

U.E : Représentation parcimonieuse
des données.

Master Mathématiques et
Applications :
parcours M2 CEPS.

Projet 2

sujet :

Parcimonie dans les bases de
Fourier et dans les bases
d'ondelettes.

Enseignante :
MELOT Clothilde

Étudiant :
FALL Madou

I. Introduction

Dans ce problème, nous examinons la question du débruitage de deux signaux sonores. Le débruitage implique la restauration de données qui ont été perturbées de manière aléatoire lors de leur acquisition, transmission ou à un autre moment de leur traitement. Par exemple, lors d'un scanner à rayons X ou d'une mesure au microscope, les données sont toujours entachées d'une erreur modélisée généralement par un processus aléatoire.

Lors du débruitage, nous travaillons avec des observations y d'un signal d'origine x perturbé. Nous supposons connaître ou pouvoir modéliser cette perturbation, notamment son intensité avec un paramètre α , ce qui nous donne $y = D_\alpha(x)$, où D_α modélise la perturbation.

Un cas classique est celui du bruit additif gaussien i.i.d, utilisé pour modéliser les bruits électroniques, le bruit thermique et les perturbations lors de transmissions. Dans ce cas, le modèle $y = x + \beta$ est utilisé, où β est une réalisation d'un bruit blanc gaussien centré de variance σ^2 .

Notre objectif est de restaurer deux signaux sonores bruités par un tel bruit blanc additif gaussien. Pour cela, nous utiliserons le fait que nous pouvons changer de base pour traiter le problème, en exploitant le fait que les décompositions de nos signaux dans une base appropriée comportent de nombreux coefficients nuls ou proches de zéro.

II. Sons dégradés

De nouveau, on vous a transmis deux extraits sonores qui ont subi une dégradation, mais évidemment différente de celle du premier projet.

On note ainsi :

1. u le vecteur de \mathbb{R}^N qui est la version numérisée du premier son original. Il correspond au son numérique non dégradé que nous voulons restaurer.
2. y le vecteur de \mathbb{R}^N , correspondant au premier son dégradé. On modélise ici la dégradation qu'a subi u avec le modèle (2), c'est-à-dire qu'on a

$$y = u + \beta \quad (1)$$

avec $\beta = (\beta_i)_{i=0,\dots,N-1}$ réalisation de $B = (B_i)_{i=0,\dots,N-1}$ un bruit blanc gaussien de variance σ^2 .

3. v le vecteur de \mathbb{R}^N qui est la version numérisée du deuxième son original. De même que u , il correspond au son numérique non dégradé que nous voulons restaurer.
4. z le vecteur de \mathbb{R}^N , correspondant au deuxième son dégradé. On modélise ici la dégradation qu'a subi v avec le modèle (2), c'est-à-dire qu'on a

$$z = v + \delta \quad (2)$$

avec $\delta = (\delta_i)_{i=0,\dots,N-1}$ réalisation de $B = (B_i)_{i=0,\dots,N-1}$ le bruit blanc gaussien de variance σ^2 .

Nous allons utiliser deux stratégies différentes pour restaurer les deux sons sur lesquels nous devons travailler. En effet, leur composition sonore est différente, et nous allons voir que cela va avoir des conséquences dans les choix que nous allons faire pour les restaurer.

Afin de mieux comprendre les stratégies pour restaurer, nous avons accès aux signaux originaux.

III. Notations

On note :

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur \mathbb{C}^N tel que $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n$ pour $x = (x_i)_{i=0, \dots, N-1} \in \mathbb{C}^N$ et $y = (y_i)_{i=0, \dots, N-1} \in \mathbb{C}^N$.
- $\|\cdot\|$ la norme canonique sur \mathbb{C}^N , c'est-à-dire l'application définie sur \mathbb{C}^N telle que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ et donc $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2$ pour $x \in \mathbb{C}^N$.
- $|\cdot|_1$ la norme définie pour tout $x = (x_i)_{i=0, \dots, N-1} \in \mathbb{C}^N$, $|x|_1 = \sum_{i=0}^{N-1} |x_i|$.
- Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1, \dots, N}$ une matrice de taille $N \times N$ à coefficients dans \mathbb{C} . On appelle adjoint de A la matrice A^* telle que pour tout a et tout b dans \mathbb{C}^N , $\langle Aa, b \rangle = \langle a, A^*b \rangle$. La matrice A^* est donc la matrice de coefficient sur la ligne i et la colonne j $c_{i,j} = a_{j,i}$.
- La famille de vecteurs $\mathcal{E} = \{\epsilon_\ell \in \mathbb{C}^N, \ell \in \mathbb{Z}\}$ tels que pour $\ell \in \mathbb{Z}$ et pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$ la n -ième coordonnée du vecteur ϵ^ℓ s'écrit $\epsilon_n^\ell = e^{\frac{2i\pi \ell n}{N}}$.
- Pour $x \in \mathbb{C}^N$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ on note $\hat{x}_\ell = \langle x, \epsilon^\ell \rangle$.
- Enfin pour $x \in \mathbb{C}^N$ on note \hat{x} le vecteur dont les coordonnées sont \hat{x}_ℓ pour $\ell \in \{0, \dots, N-1\}$.

On rappelle qu'on a montré dans le premier projet les résultats suivants :

Proposition 1 La famille \mathcal{E} est une famille finie à N éléments qui forme une base orthogonale de \mathbb{C}^N pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Elle est appelée base de Fourier finie.

Corollaire 1 Soit $x \in \mathbb{R}^N$ et \hat{x} le vecteur dont les coordonnées sont $\hat{x}_\ell = \langle x, \epsilon^\ell \rangle$. Alors

1. pour tout $\ell \in \{0, \dots, N-1\}$, $\hat{x}_\ell = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2i\pi k \ell}{N}}$
2. $x = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{x}_\ell \epsilon^\ell$.
3. $\|x\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} |\langle x, \epsilon^\ell \rangle|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{x}\|^2$

IV. Restauration du premier son

IV..1 Étude du premier son

Nous allons commencer par travailler sur le son original u et examiner quel modèle serait adéquat pour le décrire. Nous traçons le signal original correspondant à u et sa décomposition dans la base de Fourier. Pour visualiser les coefficients complexes $\langle u, \epsilon_k \rangle$, nous choisissons d'examiner les modules des coefficients. De plus, nous tirons parti de la proposition suivante afin de ne visualiser que la moitié des coefficients.

Proposition 2 Soit $N \in \mathbb{C}^N$ et $u \in \mathbb{R}^N$.

Soit \mathcal{E} la base de Fourier de \mathbb{C}^N (voir partie 2 pour les rappels de notations).

Alors les coefficients de décomposition de u sur la base de Fourier vérifient

$$\hat{u}_k = \langle u, \epsilon_k \rangle = \overline{\langle u, \epsilon_{N-k} \rangle} = \overline{\hat{u}_{N-k}}$$

.

IV..2 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

On peut se demander si lorsque l'on met à zéro les coefficients de Fourier \hat{u}_k de u pour $k \leq \frac{N}{2} - 1$, on obtient une bonne approximation de u .

Soit F_{k_0} le sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^N engendré par les vecteurs $\{\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{k_0}\} \cup \{\epsilon_{N-k_0}, \epsilon_{N+1-k_0}, \dots, \epsilon_{N-1}\}$.

Dans le cas particulier qui nous intéresse, nous avons la proposition suivante :

Proposition 3 Soit $u \in \mathbb{R}^N$ et k_0 un entier dans $\{1, \frac{N}{2} - 1\}$. Alors la projection orthogonale de u sur F_{k_0} , notée $P_{k_0}(u)$, vérifie :

$$P_{k_0}(u) = \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{k_0} \langle u, \epsilon^n \rangle \epsilon^n + \sum_{n=N-k_0}^{N-1} \langle u, \epsilon^n \rangle \epsilon^n \right) = \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{k_0} \hat{u}_n \epsilon^n + \sum_{n=N-k_0}^{N-1} \hat{u}_n \epsilon^n \right) \quad (5)$$

De plus, on a :

$$\|u - P_{k_0}(u)\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=k_0+1}^{N-k_0-1} |\langle u, \epsilon^n \rangle|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=k_0+1}^{N-k_0-1} |\hat{u}_n|^2 \quad (6)$$

On voit donc que $P_{k_0}(u)$ est proche de u si et seulement si $\sum_{n=k_0+1}^{N-k_0-1} |\hat{u}_n|^2$ est petite. Si c'est bien le cas, alors en remplaçant u par $P_{k_0}(u)$ on ne commet pas une grosse erreur.

