Ю.А. Чаповский

Лекции по функциональному анализу

Группы: КА – 53, 54

III курс, семестр 5

Киев—2017

Оглавление

Глава 1

Мера и интеграл

1.1 Семейства подмножеств

В этом разделе Ω — фиксированное множество (подмножество $\mathbb{R}^n$), $\mathcal{P}(\Omega)$ — семейство всех подмножеств Ω. Все множества $A, B, \ldots$ являются подмножествами множества Ω, т.е. $A, B, \ldots \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Определение 1.1.1. Пусть $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ — некоторое непустое семейство подмножеств множества Ω.

(a) Семейство $\mathcal{R}$ называется *кольцом* на Ω, если

$$A, B \in \mathcal{R} \qquad \Longrightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{R} \quad \text{и} \quad A \setminus B \in \mathcal{R}.$$

(b) Семейство $\mathcal{R}$ называется *σ-кольцом* на Ω, если $\mathcal{R}$ является кольцом и

$$A_n \in \mathcal{R}, \; n \in \mathbb{N}, \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}.$$

(c) Семейство $\mathcal{R}$ называется *алгеброй* на Ω, если оно является кольцом и $\Omega \in \mathcal{R}$.

(d) Семейство $\mathcal{R}$ называется *σ-алгеброй* на Ω, если оно является σ-кольцом и $\Omega \in \mathcal{R}$.

Пример 1.1.2. 1. Наименьшей σ-алгеброй над Ω является $\mathcal{R} = \{\emptyset, \Omega\}$, а наибольшей — $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\Omega)$.

2. Пусть Ω — произвольное бесконечное множество, и

$$\mathcal{R} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) : A \text{— конечно}\}.$$

Тогда $\mathcal{R}$ является кольцом, но не является ни σ-кольцом, ни алгеброй.

Действительно, если $A, B \in \mathcal{R}$, то $|A| < \infty$ и $|B| < \infty$. А, поскольку

$$|A \cup B| \leq |A| + |B|,$$

то $|A \cup B| < \infty$ и $A \cup B \in \mathcal{R}$.

Поскольку
$$|A \setminus B| \le |A| < \infty,$$
то $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Поскольку $|\Omega| = \infty$ по условию, то $\Omega \notin \mathcal{R}$, и $\mathcal{R}$ не является алгеброй.

С другой стороны, каждое одноточечное множество $\{\omega\} \in \mathcal{R}$, но для бесконечного набора различных точек $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеем
$$\left|\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega_n\}\right| = \infty,$$
и $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega_n\} \notin \mathcal{R}$, т.е. $\mathcal{R}$ не является σ-кольцом.

3. Пусть Ω — произвольное бесконечное множество, и
$$\mathcal{R} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) : A \text{— конечно или счетно}\}.$$
Тогда $\mathcal{R}$ является σ-кольцом, и $\mathcal{R}$ является σ-алгеброй тогда и только тогда, когда Ω счетно.

4. Пусть $\Omega = \mathbb{R}$, и
$$\mathcal{J} = \left\{\cup_{k=1}^{m}[a_k, b_k)\right\}$$
является кольцом, где $m \in \mathbb{N}$ и $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ произвольны.

Действительно, для $I = [a, b)$ и $\tilde{I} = [\tilde{a}, \tilde{b})$ множество $I \setminus \tilde{I} \in \mathcal{J}$ (см. рис. 1.1). Поэтому для $I_k = [a_k, b_k)$ имеем
$$\left(\bigcup_{k=1}^{m} I_k\right) \setminus \tilde{I} = \bigcup_{k=1}^{m}\left(I_k \setminus \tilde{I}\right) \in \mathcal{J},$$
И, наконец, для $\tilde{I}_l = [\tilde{a}_l, \tilde{b}_l)$
$$I \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{n} \tilde{I}_l\right) = \left(\left(I \setminus \tilde{I}_1\right) \setminus \tilde{I}_2\right) \ldots \setminus \tilde{I}_n \in \mathcal{J}.$$

Поэтому для $A = \cup_{k=1}^n I_k$ и $B = \cup_{l=1}^n \tilde{I}_l$ имеем, что $A \setminus B \in \mathcal{J}$. Очевидно, что $A \cup B \in \mathcal{J}$ для таких A и B.

5. Пусть $\Omega = [0,1)$. Тогда $\mathcal{J}$ в предыдущем примере является алгеброй.

6. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n$. Для $a, b \in \mathbb{R}$ положим $I_{a;b} = [a,b)$, а для $a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots b_n \in \mathbb{R}$ положим $\Pi_{a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_n} = I_{a_1;b_1} \times \ldots \times I_{a_n;b_n}$. Тогда
$$\mathcal{J}_n = \left\{\cup_{\text{fin}} \Pi_{a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_n} : a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}\right\}$$
является кольцом.

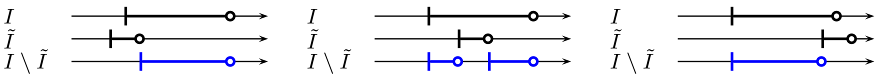

Рис. 1.1: Множество $I \setminus \tilde{I}$ для различных $\tilde{I}$.

Утверждение 1.1.3. (a) *Пусть $\mathcal{R}$ является кольцом. Тогда $\emptyset \in \mathcal{R}$, и для всех $A, B \in \mathcal{R}$:*
$$A \cup B \in \mathcal{R}, \quad A \cap B \in \mathcal{R}, \quad A \setminus B \in \mathcal{R}, \quad A \triangle B \in \mathcal{R}.$$

(b) *Кольцо $\mathcal{R}$ является алгеброй тогда и только тогда, когда*
$$A \in \mathcal{R} \quad \Longrightarrow \quad A^c \in \mathcal{R}.$$

(c) *Пусть $\mathcal{R}$ является σ-кольцом. Тогда для всех $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$:*
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}.$$

(d) *Пусть $\mathcal{R}$ является σ-алгеброй. Тогда, если $A \in \mathcal{R}$ и $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, то*
$$A^c \in \mathcal{R}, \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}.$$

Доказательство. **(a)** Пусть $\mathcal{R}$ является кольцом. Для любых $A, B \in \mathcal{R}$ по определению имеем, что $A \cap B \in \mathcal{R}$ и $A \setminus B \in \mathcal{R}$. Поскольку

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

то $A \triangle B \in \mathcal{R}$, поскольку $A \setminus B \in \mathcal{R}$ и $B \setminus A \in \mathcal{R}$. Наконец, поскольку

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B),$$

то и $A \cap B \in \mathcal{R}$.

(b) Если $\mathcal{R}$ является алгеброй, то $\Omega \in \mathcal{R}$. Поэтому $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{R}$ для произвольного $A \in \mathcal{R}$.

Наоборот, если $A^c \in \mathcal{R}$ для $A \in \mathcal{R}$, то

$$\Omega = A \cup A^c \in \mathcal{R}.$$

(c) Тот факт, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, если $A_n \in \mathcal{R}$ для всех n, следует непосредственно из определения.

Для доказательства второго свойства рассмотрим множества

$$A'_n = A_1 \setminus A_n \in \mathcal{R}, \qquad n > 1.$$

Тогда, поскольку (см. рис. 1.2)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_1 \cap A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A'_n) = A_1 \setminus \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} A'_n \right),$$

получаем, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$.

(d) Первое включение имеет место, поскольку $\mathcal{R}$ является алгеброй, второе и третье — поскольку $\mathcal{R}$ является σ-кольцом.

$\square$

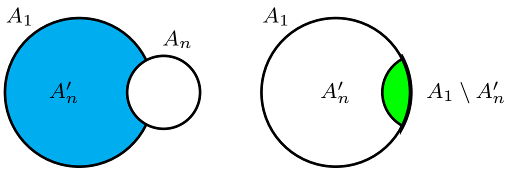

Рис. 1.2: Доказательство утверждения 1.1.3 (c)

Утверждение 1.1.4. *Пусть* Γ *— произвольное множество индексов, и* $\{\mathcal{A}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *— семейство* σ*-алгебр (соответственно, колец,* σ*-колец, алгебр) на множестве* Ω*. Тогда*

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma$$

является σ*-алгеброй (соответственно, кольцом,* σ*-кольцом, алгеброй) на множестве* Ω*.*

Доказательство. Доказательство будем проводить для случая, когда все $\mathcal{A}_\gamma$ являются σ-алгебрами.

Пусть $A, B \in \mathcal{A}$. Это означает, что $A \in \mathcal{A}_\gamma$ и $B \in \mathcal{A}_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Поскольку каждое семейство $\mathcal{A}_\gamma$ является σ-алгеброй, то $A \setminus B \in A_\gamma$ для каждого $\gamma \in \Gamma$. Поэтому

$$A \setminus B \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma = \mathcal{A}.$$

Точно также, если $A_k \in \mathcal{A}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то $A_k \in \mathcal{A}_\gamma$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и каждого $\gamma \in \Gamma$. Поскольку $\mathcal{A}_\gamma$ является σ-алгеброй для каждого $\gamma \in \Gamma$, то $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}_\gamma$. Следовательно,

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma = \mathcal{A}.$$

□

Утверждение 1.1.5. *Пусть $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ — произвольное семейство подмножеств множества Ω. Существует наименьшая σ-алгебра $\Sigma_{\mathcal{C}}$ (соответственно, кольцо, σ-кольцо, алгебра) такая, что $\mathcal{C} \subset \Sigma_{\mathcal{C}}$. Эта σ-алгебра (соответственно, кольцо, σ-кольцо, алгебра) единственна.*

Доказательство. Рассмотрим случай σ-алгебры.

Пусть $\{\mathcal{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — семейство всех σ-алгебр, для которых $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_\gamma$. Это семейство не пусто, поскольку содержит $\mathcal{P}(\Omega)$. Полагая

$$\Sigma_{\mathcal{C}} = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma,$$

получаем, что $\Sigma_{\mathcal{C}}$ является σ-алгеброй по утверждению 1.1.4, и $\mathcal{C} \subset \Sigma_{\mathcal{C}}$, так как $\mathcal{C} \subset A_\gamma$ для каждого $\gamma \in \Gamma$ по определению.

Поскольку $\Sigma_{\mathcal{C}}$ является пересечением всех σ-алгебр, содержащих $\mathcal{C}$, то она является наименьшей σ-алгеброй, содержащей $\mathcal{C}$. □

Определение 1.1.6. Пусть $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ — произвольное семейство подмножеств Ω. Наименьшая σ-алгебра $\Sigma_{\mathcal{C}}$ (соответственно, кольцо, σ-кольцо, алгебра) такая, что $\mathcal{C} \subset \Sigma_{\mathcal{C}}$ называется σ-алгеброй (соответственно, кольцом, σ-кольцом, алгеброй), *порожденной* семейством $\mathcal{C}$.

Пример 1.1.7. 1. Пусть $\mathcal{C} = \big\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\big\}$ — семейство одноточечных множеств. Тогда кольцом $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$, порожденным $\mathcal{C}$, является семейство всех конечных подмножеств множества Ω.

Порожденным σ-кольцом является семейство всех конечных или счетных подмножеств множества Ω.

Порожденной алгеброй $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$ является семейство всех подмножеств $A \subset \Omega$ таких, что $|A| < \infty$ либо $|A^c| < \infty$.

Порожденная σ-алгебра $\Sigma_{\mathcal{C}}$ состоит из таких $A \subset \Omega$, что A — конечно или счетно, либо A^c — конечно или счетно.

Замечание 1.1.8. В связи с неконструктивным доказательством утверждения 1.1.5, описать все подмножества Ω, которые входят в $\Sigma_{\mathcal{C}}$ часто бывает затруднительно или невозможно.

Определение 1.1.9. *Борелевской* σ-алгеброй на $\mathbb{R}^n$ называется σ-алгебра $\mathcal{B}_n$, порожденная всеми открытыми подмножествами $\mathbb{R}^n$. Множества $B \in \mathcal{B}_n$ называются *борелевскими множествами* в $\mathbb{R}$.

Если $n = 1$, то для $\mathcal{B}_1$ используется обозначение $\mathcal{B}$.

Пример 1.1.10. Множества $\emptyset$, $\{a\}$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ являются борелевскими в $\mathbb{R}$.

Действительно, $\emptyset \in \mathcal{B}$, поскольку $\mathcal{B}$ является кольцом. Включение $\mathbb{R} = \Omega \in \mathcal{B}$ имеет место, так как $\mathcal{B}$ является алгеброй.

Для одноточечного множества $\{a\}$ имеем, что

$$\{a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}\Big) \in \mathcal{B},$$

согласно утверждению 1.1.3.

Интервал $(a, b) \in \mathcal{B}$, поскольку это открытое множество.

Поскольку $\{a\}, (a, b) \in \mathcal{B}$, и $\mathcal{B}$, в частности, является кольцом, то

$$[a, b) = \{a\} \cup (a, b) \in \mathcal{B}.$$

Аналогично имеем, что $(a, b], [a, b] \in \mathcal{B}$.

Поскольку множество $\mathbb{Q}$ является счетным, то

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{q_k\}.$$

Для каждого одноточечного множества имеем $\{q_k\} \in \mathcal{B}$, и, кроме того, $\mathcal{B}$ является σ-алгеброй, а значит, содержит счетные объединения своих подмножеств. Таким образом,

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{q_k\} \in \mathcal{B}.$$

Утверждение 1.1.11. *Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — некоторые семейства подмножеств Ω. Обозначим σ-алгебру (соответственно, кольцо, σ-кольцо, алгебру), порожденную семейством $\mathcal{C}$ (соответственно, $\mathcal{C}'$) через $\Sigma_{\mathcal{C}}$ (соответственно, $\Sigma_{\mathcal{C}'}$).*

(a) *Если* $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$, *то* $\Sigma_{\mathcal{C}} \subset \Sigma_{\mathcal{C}'}$.

(b) *Если* $\mathcal{C} \subset \Sigma_{\mathcal{C}'}$, *то* $\Sigma_{\mathcal{C}} \subset \Sigma_{\mathcal{C}'}$.

(c) *Если* $\mathcal{C} \subset \Sigma_{\mathcal{C}'}$ *и* $\mathcal{C}' \subset \Sigma_{\mathcal{C}}$, *то* $\Sigma_{\mathcal{C}} = \Sigma_{\mathcal{C}'}$.

Доказательство. Рассмотрим случай σ-алгебр.

(a) Поскольку $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ по условию, и $\mathcal{C}' \subset \Sigma_{\mathcal{C}'}$ по определению $\Sigma_{\mathcal{C}'}$, имеем, что $\mathcal{C} \subset \Sigma_{\mathcal{C}'}$. Но $\Sigma_{\mathcal{C}'}$ является σ-алгеброй, содержащей семейство $\mathcal{C}$, а $\Sigma_{\mathcal{C}}$ является наименьшей такой σ-алгеброй. Поэтому, $\Sigma_{\mathcal{C}} \subset \Sigma_{\mathcal{C}'}$.

(b) По условию, $\mathcal{C} \subset \Sigma_{\mathcal{C}'}$. Так как $\Sigma_{\mathcal{C}'}$ является σ-алгеброй, содержащей $\mathcal{C}$, а $\Sigma_{\mathcal{C}}$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{C}$, то $\Sigma_{\mathcal{C}} \subset \Sigma_{\mathcal{C}'}$.

(c) Поскольку $\mathcal{C} \subset \Sigma_{\mathcal{C}'}$, то $\Sigma_{\mathcal{C}} \subset \Sigma_{\mathcal{C}'}$. И, так как $\mathcal{C}' \subset \Sigma_{\mathcal{C}}$, то $\Sigma_{\mathcal{C}'} \subset \Sigma_{\mathcal{C}}$. Таким образом, $\Sigma_{\mathcal{C}} = \Sigma_{\mathcal{C}'}$.

□

Лемма 1.1.12. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}$ *— открытое множество. Тогда существует счетное семейство интервалов* (a_k, b_k), $k \in \mathbb{N}$, *таких, что*

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k).$$

Доказательство. Случай $U = \emptyset$ тривиален, поскольку достаточно взять $a_k = b_k$, $k \in \mathbb{N}$, произвольными.

Пусть $U \neq \emptyset$, и рассмотрим счетное множество $\mathbb{Q}_U = \mathbb{Q} \cap U$. Это множество не пусто, так как если $x \in U$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U,$$

поскольку U является открытым множеством. Запишем x в виде бесконечной десятичной дроби:

$$x = x_0, x_1 x_2 x_3 \dots ,$$

где $x_0 \in \mathbb{Z}$, а $x_1, x_2, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Для достаточно хорошей десятичной аппроксимации ($\frac{1}{10^n} < \varepsilon$) имеем, что

$$\tilde{x} = x_0, x_1 \dots x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \subset U \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}_U.$$

Таким образом, $\mathbb{Q}_U \neq \emptyset$.

Пусть $\mathbb{Q}_U = \{q_1, q_2, \dots\}$. Для каждого $q_k \in U$ положим

$$a_k = \inf\{a : (a, q_k] \subset U\}, \qquad b_k = \sup\{b : [q_k, b) \subset U\}.$$

Тогда будем иметь, что $(a_k, b_k) = (a_k, q_k] \cup [q_k, b_k) \subset U$.

Докажем, что

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) = U.$$

По построению $(a_k, b_k) \subset U$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \subset U.$$

Предположим, что

$$\tilde{U} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \neq U,$$

и придем к противоречию.

Пусть $y \in U \setminus \tilde{U}$. Так как U — открытое множество, то существует такое $\delta > 0$, что $(y - \delta, y + \delta) \subset U$. Возьмем рациональное приближение

$$\tilde{y} = y_0, y_1 y_2 \dots y_m$$

точки y такое, чтобы $\tilde{y} \in (y - \delta, y + \delta) \subset U$. Тогда $\tilde{y} \in \mathbb{Q}_U$, т.е. $\tilde{y} = q_{k_0}$ для некоторого $k_0 \in \mathbb{N}$. Но тогда по построению имеем, что

$$a_{k_0} \leq y - \delta, \qquad b_{k_0} \geq y + \delta.$$

Таким образом, $y \in (a_{k_0}, b_{k_0})$, а значит, $y \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) = \tilde{U}$, что противоречит выбору y. $\square$

Утверждение 1.1.13. *Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}$ на $\mathbb{R}$ порождена:*

a) *семейством открытых интервалов (a,b);*

b) *кольцом $\mathcal{J}$ конечных объединений полуоткрытых интервалов $[a,b)$;*

c) *семейством открытых полупрямых $(-\infty,b)$;*

d) *семейством замкнутых полупрямых $(-\infty,b]$;*

Доказательство. **(a)** Пусть $\Sigma_{\mathcal{J}_o}$ — σ-алгебра, порожденная открытыми интервалами (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$. Поскольку все множества (a,b) являются открытыми, то $(a,b) \in \mathcal{B}$, и, следовательно, $\Sigma_{\mathcal{J}_o} \subset \mathcal{B}$, согласно утверждению 1.1.11.

Пусть U — произвольное открытое множество. Согласно лемме 1.1.12, имеем, что

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k),$$

то есть $U \in \Sigma_{\mathcal{J}_o}$, поскольку $(a_k,b_k) \in \Sigma_{\mathcal{J}_o}$ по определению, и $\Sigma_{\mathcal{J}_o}$ замкнуто относительно счетных объединений, будучи σ-алгеброй. Поэтому $\mathcal{B} \subset \Sigma_{\mathcal{J}_o}$ по утверждению 1.1.11.

Таким образом, $\mathcal{B} = \Sigma_{\mathcal{J}_o}$.

(b) Пусть $\Sigma_{\mathcal{J}}$ — σ-алгебра, порожденная кольцом $\mathcal{J}$. Поскольку

$$\{a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\Big[a, a+\frac{1}{k}\Big),$$

то $\{a\} \in \Sigma_{\mathcal{J}}$. Отсюда следует, что

$$(a,b) = [a,b) \setminus \{a\} \in \Sigma_{\mathcal{J}}.$$

Поэтому $\Sigma_{\mathcal{J}} \supset \Sigma_{\mathcal{J}_o} = \mathcal{B}$.

С другой стороны, $[a,b) \in \mathcal{B}$. Поэтому $\Sigma_{\mathcal{J}} \subset \mathcal{B}$. Следовательно, $\Sigma_{\mathcal{J}} = \mathcal{B}$.

(c) Обозначим через $\mathcal{J}_\infty$ множество бесконечных открытых интервалов $(-\infty, b)$. Поскольку $(-\infty, b)$ является открытым множеством, то $(-\infty, b) \in \mathcal{B}$, и $\Sigma_{\mathcal{J}_\infty} \subset \mathcal{B}$.

Поскольку $\Sigma_{\mathcal{J}_\infty}$ является алгеброй, и $(-\infty, b) \in \Sigma_{\mathcal{J}_\infty}$, имеем

$$(-\infty, b)^c = [b, +\infty) \in \Sigma_{\mathcal{J}_\infty}.$$

Поэтому

$$[a, b) = (-\infty, b) \cap [a, +\infty) \in \Sigma_{\mathcal{J}_\infty}.$$

Таким образом, $\Sigma_{\mathcal{J}} = \mathcal{B} \subset \Sigma_{\mathcal{J}_\infty}$. Следовательно, $\mathcal{B} = \Sigma_{\mathcal{J}_\infty}$.

(d) Обозначим через $\mathcal{J}_{\infty,c}$ множество бесконечных интервалов $(-\infty, b]$. Поскольку

$$(-\infty, b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(-\infty, b - \frac{1}{k}\Big], \qquad (-\infty, b] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big(-\infty, b + \frac{1}{k}\Big),$$

то $\Sigma_{\mathcal{J}_\infty} \subset \Sigma_{\mathcal{J}_{\infty,c}}$ и $\Sigma_{\mathcal{J}_{\infty,c}} \subset \Sigma_{\mathcal{J}_\infty}$, т.е. $\Sigma_{\mathcal{J}_{\infty,c}} = \Sigma_{\mathcal{J}_\infty} = \mathcal{B}$.

□

Задачи

[10] *КР*: 281.1 (1, 2,3 , 6), 279, 290.1, 289, 289.2, 290.3, 290.4, 290.5

ДР: 281.1 —, 282, 286, 287.1, 290.2, 289.1, 290.6, 290.7

1.2 Мера множества

1.2.1 Определение, свойства

В множестве $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ для $c \in \mathbb{R}_+$ определим

$$c + (+\infty) = (+\infty) + c = +\infty,$$
$$c \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & c > 0, \\ 0, & c = 0 \end{cases}$$

Определение 1.2.1. Пусть Ω — множество, и $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ — кольцо подмножеств Ω. Функция $\mu \colon \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *мерой* на $\mathcal{R}$, если

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) для всех $A_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$, таких, что $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$:

$$\mu\Big(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \tag{1.1}$$

Замечание 1.2.2. Полагая $A_{m+1} = A_{m+2} = \ldots = \emptyset$ в (1.1), получаем, что

$$\mu\Big(\bigsqcup_{k=1}^{m} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{m} \mu(A_k), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Пример 1.2.3 (считающая мера). На $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\Omega)$ определим

$$\mu(A) = |A|,$$

где $|A|$ — количество точек в множестве A. Тогда μ является мерой на $\mathcal{P}(\Omega)$.

Действительно, $|\emptyset| = 0$, и, если непустых множеств среди $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ конечное количество, $A_{k_1}, \ldots, A_{k_m}$, и все они конечны, то

$$\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup_{l=1}^{m} A_{k_l},$$

и

$$\mu\Big(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \Big|\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big| = \Big|\bigsqcup_{l=1}^{m} A_{k_l}\Big| = \sum_{l=1}^{m} |A_{k_l}| = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Если непустых множеств бесконечное количество, или среди непустых множеств имеется бесконечное множество, то $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ также будет бесконечным, и $|\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k| = \infty$. Также имеем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| = \infty.$$

Определение 1.2.4. Пусть $A \subset \Omega$. Функция $1_A \colon \Omega \to \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$, определенная как

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

называется *индикатором* множества A (см. рис. 1.3).

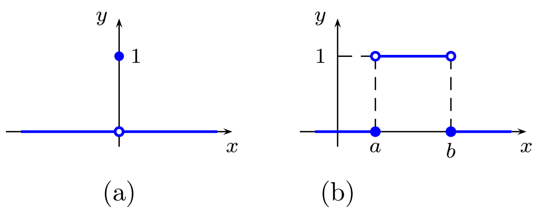

Рис. 1.3: Графики функций: (a) $y = 1_{\{0\}}(x)$, (b) $y = 1_{(a,b)}(x)$.

Пример 1.2.5 (мера Дирака). Пусть $\omega_0 \in \Omega$. На $\mathcal{P}(\Omega)$ определим $\varepsilon_{\omega_0} \colon \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ как

$$\epsilon_{\omega_0}(A) = 1_A(\omega_0) = \begin{cases} 1, & \omega_0 \in A, \\ 0, & \omega_0 \notin A. \end{cases}$$

Тогда ε_{ω_0} является мерой на $\mathcal{P}(\Omega)$.

Действительно, поскольку $\omega_0 \notin \emptyset$, то $\varepsilon_{\omega_0}(\emptyset) = 0$.

