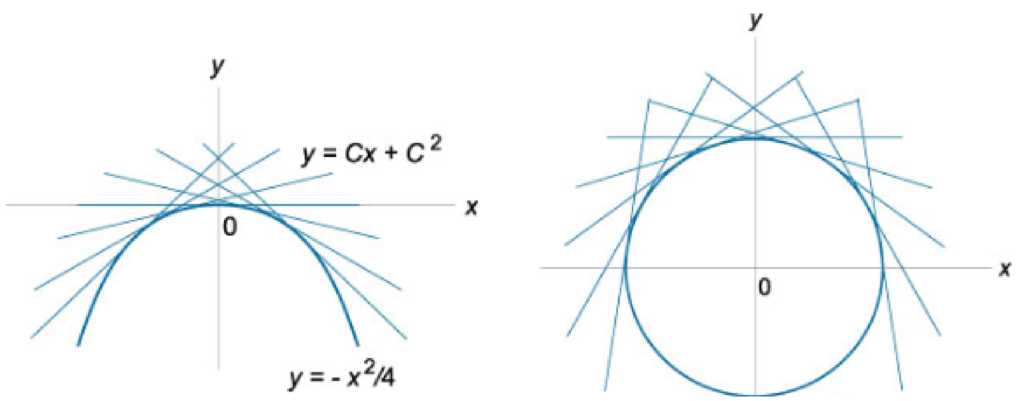
Это уравнение соответствует особому решению дифференциального уравнения и в параметрической форме записывается как

$$\begin{cases} x = -2p \\ y = xp + p^2 \end{cases}.$$

Исключая p из системы, получаем следующее уравнение интегральной кривой:

$$p = -\frac{x}{2}, \ \Rightarrow y = x\left(-\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}.$$

С геометрической точки зрения, парабола $y = -\frac{x^2}{4}$ является *огибающей* семейства прямых, определяемых общим решением (Рисунок 1).



Еще пример Клеро:

Найти общее и особое решения дифференциального уравнения $y = xy' + \sqrt{(y')^2 + 1}$.

Решение.
Как видно, это уравнение является уравнением Клеро. Введем параметр $y' = p$:

$$y = xp + \sqrt{p^2 + 1}.$$

Дифференцируя обе части уравнения по переменной x, получаем:

$$dy = xdp + pdx + \frac{pdp}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Поскольку $dy = pdx$, то можно записать:

$$\cancel{pdx} = xdp + \cancel{pdx} + \frac{pdp}{\sqrt{p^2+1}}, \Rightarrow \left(x + \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\right)dp = 0.$$

Рассмотрим случай $dp = 0$. Тогда $p = C$. Подставляя это в уравнение, находим общее решение:

$$y = Cx + \sqrt{C^2 + 1}.$$

Графически это решение соответствует однопараметрическому семейству прямых линий.

Второй случай описывается уравнением $x = -\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$. Найдем соответствующее параметрическое выражение для y :

$$y = xp + \sqrt{p^2+1} = -\frac{p^2}{\sqrt{p^2+1}} + \sqrt{p^2+1} = \frac{-\cancel{p^2} + \cancel{p^2} + 1}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Параметр p можно исключить из формул для x и y. Возводя последние уравнения в квадрат и складывая их, получаем:

$$x^2 + y^2 = \left(-\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\right)^2 = \frac{\cancel{p^2+1}}{\cancel{p^2+1}} = 1.$$

Полученное выражение является уравнением окружности радиусом 1, расположенным в начале координат. Таким образом, особое решение представляется единичной окружностью в плоскости xy, которая является огибающей для семейства прямых линий (Рисунок 2).