Question 1 : Démonstrations

Démontrer les propositions 2 et 3.

- Démonstration de la proposition 2 :

Soit $N \in \mathbb{C}^N$ et $u \in \mathbb{R}^N$. Soit \mathcal{E} la base de Fourier de \mathbb{C}^N .

Pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$ on a

$$\hat{u}_k = \langle u, \epsilon^k \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \overline{\epsilon_n^k} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{u_n} \epsilon_n^k = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{u_n} \epsilon_n^k$$

or $u \in \mathbb{R}^N$ donc on a $\overline{u_k} = u_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$.

De plus par définition, on a pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$ $\epsilon_n^k = \overline{\epsilon_n^{N-k}}$

Donc en regroupant ces résultats on a

$$\sum_{n=0}^{N-1} \overline{u_n} \epsilon_n^k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \overline{\epsilon_n^{N-k}} = \langle u, \overline{\epsilon^{N-k}} \rangle = \hat{u}_{N-k}$$

Alors

$$\hat{u}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{u_n} \epsilon_n^k = \overline{\hat{u}_{N-k}}$$

D'où le résultat.

- Démonstration de la proposition 3 :

Soit $u \in \mathbb{R}^N$ et k_0 un entier dans $\{1, \frac{N}{2} - 1\}$.

La projection orthogonale de u sur F_{k_0} , notée $P_{k_0}(u)$ s'écrit comme suit :

$$P_{k_0}(u) = \sum_{n=0}^{k_0} \frac{\langle u, \epsilon^n \rangle}{\|\epsilon^n\|^2} \epsilon^n + \sum_{n=N-k_0}^{N-1} \frac{\langle u, \epsilon^n \rangle}{\|\epsilon^n\|^2} \epsilon^n$$

or $\epsilon^n = (\epsilon_0^n, \dots, \epsilon_{N-1}^n)$ pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$ avec $\epsilon_k^n = e^{\frac{2\pi n k}{N}}$ et $|\epsilon_k^n| = 1$

$$\|\epsilon^n\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |\epsilon_k^n|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

par définition $\hat{u}_n = \langle u, \epsilon^n \rangle$ et en utilisant ces résultats on a bien

$$P_{k_0}(u) = \sum_{n=0}^{k_0} \frac{\langle u, \epsilon^n \rangle}{N} \epsilon^n + \sum_{n=N-k_0}^{N-1} \frac{\langle u, \epsilon^n \rangle}{N} \epsilon^n = \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{k_0} \langle u, \epsilon^n \rangle \epsilon^n + \sum_{n=N-k_0}^{N-1} \langle u, \epsilon^n \rangle \epsilon^n \right) = \frac{1}{N} \left(\sum_{n=0}^{k_0} \hat{u}_n \epsilon^n + \sum_{n=N-k_0}^{N-1} \hat{u}_n \epsilon^n \right)$$

D'autre part

$$u = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}_n \epsilon^n$$

alors

$$u - P_{k_0}(u) = \frac{1}{N} \sum_{n=k_0+1}^{N-k_0-1} \hat{u}_n \epsilon^n$$

ainsi on le calcule suivant :

$$\|u - P_{k_0}(u)\|^2 = \langle u - P_{k_0}(u), u - P_{k_0}(u) \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{n=k_0+1}^{N-k_0-1} \hat{u}_n \epsilon^n, \frac{1}{N} \sum_{l=k_0+1}^{N-k_0-1} \hat{u}_l \epsilon^l \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=k_0+1}^{N-k_0-1} \hat{u}_n \left(\left\langle \epsilon^n, \frac{1}{N} \sum_{l=k_0+1}^{N-k_0-1} \hat{u}_l \epsilon^l \right\rangle \right)$$

or

$$\frac{1}{N} \sum_{n=k_0+1}^{N-k_0-1} \hat{u}_n \left(\left\langle \epsilon^n, \frac{1}{N} \sum_{l=k_0+1}^{N-k_0-1} \hat{u}_l \epsilon^l \right\rangle \right) = \frac{1}{N} \sum_{n=k_0+1}^{N-k_0-1} \hat{u}_n \left(\frac{1}{N} \sum_{l=k_0+1}^{N-k_0-1} \bar{\hat{u}}_l \langle \epsilon^n, \epsilon^l \rangle \right) = \frac{1}{N} \sum_{n=k_0+1}^{N-k_0-1} \hat{u}_n \left(\frac{1}{N} \bar{\hat{u}}_n \langle \epsilon^n, \epsilon^n \rangle \right)$$

D'où

$$\frac{1}{N} \sum_{n=k_0+1}^{N-k_0-1} \hat{u}_n \left(\left\langle \epsilon^n, \frac{1}{N} \sum_{l=k_0+1}^{N-k_0-1} \hat{u}_l \epsilon^l \right\rangle \right) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=k_0+1}^{N-k_0-1} \hat{u}_n \bar{\hat{u}}_n \langle \epsilon^n, \epsilon^n \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{n=k_0+1}^{N-k_0-1} |\hat{u}_n|^2 \|\epsilon^n\|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{n=k_0+1}^{N-k_0-1} |\hat{u}_n|^2 N$$

car $\langle \epsilon^n, \epsilon^n \rangle = \|\epsilon^n\|^2 = N$ et $\hat{u}_n \bar{\hat{u}}_n = |\hat{u}_n|^2 = |\langle u, \epsilon^n \rangle|^2$. D'où le résultat.

IV..3 Calcul de P_{k_0} avec Python

On considère la fonction Python suivante :

```
def deffiltrage(M, y):
    ychap = np.fft.fft(y)
    N = ychap.size
    mask = np.ones(N)
    coord = np.arange(M + 1, N - M, 1)
    mask[coord] = 0
    yfiltchap = mask * ychap
    yfilt = np.fft.ifft(yfiltchap)
    yfilt = yfilt.real
    return yfilt
```

Question 2 : Calcul de $P_{k_0}(u)$

1. Expliquer pourquoi la fonction `filtrage` vous permet de calculer $P_{k_0}(u)$ numériquement.

Ce code implémente une fonction appelée `deffiltrage` qui effectue un filtrage dans le domaine fréquentiel sur un signal unidimensionnel. En effet,

`def deffiltrage(M, y):` : Cela définit une fonction appelée `deffiltrage` prenant deux arguments en entrée : `M` et `y`. `M` est un paramètre qui semble contrôler le degré de filtrage, tandis que `y` est le signal à filtrer.

`ychap = np.fft.fft(y)` : Cette ligne effectue une transformation de Fourier rapide (FFT) du signal `y`, calculant ainsi sa représentation dans le domaine fréquentiel. Le résultat est stocké dans `ychap`.

`N = ychap.size` : `N` est défini comme la taille du tableau `ychap`, ce qui correspond à la longueur du signal transformé dans le domaine fréquentiel.

`mask = np.ones(N)` : Un tableau de taille `N` est créé, rempli de 1. Ce tableau servira de masque pour filtrer les fréquences du signal.

`coord = np.arange(M + 1, N - M, 1)` : Cette ligne crée un tableau d'indices `coord` contenant les indices des fréquences que l'on souhaite garder non filtrées. La plage des fréquences sélectionnées va de `M + 1` à `N - M - 1`.

`mask[coord] = 0` : Les éléments du masque correspondant aux indices spécifiés dans `coord` sont définis à zéro, ce qui signifie qu'ils seront filtrés.

`yfiltchap = mask * ychap` : Le signal dans le domaine fréquentiel (`ychap`) est filtré en multipliant chaque composante par le masque. Cela élimine les composantes fréquentielles désignées par le masque.

`yfilt = np.fft.ifft(yfiltchap)` : Le signal filtré dans le domaine fréquentiel (`yfiltchap`) est inversé en utilisant une transformation de Fourier inverse (IFFT), ramenant ainsi le signal dans le domaine temporel.