Пусть

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Если $\omega_0 \in A$, то $\varepsilon_{\omega_0}(A) = 1$. Также, существует и единственен индекс k_0 такой, что $\omega_0 \in A_{k_0}$ и $\omega_0 \notin A_k$ при $k \neq k_0$. Поэтому,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{\omega_0}(A_k) = 0 + \ldots + 0 + \varepsilon_{\omega_0}(A_{k_0}) + 0 + \ldots = 1.$$

Таким образом,

$$\varepsilon_{\omega_0}\Big(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{\omega_0}(A_k).$$

Если $\omega_0 \notin A$, то $\omega_0 \notin A_k$ для всех k. Поэтому,

$$\varepsilon_{\omega_0}\Big(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{\omega_0}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0,$$

т.е. опять имеем требуемое равенство.

Лемма 1.2.6. *Для произвольных $A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, таких, что $A_k \cap A_l = \emptyset$ при $k \neq l$, имеем*

$$1_{\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{A_k}(\omega), \qquad \omega \in \Omega. \tag{1.2}$$

Доказательство. Действительно, пусть $\omega \in \Omega$. Если $\omega \in \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\omega \in A_{k_0}$ для единственного индекса k_0, и обе части (1.2) равны 1. Если $\omega \notin \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\omega \notin A_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и обе части в (1.2) равны 0. □

Пример 1.2.7 (дискретная мера). Пусть $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность неотрицательных действительных чисел, и

$(\omega_k)_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность точек в Ω. Для произвольного $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ положим

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_A(\omega_k) = \sum_{\omega_k \in A} c_k.$$

Тогда μ является мерой на $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Доказательство. Поскольку $\omega_k \notin \emptyset$, то $1_{\emptyset}(\omega_k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\mu(\emptyset) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{\emptyset}(\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot 0 = 0.$$

Для $A = \bigsqcup_{l=1}^{\infty} A_l$, используя (1.2), имеем

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_A(\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{\bigsqcup_{l=1}^{\infty} A_l}(\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Big(\sum_{l=1}^{\infty} 1_{A_l}(\omega_k)\Big) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{l=1}^{\infty} c_k 1_{A_l}(\omega_k)\Big) = \sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_{A_l}(\omega_k)\Big) = \sum_{l=1}^{\infty} \mu(A_l).$$

Изменение порядка суммирования легитимна, поскольку ряды имеют неотрицательные члены. $\square$

Теорема 1.2.8 (мера длины на $\mathbb{R}$). *Пусть $\Omega = \mathbb{R}$, и кольцо $\mathcal{R}$ порождена полуинтервалами*

$$I_{a,b} = [a, b), \qquad -\infty < a \leq b < +\infty.$$

Для

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{m} I_{a_k, b_k},$$

где $I_{a_k,b_k} = [a_k, b_k)$, $a_k \leq b_k$, определим

$$\lambda(A) = \sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k).$$

Тогда λ является мерой на $\mathbb{R}$.

Лемма 1.2.9. *Пусть* $I_k = [a_k, b_k)$, $k = 1, \dots, m$, *и* $I = [a, b)$. *Если*

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{m} I_k, \tag{1.3}$$

то

$$\lambda(I) \leq \sum_{k=1}^{m} \lambda(I_k). \tag{1.4}$$

Доказательство. Поскольку имеет место (1.3), то существует такое $k_1 \in \{1, \dots, m\}$, что $a \in I_{k_1} = [a_{k_1}, b_{k_1})$, т.е. $a_{k_1} \leq a < b_{k_1}$.

Если $b \leq b_{k_1}$, то

$$\lambda(I) = b - a \leq b_{k_1} - a_{k_1} = \lambda(I_{k_1}) \leq \sum_{k=1}^{m} \lambda(I_k),$$

что и заканчивает доказательство. Поэтому предположим, что $b_{k_1} < b$. Тогда, в силу (1.3), существует такое $k_2 \in \{1, \dots, m\}$, что $b_{k_1} \in I_{k_2} = [a_{k_2}, b_{k_2})$, т.е. $a_{k_2} \leq b_{k_1} < b_{k_2}$.

Если $b \leq b_{k_2}$, то

$$\begin{aligned}\lambda(I) = b - a \leq b_{k_2} - a_{k_1} = (b_{k_2} - a_{k_2}) + (a_{k_2} - a_{k_1}) \leq \\ \leq (b_{k_2} - a_{k_2}) + (b_{k_1} - a_{k_1}) = \lambda(I_{k_1}) + \lambda(I_{k_2}) \leq \sum_{k=1}^{m} \lambda(I_k),\end{aligned}$$

что и заканчивает доказательство. Поэтому, предположим, что $b_{k_2} < b$.

Продолжая таким образом по индукции, получаем (1.4). □

Лемма 1.2.10 (теорема Бореля–Лебега)**.** *Пусть* $\{I_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ *— семейство открытых интервалов,* $I_\gamma = (a_\gamma, b_\gamma)$, *и*

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma \supset [a, b].$$

Тогда существует такое конечное подмножество $\Gamma_0 \subset \Gamma$, *что*

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} I_\gamma \supset [a, b].$$

Доказательство. См. [11, стр. 69]. □

Доказательство теоремы 1.2.8. Поскольку $\emptyset = [a, a)$, $a \in \mathbb{R}$, то $\lambda(\emptyset) = a - a = 0$.

Пусть теперь
$$\bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k = I,$$
где $I_k = [a_k, b_k)$, $I = [a, b)$, и докажем, что $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) = \lambda(I)$, т.е.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) = b - a.$$

Вначале докажем, что
$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) \leq b - a.$$
Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ имеем, что
$$\bigsqcup_{k=1}^{m} I_k \subset I.$$
Поскольку $I_i \cap I_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то можно предположить, что
$$a \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \ldots \leq a_m \leq b_m \leq b. \tag{1.5}$$
Следовательно, имеем
$$b - a - \sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k) = -a - (b_1 - a_1) - (b_2 - a_2) - (b_3 - a_3) - \\ - \ldots - (b_{m-1} - a_{m-1}) - (b_m - a_m) + b = \\ = (a_1 - a) + (a_2 - b_1) + (a_3 - b_2) + \\ + \ldots + (a_m - b_{m-1}) + (b - b_m) \geq 0.$$

Поэтому,

$$\sum_{k=1}^{m}(b_k - a_k) \le b - a,$$

Так как это неравенство верно для любых $m \in \mathbb{N}$, то, переходя к пределу при $m \to +\infty$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}(b_k - a_k) \le b - a. \tag{1.6}$$

Теперь докажем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) \ge b - a.$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, и рассмотрим замкнутый отрезок $\overline{I}_\varepsilon = [a, b - \varepsilon]$ и открытые интервалы $\tilde{I}_k^\varepsilon = (a_k^\varepsilon, b_k)$, где $a_k^\varepsilon = a_k - \frac{\varepsilon}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$. Имеем $\overline{I}_\varepsilon \subset I$ и $\tilde{I}_k^\varepsilon \supset I_k$ для всех k.

Поскольку по условию $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset I$, то

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\tilde{I}_k^\varepsilon \supset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset I \supset \overline{I}_\varepsilon.$$

Поскольку $\overline{I}_\varepsilon$ является отрезком, а каждый $\tilde{I}_k^\varepsilon$ открытым интервалом, то по теореме Бореля–Лебега (лемма 1.2.10) существует конечное семейство открытых интервалов $\tilde{I}_k^\varepsilon$, покрывающих отрезок $\overline{I}_\varepsilon$. Пусть

$$\bigcup_{k=1}^{m}\tilde{I}_k^\varepsilon \supset \overline{I}_\varepsilon.$$

Положив

$$I_k^\varepsilon = [a_k^\varepsilon, b_k) \supset (a_k^\varepsilon, b_k) = \tilde{I}_k^\varepsilon$$

и

$$I_\varepsilon = [a, b - \varepsilon) \subset [a, b - \varepsilon] = \overline{I}_\varepsilon,$$

получим, что
$$I_\varepsilon \subset \bigcup_{k=1}^{m} I_k^\varepsilon.$$
Поэтому (лемма 1.2.9) имеем:
$$b-\varepsilon-a=\lambda(I_\varepsilon)\leq\sum_{k=1}^{m}\lambda(I_k^\varepsilon)=\sum_{k=1}^{m}(b_k-a_k+\frac{\varepsilon}{2^k})=$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(b_k-a_k)+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}<\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)+\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)+\varepsilon.$$
Откуда следует, что
$$b-a<\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)+2\varepsilon.$$
Поскольку $\varepsilon>0$ является произвольным, то
$$b-a\leq\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k),$$
что, вместе с (1.6), и заканчивает доказательство. □

Утверждение 1.2.11. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо на Ω, и μ — мера на $\mathcal{R}$. Тогда:*

(a) (*аддитивность меры*)
$$\mu\Big(A\bigsqcup B\Big)=\mu(A)+\mu(B);\tag{1.7}$$

(b) (*монотонность меры*) *если $A,B\in\mathcal{R}$ и $A\subset B$, то*
$$\mu(A)\leq\mu(B);\tag{1.8}$$

(c) (*субтрактивность меры*) *если* $A, B \in \mathcal{R}$, $A \subset B$ *и* $\mu(A) < +\infty$, *то*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A); \tag{1.9}$$

(d) (*счетная полуаддитивность*) *если* $A, A_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$, *и* $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, *то*

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{1.10}$$

Доказательство. **(a)** Полагая в (1.1) $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = \ldots = \emptyset$, получим (1.7).

(b), (c) Поскольку $\mathcal{R}$ — кольцо, то $B \setminus A \in \mathcal{R}$. Кроме того,

$$B = A \bigsqcup (B \setminus A).$$

Поэтому,

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

Отсюда получаем, что

$$\mu(B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A) \geq 0,$$

т.е. выполнено (1.8). Также, из предыдущего равенства имеем (1.9).

(d) Рассмотрим множества A'_k, $k \in \mathbb{N}$, определенные как

$$A'_1 = A_1; \quad A'_2 = A_2 \setminus A_1, \quad \ldots, \quad A'_k = A_k \setminus \Big(\bigcup_{l=1}^{k-1} A_l\Big), \quad \ldots$$

Семейство множеств $\{A'_k\}_{k=1}^{\infty}$ обладает следующими свойствами (см. рис. 1.4):

$$A'_k \in \mathcal{R}, \quad A'_k \subset A_k, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset A, \quad A'_k \cap A'_l = \emptyset \ (k \neq l).$$

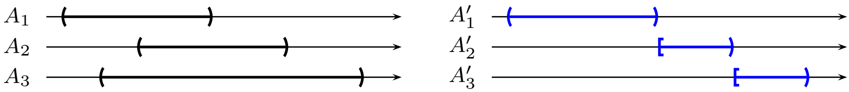

Рис. 1.4: Множества A'_k, $k \in \mathbb{N}$.

Теперь построим множества $A''_k = A \cap A'_k$. Они обладают свойствами:

$$A''_k \in \mathcal{R}, \quad A''_k \subset A_k, \quad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A''_k, \quad A''_k \cap A''_l = \emptyset \ (k \neq l)$$

Тогда, используя эти свойства а также свойство (b), имеем, что

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A''_k\Big) = \mu\Big(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A''_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A''_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

□

Обозначения 1.2.12. Пусть $A, A_k \subset \Omega$, $k \in \mathbb{N}$. Используются следующие обозначения:

$$A_k \uparrow A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} A_k \subset A_{k+1}, & k \in \mathbb{N}, \\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A, \end{cases}$$

$$A_k \downarrow A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} A_k \supset A_{k+1}, & k \in \mathbb{N}, \\ \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A. \end{cases}$$

Утверждение 1.2.13 (непрерывность меры по возрастанию)**.** *Пусть $A, A_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$, и $A_k \uparrow A$. Тогда $\mu(A_k) \uparrow \mu(A)$ (последовательность действительных чисел $\big(\mu(A_k)\big)_{k=1}^{\infty}$ является монотонно неубывающей и имеет пределом элемент $\mu(A) \in \overline{\mathbb{R}}_+$).*

Доказательство. Поскольку $A_k \uparrow A$, то

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots, \qquad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Рассмотрим множества A'_k, $k \in \mathbb{N}$, определенные как

$$A'_1 = A_1, \qquad A'_k = A_k \setminus A_{k-1}, \quad k \geq 2.$$

Имеем, что $A'_k \cap A'_l = \emptyset$ при $k \neq l$, и

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A'_k,$$

см. рис. 1.5. При этом,

$$\mu(A'_k) = \mu(A_k) - \mu(A_{k-1}),$$

поскольку $A_{k-1} \subset A_k$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
\mu(A) = \sum_{l=1}^{\infty} \mu(A'_l) = \lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{k} \mu(A'_l) = \\
&= \lim_{k\to\infty} \Big(\mu(A_1) + \big(\mu(A_2) - \mu(A_1)\big) + \big(\mu(A_3) - \mu(A_2)\big) + \ldots + \\
&\qquad + \big(\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\big)\Big) = \\
&= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).
\end{aligned}$$

А поскольку $\mu(A_k) \leq \mu(A_{k+1})$ так как $A_k \subset A_{k+1}$, то имеем $\mu(A_k) \uparrow \mu(A)$. □

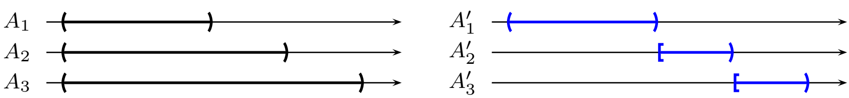

Рис. 1.5: Множества A'_k, $k \in \mathbb{N}$.

Утверждение 1.2.14 (непрерывность меры по убыванию). *Пусть $A, A_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $\mu(A_{k_0}) < +\infty$ для некоторого k_0, и $A_k \downarrow A$. Тогда $\mu(A_k) \downarrow \mu(A)$ (последовательность действительных чисел $\big(\mu(A_k)\big)_{k=1}^{\infty}$ является монотонно невозрастающей и имеет пределом элемент $\mu(A) \in \overline{\mathbb{R}}_+$).*

Доказательство. Поскольку $A_k \downarrow A$, то это означает, что

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_{k_0} \supset \ldots, \qquad A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Тогда

$$A_{k_0} \setminus A_{k_0} \subset A_{k_0} \setminus A_{k_0+1} \subset A_{k_0} \setminus A_{k_0+2} \subset \ldots,$$
$$A_{k_0} \setminus A = A_{k_0} \setminus \Big(\bigcap_{k=k_0}^{\infty} A_k \Big) = \bigcup_{k=k_0}^{\infty} (A_{k_0} \setminus A_k).$$

На основании утверждения 1.2.13 имеем, что

$$\mu(A_{k_0} \setminus A) = \mu\Big(\bigcup_{k=k_0}^{\infty} (A_{k_0} \setminus A_k) \Big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_{k_0} \setminus A_k).$$

Поскольку $A \subset A_{k_0}$ и $A_k \subset A_{k_0}$ для $k \geq k_0$, то из предыдущего равенства имеем:

$$\mu(A_{k_0}) - \mu(A) = \lim_{k\to\infty} \big(\mu(A_{k_0}) - \mu(A_k)\big) = \mu(A_{k_0}) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Таким образом,

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k), \qquad \mu(A_1) \geq \mu(A_2) \geq \ldots,$$

т.е. $\mu(A_k) \downarrow \mu(A)$. □

Следствие 1.2.15. *Если $A_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$, и $\mu(A_{k_0}) < +\infty$ для некоторого k_0, и $A_k \downarrow \emptyset$, то $\mu(A_k) \downarrow 0$.*

Замечание 1.2.16. Если $\mu(A_k) = +\infty$ для всех k, то утверждение 1.2.14 может не выполняться.

Пример 1.2.17. Пусть $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu(A) = |A|$, и $A_k = \{k, k+1, \ldots\}$. Тогда $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$, но $\lim_{k\to\infty} |A_k| = \infty$.

1.2.2 Продолжение меры

Определение 1.2.18. Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо подмножеств Ω, и μ — мера на $\mathcal{R}$. *Внешней мерой* μ^*, связанной с μ, называется функция $\mu^*\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, определенная для произвольного $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ следующим образом:

$$\mu^*(E) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : A_k \in \mathcal{R}, k \in \mathbb{N}, \text{ и } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset E\Big\},$$

если существует хотя бы одно счетное семейство $\{A_k \in \mathcal{R} : k \in \mathbb{N}\}$, покрывающее E, т.е. такое, что $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, и

$$\mu^*(E) = +\infty,$$

если такого семейства нет.

Пример 1.2.19. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}$ и λ из теоремы 1.2.8. Тогда $\lambda^*(\{c\}) = 0$ для произвольного $c \in \mathbb{R}$.

Действительно, имеем, что $\{c\} \subset I_n = \big[c, c + \frac{1}{n}\big)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и $\lambda(I_n) = \frac{1}{n}$. Поэтому,

$$\lambda^*\big(\{c\}\big) \le \inf\Big\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\Big\} = 0,$$

т.е. $\lambda^*\big(\{c\}\big) = 0$.

Пример 1.2.20. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}$ и λ из теоремы 1.2.8. Тогда $\lambda^*(\mathbb{Q}) = 0$.

Действительно, поскольку $\mathbb{Q}$ является счетным, то $\mathbb{Q} = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, и положим $I_k = \big[q_k, q_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\big)$. Очевидно, что

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Поэтому,

$$\lambda^*(\mathbb{Q}) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ было произвольным, получаем $\lambda^*(\mathbb{Q}) = 0$.

Пример 1.2.21. $\Omega = \{0,1\}$, $\mathcal{R} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mu(\Omega) = 1$. Тогда $\mu^*(\{0\}) = \mu^*(\{1\}) = 1$.

Действительно, единственное множество, которое покрывает $\{0\}$ является Ω. То же самое верно для множества $\{1\}$. Поэтому,

$$\mu^*\big(\{0\}\big) = \mu^*\big(\{1\}\big) = \mu(\Omega) = 1.$$

Замечание 1.2.22. Внешняя мера не всегда является аддитивной на $\mathcal{P}(\Omega)$, и тем более σ-аддитивной, а значит не всегда является мерой на $\mathcal{P}(\Omega)$.

Действительно, как показывает пример 1.2.21, $\{0\} \cap \{1\} = \emptyset$, и, следовательно, если μ^* аддитивна, то

$$\mu^*\big(\{0\} \cup \{1\}\big) = \mu^*\big(\{0\}\big) + \mu^*\big(\{1\}\big) = 2,$$

в то время как

$$\mu^*\big(\{0\} \cup \{1\}\big) = \mu^*(\Omega) = \mu(\Omega) = 1.$$

Утверждение 1.2.23. *Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо подмножеств Ω, μ — мера на $\mathcal{R}$ и μ^* — внешняя мера, связанная с μ. Тогда*

(a) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(b) $\mu^*(A) = \mu(A)$ *для всех* $A \in \mathcal{R}$;

(c) μ^* *является неубывающей, т.е.*

$$E \subset F \qquad \Longrightarrow \qquad \mu^*(E) \le \mu^*(F)$$

для всех $E, F \in \mathcal{P}(\Omega)$;

d) μ^* *является счетно полуддитивной, т.е.*

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k), \qquad E_k \in \mathcal{P}(\Omega), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. **(a)** Поскольку $\emptyset \in \mathcal{R}$ для любого кольца $\mathcal{R}$, и $\emptyset \supset \emptyset$, то

$$\mu^*(\emptyset) \le \mu(\emptyset) = 0.$$

(b) Пусть $A \in \mathcal{R}$, и $A_k \in \mathcal{R}$, $k \in \mathbb{N}$, произвольны, но такие, что $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Используя утверждение 1.2.11 (d), получим, что

$$\mu(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k),$$

поэтому,

$$\mu(A) \le \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big\} = \mu^*(A).$$

С другой стороны, в качестве покрытия A можно взять само A, поскольку $A \in \mathcal{R}$, и, поэтому,

$$\mu^*(A) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big\} \le \mu(A).$$

Таким образом,

$$\mu(A) \le \mu^*(A) \le \mu(A),$$

т.е. $\mu^*(A) = \mu(A)$.

(c) Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$, $B_k \in \mathcal{R}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, — произвольное покрытие множества F. Тогда оно также является покрытием множества E, поскольку $E \subset F$. Таким образом,

$$\mu^*(E) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big\} \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k).$$

Таким образом,

$$\mu^*(E) \le \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) : F \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big\} = \mu^*(F).$$

(d) Пусть $\{A_{k,l}\}_{l=1}^{\infty}$, $A_{k,l} \in \mathcal{R}$, — произвольное покрытие множества E_k. Тогда счетное семейство $\{A_{k,l}\}_{k,l=1}^{\infty}$ является покрытием множества $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Поэтому,

$$\mu^*(E) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_k) : \tilde{A}_k \in \mathcal{R},\ E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k\Big\} \leq$$
$$\leq \inf\Big\{\sum_{k,l=1}^{\infty} \mu(A_{k,l}) : E_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{k,l},\ k \in \mathbb{N}\Big\} =$$
$$= \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \mu(A_{k,l}) : E_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{k,l},\ k \in \mathbb{N}\Big\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \inf\Big\{\sum_{l=1}^{\infty} \mu(A_{k,l}) : E_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{k,l},\ k \in \mathbb{N}\Big\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k).$$

□

Определение 1.2.24. Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо подмножеств Ω, и μ — мера на $\mathcal{R}$. Множество $N \subset \Omega$ называется *множеством меры* 0 относительно меры μ, если $\mu^*(N) = 0$. Семейство всех множеств меры 0 будет обозначаться $\mathcal{N}$.

Пример 1.2.25. Пусть $\Omega = \mathbb{R}$ и $\mathcal{R}$, λ как в теореме 1.2.8. Тогда всякое счетное множество N является множеством меры 0.

Действительно, было показано, что $\lambda^*\big(\{x\}\big) = 0$ для любой точки $x \in \mathbb{R}$. Поэтому, для $X = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ в силу 1.2.23 (d) имеем:

$$\mu^*(X) = \mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x_k\}\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\big(\{x_k\}\big) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Пример 1.2.26. Пусть Ω — произвольное множество, и последовательности $(\omega_k)_{k=1}^{\infty}$, $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ задают дискретную меру на $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\Omega)$

(см. пример 1.2.7). Тогда $\mu^* = \mu$, и любое подмножество N,

$$N \subset \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega_k\}\Big)^c$$

является множеством меры 0.

Действительно, поскольку $\mathcal{R} = \mathcal{P}(\Omega)$, то в силу 1.2.23 (b) имеем, что $\mu^*(A) = \mu(A)$ для любого $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Таким образом, внешняя мера μ^* совпадает с мерой μ.

А если $\omega_k \notin A$, то по определению $1_A(\omega_k) = 0$, и

$$\mu^*(A) = \mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1_A(\omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, 0 = 0.$$

Утверждение 1.2.27. (a) *Пусть $N \in \mathcal{N}$. Если $M \subset N$, то $M \in \mathcal{N}$.*

(b) *Пусть $N_k \in \mathcal{N}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \in \mathcal{N}$.*

(c) *Если $\mathcal{R}$ является σ-алгеброй, то $N \in \mathcal{N}$ тогда и только тогда, когда существует такое множество $A \in \mathcal{R}$, что $N \subset A$ и $\mu(A) = 0$.*

Доказательство. **(a)** Используя утверждение 1.2.23 (c), имеем

$$\mu^*(M) \le \mu^*(N) = 0.$$

Таким образом, $\mu^*(M) = 0$, и $M \in \mathcal{N}$.

(b) Используя 1.2.23 (d), имеем

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(N_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0,$$

т.е. $\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \in \mathcal{N}$.

(c) Пусть $\mu^*(N) = 0$, т.е.

$$\inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : A_k \in \mathcal{R},\ N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big\} = 0.$$

По определению инфимума, из этого следует, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое покрытие $\{A_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ множества N, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) < \frac{1}{n}.$$

Положим $A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}$. Тогда $A_n \in \mathcal{R}$, поскольку $\mathcal{R}$ является σ-алгеброй по условию, и

$$\mu(A_n) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k}\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) < \frac{1}{n}.$$

Кроме этого, $N \subset A_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, поскольку семейство $\{A_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ является покрытием N для каждого n. Таким образом, $N \subset A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, и $A \in \mathcal{R}$, поскольку $\mathcal{R}$ является σ-алгеброй. А так как $A \subset A_n$, то

$$\mu(A) \leq \mu(A_n) < \frac{1}{n}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\mu(A) = 0$.

$\square$

Определение 1.2.28. Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо подмножеств множества Ω, и μ — мера на $\mathcal{R}$. Множество $C \subset \Omega$ называется *измеримым по Каратеодори* или μ-измеримым, если

$$\mu^*\Big(E \bigcup F\Big) = \mu^*(E) + \mu^*(F) \qquad \text{для всех } E \subset C \text{ и } F \subset C^c.$$

Семейство всех μ-измеримых подмножеств Ω будет обозначаться Σ_μ.

Утверждение 1.2.29. *Пусть* $\mathcal{R}$ *— кольцо подмножеств* Ω, μ *— мера на* $\mathcal{R}$. *Если* $A \in \mathcal{R}$, *то* A *является* μ*-измеримым, т.е.* $\mathcal{R} \subset \Sigma_\mu$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{R}$, и $E \subset A$, $F \subset A^c$. Требуется доказать, что

$$\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F). \tag{1.11}$$

Поскольку

$$\mu^*(E \cup F) \leq \mu^*(E) + \mu^*(F)$$

для произвольных множеств E и F в силу утверждения 1.2.23 (d), то для доказательства (1.11) требуется показать, что

$$\mu^*(E \cup F) \geq \mu^*(E) + \mu^*(F).$$

Пусть $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольное покрытие $E \cup F$ множествами из $\mathcal{R}$. Положим $E_k = A_k \cap A$ и $F_k = A_k \setminus A$. Поскольку $E \subset A$, то

$$E = E \cap A \subset (E \cup F) \cap A \subset \left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \bigcap A = \bigcup_{k=1}^\infty (A_k \cap A) = \bigcup_{k=1}^\infty E_k,$$

и, следовательно, $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ является покрытием множества E. А поскольку $A_k, A \in \mathcal{R}$, то $E_k = A_k \cap A \in \mathcal{R}$.