1.6 ОДУ с постоянными коэффициентами

С действительными корнями:

Решить уравнение:

$y^{(7)} + 2y^{(5)} + y''' = 0.$

Решение

Ищем решение в виде e^{kx}. Составляем характеристическое уравнение:

$k^7 + 2k^5 + k^3 = 0.$

Преобразуем его:

$(k^4 + 2k^2 + 1)k^3 = 0;$

$(k^2 + 1)^2 k^3 = 0;$

$(k - i)^2 (k + i)^2 (k - 0)^3 = 0.$

Рассмотрим корни этого уравнения. Мы получили четыре комплексных корня кратности 2:

$k_1 = k_2 = i = 0 + 1 \cdot i; \;\; k_3 = k_4 = \bar{k}_1 = \bar{k}_2 = -i = 0 - 1 \cdot i.$

Им соответствуют четыре линейно-независимых решения исходного уравнения:

$y_1 = e^{0 \cdot x} \cos(1 \cdot x) = \cos x; \;\; y_2 = x\, e^{0 \cdot x} \cos(1 \cdot x) = x \cos x; \;\; y_3 = e^{0 \cdot x} \sin(1 \cdot x) = \sin x;$

$y_4 = x\, e^{0 \cdot x} \sin(1 \cdot x) = x \sin x.$

Также мы имеем три действительных корня кратности 3:

$k_5 = k_6 = k_7 = 0.$

Им соответствуют три линейно-независимых решения:

$y_5 = e^{0 \cdot x} = 1; \;\; y_6 = x\, e^{0 \cdot x} = x; \;\; y_7 = x^2\, e^{0 \cdot x} = x^2.$

Общее решение исходного уравнения имеет вид:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 + C_5 y_5 + C_6 y_6 + C_7 y_7.$

Ответ

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x + C_5 + C_6 x + C_7 x^2.$$

С комплексными корнями:

Решить уравнение

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

Решение

Ищем решение в виде e^{kx}. Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4k + 13 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение.

$$k = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{1}{2}(-4 \pm \sqrt{-36}) = \frac{1}{2}(-4 \pm 6i) = -2 \pm 3i.$$

Мы получили два комплексных корня:

$$k_1 = -2 + 3i; \quad k_2 = -2 - 3i.$$

Им соответствуют два линейно-независимых решения:

$$y_1(x) = e^{-2x} \cos 3x; \quad y_2(x) = e^{-2x} \sin 3x.$$

Общее решение уравнения:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 e^{-2x} \cos 3x + C_2 e^{-2x} \sin 3x.$$

Ответ

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

2.1 Линейные неоднородные ДУ высшего порядка

Шаги:

1. $a_0 y^{(n)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$ (1)
   $a_0 y^{(n)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ (2) =>
   => $y_1 \ldots y_n$- ФСР (2)
   $y = C_1(x) y_1(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x)$(*)

2. $C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n = 0$
   $C_1' y_1' + \ldots + C_n' y_n' = 0$
   ...
   $C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x)$
   $=> C' => C => y, x -$ решение

Примеры(ОДНОРОДНЫЕ): (неоднородные см ниже)

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $y''+y'-2y=0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2+\lambda-2=0$

$D=1+8=9; \sqrt{D}=3$

$\lambda_1=\frac{-1-3}{2}=-2$, $\lambda_2=\frac{-1+3}{2}=1$

Получены два различных действительных корня (от греха подальше лучше сразу же выполнить проверку, подставив корни в уравнение).

Всё, что осталось сделать – записать ответ, руководствуясь формулой $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$

Ответ: общее решение: $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$, *где* $C_1, C_2 - const$

Кратные корни:

Если характеристическое уравнение $\lambda^2+p\lambda+q=0$ имеет два **кратных** (совпавших) действительных корня $\lambda_1=\lambda_2$ (дискриминант $D=0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид:

$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2xe^{\lambda_1 x}$, где C_1, C_2 – константы.

Вместо λ_1 в формуле можно было нарисовать λ_2, корни всё равно одинаковы.

Если оба корня равны нулю $\lambda_1=\lambda_2=0$, то общее решение опять же упрощается: $y=C_1e^{0\cdot x}+C_2xe^{0\cdot x}=C_1+C_2x$. Кстати, $y=C_1+C_2x$ является общим решением того самого примитивного уравнения $y''=0$, о котором я упоминал в начале урока. Почему? Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2=0$ – действительно, данное уравнение как раз и имеет совпавшие нулевые корни $\lambda_1=\lambda_2=0$.

