<u>Теория множеств</u>

Создатель теории множеств (интуитивной, т.к есть парадоксы) Георг Кантор немецкий математик. Жил в конце 19 века. Родился и окончил начальную школу в Петербурге, но из-за болезни отца богатого предпринимателя переехали в Германию.

Теория интуитивная, не основывается на аксиомах и содержит парадоксы. Но очень удобная: её основные определения используются практически в любой области математики.

Под множеством X понимают некоторое собрание определенных и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое. Эти объекты называются элементами множества X.

Символом $\in$ обозначают отношение принадлежности, то есть $x \in X$ означает, что элемент x принадлежит множеству X. Если элемент x не принадлежит множеству X, то обозначают $x \notin X$ или $x \overline{\in} X$.

<u>Принцип объемности.</u> Множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов. Например

$A = \{1;2\}$

$B = \{1;2;1\}$

$A = B$

$C = \{\{1;2\},1\}$

$A \neq C$

$P(x)$– форма от x – это конечная последовательность, состоящая из слов и символа x, такая, что если каждое вхождение x в эту последовательность заменить одним и тем же именем некоторого объекта, то в результате получится истинное или ложное предложение.

<u>Принцип абстракции.</u> Существует множество A, состоящее из элементов a, таких что предложение $P(a)$ принимает значение истина: $A = \{a : P(a) = И\}$.

$A = \{\ x \mid P(x)\}$ – задание множества.

$A = \{\ x \mid x \in N,\ x \geq 7\}$.

Символом $\subseteq$ обозначают отношение включения. $A \subseteq B$ (A является подмножеством B), если каждый элемент множества A есть элемент множества B. $A \subset B$ означает, что $A \subseteq B$ и $A \neq B$ (собственное подмножество).

<u>Свойства отношения включения:</u>

1. $A \subseteq A$
2. $A \subseteq B$ и $B \subseteq A \Rightarrow A = B$
3. $A \subseteq B$ и $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Свойства 2 дает один из способов доказательства равенства двух множеств.

Пустое множество – это множество, не содержащее элементов. Обозначается символом $\varnothing$. Пустое множество является подмножеством любого множества. Символом U обозначим универсальное множество, то есть такое множество, что все рассматриваемые множества являются подмножествами этого множества.

Множество всех подмножеств множества A называется множеством-степенью и обозначается P(A). Или 2^A

Если множества A содержит конечное число элементов

$A = \{\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n\}$, то число его подмножеств равно:

$2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$

Операции над множествами:

1. Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого принадлежат множеству A или множеству B.

$A \cup B = \{\ x \mid x \in A$ ИЛИ $x \in B\}$

2. Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, все элементы которого являются элементами множеств A и B одновременно.

$A \cap B = \{\ x \mid x \in A$ И $x \in B\}$

Очевидно, что

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B,$$
$$A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$$

3. Относительное дополнение множества A до множества B (разность множеств) – это множество $B \backslash A$ всех тех элементов множества B, которые не принадлежат множеству A:

$B \backslash A = \{\ x \mid x \in B$ и $x \notin A\}$

4. Абсолютное дополнение множества A – это множество всех таких элементов $x \in U$, которые не принадлежат множеству A: $\overline{A} = U \backslash A$.

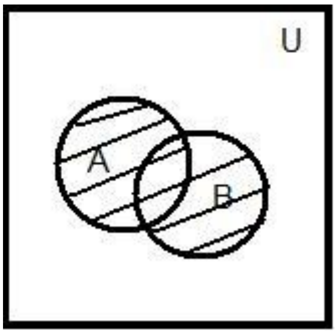
5. Симметрическая разность множеств A и B – это множество

$$A + B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

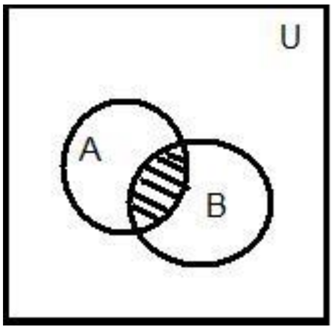
Диаграммы Эйлера- Венна.

Для наглядного представления операций между подмножествами какого-либо универсального множества используют диаграммы Эйлера-Венна. Само универсальное множество изображают в форме прямоугольника, а его подмножества – в форме эллипсов, расположенных внутри прямоугольника. Результат операции заштриховывается.

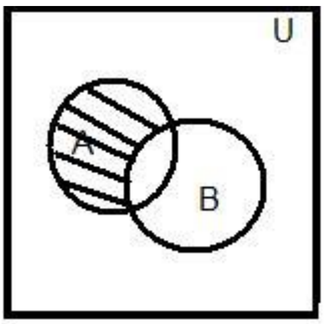
1. $A \cup B$



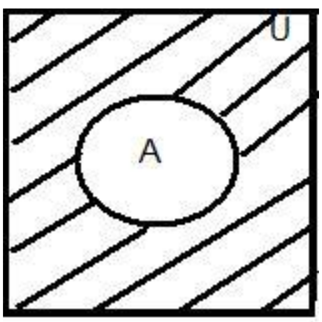
2. $A \cap B$



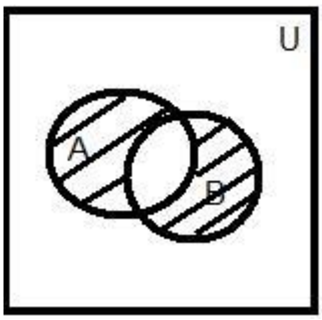
3. $A \backslash B$



4. $\overline{A}$



5. $A + B$



Основные тождества алгебры множеств

Из школьного курса алгебры известно, что операции сложения и умножения чисел удовлетворяют законам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

1. Коммутативность

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

2. Ассоциативность

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. Дистрибутивность

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Основные тождества алгебры множеств

Для произвольных множеств $A, B, C \subseteq U$ справедливо

1. Коммутативность
   $A \cup B \equiv B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B \equiv B \cap A$
2. Ассоциативность
   $(A \cup B) \cup C \equiv A \cup (B \cup C)$ $\qquad$ $(A \cap B) \cap C \equiv A \cap (B \cap C)$
3. Дистрибутивность
   $A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\qquad$ $A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. Законы де Моргана:
   $\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cap \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cap B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}$
5. Законы поглощения:
   $A \cup (A \cap B) \equiv A$ $\qquad$ $A \cap (A \cup B) \equiv A$
6. Законы расщепления
   $A \equiv (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$ $\qquad$ $A \equiv (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
7. Снятие двойного отрицания
   $$\overline{\overline{A}} \equiv A$$
8. $A \cup A \equiv A$ $\qquad$ $A \cap A \equiv A$
9. $A \cup \emptyset \equiv A$ $\qquad$ $A \cap \emptyset \equiv \emptyset$
10. $A \cup U \equiv U$ $\qquad$ $A \cap U \equiv A$
11. $A \cup \bar{A} \equiv U$ $\qquad$ $A \cap \bar{A} \equiv \emptyset$

При доказательстве произвольных тождеств используются тождества, вырожающие одни операции через другие:

12. $A \setminus B \equiv A \cap \overline{B}$;
13. $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Пример. Доказательство тождества с использованием второго свойства отношения включения: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

Докажем закон де Моргана $\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cap \overline{B}$:

1) докажем, что $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

Пусть $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \in U$, но $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

2) теперь докажем $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ – обратная последовательность доказательства 1).
Из 1) и 2) следует справедливость тождества.