Точно также, $F \subset A^c$. Поэтому,

$$F = F \cap A^c \subset (E \cup F) \cap A^c \subset \left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \bigcap A^c = \bigcup_{k=1}^\infty (A_k \cap A^c) =$$

$$= \bigcup_{k=1}^\infty (A_k \setminus A) = \bigcup_{k=1}^\infty F_k.$$

Следовательно, $F_k \in \mathcal{R}$, и семейство $\{F_k\}_{k=1}^\infty$ покрывает F.

Также заметим, что, поскольку $E_k = A_k \cap A \subset A$ а $F_k = A_k \setminus A \subset A^c$, то $E_k \cap F_k = \emptyset$ и $E_k \cup F_k = A_k$. Поэтому, $\mu(E_k) + \mu(F_k) = \mu(A_k)$ и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^\infty \mu(E_k) + \sum_{k=1}^\infty \mu(F_k) = \sum_{k=1}^\infty \big(\mu(E_k) + \mu(F_k)\big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k \cup F_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Следовательно, для каждого покрытия $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ множества $E \cup F$, полагая $E_k = A_k \cap A$, $F_k = A_k \setminus A$, имеем

$$\mu^*(E) + \mu^*(F) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\tilde{E}_k) : \tilde{E}_k \in \mathcal{R},\ E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k\Big\} +$$
$$+ \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\tilde{F}_k) : \tilde{F}_k \in \mathcal{R},\ F \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{F}_k\Big\} \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Поэтому,

$$\mu^*(E)+\mu^*(F) \leq \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : A_k \in \mathcal{R},\ E\cup F \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big\} = \mu^*(E\cup F),$$

что и заканчивает доказательство (1.11). □

Утверждение 1.2.30. *Пусть $N \in \mathcal{N}$. Тогда множество N является μ-измеримым.*

Доказательство. Пусть $E, F \in \mathcal{P}(\Omega)$, $E \subset N$, $F \subset N^c$, и покажем, что

$$\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F).$$

Поскольку $E \subset N$, то

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(N) = 0,$$

т.е. $\mu^*(E) = 0$. Таким образом, остается показать, что

$$\mu^*(E \cup F) = \mu^*(F).$$

В силу утверждения 1.2.23 (d), имеем

$$\mu^*(E \cup F) \leq \mu^*(E) + \mu^*(F) = \mu^*(F).$$

Но $F \subset E \cup F$. Поэтому,

$$\mu^*(F) \leq \mu^*(E \cup F),$$

т.е. $\mu^*(E \cup F) = \mu^*(F)$, что и означает μ-измеримость N. $\square$

Определение 1.2.31. Пусть $\mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}}$ — кольца подмножеств Ω, причем $\mathcal{R} \subset \tilde{\mathcal{R}}$. Пусть μ и $\tilde{\mu}$ — меры на $\mathcal{R}$ и $\tilde{\mathcal{R}}$, соответственно. Если $\tilde{\mu} \restriction_{\mathcal{R}} = \mu$, то мера $\tilde{\mu}$ называется *продолжением* меры μ на $\tilde{\mathcal{R}}$, а мера μ *ограничением* меры $\tilde{\mu}$ на $\mathcal{R}$.

Теорема 1.2.32 (Каратеодори). *Пусть μ — мера на некотором кольце $\mathcal{R}$ подмножеств Ω. Семейство Σ_μ всех μ-измеримых подмножеств Ω является σ-алгеброй, содержащей кольцо $\mathcal{R}$ и семейство множеств меры* 0. *Ограничение внешней меры μ^* на Σ_μ является мерой.*

Доказательство. Без доказательства. $\square$

Следствие 1.2.33. *Пусть μ — мера на кольце $\mathcal{R}$ подмножеств Ω, и $\Sigma_{\mathcal{R}}$ — σ-алгебра, порожденная кольцом $\mathcal{R}$. Тогда ограничение $\tilde{\mu} = \mu^* \restriction_{\Sigma_{\mathcal{R}}}$ внешней меры μ^* на $\Sigma_{\mathcal{R}}$ является мерой на $\Sigma_{\mathcal{R}}$.*

Доказательство. По теореме Каратеодори, ограничение внешней меры μ^* на σ-алгебру Σ_μ μ-измеримых множеств является мерой. Поскольку $\Sigma_{\mathcal{R}}$ и Σ_μ являются σ-алгебрами, содержащими $\mathcal{R}$, причем $\Sigma_{\mathcal{R}}$ является наименьшей, то $\Sigma_{\mathcal{R}} \subset \Sigma_\mu$. Поэтому ограничение μ^* на $\Sigma_{\mathcal{R}}$ также является мерой. $\square$

Задачи

КР: 291 (1), 291.1, 292 (1), 292.3 (1)
ДР: 291 (3), 291.3, 291.2, 292.3 (2, 3, 4)

Определение 1.2.34. Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо подмножеств Ω, и μ — мера на $\mathcal{R}$. Мера μ называется *конечной* или *ограниченной*, если $\Omega \in \mathcal{R}$ и $\mu(\Omega) < \infty$. Конечная мера μ называется *вероятностной*, если $\mu(\Omega) = 1$.

Мера μ называется σ-конечной, если существует такая неубывающая последовательность подмножеств Ω_k, $k \in \mathbb{N}$, что $\mu(\Omega_k) < \infty$ для всех k, и $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$.

Пример 1.2.35.

1. Считающая мера на Ω, $\mu(A) = |A|$ (см. пример 1.2.3).

   Эта мера конечна, если множество Ω конечно, вероятностная, если Ω состоит из одного элемента. Мера является σ-конечной, если множество Ω счетно.

2. Мера Дирака (см. пример 1.2.5).

   Эта мера является вероятностной.

3. Дискретная мера (см. пример 1.2.7).

   Эта мера является конечной, если

$$c = \sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty.$$

   Мера вероятностная, если $c = 1$. Эта мера является σ-конечной, поскольку положив

$$\Omega_k = \Omega \setminus \Big(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} \omega_i \Big),$$

   имеем

$$\mu(\Omega_k) = \sum_{i=1}^{k} c_i < \infty, \qquad \Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k.$$

4. Длина на $\mathbb{R}$ (см. пример 1.2.8).

Мера не является конечной, однако является σ-конечной, поскольку для $\Omega_k = [-k, k)$ имеем

$$\lambda\big([-k,k)\big) = 2k, \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \mathbb{R}.$$

Теорема 1.2.36. *Пусть μ — σ-конечная мера на кольце $\mathcal{R}$ подмножеств Ω, $\Sigma_{\mathcal{R}}$ — σ-алгебра, порожденная кольцом $\mathcal{R}$, Σ_μ — σ-алгебра μ-измеримых подмножеств Ω, а $\mathcal{N}$ — семейство множеств меры 0. Тогда Σ_μ является σ-алгеброй, порожденной $\Sigma_{\mathcal{R}}$ и $\mathcal{N}$.*

Доказательство. Без доказательства. □

Определение 1.2.37. Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо порожденное полуинтервалами $[a, b)$ в $\mathbb{R}$. Продолжение функции длины на Σ_λ, попрежнему обозначаемое λ, называется *мерой Лебега* на $\mathbb{R}$, а элементы Σ_λ — множествами *измеримыми по Лебегу.*

Замечание 1.2.38. Из теоремы 1.2.36 следует, что Σ_λ является σ-алгеброй, порожденной $\mathcal{B}$ и $\mathcal{N}$.

1.3 Измеримые пространства и функции

Определение 1.3.1. Пусть Ω — множество, и Σ — σ-алгебра на Ω. Пара (Ω, Σ) называется *измеримым пространством.* Произвольное множество $A \in \Sigma$ называется *измеримым.*

Определение 1.3.2. Пусть (Ω_1, Σ_1) и (Ω_2, Σ_2) — измеримые пространства. Отображение $f\colon (\Omega_1, \Sigma_1) \to (\Omega_2, \Sigma_2)$ называется *измеримым*, если $f^{-1}(B) \in \Sigma_1$ для произвольного $B \in \Sigma_2$.

Замечание 1.3.3. Определение 1.3.2 означает, что отображение $f : (\Omega_1, \Sigma_1) \to (\Omega_2, \Sigma_2)$ измеримо тогда и только тогда, когда $f^{-1}(\Sigma_2) \subset \Sigma_1$.

Пример 1.3.4.

1. Пусть Σ_2 — произвольная σ-алгебра на Ω_2. Любое отображение $f\colon \big(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1)\big) \to (\Omega_2, \Sigma_2)$ является измеримым.

   Действительно, $f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(\Omega)$ для произвольного $B \in \Sigma_2$.

2. Пусть $\Sigma = \{\emptyset, \Omega\}$, а $\tilde{\Sigma} = \mathcal{P}(\tilde{\Omega})$. Если $f\colon (\Omega, \Sigma) \to (\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma})$ измеримо, то f является постоянным отображением, т.е. $f(\omega) = \tilde{\omega}_0$ для всех $\omega \in \Omega$.

   Дейчтвительно, если $f(\omega) = \tilde{\omega}_0$ для всех $\omega \in \Omega$, то для произвольного $B \in \mathcal{P}(\tilde{\Omega})$ имеем $f^{-1}(B) = \emptyset$, если $\tilde{\omega}_0 \notin B$, и $f^{-1}(B) = \Omega$, если $\tilde{\omega}_0 \in B$. Таким образом $f^{-1}(B) \in \Sigma_1$ для произвольного $B \in \mathcal{P}(\tilde{\Omega})$, и f является измеримым отображением.

   Если f не является постоянным отображением, то существуют $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in \operatorname{Im} f$, и $\tilde{w}_1 \neq \tilde{\omega}_2$. Но тогда $f^{-1}(\{\omega_1\}) \neq \emptyset$ и $f^{-1}(\{\omega_1\}) \neq \Omega$. И, поскольку $\{\tilde{\omega}_1\} \in \mathcal{P}(\tilde{\Omega})$, а $f^{-1}(\{\tilde{w}_1\}) \notin \Sigma$, отображение f не является измеримым.

Утверждение 1.3.5. *Пусть* (Ω_1, Σ_1), (Ω_2, Σ_2), (Ω_3, Σ_3) — *измеримые пространства, и отображения*

$$f\colon (\Omega_1, \Sigma_1) \to (\Omega_2, \Sigma_2), \qquad g\colon (\Omega_2, \Sigma_2) \to (\Omega_3, \Sigma_3)$$

измеримы. Тогда композиция $g \circ f\colon (\Omega_1, \Sigma_1) \to (\Omega_3, \Sigma_3)$ *является измеримым отображением.*

Доказательство. Пусть $C \in \Sigma_3$. Тогда $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big)$. Поскольку g является измеримым, то $B = g^{-1}(C) \in \Sigma_2$, а поскольку f является измеримым, то $f^{-1}(B) = f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big) \in \Sigma_1$. Следовательно, $g \circ f$ измеримо. $\square$

Утверждение 1.3.6. *Пусть* $f\colon (\Omega_1, \Sigma_1) \to (\Omega_2, \Sigma_2)$, *и* σ*-алгебра* Σ_2 *порождена семейством* $\mathcal{C}_2$, *т.е.* $\Sigma_2 = \Sigma_{\mathcal{C}_2}$. *Отображение* f *измеримо тогда и только тогда, когда* $f^{-1}(C) \in \Sigma_1$ *для всех* $C \in \mathcal{C}_2$.

Доказательство. Если f измеримо, то для $C \in \mathcal{C}_2$ имеем, что $f^{-1}(C) \in \Sigma_1$, поскольку $\mathcal{C}_2 \subset \Sigma_2$.

Обратно, предположим, что $f^{-1}(C) \in \Sigma_1$ для каждого $C \in \mathcal{C}$. Рассмотрим семейство $\tilde{\Sigma}_2 = \{\tilde{C}\}$ таких подмножеств $\tilde{C} \subset \Omega_2$, что $f^{-1}(\tilde{C}) \in \Sigma_1$, и докажем, что $\tilde{\Sigma}_2$ является σ-алгеброй.

Действительно, если $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\Sigma}_2$ и $\tilde{A}_k \in \tilde{\Sigma}_2$ для всех $k \in \mathbb{N}$, т.е. $f^{-1}(\tilde{A}), f^{-1}(\tilde{B}) \in \Sigma_1$ и $f^{-1}(\tilde{A}_k) \in \Sigma_1$, то, поскольку

$$f^{-1}(\tilde{A} \setminus \tilde{B}) = f^{-1}(\tilde{A}) \setminus f^{-1}(\tilde{B}), \qquad f^{-1}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k\Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(A_k)$$

и Σ_1 является σ-алгеброй, имеем, что

$$f^{-1}(\tilde{A} \setminus \tilde{B}) \in \Sigma_1, \qquad f^{-1}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k\Big) \in \Sigma_1,$$

т.е. $\tilde{A} \setminus \tilde{B} \in \tilde{\Sigma}_2$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \in \tilde{\Sigma}_2$. Следовательно, $\tilde{\Sigma}_2$ является σ-кольцом. Кроме этого,

$$f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1 \in \Sigma_1,$$

поэтому, $\Omega_2 \in \tilde{\Sigma}_2$, что и доказывает, что $\tilde{\Sigma}_2$ является σ-алгеброй.

По условию, $\mathcal{C}_2 \subset \tilde{\Sigma}_2$. В связи с тем, что $\Sigma_{\mathcal{C}_2} = \Sigma_2$ является наименьшей σ-алгеброй, содержащей $\mathcal{C}_2$, имеем, что $\Sigma_2 \subset \tilde{\Sigma}_2$, т.е. $f^{-1}(\tilde{C}) \in \Sigma_1$ для любого $\tilde{C} \in \Sigma_2$. Следовательно, отображение f измеримо. $\square$

1.3.1 Измеримые функции со значениями в $\mathbb{R}$

Определение 1.3.7. Пусть (Ω, Σ) — измеримое пространство, $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}$. Функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если измеримо отображение

$$f\colon (\Omega, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}).$$

Если $\Omega = \mathbb{R}^n$, то функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если измеримо отображение

$$f\colon (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}),$$

где $\mathcal{B}_n$ и $\mathcal{B}$ — борелевские σ-алгебры на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}$, соответственно.

Множество всех измеримых функций $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ на измеримом пространстве (Ω, Σ) обозначается $\mathcal{M}(\Sigma)$.

Пример 1.3.8. Пусть $\Omega = \bigsqcup_{k=1}^m \Omega_k$, $\Sigma = \Sigma_{\{\Omega_k\}}$ и $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Функция f измерима тогда и только тогда, когда f постоянная на каждом Ω_k.

Действительно, если f постоянная на каждом Ω_k, то $f(\Omega_k) = \{c_k\}$, и для произвольного $B \in \mathcal{B}$ имеем, что либо $f(\Omega_k) \subset B$ либо $f(\Omega_k) \cap B = \emptyset$. Поэтому

$$f^{-1}(B) = \bigsqcup_{f(\Omega_k) \subset B} \Omega_k \in \Sigma_{\{\Omega_k\}}.$$

Если f не является постоянной на Ω_{k_0}, то существуют такие $\omega'_{k_0}, \omega''_{k_0} \in \Omega_{k_0}$, что $f(\omega'_{k_0}) = c'_{k_0} \neq c''_{k_0} = f(\omega''_{k_0})$. Но тогда $\{c'_{k_0}\} \in \mathcal{B}$, а $f^{-1}(c'_{k_0}) \cap \Omega_{k_0} \neq \emptyset$ и $f^{-1}(c'_{k_0}) \cap \Omega_{k_0} \neq \Omega_{k_0}$, т.е. $f^{-1}(c'_{k_0}) \cap \Omega_{k_0} \notin \Sigma_{\{\Omega_k\}}$. Отсюда следует, что $f^{-1}(\{c'_{k_0}\}) \notin \Sigma_{\{\Omega_k\}}$, а значит функция f не является измеримой.

Лемма 1.3.9. *Функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является непрерывной на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда для произвольного открытого $V \subset \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n$ является открытым.*

Доказательство. Пусть $f^{-1}(V)$ открыто в $\mathbb{R}^n$ для произвольного открытого $V \subset \mathbb{R}$, и докажем, что f непрерывна в произвольной точке $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, т.е докажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $f\big(B(\boldsymbol{x}_0;\delta)\big) \subset B(f(\boldsymbol{x}_0);\varepsilon)$ или, что то же самое,

$$B(\boldsymbol{x}_0;\delta) \subset f^{-1}\big(B(f(\boldsymbol{x}_0);\varepsilon)\big), \tag{1.12}$$

где

$$B(\boldsymbol{x}_0;\delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta\},$$
$$B(f(\boldsymbol{x}_0);\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |y - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon\}.$$

Однако, $B(f(\boldsymbol{x}_0),\varepsilon)$ является открытым множеством, поэтому множество $f^{-1}\big(B(f(\boldsymbol{x}_0;\varepsilon))\big)$ также открыто по условию, и $\boldsymbol{x}_0 \in f^{-1}\big(B(f(\boldsymbol{x}_0);\varepsilon)\big)$. Следовательно, существует такое $\delta > 0$, что имеет место (1.12). Это доказывает непрерывность f в точке $\boldsymbol{x}_0$, и, так как f непрерывна в каждой точке $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, то f непрерывна на $\mathbb{R}^n$.

Пусть $V \subset \mathbb{R}$ открыто, f непрерывна на $\mathbb{R}^n$, и докажем, что $f^{-1}(V)$ открыто. Для этого возьмем произвольное $\boldsymbol{x}_0 \in f^{-1}(V)$ и покажем, что открытый шар $B(\boldsymbol{x}_0;\delta)$ содержится в $f^{-1}(V)$ для некоторого $\delta > 0$. Действительно, поскольку $\boldsymbol{x}_0 \in f^{-1}(V)$, то $y_0 = f(\boldsymbol{x}_0) \in V$. Так как V открыто, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $B(y_0;\varepsilon) \subset V$. А, поскольку f является непрерывной в точке $\boldsymbol{x}_0$, то существует такое $\delta > 0$, что

$$f\big(B(\boldsymbol{x}_0;\delta)\big) \subset B(y_0;\varepsilon) \subset V$$

Это означает, что $B(\boldsymbol{x}_0;\delta) \subset f^{-1}(V)$ для этого δ. □

Теорема 1.3.10. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Тогда она измерима.*

Доказательство. Для произвольного открытого множества $U \subset \mathbb{R}$, множество $f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^n$ является также открытым в силу непрерывности функции f (лемма 1.3.9). Поэтому, $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}_n$. А поскольку $\mathcal{B}$ порождается открытыми множествами, то f является измеримой согласно утверждению 1.3.6. □

В дальнейшем используются следующие обозначения:

$$\{f < a\} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) < a\},$$
$$\{f \leq a\} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq a\},$$

и аналогичные им.

Теорема 1.3.11. *Пусть* (Ω, Σ) *— измеримое пространство, и* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$*. Следующие условия эквивалентны:*

1. f *измерима;*
2. *все множества* $\{f < a\}$, $a \in \mathbb{R}$, *измеримы;*
3. *все множества* $\{f \leq a\}$, $a \in \mathbb{R}$, *измеримы.*

Доказательство. Поскольку

$$\{f < a\} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) < a\} = f^{-1}\big((-\infty, a)\big),$$
$$\{f \leq a\} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq a\} = f^{-1}\big((-\infty, a]\big),$$

и каждое из семейств

$$\{(-\infty, a)\}_{a\in\mathbb{R}}, \qquad \{(-\infty, a]\}_{a\in\mathbb{R}}$$

порождает борелевскую σ-алгебру на $\mathbb{R}$, и то доказательство непосредственно следует из утверждения 1.3.6. □

Утверждение 1.3.12. *Пусть* (Ω, Σ) *— измеримое пространство, и* $A \subset \Omega$*. Функция* $1_A\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *измерима тогда и только тогда, когда* A *измеримо.*

Доказательство. Рассмотрим множества

$$\{1_A < a\} = \{\omega \in \Omega : 1_A(\omega) < a\}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Если $a \leq 0$, то

$$\{1_A < a\} = \emptyset,$$

поскольку $1_A(\omega) \in \{0, 1\}$ для всех $\omega \in \Omega$.

Если $0 < a \leq 1$, то

$$\{1_A < a\} = A^c.$$

Если $1 < a$, то

$$\{1_A < a\} = \Omega.$$

Таким образом, для измеримости 1_A необходимо и достаточно, чтобы $A^c \in \Sigma$, т.е. $A \in \Sigma$, поскольку Σ является алгеброй. □

Теорема 1.3.13. *Пусть* (Ω, Σ) — *измеримое пространство. Пусть* $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *измеримы, и* $c \in \mathbb{R}$. *Тогда функции* cf, $f+g$, $|f|$, f^2, fg *также измеримы. Функция* $\frac{f}{g}$ *измерима, если* $g(\omega) \neq 0$ *для всех* $\omega \in \Omega$.

Доказательство. $(\boldsymbol{cf})$ Пусть $a \in \mathbb{R}$, и рассмотрим множество $\{cf < a\}$. Имеем

$$\{cf < a\} = \begin{cases} \{f > \frac{a}{c}\}, & \text{если } c < 0, \\ \emptyset, & \text{если } c = 0 \text{ и } a \leq 0, \\ \Omega, & \text{если } c = 0 \text{ и } a > 0, \\ \{f < \frac{a}{c}\}, & \text{если } c > 0. \end{cases}$$

Каждое из вышеуказанных множеств измеримо. Следовательно, cf измерима.

$(\boldsymbol{f+g})$ Поскольку $\mathbb{Q}$ является счетным множеством, положим $\mathbb{Q} = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$. Докажем, что

$$\{f + g < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(\{f < q_k\} \cap \{g < a - q_k\}\big). \tag{1.13}$$

Пусть $\omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(\{f < q_k\} \cap \{g < a - q_k\}\big)$. Тогда $\omega \in \{f < q_k\} \cap \{g < a - q_k\}$ для некоторого k. Это означает, что $f(\omega) < q_k$ и $g(\omega) < a - q_k$. Таким образом,

$$f(\omega) + g(\omega) < q_k + a - q_k = a,$$

т.е. $\omega \in \{f + g < a\}$.

Обратно, пусть $\omega \in \{f + g < a\}$. Тогда $f(\omega) + g(\omega) < a$, или $f(\omega) < a - g(\omega)$. Поэтому, $\big(f(\omega), a - g(\omega)\big) \neq \emptyset$, и существует $q_{k_0} \in \mathbb{Q}$ такой, что $q_{k_0} \in \big(f(\omega), a - g(\omega)\big)$, т.е.

$$f(\omega) < q_{k_0} < a - g(\omega).$$

Неравенство $f(\omega) < q_{k_0}$ означает, что $\omega \in \{f < q_{k_0}\}$, а из неравенства $q_{k_0} < a - g(\omega)$ следует, что $g(\omega) < a - q_{k_0}$, т.е. $\omega \in \{g < a - q_{k_0}\}$. таким образом,

$$\omega \in \{f < q_{k_0}\} \cap \{g < a - q_{k_0}\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f < q_k\} \cap \{g < a - q_k\},$$

что оканчивает доказательство (1.13).

Поскольку f и g измеримы по условию, каждое множество

$$\{f < q_k\} \cap \{g < a - q_k\}$$

является измеримым, а, поскольку Σ является σ-алгеброй, то и счетное объединение также измеримо. Это означает измеримость множества $\{f+g < a\}$, а, следовательно, и измеримость функции $f + g$.

($|f|$) Для множества $\{|f| < a\}$ имеем

$$\{|f| < a\} = \begin{cases} \emptyset, & a \leq 0, \\ \{f < a\} \cap \{f > -a\}, & a > 0. \end{cases}$$

Каждое из множеств в правой части равенства является измеримым.

(f^2) Имеем

$$\{f^2 < a\} = \begin{cases} \emptyset, & a \leq 0, \\ \{|f| < \sqrt{a}, & a > 0, \end{cases}$$

откуда и следует измеримость f^2.

(fg) Используя формулу

$$fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big),$$

и уже доказанное, получаем измеримость произведения.

