

U.E : Représentation parcimonieuse  
des données.

Master Mathématiques et  
Applications :  
parcours M2 CEPS.

Projet 1

Enseignante :  
MELOT Clothilde

Étudiant :  
FALL Madou



## I. Introduction

La restauration de sons musicaux dégradés lors de leur enregistrement représente un défi complexe et crucial dans le domaine de l'audio. Dans ce contexte, notre objectif est de comprendre et de résoudre ces problèmes en utilisant des outils mathématiques et des techniques de traitement du signal. Nous sommes confrontés à des dégradations connues, appartenant à la famille des opérateurs de convolution, qui peuvent être comparées à des phénomènes tels que les flous dans les images photographiques. Notre démarche consiste à élaborer un modèle mathématique pour décrire ces dégradations et à développer une stratégie efficace pour restaurer les signaux musicaux dans leur forme originale. Cette stratégie repose sur une observation cruciale : les opérateurs de dégradation présentent une structure parcimonieuse dans une base spécifique. En exploitant cette propriété, nous envisageons de concevoir des algorithmes de restauration capables de récupérer au mieux les signaux musicaux altérés. Cette approche prometteuse offre une perspective nouvelle pour restaurer la qualité sonore des enregistrements dégradés, ouvrant ainsi la voie à de nombreuses applications pratiques dans les domaines de la musique, de l'audiovisuel et de la technologie audio.

## II. Sons dégradés

On vous a transmis deux extraits sonores correspondant à des enregistrements qui se sont mal passés (micros défectueux).

On note ainsi

1.  $u$  le vecteur de  $\mathbb{R}^N$  qui est la version numérisée du premier son original. Il correspond au son numérique non dégradé auquel nous n'avons pas accès (sauf pour l'écouter en cours!) et que nous voulons restaurer.

2.  $y$  le vecteur de  $\mathbb{R}^N$ , correspondant au premier son dégradé. On modélise  $y$  comme la transformation de  $u$  par un opérateur supposé connu (à l'aide de mesures)  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  de dégradation, c'est à dire

$$(1) \quad y = \mathcal{H}(u)$$

3.  $v$  le vecteur de  $\mathbb{R}^N$  qui est la version numérisée du deuxième son original. De même que  $u$  il correspond au son numérique non dégradé auquel nous n'avons pas accès (sauf pour l'écouter en cours!) et que nous voulons restaurer.

4.  $z$  le vecteur de  $\mathbb{R}^N$ , correspondant au deuxième son dégradé. On modélise  $z$  comme la transformation de  $v$  par un opérateur supposé connu  $\mathcal{G} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  de dégradation, c'est à dire

$$(2) \quad z = \mathcal{G}(v)$$

Commençons par une définition :

**Définition 1** Un opérateur linéaire  $\mathcal{H} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  est un opérateur de convolution si il existe  $h \in \mathbb{R}^N$  noté  $h = (h_0, h_1, \dots, h_{N-1})$  tel que la matrice de  $\mathcal{H}$  dans la base canonique s'écrive

$$H = \begin{pmatrix} h_0 & h_{N-1} & h_{N-2} & h_{N-3} & \dots & h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_{N-1} & h_{N-2} & \dots & h_3 & h_2 \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_{N-1} & \dots & h_4 & h_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ h_{N-2} & h_{N-3} & \dots & \dots & \dots & h_2 & h_1 \\ h_{N-1} & h_0 & \dots & \dots & \dots & h_1 & h_0 \end{pmatrix}$$

Un opérateur de convolution est aussi appelé « opérateur de filtrage » en traitement mathématique du signal.

Le vecteur  $h$  est alors appelé réponse impulsionnelle de l'opérateur de filtrage  $\mathcal{H}$ .

On peut considérer que

1.  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{G}$  sont des opérateurs linéaires de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^N$ .
2.  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{G}$  font partie de la classe des opérateurs de convolution sur  $\mathbb{R}^N$  suivant la définition 1. Leurs réponses impulsionnelles sont respectivement les vecteurs  $h$  et  $g$  de  $\mathbb{R}^N$  qui sont connus grâce à des mesures.

Vous avez ainsi à votre disposition

1. y et h
2. z et g

Le but est de restaurer u et v.

### III. Restauration du premier son

#### III..1 Problème à résoudre

Le vecteur y est donné dans la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ .

La restauration de u revient donc à la résolution du système linéaire écrit dans la base canonique et d'inconnue x

$$(1) \quad y = H(u)$$

On prendra alors  $u = x$  comme solution de notre problème.

Le vecteur  $y$  étant de taille  $\sim 10^6$  pour 23 secondes de son, la matrice  $H$  contient quant à elle  $10^{12}$  coefficients.

**Python ne peut pas stocker une telle matrice !** On fait l'expérience.

#### III..2 Diagonalisation de l'opérateur $\mathcal{H}$

Nous allons cependant pouvoir montrer que l'opérateur  $\mathcal{H}$  a pour matrice une matrice diagonale dans une autre base et qu'il est donc possible de travailler dans cette autre base pour résoudre le système (3).

Nous allons donc montrer les trois résultats suivants en précisant d'abord quelques notations.

