№1. О нагреве конечного стержня $x\in[0;l]$ с начальным распределением $T_0=300$ $(a^2=10^{-6})$ и наличием конвективного члена $\left(+b\frac{\partial u}{\partial x}, b=10^{-6}\right)$, когда левый конец теплоизолирован, а на правом задана постоянная температура, равная 500, $l=0{,}1$м.

Рассмотрим однородный теплоизолированный с боков стержень конечной длины l, имеющий постоянную по длине толщину и настолько тонкий, чтобы в любой момент времени температуру тела во всех точках поперечного сечения можно было бы считать одинаковой. Выбрана ось x (по оси стержня), стержень совпадает с отрезком $[0;l]$ на x.

Рассмотрим часть стержня на $[x, x+\Delta x]$: по закону Фурье количество теплоты ΔQ_1, протекающего слева направо через сечение в точке x за время $[t, t+\Delta t]$:

$\Delta Q_1=-kS\Delta t\cdot\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, где K - коэффициент пропорциональности

Для ΔQ_2: $\Delta Q_2=-kS\Delta t\cdot\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}=-kS\Delta t\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)=$

$=-kS\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial^2 u(x_1,t)}{\partial x^2}\Delta x\right)\Delta t$, $x_1\in[x,\Delta x+x]$

$\Delta Q=\Delta Q_1-\Delta Q_2=kS\Delta x\Delta t\cdot\frac{\partial^2 u(x_1,t)}{\partial x^2}$

С другой стороны: $\Delta Q=c\rho V\Delta u=c\rho S\Delta u\Delta x$, c - удельная теплоемкость

Получим уравнение баланса: $c\rho\Delta u\Delta x=kS\frac{\partial^2 u(x_1,t)}{\partial x^2}\Delta x\Delta t$

при $\Delta t\to 0$: $c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\cdot\frac{\partial^2 u(x_1,t)}{\partial x^2}$; при $\Delta x\to 0$: $c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\cdot\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$

Получим уравнение теплопроводности: $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a^2=\frac{k}{c\rho}$

В случае наличия конвективного члена $b\frac{\partial u}{\partial x}$: $u_t=a^2 u_{xx}+b\cdot u_x$

Начальное условие - начальное распределение температур в стержне при $t=0$: $u(x,0)=T_0$

Краевые условия - условия на концах:

1) Первого рода, когда на правом конце задана температура: $u(l,t)=\mu_1(t)$

2) Второго рода, когда левый конец теплоизолирован: $u_x(0,t)=\mu_2(t)$

Как видно по графику распределения температур в конечном стержне $x \in [0, l]$, левый конец теплоизолирован, а на правом задана постоянная температура, равная 500. Начальное распределение $T_0 = 300$, а затем вступает в силу конвективный член $v \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$

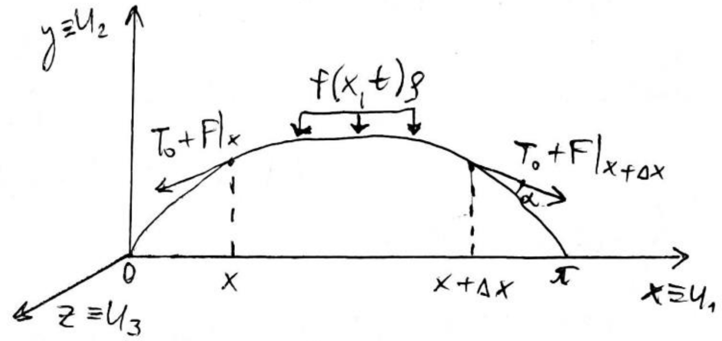
Т.е. все краевые условия выполняются, график построен верно.

№2. О свободных колебаниях конечного стержня $x \in [0, \pi]$, $a^2 = 10^6$ с начальным отклонением $\varphi_1 = x$, $\varphi_2 = \pi - x$, когда левый конец движется по закону $\mu_1 = t$, а на правом задано усилие $\mu_2 = -t$.

Рассмотрим струну (тонкий стержень), закатую с двух сторон, натянутую в начальный момент времени силой T_0;

$f(x,t)$ - распределённая по Ox внешняя нагрузка.