Характеристическая функция множества

Характеристической функцией множества A называется функция с областью определения A и областью значений $\{0, 1\}$, причем

$\psi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$ (буква пси).

Легко видеть, что выполняются следующие равенства:

$$\psi_{A\cap B}(x) = \psi_A(x) \cdot \psi_B(x)$$
$$\psi_{A\cup B}(x) = \psi_A(x) + \psi_B(x) - \psi_A(x) \cdot \psi_B(x)$$
$$\psi_{\overline{A}} = 1 - \psi_A(x)$$
$$\psi_{B\backslash A}(x) = \psi_{B\cap\overline{A}}(x) = \psi_B(x) \cdot (1 - \psi_A(x))$$
$$\psi_{A+B}(x) = \psi_{(A\backslash B)\cup(B\backslash A)}(x) =$$
$$= \psi_A(x) \cdot (1 - \psi_B(x)) + \psi_B(x) \cdot (1 - \psi_A(x)) - \psi_A(x) \cdot (1 - \psi_B(x)) \cdot$$
$$\psi_B(x) \cdot (1 - \psi_A(x)) = (\psi_A(x) - \psi_B(x))^2 = \left| \ \psi_A(x) - \psi_B(x) \ \right|,$$

так как $\psi_A(x) = \psi_A(x) \cdot \psi_A(x)$

Составим таблицу значений данных характеристических функций при заданных значениях функций $\Psi_A(x)$ и $\Psi_B(x)$.

Ψ_A (x)	Ψ_B (x)	$\Psi_{\overline{A}}$ (x)	$\Psi_{A\cap B}$ (x)	$\Psi_{A\cup B}$ (x)	$\Psi_{B\backslash A}$ (x)	Ψ_{A+B} (x)
1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0

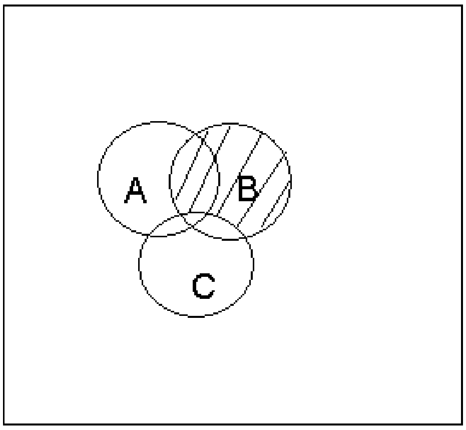
С помощью таблиц характеристических функций левой и правой части можно доказывать справедливость тождеств алгебры множеств.

Для доказательства можно использовать таблицы для самих множеств, в которых 0 – пустое множество, 1 – универсальное. С учетом этого таблицы для самих множеств и для их характеристических функций совпадут.

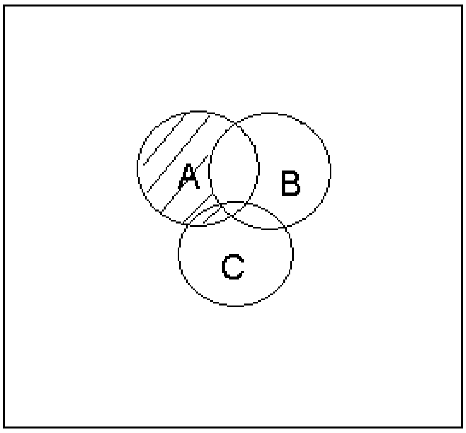
A	B	$\overline{A}$	$B \cap A$	$B \cup A$	$B\backslash A$	$B + A$
U	U	$\emptyset$	U	U	$\emptyset$	$\emptyset$
U	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	U	$\emptyset$	U
$\emptyset$	U	U	$\emptyset$	U	U	U
$\emptyset$	$\emptyset$	U	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Для опровержения справедливости тождеств алгебры множеств можно исползовать диаграммы Эйлера – Венна. Диаграммы рисуются для левой и правой частей предполагаемого тождества и сравниваются между собой.

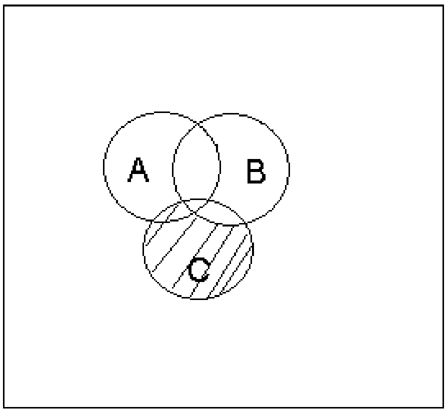
<u>Пример</u>. Проверим справедливость тождества $A\backslash(B\backslash C) \equiv A\backslash(C\backslash B)$.
Из диаграмм на рис. 2 и 4 следует, что $A\backslash(B\backslash C) \neq A\backslash(C\backslash B)$.



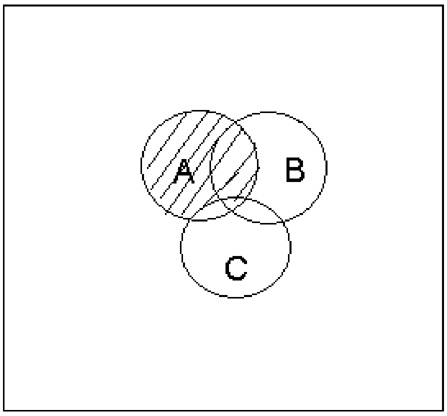
(B\C)
РИС. 1



A\(B\C)
РИС.2



(C\B)
РИС. 3



A\(C\B)
РИС.4

Доказательство справедливости произвольных тождеств алгебры множеств обычно проводятся двумя методами:

1) методом преобразований (используются тождества 1-13);

2) табличным методом (составление характеристической функции для левой и правой частей тождества).

Примеры доказательства тождеств.

1. **Метод преобразований.**

Докажем справедливость тождества

$$A \cap (B + C) \equiv (A \cap B) + (A \cap C)$$

- дистрибутивность пересечения относительно симметрической разности.