($\frac{f}{g}$) В силу измеримости произведения измеримых функций, достаточно доказать, что функция $\frac{1}{g}$ измерима. Имеем

$$\left\{\frac{1}{g} < a\right\} = \begin{cases} \{g > \frac{1}{a}\} \cap \{g < 0\}, & a < 0, \\ \{g < 0\}, & a = 0, \\ \{g < 0\} \cup \{g > \frac{1}{a}\}, & a > 0. \end{cases}$$

□

Следствие 1.3.14. *Пусть (Ω, Σ) — измеримое пространство. Для произвольного $c \in \mathbb{R}$ постоянная функция $c1 = c1_\Omega \colon \Omega \to \mathbb{R}$ является измеримой.*

Доказательство. Поскольку $\Omega \in \Sigma$ так как Ω является алгеброй, то 1_Ω является измеримой по утверждению 1.3.12. Следовательно, $c\,1_\Omega$ является измеримой по теореме 1.3.13. □

Теорема 1.3.15. *Пусть (Ω, Σ) — измеримое пространство. Пусть $(f_k)_{k=1}^\infty$ — последовательность измеримых функций $\Omega \to \mathbb{R}$. Тогда:*

(a) *если*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k, \qquad \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$$

являются функциями $\Omega \to \mathbb{R}$, то они измеримы;

(b) *если $\lim_{k\to\infty} f_k(\omega)$ существует в $\mathbb{R}$ для всех $\omega \in \Omega$, то $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ измерима;*

(c) *функция $s = \sum_{k=1}^\infty f_k$ измерима, если ряд $\sum_{k=1}^\infty f_k(\omega)$ сходится при всех $\omega \in \Omega$.*

Доказательство. **(a)** **($\sup f_k$)** Пусть $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(\omega) < \infty$ для всех $\omega \in \Omega$, т.е. функция $f(\omega) = \sup_{k\in\mathbb{N}} f_n(\omega)$ является функцией $\Omega \to \mathbb{R}$. Пусть $a \in \mathbb{R}$, и рассмотрим $\{f \le a\}$. Докажем, что

$$\{f \le a\} = \{\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k \le a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f_k \le a\}. \tag{1.14}$$

Если $\omega \in \{\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k \le a\}$, то это означает, что $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(\omega) \le a$. Отсюда следует, что $f_k(\omega) \le a$ для всех $k \in \mathbb{N}$, т.е. $\omega \in \{f_k \le a\}$ для всех k, и, следовательно, $\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty}\{f_k \le a\}$.

Пусть теперь $\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty}\{f_k \le a\}$. Это означает, что $\omega \in \{f_k \le a\}$, т.е. $f_k(\omega) \le a$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Но тогда и $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(\omega) \le a$. Следовательно, $\omega \in \{f \le a\}$.

Поскольку f_k измерима, множество $\{f_k \le a\}$ измеримо для каждого $k \in \mathbb{N}$. Таким образом измеримо и множество в правой части (1.14), а с ним и функция f.

($\inf f_k$) Пусть $f = \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$, и рассмотрим множество $\{f < a\}$. Докажем, что

$$\{f < a\} = \{\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k < a\}. \tag{1.15}$$

Пусть $\omega \in \{\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k < a\}$, т.е. $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k(\omega) < a$. Это означает, что существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что $f_{k_0}(\omega) < a$, поскольку, если $f_k(\omega) \ge a$ для всех k, то и $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k(\omega) \ge a$, что является противоречием. Итак, $\omega \in \{f_{k_0} < a\}$, и, следовательно, $\omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty}\{f_k < a\}$.

Обратно, если $\omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty}\{f_k < a\}$, то $\omega \in \{f_{k_0} < a\}$ для некоторого k_0, а, значит, $f_{k_0}(\omega) < a$. Поэтому,

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k(\omega) \le f_{k_0}(\omega) < a.$$

Таким образом, $\omega \in \{f < a\}$.

Теперь измеримость $f = \inf_{k\in\mathbb{N}}$ следует из измеримости всех множеств в правой части (1.15).

(b) Пусть $f = \lim_{k\to\infty} f_k$, и рассмотрим множество $\{f < a\}$. Покажем, что

$$\{f < a\} = \{\lim_{k\to\infty} f_k < a\} = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\{f_k < a - \frac{1}{m}\} \qquad (1.16)$$

Пусть $\omega \in \{f < a\}$, т.е. $c = \lim_{k\to\infty} f_k(\omega) < a$. Поскольку $c < a$, то существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $c + \frac{2}{m} < a$. По определению предела, существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $|f_k(\omega) - c| < \frac{1}{m}$ для всех $k \geq n$. В частности, для таких k имеем, что $f_k(\omega) < a - \frac{1}{m}$ (см. рис. 1.6). Это означает, что $\omega \in \left\{f_k < a - \frac{1}{m}\right\}$.

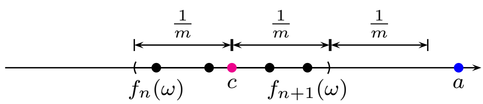

Рис. 1.6: Доказательство теоремы 1.3.15 (b).

Итак, было доказано, что существует $m \in \mathbb{N}$ и существует $n \in \mathbb{N}$ такие, что для всех $k \geq n$ имеем, что $\omega \in \left\{f_k < a - \frac{1}{m}\right\}$. Это означает, что ω принадлежит множеству в правой части (1.16).

Наоборот, если ω принадлежит множеству в правой части (1.16), то существует такое $m \in \mathbb{N}$, что можно найти $n \in \mathbb{N}$, для которого $w \in \left\{f_k < a - \frac{1}{m}\right\}$, т.е. $f_k(\omega) < a - \frac{1}{m}$ для всех $k > n$. Но тогда $f(\omega) = \lim_{k\to\infty} f_k(\omega) \leq a - \frac{1}{m} < a$, и, следовательно, $\omega \in \{f < a\}$.

Теперь измеримость множества $\{f < a\}$ непосредственно следует из (1.16).

(c) Поскольку $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, где

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k,$$

то измеримость s_n для каждого $n \in \mathbb{N}$ следует из теоремы 1.3.13, а измеримость s следует из пункта **(b)**.

$\square$

Простые функции

Определение 1.3.16. Функция $f \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если она принимает конечное количество значений.

Множество простых функций $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ будем обозначать через $\mathcal{S}$. Множество простых функций $f\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ будем обозначать через $\mathcal{S}_+$.

Пример 1.3.17.

1. Для произвольного $A \subset \Omega$ функция 1_A является простой.

   Действительно, функция 1_A принимает только два значения, 0 и 1.

2. Пусть $\Omega = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$, и $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Тогда функция

$$f = \sum_{k=1}^n c_k \, 1_{A_k}$$

   является простой.

   Действительно, для $\omega \in \Omega$ имеем, что $\omega \in A_{k_0}$ для некоторого k_0. Тогда

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^n c_k \, 1_{A_k}(\omega) = c_{k_0} \, 1_{A_{k_0}}(\omega) = c_{k_0}.$$

   Таким образом, функция f принимает только конечное количество значений $c_1, \ldots, c_n$ (см. рис. 1.7).

3. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, не является простой.

   Действительно, образом функции f является множество $\mathbb{R}$, которое не есть конечное.

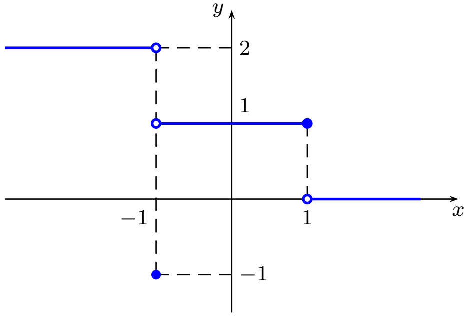

Рис. 1.7: График простой функции $f = 21_{(-\infty,-1)} - 1_{\{-1\}} + 1_{(-1,1]}$.

Утверждение 1.3.18. *Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ является простой. Тогда существует такое разбиение множества Ω,*

$$\Omega = \bigsqcup_{k=1}^{m} A_k, \tag{1.17}$$

и такие элементы $c_k \in \mathbb{R}$, $c_i \neq c_j$ при $i \neq j$, что

$$f = \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{A_k}. \tag{1.18}$$

Доказательство. Пусть f принимает конечное количество значений $\{c_1, \ldots, c_m\}$, причем $c_i \neq c_j$ при $i \neq j$. Положим

$$A_j = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = c_j\}, \qquad j = 1, \ldots, m..$$

Очевидно имеем (1.17), поскольку $\operatorname{Im} f = \{c_1, \ldots, c_m\}$. Если $\omega \in A_j$, то $f(\omega) = c_j$ по определению A_j. С другой стороны,

$$\sum_{k=1}^{m} c_k\, 1_{1_{A_k}}(\omega) = c_j 1_{A_j}(\omega) = c_j.$$

Таким образом имеем равенство (1.18). $\square$

Утверждение 1.3.19. *Пусть f, g — простые функции, и $c \in \mathbb{R}_+$. Тогда $f+g, cf, fg$ также являются простыми функциями. Если $g(\omega) \neq 0$ для всех $\omega \in \Omega$, то функция $\frac{f}{g}$ является простой.*

Доказательство. Если

$$\operatorname{Im} f = \{c_k : k = 1, \dots, m\}, \qquad \operatorname{Im} g = \{d_l : l = 1, \dots, n\},$$

то

$$\begin{gathered}
\operatorname{Im}(f+g) \subset \{c_k + d_l : k = 1, \dots, m;\ l = 1, \dots, n\}, \\
\operatorname{Im}(cf) \subset \{cc_k : k = 1, \dots, m\}, \\
\operatorname{Im}(fg) \subset \{c_k d_l : k = 1, \dots, m;\ l = 1, \dots, n\}, \\
\operatorname{Im}\left(\frac{f}{g}\right) \subset \big\{\frac{c_k}{d_l} : k = 1, \dots, m;\ l = 1, \dots, n\big\}.
\end{gathered}$$

Поэтому, каждое из множеств $\operatorname{Im}(f+g)$, $\operatorname{Im}(cf)$, $\operatorname{Im}(fg)$, $\operatorname{Im}\frac{f}{g}$ конечно. □

Утверждение 1.3.20. *Пусть (Ω, Σ) — измеримое пространство, и f — простая функция. Функция f является измеримой тогда и только тогда, когда $A_k \in \Sigma$ в (1.17) для всех $k = 1, \dots, m$.*

Доказательство. Если все множества A_k, $k = 1, \dots, m$, измеримы, то соответствующие функции 1_{A_k} также измеримы (утверждение 1.3.12). Тогда и их линейная комбинация в правой части (1.18) измерима, т.е. измерима функция f.

Обратно, если f измерима, то, поскольку $A_k = f^{-1}\big(\{c_k\}\big)$ и множества $\{c_k\}$ борелевские, измеримость A_k следует из определения измеримой функции (определение 1.3.7). □

Определение 1.3.21. Для $f, f_n \colon \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, положим

$$d_n = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega) - f_n(\omega)|.$$

Если

$$\lim_{n \to \infty} d_n = 0,$$

то последовательность функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *сходящейся* к функции f *равномерно на* Ω, что обозначается $f_n \underset{\Omega}{\rightrightarrows} f$.

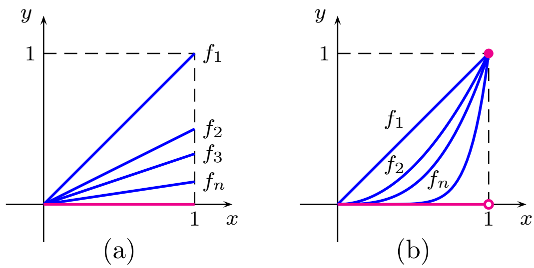

Рис. 1.8: Последовательности функций на $[0,1]$: (a) $f_n(x) = \frac{1}{n}x$; (b) $f_n(x) = x^n$.

Пример 1.3.22.

1. Пусть $\Omega = [0,1]$, и $f_n(x) = \frac{1}{n}x$ (рис. 1.8 (a)). Положим $f = 0$. Тогда
$$d_n = \sup_{x\in[0,1]} \left|0 - \frac{1}{n}x\right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
и $f_n \underset{\Omega}{\rightrightarrows} 0$.

2. Пусть $\Omega = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ (рис. 1.8 (b)). Положим $f = 1_{\{1\}}$. Тогда
$$d_n = \sup_{x\in[0,1]} |1_{\{1\}}(x) - x^n| = 1,$$
и последовательность (f_n) не сходится равномерно к f на $[0,1]$ (хотя $f_n(x) \to f(x)$ для каждого $x \in [0,1]$).

Теорема 1.3.23 (об аппроксимации простыми функциями)**.** *Пусть* (Ω, Σ) *— измеримое пространство, и* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *измерима. Если* f *ограничена на* Ω*, то существует последовательность* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *измеримых простых функций* $f_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *таких, что* $f_n \underset{\Omega}{\rightrightarrows} f$*.*

Доказательство. Поскольку f является ограниченной, то существуют такие $c, d \in \mathbb{R}$, что $\operatorname{Im} f \subset [c, d)$. Возьмем $n \in \mathbb{N}$, и построим простую функцию f_n.

Для этого разделим множество $[c, d)$ точками $y_k = c + \frac{d-c}{n}k$, $k = 0, \dots, n$, т.е

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d,$$

где $y_k - y_{k-1} = \frac{d-c}{n}$ для всех $k = 1, \dots, n$. Рассмотрим множества

$$A_k = \{\omega \in \Omega : y_{k-1} \leq f(\omega) < y_k\}, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Очевидно, что $A_k \cap A_l = \emptyset$, если $k \neq l$. А, поскольку $\operatorname{Im} f \subset [c, d)$, то $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$, т.е. имеем разбиение

$$\Omega = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Положим

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} 1_{A_k}.$$

Возьмем произвольную точку $w \in \Omega$. Тогда $\omega \in A_{k_0}$ для некоторого k_0, и, следовательно,

$$f(\omega) - f_n(\omega) = f(\omega) - \sum_{k=1}^{n} y_k 1_{A_k}(\omega) = f(\omega) - y_{k_0-1} \in \Big[0, \frac{d-c}{n}\Big),$$

поскольку $f(\omega) \in [y_{k_0-1}, y_{k_0})$ по определению A_{k_0}. Это означает, что

$$\sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega) - f_n(\omega)| \leq \frac{d-c}{n},$$

и $f_n \rightrightarrows f$ на Ω при $n \to \infty$. □

Пример 1.3.24. $\Omega = [0, 1)$, $f(x) = x$. См. рис. 1.9.

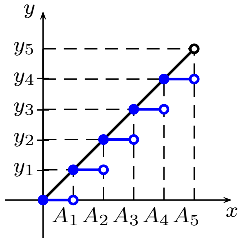

Рис. 1.9: Аппроксимация функции $f(x) = x$ функцией f_5 на $\Omega = [0, 1)$.

1.3.2 Измеримые функции со значениями в $\overline{\mathbb{R}}_+$

Определение 1.3.25. *Борелевской σ-алгеброй $\overline{\mathcal{B}}$ на $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$* называется σ-алгебра на $\overline{\mathbb{R}}_+$, порожденная множествами $[0, a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Пример 1.3.26. Множества $[a, b)$, $\{a\}$, (a, b), $\mathbb{R}_+$, $\{+\infty\}$ являются борелевскими.

Действительно,

$$[a, b) = [0, b) \setminus [0, a),$$

$$\{a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[a, a + \frac{1}{k}\right), (a, b) = [a, b) \setminus \{a\},$$

$$\mathbb{R}_+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} [0, k),$$

$$\{+\infty\} = \overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \mathbb{R}_+.$$

Утверждение 1.3.27. *Борелевская σ-алгебра на $\overline{R}_+$ порождена семейством множеств $[0, a]$, $a \in \mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Поскольку $[0, a] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[0, a + \frac{1}{k}\right)$, то $[0, a] \in \overline{\mathcal{B}}$.

Пусть $\tilde{\overline{B}}$ — σ-алгебра, порожденная множествами $[0, a]$. Поскольку $[0, a] \in \overline{B}$, то $\tilde{\overline{\mathcal{B}}} \subset \overline{\mathcal{B}}$. С другой стороны, $[0, a) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[0, a - \frac{1}{k}\right] \in \tilde{\overline{\mathcal{B}}}$. Поэтому, $\overline{\mathcal{B}} \subset \tilde{\overline{\mathcal{B}}}$, и, следовательно, $\tilde{\overline{\mathcal{B}}} = \overline{\mathcal{B}}$. $\square$

Определение 1.3.28. Пусть (Ω, Σ) — измеримое пространство, $\overline{\mathcal{B}}$ — борелевская σ-алгебра на $\overline{\mathbb{R}}_+$. Функция $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *измеримой*, если измеримо отображение

$$f\colon (\Omega, \Sigma) \to (\overline{R}_+, \overline{\mathcal{B}}).$$

Множество всех измеримых функций $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ на измеримом пространстве (Ω, Σ) обозначается $\overline{\mathcal{M}}(\Sigma)$.

Теорема 1.3.29. *Пусть* (Ω, Σ) *— измеримое пространство, и* $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$*. Следующие условия эквивалентны:*

1. f *измерима;*
2. *все множества* $\{f < a\}$*,* $a \in \mathbb{R}_+$*, измеримы;*
3. *все множества* $\{f \leq a\}$*,* $a \in \mathbb{R}_+$*, измеримы.*

Доказательство. Поскольку σ-алгебра на $\overline{\mathbb{R}}_+$ порождается множествами $[0, a)$ по определению или множествами $[0, a]$ согласно утверждению 1.3.27, то эквивалентность всех утверждений следует из утверждения 1.3.6. $\square$

Теорема 1.3.30. *Пусть* (Ω, Σ) *— измеримое пространство. Пусть* $f, g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *измеримы, и* $c \in \mathbb{R}_+$*. Тогда функции* $f + g$*,* cf*,* fg*,* $\frac{f}{g}$ *также измеримы.*

Доказательство. Доказательство повторяет доказательство теоремы 1.3.13 с использованием теоремы 1.3.29. $\square$

Задачи

КР: 293 (2, 4), 293.3,
302 (3), 306, 307.

ДР: 293 (3, 5), 296, 295, 298.1, 298.2, 298.3, 298.4
301, 300, 304, 305.

Теорема 1.3.31. *Пусть (Ω,Σ) — измеримое пространство. Пусть $(f_k)_{k=1}^\infty$ — последовательность измеримых функций $\Omega\to\overline{\mathbb{R}}_+$. Тогда:*

1. *измеримыми являются функции $\Omega\to\overline{\mathbb{R}}_+$,*
$$\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k, \qquad \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k;$$
2. *если $\lim_{k\to\infty} f_k(\omega)$ существует в $\overline{\mathbb{R}}_+$ для всех $\omega\in\Omega$, то $f=\lim_{k\to\infty} f_k$ измерима;*
3. *функция $f=\sum_{k=1}^\infty f_k$ измерима.*

Доказательство. Доказательство повторяет доказательство теоремы 1.3.15. □

Теорема 1.3.32 (об аппроксимации простыми функциями)**.** *Пусть (Ω,Σ) — измеримое пространство, и $f\colon\Omega\to\overline{\mathbb{R}}_+$ измерима. Тогда существует последовательность $(f_n)_{n=1}^\infty$, $f_n\colon\Omega\to\mathbb{R}$, измеримых простых функций таких, что $f_n\uparrow f$.*

Доказательство. Зададимся $n\in\mathbb{N}$, и построим простую функцию $f_n\in\mathcal{S}_+$. Положим
$$A_\infty^n=\{\omega\in\Omega : f(\omega)\geq n\},$$
$$f_n(\omega)=n, \qquad \omega\in A_\infty^n.$$

Имеем, что $f(\omega)<n$ для всех $\omega\in\Omega\setminus A_\infty^n$. Разделим отрезок $[0,n]$ на отрезки длиной $\frac{1}{2^{n-1}}$ точками $y_k^n=\frac{k}{2^{n-1}}$, $k=0,\dots,n2^{n-1}$. Теперь положим
$$A_k^n=\{\omega\in\Omega : y_{k-1}^n\leq f(\omega)<y_k^n\}, \qquad k=1,\dots,n2^{n-1},$$
$$f_n(\omega)=y_{k-1}^n, \qquad \omega\in A_k^n.$$

Очевидно, что
$$\Omega=A_\infty^n\sqcup\Big(\bigsqcup_{k=1}^{n2^{n-1}} A_k^n\Big),$$

$$f_n = n1_{A^n_\infty} + \sum_{k=1}^{n2^{n-1}} y^n_{k-1} 1_{A^n_k},$$

см. рис. 1.10.

Докажем, что $f_n(\omega) \le f_{n+1}(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$. Для этого заметим, что $y^n_k = \frac{k}{2^{n-1}} = \frac{2k}{2^n} = y^{n+1}_{2k}$. Таким образом,

$$\{y^n_k : k = 0, \dots, n2^{n-1}\} \subset \{y^{n+1}_k : k = 0, \dots, (n+1)2^n\}.$$

Предположим, что $f(\omega) < n$, т.е. $y^n_k \le f(\omega) < y^n_{k+1}$ для некоторого k. Имеем

$$y^n_k = y^{n+1}_{2k} \le f(\omega) < y^{n+1}_{2k+2} = y^n_{k+1}.$$

Тогда

$$y^{n+1}_{2k} \le f(\omega) < y^{n+1}_{2k+1} \qquad \text{либо} \qquad y^{n+1}_{2k+1} \le f(\omega) < y^{n+1}_{2k+1}.$$

В первом случае,

$$f_{n+1}(\omega) = y^{n+1}_{2k} = y^n_k = f_n(\omega)$$

а во втором случае,

$$f_{n+1}(\omega) = y^{n+1}_{2k+1} > y^{n+1}_{2k} = y^n_k = f_n(\omega).$$

Таким образом имеем, что $f_{n+1}(\omega) \ge f_n(\omega)$.

Предположим, что $f(\omega) \ge n$. Тогда

$$f_n(\omega) = n = y^n_{n2^{n-1}} = y^{n+1}_{n2^n},$$

а

$$f_{n+1}(\omega) = \begin{cases} y^{n+1}_{n2^n}, & f(\omega) < y^{n+1}_{n2^n+1}, \\ y^{n+1}_k (k > n2^n + 1), & f(\omega) \ge y^{n+1}_{n2^n+1}. \end{cases}$$

В любом случае, $f_n(\omega) \le f_{n+1}(\omega)$.

Теперь докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$$

для любого $\omega \in \Omega$.

Если $f(\omega) = +\infty$, то $f_n(\omega) = n$, и

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty = f(\omega).$$

Если $f(\omega) \neq +\infty$, то для $n > f(\omega)$ имеем, что

$$f_n(\omega) = y_k^n \leq f(\omega) < y_{k+1}^n$$

для некоторого k, причем

$$0 \leq f(\omega) - f_n(\omega) = f(\omega) - y_k^n < y_{k+1}^n - y_k^n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} (f(\omega) - f_n(\omega) = 0,$$

что и заканчивает доказательство. $\square$

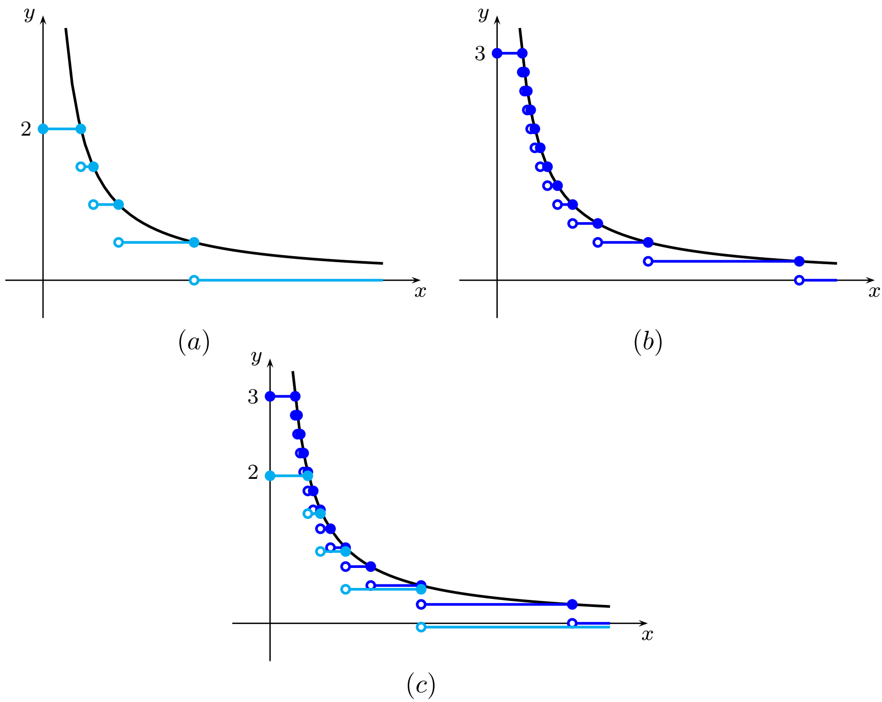

Рис. 1.10: Аппроксимация функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на $\Omega = [0, +\infty)$ простыми функциями: (a) f_2; (b) f_3; (c) f_2 и f_3.

1.4 Интеграл Лебега

1.4.1 Интеграл от простой неотрицательной функции

Определение 1.4.1. Пусть (Ω, Σ) — измеримое пространство, и $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — мера на σ-алгебре Σ. Тогда тройка (Ω, Σ, μ) называется *измеримым пространством с мерой.* При этом, всякое множество $A \in \Sigma$ называется μ-измеримым, а измеримая функция

$$f\colon (\Omega, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \qquad \text{или} \qquad f\colon (\Omega, \Sigma) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \overline{\mathcal{B}})$$

называется *μ-измеримой.*

Определение 1.4.2. Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство с мерой. Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ — простая μ-измеримая функция,

$$f = \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{A_k}, \qquad c_k \geq 0, \qquad \Omega = \bigsqcup_{k=1}^{m} A_k. \tag{1.19}$$

Интегралом от функции f *по мере* μ называется величина

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) = \sum_{k=1}^{m} c_k\, \mu(A_k), \tag{1.20}$$

где

$$c_k\mu(A_k) = \begin{cases} c_k\mu(A_k), & \mu(A_k) < +\infty, \\ 0, & c_k = 0,\ \mu(A_k) = +\infty, \\ +\infty, & c_k > 0,\ \mu(A_k) = +\infty. \end{cases}$$

Если $\int_\Omega f\, d\mu < +\infty$, то интеграл называется *сходящимся*, а функция f называется *интегрируемой.*

Пример 1.4.3. 1. Пусть $\Omega = \mathbb{R}$, λ — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Если

$$f = 1_{[0,1)} = 1 \cdot 1_{[0,1)} + 0 \cdot 1_{[0,1)^c},$$

то

$$\int_\Omega 1_{[0,1)}\, d\lambda = 1 \cdot \lambda\big([0,1)\big] + 0 \cdot \lambda\big([0,1)^c\big) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (+\infty) = 1,$$

см. рис. 1.11 (а). Функция f является интегрируемой.