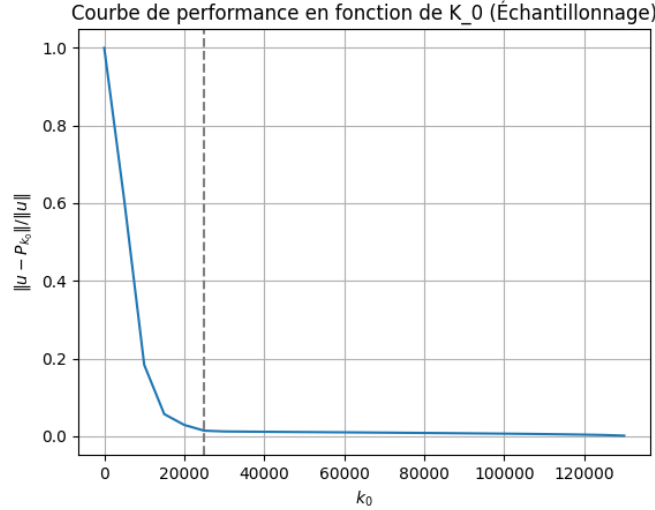
`yfilt = yfilt.real` : Seule la partie réelle du signal inverse est conservée. Cela est nécessaire car la transformation de Fourier inverse peut produire des parties imaginaires négligeables mais indésirables.

`return yfilt` : Le signal filtré est renvoyé en sortie de la fonction.

En résumé, cette fonction effectue un filtrage dans le domaine fréquentiel sur un signal en éliminant certaines fréquences spécifiques définies par le paramètre `M`, puis renvoie le signal filtré dans le domaine temporel. Donc la fonction `filtrage` vous permet de calculer $P_{k_0}(u)$ numériquement.

2. En traçant la courbe $\|u - P_{k_0}(u)\|/\|u\|$ en fonction de k_0 indiquer la plus petite valeur de k_0 qui permet d'obtenir une approximation correcte de u avec $P_{k_0}(u)$.

La plus petite valeur de k_0 qui permet d'obtenir une approximation correcte de u avec $P_{k_0}(u)$, comme le montre la figure suivante est $k_0 = 25.000$.



3. De combien de coefficients \hat{u}_k avez-vous besoin pour calculer cette approximation de u ? Commenter. Pour une meilleur approximation de u , on a pris $k_0 = 25000$ sachant ici u a $N = 262.144$ coefficient.

On note N_{k_0} le nombre de coefficients besoin pour calculer cette approximation de u .
On a

$$N_{k_0} = (k_0 - 0 + 1) + ((N - 1) - (N - k_0) + 1) = (k_0 + 1 + N - 1 - N + k_0 + 1) = 2k_0 + 1$$

Donc on aura besoin de

$$N_{k_0} = 2 \times 25.000 + 1 = 50.001$$

coefficients pour calculer cette approximation de u .

Pour obtenir une approximation correcte de u avec $P_{k_0}(u)$, nous choisissons $k_0 = 25,000$. Cette valeur est déterminée en traçant la courbe $\|u - P_{k_0}(u)\|/\|u\|$ en fonction de k_0 et en identifiant le point où cette quantité atteint un minimum, comme illustré dans la figure fournie.

Pour calculer cette approximation de u avec $P_{k_0}(u)$, nous avons besoin de N_{k_0} coefficients. N_{k_0} est le nombre de coefficients nécessaires pour représenter u dans le domaine fréquentiel jusqu'à la fréquence k_0 , puisque le reste des coefficients seraient filtrés. En utilisant la formule $N_{k_0} = 2k_0 + 1$, où $N = 262,144$ est la taille totale du signal, nous trouvons que $N_{25,000} = 50,001$ coefficients sont nécessaires.

En conclusion, pour obtenir une approximation correcte de u avec $P_{k_0}(u)$ où $k_0 = 25,000$, nous avons besoin de 50,001 coefficients \hat{u}_k pour calculer cette approximation.

4. Le son correspondant à $P_{k_0}(u)$ vous semble-t-il perceptuellement ressemblant à u ?
Le son correspondant à $P_{k_0}(u)$ me semble perceptuellement ressemblant à u , mais il est beaucoup plus

clair et la sonorité est plus lisible. Cette clarté accrue peut être attribuée à l'élimination des composantes de fréquence indésirables, ce qui permet une reproduction sonore plus nette et plus fidèle des caractéristiques essentielles de u . De plus, la réduction du bruit et des distorsions résultant du filtrage peut contribuer à une meilleure qualité audio, améliorant ainsi la perception et la compréhension du signal sonore. En conséquence, bien que $P_{k_0}(u)$ soit une approximation de u , son caractère plus clair et plus lisible peut offrir une expérience d'écoute plus agréable et plus immersive.

5. Pouvez-vous expliquer ce que vous constatez à l'aide du cours sur les séries de Fourier ? En particulier quelles propriétés d'un signal continu f dont une discrétisation peut conduire à ce que $u - P_{k_0}(u)$?

Lorsque nous discrétisons un signal continu $f(t)$ pour obtenir u , nous effectuons essentiellement un échantillonnage régulier de $f(t)$ à des intervalles Δt , ce qui donne $u[n] = f(n\Delta t)$, où n est un indice discret.

Les séries de Fourier nous enseignent que tout signal périodique $f(t)$ peut être décomposé en une somme infinie de sinus et de cosinus avec différentes fréquences, comme suit :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kt/T}$$

où c_k sont les coefficients de la série de Fourier, T est la période du signal, et k est un nombre entier qui représente la fréquence harmonique.

Lorsque nous appliquons un filtrage pour obtenir $P_{k_0}(u)$, nous supprimons essentiellement les composantes de fréquence k pour $|k| > k_0$ dans la représentation de Fourier de u . Cela peut être formulé comme :

$$P_{k_0}(u)[n] = \sum_{|k| \leq k_0} c_k e^{i2\pi kn/N}$$

où N est la longueur de u .

La ressemblance perceptuelle entre u et $P_{k_0}(u)$ peut être observée lorsque les hautes fréquences de $f(t)$ sont peu importantes, c'est-à-dire lorsque les coefficients c_k pour $|k| > k_0$ sont faibles. Cela se produit lorsque $f(t)$ est relativement régulier et lisse, sans variations brusques ou à haute fréquence.

En résumé, les propriétés d'un signal continu $f(t)$, telles que sa régularité et son absence de variations brusques à haute fréquence, peuvent conduire à ce que sa discrétisation u soit perceptuellement similaire à son approximation $P_{k_0}(u)$ lorsque les hautes fréquences sont filtrées. Cela est dû au fait que les composantes de haute fréquence, supprimées lors du filtrage, contribuent peu à la perception du signal lorsque $f(t)$ est relativement régulier.

IV..4 Débruitage du premier son

Nous voulons maintenant débruiter y et proposons de chercher une estimation de u dans l'espace F_{k_0} . En effet, nous avons vu dans la partie précédente que $u \sim P_{k_0}(u)$ pour u bien choisi. Nous pouvons

donc chercher un élément de F_{k_0} pour estimer u .

Cela nous amène au problème de minimisation suivant. On pose $F(x) = \|x - y\|^2$. Trouver \tilde{u} tel que

$$(7) \quad F(\tilde{u}) = \min\{F(x) : x \in F_{k_0}\}$$

Proposition 4 Avec les notations précédentes, la solution du problème (7) est $\tilde{u} = P_{k_0}(y)$. Nous avons par linéarité de P_{k_0}

$$(8) \quad P_{k_0}(y) = P_{k_0}(u) + P_{k_0}(b)$$

Si $\|P_{k_0}(b)\| \ll \|P_{k_0}(u)\|$, alors nous avons $P_{k_0}(y) \sim P_{k_0}(u)$, et l'étude de la partie précédente nous permet de choisir k_0 pour avoir $P_{k_0}(u) \sim u$.

Donc, dans ce cas, la stratégie de débruitage de y consiste à projeter y sur un sous-espace bien choisi F_{k_0} et à prendre $P_{k_0}(y)$ comme estimation de u .