Приведем левую и правую часть тождества к одному и тому же выражению

$A \cap (B + C) \equiv A \cap ((\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{C}}) \cup (C \cap \overline{B})) \equiv (A \cap \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{C}}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$

$(A \cap B) + (A \cap C) \equiv \Big((A \cap \mathrm{B}) \cap \big(\overline{A \cap C}\big)\Big) \cup \Big((A \cap C) \cap \big(\overline{A \cap \mathrm{B}}\big)\Big) \equiv$

$\equiv \left((A \cap B) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{C}\right)\right) \cup \left((A \cap C) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)\right) \equiv$
$\equiv (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{A}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \equiv (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$

2. **Табличный метод.**
С помощью характеристических функций множеств докажем справедливость тождества $A \cap (B + C) \equiv (A \cap B) + (A \cap C)$. Действительно, для произвольного $x \in U$ имеем:

Ψ_A	Ψ_B	Ψ_C	Ψ_{B+C}	$\Psi_{A\cap(B+C)}$	$\Psi_{A\cap B}$	$\Psi_{A\cap C}$	$\Psi_{(A\cap B)+(A\cap C)}$
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Значения характеристических функций для левой и правой частей тождества совпадают.

Характеристическую функцию можно использовать и для доказательства различных утверждений теории множеств. Доказательства удобно проводить, предварительно преобразовав выражения согласно утверждениям 1 и 2.

Утверждение 1. Пусть A, B – произвольные множества. Тогда
1. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \backslash B = \emptyset$.
2. $A = B \Leftrightarrow A + B = \emptyset$.

Доказательство.

1. Пусть . $A \subseteq B$, но $A \backslash B \neq \emptyset$. Тогда $\exists a$: $a \in A$, но $a \notin B$. А это противоречит условию $A \subseteq B$.

Пусть теперь $A \backslash B = \emptyset$, но не выполняется $A \subseteq B$. Тогда $\exists a$: $a \in A$, но $a \notin B$. Следовательно, $a \in (A \backslash B)$, что противоречит условию $A \backslash B = \emptyset$.▲

2.
$A + B = \emptyset \Leftrightarrow (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \emptyset \Leftrightarrow (A \backslash B) = \emptyset$ и $(B \backslash A) = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$. ▲

Утверждение 2. Пусть F_1, F_2, G_1, G_2 - формулы алгебры множеств. Справедливы следующие утверждения
1. $F_1 = F_2 \Leftrightarrow G_1 = G_2$ справедливо т. и т. т, когда $\Psi_{F_1+F_2}(x) = \Psi_{G_1+G_2}(x)$.
2. $F_1 \subseteq F_2 \Leftrightarrow G_1 = G_2$ справедливо т. и т. т, когда $\Psi_{F_1 \backslash F_2}(x) = \Psi_{G_1+G_2}(x)$.
3. $F_1 = F_2 \Leftrightarrow G_1 \subseteq G_2$ справедливо т. и т. т, когда $\Psi_{F_1+F_2}(x) = \Psi_{G_1 \backslash G_2}(x)$.
4. $F_1 \subseteq F_2 \Leftrightarrow G_1 \subseteq G_2$ справедливо т. и т. т, когда $\Psi_{F_1 \backslash F_2}(x) = \Psi_{G_1 \backslash G_2}(x)$.

Доказательство утверждения 2 следуют из утверждения 1.

Пример.

Доказать, что

$$A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \bar{B} \cup C$$

Способ 1. Согласно утверждению 1 заменим данное утверждение на эквивалентное

$$(A \cap B) \setminus C = \emptyset \iff A \setminus (\bar{B} \cup C) = \emptyset$$

Составим таблицу соответствующих значений характеристических функций и убедимся, что правая часть утверждения выполняется тогда и только тогда, когда выполняется левая.

Ψ_A (x)	Ψ_B (x)	Ψ_C (x)	$\Psi_{A\cap B}$ (x)	$\Psi_{(A\cap B)\setminus C}$ (x)	$\Psi_{(\bar{B}\cup C)}$ (x)	$\Psi_{A\setminus(\bar{B}\cup C)}$ (x)
1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0

Способ 2. Докажем, что

$$(A \cap B) \setminus C \equiv A \setminus (\bar{B} \cup C)$$

$$A \setminus (\bar{B} \cup C) \equiv A \cap \overline{(\bar{B} \cup C)} \equiv A \cap B \cap \bar{C} \equiv (A \cap B) \setminus C$$

Способ 3. Доказательство рассуждением.

1) Докажем, что $A \cap B \subseteq C \implies A \subseteq \bar{B} \cup C$.
Пусть $x \in A$, покажем, что $x \in \bar{B} \cup C$. Рассмотрим два случая:
$x \in B$ и $x \in \bar{B}$. Если $x \in B$, то $x \in (A \cap B) \subseteq C \implies x \in C \subseteq \bar{B} \cup C \implies x \in \bar{B} \cup C$
Если $x \in \bar{B} \subseteq \bar{B} \cup C \implies x \in \bar{B} \cup C$.

2) Докажем, что $A \subseteq \bar{B} \cup C \implies A \cap B \subseteq C$.
Пусть $x \in A \cap B$, покажем, что $x \in C$. $x \in A \cap B \implies x \in A$ и $x \in B$. Так как $A \subseteq \bar{B} \cup C$, то $x \in \bar{B}$ или $x \in C$. Но $x \in B \implies x \notin \bar{B} \implies x \in C$. ▲

Парадокс Б. Рассела.

Можно указать такие множества, которые принадлежат самим себе как элементы (множество всех множеств), и такие множества, которые не являются элементами самих себя (A = {1;2}).

Пусть множество A состоит из множеств, которые не являются элементами самих себя $A = \{ X \mid X \notin X \}$. В этом случае получаем

Если $A \in A \Rightarrow A \notin A$.

Если $A \notin A \Rightarrow A \in A$

И в том и в другом случае получаем противоречие.

Теория отношений

Упорядоченная пара <x , y> интуитивно определяется как совокупность, состоящая из двух элементов x и y, расположенных в определенном порядке. Две пары <x , y> и < u , v> считаются равными тогда и только тогда, когда x=u , а y=v.

Упорядоченная n- ка элементов $x_1,\dots,x_n$ (кортеж) обозначается $\langle x_1,\dots,x_n \rangle$ и, по определению, есть $\langle \langle x_1,\dots,x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$.

На множестве X задано бинарное (двуместное) отношение ρ, если задано множество упорядоченных пар с элементами из X.

Обозначим $\langle x, y\rangle \in \rho \sim x\rho y$

$\rho = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in X\}$

Примеры:

1) $\rho = \{\langle 1,2\rangle, \langle 5,7\rangle, \langle 9,1\rangle\}$ - бинарное отношение на множестве N.

2) На множестве R отношение $\leq$.

$\rho_{\leq} = \{\langle x, y\rangle \mid x \leq y\}$

3) Отношение подобия треугольников на множесстве треугольников.

4) Отношение принадлежности к одной студенческой группе на множестве студентов курса

5) $\rho = \{\langle x, y\rangle \mid x^2 + y^2 \leq 1; x, y \in R\}$ - бинарное отношение

6) $\rho = \{\langle x, y\rangle \mid y = x^2 + 2x + 1; x, y \in R\}$ - бинарное отношение

Областью определения отношения ρ называется множество $D_\rho = \{x \mid \langle x, y\rangle \in \rho\}$.

