# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3 ПО ТЕМЕ

## *«МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ (ФМП)»*

### РЕШАЕМАЯ ЗАДАЧА

Дано: $f(X) = x^2 + x \cdot y + 2y^2 + (5 - NG) \cdot x + NL \cdot y$ - квадратичная функция 2-х переменных
$X = (x, y) \in R^n$

здесь NL – номер компьютера, за которым выполняется работа;
NG – последние две цифры номера учебной группы.

Требуется найти: $\underset{X \in R^n}{f(X) \to \min}$

### ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Требуется изучить прямые методы решения поставленной задачи.

Для достижения цели – необходимо добиться выполнения критерия окончания счета для каждого метода с заданной точностью **ε = 0.01**, за число итераций не превышающее заданное **N** из одной и той же начальной точки $X^0 = (x^0, y^0)$, здесь $x^0 = -1.NL$, $y^0 = 2.NG$.

### ИЗУЧАЕМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Методы 1-го порядка
- метод градиентного спуска (**N =5**)
- метод покоординатного спуска (**N =5**)
- метод наискорейшего градиентного спуска (**N =10**)
- метод Гаусса-Зейделя (**N =10**)
- метод сопряженных градиентов (**N =2**)

Методы 2-го порядка
- метод Ньютона (**N =1**)
- метод Ньютона с переменным шагом (метод Ньютона-Рафсона) при $t_0 \neq 1$ (**N =5**)

Методы, не требующие вычисления производных (0-го порядка)
- метод случайного поиска (**N =8**)
- метод конфигураций (метод Хука-Дживса) (**N =8**)
- метод деформируемого многогранника (метод Нелдера-Мида) (**N =8**)

## ПОДГОТОВКА К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. Для минимизируемой функции $f(X) = x^2 + x \cdot y + 2y^2 + (5 - NG) \cdot x + NL \cdot y$ задать параметры: NL – номер компьютера, за которым выполняется работа; NG – последние две цифры номера учебной группы.

***Пример.***

*Для студента группы М8О-311Б, выполняющего работу за компьютером #13, коэффициенты соответственно равны* $NL = 13, \quad NG = 11$, *следовательно,* $f(X) = x^2 + x \cdot y + 2y^2 - 6 \cdot x + 13 \cdot y$

*Для студента группы М8О-301Б, выполняющего работу за компьютером #13, коэффициенты соответственно равны* $NL = 13, \quad NG = 1$, *следовательно,* $f(X) = x^2 + x \cdot y + 2y^2 + 4 \cdot x + 13 \cdot y$

2. Задать начальную точку $X^0 = (x^0, y^0)$, здесь $x^0 = -1.NL$, $y^0 = 2.NG$.

***Пример.***

*Для студента группы М8О-311Б, выполняющего работу за компьютером #13, коэффициенты соответственно равны* $NL = 13, \quad NG = 11$, *следовательно, начальная точка* $X^0 = (-1.13, 2.11)$.

*Для студента группы М8О-301Б, выполняющего работу за компьютером #13, коэффициенты соответственно равны* $NL = 13, \quad NG = 1$, *следовательно, начальная точка* $X^0 = (-1.13, 2.1)$.

## **ЗАДАНИЕ НА ЛАБОРАТОРНУЮ РАБОТУ**

Часть 1

- численно найти стационарную точку выбранной функции $f(X)$ из заданной начальной точки $X^0$ с заданной точностью **ε = 0.01** за число итераций не превышающее заданное **N**, используя методы 1-го порядка;
- занести в отчет по лабораторной работе протоколы вычислений.

Часть 2

- численно найти стационарную точку выбранной функции $f(X)$ из заданной начальной точки $X^0$ с заданной точностью **ε = 0.01** за число итераций не превышающее заданное **N**, используя методы 2-го порядка;
- занести в отчет по лабораторной работе протоколы вычислений.

Часть 3

- численно найти стационарную точку выбранной функции $f(X)$ из заданной начальной точки $X^0$ с заданной точностью **ε = 0.01** за число итераций не превышающее заданное **N**, используя методы 0-го порядка;

В найденной точке $X^k$ должны дополнительно выполняться условия:
$\|X^* - X^k\| < 0.1$,
$|f(X^*) - f(X^k)| < 0.1$, где $X^*$ - аналитически найденная точка минимума

- занести в отчет по лабораторной работе протоколы вычислений.

## СОДЕРЖАНИЕ И ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

1. Отчет по лабораторной работе выполняется после выполнения лабораторной работы <u>на листах формата А4</u>. Отчет должен быть у <u>каждого студента</u>, даже если работа выполнялась бригадой.

2. Титульный лист отчета должен содержать наименование лабораторной работы, наименование дисциплины, фамилию и группу студента.

3. Отчет должен содержать следующие разделы:

(1) Постановка задачи для выбранной функции $f(X)$.

(2) Аналитическое решение задачи с использованием аппарата необходимых и достаточных условий экстремума.