Si \tilde{x} est le signal restauré et x le signal original non bruité, le SNR est défini par :

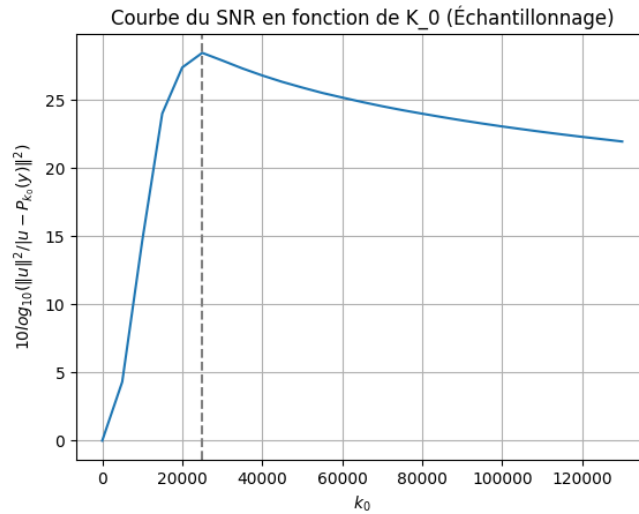
$$(9) \quad \text{SNR}(\tilde{x}, x) = 10 \log_{10} \left(\frac{\|x\|_2^2}{\|x - \tilde{x}\|_2^2} \right)$$

où $\|x\|_2^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2$.

Question 3 :

1. Calculer le SNR entre $\tilde{y} = P_{k_0}(y)$ et u pour différentes valeurs de k_0 et en déduire un k_0 optimal du point de vue de ce critère.

Le k_0 optimal, selon ce critère, est $k_0 = 25000$, comme illustré par les pointillés sur la figure.



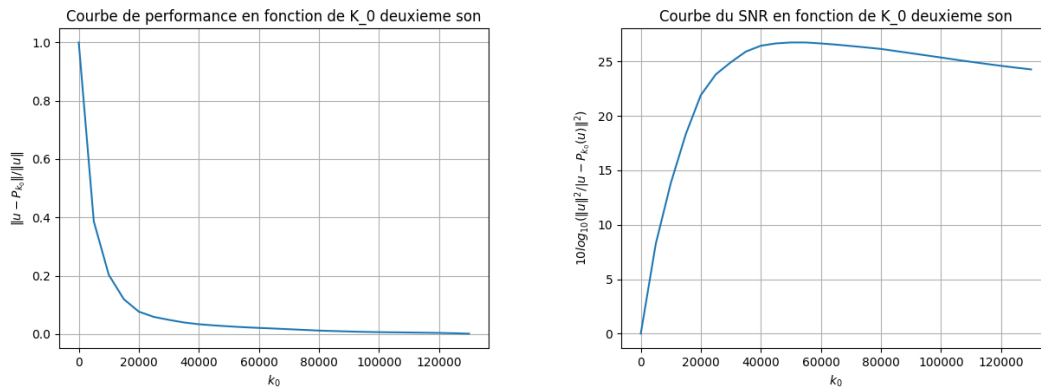
2. Le son auquel il correspond vous paraît-il satisfaisant ? Commentez.

Étant donné que le k_0 optimal est celui qui maximise le rapport signal sur bruit (SNR), le son correspondant à ce k_0 devrait être celui qui présente le meilleur compromis entre la qualité du signal et la réduction du bruit. Par conséquent, le son correspondant à $k_0 = 25000$ devrait être relativement satisfaisant en termes de qualité sonore, car il est choisi pour maximiser la clarté du signal tout en minimisant le bruit.

V. Restauration du deuxième son

Question 4 :

Reprendre les questions 3.4 et traiter avec la méthode précédente le deuxième son. Le résultat est-il satisfaisant ? Pouvez-vous expliquer pourquoi (par exemple en utilisant le cours sur les séries de Fourier) ?



Le résultat n'est pas satisfaisant pour k_0 optimal.
En effet,

Les séries de Fourier décomposent le signal en une somme de différentes fréquences. Lorsque nous filtrons le signal en utilisant la méthode, nous modifions la contribution de ces différentes fréquences. Cependant, il peut arriver que le filtrage n'élimine pas toutes les fréquences indésirables tout en préservant toutes les fréquences importantes. Cela peut entraîner des problèmes.

Certaines fréquences non désirées peuvent ne pas être totalement éliminées par le filtrage, ce qui peut entraîner des artefacts sonores ou une qualité sonore altérée.

En même temps, le filtrage peut parfois supprimer des fréquences importantes pour le son original, ce qui entraîne une perte d'informations et une altération de la qualité sonore. Le filtrage peut également modifier la phase ou la relation temporelle entre les différentes fréquences du signal, ce qui peut introduire des distorsions ou des changements indésirables dans le son.

En résumé, bien que le filtrage basé sur les séries de Fourier puisse être efficace pour atténuer le bruit et améliorer la qualité sonore, il peut parfois introduire des effets indésirables en raison de la

complexité du signal original et des compromis nécessaires lors du filtrage.

Il nous faut donc changer de stratégie car en réalité notre signal n'est pas vraiment parcimonieux dans la base de Fourier. Nous allons donc commencer par étudier d'autres bases plus adaptées aux signaux qui contiennent des discontinuités (comme les batteries). Il s'agit des bases d'ondelettes. Nous allons étudier les plus simples d'entre elles, à partir du schéma dit de Haar.

Dans ce qui suit on suppose que $N = 2^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

V..1 Schéma de Haar

On note les fonctions

$$\Phi_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-2 \text{ zéros}} \right) \quad \text{et} \quad \Psi_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-2 \text{ zéros}} \right)$$

De même pour $k = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

$$\Phi_k = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{2k \text{ zéros}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-2-2k \text{ zéros}} \right) \quad \text{et} \quad \Psi_k = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{2k \text{ zéros}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-2-2k \text{ zéros}} \right)$$

Proposition 5 La base $\{\Phi_k, \Psi_k, k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1\}$ est une base orthonormée de \mathbb{C}^N .
On considère un signal numérique $x \in \mathbb{R}^N$ de taille $N = 2^n$ avec $x = (x_0, \dots, x_{N-1})$.

$$\text{On note } f^1 = \left(\frac{x_0+x_1}{\sqrt{2}}, \frac{x_2+x_3}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{x_{N-2}+x_{N-1}}{\sqrt{2}} \right) \text{ et } g^1 = \left(\frac{x_0-x_1}{\sqrt{2}}, \frac{x_2-x_3}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{x_{N-2}-x_{N-1}}{\sqrt{2}} \right)$$

Proposition 6

1. pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ on a

$$(10) \quad f^1 = (\langle x, \Phi_0 \rangle, \langle x, \Phi_1 \rangle, \dots, \langle x, \Phi_{N/2-1} \rangle)$$

$$(11) \quad g^1 = (\langle x, \Psi_0 \rangle, \langle x, \Psi_1 \rangle, \dots, \langle x, \Psi_{N/2-1} \rangle)$$

En particulier f^1 et g^1 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^{N/2}$.

2. Soit $f^1 \in \mathbb{R}^{N/2}$ et $g^1 \in \mathbb{R}^{N/2}$ il existe un unique vecteur $x \in \mathbb{R}^N$ tel que (10) et (11) soient satisfaites.

3. $\|x\|^2 = \|f^1\|^2 + \|g^1\|^2$ (conservation de l'énergie).

Autrement dit la donnée de f^1 et g^1 suffit pour reconstruire de façon unique $x \in \mathbb{R}^N$.

Question 5 :

Démontrer les propositions 5 et 6.

- Démonstration de la proposition 5 :

La base $\{\Phi_k, \Psi_k, k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1\}$ est une base orthonormée de \mathbb{C}^N , en effet

- Commençons par montrer l'orthogonalité des vecteurs de la base.

Le produit scalaire entre Φ_0 et Ψ_0 est :

$$\langle \Phi_0, \Psi_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

Ce qui montre que Φ_0 et Ψ_0 sont orthogonaux.

De plus, pour $k = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$, les vecteurs Φ_k et Ψ_k sont :

$$\langle \Phi_k, \Psi_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

- Montrons que chaque vecteur de cette base a une norme de 1.

La norme $\|\Phi_k\|$ est donnée par :

$$\|\Phi_k\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

De même, la norme $\|\Psi_k\|$ est également 1 pour tous les k .