Областью значений отношения ρ называется множество $R_\rho = \{y \mid \langle x, y\rangle \in \rho\}$.

Пример:

X = {1, 2, 3}

$\rho = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

$D_\rho = \{1,2\}$

$R_\rho = \{2,3\}$

<u>Прямое или декартово произведение множеств.</u>

Прямым (декартовым) произведением множеств X и Y называется совокупность всех упорядоченных пар $\langle x, y\rangle$ таких, что $x \in X$ и $y \in Y$.

$X \times Y = \{\langle x, y\rangle \mid x \in X, y \in Y\}$

Аналогично и для n-элементных множеств.

Пример:

1. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{3, 4\}$.

$X \times Y = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle\}$

$Y \times X = \{\langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle\}$

$X \times Y \neq Y \times X$ (легко видеть, представив точками на плоскости)

2. Пусть X множество точек отрезка [2, 4], а Y- множество точек отрезка [2, 5], то X × Y- множество точек прямоугольника [2, 4] × [2 , 5]

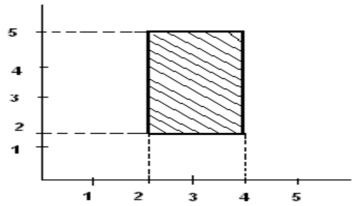


Рис 1.7

3. Прямое произведение окружности на отрезок – боковая поверхность циллиндра.

<u>Доказательство тождеств, содержащих прямое произведение множеств</u>, проводится с использованием свойства 2 отношения включения:

1. левая часть $\subseteq$ правая часть
2. правая часть $\subseteq$ левая часть
$\Rightarrow$ левая часть = правая часть, ч.т.д.

Пример. Доказать тождество

$$(A\cap C)\times(B\cap D) = (A\times B)\cap(C\times D)$$

Доказательство.

1. Докажем, что $(A\cap C)\times(B\cap D)\subseteq(A\times B)\cap(C\times D)$

Пусть $\langle x,y\rangle\in(A\cap C)\times(B\cap D)$

$\Rightarrow$ $x\in(A\cap C), y\in(B\cap D)\Rightarrow x\in A$ и $x\in C, y\in B$ и $y\in D$

$\Rightarrow$ $x\in A, y\in B$ и $x\in C, y\in D$ $\Rightarrow\langle x,y\rangle\in A\times B, \langle x,y\rangle\in C\times D$

$\Rightarrow$ $\langle x,y\rangle\in(A\times B)\cap(C\times D)$

2. $(A\times B)\cap(C\times D)\subseteq(A\cap C)\times(B\cap D)$

Доказательство п.1. в обратной последовательности.
Ч.т.д.

Обратным отношением для ρ называется отношение

$\rho^{-1}=\{\langle y,x\rangle \mid \langle x,y\rangle\in\rho\}$

Композицией отношений ρ_1 и ρ_2 называется отношение

$\rho_1\circ\rho_2=\{|\langle x,y\rangle \mid \exists z:\langle x,z\rangle\in\rho_2,\langle z,y\rangle\in\rho_1\}$

Пример:

$X = \{1,2,3\}$
$\rho_1 = \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
$\rho_1^{-1} = \{\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$
$\rho_2 = \{\langle 2,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$
$\rho_2^{-1} = \{\langle 1,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$
$\rho_1\circ\rho_2 = \{\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
$\rho_2\circ\rho_1 = \{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$
$\rho_1\circ\rho_2 \neq \rho_2\circ\rho_1$

Свойства отношений:
1) $(\rho^{-1})^{-1}=\rho$
2) $(\rho_1\circ\rho_2)^{-1}=\rho_2{}^{-1}\circ\rho_1{}^{-1}$
1) Доказательство свойства 2). $<x,y>\in(\rho_1\circ\rho_2)^{-1}\Leftrightarrow<y,x>\in\rho_1\circ\rho_2\Leftrightarrow$ $\exists z\colon\begin{cases}<y,z>\in\rho_2\\<z,x>\in\rho_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}<z,y>\in\rho_2{}^{-1}\\<x,z>\in\rho_1{}^{-1}\end{cases}\Leftrightarrow<x,y>\in\rho_2{}^{-1}\circ\rho_1{}^{-1}$.

Отношения эквивалентности и порядка.

Пусть задано отношение ρ на множестве X. Введем следующие определения.

1. ρ называется **рефлексивным**, если $\forall$ $x\in X$ выполняется $\langle x,x\rangle\in\rho$
2. ρ называется **симметричным,** если $\forall$ $x,y\in X$ $\langle x,y\rangle\in\rho\Rightarrow\langle y,x\rangle\in\rho$
3. ρ называется **антисимметричным**, $\forall$ $x,y\in X$ $\langle x,y\rangle\in\rho$ и $\langle y,x\rangle\in\rho\Rightarrow$ x = y
4. ρ называется **асимметричным**, $\forall$ $x,y\in X$ $\langle x,y\rangle\in\rho\Rightarrow<y,x>\notin\rho$
5. ρ называется **транзитивным,** если $\forall$ $x,y,z\in X$, $\langle x,y\rangle\in\rho$ и $\langle y,z\rangle\in\rho$ $\Rightarrow$

$\langle x, z\rangle \in \rho$

6. Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на множестве X называется **отношением эквивалентности** на множестве X.

7. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется **отношением частичного порядка** на множестве X и обозначается $\preccurlyeq$.

8. Отношение частичного порядка, у которого все элементы сравнимы между собой, называется **отношением линейного порядка**.

9. Асимметричное и транзитивное отношение на множестве X называется **отношением строгого порядка** на X.

(Аналогично – строгий линейный порядок).

10. Рефлексивное и транзитивное отношение на множестве X называется **отношением квазипорядка** на множестве X.

Квазипорядок обобщает отношения частичного порядка и эквивалентности. Отношения частичного порядка и эквивалентности – частный случай квазипорядка.

Является ли отношение рефлексивным, симметричным, антисимметричным, асимметричным и транзитивным можно проверить убедившись в справедливости следующих соотношений.

1) рефлексивно: $d \subseteq \rho$;

2) симметрично: $\rho^{-1} = \rho$;

3) антисимметрично: $\rho^{-1} \cap \rho \subseteq d$;

4) асимметрично: $\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$

5) транзитивно: $\rho^2 \subseteq \rho$.

Где d=e отношение диагональ – все пары <x, x>, $x \in X$.

Примеры:

1) Пусть X = {1,2,3}.

$d = \{<1,1>, <2,2>, <3,3>\}$ – рефлексивное, симметричное, антисимметричное, транзитивное отношение. Эквивалентность и частичный порядок.

$\rho_1 = \{\langle 1,1\rangle\}$ - симметричное, антисимметричное, транзитивное отношение.

$\rho_2 = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle\}$ - антисимметричное.

$\rho_3 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle\}$ - не обладает ни одним из свойств.