2. Пусть $\Omega = \mathbb{R}$, λ — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Если

$$f = 1_{[0,+\infty)} = 0 \cdot 1_{(-\infty,0)} + 1 \cdot 1_{[0,+\infty)},$$

то

$$\int_\Omega 1_{[0,+\infty)}\, d\lambda = 0 \cdot \lambda\big((-\infty, 0)\big) + 1 \cdot \lambda\big([0, +\infty)\big) = 0 + \infty = +\infty,$$

см. рис. 1.11 (b). Функция $1_{[0,+\infty)}$ не является интегрируемой.

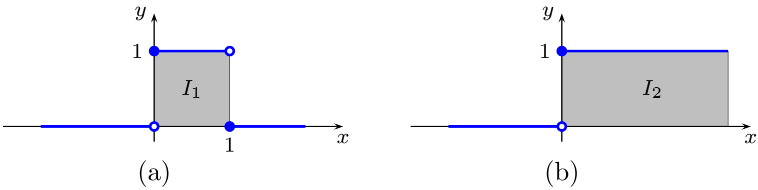

Рис. 1.11: Интеграл от простой функции: (a) $I_1 = \int_\mathbb{R} 1_{[0,1)}\, d\lambda$; (b) $I_2 = \int_\mathbb{R} 1_{[0,+\infty)}\, d\lambda$.

Теорема 1.4.4. *Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство с мерой, $f, g \in \mathcal{S}_+$ — простые μ-измеримые функции, и $c \in \mathbb{R}_+$. Тогда:*

(a) $\int_\Omega 0\, d\mu = 0$;

(b) $\int_\Omega f\, d\mu \geq 0$;

(c) $\int_\Omega 1_A\, d\mu = \mu(A)$ *для* $A \in \Sigma$;

(d) $\int_\Omega (f + g)\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu$;

(e) $\int_\Omega cf\, d\mu = c \int_\Omega f\, d\mu$.

Доказательство. **(a)** Нулевая функция является простой: $0 = 1_\emptyset$. По определению интеграла

$$\int_\Omega 0\, d\mu = \int_\Omega 1_\emptyset\, d\mu = \mu(\emptyset) = 0.$$

(b) Поскольку простая функция (1.19) является неотрицательной, то $c_k \geq 0$. А, поскольку $\mu(A_k) \geq 0$, то

$$\int_\Omega f\,d\mu = \sum_{k=1}^m c_k \mu(A_k) \geq 0.$$

(c) Следует из определения интеграла.

(d) Рассмотрим представление (1.19) для функций f и g:

$$f = \sum_{k=1}^m c_k\, 1_{A_k}, \qquad \Omega = \bigsqcup_{k=1}^m A_k,$$
$$g = \sum_{l=1}^n d_l\, 1_{B_l}, \qquad \Omega = \bigsqcup_{l=1}^n B_l.$$

Тогда имеем

$$A_k = A_k \cap \Omega = A_k \cap \left(\bigsqcup_{l=1}^n B_l\right) = \bigsqcup_{l=1}^n (A_k \cap B_l),$$

и, следовательно,

$$1_{A_k} = \sum_{l=1}^n 1_{A_k \cap B_l},$$

откуда следует, что

$$f = \sum_{k=1}^m c_k \sum_{l=1}^n 1_{A_k \cap B_l} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n c_k 1_{A_k \cap B_l}.$$

Аналогично имеем представление

$$g = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n d_l 1_{A_k \cap B_l}.$$

Следовательно,

$$f + g = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n (c_k + d_l) 1_{A_k \cap B_l}.$$

Заметим, что

$$\big(A_{k_1}\cap B_{l_1}\big)\cap\big(A_{k_2}\cap B_{l_2}\big)=\emptyset,\qquad (k_1,l_1)\neq(k_2,l_2),$$

и

$$\bigcup_{k=1}^{m}\bigcup_{l=1}^{n}(A_k\cap B_l)=\Omega.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (f{+}g)\,d\mu &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}(c_k+d_l)\,\mu(A_k\cap B_l) = \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}c_k\,\mu(A_k\cap B_l)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}d_l\,\mu(A_k\cap B_l) = \\
&= \sum_{k=1}^{m}c_k\sum_{l=1}^{n}\mu(A_k\cap B_l)+\sum_{l=1}^{n}d_l\sum_{k=1}^{m}\mu(A_k\cap B_l) = \\
&= \sum_{k=1}^{m}c_k\,\mu\Big(\bigcup_{l=1}^{n}(A_k\cap B_l)\Big)+\sum_{l=1}^{n}d_l\,\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{m}(A_k\cap B_l)\Big) = \\
&= \sum_{k=1}^{m}c_k\,\mu\Big(A_k\cap(\bigcup_{l=1}^{n}B_l)\Big)+\sum_{l=1}^{n}d_l\,\mu\Big((\bigcup_{k=1}^{m}A_k)\cap B_l\Big) = \\
&= \sum_{k=1}^{m}c_k\,\mu(A_k\cap\Omega)+\sum_{l=1}^{n}d_l\,\mu(\Omega\cap B_l) = \\
&= \sum_{k=1}^{m}c_k\,\mu(A_k)+\sum_{l=1}^{n}d_l\mu(B_l) = \\
&= \int_\Omega f\,d\mu+\int_\Omega g\,d\mu.
\end{aligned}$$

(e) Если

$$f=\sum_{k=1}^{m}c_k 1_{A_k},$$

то

$$cf = \sum_{k=1}^{m} cc_k 1_{A_k},$$

и

$$\int_\Omega cf\,d\mu = \sum_{k=1}^{m} cc_k\,\mu(A_k) = c\sum_{k=1}^{m} c_k\mu(A_k) = c\int_\Omega f\,d\mu.$$

$\square$

Следствие 1.4.5. *Если $f, g \in \mathcal{S}$ и $f \leq g$, то $\int_\Omega f\,d\mu \leq \int_\Omega g\,d\mu$.*

Доказательство. Действительно, функция $g - f$ является простой и неотрицательной. Поэтому

$$0 \leq \int_\Omega (g - f)\,d\mu = \int_\Omega g\,d\mu - \int_\Omega f\,d\mu,$$

т.е. $\int_\Omega f\,d\mu \leq \int_\Omega g\,d\mu$. $\square$

1.4.2 Интеграл от неотрицательной функции

Определение 1.4.6. Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство с мерой, и $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — μ-измеримая функция. *Интегралом* от f *по мере* μ называется элемент $I \in \overline{\mathbb{R}}_+$, определяемый как

$$I = \int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega f(\omega)\,d\mu(\omega) = \sup_{h\in\mathcal{S}_+,\, h\leq f} \int_\Omega h\,d\mu.$$

Если $I \in \mathbb{R}$, то функция f называется *интегрируемой.*

Замечание 1.4.7. В следствии 1.4.13 будет показано, что

$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_k\,dm,$$

где (g_k) — последовательность таких простых неотрицательных измеримых функций, что $g_k \uparrow f$.

Пример 1.4.8. Пусть $\Omega = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu(A) = |A|$, $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(k) = \frac{1}{k^2}$, т.е.

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} 1_{\{k\}}.$$

Для $m \in \mathbb{N}$ положим

$$g_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} 1_{\{k\}}.$$

Тогда $g_m \in \mathcal{S}_+$, $g_m \uparrow f$, и

$$\int_{\mathbb{N}} g_m \, d\mu = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}.$$

Поэтому,

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{N}} g_m \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Пример 1.4.9. Пусть $\Omega = [0,1)$, $\Sigma = \mathcal{B}$, $\mu = \lambda$, $f(x) = x$.

Построим последовательность простых измеримых функций g_k, $g_k \uparrow f$.

Пример 1.4.10. $\Omega = [0,1)$, $\mu = \lambda$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Утверждение 1.4.11. *Пусть* (Ω, Σ, μ) *— измеримое пространство с мерой,* $f, g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *—* μ*-измеримые функции, причем* $f \leq g$*. Тогда*

$$\int_{\Omega} f \, d\mu \leq \int_{\Omega} g \, d\mu.$$

Доказательство. Пусть

$$\mathcal{S}_+(f) = \{h \in \mathcal{S}_+ : h \leq f\}, \qquad \mathcal{S}_+(g) = \{h \in \mathcal{S}_+ : h \leq g\}.$$

Поскольку $f \leq g$, то $\mathcal{S}_+(f) \subset \mathcal{S}_+(g)$. Таким образом,

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \sup_{h\in\mathcal{S}_+(f)} \int_{\Omega} h \, d\mu \leq \sup_{h\in\mathcal{S}_+(g)} \int_{\Omega} h \, d\mu = \int_{\Omega} g \, d\mu.$$

$\square$

Теорема 1.4.12 (Беппо Леви)**.** *Пусть* (Ω, Σ, μ) *— измеримое пространство с мерой. Пусть* $f, f_k \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $k \in \mathbb{N}$, *—* μ*-измеримые функции, причем* $f_k \uparrow f$*. Тогда*

$$\int_\Omega f_k \, d\mu \quad \uparrow \quad \int_\Omega f \, d\mu.$$

Доказательство. Пусть $I_k = \int_\Omega f_k \, d\mu$. Поскольку $f_1 \leq f_2 < \ldots$ в силу условия теоремы, имеем, что $I_1 \leq I_2 \leq \ldots$ согласно утверждению 1.4.11. Поэтому, существует

$$I_\infty = \lim_{k \to \infty} I_k \leq I, \tag{1.21}$$

причем $I_k \uparrow I_\infty$. Докажем, что $I_\infty = I$, доказав, что $I_\infty \geq I$. Для этого возьмем произвольную функцию $h \in \mathcal{S}_+$, $h \leq f$, и число $c \in (0, 1)$. Тогда $ch \in \mathcal{S}_+$ и

$$ch \leq h \leq f.$$

Рассмотрим множество

$$B_k = \{\omega \in \Omega : f_k(\omega) \geq ch(\omega)\},$$

и докажем, что

$$B_k \subset B_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}, \qquad \text{и} \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \Omega. \tag{1.22}$$

Поскольку $f_{k+1} \geq f_k$, то для $\omega \in B_k$ имеем, что $f_{k+1}(\omega) \geq f_k(\omega) \geq ch(\omega)$ и $\omega \in B_{k+1}$, т.е. $B_k \subset B_{k+1}$, что доказывает первую часть (1.22).

Для доказательства второй части (1.22) возьмем произвольное $\omega \in \Omega$. Если $f(\omega) = 0$, то в силу неотрицательности всех функций, имеем

$$0 \leq f_k(\omega) \leq f(\omega) = 0, \qquad 0 \leq ch(\omega) \leq h(\omega) \leq f(\omega) = 0,$$

т.е. $f_k(\omega) = ch(\omega) = 0$, и $\omega \in B_k$ для всех k, а значит $\omega \in \bigcup_{k=1}^\infty B_k$.

Если $f(\omega) > 0$, то, поскольку $h(\omega) \leq f(\omega)$, имеем, что $ch(\omega) < f(\omega)$. А, поскольку $f_k(\omega) \to f(\omega)$ по условию, то $f_k(\omega) \in \big(ch(\omega), f(\omega)\big)$

для достаточно больших k. Таким образом, для этих k будем иметь, что $\omega \in B_k$, и, следовательно, $\omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, что и заканчивает доказательство (1.22).

Рассмотрим теперь функции f_k, $f_k \cdot 1_{B_k}$ и $ch \cdot 1_{B_k}$. Поскольку

$$(f_k \cdot 1_{B_k})(\omega) = \begin{cases} f_k(\omega), & \omega \in B_k, \\ 0, & \omega \notin B_k, \end{cases} \quad (ch \cdot 1_{B_k})(\omega) = \begin{cases} ch(\omega), & \omega \in B_k, \\ 0, & \omega \notin B_k, \end{cases}$$

и $f_k(\omega) \geq ch(\omega)$, если $\omega \in B_k$, по определению множества B_k, то

$$f_k \geq f_k \cdot 1_{B_k} \geq ch \cdot 1_{B_k},$$

и, следовательно,

$$I_k = \int_\Omega f_k \, d\mu \geq \int_\Omega ch \cdot 1_{B_k} \, d\mu. \tag{1.23}$$

Функция h — простая. Пусть

$$h = \sum_{l=1}^{n} c_l 1_{A_l}.$$

Тогда

$$ch \cdot 1_{B_k} = \sum_{l=1}^{n} cc_l 1_{A_k} \cdot 1_{B_k} = \sum_{l=1}^{n} cc_l 1_{A_l \cap B_k},$$

и

$$\int_\Omega ch \cdot 1_{B_k} \, d\mu = c \sum_{l=1}^{n} c_l \, \mu(A_l \cap B_k). \tag{1.24}$$

Поскольку $B_k \subset B_{k+1}$, а значит и $A_l \cap B_k \subset A_l \cap B_{k+1}$ для всех l, и $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \Omega$ (см. (1.22)), используя монотонность меры по возрастанию (утверждение 1.2.13), имеем

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_l \cap B_k) = \mu\Big(A_l \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) = \mu(A_l \cap \Omega) = \mu(A_l).$$

Таким образом, из (1.24) имеем:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_\Omega ch\cdot 1_{B_k}\,d\mu &= \lim_{k\to\infty} c\sum_{l=1}^n c_l\mu(A_l\cap B_k) = \\ &= c\sum_{l=1}^n c_l\lim_{k\to\infty}\mu(A_l\cap B_k) = c\sum_{l=1}^n c_l\mu(A_l) = \\ &= c\int_\Omega h\,d\mu.\end{aligned}$$

Теперь, используя (1.23), имеем:

$$I_\infty = \lim_{k\to\infty} \geq \lim_{k\to\infty}\int_\Omega ch\cdot 1_{B_k}\,d\mu = c\int_\Omega h\,d\mu.$$

Это неравенство верно для всех $c\in(0,1)$. Поэтому,

$$I_\infty \geq \lim_{c\to 1} c\int_\Omega h\,d\mu = \int_\Omega h\,d\mu.$$

А это неравенство верно для всех $h\in\mathcal{S}_+$, $h\leq f$. Поэтому,

$$I_\infty \geq \sup_{h\in\mathcal{S}_+,\,h\leq f}\int_\Omega h\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu = I.$$

Это неравенство вместе с (1.21) дает $I_\infty = I$, что и заканчивает доказательство. $\square$

Следствие 1.4.13. *Пусть (Ω,Σ,μ) — измеримое пространство с мерой, $f\colon\Omega\to\overline{\mathbb{R}}_+$ — μ-измеримая функция, и $(g_k)_{k=1}^\infty$ — такая последовательность функций $g_k\in\mathcal{S}_+$, что $g_k\uparrow f$. Тогда*

$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega g_k\,d\mu.$$

Доказательство. Это является прямым следствием теоремы 1.4.12. $\square$

Теорема 1.4.14 (Фату). *Пусть* (Ω, Σ, μ) — *измеримое пространство с мерой, и* $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ — *произвольная поточечно сходящаяся последовательность измеримых неотрицательных функций,* $f_n \in \overline{\mathcal{M}}_+(\Sigma)$. *Тогда, если* $\int_\Omega f_n \, d\mu \le M$ *для некоторого* $M \in \mathbb{R}_+$ *и всех* $n \in \mathbb{N}$, *то для измеримой функции* $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$ *имеем, что*

$$\int_\Omega f \, d\mu \le M.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ функций на Ω, определенную как

$$u_n(\omega) = \inf_{k\ge n} f_k(\omega).$$

Поскольку функции f_k, $k \in \mathbb{N}$, являются измеримыми, то по теореме 1.3.15 функции u_n также измеримы.

Поскольку для каждого $\omega \in \Omega$

$$\{f_n(\omega), f_{n+1}(\omega), f_{n+2}(\omega), \dots\} \supset \{f_{n+1}(\omega), f_{n+2}(\omega), \dots\},$$

то

$$u_n(\omega) = \inf\bigl\{f_n(\omega), f_{n+1}(\omega), f_{n+2}(\omega), \dots\bigr\} \le \\ \le \inf\bigl\{f_{n+1}(\omega), f_{n+2}(\omega), \dots\bigr\} = u_{n+1}(\omega).$$

Докажем теперь, что $\lim_{n\to\infty} u_n(\omega) = f(\omega)$. Зададимся $\varepsilon > 0$. Поскольку $f_n(\omega) \to f(\omega)$, то существует n_0 для которого $f_k(\omega) \in \bigl(f(\omega) - \frac{\varepsilon}{2}, f(\omega) + \frac{\varepsilon}{2}\bigr)$ для всех $k \ge n_0$. Но тогда для всех $n \ge n_0$ имеем

$$u_n(\omega) = \inf_{k\ge n} f_k(\omega) \in \bigl[f(\omega) - \frac{\varepsilon}{2}, f(\omega) + \frac{\varepsilon}{2}\bigr] \subset (f(\omega) - \varepsilon, f(\omega) + \varepsilon),$$

что и означает, что $\lim_{n\to\infty} u_n(\omega) = f(\omega)$.

Таким образом, имеем, что $u_n \uparrow f$. Поэтому, по теореме Б. Леви 1.4.12 имеем

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu.$$

Но из определения функции u_n следует, что $u_n \le f_n$. Поэтому,

$$\int_\Omega u_n \, d\mu \le \int_\Omega f_n \, d\mu \le M.$$

Следовательно,

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, d\mu \le M.$$

$\square$

Пример 1.4.15. Пусть $\Omega = \mathbb{R}_+$, $\mu = \lambda$ и $f_n = 1_{[n-1,n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\int_{\mathbb{R}_+} f_n \, d\lambda = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме этого,

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = 0, \qquad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

и $\int_\Omega f \, d\lambda = 0 \le 1$.

Теорема 1.4.16. *Пусть* (Ω, Σ, μ) *— измеримое пространство с мерой,* $f, g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *— μ-измеримые функции, и* $c \in \mathbb{R}_+$. *Тогда:*

$$\int_\Omega (f+g) \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu;$$
$$\int_\Omega cf \, d\mu = c \int_\Omega f \, d\mu.$$

Доказательство. Пусть $f_k, g_k \in \mathcal{S}_+$ — последовательности простых функций таких, что $f_k \uparrow f$ и $g_k \uparrow g$. Тогда $(f_k + g_k) \uparrow (f+g)$. Поэтому, используя следствие 1.4.13 и теорему 1.4.4, имеем, что

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f+g) \, d\mu &= \lim_{k\to\infty} \int_\Omega (f_k + g_k) \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \Big(\int_\Omega f_k \, d\mu + \int_\Omega g_k \, d\mu \Big) = \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_\omega f_k \, d\mu + \lim_{k\to\infty} \int_\Omega g_k \, d\mu = \\ &= \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu.\end{aligned}$$

Доказательство второй части утверждения аналогично. $\square$

Свойство «почти всюду»

Определение 1.4.17. Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство с мерой. Будем говорить, что некоторое свойство $P(\omega)$, зависящее от $\omega \in \Omega$, выполняется *μ-почти всюду* (п.в.), если для множества

$$\tilde{A} = \{\omega \in \Omega : P(\omega) \text{ не выполняется}\}$$

имеем

$$\mu(\tilde{A}) = 0.$$

Пример 1.4.18. Пусть $\Omega = \mathbb{R}$, $\mu = \lambda$.

1. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Тогда $1_{\{x\}} = 0$ п.в.
2. $1_{\mathbb{Q}} = 0$ п.в.
3. $\sin^k x \underset{\text{п.в.}}{\longrightarrow} 0$ при $k \to \infty$.

Утверждение 1.4.19. *Пусть $f \in \overline{\mathcal{M}}_+$. Тогда*

$$\int_\Omega f\, d\mu = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = 0 \ \mu\text{–п.в.}.$$

Доказательство. Пусть $f = 0$ п.в. Это означает, что для множества

$$A = \{\omega \in \Omega : f(\omega) > 0\}$$

имеем, что $\mu(A) = 0$. Пусть $h \in \mathcal{S}_+$ такая, что $h \le f$. Поскольку $f(\omega) = 0$ при $\omega \in A^c$ и $0 \le h(\omega) \le f(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$, имеем, что $h(\omega) = 0$ при $w \in A^c$. Таким образом, $h = h \cdot 1_A$. Поэтому, для

$$h = \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{A_k}$$

имеем

$$h = h \cdot 1_A = \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{A_k} \cdot 1_A = \sum_{k=1}^{m} c_k 1_{A_k \cap A},$$

и
$$\int_\Omega h\,d\mu = \sum_{k=1}^m c_k\mu(A_k \cap A).$$
Поскольку $A_k \cap A \subset A$ и $\mu(A) = 0$, то $\mu(A_k \cap A) = 0$ для всех k. Таким образом,
$$\int_\Omega h\,d\mu = 0$$
для произвольной неотрицательной простой функции h, $h \leq f$. По определению
$$\int_\Omega f\,d\mu = \sup_{h\in\mathcal{S}_+,\ h\leq f}\int_\Omega h\,d\mu = 0.$$

Пусть теперь $\int_\Omega f\,d\mu = 0$ и докажем, что $f = 0$ п.в., т.е. $\mu(A) = 0$. Положим
$$A_n = \{\omega \in \Omega : f(\omega) > \frac{1}{n}\},$$
Тогда $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Действительно, очевидно, что $A_n \subset A$ для всех n. Поэтому, $\bigcup_{n=1}^\infty \subset A$. С другой стороны, если $\omega \in A$, т.е. $f(\omega) > 0$, то существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $f(\omega) > \frac{1}{n}$, что означает, что $\omega \in A_n$. Следовательно, $\omega \in \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Итак, $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$.

Кроме того, $A_n \subset A_{n+1}$, поскольку для $\omega \in A_n$ имеем, что $f(\omega) > \frac{1}{n}$, а значит будем иметь, что $f(\omega) > \frac{1}{n+1}$, т.е. $\omega \in A_{n+1}$.

Таким образом, из утверждения 1.2.13 следует, что
$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$
Однако, $\mu(A_n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, поскольку если $\mu(A_{n_0}) > 0$ для некоторого n_0, то так как
$$f \geq f \cdot 1_{A_{n_0}} \geq \frac{1}{n}1_{A_{n_0}},$$
имеем
$$\int_\Omega f\,d\mu \geq \int_\Omega \frac{1}{n}1_{A_{n_0}}\,d\mu = \frac{1}{n}\mu(A_{n_0}) > 0,$$
что противоречит условию. Таким образом, $\mu(A_n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и $\mu(A) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = 0$. $\square$

Утверждение 1.4.20. *Пусть* $f, g \in \overline{\mathcal{M}}_+$.

(a) *Если* $f = g$ μ–п.в., *то* $\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega g\,d\mu$.

(b) *Если* $f \le g$ μ–п.в., *то* $\int_\Omega f\,d\mu \le \int_\Omega g\,d\mu$.

Доказательство. **(a)** Пусть

$$A = \{\omega \in \Omega : f(x) \ne g(x)\}.$$

Поскольку $f = g$ μ–п.в. по условию, то $\mu(A) = 0$. Отсюда следует, что $f \cdot 1_A = 0$ μ–п.в. и $g \cdot 1_A = 0$ μ–п.в.. Поэтому,

$$\int_\Omega f \cdot 1_A\,d\mu = \int_\Omega g \cdot 1_A\,d\mu = 0,$$

и, следовательно,

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega f \cdot (1_A + 1_{A^c})\,d\mu = \int_\Omega f \cdot 1_A\,d\mu + \int_\Omega f \cdot 1_{A^c}\,d\mu = \\ = \int_\Omega f \cdot 1_{A^c}\,d\mu.$$

Аналогично имеем, что

$$\int_\Omega g\,d\mu = \int_\Omega g \cdot 1_{A^c}\,d\mu.$$

Но по определению множества A имеем, что $(f \cdot 1_{A^c})(\omega) = (g \cdot 1_{A^c})(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$. Поэтому,

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega f \cdot 1_{A^c}\,d\mu = \int_\Omega g \cdot 1_{A^c}\,d\mu = \int_\Omega g\,d\mu.$$

(b) Положим

$$B = \{\omega \in \Omega : f(\omega) > g(\omega)\}.$$

Поскольку $f \le g$ μ–п.в. по условию, то $\mu(B) = 0$. Отсюда следует, что $f \cdot 1_B = 0$ μ–п.в. и $g \cdot 1_B = 0$ μ–п.в.. Поэтому,

$$\int_\Omega f \cdot 1_B\,d\mu = \int_\Omega g \cdot 1_B\,d\mu = 0.$$

Как и в п. (a) имеем:

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega f\cdot 1_{B^c}\,d\mu, \qquad \int_\Omega g\,d\mu = \int_\Omega g\cdot 1_{B^c}\,d\mu.$$

Но по определению множества B имеем, что $(f\cdot 1_{B^c})(\omega) \le (g\cdot 1_{B^c})(\omega)$ для всех $\omega\in\Omega$. Поэтому,

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega f\cdot 1_{B^c}\,d\mu \le \int_\Omega g\cdot 1_{B^c}\,d\mu = \int_\Omega g\,d\mu.$$

□

Утверждение 1.4.21 (неравенство Чебышева)**.** *Пусть* $f\in\overline{\mathcal{M}}_+$ *и* $c>0$*. Тогда*

$$\mu\big(\{\omega\in\Omega : f(\omega)\ge c\}\big) \le \frac{1}{c}\int_\Omega f\,d\mu.$$

Доказательство. Положим

$$A = \big\{\omega\in\Omega : f(\omega)\ge c\big\}.$$

Тогда

$$f = f\cdot(1_A + 1_{A^c}) = f\cdot 1_A + f\cdot 1_{A^c} \ge f\cdot 1_A.$$

По определению множества A имеем $f(\omega)\ge c$ для $\omega\in A$, и, следовательно, $f\cdot 1_A \ge c1_A$. Поэтому,

$$\int_\Omega f\,d\mu \ge \int_\Omega f\cdot 1_A\,d\mu \ge \int_\Omega c1_A\,d\mu = c\mu(A).$$

Таким образом,

$$\mu(A) \le \frac{1}{c}\int_\Omega f\,d\mu.$$

□

Утверждение 1.4.22. *Пусть* $f\in\overline{\mathcal{M}}_+$ *и* $\int_\Omega f\,d\mu<\infty$*. Тогда* $f<+\infty$ μ–п.в.