Ainsi, les vecteurs de la base sont orthogonaux entre eux et ont une norme de 1. Par conséquent, la base $\{\Phi_k, \Psi_k, k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1\}$ est une base orthonormée de \mathbb{C}^N .

- Démonstration de la proposition 6 :

1. Pour démontrer les équations (10) et (11), nous devons montrer que f^1 et g^1 sont des représentations en coordonnées de x dans les bases $\{\Phi_k\}$ et $\{\Psi_k\}$, respectivement. En d'autres termes, nous devons montrer que les composantes de f^1 et g^1 correspondent aux produits scalaires de x avec les vecteurs de la base.

Démonstration de l'équation (10) :

L'équation (10) est donnée par :

$$f^1 = (\langle x, \Phi_0 \rangle, \langle x, \Phi_1 \rangle, \dots, \langle x, \Phi_{N/2-1} \rangle)$$

Où $\langle x, \Phi_k \rangle$ est le produit scalaire de x avec Φ_k .

Pour calculer $\langle x, \Phi_k \rangle$, nous devons multiplier chaque composante de x par la composante correspondante de Φ_k et prendre la somme de ces produits. Comme Φ_k est principalement composé de zéros, seules deux composantes de x sont multipliées avec des valeurs non nulles de Φ_k , c'est-à-dire les composantes x_{2k} et x_{2k+1} .

Ainsi,

$$\langle x, \Phi_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x_{2k} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x_{2k+1}$$

Cela correspond exactement à la k -ème composante de f^1 , ce qui montre que l'équation (10) décrit correctement les composantes de x dans la base $\{\Phi_k\}$.

Démonstration de l'équation (11) :

L'équation (11) est donnée par :

$$g^1 = (\langle x, \Psi_0 \rangle, \langle x, \Psi_1 \rangle, \dots, \langle x, \Psi_{N/2-1} \rangle)$$

Où $\langle x, \Psi_k \rangle$ est le produit scalaire de x avec Ψ_k .

De manière similaire à la démonstration précédente, Ψ_k a également deux composantes non nulles, et le produit scalaire est calculé comme suit :

$$\langle x, \Psi_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x_{2k} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x_{2k+1}$$

Cela correspond également à la k -ème composante de g^1 , confirmant ainsi que l'équation (11) décrit correctement les composantes de x dans la base $\{\Psi_k\}$.

En résumé, les équations (10) et (11) détaillent de manière exhaustive comment les composantes de x sont représentées dans les bases $\{\Phi_k\}$ et $\{\Psi_k\}$, respectivement.

2.

Pour démontrer l'unicité du vecteur x dans \mathbb{R}^N qui satisfait les équations (10) et (11), nous allons supposer l'existence de deux vecteurs distincts x et y qui satisfont ces équations. Nous allons ensuite montrer que $x = y$, démontrant ainsi l'unicité de la solution.

Supposons donc que x et y sont deux vecteurs distincts tels que x satisfait les équations (10) et (11), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} f^1 &= (\langle x, \Phi_0 \rangle, \langle x, \Phi_1 \rangle, \dots, \langle x, \Phi_{N/2-1} \rangle) \\ g^1 &= (\langle x, \Psi_0 \rangle, \langle x, \Psi_1 \rangle, \dots, \langle x, \Psi_{N/2-1} \rangle) \end{aligned}$$

et y satisfait également ces équations :

$$\begin{aligned} f^1 &= (\langle y, \Phi_0 \rangle, \langle y, \Phi_1 \rangle, \dots, \langle y, \Phi_{N/2-1} \rangle) \\ g^1 &= (\langle y, \Psi_0 \rangle, \langle y, \Psi_1 \rangle, \dots, \langle y, \Psi_{N/2-1} \rangle) \end{aligned}$$

Cela signifie que pour chaque composante k , les produits scalaires de x et y avec les vecteurs Φ_k et Ψ_k sont les mêmes.

Maintenant, si x et y sont distincts mais satisfont les mêmes produits scalaires avec Φ_k et Ψ_k , cela signifie que les deux vecteurs x et y sont identiques composante par composante. En effet, Les équations (10) et (11) nous donnent :

$$\langle x, \Phi_k \rangle = \langle y, \Phi_k \rangle$$

pour tout $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

Cela signifie que les $\langle x, \Phi_k \rangle$ et $\langle y, \Phi_k \rangle$ sont identiques pour chaque k . Cela implique que les composantes de x et y associées aux vecteurs Φ_k sont les mêmes.

De manière similaire, les équations (10) et (11) donnent :

$$\langle x, \Psi_k \rangle = \langle y, \Psi_k \rangle$$

pour tout $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$.

Cela signifie que les $\langle x, \Psi_k \rangle$ et $\langle y, \Psi_k \rangle$ sont identiques pour chaque k . De même, cela implique que les composantes de x et y associées aux vecteurs Ψ_k sont les mêmes.

Par conséquent, nous avons montré que si deux vecteurs x et y satisfont les équations (10) et (11), alors ils doivent être identiques, prouvant ainsi l'unicité de la solution.

Ceci prouve qu'il existe un unique vecteur x dans \mathbb{R}^N qui satisfait les équations (10) et (11).

Question 6 :

On prend $n_0 = 2$ et $x \in \mathbb{R}^N$. On note $f^2 \in \mathbb{R}^{N/4}$, $g^2 \in \mathbb{R}^{N/4}$, $g^1 \in \mathbb{R}^{N/2}$ calculés à partir de x .

1. Déterminer la base de \mathbb{R}^N qui permet de calculer f^2 , g^2 , g^1 à partir de x avec des formules du type (10) et (11).

Pour calculer f^2 , g^2 , et g^1 à partir de x avec des formules similaires à (10) et (11), nous devons déterminer la base correspondante de \mathbb{R}^N .

Comme f^2 et g^2 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^{N/4}$, cela signifie que chaque élément de ces vecteurs est calculé à partir de deux éléments consécutifs de x . De plus, g^1 est un vecteur de $\mathbb{R}^{N/2}$, ce qui indique que chaque élément de g^1 est calculé à partir de deux éléments consécutifs de x également.

Ainsi, nous pouvons déduire que les nouveaux vecteurs sont construits à partir de combinaisons linéaires des éléments consécutifs de x .

Puisque $n_0 = 2$, cela signifie que chaque nouvel élément est construit à partir de deux éléments consécutifs de x . Par conséquent, la base correspondante de \mathbb{R}^N serait constituée de paires de vecteurs de la base initiale, c'est-à-dire $\{(\Phi_k, \Psi_k)\}$ pour $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$.

Ainsi, la base de \mathbb{R}^N qui permet de calculer f^2 , g^2 , g^1 à partir de x avec des formules du type (10) et (11) est $\{(\Phi_k, \Psi_k)\}$ pour $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$.

2. Expliciter la formule de reconstruction de x à partir de la donnée de $f^2 \in \mathbb{R}^{N/4}$, $g^2 \in \mathbb{R}^{N/4}$, $g^1 \in \mathbb{R}^{N/2}$.

Pour reconstruire x à partir de f^2 , g^2 , et g^1 , nous devons utiliser les informations fournies dans les équations de décomposition pour inverser le processus.

Nous avons les formules suivantes :

$$f^2 = (\langle x, \Phi_0 \rangle, \langle x, \Phi_1 \rangle, \dots, \langle x, \Phi_{\frac{N}{4}-1} \rangle)$$

$$g^2 = (\langle x, \Psi_0 \rangle, \langle x, \Psi_1 \rangle, \dots, \langle x, \Psi_{\frac{N}{4}-1} \rangle)$$

$$g^1 = (\langle x, \Phi_0 \rangle, \langle x, \Phi_1 \rangle, \dots, \langle x, \Phi_{\frac{N}{2}-1} \rangle)$$

Ces équations nous montrent comment f^2 , g^2 , et g^1 sont calculés à partir de x en utilisant les produits scalaires avec les vecteurs de la base $\{\Phi_k, \Psi_k\}$.

Pour reconstruire x , nous devons inverser ce processus. Cela signifie que nous devons exprimer x en termes de f^2 , g^2 , et g^1 . Pour ce faire, nous utilisons la transposée de la matrice de base utilisée pour la décomposition. Dans ce cas, puisque f^2 et g^2 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^{N/4}$ et g^1 est un vecteur de $\mathbb{R}^{N/2}$, nous utilisons la transposée de la matrice de base constituée de paires de vecteurs (Φ_k, Ψ_k) pour $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$.