$\rho_4 = d \cup \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle\}$ - линейный порядок.

$\rho_5 = d \cup \{<1,2>, <2,1>, <1,3>, <3,1>, <2,3>, <3,2>\}$- эквивалентность.

$\rho_6 = d \cup \{<1,2>, <2,1>, <1,3>, <2,3>\}$ - квазипорядок, но не эквивалентность и не частичный порядок.

$\rho_7 = \{<1,2>, <1,3>, <2,3>\}$ - строгий порядок.

2) Отношение $x \le y$ на множестве R - отношение частичного (линейного) порядка. Отношение $x < y$ – строгий линейный порядок.

3) Отношение подобия треугольников на множестве треугольников – эквивалентность.

4) Отношение принадлежности к одной группе на множестве студентов института – эквивалентность.

5) Отношение равенства на числовом множестве M - отношение эквивалентности и отношение частичного порядка одновременно.

6) Отношение включения на множестве всех подмножеств множества A – частичный порядок.

7) Подчинение по званию на множестве военных – квазипорядок.

8) **РГР №2.**

X = {1,2,3,4}

$\rho = \{<1,2>, <2,1>, <3,3>, <3,1>, <4,2>\}$.

<u>Решение.</u>

$D_\rho = \{1, 2, 3, 4\}$.

$R_\rho = \{1, 2, 3\}$.

$\rho^{-1} = \{<2,1>, <1,2>, <3,3>, <1,3>, <2,4>\}$.

$\rho^2 = \{<1,1>, <2,2>, <3,3>, <3,1>, <3,2>, <4,1>\}$.

$\rho \circ \rho^{-1} = \{<2,2>, <1,1>, <3,3>, <1,3>\}$.

$\rho^{-1} \circ \rho = \{ <1,1>, <1,4>, <2,2>, <2,3>, <3,3>, <3,2>, <4,4>, \}$.

X	1	2	3	4
1	-	<1, 2>	-	-
2	<2, 1>	-	-	-
3	<3, 1>	-	<3, 3>	-
4	-	<4, 2>	-	-

Из таблицы видно, что заданное отношение ρ не является рефлексивным, симметричным, асимметричным и антисимметричным.

Проверем для ρ выполнение соотношений:

1. $d \nsubseteq \rho$ - не является рефлексивным;
2. $\rho \neq \rho^{-1}$ - не является симметричным;
3. $\rho \cap \rho^{-1} = \{<2,1>, <1,2>, <3,3>\} \nsubseteq d$ - не является антисимметричным;
4. $\rho \cap \rho^{-1} = \{<2,1>, <1,2>, <3,3>\} \neq \emptyset$ - не является асимметричным;

1. $\rho^2 \nsubseteq \rho$ - не является транзитивным.

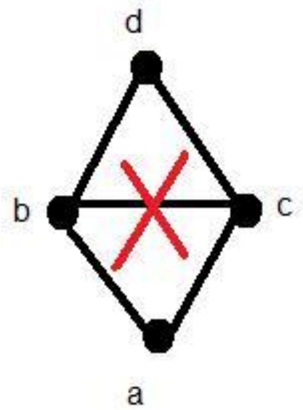
<u>Отношение частичного порядка. Диаграмма Хассе.</u>

Рассмтрим частично упорядоченное множество (множество с заданным на нем отношением частичного порядка) с конечным числом элементов. Его можно представить в виде схемы, в которой каждый элемент множества изображается точкой на плоскости, причем, если $x \prec y$ и не существует никакого промежуточного элемента z такого, что $x \prec$z и z$\prec y$, то точки x и y соединяют отрезком. Точку, соответствующую x, располагают ниже точки y. Такие схемы называются диаграммами Хассе.

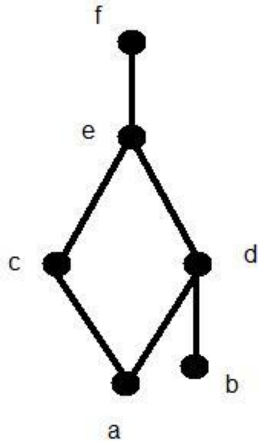
$x \prec y$ означает, что $x \preccurlyeq y$, причем $x \neq y$.

Примеры:

1. Не является диаграммой Хассе: нарушена антисимметричность отношения частичного порядка.

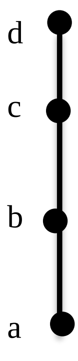


2. Диаграмма Хассе:



$\rho = \{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle e,e\rangle,\langle f,f\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,e\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,f\rangle,\langle a,e\rangle,$
$\langle a,f\rangle,\langle b,e\rangle,\langle b,f\rangle,\langle c,f\rangle,\langle d,f\rangle\}$

3. Диаграмма Хассе для линейного порядка.



$\rho = \{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\}$

Пусть а - элемент частично упорялоченного множества X.

Определение 1. Элемент а называется **минимальным,** если $\nexists b \in X : b \prec a$.

Определение 2. Элемент а называется **максимальным**, если $\nexists b \in X : a \prec b$.

Определение 3. Элемент а называется **наименьшим,** если $\forall b \in X : a \prec b$.

Определение 4 Элемент а называется **наибольшим**, если $\forall b \in X : b \prec a$.

Максимальных/минимальных элементов может быть несколько, а наибольший/

наименьший элемент либо не существует, либо единственный.

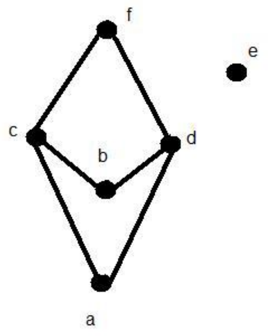
Если минимальный элемент единственный, то он является наименьшим. Аналогично для единственного максимального элемента.

Пример: $X = \{a, b, c, d, f, (e)\}$

Рассмотрим диаграмму без элемента e:

$min = \{a, b\}$, нет наименьшего элемента

$max = \{f\}$, он же и наибольший элемент



Рассмотрим диаграмму вместе с элементом e :

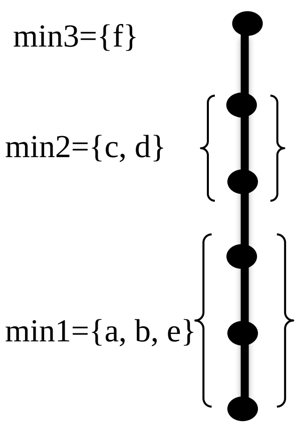
e - и максимальный, и минимальный элемент. Следовательно, в этом случае наибольшего и наименьшего элементов не существует.