Доказательство. Пусть

$$A = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = +\infty\}.$$

Тогда $n1_A \leq f$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому,

$$\int_\Omega n1_A \, d\mu = n\mu(A) \leq \int_\Omega f \, d\mu < +\infty.$$

Поскольку это неравенство выполняется для всех $n \in \mathbb{N}$, с необходимостью имеем, что $\nu(A) = 0$. □

1.4.3 Интеграл от измеримой функции

Лемма 1.4.23. *Пусть* (Ω, Σ, μ) *— измеримое пространство с мерой, и* $f \in \mathcal{M}(\Sigma)$. *Определим* $f^+, f^- : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *как*

$$f^+(\omega) = \max\{f(\omega), 0\}, \qquad f^-(\omega) = \max\{-f(\omega), 0\},$$

см. рис. 1.12. Тогда $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+$, *и*

$$\begin{cases} f &= f^+ - f^-, \\ |f| &= f^+ + f^-, \end{cases} \qquad \begin{cases} f^+ &= \frac{1}{2}(|f| + f), \\ f^- &= \frac{1}{2}(|f| - f). \end{cases}$$

Также

$$f^+ \leq |f|, \qquad f^- \leq |f|.$$

Доказательство. То, что f^+ и f^- измеримы следует непосредственно из теоремы 1.3.15 и измеримости постоянной функции 0. Их неотрицательность следует из определения.

Для доказательств первой пары формул рассмотрим множества

$$A_+ = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq 0\}, \qquad A_- = \{\omega \in \Omega : f(\omega) < 0\}.$$

Очевидно имеем $A_+ \cup A_- = \Omega$. Поэтому проверим выполнение формул на каждом из множеств.

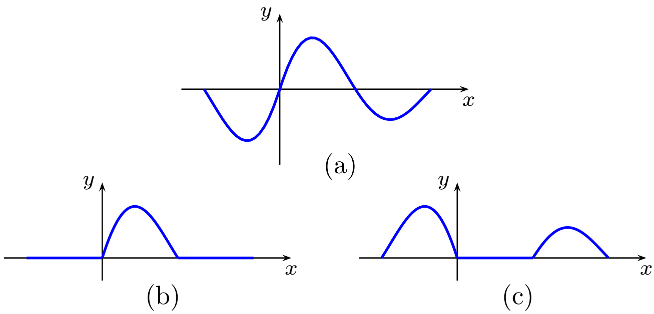

Рис. 1.12: Графики функций: (a) f; (b) f^+; (c) f^-.

Если $\omega \in A_+$, то $f^+(\omega) = f(\omega)$ а $f_-(\omega) = 0$. Поэтому,

$$f^+(\omega) - f^-(\omega) = f(\omega) - 0 = f(\omega),$$
$$f^+(\omega) + f^-(\omega) = f(\omega) + 0 = |f(\omega)|.$$

Если $\omega \in A_-$, то $f^+(\omega) = 0$, $f^-(\omega) = -f(\omega)$, и

$$f^+(\omega) - f^-(\omega) = 0 - (-f(\omega) = f(\omega),$$
$$f^+(\omega) + f^-(\omega) = 0 - f(\omega) = |f(\omega)|.$$

Вторая пара формул получается решением первой системы относительно f^+ и f^-.

Наконец,

$$f^+ = |f^+| = \left|\frac{|f| + f}{2}\right| = \frac{\big||f| + f\big|}{2} \leq \frac{|f| + |f|}{2} = |f|.$$

Для f^- доказательство проводится аналогично. □

Определение 1.4.24. Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство с мерой. Функция $f \in \mathcal{M}(\Sigma)$ называется *интегрируемой относительно меры* μ, если $\int_\Omega |f|\, d\mu < \infty$. В этом случае *интегралом* от функции f по мере μ называется число

$$\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega) = \int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega f^+\, d\mu - \int_\Omega f^-\, d\mu.$$

Множество всех функций, интегрируемых по мере μ, обозначается $\mathcal{L}_1(\Omega, \mu)$ или $\mathcal{L}_1(\mu)$.

Задачи

КР: 309, 311, 316, 317, 319 (1, 2), 321.
ДР: 319 (3), 320, 322.

Утверждение 1.4.25. *Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство с мерой.*

(a) *Если f является интегрируемой, то интегралы $\int_\Omega f^+\,d\mu$ и $\int_\Omega f^-\,d\mu$ являются сходящимися, и $\int_\Omega f\,d\mu \in \mathbb{R}$.*

(b) *Если $f \in \mathcal{M}(\Sigma)$ и $f = 0$ μ–п.в., то f интегрируема и $\int_\Omega f\,d\mu = 0$.*

(c) *Если $f \in \mathcal{M}(\Sigma)$ и $|f| \le g$ для некоторой интегрируемой функции g, то f является интегрируемой.*

(d) *Пусть f интегрируема, а g измерима и ограничена на Ω. Тогда fg также интегрируема.*

Доказательство. **(a)** Как следует из леммы 1.4.23, $f^+ \le |f|$ и $f^- \le |f|$. Поэтому, согласно утверждению 1.4.11, $\int_\Omega f^+\,d\mu < \infty$ и $\int_\Omega f^-\,d\mu < \infty$.

(b) Поскольку $f = 0$ μ–п.в., то $|f| = 0$ μ–п.в., Поэтому, $f^+ = 0$ и $f^- = 0$ μ–п.в.. Таким образом,

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega f^+\,d\mu - \int_\Omega f^-\,d\mu = 0 - 0 = 0.$$

(c) Поскольку $|f| \le g$, а $g = |g|$ является интегрируемой, то, согласно утверждению 1.4.11, имеем

$$\int_\Omega |f|\,d\mu \le \int_\Omega g\,d\mu < \infty.$$

(d) Так как g ограничена, то существует такое $C \in \mathbb{R}_+$, что $fg \le C|f|$. Поскольку $\int_\Omega |f|\,d\mu < \infty$, то $\int_\Omega C|f|\,d\mu < \infty$, а значит fg является интегрируемой согласно (c).

□

Утверждение 1.4.26. *Пусть* $f, g \in \mathcal{L}_1(\mu)$, *и* $c \in \mathbb{R}$. *Тогда*

(a) $f + g \in \mathcal{L}_1(\mu)$, *и*

$$\int_\Omega (f+g)\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu + \int_\Omega g\,d\mu;$$

(b) $cf \in \mathcal{L}_1(\mu)$, *и*

$$\int_\Omega cf\,d\mu = c\int_\Omega f\,d\mu.$$

Доказательство. **(a)** Поскольку $|f+g| \le |f| + |g|$, то, используя утверждение 1.4.11 а затем теорему 1.4.16, имеем

$$\int_\Omega |f+g|\,d\mu \le \int_\Omega \big(|f| + |g|\big)\,d\mu = \int_\Omega |f|\,d\mu + \int_\Omega |g|\,d\mu < \infty.$$

Для доказательства первого равенства запишем

$$f + g = (f+g)^+ - (f+g)^-,$$
$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Откуда имеем

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

или

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+.$$

Следовательно, используя теорему 1.4.16, получим

$$\int_\Omega (f+g)^+\,d\mu + \int_\Omega f^-\,d\mu + \int_\Omega g^-\,d\mu =$$

$$= \int_\Omega (f+g)^- \, d\mu + \int_\Omega f^+ \, d\mu + \int_\Omega g^+ \, d\mu.$$

Отсюда следует, что

$$\int_\Omega (f+g)\, d\mu = \int_\Omega (f+g)^+ \, d\mu - \int_\Omega (f+g)^- \, d\mu =$$
$$= \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu + \int_\Omega g^+ \, d\mu - \int_\Omega g^- \, d\mu =$$
$$= \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu.$$

(b) Поскольку $|cf| = |c|\,|f|$, $\int_\Omega |cf|\, d\mu < \infty$, т.е. $cf \in \mathcal{L}_1(\mu)$.

Если $c \geq 0$, то $(cf)^+ = cf^+$, $(cf)^- = cf^-$. Поэтому,

$$\int_\Omega cf \, d\mu = \int_\Omega (cf)^+ \, d\mu - \int_\Omega (cf)^- \, d\mu =$$
$$= \int_\Omega cf^+ \, d\mu - \int_\Omega cf^- \, d\mu = c\int_\Omega f^+ \, d\mu - c\int_\Omega f^- \, d\mu =$$
$$= c\Big(\int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu\Big) = c\int_\Omega f \, d\mu.$$

Если $c = -1$, то $(-f)^+ = f^-$, а $(-f)^- = f^+$. Поэтому,

$$\int_\Omega (-f)\, d\mu = \int_\Omega f^- \, d\mu - \int_\Omega f^+ \, d\mu = -\Big(\int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu\Big) =$$
$$= -\int_\Omega f \, d\mu.$$

Если $c < 0$, то $c = -(-c)$, где $-c > 0$, и

$$\int_\Omega cf \, d\mu = \int_\Omega \big(-(-c)\big) f \, d\mu = -\int_\Omega (-c) f \, d\mu =$$
$$= -(-c)\int_\Omega f \, d\mu = c\int_\Omega f \, d\mu.$$

□

Утверждение 1.4.27. *Пусть $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$. Тогда*

$$\Big|\int_\Omega f\,d\mu\Big| \le \int_\Omega |f|\,d\mu.$$

Доказательство. Действительно,

$$\Big|\int_\Omega f\,d\mu\Big| = \Big|\int_\Omega f^+\,d\mu - \int_\Omega f^-\,d\mu\Big| \le \Big|\int_\Omega f^+\,d\mu\Big| + \Big|\int_\Omega f^-\,d\mu\Big| =$$
$$= \int_\Omega f^+\,d\mu + \int_\Omega f^-\,d\mu = \int_\Omega (f^+ + f^-)\,d\mu = \int_\Omega |f|\,d\mu.$$

□

Лемма 1.4.28. *Пусть (f_n) — последовательность измеримых функций, и $f_n(\omega) \to f(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$. Положим*

$$u_n(\omega) = \inf_{k\ge n} f_k(\omega), \qquad v_n(\omega) = \sup_{k\ge n} f_k(\omega), \qquad w_n = v_n - u_n. \quad (1.25)$$

Тогда $u_n \uparrow f$, $v_n \downarrow f$, $w_n \downarrow 0$.

Доказательство. Поскольку функции f_k, $k \in \mathbb{N}$, являются измеримыми, то по теореме 1.3.15 функции u_n, v_n, а значит и функция w_n, также измеримы.

Поскольку для каждого $\omega \in \Omega$

$$\{f_n(\omega), f_{n+1}(\omega), f_{n+2}(\omega), \ldots\} \supset \{f_{n+1}(\omega), f_{n+2}(\omega), \ldots\},$$

то

$$u_n(\omega) = \inf\{f_n(\omega), f_{n+1}(\omega), f_{n+2}(\omega), \ldots\} \le$$
$$\le \inf\{f_{n+1}(\omega), f_{n+2}(\omega), \ldots\} = u_{n+1}(\omega)$$

и

$$v_n(\omega) = \sup\{f_n(\omega), f_{n+1}(\omega), f_{n+2}(\omega), \ldots\} \ge$$
$$\ge \sup\{f_{n+1}(\omega), f_{n+2}(\omega), \ldots\} = v_{n+1}(\omega).$$

Кроме того, очевидно, что $u_n(\omega) \leq v_n(\omega)$, т.е. $w_n(\omega) \geq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и что $w_n(\omega) \geq w_{n+1}(\omega)$. Таким образом имеем:

$$u_n(\omega) \leq u_{n+1}(\omega), \qquad v_n(\omega) \geq v_{n+1}(\omega), \qquad w_n(\omega) \geq w_{n+1}(\omega) \geq 0.$$

Докажем теперь, что $\lim_{n\to\infty} u_n(\omega) = f(\omega)$. Зададимся $\varepsilon > 0$. Поскольку $f_n(\omega) \to f(\omega)$, то существует n_0 для которого $f_k(\omega) \in \big(f(\omega) - \frac{\varepsilon}{2}, f(\omega) + \frac{\varepsilon}{2}\big)$ для всех $k \geq n_0$. Но тогда для всех $n \geq n_0$ имеем

$$u_n(\omega) = \inf_{k\geq n} f_k(\omega) \in \Big[f(\omega) - \frac{\varepsilon}{2}, f(\omega) + \frac{\varepsilon}{2}\Big] \subset (f(\omega) - \varepsilon, f(\omega) + \varepsilon),$$

что и означает, что $\lim_{n\to\infty} u_n(\omega) = f(\omega)$.

Доказательство того, что $\lim_{n\to\infty} v_n(\omega) = f(\omega)$ проводится аналогично. $\square$

Теорема 1.4.29 (Лебега об ограниченной сходимости)**.** *Пусть* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность интегрируемых функций таких, что*

1) $f_n \to f$ *μ-п.в. для некоторой измеримой функции* f*;*
2) *существует интегрируемая функция* g *такая, что* $|f_n| \leq g$ *μ-п.в. для всех* $n \in \mathbb{N}$.

Тогда f *является интегрируемой, и*

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Доказательство. Покажем сначала, что можно предполагать без потери общности, что $f_n(\omega) \to f(\omega)$ и $|f_n(\omega) \leq g(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$. Действительно, пусть

$$A = \{\omega \in \Omega : f_n(\omega) \not\to f(\omega)\}, \qquad B_n = \{\omega \in \Omega : |f_n(\omega)| > g(\omega)\}.$$

Тогда $\mu(A) = 0$, и $\mu(B_n) = 0$ для каждого n по условию теоремы. Поэтому, используя субаддитивность меры (утверждение 1.2.11), имеем, что $C = A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ является множеством меры 0, поскольку

$$\mu(C) = \mu\big(A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big) \le \mu(A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = 0.$$

А, поскольку,

$$(1_{C^c} f_n)(\omega) \to (1_{C^c} f)(\omega), \qquad \text{и} \qquad |1_{C^c} f_n|(\omega) \le 1_{C^c} g(\omega)$$

для всех $\omega \in \Omega$, и

$$\int_{\Omega} f_n \, d\mu = \int_{\Omega} 1_{C^c} f_n \, d\mu, \qquad \int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} 1_{C^c} f \, d\mu,$$

можно заменить функции f_n, f и g на $1_{C^c} f_n$, $1_{C^c} f$ и $1_{C^c} g$, соответственно.

Итак, будем доказывать теорему в предположении, что для всех $\omega \in \Omega$ имеем: $f_n(\omega) \to f(\omega)$ и $|f_n(\omega)| \le g(\omega)$ для всех n.

Поскольку $|f_n(\omega)| \le g(\omega)$ для всех n, то

$$|f(\omega)| = |\lim_{n\to\infty} f_n(\omega)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(\omega)| \le g(\omega),$$

и, согласно утверждению 1.4.25, функция f является интегрируемой.

Докажем теперь, что

$$\left|\int_{\Omega} f \, d\mu - \int_{\Omega} f_n \, d\mu\right| = \left|\int_{\Omega} (f - f_n) \, d\mu\right| \le \int_{\Omega} |f - f_n| \, d\mu \longrightarrow 0. \quad (1.26)$$

Для этого рассмотрим на Ω три последовательности функций: $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(w_n)_{n=1}^{\infty}$, определяемые следующим образом:

$$u_n(\omega) = \inf_{k\ge n} f_k(\omega), \qquad v_n(\omega) = \sup_{k\ge n} f_k(\omega), \qquad w_n = v_n - u_n.$$

По определению,

$$u_n(\omega) \le f_k(\omega) \le v_n(\omega)$$

для всех $k \geq n$, и, переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$u_n(\omega) \leq f(\omega) \leq v_n(\omega).$$

Из этого неравенства и предыдущего, записанного для $k = n$ и умноженного на (-1),

$$-v_n(\omega) \leq -f_n(\omega) \leq -u_n(\omega),$$

имеем

$$-\big(v_n(\omega) - u_n(\omega)\big) \leq f(\omega) - f_n(\omega) \leq v_n(\omega) - u_n(\omega),$$

то есть,

$$|f(\omega) - f_n(\omega)| \leq v_n(\omega) - u_n(\omega) = w_n(\omega).$$

Поскольку $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$, то $|u_n(\omega)| \leq g(\omega)$ и $|v_n(\omega)| \leq g(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$, и, следовательно, согласно утверждению 1.4.25 функции u_n и v_n, $n \in \mathbb{N}$, также интегрируемы. Следовательно, функции w_n, $n \in \mathbb{N}$, также интегрируемы.

Таким образом, для доказательства (1.26) достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega w_n \, d\mu = 0.$$

Поскольку $w_n \geq 0$, $w_n \downarrow 0$ по лемме 1.4.28, то $(w_1 - w_n) \geq 0$ и $(w_1 - w_n) \uparrow w_1$. Следовательно, используя теорему Беппо Леви (теорема 1.4.12), имеем

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega w_n \, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (w_n - w_1 + w_1) \, d\mu = \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(-\int_\Omega (w_1 - w_n) \, d\mu + \int_\Omega w_1 \, d\mu \Big) = \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (w_1 - w_n) \, d\mu + \int_\Omega w_1 \, d\mu = \\
&= -\int_\Omega \lim_{n\to\infty} (w_1 - w_n) \, d\mu + \int_\Omega w_1 \, d\mu = \\
&= -\int_\Omega w_1 \, d\mu + \int_\Omega w_1 \, d\mu = 0.
\end{aligned}$$

□

1.4.4 Интеграл по подмножеству

Определение 1.4.30. Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство с мерой, $A \in \Sigma$, и $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$. Тогда *интегралом* от функции f *по подмножеству* A называется число

$$\int_A f\,d\mu = \int_\Omega 1_A f\,d\mu.$$

Утверждение 1.4.31. *Пусть $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$. Для того, чтобы $f = 0$* μ–п.в.*необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_A f\,d\mu = 0$$

для всех $A \in \Sigma$.

Доказательство. Если $f = 0$ μ–п.в.на Ω, то $|f| = 0$ μ–п.в.на Ω

$$\Big|\int_A f\,d\mu\Big| = \Big|\int_\Omega 1_A f\,d\mu\Big| \le \int_\Omega |1_A f|\,d\mu \le \int_\Omega |f|\,d\mu = 0.$$

Предположим теперь, что $\int_A f\,d\mu = 0$ для произвольного $A \in \Sigma$. Рассмотрим множества

$$A^+ = \{\omega \in \Omega : f(x) > 0\}, \qquad A^- = \{\omega \in \Omega : f(\omega) < 0\}.$$

Если $\mu(A^+) = \mu(A^-) = 0$, то это означает, что $f = 0$ μ-п.в. Поэтому, предположим, что $\mu(A^+) > 0$. Но

$$A^+ = \bigcup_{n=1}^\infty A_n^+, \qquad \text{где} \qquad A_n^+ = \big\{\omega \in \Omega : f(\omega) > \frac{1}{n}\big\}.$$

Поскольку $A_n^+ \uparrow A^+$, то $\mu(A_n^+) \uparrow \mu(A) > 0$. Это означает, что $\mu(A_n^+) > 0$ для некоторого n_0 (начиная с некоторого n_0). Тогда положив $A = A_{n_0}^+$, имеем

$$\int_A f\,d\mu = \int_{A_{n_0}^+} f\,d\mu = \int_\Omega 1_{A_{n_0}^+} f\,d\mu \ge \int_\Omega 1_{A_{n_0}^+} \frac{1}{n_0}\,d\mu = \frac{1}{n_0}\mu(A_{n_0}) > 0,$$

что противоречит предположению. $\square$

Теорема 1.4.32. *Пусть* (Ω, Σ, μ) *— измеримое пространство с мерой, и* $A \in \Sigma$. *Тогда*

a) $\int_A d\mu = \mu(A)$;

b) *если* $f, g \in \mathcal{L}_1(\mu)$, *и* $c \in \mathbb{R}$, *то*

$$\int_A (f+g)\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu, \qquad \int_A cf\,d\mu = c\int_A f\,d\mu.$$

Доказательство. **(a)** Используя определения 1.4.30 и 1.4.2, имеем

$$\int_A d\mu = \int_\Omega 1_A\,d\mu = \mu(A).$$

(b) Доказательство непосредственно следует из утверждения 1.4.26, поскольку

$$\int_A (f+g)\,d\mu = \int_\Omega 1_A(f+g)\,d\mu = \int_\Omega (1_A f + 1_A g)\,d\mu =$$
$$= \int_\Omega 1_A f\,d\mu + \int_\Omega 1_A g\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu.$$

Доказательство второй части аналогично.

□

Следствие 1.4.33. *Если* $f = g$ μ–п.в., *то*

$$\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$$

для всех $A \in \Sigma$.

Доказательство. Действительно, поскольку $f = g$ п.в., то $f - g = 0$ п.в., и $|f-g| = 0$ п.в. Но

$$|1_A(f-g)| = 1_A|f-g| \leq |f-g|.$$

Поэтому $|1_A(f-g)| = |1_A f - 1_A g| = 0$ п.в. Следовательно,

$$\int_A f\,d\mu - \int_A g\,d\mu = \int_A (f-g)\,d\mu = \int_\Omega 1_A(f-g)\,dm = 0.$$

□

Теорема 1.4.34. *Пусть* (Ω, Σ, μ) *— измеримое пространство с мерой,* $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$*,* $A \in \Sigma$*, и* $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$*, где* $A_k \in \Sigma$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$*. Тогда*

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f\,d\mu.$$

Доказательство. Положим

$$f_n = f \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}.$$

Для каждого $\omega \in A$ из условия следует, что $\omega \in A_{n_0}$ для некоторого единственного $n_0 \in \mathbb{N}$. Поэтому при $n \geq n_0$ имеем

$$\begin{aligned} f_n(\omega) = f(\omega)\big(1_{A_1}(\omega) + \ldots + 1_{A_{n_0-1}}(\omega) + 1_{A_{n_0}}(\omega) + \\ + 1_{A_{n_0+1}}(\omega) + \ldots + 1_{A_n}(\omega)\big) = \\ = f(\omega)(0 + \ldots + 0 + 1 + 0 + \ldots + 0) = f(\omega). \end{aligned}$$

Если $\omega \notin A$, то

$$f_n(\omega) = f(\omega) \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}(\omega) = 0.$$

Таким образом, $f_n \to f1_A$ везде.

Также имеем, что

$$|f_n| = \left| f \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} \right| = |f| \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} \leq |f| 1_A \leq |f|$$

для всех n. Поэтому, используя теорему Лебега об ограниченной сходимости (теорема 1.4.29 с $g = |f|$) а также утверждение 1.4.26, имеем, что

$$\begin{aligned} \int_A f\,d\mu = \int_\Omega 1_A f\,d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu = \\ = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Big(f \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} \Big)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Big(\sum_{k=1}^{n} f 1_{A_k} \Big)\,d\mu = \end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} f 1_{A_k}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f\, d\mu =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f\, d\mu.$$

□

Задачи

КР: 334.1, 335 (3), 335.1, 335.3, 335.5. 335.7, 336.1,
ДР: 334, 335 (2), 335.6, 335.8, 335.9, 335.10, 336 (2,3), 347, 350.

Глава 2

Линейные нормированные пространства

2.1 Начальные топологические сведения

2.1.1 Определение. Примеры

E — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, которое обозначается через $\mathbb{K}$.

Определение 2.1.1. *Преднормой* или *полунормой* на линейном пространстве E называется функция $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующим свойствам:

(i) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in E$;

(ii) $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\|$ для всех $\boldsymbol{x} \in E$ и $\lambda \in \mathbb{K}$;

(iii) (неравенство треугольника) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ для любой пары элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$.

Если выполненно также условие, что

(iv) $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ только для $\boldsymbol{x} = 0$,

то преднорма $\|\cdot\|$ назвается *нормой*. Линейное пространство E с заданной на нем нормой $\|\cdot\|$ называется *линейным нормированным пространством* и обозначается $(E, \|\cdot\|)$.

