**Московский авиационный институт**

**(Национальный исследовательский университет)**

Факультет прикладной математики и физики

Кафедра вычислительной математики и программирования

**Лабораторная работа № 5**

по курсу «Численные методы»

Студент: Аксенов А. Е.

Группа: М80-408Б-20

Преподаватель: Пивоваров Д. Е.

Оценка:

Москва, 2023

**Лабораторная №5**

Задание

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением . Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров .

Вариант 1

, ,



.

Аналитическое решение: .

Теория

Классическим примером уравнения параболического типа является уравнение теплопроводности (диффузии). В одномерном по пространству случае однородное (без источников энергии) уравнение теплопроводности имеет вид

Граничные условия первого рода:

Начальные условия:

Задача (1) - (4) называется первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности.

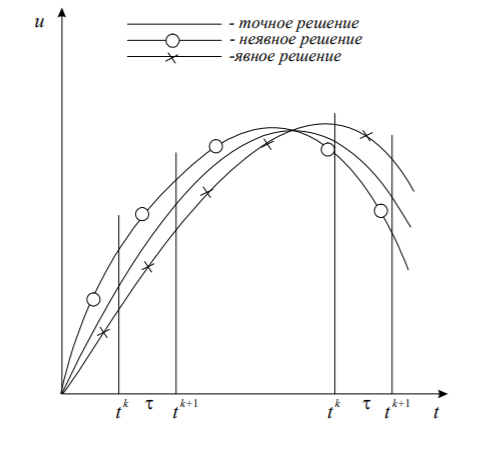
Если же на границах заданы значения производных искомых функций по пространственной переменной

То есть граничные условия второго рода, то задачу (1), (5), (6), (4) называют второй начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности (1).

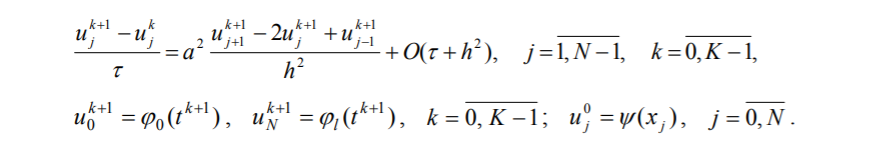
Если на границах заданы линейные комбинации искомой функции и ее производной по пространственной переменной.

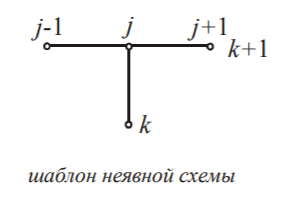
То есть граничные условия третьего рода, то задачу (1), (7), (8), (4) называют третьей начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности (1).

Рассмотрим три схемы для решения задачи:

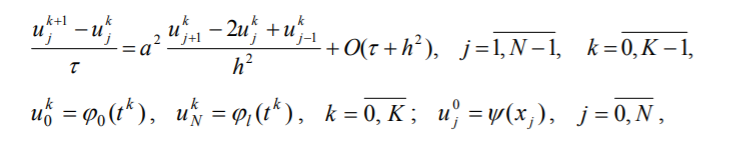


Неявная схема





Явная схема



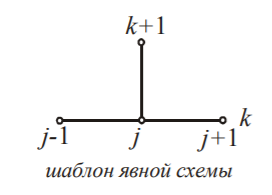
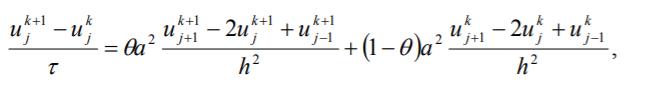
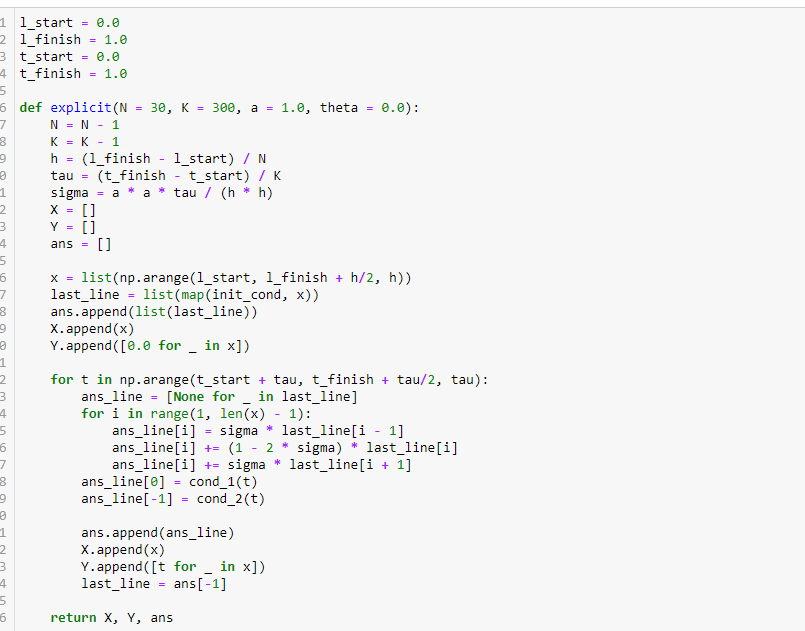