<u>Достроение частичного порядка до линейного.</u>

1. Найдем множество минимальных элементов min1. Для посленднего примера min1={a, b, e}. Эти элементы расставляем в любом порядке, как самые нижние на диаграмме Хассе для отношения линейного порядка.
2. Удалим из диаграммы Хассе частичного прядка все элементы из min1 и их связи: $X\backslash min1$. В оставшейся диаграмме найдем множество минимальных элементов min2. Для рассматриваемого примера min2={c, d}
3. Эти элементы расставляем в любом порядке сразу выше элементов из min1 на диаграмме Хассе для отношения линейного порядка.
4. Удалим из диаграммы Хассе частичного прядка все элементы из min1, min2 и их связи: $(X\backslash min1)\backslash min2$. В оставшейся диаграмме найдем множество минимальных элементов min3. Для рассматриваемого примера min3={f}.

   Эти элементы расставляем в любом порядке сразу выше элементов из min2 на диаграмме Хассе для отношения линейного порядка.

Процесс заканчивается, когда все элементы будут нанесены на диаграмму для отношения линейного порядка.



Если алгоритм модифицировать таким образом, что на каждом шаге брать только по одному минимальному элементу, то можно перечислить все существующие линейные порядки на данном множестве.

Очевидно, что можно строить линейные порядки, начиная с максимальных элементов.

Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности.

Пусть ρ - отношение эквивалентности на множестве M.

Определение 1. Классом эквивалентности, порожденным элементом x, называется подмножество множества X, состоящее из тех элементов $y \in X$, для которых $x\rho y$. Класс эквивалентности, порожденный элементом x, обозначается

$$[x]_\rho = \{\, y \mid \langle x, y\rangle \in \rho \,\}.$$

Классы эквивалентности существуют в отношениях эквивалентности и квазипорядка.

Пример:

1) Отношение равенства на множестве целых чисел порождает следующие классы эквивалентности: для любого элемента $x \in Z : [x] = x$, т.е. каждый класс эквивалентности состоит только из одного элемента - числа x.

2) Для отношения принадлежности к одной студенческой группе на множестве студентов МАИ. Классом эквивалентности является множество студентов одной группы.

3) Отношение подобия на множестве треугольников. Одному классу эквивалентности принадлежат треугольники с равными углами.

4) В отношении квазипорядка – подчинение по званию на множестве военных, класс эквивалентности все военные с одинакомым званием, например, все полковники.

Определение 2. Разбиением множества X называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств X таких, что каждый элемент множества X принадлежит одному и только одному из этих подмножеств.

$\{X_1 \ldots X_k\}$ - подмножества X

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$$

$$X_i \cap X_j = \emptyset$$

$$i \neq j \ (\overline{i,j} = 1 \ldots k)$$

Пример разбиения:

$X = \{1,2,3,4,5\}$

$X_1 = \{1\}$

$X_2 = \{2,3\}$

$X_3 = \{4,5\}$

Совокупность подмножеств $X_1 = \{2,3,4,5\}$ и $X_2 = \{1,2,3\}$ не является разбиением.

Теорема 1.

Пусть ρ – отношение эквивалентности на множестве X. Тогда ρ порождает разбиение множества X на классы эквивалентности.

Докажем предварительно лемму.

Лемма. Пусть ρ – отношение эквивалентности на множестве X. Для любых элементов $x, y \in X$ из того, что $\langle x, y\rangle \in \rho$, следует $[x] = [y]$.

Доказательство. Докажем, что $[x] \subseteq [y]$ и $[y] \subseteq [x]$.

1. Докажем $[x] \subseteq [y]$. Пусть существует элемент z: $z \in [x]$, следовательно, $\langle x, z \rangle \in \rho$ и из симметричности ρ $\langle z, x \rangle \in \rho$. По условию $\langle x, y \rangle \in \rho$, из транзитивности отношения ρ получим $\langle z, y \rangle \in \rho$ и, следовательно, $\langle y, z \rangle \in \rho$. Откуда $z \in [y]$.
2. Доказательство того, что $[y] \subseteq [x]$ аналогично.

Доказательство теоремы.

1) Докажем, что любой элемент множества X принадлежит какому-либо подмножеству разбиения: для $\forall x \in X, \exists X_i : x \in X_i$

Т.к. ρ – рефлексивно $(\langle x, x \rangle \in \rho)$ для любого x из множества X, то элемент x принадлежит классу эквивалентности, порожденному самим x: $x \in [x]$

2) Докажем, что любые два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.

Предположим, что существует элемент z, принадлежащий двум классам эквивалентности одновременно:

$z \in [x] \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \rho$

$z \in [y] \Rightarrow \langle y, z \rangle \in \rho$

Из симметричности отношения ρ получим $\langle z, y \rangle \in \rho$.

Так как $\langle x, z \rangle \in \rho$ и $\langle z, y \rangle \in \rho$, то $\langle x, y \rangle \in \rho$ и по лемме $[x] = [y]$.

Следовательно, классы эквивалентности с общим элементом полностью совпали $[x] = [y]$ Ч.т.д.

__**Теорема 2.**__

Любое разбиение множества $X = \{X_1, \dots, X_k\}$ порождает отношение эквивалентности ρ на этом множестве, причем $\langle x, y \rangle \in \rho \Leftrightarrow x, y \in X_i$ (одному подмножеству разбиения).

Докажем, что порождаемое разбиением отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно.

1) Рефлексивно: $\forall x \in X \rightarrow \langle x, x \rangle \in \rho$ - очевидно
2) Симметрично: $\langle x, y \rangle \in \rho \Rightarrow \langle y, x \rangle \in \rho \Rightarrow x, y \in X_i$
3) Транзитивно: $\forall \ x, y, z \in X \quad \langle x, y \rangle \in \rho$ и $\langle y, z \rangle \in \rho \ \Rightarrow \ \langle x, z \rangle \in \rho$

Из $\langle x, y \rangle \in \rho \Rightarrow x, y \in X_i$

Из $\langle y, z \rangle \in \rho \Rightarrow y, z \in X_j$

При $i \neq j$ $X_i \cap X_j = \emptyset$.

По определению разбиения y не может принадлежать разным подмножествам разбиения. Следовательно, $X_i = X_j$. В этом случае $\langle x, z \rangle \in X_i, \langle x, z \rangle \in \rho$. Ч.т.д.

Функция

Функция – специальный вид бинарных отношений, удовлетворяющий условию: для $\forall\ x, y, z \in X$ из того, что $\langle x, y\rangle \in f$ и $\langle x, z\rangle \in f \Rightarrow y = z$.

Пример:

1. На множестве {1,2,3}
   $f_1 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle\}$ - не является функцией (2$\neq$ 3)
   $f_2 = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$ - функция
2. $f = \{\langle x, y\rangle \mid y = x + 2; x, y \in R\}$ - функция

Область определения D_f и область значений R_f определяются, как и для отношения.

Функцию, как и отношение можно представлять множеством упорядоченных пар, а можно и более привычно $y = f(x)$

y - Образ

x - прообраз

Пусть функция f: $X \to$Y. (Из X «в» Y). $D_f = X$; $R_f \subseteq Y$.

Определение 1. Функция f называется ***<u>сюръективной</u>***, если $\forall y \in Y\ \exists x \in X: y = f(x)$ (Для каждого $y\ \exists$ прообраз x).