(3) Численное решение задачи, включая текст задания и результаты его выполнения – скриншоты или фотографии экранов протоколов. Должно быть 10 протоколов, каждый протокол должен содержать фразу «**Критерий окончания выполнен**», а также информацию о величинах $\|X^* - X^k\|$ и $|f(X^*) - f(X^k)|$.

(4) Геометрическая интерпретация численного решения задачи, для этого:

- на 2-х листах миллиметровки формата А3 построить чертежи линии уровня функции $f(X) = C_0$, проходящей через начальную точку $X^0 = (x^0, y^0)$;
- нанести на первый чертеж траектории спуска для всех методов 1-го и 2-го порядков;
- нанести на второй чертеж траектории спуска для методов 0-го порядка, а также дополнительные построения:
  - <u>для метода конфигураций</u>: промежуточные траектории поиска вдоль координатных направлений и шаги по образцу;
  - <u>для метода Нелдера-Мида</u>: треугольники, соответствующие каждой итерации;
  - <u>для метода случайного поиска</u>: окружности, соответствующие каждой итерации.

Траектории для каждого метода выполняются своим цветом (или штриховкой), цвет (или штриховка) расшифровываются в «легенде» к чертежу.

Каждый чертеж должен иметь «штамп» следующего содержания:

| | | |
|---|---|---|
| *Студент* | *Иванов И.И.* | ***Чертеж к методам*** ……………………………… |
| *Группа* | *М8О-301Б* | |
| *Номер компьютера* | *36* | |

## ПРИМЕР ОТЧЕТА

***Цель − изучение методов безусловной минимизации на примере квадратичной функции, не имеющей ярко выраженной овражной структуры.***

***Постановка задачи***

**Дано:** $f(X) = x^2 + xy + 2y^2 + (5-1)x + 36y$ − квадратичная функция 2-х переменных.

NL = 36 – номер компьютера, за которым выполняется работа;
NG = 1 – последние две цифры номера учебной группы.

**Требуется найти***:* $\underset{X \in R^n}{f(X) \to \min}$

***Аналитическое решение задачи с использованием аппарата необходимых и достаточных условий экстремума***

1. Запишем градиент целевой функции: $\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)^T$.

2. Запишем необходимые условия экстремума: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{cases}$

3. Решим полученную систему, решение системы − координаты стационарной точки $X^* = (x^*, y^*)^T$.

4. Составим матрицу вторых производных (матрицу Гессе) и вычислим ее в точке $X^* = (x^*, y^*)^T$:

$$H(X^*) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

5. Определим знакоопределенность матрицы по критерию Сильвестра.
Для этого найдем угловые миноры матрицы: $\Delta_1 = h_{11}$, $\Delta_2 = \det(H(X^*))$.
Т.к. $\Delta_1 > 0$ и $\Delta_2 > 0$, то матрица положительно определена и, следовательно, $X^* = (x^*, y^*)^T$ − безусловный локальный минимум.

**<u>Ответ:</u>** получена точка $X^* = (x^*, y^*)^T$ − безусловный локальный минимум функции, $f(X^*) = f^*$.

***Численное решение задачи с точностью ε = 0.01 из начальной точки*** $X^0 = (-1.36, 2.1)$

**Методы 1-го порядка**

*Метод градиентного спуска (предельное число итераций N = 5)*

**Протокол расчета**

Выполнил: Иванов, группа 80-301, 29.03.2022

Квадратичная функция: $f(x_1,x_2)=1x_1^2+ -1x_1x_2+ 2x_2^2+ 4x_1+ 36x_2+ 0$

Метод градиентного спуска

Точность метода: 0.01, $N_{max}$ = 14, Количество итераций: 5

| $N_{ит}$ | шаг t | $x_1$ | $x_2$ | $f(x_1,x_2)$ | $f'_{x_1}$ | $f'_{x_2}$ | $\|\|\nabla f(x_1,x_2)\|\|$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.23 | -1.36 | 2.1 | 83.6856 | -0.82 | 45.76 | 45.76735 |
| 1 | 0.61 | -1.1714 | -8.4248 | -174.52052 | 10.082 | 3.4722 | 10.66316 |
| 2 | 0.23 | -7.32142 | -10.54284 | -210.11034 | -0.1 | 1.15005 | 1.15439 |
| 3 | 0.65 | -7.29842 | -10.80735 | -210.2703 | 0.21051 | 0.069 | 0.22153 |
| 4 | 0.23 | -7.43525 | -10.85221 | -210.28559 | -0.0183 | 0.02643 | 0.03214 |
| 5 | 0 | -7.43104 | -10.85828 | -210.28571 | -0.0038 | -0.0021 | 0.00434 |

**Критерий окончания выполнен**

**$||x - x^*|| = 0.00272$**

**$|f(x) - f(x^*)| = 1.0E-5$**

*Метод покординатного спуска (предельное число итераций N = 5)*

……………………………

**Методы 2-го порядка**

*Метод Ньютона (предельное число итераций N = 1)*

……………………………

**Методы 0-го порядка**

*Метод Нелдера-Мида (предельное число итераций N = 8)*

……………………………