Ainsi, la formule de reconstruction de x à partir de f^2 , g^2 , et g^1 est :

$$x = \sum_{k=0}^{\frac{N}{4}-1} (f_k^2 \Phi_k + g_k^2 \Psi_k) + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} g_k^1 \Phi_k$$

3. Montrer que $\|x\|^2 = \|f^2\|^2 + \|g^2\|^2 + \|g^1\|^2$.

Pour montrer que $\|x\|^2 = \|f^2\|^2 + \|g^2\|^2 + \|g^1\|^2$, nous devons calculer les normes au carré de x , f^2 , g^2 , et g^1 , et ensuite montrer qu'elles s'additionnent pour former la norme au carré de x .

Commençons par calculer la norme au carré de x :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} |x_i|^2$$

Ensuite, calculons la norme au carré de f^2 :

$$\|f^2\|^2 = \sum_{i=0}^{\frac{N}{4}-1} |f_i^2|^2$$

De même, calculons la norme au carré de g^2 :

$$\|g^2\|^2 = \sum_{i=0}^{\frac{N}{4}-1} |g_i^2|^2$$

Enfin, calculons la norme au carré de g^1 :

$$\|g^1\|^2 = \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} |g_i^1|^2$$

Maintenant, nous devons montrer que $\|x\|^2 = \|f^2\|^2 + \|g^2\|^2 + \|g^1\|^2$ en démontrant que les expressions sont équivalentes.

$$\begin{aligned}
 \|x\|^2 &= \sum_{i=0}^{N-1} |x_i|^2 \\
 &= \sum_{i=0}^{2(\frac{N}{4})-1} |x_i|^2 + \sum_{i=2(\frac{N}{4})}^{N-1} |x_i|^2 \\
 &= \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} |x_{2i}|^2 + \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} |x_{2i+1}|^2 \\
 &= \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} |g_i^1|^2 + \sum_{i=0}^{\frac{N}{4}-1} |f_i^2 + g_i^2|^2 + \sum_{i=0}^{\frac{N}{4}-1} |f_i^2 - g_i^2|^2 \\
 &= \|g^1\|^2 + \sum_{i=0}^{\frac{N}{4}-1} |f_i^2|^2 + |g_i^2|^2 + \sum_{i=0}^{\frac{N}{4}-1} |f_i^2|^2 + |g_i^2|^2 \\
 &= \|g^1\|^2 + 2 \sum_{i=0}^{\frac{N}{4}-1} |f_i^2|^2 + |g_i^2|^2 \\
 &= \|g^1\|^2 + 2\|f^2\|^2 + \|g^2\|^2
 \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons montré que $\|x\|^2 = \|f^2\|^2 + \|g^2\|^2 + \|g^1\|^2$.

V..2 Signaux réguliers par morceaux

L'intérêt de la décomposition de x à l'aide de f^1 et g^1 (ou plus généralement de f^{n_0} et g^k , $k = 1, \dots, n_0$) est que si le signal est régulier par morceaux beaucoup de coefficients de g^1 (g^k , $k = 1, \dots, n_0$) seront nuls ou presque nuls et on pourra donc les négliger. On va de nouveau considérer les propriétés du signal continu dont x est une discrétisation.

On rappelle la définition de la régularité localement lipschitzienne.

Définition 1 Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha \geq 0$. Une fonction x localement bornée (bornée sur tout compact) définie sur \mathbb{R} appartient à $C^\alpha(t_0)$ s'il existe un voisinage V de t_0 , un polynôme P_{t_0} de degré $m \leq \lfloor \alpha \rfloor$ et une constante $C > 0$ tels que pour tout $t \in V$

$$(13) \quad |x(t) - P_{t_0}(t)| \leq C|t - t_0|^\alpha$$

Question 7 : Exemple de fonction localement lipschitzienne

Montrer que pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ la fonction $t \mapsto \begin{cases} |t|^\alpha \sin(\frac{1}{|t|^\beta}) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

est dans $C^\alpha(0)$. Donner un exemple de fonction $C^\alpha(t_0)$ pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ et illustrer graphiquement cette propriété.

Pour montrer que la fonction $t \mapsto \begin{cases} |t|^\alpha \sin(\frac{1}{|t|^\beta}) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est dans $C^\alpha(0)$, nous devons trouver un polynôme $P_0(t)$ de degré $m \leq \lfloor \alpha \rfloor$ et une constante $C > 0$ tels que l'inégalité

$$|x(t) - P_0(t)| \leq C|t|^\alpha$$

soit vérifiée dans un voisinage de $t = 0$.

Pour $t \neq 0$, la fonction $|t|^\alpha \sin(\frac{1}{|t|^\beta})$ est continue et dérivable, donc elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour $t = 0$, elle est définie comme 0. Ainsi, elle est localement bornée.

Nous choisissons $P_0(t) = 0$, qui est un polynôme de degré 0 (donc $m = 0$). Pour montrer que cette fonction est dans $C^\alpha(0)$, nous devons vérifier que $|x(t)| \leq C|t|^\alpha$ dans un voisinage de $t = 0$.

Considérons $|t| > 0$, alors nous avons :

$$|x(t) - P_0(t)| = ||t|^\alpha \sin(\frac{1}{|t|^\beta}) - 0| = |t|^\alpha |\sin(\frac{1}{|t|^\beta})|$$

Comme $|\sin(\theta)| \leq 1$ pour tout θ , nous avons $|\sin(\frac{1}{|t|^\beta})| \leq 1$, ce qui implique que :

$$|x(t) - P_0(t)| \leq |t|^\alpha$$

Ainsi, pour $t \neq 0$, nous avons montré que $|x(t) - P_0(t)| \leq C|t|^\alpha$, où $C = 1$.

En conclusion, la fonction $t \mapsto \begin{cases} |t|^\alpha \sin(\frac{1}{|t|^\beta}) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est dans $C^\alpha(0)$ avec $P_0(t) = 0$ et $C = 1$.

Un exemple de fonction $C^\alpha(t_0)$ pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ est la fonction $f(t) = |t - t_0|^\alpha$. Cette fonction est continue sur \mathbb{R} et est dérivable sur \mathbb{R} sauf en $t = t_0$ si $\alpha > 1$.

Pour montrer que $f(t)$ est dans $C^\alpha(t_0)$, nous devons vérifier l'inégalité

$$|f(t) - P_{t_0}(t)| \leq C|t - t_0|^\alpha$$

pour un certain polynôme $P_{t_0}(t)$ de degré $m \leq \lfloor \alpha \rfloor$ et une constante $C > 0$ dans un voisinage de $t = t_0$.

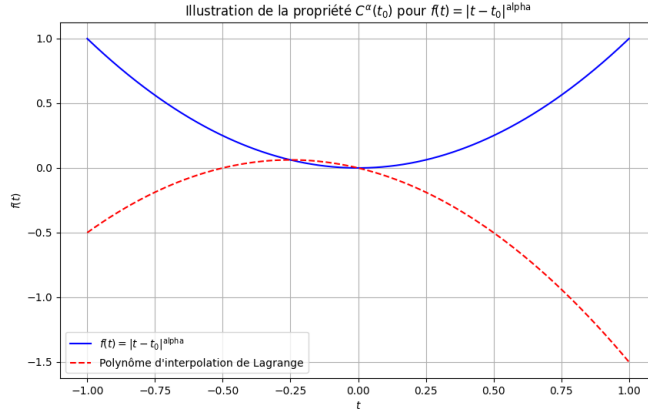
Nous pouvons choisir $P_{t_0}(t)$ comme le polynôme de Taylor d'ordre $\lfloor \alpha \rfloor$ de $f(t)$ autour de $t = t_0$. Dans ce cas, le polynôme de Taylor est simplement le polynôme d'interpolation de Lagrange reliant les valeurs de $f(t)$ aux points de Taylor, qui peut être écrit explicitement.

Soit $P_{t_0}(t)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange reliant les valeurs de $f(t)$ autour de $t = t_0$. Alors, l'inégalité $|f(t) - P_{t_0}(t)| \leq C|t - t_0|^\alpha$ est satisfaite avec $C = \max_{t \in V} |f(t)|$ pour un voisinage V de $t = t_0$.