Пример 3

Решить дифференциальное уравнение $y''-6y'+9y=0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2-6\lambda+9=0$

Здесь можно вычислить дискриминант, получить ноль и найти кратные корни. Но можно невозбранно применить известную школьную формулу сокращенного умножения:

$(\lambda-3)^2=0$

(конечно, формулу нужно увидеть, это приходит с опытом решения)

Получены два кратных действительных корня $\lambda_{1,2}=3$

Ответ: общее решение: $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$, *где* $C_1, C_2 - const$

Комплексные корни:

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет **сопряженные** комплексные корни $\lambda_1 = \alpha - \beta i$, $\lambda_2 = \alpha + \beta i$ (дискриминант $D < 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид:
$y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, где C_1, C_2 – константы.
Примечание: Сопряженные комплексные корни почти всегда записывают кратко следующим образом: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

Если получаются *чисто мнимые* сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$, то общее решение упрощается:
$y = e^{0 \cdot x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$

Пример 5

Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка
$y'' - 2y' + 10y = 0$

Решение: Составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$
$D = 4 - 40 = -36$
$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$ – получены сопряженные комплексные корни

Ответ: общее решение: $y = e^x (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$, *где* $C_1, C_2 - const$

Пример 9

Решить однородное дифференциальное уравнение третьего порядка
$y''' + y' = 0$

Решение: Составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^3 + \lambda = 0$
$\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$
$\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i$ – получен один действительный корень и два сопряженных комплексных корня.

Ответ: общее решение $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$, *где* $C_1, C_2, C_3 - const$

Примеры (НЕОДНОРОДНЫЕ) :
xy’’ − y’ = x^2

решаем однородное:

$xy'' - y' = 0$

$y' = z(x),\ y'' = \dfrac{dz}{dx}$

$x\dfrac{dz}{dx} - z = 0$

$\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x}$

$\ln|z| = \ln|x| + \ln|2C_1|$

$z = 2C_1x$

$y' = 2C_1x$

$\int dy = 2C_1\int xdx$

$y = C_1x^2 + C_2$

$y = C_1(x)x^2 + C_2(x)$

$\begin{cases} x^2C_1' + C_2' = 0 \\ 2xC_1' + C_2' \cdot 0 = x \end{cases}$

$C_1' = \dfrac{1}{2}$

$C_1(x) = \dfrac{1}{2}x + C_1$

$C_2' = \dfrac{1}{2}x^2$

$C_2(x) = -\dfrac{1}{6}x^3 + C_2$

$y = \dfrac{1}{2}x^3 + C_1x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + C_2 = \dfrac{x^3}{3} + C_1x^2 + C_2$

Некоторые методы решения:

1) $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$

Если известно частное решение соответствующего однородного ДУ, то порядок данного уравнения можно понизить на 1.

y_1 — частное решение $L(y_1) = 0$
замена: $y = u \cdot y_1$ (u — новая неизвестная функция)
$y' = uy_1' + u'y_1$
$y'' = uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1$
$\ldots$
$y^{(n)} = uy_1^{(n)} + \ldots + u^{(n)}y_1$
умножаем на соответствующие коэффициенты:

$$\left.\begin{array}{l} a_n(x)y = a_n(x)uy_1 \\ a_{n-1}(x)y' = a_{n-1}(x)uy_1' + a_{n-1}u'y_1 \\ \ldots \\ y^n = uy_1^{(n)} + \ldots + u^{(n)}y_1 \end{array}\right\} \underbrace{uL(y_1)}_{=0} + b_1(x)u' + b_2(x)u'' + \ldots = f(x)$$

$u' \to z(x) \Rightarrow$ понижается на 1 порядок

2) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

y_1 — удалось найти частное решение: $L(y_1) = 0$
Если бы знали оба частных решения:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C_1 \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$y_1y_2' - y_2y_1' = C_1 \cdot e^{-\int p(x)dx}$, где y_2 — неизвестное решение

$$\frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \frac{C_1 \cdot e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C_1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}$$

$$d\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{C_1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{C_1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx + C_2$$

$y_2 = C_1y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx + C_2y_1$ — формула Остроградского-Лиувилля

2.2 Линейные однородные системы ДУ

Судя по всему, в билетах уже даны собственные значения (лямбды), поэтому решение начинать с шага 3. + в билетах системы из 3 уравнений, а не из 2-ух.