Схема Кранка-Николсона

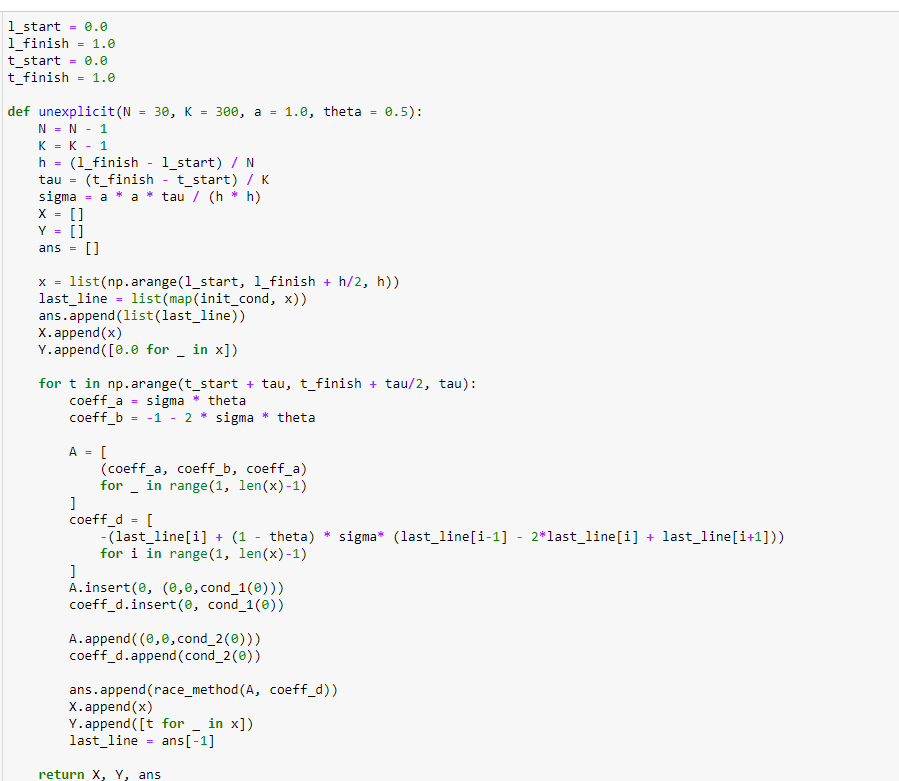


где θ - вес неявной части конечно-разностной схемы, 1−θ - вес для явной части, причем 0≤θ≤1. При θ=1 имеем полностью неявную схему, при θ=0 - полностью явную схему, и при θ=1/2 - схему Кранка-Николсона. Для схемы Кранка-Николсона (θ=1/2) порядок аппроксимации составляет , т.е. на один порядок по времени выше, чем обычные явная или неявная схемы. Неявно-явная схема с весами (5.20) абсолютно устойчива при 1/2≤θ≤1 и условно устойчива с условием σ ≤ при 0≤θ

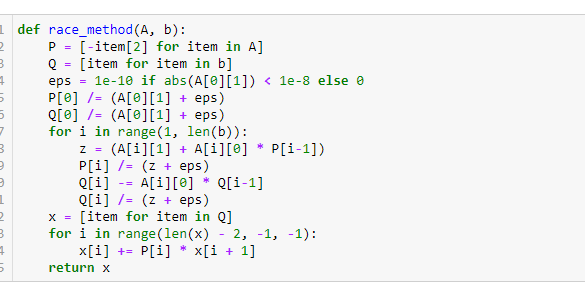
Явный метод



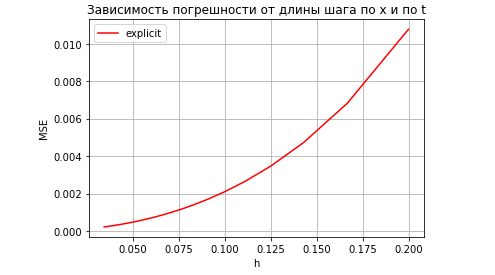
Неявный и KN



Прогонка



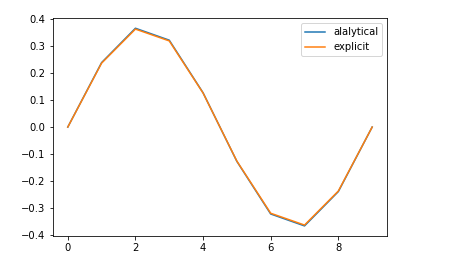
Погрешности

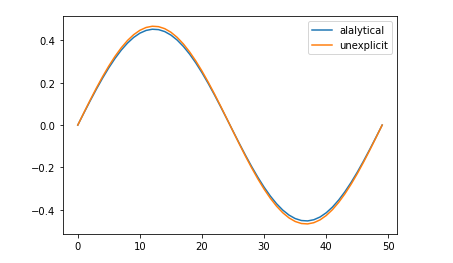


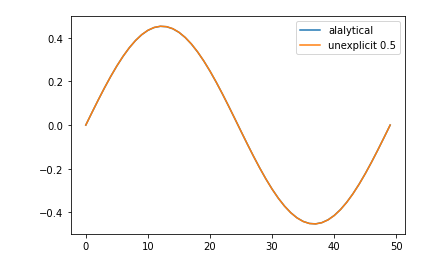




Численные и аналитические кривые в последний момент времени







Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы я познакомился со следующими схемами аппроксимации: 1) Явная 2) Неявная 3) Кранекера – Николсона. Также мной были построены графики зависимости ошибки от размера шага по пространству. C увеличением размера шага растет ошибка, что говорит о том, что алгоритмы сходятся. Также я отрисовал графики аналитического и численного решения в последний момент времени. Графики оказались близки друг к другу. Данный факт говорит о том, что алгоритмы сходятся.