Для сюръектиной функции область значений совпадает с Y: $R_f = Y$ (отображение «на» Y).

Определение 2. Функция f называется ***<u>инъективной</u>***, если из $y = f(x_1)$ и $y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Определение 3. Функция f называется ***<u>биективной</u>***, если она одновременно сюръективна и инъективна.

Пример: Пусть функция f: R →R

1) функция $f_1(x) = e^x$ - инъективна, но не сюръективна;
2) функция $f_2(x) = tgx$ - сюръективна, но не инъективна;
3) функция $f_3(x) = 2x + 1$ - биективна;
4) функция $f_4(x)$ =sinx – не сюръективна и не инъективна.

Композиция двух функций и обратная функция определяются также, как для отношений.

Композиция двух функций f и g есть отношение $g \circ f = \{\langle x, z\rangle \mid \exists y : xfy \text{ и } ygz\}$

Обратная функция (обратное отношение) f^{-1} это функция, осуществляющая отображение из Y в X: f^{-1}={<y, x>| <x, y>$\in f$}

Тождественным отображением множества X в себя называется отображение

$e_x : X \to X$ такое, что для $\forall x \in X$ $e_x(x) = x$.

Свойства инъективных функций.

1) $(f^{-1})^{-1} = f$
2) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Если $f: X \to Y$ – биекция, то

3) $f^{-1} \circ f = e_x$
4) $f \circ f^{-1} = e_y$

<u>Теорема 1:</u>

Пусть функция $f: X \to Y$, функция $g: Y \to Z$, тогда $g \circ f$ тоже функция, причем

$g \circ f : X \to Z.$

Доказательство:

Покажем, что $g \circ f$ функция, т.е. из $\langle x, z_1 \rangle \in g \circ f$ и $\langle x, z_2 \rangle \in g \circ f \Rightarrow z_1 = z_2$

Из определения композиции $\exists v : \langle x, v \rangle \in f, \langle v, z_1 \rangle \in g$

функций $\exists u : \langle x, u \rangle \in f, \langle u, z_2 \rangle \in g$

Т. к. f − функция, получим $u = v$.

Т. к. g − функция, то $z_1 = z_2$. Ч.т.д.

Следствие. Если f и g – биекции, то $f \circ g$ – тоже биекция.

<u>Теорема 2.</u>

Пусть функция $f: X \to Y$. Обратная функция $f^{-1}: Y \to X$ существует тогда и только тогда, когда f – биекция.

Доказательство:

Достаточность.

Пусть $\exists f^{-1} \Rightarrow$ f- биекция. Для этого докажем

1. f – сюръекция, т.к. Y – область определения, то для $\forall y\ \exists x$

$$x = f^{-1}(y)$$
$$y = f(x)$$

2. f – инъекция: пусть $\langle x_1, y \rangle$ и $\langle x_2, y \rangle$ пары из f, тогда

$\langle y, x_1 \rangle \in f^{-1}, \langle y, x_2 \rangle \in f^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2$, т.к. f^{-1}- функция. Следовательно, f инъективна.

Необходимость. Пусть f- биекция тогда $\exists$ функция $f^{-1}: Y \to X$

$\langle x_1, y \rangle \in f, \langle x_2, y \rangle \in f \Rightarrow x_1 = x_2$, т.к. f -инъективна.

$\langle y, x_1 \rangle \in f^{-1}, \langle y, x_2 \rangle \in f^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2$, следовательно, f^{-1}- функция.

Из сюръективности f следует, что функция $f^{-1}: Y \to X$.

ч.т.д.

Следствие. Если f- биекция, то f^{-1} тоже биекция.

<u>Мощность множеств</u>

Определение 1. Два множества A и B называются равномощными $A \sim B$ (аналогичная запись: $m(A) = m(B)$ или $|A| = |B|$), если $\exists$ биекция f: A → B.

Утверждение. Отношение равномощности – отношение эквивалентности.

Доказательство.

1. Рефлексивность: $A \sim A,$ так как существует биекция $e_A: A \to A$.
2. Симметричность: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$, так как $\exists$ биекция $f: A \to B \Rightarrow \exists$ биекция $f^{-1}: B \to A$ (теорема 2).
3. Транзитивность: $\exists$ биекция f: A → B, $\exists$ биекция $\varphi: B \to C \Rightarrow \varphi \circ f: A \to C$ – биекция(теорема 1).

<u>Теорема о конечных множествах</u>:

Утверждение. Пусть множества A и B конечны. $A \sim B$, тогда и только тогда, когда A и B содержат одинаковое число элементов.

Доказательство:

Достаточность.

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_m\}, B = \{b_1, \dots, b_n\}$.

И пусть $m \neq n$

1. $m > n$ – не инъективно.
2. $m < n$ – не суръективно.

Противоречие, т.к. f: A → B – биекция.

Необходимость очевидна. Ч.т.д.

Счетные множества

Определение 2. Счетным называется множество, равномощное множеству натуральных чисел $A \sim \mathbb{N}$.

Все элементы счетного множества можно занумеровать в бесконечную числовую последовательность.

Пример:

1) Z: 0,-1,1,-2,2,…
   N: 1,2,3,4,5,… 2z+1 положительным и 2|z| – отрицательным ставим в соответствие.
2) $2^n \leftrightarrow n$
3) Q – рациональные числа
   $\frac{p}{q}$ - несократимая дробь.

Один из способов пересчета рациональных чисел – «змейка»:

$$
\begin{array}{lllll}
0 & & & & \\
\frac{1}{1} \rightarrow & \frac{1}{-1} & \frac{1}{2} \rightarrow & \frac{1}{-2} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{-1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{-2} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{-1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{-2} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & & &
\end{array}
$$

Свойства счетных множеств:

1) Любое подмножество счетного множества счетно или конечно (очевидно).
2) Пересечение счетных множеств счетно или конечно. Так как
$$A \cap B \subseteq A$$
3) Объединение конечного или счетного числа счетных множеств – $A_1 \cup A_2 \cup ...$ счетно.

   Доказательство («змейка»)

$$A_1 = \{a_{11}, \; a_{22}, \; a_{13} \; ...\}$$
$$A_2 = \{a_{21}, \; a_{22}, \; a_{23} \; ...\}$$
$$A_3 = \{A_{31}, \; A_{32}, A_{33} \; ...\}$$
……………………………

4) Прямое произведение конечного числа счетных множеств счетно.

   Доказательство («змейка»). Для двух множеств X×Y

	y_1	y_2	y_3	…
x_1	$<x_1, y_1>$	$<x_1, y_2>$	$<x_1, y_3>$	…
x_2	$<x_2, y_1>$	$<x_2, y_2>$	$<x_2, y_3>$	…
x_3	$<x_3, y_1>$	$<x_3, y_2>$	$<x_3, y_3>$	….
…	…	…	…	…

И т.д. для трех множеств. И для любого конечного числа множеств. Если множеств счетное число, то получим мощность континуум.