<u>Общая схема:</u>

<u>Вариант 75:</u>

№2

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = 8x + y \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = 8x + y \end{cases}$$

① $$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

② $$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 8 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm 3$$

③ $$\lambda = -3: \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \cancel{8} & \cancel{4} \end{pmatrix} = (2 \;\; 1) \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$2x = -y$$

$$\lambda = 3: \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ \cancel{8} & \cancel{-2} \end{pmatrix} = (-4 \;\; 1) \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$4x = y$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ тогда:}$$

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$$

$$y(t) = 4C_1 e^{3t} - 2C_2 e^{-3t}$$

④ По условию $y(0) = 0$ и $x(0) = -3$, тогда:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -3 \\ 4C_1 + (-2)C_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} C_2 = -3 - C_1 \\ 4C_1 - 2(-3 - C_1) = 0 \end{cases} \begin{cases} C_2 = -3 - C_1 \\ 4C_1 + 6 + 2C_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} C_2 = -2 \\ C_1 = -1 \end{cases}$$

⑤ $$x(t) = -e^{3t} + (-2)e^{-3t}$$

$$y(t) = -4e^{3t} + 4e^{-3t}$$

Решение, если лямбды действительные:

② №4

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = x - y - 2z \\ \dot{z} = x + 2y - z \end{cases} \qquad \lambda = 1,\ \lambda_{1,3} = -1$$

1) $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad H_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$h_2 = 0$

$h_1 = 2h_2 + 2h_3$

2) $\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$h_1 = 2h_3$

$h_1 = -2h_2$

$$\cancel{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}}$$

3) $h_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad H_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} h_1 - 2h_3 = -1 \\ h + 2h_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

Решение, если лямбда вдруг комплексное число:

№4

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = 3x + y, \\ \dot{z} = x + z. \end{cases} \qquad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2i$$

1) $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$h_1 = 0$$
$$-h_2 = h_3$$

2) $\lambda = 2i$

$$\begin{pmatrix} 1-2i & -1 & -1 \\ 3 & 1-2i & 0 \\ 1 & 0 & 1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad H_2 = \begin{pmatrix} -1+2i \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_1 = (-1+2i)h_3$$
$$3\cancel{(-(\ldots))}h_1 = (-1+2i)h_2$$

$$\begin{pmatrix} -1+2i \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2it} = \begin{pmatrix} -1+2i \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t) =$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos 2t - i\sin 2t + 2i\cos 2t - 2\sin 2t \\ 3\cos 2t + 3i\sin 2t \\ \cos 2t + i\sin 2t \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} -\cos 2t - 2\sin 2t \\ 3\cos 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -\sin 2t + 2\cos 2t \\ 3\sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$

(см примеры еще на сл. странице)

4.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y - z \\ \dot{y} = z - 2x - y \\ \dot{z} = x + 2y \end{cases} \qquad (\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm i)$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{cases} h_1 + 2h_2 - h_3 = 0 \\ -2h_1 + h_3 - 2h_2 = 0 \end{cases}$$

$$h_1 = h_3 - 2h_2$$

$$-2h_3 = -2h_2 \qquad \exists h_2 = 1 \Rightarrow h_3 = 1 \Rightarrow h_1 = -1$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2: \begin{bmatrix} 2-i & 2 & -1 \\ -2 & -1-i & 1 \\ 1 & 2 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{cases} (2-i)h_1 + 2h_2 - h_3 = 0 \\ -2h_1 - (1+i)h_2 + h_3 = 0 \\ h_1 + 2h_2 - h_3 = 0 \end{cases}$$

$$\exists h_1 = 1 \Rightarrow$$

$$h_2 = \frac{i}{2} - \frac{1}{2};$$

$$h_3 = 1$$

$$H_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{i}{2} - \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