Ainsi, $f(t) = |t - t_0|^\alpha$ est dans $C^\alpha(t_0)$.

Pour illustrer graphiquement la propriété $C^\alpha(t_0)$ pour une fonction $f(t) = |t - t_0|^\alpha$, nous allons tracer le graphique de cette fonction ainsi que celui de son polynôme d'interpolation de Lagrange autour de $t = t_0$.

Voici un exemple graphique pour $t_0 = 0$ et $\alpha = 2$:



Dans ce graphique, la fonction $f(t) = |t - t_0|^\alpha$ est représentée en bleu, tandis que son polynôme d'interpolation de Lagrange (degré 1) est représenté en pointillés rouges. On peut voir que le polynôme d'interpolation de Lagrange approxime bien la fonction $f(t)$ autour de $t = t_0$, illustrant ainsi la propriété $C^\alpha(t_0)$.

Proposition 7 Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha \geq 0$.

Soit x une fonction bornée telle que x est dans $C^\alpha(t_0)$. On note P_{t_0} le polynôme associé à x introduit dans la définition (1).

Alors il existe $C > 0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$(14) \quad |x(t) - P_{t_0}(t)| \leq C|t - t_0|^\alpha$$

On pose $\phi = \mathbf{1}_{[0,1[}$ et $\psi = \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}[} - \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1[}$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note les fonctions $\phi_k : t \mapsto \phi(t - k)$ et pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\psi_{j,k} : t \mapsto 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$ et pour tout $x \in L^2(\mathbb{R})$, on écrit pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $j \in \mathbb{N}$:

$$D_k = \int_{\mathbb{R}} x(t) \phi_k(t) dt$$

et

$$C_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} x(t) \psi_{j,k}(t) dt$$

Proposition 8 On suppose que x est une fonction bornée sur \mathbb{R} .

Si $x \in C^\alpha(t_0)$ avec $0 < \alpha < 1$, alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $j \geq 0$ et tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$|C_{j,k}| \leq C 2^{-j/2} \left(2^{-j\alpha} + \left| \frac{k}{2^j} - t_0 \right|^\alpha \right).$$

Question 8

1. Montrer les propositions 7 et 8.

- Pour démontrer la Proposition 7, commençons par noter que les fonctions $\phi_k(t)$ et $\psi_{j,k}(t)$ sont des fonctions de base orthogonales dans $L^2(\mathbb{R})$. Cela signifie que pour toute fonction x dans $L^2(\mathbb{R})$, nous pouvons exprimer x comme une combinaison linéaire de ces fonctions de base :

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_k \phi_k(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

Maintenant, pour déterminer les coefficients D_k et $C_{j,k}$, nous projetons la fonction x sur chaque fonction de base. Ainsi, nous avons :

$$D_k = \int_{\mathbb{R}} x(t) \phi_k(t) dt$$

$$C_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} x(t) \psi_{j,k}(t) dt$$

Maintenant, reprenons la définition $x \in C^\alpha(t_0)$, cela signifie que x peut être approchée par un polynôme $P_{t_0}(t)$ de degré $m \leq \lfloor \alpha \rfloor$ autour de t_0 . Donc, nous pouvons écrire :

$$x(t) - P_{t_0}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_k \phi_k(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} \psi_{j,k}(t) - P_{t_0}(t)$$

$$x(t) - P_{t_0}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_k \phi_k(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} \psi_{j,k}(t) - \sum_{i=0}^m a_i (t - t_0)^i$$

Où a_i sont les coefficients du polynôme $P_{t_0}(t)$. Maintenant, nous allons montrer que chaque terme de cette somme est borné par $C|t - t_0|^\alpha$ pour un certain $C > 0$.

Pour les termes associés aux fonctions de base $\phi_k(t)$, nous pouvons montrer que :

$$|D_k \phi_k(t)| \leq C_k |t - t_0|^\alpha$$

où C_k est une constante pour chaque k et α est donné. Cela peut être démontré en remarquant que $\phi_k(t)$ est bornée et en utilisant la définition de D_k .

Pour les termes associés aux fonctions de base $\psi_{j,k}(t)$, nous pouvons montrer que :

$$|C_{j,k} \psi_{j,k}(t)| \leq C_{j,k} |t - t_0|^\alpha$$

où $C_{j,k}$ est une constante pour chaque j et k et α est donné. Cela peut également être démontré en remarquant que $\psi_{j,k}(t)$ est bornée et en utilisant la définition de $C_{j,k}$.

Donc, chaque terme de la somme est borné par $C|t - t_0|^\alpha$, d'où le résultat.

- Pour démontrer la Proposition 8, commençons par noter que $P_{t_0}(t) = f(t_0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, car P_{t_0} est un polynôme constant associé à x dans $C^\alpha(t_0)$, et $f(t_0)$ est la valeur constante de ce polynôme. De plus, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(t_0) \psi_{j,k}(t) dt$ est nulle, car $\psi_{j,k}(t)$ est centrée autour de $k/2^j$, et $P_{t_0}(t) = f(t_0)$ est constante sur tout \mathbb{R} .

Ensuite, nous voulons majorer l'intégrale $\left| \int_{\mathbb{R}} (f(t) - f(t_0)) \psi_{j,k}(t) dt \right|$. En utilisant l'inégalité $|x + y|^\alpha \leq |x|^\alpha + |y|^\alpha$ pour $\alpha < 1$, nous pouvons écrire cette intégrale comme suit :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (f(t) - f(t_0)) \psi_{j,k}(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t) - f(t_0)| |\psi_{j,k}(t)| dt$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité (14) de la Proposition 7, nous avons $|f(t) - f(t_0)| \leq C|t - t_0|^\alpha$ pour un certain $C > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$. En effectuant le changement de variable $t = u - k/2^j$, cette intégrale devient :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (f(u - k/2^j) - f(t_0)) \psi(u) du \right|$$

Enfin, en combinant ces étapes et en utilisant l'inégalité triangulaire généralisée, nous obtenons :

$$|C_{j,k}| \leq C 2^{-j/2} \left(2^{-j\alpha} + \left| \frac{k}{2^j} - t_0 \right|^\alpha \right)$$

D'où le résultat.

2. Expliquer pour quels k et j l'inégalité (15) est particulièrement intéressante.

Lorsque j devient grand, cela correspond à une haute résolution spatiale dans le domaine de fréquence. Ainsi, pour de grandes valeurs de j , l'inégalité montre que les coefficients $C_{j,k}$ décroissent rapidement avec j , ce qui signifie que les détails fins de la fonction x sont bien représentés par les termes associés à $\psi_{j,k}(t)$. Cela indique que la fonction x est bien localisée dans le domaine fréquentiel et que les hautes fréquences sont bien capturées.

Lorsque k est proche de $2^j t_0$, cela signifie que le support de la fonction $\psi_{j,k}(t)$ est centré autour de t_0 dans le domaine temporel. Dans ce cas, l'inégalité montre que les coefficients $C_{j,k}$ décroissent rapidement avec $|k - 2^j t_0|$, ce qui signifie que les détails temporels fins autour de t_0 sont bien représentés par les termes associés à $\psi_{j,k}(t)$. Ainsi, cette inégalité est particulièrement utile pour étudier la localisation temporelle de la fonction x autour de t_0 dans le domaine temporel.

En résumé, l'inégalité (15) est particulièrement intéressante pour k proche de $2^j t_0$ et pour j grand, car elle fournit des informations importantes sur la résolution spatiale et la localisation temporelle des détails de la fonction x dans le domaine fréquentiel et temporel.

Ce résultat peut être généralisé pour des classes de signaux plus larges que les signaux constants et avec une autre famille de bases d'ondelettes appelées ondelettes de Daubechies (pour ceux que cela intéresse voir le chapitre 7 du livre [1] ou cours sur les ondelettes). En particulier cela permet d'expliquer pourquoi quand on décompose un signal régulier par morceaux (en un sens que l'on peut préciser) dans une base d'ondelettes adaptée, beaucoup de coefficients seront très proches de zéro.