Утверждение 2.1.2. *Пусть $\|\cdot\|$ — преднорма на линейном пространстве E.*

(a) *Имеем, что $\|\mathbf{0}\| = 0$.*

(b) *Для всех $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^m \in E$:*

$$\|\boldsymbol{x}^1 + \ldots + \boldsymbol{x}^m\| \leq \|\boldsymbol{x}^1\| + \ldots + \|\boldsymbol{x}^m\|.$$

(c) *для любой пары $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$:*

$$\big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\big| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Доказательство. **(a)** Действительно,

$$\|\mathbf{0}\| = \|0 \cdot \mathbf{0}\| = 0 \cdot \|\mathbf{0}\| = 0.$$

(b) Используя последовательно неравенство треугольника, имеем

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{x}^2 + \ldots + \boldsymbol{x}^m\| &= \|\boldsymbol{x}^1 + (\boldsymbol{x}^2 + \ldots + \boldsymbol{x}^m)\| \leq \\ &\leq \|\boldsymbol{x}^1\| + \|\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x}^3 + \ldots + \boldsymbol{x}^m\| = \\ &= \|\boldsymbol{x}^1\| + \|\boldsymbol{x}^2 + (\boldsymbol{x}^3 + \ldots + \boldsymbol{x}^m)\| \leq \\ &\leq \|\boldsymbol{x}^1\| + \|\boldsymbol{x}^2\| + \|\boldsymbol{x}^3 + \ldots + \boldsymbol{x}^m\| \leq \ldots \\ &\leq \|\boldsymbol{x}^1\| + \|\boldsymbol{x}^2\| + \ldots + \|\boldsymbol{x}^m\|.\end{aligned}$$

(c) Требуется доказать, что

$$-\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Используя неравенство треугольника, получим

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|.$$

Таким образом,

$$\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|,$$

что есть правая часть доказываемого неравенства. Меняя местами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, получаем

$$\|\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|,$$

или, умножая обе части на -1, имеем

$$-\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|.$$

□

Пример 2.1.3. 1. Для линейного пространства $E = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) над полем $\mathbb{K}$

$$\|x\| = |x|$$

является нормой.

2. $\mathbb{K}_2^n$: Для $E = \mathbb{K}^n$ над полем $\mathbb{K}$,

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$$

является нормой.

Если $N_0 \subset \{1, \ldots, n\}$, $N_0 \neq \emptyset$, то

$$\|\boldsymbol{x}\|_{2,N_0} = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{N}_0} |x_k|^2}$$

является полунормой.

3. $\mathbb{K}_1^n$: Для линейного пространства $E = \mathbb{K}^n$ над полем $\mathbb{K}$ функция

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$$

задает норму.

Если $N_0 \subset \{1, \ldots, n\}$, $N_0 \neq \emptyset$, то

$$\|\boldsymbol{x}\|_{1,N_0} = \sum_{k \in N_0} |x_k|$$

является полунормой.

4. $\mathbb{K}_\infty^n$: Пусть $E = \mathbb{K}^n$ над полем $\mathbb{K}$. Тогда

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k|$$

является нормой на E.

Если $N_0 \subset \{1, \ldots, n\}$, $N_0 \neq \emptyset$, то

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\infty,N_0} = \max_{k \in N_0} |x_k|$$

является полунормой.

Утверждение 2.1.4. *Пусть функция* $\|\cdot\|_1 \colon \mathbb{K}^\infty \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *определена на* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{K}^\infty$ *как*

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.$$

Тогда подмножество

$$\ell_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^\infty : \|\boldsymbol{x}\|_1 < \infty\}$$

является линейным пространством над $\mathbb{K}$, *и ограничение* $\|\cdot\|_1$ *на* ℓ_1 *является нормой.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ и $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell_1$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < \infty.$$

Поскольку для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|,$$

то для произвольного $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^{N} \bigl(|x_k| + |y_k|\bigr) = \sum_{k=1}^{N} |x_k| + \sum_{k=1}^{N} |y_k| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| = \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1.$$

Поскольку это верно для всех N, то, переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем, что

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k| = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1.$$

Это доказывает свойство (iii) определения 2.1.1, а также то, что

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_1 < \infty,$$

если $\|\boldsymbol{x}\|_1 < \infty$ и $\|\boldsymbol{y}\|_1 < \infty$, т.е. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \ell_1$ для $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ell_1$.

Для $\lambda \in \mathbb{K}$ и $\boldsymbol{x} \in \ell_1$ имеем $\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots)$ и

$$\|\lambda\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|\,|x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = |\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\|_1,$$

что доказывает свойство (ii) определения 2.1.1. Отсюда следует, что $\|\lambda\boldsymbol{x}\|_1 < \infty$, если $\|\boldsymbol{x}\|_1 < \infty$, т.е. $\lambda\boldsymbol{x} \in \ell_1$ для $\boldsymbol{x} \in \ell_1$.

Таким образом, ℓ_1 является линейным пространством над $\mathbb{K}$, и $\|\cdot\|_1$ является преднормой на ℓ_1.

Наконец, если

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = 0,$$

то $x_k = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, т.е $\|\cdot\|_1$ является нормой. □

Утверждение 2.1.5. *Пусть функции* $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{K}^\infty \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *заданы как*

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|.$$

Тогда подмножества

$$\ell_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^\infty : \|\boldsymbol{x}\|_2 < \infty\}, \qquad \ell_\infty = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^\infty : \|\boldsymbol{x}\|_\infty < \infty\}$$

являются линейными пространствами над $\mathbb{K}$, *а* $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$ *и* $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *линейными нормированными пространствами.*

Доказательство. Самостоятельно. □

Утверждение 2.1.6. *Пусть для* $p \in [1, +\infty)$ *функция* $\|\cdot\|_p \colon \mathbb{K}^\infty \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *задана как*

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда подмножество

$$\ell_p = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^\infty : \|\boldsymbol{x}\|_p < \infty\},$$

является линейным пространством над $\mathbb{K}$, *а* $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ *линейным нормированным пространством.*

Доказательство. Без доказательства. □

Лемма 2.1.7. *Пусть* Ω *— произвольное множество, и* $\mathcal{F}(\Omega;\mathbb{R})$ *— множество всех действительных функций на* Ω. *Тогда* $\mathcal{F}(\Omega;\mathbb{R})$ *является линейным пространством над* $\mathbb{R}$, *если*

$$(f+g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega), \qquad (\lambda f)(\omega) = \lambda\, f(\omega)$$

для $f, g \in \mathcal{F}(\Omega;\mathbb{R})$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Самостоятельно. □

Утверждение 2.1.8. *На линейном пространстве* $\mathcal{F}(\Omega;\mathbb{R})$ *определим функцию* $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *как*

$$\|f\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega)|, \qquad f \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R}),$$

и пусть

$$\mathcal{F}_b(\Omega;\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R}) : \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Тогда $\mathcal{F}_b(\Omega;\mathbb{R})$ *является линейным нормированным пространством над* $\mathbb{R}$, *а* $\|\cdot\|_\infty$ *является нормой на* $\mathcal{F}_b(\Omega,\mathbb{R})$.

Доказательство. Докажем, что $\mathcal{F}_b(\Omega,\mathbb{R})$ является линейным пространством (подпространством $\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R})$.

Пусть $f, g \in \mathcal{F}_b(\Omega \in \mathbb{R})$, т.е. существуют $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ такие, что $|f(\omega)| \le C_1$ и $|g(\omega)| \le C_2$ для всех $\omega \in \Omega$. Тогда

$$|(f+g)(\omega)| = |f(\omega) + g(\omega)| \le |f(\omega)| + |g(\omega)| \le C_1 + C_2$$

для всех $\omega \in \Omega$. Поэтому $f + g \in \mathcal{F}_b(\Omega,\mathbb{R})$.

Аналогично доказывается, что $\lambda f \in \mathcal{F}_b(\Omega, \mathbb{R})$, если $f \in \mathcal{F}_b(\Omega, \mathbb{R})$, и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Докажем, что $\|\cdot\|_\infty$ является нормой на $\mathcal{F}_b(\Omega, \mathbb{R})$.

Свойство (i) в определении 2.1.1 имеет место, поскольку $0(\omega) = 0$ для всех $\omega \in \Omega$ по определению нулевой функции.

Проверим выполнение свойства (ii). Имеем

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |\lambda f|(\omega) = \sup_{\omega \in \Omega} |\lambda f(\omega)| = |\lambda| \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)| = |\lambda| \, \|f\|_\infty.$$

Наконец, для (iii) имеем, что

$$|f(\omega)| \le \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|, \qquad |g(\omega)| \le \sup_{\omega \in \Omega} |g(\omega)|$$

для всех $\omega \in \Omega$. Поэтому

$$|f(\omega)| + |g(\omega)| \le \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)| + \sup_{\omega \in \Omega} |g(\omega)|$$

для всех $\omega \in \Omega$, и, следовательно,

$$\sup_{\omega \in \Omega} \big(|f(\omega)| + |g(\omega)|\big) \le \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)| + \sup_{\omega \in \Omega} |g(\omega)|.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|f + g\|_\infty &= \sup_{\omega \in \Omega} |(f + g)(\omega)| = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega) + g(\omega)| \le \\ &\le \sup_{\omega \in \Omega} \big(|f(\omega)| + |g(\omega)|\big) \le \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)| + \sup_{\omega \in \Omega} |g(\omega)| = \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Наконец, если

$$\|f\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)| = 0,$$

то $f(\omega) = 0$ для всех $\omega \in \Omega$, и, следовательно, f является нулевой функцией, откуда следует выполнение (iv). □

Замечание 2.1.9. Пусть $\Omega_0 \subset \Omega$. Для линейного пространства $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ определим $\|\cdot\|_{\infty,\Omega_0} \colon \mathcal{F}_b(\Omega, \mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}$ как

$$\|f\|_{\infty,\Omega_0} = \sup_{\omega \in \Omega_0} |f(\omega)|.$$

Тогда

$$\mathcal{F}_{b,\Omega_0} = \{f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}) : \|f\|_{\infty,\Omega_0} < \infty\}$$

является линейным подпространством $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$, а $\|\cdot\|_{\infty,\Omega_0}$ является преднормой на $\mathcal{F}_{b,\Omega_0}(\Omega, \mathbb{R})$.

Утверждение 2.1.10. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ является компактным подмножеством $\mathbb{R}^n$, и для $E = \mathcal{C}(K)$, линейного пространства всех непрерывных функций на K, положим*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in K} |f(t)|.$$

Тогда $\|\cdot\|_\infty$ является нормой на $\mathcal{C}(K)$.

Доказательство. Самостоятельно. □

Пример 2.1.11. Для линейного пространства $\mathcal{C}([a, b])$ всех непрерывных функций на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ положим

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Тогда $\|\cdot\|_1$ является нормой на $\mathcal{C}([a, b])$.

Определение 2.1.12. Пусть E — линейное пространство. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на E называются *эквивалентными*, если существуют такие $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+$, что

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 \le C_1 \|\boldsymbol{x}\|_2, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_2 \le C_2 \|\boldsymbol{x}\|_1$$

для всех $\boldsymbol{x} \in E$.

Пример 2.1.13. Нормы в $\mathbb{R}^2_1$ и $\mathbb{R}^2_\infty$ эквивалентны.

Теорема 2.1.14. *Любые две нормы на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны.*

Доказательство. См. конспект, [7, Теорема, стр. 81]. □

Утверждение 2.1.15. *Нормы в ℓ_1 и ℓ_∞ не являются эквивалентными.*

Задачи

КР: 12 (1), 13, 16.1
ДР: 12 (4), 15, 16 (1, 2 (p=1,2)), 17 (1,2,4)

2.1.2 Открытые и замкнутые множества

Определение 2.1.16. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, $\boldsymbol{x}^0 \in E$, $r \in \mathbb{R}_+$.

(a) Множество

$$B(\boldsymbol{x}^0; r) = \{\boldsymbol{x} \in E : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\| < r\}$$

называется *открытым шаром* в E вокруг точки $\boldsymbol{x}^0$ радиуса r.

(b) Множество

$$\overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}^0; r) = B(\boldsymbol{x}^0; r) \setminus \{\boldsymbol{x}^0\}$$

называется *открытым выколотым шаром* в E вокруг точки $\boldsymbol{x}^0$ радиуса r.

(c) Множество

$$B[\boldsymbol{x}^0; r] = \{\boldsymbol{x} \in E : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\| \le r\}$$

называется *замкнутым шаром* в E вокруг точки $\boldsymbol{x}^0$ радиуса r.

(d) Множество

$$S[\boldsymbol{x}^0; r] = \{\boldsymbol{x} \in E : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\| = r\}$$

называется *сферой* в E вокруг точки $\boldsymbol{x}^0$ радиуса r.

Пример 2.1.17. $B(0; 1)$, $B[0; 1]$, $S[0; 1]$:

1. $\mathbb{R}$;
2. $\mathbb{R}^2_2$, $\mathbb{R}^2_1$; $\mathbb{R}^2_\infty$.
3. l_∞;
4. $\mathcal{C}([a, b])$.

Определение 2.1.18. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство.

(a) Подмножество $U \subset E$ называется *открытым* в E, если для любой точки $\boldsymbol{x}^0 \in U$ существует такое $r > 0$, что $B(\boldsymbol{x}^0; r) \subset U$. Пустое множество $\emptyset$ и все пространство являются открытыми.

(b) Подмножество F называется *замкнутым* в E, если F^c является открытым в E. Пустое множество $\emptyset$ и все пространство являются замкнутыми.

Пример 2.1.19. 1. (a, b), $B(\mathbf{0}; 1) \subset \mathbb{R}^2_2$.

2. $[a, b]$, $B[\mathbf{0}; 1] \subset \mathbb{R}^2_2$.

Утверждение 2.1.20. *Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Тогда:*

(a) *открытый шар $B(\boldsymbol{a}; r)$ является открытым;*

(b) *точка $\{\boldsymbol{a}\}$, замкнутый шар $B[\boldsymbol{a}; r]$, сфера $S[\boldsymbol{a}; r]$ являются замкнутыми множествами.*

Утверждение 2.1.21. *Пусть E — линейное пространство, $U \subset E$, и две нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ эквивалентны. Следующие условия эквивалентны:*

(a) *множество* U *открыто (соотв., замкнуто) в линейном нормированном пространстве* $(E, \| \cdot \|_1)$*;*

(a) *множество* U *открыто (соотв., замкнуто) в линейном нормированном пространстве* $(E, \| \cdot \|_2)$*;*

Теорема 2.1.22. (a) *Пусть* $\{U_k\}_{k=1}^m$ *— конечное непустое семейство открытых множеств. Тогда множество* $U = \bigcap_{k=1}^m U_k$ *является открытым.*

(b) *Пусть* $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ *— произвольное непустое семейство открытых множеств. Тогда множество* $U = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$ *является открытым.*

(c) *Пусть* $\{F_k\}_{k=1}^m$ *— конечное непустое семейство замкнутых множеств. Тогда множество* $F = \bigcup_{k=1}^m F_k$ *является замкнутым.*

(в) *Пусть* $\{F_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ *— произвольное непустое семейство замкнутых множеств. Тогда множество* $F = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$ *является замкнутым.*

Доказательство. См. конспект. □

Определение 2.1.23. Пусть $(E, \| \cdot \|)$ — линейное нормированное пространство и $X \subset E$. Точка $\boldsymbol{x}^* \in X$ называется *внутренней точкой* множества X, если существует такое $r > 0$, что $B(\boldsymbol{x}^*; r) \subset X$.

Пример 2.1.24. 1. $E = \mathbb{R}$, $X = [a, b]$, $x^* \in [a, b]$.

2. $E = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{Q}$.

3. $E = \mathbb{R}_2^2$, $X = B[0; 1]$, $\boldsymbol{x}^* \in B[\mathbf{0}; 1]$.

4. $E = \mathbb{R}_2^2$, $X = S[0, 1]$.

Теорема 2.1.25. *Пусть* $U \subset E$*. Следующие условия эквивалентны:*

(i) U *— открыток множество;*

(ii) *всякая точка* $\boldsymbol{x}^* \in U$ *является внутренней.*

Определение 2.1.26. Множество $V \subset E$ называется *окрестностью* точки $\boldsymbol{x}^*$, если $\boldsymbol{x}^* \in V$, и $\boldsymbol{x}^*$ является внутренней точкой V.

Пример 2.1.27. 1. Открытое множество является окрестностью любой своей точки.

2. Множество $[0,1] \subset \mathbb{R}$ является окрестностью любой точки из $(0,1)$.

Определение 2.1.28. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, и $X \subset E$. Точка $\boldsymbol{x}^* \in E$ называется *предельной точкой* множества X, если $\overset{\circ}{B}(\boldsymbol{x}^*; r) \cap X \neq \emptyset$ для любого $r > 0$.

Пример 2.1.29. 1. $E = \mathbb{R}$, $X = (a,b)$.

2. $E = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{Q}$.

3. $E = \mathbb{R}^2_2$, $X = B(\mathbf{0}; 1)$.

Теорема 2.1.30. *Пусть $F \subset E$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *множество F замкнуто;*

(ii) *множество F содержит все свои предельные точки.*

Доказательство. См. конспект. □

Определение 2.1.31. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, и $X \subset E$. Минимальное замкнутое множество $\overline{X}$ такое, что $X \subset \overline{X}$ называется *замыканием* множества X.

Пример 2.1.32. 1. $E = \mathbb{R}$, $X = (0,1]$;

2. $E = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{Q}$.

Утверждение 2.1.33. *Пусть $X \subset E$. Тогда*

(a) $\overline{X} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma$, *где* $\{F_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ *— семейство всех замкнутых множеств F_γ таких, что $F_\gamma \supset X$ для всех $\gamma \in \Gamma$.*

(b) *Пусть X' — множество всех предельных точек множества X. Тогда $\overline{X} = X \cup X'$.*

Доказательство. См. конспект. □

2.1.3 Плотные множества. Сепарабельность

Определение 2.1.34. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Подмножество $X \subset E$ называется *плотным* в E, если $\overline{X} = E$.

Пример 2.1.35. 1. $E = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{Q}$.

2. $E = \mathcal{C}([a, b])$, $X = \mathrm{Pol}([a, b])$.

Определение 2.1.36. Линейное нормированное пространство $(E, \|\cdot\|)$ называется *сепарабельным*, если существует счетное, плотное в E подмножество $Q \subset E$.

Пример 2.1.37. $\mathbb{R}^n$.

Утверждение 2.1.38. (a) *Пространства ℓ_1, ℓ_2, $\mathcal{C}([a, b])$ являются сепарабельными.*

(b) *Пространство ℓ_∞ не является сепарабельным.*

Доказательство. См. конспект. □

2.1.4 Последовательности в ЛНП

Определение 2.1.39. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, и $X \subset E$.

(a) Функция $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{N} \to X$ называется *последовательностью* в X. Последовательность также обозначается $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$, где $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{\varphi}(k)$.

(b) Если $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{N} \to X$ является последовательностью в X, и $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — неубывающая функция, то последовательность $\boldsymbol{\varphi} \circ \psi \colon \mathbb{N} \to X$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\boldsymbol{\varphi}$. Если $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{\varphi}(k)$ и $k_l = \psi(l)$, то для подпоследовательности $\boldsymbol{\varphi} \circ \psi$ используется обозначение $(\boldsymbol{x}_{k_l})_{l=1}^{\infty}$.

Пример 2.1.40. 1. $X = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$, $x_n = (-1)^n$.

2. $X = \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x}_n = \frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right)$.

3. $X = \ell_2$, $\boldsymbol{x}_n = \frac{1}{n}\boldsymbol{e}_n$.
4. $X = \mathcal{F}_b([0,1])$, $f_n(t) = t^n$.

Определение 2.1.41. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, $X \subset E$. Элемент $x_* \in E$ называется *пределом последовательности* $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ в X, если любая окрестность V точки $\boldsymbol{x}_*$ содержит все члены последовательности $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$, кроме конечного их числа, т.е. существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $\boldsymbol{x}_k \in V$ для всех $k > N$. При этом используются обозначения: $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_*$ или $\boldsymbol{x}_* = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k$.

Утверждение 2.1.42. *Пусть $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность в $X \subset E$, и $\boldsymbol{x}_* \in E$. Следующие условия эквивалентны:*

(a) $x_* = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k$*;*

(b) $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_*\| = 0$.

Утверждение 2.1.43. *Точка $\boldsymbol{x}_* \in E$ является предельной точкой множества X тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ в X, что $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}_*$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_*$.*

Утверждение 2.1.44. *Пусть последовательность $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ имеет предел. Тогда этот предел единственен.*

Утверждение 2.1.45. (a) *Пусть E является одним из пространств ℓ_1, ℓ_2, ℓ_∞. Если $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_*$ в E, где $\boldsymbol{x}_k = (x_k^1, \dots, x_k^j, \dots)$ и $\boldsymbol{x}_* = (x_*^1, \dots, x_*^j, \dots)$, то для каждого $j_0 \in \mathbb{N}$ имеем $x_*^{j_0} = \lim_{k\to\infty} x_k^{j_0}$.*

(b) *Если $E = \mathcal{F}_b([a,b])$, и $f_n \to f_*$ в E, то для каждого $t \in [a.b]$ имеем $f_*(t) = \lim_{k\to\infty} f_k(t)$.*

Доказательство. См. конспект. □

Пример 2.1.46. Пример 2.1.40 (2, 3 4).

Определение 2.1.47. Последовательность $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ в $X \subset E$ называется *сходящейся*, если она имеет предел $\boldsymbol{x}^* \in E$, и *сходящейся в* X, если она является сходящейся, и ее предел $\boldsymbol{x}_* \in X$.

Теорема 2.1.48. *Пусть* $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ *сходящаяся последовательность в* E, *и* $\boldsymbol{x}_* = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k$. *Если* $(\boldsymbol{x}_{k_l})_{l=1}^{\infty}$ *— произвольная подпоследовательность последовательности* $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$, *то она также является сходящейся, и* $\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{x}_{k_l} = \boldsymbol{x}_*$.

2.1.5 Полнота. Банаховые пространства.

Определение 2.1.49. Последовательность $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ в $X \subset E$ называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\|\boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_k\| < \varepsilon$$

для всех $k > N$ и $p \in \mathbb{Z}_+$.

Утверждение 2.1.50. *Сходящаяся последовательность в* E *является фундаментальной.*

Доказательство. См. конспект. □

Определение 2.1.51. Линейное нормированное пространство $(E, \|\cdot\|)$ называется *полным* или *банаховым*, если всякая фундаментальная последовательность в E является сходящейся.

Пример 2.1.52.

1. $X = \mathbb{R}^n$.
2. $X = \mathrm{Pol}_{\mathbb{R}}([0,1])$, $\|f\| = \|f\|_\infty$.
3. $X = C([a,b])$, $\|f\| = \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Теорема 2.1.53. *Пространства* ℓ_1, ℓ_2, ℓ_∞ *являются банаховыми.*

Доказательство. См. конспект. □

Теорема 2.1.54. *Линейное нормированное пространство* $\mathcal{F}_b(\Omega)$ *является банаховым.*

Утверждение 2.1.55. *Пусть* $(E, \|\cdot\|)$ *— банахово пространство, а* $\tilde{E}$ *— замкнутое линейное подпространство пространства* E. *Тогда* $(\tilde{E}, \|\cdot\|)$ *— банахово пространство.*

Теорема 2.1.56. *Пространство* $\mathcal{C}([a,b])$ *является замкнутым подпространством пространства* $\mathcal{F}_b([a,b])$.

Следствие 2.1.57. *Пространство* $\mathcal{C}([a,b])$ *является банаховым.*

Теорема 2.1.58. *Пространства* ℓ_1, ℓ_2, ℓ_∞, $\mathcal{F}_b(\Omega)$, $\mathcal{C}([a,b])$ *являются банаховыми.*

Теорема 2.1.59. *Пусть* (Ω, Σ, μ) *— измеримое пространство с мерой. Пространства* $L_1(\Omega,\mu)$, $L_2(\Omega,\mu)$ *являются банаховыми.*

2.1.6 Ряды в банаховых пространствах

Определение 2.1.60. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность элементов E. Выражение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_k$$

называется *рядом* в E. Этот ряд называется *сходящимся*, если сходится в E последовательность $(\boldsymbol{S}_m)_{m=1}^{\infty}$ частичных сумм ряда, где

$$\boldsymbol{S}_m = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{x}_k.$$

Если ряд является сходящимся, то

$$\boldsymbol{S} = \lim_{m\to\infty} \boldsymbol{S}_m$$

называется *суммой* ряда.

Пример 2.1.61. $E = \mathcal{C}([0,\frac{1}{2}])$, $S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$.

Утверждение 2.1.62. *Пусть* $(E, \|\cdot\|)$ *— линейное нормированное пространство. Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_k$ *сходится, то* $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}$.

Определение 2.1.63. Пусть E — банахово пространство. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_k$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\boldsymbol{x}_k\|.$$

Пример 2.1.64. $\sum_{k=0}^{\infty} t^k$ в $\mathcal{C}([0, \frac{1}{2}])$.