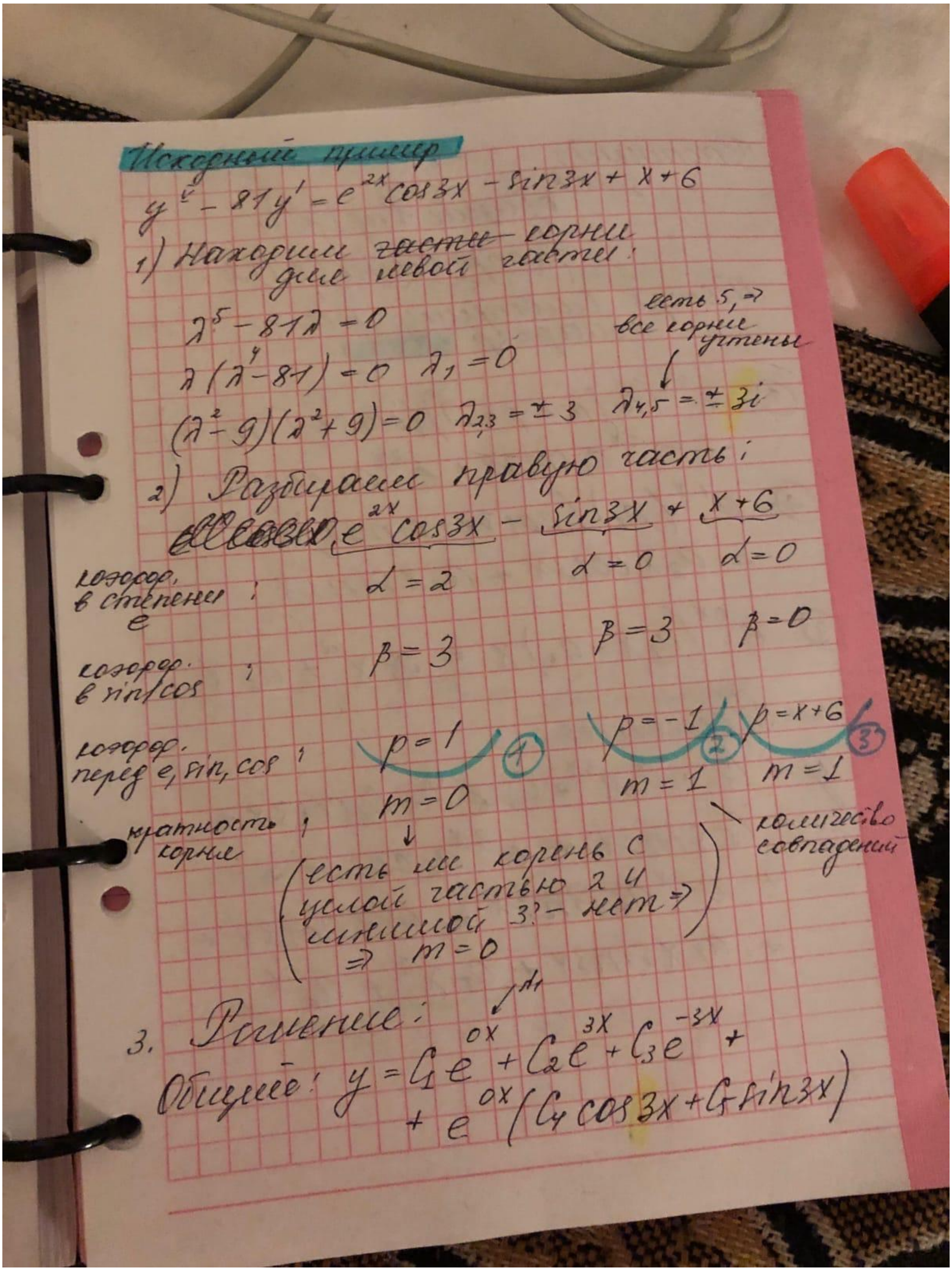
$$H_2 \cdot e^{it} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i}{2} - \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) =$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ \frac{i}{2}\cos t - \underline{\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t} - \frac{i}{2}\sin t \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t) \\ \cos t \end{bmatrix} e^t + C_3 \begin{bmatrix} \sin t \\ \frac{1}{2}(\cos t - \sin t) \\ \sin t \end{bmatrix} e^t$$

2.3 Линейные неоднородные ДУ высших порядков

((ЛН = f1(x) + f2(x) + f3(x))



Частный:

e^{2x}(общий вид [p]);

·(сопр. корень [p]) x^m.

Теперь смотрим на маркер.