5) Из любого бесконечного множества можно выделить конечное или счетное подмножество.
   Выбираем первый элемент – нумеруем, второй – нумеруем и т.д.

Множества мощности континуум

Теорема Кантора. Множество точек отрезка [0;1] несчетно.

Доказательство:

Предположим, что множество точек отрезка [0,1] ∼ N

$N \quad \alpha_i \in [0,1]$

$1 \leftrightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \ldots$

$2 \leftrightarrow \alpha_2 = 0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \ldots$

$3 \leftrightarrow \alpha_3 = 0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \ldots$

…

…

Составим число $\beta = 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, .. \quad \beta \in [0,1]$

$\beta_1 \neq \alpha_{11}$

$\beta_2 \neq \alpha_{22}$

$\beta_3 \neq \alpha_{33}$

………………..

Таким образом $\beta \neq \alpha_i$, следовательно, у β нет прообраза, т.е. нарушается сюръекция, а значит и биекция. Следовательно, множество точек отрезка $[0,1]$ – несчетное множество.

Заметим, что выбираем

$\beta_i \neq 0$; $\beta_i \neq 9$ из-за неоднозначности:

$\frac{1}{2} = 0{,}50000\ldots$

$\frac{1}{2} = 0{,}49999\ldots$

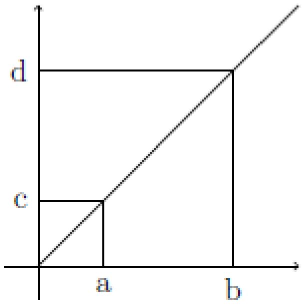
Определение 3. Множества, равномощные множеству точек отрезка [0,1], называются множествами мощности континуум или континуальной мощности.

Примеры и доказательства равномощности множеств мощности континуум:

1. Любой отрезок и любой интервал являются множествами мощности континуум.
   При этом

$$[a; b] \sim [c; d]$$
$$(a; b) \sim (c; d)$$

Доказательство: (нижняя и верхняя часть прямой не нужны, через 0 не проходит в общем случае)

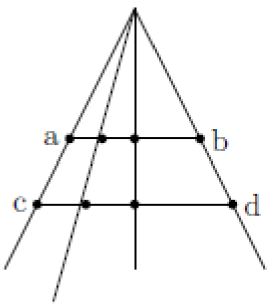


$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-c}{d-c}$$

$y = kx + f$ - биекция

$$tg\ \alpha = \frac{d-c}{b-a}$$

2)



Покажем, что $[a;b] \sim (a;b) \sim [a;b) \sim (a;b]$

Утверждение. Пусть А – любое бесконечное множество.

В - счетное или конечное множество.

Тогда $(A \cup B) \sim A$.

Доказательство.

Пусть $\tilde{A}$- конечное или счетное подмножество множества А. Тогда

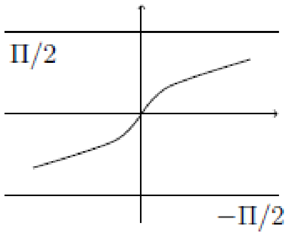
$$A \cup B = ((A \setminus \tilde{A}) \cup \tilde{A}) \cup B = (A \setminus \tilde{A}) \cup (\tilde{A} \cup B) \sim (A \setminus \tilde{A}) \cup \tilde{A} = A$$

Последнее равенство справедливо только в случае, когда $\tilde{A}$ подмножество А.

Ч.т.д.

Пусть А=$(a;b)$, В= {a; b}. В этом случае из утверждения следует $[a;b] \sim (a;b)$.

3)$\Re$-множество действительных чисел имеет мощность континуум.



$$\Re \sim [a;b] \sim \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = arctg\ x$$

Или для интервала (0; 1) $y = \frac{1}{\pi} arctg\, x + \frac{1}{2}$

4) I - множество иррациональных чисел имеет мощность континуум.

$$I \sim \Re$$
$$\Re = Q \cup I$$

Q - рациональное счетное множество.

I - иррациональное несчетное множество.

Действительно, если бы I было счетным, то $\Re$ было бы тоже счетным, т.к. объединение счетных множест счетно.

Таким образом получаем последовательность:

$$m(\mathbb{K}) < m(\mathbb{N}) < m(\Re) < \ldots$$

m-мощность

Бесконечно ли эта последовательность (увеличения мощности)?

<u>Теорема Кантора-Бернштейна.</u>

Пусть A и B — произвольные множества, и существуют подмножества A_1 и B_1, такие что $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$. Тогда из $A_1 \sim B$ и $B_1 \sim A \Rightarrow A \sim B$. (Без док-ва).

Из теоремы следует, что возможны четыре случая:

1) Если $\exists A_1 \sim B$, $\exists B_1 \sim A$, тогда по теореме $m(A) = m(B)$
2) Если $\exists A_1 \sim B$, не $\exists B_1 \sim A$, тогда $m(A) > m(B)$
3) Если $\exists B_1 \sim A_1$ не $\exists A_1 \sim B \Rightarrow m(B) > m(A)$
4) Не $\exists A_1 \sim B$, не $\exists B_1 \sim A$, тогда множества А и В — несравнимы?

Оказывается, что четвертый случай невозможен – все множества сравнимы по можности. (Доказал Цермело).

<u>Теорема</u>

Мощность $P(A)$ - множества всех подмножеств множества A больше мощности самого множества A:

$m(P(A)) > m(A)$. $A \neq \emptyset, A \neq \{a\}$

Доказательство.

Очевидно, что $m\big(P(A)\big) \geq m(A)$.

Докажем, что $m\big(P(A)\big) \neq m(A)$.

Пусть $\tilde{A}, X \in P(A), \tilde{a}, x \in A.$

Предположим, что можно установить биекцию между элементами множества P(A) и элементами множества А: $\tilde{A} \leftrightarrow \tilde{a}$

Сконструируем множество **X** следующим образом:

Если $\tilde{a} \leftrightarrow \tilde{A}$ и $\tilde{a} \notin \tilde{A} \Rightarrow \tilde{a} \in X.$

Если $\tilde{a} \leftrightarrow \tilde{A}$ и $\tilde{a} \in \tilde{A} \Rightarrow \tilde{a} \notin X.$

Покажем, что у **X** нет прообраза в А. По построению **X** получим.

Если $x \leftrightarrow \boldsymbol{X}$ и $x \notin X \Rightarrow x \in X.$

Если $x \leftrightarrow \boldsymbol{X}$ и $x \in X \Rightarrow x \notin X.$

И в том, и в другом случае получаем противоречие: $x \in X$ и $x \notin X$ одновременно. Противоречие. Следовательно, у множества **X** нет прообраза в А. Нарушается сюръективность. Таким обрапзом нельзя установить биекцию между элементами множеств P(A) и A. Ч.т.д.

Из теоремы в частности следует: $P(N) \sim R,\ m\big(P(R)\big) > m(R)$