Утверждение 2.1.65. *Пусть E — банахово пространство. Абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.*

Утверждение 2.1.66. *Пусть E — банахово пространство, и $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_k$ — абсолютно сходящийся ряд. Если $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, биекция, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_{\sigma(k)}$ также является сходящимся, и суммы обоих рядов равны.*

Задачи

КР:	32, 34, 34.1, 38 (2, 1, 6, 7), 43
ДР:	31, 35, 36, 38 (4, 8, 9)

2.2 Компактные множества

2.2.1 Общие положения

Определение 2.2.1. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Подмножество $X \subset E$ называется *предкомпактным*, если любая последовательность $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ в X имеет сходящуюся в E подпоследовательность. Подмножество $X \subset E$ называется компактным, если любая последовательность $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ в X имеет сходящуюся в X подпоследовательность.

Утверждение 2.2.2. *Подмножество $X \subset E$ является компактным тогда и только тогда, когда оно предкомпактно и замкнуто.*

Пример 2.2.3. 1. $X = \{\boldsymbol{a}\}$.

2. $X = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m\}$.

Теорема 2.2.4. *Множество $[a, b] \subset X$ является компактным.*

Определение 2.2.5. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Подмножество $X \subset E$ называется *ограниченным*, если существует такое $R > 0$, что $X \subset B[\mathbf{0}; R]$.

Пример 2.2.6. 1. $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

2. $X = B(\boldsymbol{a}; r)$.

3. $X = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

4. $X = E$.

Теорема 2.2.7. *Пусть $E = \mathbb{R}^n$, и $X \subset E$.*

(a) *Подмножество X является предкомпактным тогда и только тогда, когда оно ограниченно.*

(a) *Подмножество X является компактным тогда и только тогда, когда оно ограниченно и замкнуто.*

Утверждение 2.2.8. *Замкнутый шар $B[\mathbf{0}; 1]$ не является компактным ни в одном из следующих пространств: ℓ_1, ℓ_2, ℓ_∞, $\mathcal{F}_b(\Omega)$, $\mathcal{C}([a, b])$.*

Утверждение 2.2.9. *Пусть $X \subset E$ — компактное множество, и $Y \subset X$ — замкнутое подмножество X. Тогда множество Y является компактным.*

Утверждение 2.2.10. *Пусть $X \subset E$ — компактное множество, и*

$$X \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots,$$

где каждое подмножество X_k, $k \in \mathbb{N}$, является замкнутым. Тогда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_k \neq \emptyset.$$

Определение 2.2.11. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство. Подмножество $X \subset E$ называется *вполне ограниченным*, если для каждого $r > 0$ существует такое конечное семейство точек $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m \in E$, что $X \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(\boldsymbol{a}_k; r)$.

Утверждение 2.2.12. *Вполне ограниченное множество является ограниченным.*

Утверждение 2.2.13. *Единичный шар в ℓ_∞ не является вполне ограниченным.*

Теорема 2.2.14 (Фреше–Хаусдорфа)**.** *Пусть E — банахово пространство, и $X \subset E$.*

(a) *Множество X является предкомпактным тогда и только тогда, когда оно вполне ограниченно.*

(b) *Множество X является компактным тогда и только тогда, когда оно вполне ограниченно и замкнуто.*

Определение 2.2.15. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, и $X \subset E$. Семейство открытых в E множеств $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ называется *открытым покрытием* подмножества X, если $X \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$.

Пример 2.2.16.

1. Семейство $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $U_k = \left(0, 1-\frac{1}{k}\right)$ является открытым покрытием множества $X = (0,1)$.
2. Семейство $\{U_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, где $U_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ и $U_k = \left(-\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, является открытым покрытием множества $X = [0,1]$

Теорема 2.2.17. *Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, и $X \subset E$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *X является компактным;*

(b) *всякое открытое в E покрытие $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ подмножества X имеет конечное подпокрытие.*

2.2.2 Компактные подмножества $\mathcal{C}([a,b])$

Определение 2.2.18. Семейство функций $\Phi = \{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathcal{C}([a,b])$ называется *равномерно ограниченным*, если существует такое $C \in \mathbb{R}_+$, что $\|f_\gamma\|_\infty \le C$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

Семейство Φ называется *равностепенно непрерывным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|t' - t''| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f_\gamma(t') - f_\gamma(t'')| < \varepsilon$$

для всех $\gamma \in \Gamma$.

Замечание 2.2.19. Равномерная ограниченность множества функций $\Phi = \{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ эквивалентна тому, что множество Φ ограниченно в банаховом пространстве $\mathcal{C}([a,b])$.

Пример 2.2.20. $[a,b] = [0,1]$.

1. $f_\gamma(t) = \sin(t+\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.
2. $f_n(t) = n + t$, $n \in \mathbb{N}$.
3. $f_n(t) = \operatorname{arctg} nt$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.2.21 (Арцела)**.** *Семейство $\Phi = \{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathcal{C}([a,b])$ является предкомпактным подмножеством $\mathcal{C}([a,b])$ тогда и только тогда, когда оно равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. См. конспект, [6, Теорема 1, стр. 199]. □

2.3 Непрерывные функционалы

2.3.1 Общие положения

Определение 2.3.1. Пусть $(E, \|\cdot\|)$, $(E', \|\cdot\|')$ — линейные нормированные пространства. Отображение $\boldsymbol{\varphi}\colon E \to E'$ называется *непрерывным* в точке $\boldsymbol{x}_* \in E$, если для каждой окрестности $U' \subset E'$ точки $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)$ существует такая окрестность $U \subset E$ точки $\boldsymbol{x}_*$, что $\boldsymbol{\varphi}(U) \subset U'$.

Определение 2.3.2. Если $E' = \mathbb{R}$ и $\|\cdot\|' = |\cdot|$, то отображение $\boldsymbol{\varphi}$ называется *функционалом на E*.

Утверждение 2.3.3. *Пусть $(E, \|\cdot\|)$, $(E', \|\cdot\|')$ — линейные нормированные пространства, $\boldsymbol{\varphi}\colon E \to E'$, и $\boldsymbol{x}_0 \in E$. Следующие условия эквивалентны.*

(a) *Отображение $\boldsymbol{\varphi}$ непрерывно в точке $\boldsymbol{x}_*$.*

(b) *Если V' — окрестность точки $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)$, то $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(V')$ является окрестностью точки $\boldsymbol{x}_*$.*

(c) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что*

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_*\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*)\|' < \varepsilon.$$

(d) *Для любой последовательности $(\boldsymbol{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ в E имеем:*

$$\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_* \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_k) \to \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*).$$

Пример 2.3.4. 1. $E = E' = \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x)$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

2. $E = E' = \mathcal{C}([a, b])$,

$$\boldsymbol{\varphi}(f)(t) = \int_a^b K(t, \tau)\, f(\tau)\, d\tau, \qquad K \in \mathcal{C}([a, b]^2).$$

3. $E = \mathcal{C}([a, b])$, $E' = \{f \in \mathcal{C}([a, b]) : f(a) = 0\}$,

$$\boldsymbol{\varphi}(f)(t) = \int_a^t F(\tau, f(\tau))\, d\tau, \qquad F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2).$$

Определение 2.3.5. Пусть $(E, \|\cdot\|)$, $(E', \|\cdot\|')$ — линейные нормированные пространства. Отображение $\boldsymbol{\varphi}\colon E \to E'$ называется *непрерывным на* E, если оно непрерывно в каждой точке E.

Утверждение 2.3.6. *Функционал* $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$, *заданный как*

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$$

является непрерывным на E.

Утверждение 2.3.7. *Пусть* $(E, \|\cdot\|)$, $(E', \|\cdot\|')$ *— линейные нормированные пространства и* $\boldsymbol{\varphi}\colon E \to E'$. *Следующие условия эквивалентны.*

(a) *Отображение* $\boldsymbol{\varphi}$ *непрерывно на* E.

(b) *Для каждого открытого множества* $U' \subset E'$ *множество* $\boldsymbol{\varphi}.^{-1}(U') \subset E$ *открыто.*

(c) *Для каждого замкнутого множества* $F' \subset E'$ *множество* $\boldsymbol{\varphi}.^{-1}(F') \subset E$ *замкнуто.*

2.3.2 Непрерывные функционалы на компактах

Теорема 2.3.8. *Пусть* $(E, \|\cdot\|)$ *— линейное нормированное пространство, и* $X \subset E$ *— компактное подмножество* E. *Пусть* $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ *— функционал непрерывный на* E. *Тогда* φ *ограничен на* X, *т.е. существует такое* $C \in \mathbb{R}_+$, *что*

$$|\varphi(\boldsymbol{x})| < C$$

для всех $\boldsymbol{x} \in X$.

Теорема 2.3.9. *Пусть* $(E, \|\cdot\|)$ *— линейное нормированное пространство, и* $X \subset E$ *— компактное подмножество* E. *Пусть* $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ *— функционал непрерывный на* E. *Тогда* φ *достигает на* X *своих минимального и максимального значений, т.е. существуют такие* $\boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{x}^* \in X$, *что*

$$\varphi(\boldsymbol{x}_*) = \inf_{\boldsymbol{x}\in X} \varphi(\boldsymbol{x}), \qquad \varphi(\boldsymbol{x}^*) = \sup_{\boldsymbol{x}\in X} \varphi(\boldsymbol{x}).$$

2.3.3 Сжатия. Теорема Банаха о неподвижной точке

Определение 2.3.10. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство и $X \subset E$. Отображение $\boldsymbol{\varphi}\colon E \to E$ называется *сжатием на* X, если выполнены следующие условия:

(i) $\boldsymbol{\varphi}(X) \subset X$;

(ii) существует такое $q \in (0,1)$, что

$$\|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}'')\| \leq q\,\|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''\|$$

для всех $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in X$.

Утверждение 2.3.11. *Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство и $X \subset E$. Если $\boldsymbol{\varphi}\colon E \to E$ является сжатием на X, то $\boldsymbol{\varphi}$ непрерывно на X.*

Теорема 2.3.12 (Банах)**.** *Пусть E — банахово пространство, $F \subset E$ — замкнутое подмножество E. и $\boldsymbol{\varphi}\colon E \to E$ является сжатием на F. Тогда $\boldsymbol{\varphi}$ имеет в F неподвижную точку, т.е. существует такое $\boldsymbol{x}_* \in F$, что*

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_*) = \boldsymbol{x}_*,$$

и эта неподвижная точка единственна в F.

Приложение A

Дополнительные задачи

A.1 Мера и интеграл

1.1. (1 б.) **Приближение борелевских множеств компактными и открытыми множествами.**
Пусть μ — конечная мера на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}_n$ пространства $\mathbb{R}^n$. Доказать, что для любого $B \in \mathcal{B}_n$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие компактное множество K_ε и открытое множество U_ε в $\mathbb{R}^n$, что $K_\varepsilon \subset B \subset U_\varepsilon$ и $\mu(U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$.
Литература: [9, теорема 2.3.11].

1.2. (2 б.) **Приближение измеримых множеств.**
Пусть μ — σ-конечная мера на кольце $\mathcal{R}$, и $\tilde{\mu}$ — ее продолжение на σ-алгебру Σ_μ. Доказать, что для любого множества $A \in \Sigma_\mu$ конечной меры, т.е. для которого $\mu(A) < \infty$, и любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $A_\varepsilon \in \mathcal{R}$, что $\tilde{\mu}(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$.
Литература: [8, стр. 35, теорема 6], [5, теорема I.6.5].

1.3. (3 б.) **Теорема Каратеодори.**
Доказать теорему Каратеодори (см. теорему 1.2.32).
Литература: [8, стр. 30, теорема 3].

1.4. (1 б.) **Пример неизмеримого множества.**
Привести пример множества неизмеримого по Лебегу. Будет ли это множество борелевским?
Литература: [9, пример 2.5.7].

1.5. (1 б.) **Мера Лебега–Стильтьеса на прямой.**
Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо, порожденное полуинтервалами $[a,b)$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\le b$. Для монотонно неубывающей непрерывной слева функции $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ определим

$$\mu_F\Big(\bigsqcup_{k=1}^{m}[a_k,b_k)\Big)=\sum_{k=1}^{m}\big(F(b_k)-F(a_k)\big).$$

Доказать, что μ_F является мерой на $\mathcal{R}$. (Продолжение меры μ_F на Σ_{μ_F} называется *мерой Лебега–Стильтьеса* на прямой с *функцией распределения* F).
Литература: [1, теорема 4.1].

1.6. (1 б.) **Описание σ-конечных мер на $\mathcal{B}$.**
Пусть μ является σ-конечной мерой на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств $\mathbb{R}$. Зафиксируем $a\in\mathbb{R}$, и определим функцию

$$F_a(x)=\begin{cases}\ \ \mu\big([a,x)\big), & x\ge a,\\ -\mu\big([x,a)\big), & x<a.\end{cases}$$

Доказать, что функция F_a является неубывающей, непрерывной слева, $F_a(a)=0$ и $\mu=\mu_{F_a}$ (см. задачу **1.5**).
Литература: [5, теорема I.15.1].

1.7. (2 б.) **Описание измеримых функций (теорема Н. Н. Лузина).**
Пусть λ_n — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, $R \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое по Лебегу множество конечной меры, и пусть $f\colon R \to \mathbb{R}$ измеримая по Лебегу функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое множество $F_\varepsilon \subset R$, что $\lambda_n(R \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$, и сужение $f \restriction F_\varepsilon$ функции f на F_ε является непрерывной функцией на F_ε.
Литература: [1, теорема 19.1], [5, теорема II.5.3].

1.8. (2 б.) **Описание сходимости почти всюду (теорема Д. Ф. Егорова).**
Пусть (Ω, Σ) — измеримое пространство, и μ — конечная мера на σ-алгебре Σ. Пусть $f, f_k\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, — измеримые функции, и $f_k \to f$ почти всюду относительно меры μ. Тогда для любого $\delta > 0$ существует такое множество $A_\delta \in \Sigma$, что $\mu(A_\delta) < \delta$ и $f_k \to f$ равномерно на $\Omega \setminus A_\delta$.
Литература: [3, стр. 305, теорема 6], [8, стр. 58, теорема 8].

1.9. (2 б.) **Абсолютно непрерывные меры.**
Пусть (Ω, Σ, μ) измеримое пространство с мерой. Мера ν на (Ω, Σ) называется *абсолютно непрерывной* относительно меры μ, если выполняется следующее условие для произвольного $A \in \Sigma$: если $\mu(A) = 0$, то $\nu(A) = 0$.

1) Пусть $f\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ — измеримая функция относительно σ-алгебры Σ. Определим функцию $\mu_f\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ как
$$\mu_f(A) = \int_A f\, d\mu, \qquad A \in \Sigma.$$
Доказать, что μ_f является мерой, абсолютно непрерывной относительно меры μ.
Литература: [5, теоремы III.4.2, III.4.3].

2) Пусть ν — конечная мера на (Ω, Σ). Доказать, что мера ν является абсолютно непрерывной относительно меры μ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, для произвольного $A \in \Sigma$ имеем $\nu(A) < \varepsilon$, если $\mu(A) < \delta$.
Литература: [5, теорема V.1.1].

1.10. (3 б.) **Описание абсолютно непрерывных мер (теорема Радона–Никодима).**
Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство с σ-конечной мерой μ. Пусть σ-конечная мера ν на Σ удовлетворяет следующему условию: $\nu(A) = 0$ для всех таких $A \in \Sigma$, что $\mu(A) = 0$. Доказать, что существует такая измеримая функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, что
$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu$$
для всех $A \in \Sigma$.
Литература: [1, теорема 20.2], [5, теорема V.2.1].

Приложение В

Экзаменационные вопросы и задачи

Каждый билет состоит из 2 теоретических вопросов и 2 задач, и покрывает следующие темы.[1][2]

1. Мера и интеграл.
2. Линейные нормированные пространства.

B.1 Экзаменационные вопросы

1. Мера и интеграл.

1. Системи підмножин (кільце, σ-кільце, алгебра, σ-алгебра): означення (1.1.1), властивості (1.1.3). Система, що породжена сім'єю підмножин: означення (1.1.6), існування (1.1.4, 1.1.5).

2. Система, породжена сім'єю підмножин: означення (1.1.6), властивості (1.1.11). Борелівська σ-алгебра: означення (1.1.9). Сімейства множин, що породжують борелівську σ-алгебру(1.1.13).

3. Міра на кільці: означення (1.2.1). Міра довжини на $\mathbb{R}$ (1.2.9, 1.2.8).

4. Міра на кільці: означення (1.2.1), властивості (1.2.11).

5. Міра на кільці: означення (1.2.1), властивість неперервності за зростанням (1.2.13) та спаданням (1.2.14), наслідок (1.2.15).

6. Зовнішня міра: означення (1.2.18), властивості (1.2.23).

7. Множина міри нуль: означення (1.2.24), властивості (1.2.27).

8. Вимірна множина за Каратеодорі: означення (1.2.28). Вимірність множини кільця (1.2.29) та множини міри нуль (1.2.30). Теорема Каратеодорі (без доведення) (1.2.32).

[1] Определения и формулировки результатов в вопросах оцениваются в 50% от максимального балла.

[2] Определения и формулировки в вопросах, отмеченных значком $^\circ$, оцениваются в 30% от максимального балла.

9. Вимірні множини та відображення: означення (1.3.1), 1.3.2). Вимірність композиції функцій (1.3.5) та множин, що породжені сім'єю підмножин (1.3.6).

10. Вимірні функції: означення (1.3.7), критерії вимірності (1.3.11), алгебраїчні властивості (1.3.13).

11°. Вимірні функції: означення (1.3.7), критерії вимірності (без доведення) (1.3.11). Вимірність функцій $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$, $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$ (1.3.15).

12°. Вимірні функції: означення (1.3.7), критерії вимірності (без доведення) (1.3.11). Вимірність функції $\lim_{k\to\infty} f_k$ (1.3.15).

13. Проста функція: означення (1.3.16), критерій вимірності (1.3.20). Теорема про рівномірну апроксимацію вимірної функції простою (1.3.23).

14. Проста функція: означення (1.3.16). Теорема про апроксимацію вимірної функції зростаючою послідовністю простих функцій (1.3.32).

15. Вимірний простір: означення (1.4.1). Інтеграл від простої функції: означення (1.4.2), властивості (1.4.4, 1.4.5).

16. Інтеграл від невід'ємної функції: означення (1.4.6), властивість монотонності (1.4.11), лінійність (1.4.16).

17. Інтеграл від невід'ємної функції: означення (1.4.6). Теорема Беппо Леві (1.4.12). Наслідок (1.4.13).

18. Теорема Фату (1.4.14).

19. Властивість «майже всюди»: означення (1.4.17). Критерій рівності нулю інтеграла від невід'ємної функції (1.4.19).

20. Властивість «майже всюди»: означення (1.4.17). Монотонність інтегралу для функцій, що задовольняють властивість «майже всюди» (1.4.20).

21. Властивість «майже всюди»: означення (1.4.17). Нерівність Чебишева (1.4.21), наслідок (1.4.22).

22. Інтеграл від вимірної функції: означення (1.4.24), властивості (1.4.25). Лінійність інтегралу (1.4.26). Важлива нерівність (1.4.27).

23. Теорема Лебега про обмежену збіжність (1.4.29).

24. Інтеграл по підмножині: означення (1.4.30). Критерій рівності нулю функції майже всюди (1.4.31). Лінійність інтегралу по підмножині (1.4.32), наслідок (1.4.33).

25. Інтеграл по підмножині: означення (1.4.30). Абсолютна неперервність інтегралу (1.4.34).

2. Линейные нормированные пространства.

1. Норма, преднорма: означення (2.1.1), властивості преднорми (2.1.2). Простір ℓ_1 (2.1.4).

2. Норма, преднорма: означення (2.1.1), властивості преднорми (2.1.2). Простір $\mathcal{F}_b(\Omega, \mathbb{R})$ (2.1.8).

3°. Еквівалентні норми: означення (2.1.12). Еквівалентність норм в $\mathbb{R}^n$ (2.1.14).

4. Відкриті та замкнені множини в нормованих просторах: означення (2.1.18). Об'єднання та перетин відкритих та замкнених множин (2.1.22).

5. Граничні точки множини: означення (2.1.28). Критерій замкнутості множини (2.1.30).

6. Замикання множини: означення (2.1.31), побудова (2.1.33).

7°. Щільна множина в нормованому просторі: означення. Сепарабельні нормовані простори: означення (2.1.36). Сепарабельність простору ℓ_1.

8°. Щільна множина в нормованому просторі: означення. Сепарабельні нормовані простори: означення (2.1.36). Сепарабельність простору $\mathcal{C}([a,b])$.

9. Границя послідовності в нормованому просторі: означення (2.1.41). Необхідна умова збіжності послідовності в ℓ_1.

10. Границя послідовності в нормованому просторі: означення (2.1.41). Необхідна умова збіжності послідовності в $\mathcal{F}_b([a,b])$.

11°. Фундаментальні послідовності в нормованому просторі: означення (2.1.49). Фундаментальність збіжної послідовності (2.1.50).

12°. Банахові простори: означення (2.1.51). Банаховість простору ℓ_1 (2.1.53).

13°. Банахові простори: означення (2.1.51). Банаховість простору $\mathcal{F}_b$.

14°. Банаховість замкненого підпростору (2.1.55). Банаховість простору $\mathcal{C}([a.b])$ (2.1.56, 2.1.57).

15. Компактні та предкомпактні множини: означення (2.2.1), Зв'язок між компактними та предкомпактними множинами (2.2.2).

16. Цілком обмежені множини: означення (2.2.11). Теорема Фреше–Хаусдорфа (2.2.14).

17. Теорема Арцела (2.2.18, 2.2.21).

18. Неперервність відображення в точці: означення (2.3.1), еквівалентні означення (2.3.3).

19°. Обмеженість неперервного функціоналу на компакті (2.3.8).

20°. Максимальні і мінімальні значення неперервного функціоналу на компакті (2.3.9).

21. Стиск: означення (2.3.10). Теорема Банаха про стиск (2.3.12).

B.2 Экзаменационные задачи

1. Мера и интеграл

Группа КА–53

[10] **№№:** *279, 281.1, 281.1 (1; 2; 3; 6), 282, 287.1, 289, 289.1, 289.2, 290.1, 290.2, 290.3, 290.4, 290.5, 290.6, 290.7, 291 (1; 3), 291.1, 291.2, 291.3, 292 (1), 293 (2–5), 293.3, 295, 296, 300, 301, 302 (3), 304, 305, 306, 307, 309, 311, 316, 317, 319 (1–3) 320, 321, 322, 334, 334.1, 335 (2; 3), 335.1, 335.3, 335.5. 335.6, 335.7, 335.8, 335.9, 335.10, 336 (2;3), 336.1, 347, 350, .*

Группа КА–54

[10] **№№:** *281.1 (1-4, 6), 282, 287.1, 289, 289.1, 289.2, 290.2, 290.6, 290.7, 291 (1-3), 291.1, 291.2, 291.3, 292 (1), 293 (2-5), 293.3, 295, 296, 300, 301, 304, 305, 306, 307, 309, 317, 319 (3), 320, 322, 334, 334.1, 335 (2), 335.1, 335.3, 335.6, 335.8, 335.9, 335.10, 336 (2;3), 347, 350.*

2. Линейные нормированные пространства

Группа КА–53

[10] **№№:** *12 (1; 4, 13, 15, 16 (1; 2 (p=1;2)), 16.1, 17 (1;2;4), 31, 32, 34, 34.1, 35, 36, 38 (1; 2; 4; 6–9), 43, 52, 52.1 (p=1), 53, 53.1 (p=1), 53.2, 53.3, 57, 61, 62, 69, 70, 80, 82, 84 (2), 113 (1; 2; 3; 4; 5), 113.1, .*

Группа КА–54

[10] **№№:** *12, 13 , 14, 15, 16 (1 - $\mathbb{C}^1$ и $\mathbb{C}^n$; 2 - $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_2$), 16 (1; 2 ($p = 1, 2$)), 17 (1;2;4), 31, 32, 34, 35, 36, 38 (1-4, 8, 9), 51, 52, 53, 55 ($\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$ сепарабельны), 57, 62, $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ неплотно в $\mathbb{R}$.*

Index

Литература

[1] *Дьяченко, М. И.* Мера и интеграл / М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов. — М.: Изд-во «Факториал», 1998.

[2] *Халмош, П.* Теория меры / П. Халмош. — Изд-во иностранной литературы, 1953.

[3] *Колмогоров, А. Н.* Элементы функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[4] *Люстерник, Л. А.* Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — М.: Высш. школа, 1982.

[5] *Березанский, Ю. М.* Функциональный анализ. Курс лекций / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. — К.: Выща шк., 1990.

[6] *Треногин, В. А.* Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

[7] *Федоров, В. М.* Курс функционального анализа / В. М. Федоров. Учебники для вузов. Специальная литература. — СПб: «Лань», 2005.

[8] *Дороговцев, А. Я.* Элементы общей теории меры и интеграла / А. Я. Дороговцев. — К.: Выща шк., 1989.

[9] *Богачев, В. И.* Действительный и функциональный анализ: университетский курс / В. И. Богачев, О. Г. Смолянов. — Москва, Ижевск: R&C Dynamics, 2009.

[10] *Богданский, Ю. В.* Задачи по дисциплине «Функциональный анализ» / Ю. В. Богданский, Г. Б. Подколзин, Ю. А. Чаповский. — Электронная версия, Киев, 2017.

[11] *Зорич, В. А.* Математический анализ. Часть I. / В. А. Зорич. — М.: ФАЗИС, 1997.