① $e^{2x}(a_1 [\text{т.к. } p=1])(\cos 3x + \sin 3x) =$
$= e^{2x} a_1 \cos 3x + e^{2x} a_2 \cos 3x$

② $e^{0x}(a_1)(\cos 3x + \sin 3x) x =$
$= a_3 x \cos 3x + a_4 x \sin 3x$

③ $e^{0x}(a_1 x + a_2) x = a_5 x^2 + a_6 x$

Решение:

$y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x} + C_4 \cos 3x +$
$+ C_5 \sin 3x + e^{2x} a_1 \cos 3x +$
$+ e^{2x} a_2 \sin 3x + a_3 x \cos 3x +$
$+ a_4 x \sin 3x + \underbrace{a_5 x^2 + a_6 x}$

4) Показываем, что мы умные для этого находим хотя бы одну a.

Для простоты берем без всякого говна:

$$\begin{cases} y = a_5 x^2 + a_6 x \\ y' = 2a_5 x + a_6 \\ y'' = 2a_5 \\ y''' = 0 \\ y^{IV} = 0 \\ y^{V} = 0 \end{cases}$$

$y^{V} - 81y' = x+6$ — только выбранная наша часть

$0 - 81(2a_5 x + a_6) = x + 6$

$-162 a_5 x - 81 a_6 = x + 6$

$-162 a_5 = 1$ коэфф. перед „x"

$a_5 = -\frac{1}{162}$

$-81 a_6 = 6 \Rightarrow a_6 = -\frac{6}{81}.$

2.4 Уравнения Эйлера

Уравнения Эйлера:

ДУ называется уравнением Эйлера, если оно приводится к виду

$x^n y^{(n)} + x^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \ldots + x a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$

Примеры:

В обычном ДУВП с постоянными коэффициентами $y_ч = e^{\lambda x}$, для нахождения характеристического уравнения ДУ Эйлера необходимо в левую часть подставить $y_ч = x^\lambda$.

Проделаем это на примере:

$x^2 y'' - 3xy' + 5y$

подставим:

$y_ч = x^\lambda$

$y'_ч = \lambda x^{\lambda-1}$

$y''_ч = \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2}$

$x^2\lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2} - 3x\lambda x^{\lambda-1} + 5x^\lambda = 0$

$x^\lambda\lambda(\lambda - 1) - 3\lambda x + 5x^\lambda = 0$

$x^\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0$, $x^\lambda \neq 0$ при $x \neq 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ — характеристическое уравнение

$\lambda_{1,2} = 2 \pm i$

$y_0 = C_1 x^2 cos(\ln x) + C_2 x^2 sin(\ln x)$

3. Решить уравнение: $\quad x^2 y'' + 3xy' + y = 0$.

$y = x^{\lambda}$, $y' = \lambda x^{\lambda-1}$, $y'' = (\lambda^2-\lambda)x^{\lambda-2}$

$x^2(\lambda^2-\lambda)x^{\lambda-2} + 3x\lambda x^{\lambda-1} + x^{\lambda} = 0$.

$(\lambda^2-\lambda)x^{\lambda} + 3\lambda x^{\lambda} + x^{\lambda} = 0 \quad / : x^{\lambda}$.

$(\lambda^2-\lambda) + 3\lambda + 1 = 0$.

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$.

$\lambda = 1$, кр. $= 2$.

$y = (C_1 x + C_2)e^{x}$.

Решить уравнение

(2) $x^2 y'' + xy' + y = 0.$

Решение

Ищем решение в виде $y = x^k$.

Находим производные:

$y' = kx^{k-1};$

$y'' = k(k-1)x^{k-2}.$

Подставляем в (2):

$x^2 k(k-1)x^{k-2} + xkx^{k-1} + x^k = 0.$

Сокращаем на x^k и получаем характеристическое уравнение:

$k(k-1) + k + 1 = 0.$

Выполняем преобразования.

$k^2 - k + k + 1 = 0;$

$k^2 + 1 = 0;$

$(k-i)(k+i) = 0.$

Получаем два комплексных корня:

$k_1 = -i; \quad k_2 = i.$

Им соответствуют два линейно независимых решения:

$y_1 = \cos(\ln x); \quad y_2 = \sin(\ln x).$

Общее решение уравнения:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$