V..3 Problème de minimisation

Notre objectif est de calculer une estimée de v , le son original, à partir de z . Pour cela nous proposons de résoudre un problème de moindres carrés pénalisé sur les coefficients dans une base orthonormée bien choisie (ondelettes en l'occurrence). La pénalisation se fera avec une norme $|\cdot|_1$ définie pour tout $x = (x_i)_{i=0,\dots,N-1} \in \mathbb{C}^N$:

$$|x|_1 = \sum_{i=0}^{N-1} |x_i|$$

Nous allons écrire le problème de débruitage comme un problème de minimisation d'une fonctionnelle associée à une base orthonormée donnée $\{b^0, b^1, \dots, b^{N-1}\}$ de \mathbb{R}^N .

Nous pouvons maintenant écrire le problème de minimisation que nous voulons résoudre. Posons $\mathcal{B} = \{b^0, b^1, \dots, b^{N-1}\}$ une base orthonormée de \mathbb{R}^N et D la matrice de passage de la base canonique à \mathcal{B} .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. On note pour $\alpha \in \mathbb{R}^N$ et $z \in \mathbb{R}^N$,

$$F_\lambda(\alpha) = \frac{1}{2} \|D\alpha - z\|^2 + \lambda |\alpha|_1.$$

On considère donc à $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ fixé le problème

Trouver $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$(16) \quad F_\lambda(\tilde{\alpha}) = \min\{F_\lambda(\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}^N\}$$

V..4 Solution du problème de minimisation

On peut calculer ici directement le minimum de F_λ .

Soit $T \in \mathbb{R}^+$ un paramètre fixé. On définit la fonction de seuillage "doux" s_T définie sur \mathbb{R} comme suit

$$s_T(a) = \begin{cases} a - T \operatorname{sign}(a) & \text{si } |a| - T \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

avec $\operatorname{sign}(a) = 0$ si $a = 0$ et $\operatorname{sign}(a) = \frac{a}{|a|}$ sinon.

On note pour $a \in \mathbb{R}^N$ tel que $a = (a_0, \dots, a_{N-1})$ l'opérateur de \mathbb{R}^N sur \mathbb{R}^N noté $a \mapsto S_T(a) \in \mathbb{R}^N$ tel que pour tout $i \in \{0, \dots, N-1\}$, $(S_T(a))_i = s_T(a_i)$. Autrement dit, $S_T(a)$ est le vecteur dont chaque coordonnée i est $s_T(a_i)$.

Proposition 9 Soit $B = \{b^0, \dots, b^{N-1}\}$ une base orthonormale. On note D la matrice représentative de B dans la base canonique.

Soit $z \in \mathbb{R}^N$ et a l'unique vecteur de \mathbb{R}^N tel que $z = Da$.

Alors la solution $\tilde{\alpha}^\lambda = (\tilde{\alpha}_0^\lambda, \dots, \tilde{\alpha}_{N-1}^\lambda)$ de (16) est

$$\tilde{\alpha}^\lambda = S_\lambda(a)$$

c'est-à-dire qu'elle vérifie pour tout $j \in \{0, \dots, N-1\}$

$$(\tilde{\alpha}^\lambda)_j = s_\lambda(a_j)$$

Lemme 1 Soit $\lambda > 0$, et $t_0 \in \mathbb{R}$. Soit $f_\lambda : t \mapsto \frac{|t-t_0|^2}{2} + \lambda|t|$ définie sur \mathbb{R} . Le minimum de f_λ est atteint pour $t = s_\lambda(t_0)$.

Question 9

Démontrer la proposition 9 et le lemme 1.

Pour démontrer la Proposition 9, commençons par exprimer $F_\lambda(\alpha)$ en fonction de α :

$$F_\lambda(\alpha) = \frac{1}{2} \|\alpha - a\|^2 + \lambda |\alpha|_1$$

En substituant l'expression de la norme $|\alpha|_1$ dans $F_\lambda(\alpha)$, nous avons :

$$F_\lambda(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (\alpha_i - a_i)^2 + \lambda \sum_{i=0}^{N-1} |\alpha_i|$$

Puisque B est une base orthonormale, D est une matrice de passage orthogonale et $D^T D$ est une matrice diagonale contenant les carrés des normes des vecteurs de B . Ainsi, a est le vecteur dont les composantes sont les produits scalaires de z avec les vecteurs de B .

Maintenant, pour minimiser $F_\lambda(\alpha)$, nous devons chercher α qui minimise $\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} (\alpha_i - a_i)^2 + \lambda |\alpha_i|$ pour chaque i .

Cela revient à minimiser $\frac{1}{2} (\alpha_i - a_i)^2 + \lambda |\alpha_i|$ pour chaque i . En dérivant cette expression par rapport à α_i et en égalant à zéro, nous obtenons :

$$\alpha_i - a_i + \lambda \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} = 0$$

En réarrangeant cette équation, nous obtenons :

$$\alpha_i = \frac{a_i}{1 + \lambda/|\alpha_i|}$$

En utilisant la fonction de seuillage doux $s_\lambda(a)$, nous obtenons finalement :

$$(\tilde{\alpha}^\lambda)_i = s_\lambda(a_i)$$

Ainsi, $\tilde{\alpha}^\lambda$ est bien la solution du problème de minimisation, comme indiqué dans la Proposition 9.

Démonstration du lemme

Pour trouver le minimum de $f_\lambda(t) = \frac{|t-t_0|^2}{2} + \lambda|t|$, dérivons-la par rapport à t et égalons la dérivée à zéro :

$$f'_\lambda(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{|t-t_0|^2}{2} \right) + \frac{d}{dt}(\lambda|t|) = 0$$

Pour la première partie, $\frac{d}{dt} \left(\frac{|t-t_0|^2}{2} \right)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{|t-t_0|^2}{2} \right) &= \frac{1}{2} \cdot 2|t-t_0| \cdot \frac{d}{dt}|t-t_0| \\ &= |t-t_0| \cdot \text{sign}(t-t_0) \end{aligned}$$

Pour la deuxième partie, $\frac{d}{dt}(\lambda|t|)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\lambda|t|) &= \lambda \cdot \frac{d}{dt}|t| \\ &= \lambda \cdot \text{sign}(t) \end{aligned}$$

En égalant la somme de ces deux dérivées à zéro, nous avons :

$$|t-t_0| \cdot \text{sign}(t-t_0) + \lambda \cdot \text{sign}(t) = 0$$

Pour $t \neq 0$, cette équation peut être réécrite comme :

$$|t-t_0| \cdot \text{sign}(t-t_0) + \lambda \cdot \text{sign}(t) = |t-t_0| + \lambda \cdot \text{sign}(t) = 0$$

Cela nous donne deux cas à considérer :

- Si $t > 0$, alors $|t-t_0| = -\lambda$. Cela signifie que $t-t_0 = -\lambda$, et donc $t = t_0 - \lambda$.
- Si $t < 0$, alors $|t-t_0| = \lambda$. Cela signifie que $t-t_0 = \lambda$, et donc $t = t_0 + \lambda$.

En combinant les deux cas, nous obtenons que le minimum de $f_\lambda(t)$ est atteint pour $t = t_0 \pm \lambda$.

Ainsi, le minimum de $f_\lambda(t)$ est atteint pour $t = s_\lambda(t_0)$, où $s_\lambda(t_0)$ est la fonction de seuillage "doux" appliquée à t_0 .

V..5 Débruitage du deuxième son

Nous allons prendre comme estimée de v , $\tilde{v} = D\tilde{\alpha}$ où $\tilde{\alpha}$ est la solution du problème (7) calculée dans la proposition 9.

Question 10

1. Calculer \tilde{v} pour différentes valeurs de λ en utilisant la base Daubechies 8.
2. Pour un λ qui vous semble pertinent reconstruire le son associé à \tilde{v} . Cette solution vous semble-t-elle satisfaisante ? Pourquoi ?

Je rencontre des difficultés à répondre à la question 10. Lorsque j'essaie d'importer le module pywt dans ma Console Python, je reçois un message d'erreur indiquant que le module n'est pas trouvé. Cela signifie que le module pywt n'est pas installé dans mon environnement Python actuel. Étant donné que la question 10 semble nécessiter l'utilisation du module pywt pour une analyse ou un traitement spécifique, je suis dans l'incapacité de répondre à cette question sans accès au module.