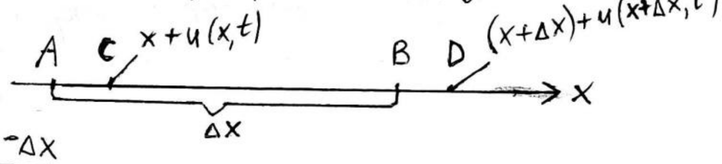
Если она есть, то колебания вынужденные, иначе они свободные. Полагаем, что углы α малы (т.е. $\sin\alpha \approx tg\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$)



Вследствие этого длина струны в первоначальном и отклонённом состояниях сохраняется, а значит длины их не меняются со временем. Полная сила натяжения это сумма начальной силы натяжения T_0 и упругой силы $F(x,t)$. По закону Гука:

$F(x,t) = ES \cdot \varepsilon$, где E - модуль упругости материала, ε - деформация струны.

Деформация в продольном направлении:



$$\frac{|CD|-|AB|}{|AB|} = \frac{\left[\left[(x+\Delta x)+u(x+\Delta x,t)\right]-\left(x+u(x,t)\right)\right]-\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{|CD|-|AB|}{|AB|} = \frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x} = \frac{u_x(x+\theta\Delta x,t)\Delta x}{\Delta x} = u_x(x+\theta\Delta x,t), \quad 0 \le \theta < 1$$

Закон Гука при $\theta \to 0$: $F(x,t) = ESu_x(x,t)$

Продольные колебания: проецируя все силы, действующие на Δx на ось Ox и применяя II закон Ньютона: $[T_0 + F(x+\Delta x,t)]\cos\alpha|_{x+\Delta x} - [T_0 + F(x,t)]\cos\alpha|_x = \Delta m \cdot u_{tt}(x,t)$, $\Delta m = \rho_{\Delta x} S$

$ES\,u_{1x}(x+\Delta x,t) - ES\,u_{1x}(x,t) = \rho_{\Delta x} \cdot S\,u_{1x}(x,t)$

при $\Delta x \to 0$: $\frac{E}{\rho}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[u_{1x}(x+\Delta x,t) - u_{1x}(x,t)] = u_{1tt}(x,t) \Rightarrow u_{1tt} = a^2 u_{1xx}$, где

$a^2 = \frac{E}{\rho}$ - квадрат скорости распространения возмущений.

Поперечные колебания: спроецируем все силы, действующие на Δx на ось Oy:

$[T_0 + F(x+\Delta x,t)\sin\alpha|_{x+\Delta x} - [T_0 + F(x,t)]\sin\alpha|_x + f(x,t)\rho_{\Delta x}S = \rho_{\Delta x}Su_{2tt}$

Полагаем $\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \approx tg\alpha = u_{2x}$

$$[T_0 u_{2x}(x+\Delta x,t) - T_0 u_{2x}(x,t)] + ES u_{2x}(x+\Delta x,t)\, tg\alpha|_{x+\Delta x} - ES u_{2x}(x,t)\, tg\alpha|_x] +$$

$$+ f(x,t)\, \rho_{\Delta x} S = \rho_{\Delta x}\, \rho\, u_{2tt}(x,t)$$

при $\Delta x \to 0$: $\frac{T_0}{\rho S} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}[u_{2x}(x+\Delta x,t) - u_{2x}(x,t)] + f(x,t) = u_{2tt}(x,t) \Rightarrow$

$\Rightarrow u_{2tt}(x,t) = a^2 \cdot u_{2xx} + f(x,t)$, $a^2 = \frac{T_0}{\rho S}$

Начальные условия: $u(x,0) = \varphi_1(x)$ – начальное отклонение точек струны

$u_t(x,0) = \varphi_2(x)$ – начальная скорость точек струны

Краевые условия:

Первого рода: граница перемещается по закону: $u(0,t) = \mu(t)$

или жёстко закреплена: $u(l,t) = 0$

Второго рода: на границе заданы усилия: $u_x(0,t) = \mu(t)$

или граница свободна: $u_x(l,t) = 0$

Третьего рода: концы упруго закреплены: $u_x - T_1 u(0,t) = \mu(t)$

Как можно заметить по графику свободных колебаний конечного стержня, на горизонтальной оси у нас „x". Начальная скорость $\varphi_2 = \pi - x$. Левый конец движется по закону $\mu_1 = t$, а на правом задано усилие $\mu_2 = -t$.

Т.е. все краевые условия выполняются, график построен верно.

Как видно по графику задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге радиуса $r_0 = 1$, у нас имеется заданная на границе функция $u(r_0, \varphi) = 2\sin\varphi, \varphi \in [0; 2\pi]$.
Т.е. все условия выполняются, значит график построен верно.