On note

-  $I$  la matrice identité de  $\mathbb{C}^N$ .

-  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{C}^N$  tel que  $\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n$  pour  $x = (x_i)_{i=0, \dots, N-1} \in \mathbb{C}^N$

et  $y = (y_i)_{i=0, \dots, N-1} \in \mathbb{C}^N$ .

- $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} x_n$  pour  $x \in \mathbb{C}^N$
- Soit  $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$  une matrice de taille  $N \times N$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . On appelle adjoint de  $A$  la matrice  $A^*$  telle que :

$$\text{pour tout } a \text{ et tout } b \text{ dans } \mathbb{C}^N \langle Aa, b \rangle = \langle a, A^*b \rangle.$$

La matrice  $A^*$  est donc la matrice de coefficient sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$   $c_{i,j} = a_{j,i}^*$ .

- la famille de vecteurs  $\mathcal{E} = \{\varepsilon^l \in \mathbb{C}^N, l \in \mathbb{Z}\}$  tels que pour  $l \in \mathbb{Z}$  et pour  $n \in \{0, \dots, N-1\}$  la  $n$ -ième coordonnée du vecteur  $\varepsilon^l$  s'écrit

$$\varepsilon_n^l = e^{\frac{2i\pi ln}{N}}.$$

Pour  $x \in \mathbb{C}^N$  et  $l \in \mathbb{Z}$  on note  $\hat{x}_l = \langle x, \varepsilon^l \rangle$

Enfin pour  $x \in \mathbb{C}^N$  on note  $\hat{x}$  le vecteur dont les coordonnées sont  $\hat{x}_l$  pour  $l \in \{0, \dots, N-1\}$ .

**Proposition 1** La famille  $\mathcal{E}$  est une famille finie à  $N$  éléments qui forme une base orthogonale de  $\mathbb{C}^N$  pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Elle est appelée base de Fourier finie.

**Corollaire 1** Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $\hat{x}$  le vecteur dont les coordonnées sont  $\hat{x}_l = \langle x, \varepsilon^l \rangle$ . Alors

1. pour tout  $l \in \{0, \dots, N-1\}$   $\hat{x}_l = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2i\pi lk}{N}}$ .
2.  $x = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{x}_l \varepsilon^l$ .
3.  $\|x\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\langle x, \varepsilon^l \rangle|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{x}\|^2$

### Question 1

Démontrer avec toutes les justifications nécessaires la proposition 1 et le corollaire 1.

Commençons avec la démonstration de la proposition 1

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ , soient  $l \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ . On a

$$\varepsilon^l = (\varepsilon_0^l, \dots, \varepsilon_{N-1}^l)$$

$$\text{où } \varepsilon_n^l = e^{\frac{2i\pi ln}{N}}$$

$$\varepsilon_n^{l+N} = e^{\frac{2i\pi(l+N)n}{N}} = e^{\frac{2i\pi ln + 2i\pi Nn}{N}} = e^{\frac{2i\pi ln}{N} + 2i\pi n} = e^{\frac{2i\pi ln}{N}} e^{2i\pi n} = e^{\frac{2i\pi ln}{N}}. 1$$

car  $e^{2i\pi n} = 1$  pour tout  $n \in \{0, \dots, N-1\}$  donc on a  $\varepsilon_n^{l+N} = e^{\frac{2i\pi ln}{N}} = \varepsilon_n^l$ .

Ainsi  $\varepsilon_n^{l+N} = \varepsilon_n^l$  donc on a seulement  $N$  éléments distincts dans l'ensemble  $\{\varepsilon^l, l \in \mathbb{Z}\}$

On veut calculer les produits scalaires  $\langle \varepsilon^l, \varepsilon^k \rangle$  pour  $l \neq k$ .

Pour cela on considère le Lemme suivant :

**Lemme 1** Soit  $k_0 \in \mathbb{Z}$  et  $N \in \mathbb{N}^*$ . Alors

- si  $k_0 = 0 \pmod{N}$  on a  $\sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi lk_0}{N}} = N$

$$\text{- sinon } \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi nk_0}{N}} = 0$$

Démonstration du Lemme 1

Soit  $k_0 \in \mathbb{Z}$  et  $N \in \mathbb{N}^*$

- On suppose que  $k_0 = 0(\text{mod } N)$  alors il existe  $p \in \mathbb{Z}$  tel que  $k_0 = pN$ , on a

$$\sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi nk_0}{N}} = \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi npN}{N}} = \sum_{l=0}^{N-1} e^{2i\pi np} = \sum_{l=0}^{N-1} 1 = (N-1) + 1 = N$$

- On suppose que  $k_0 \neq 0(\text{mod } N)$

$$\sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi nk_0}{N}} = \sum_{l=0}^{N-1} (e^{\frac{2i\pi k_0}{N}})^n = \frac{1 - (e^{\frac{2i\pi k_0}{N}})^N}{1 - e^{\frac{2i\pi k_0}{N}}} = \frac{1 - e^{2i\pi k_0}}{1 - e^{\frac{2i\pi k_0}{N}}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{\frac{2i\pi k_0}{N}}} = \frac{0}{1 - e^{\frac{2i\pi k_0}{N}}} = 0$$

d'où le résultat.

On revient à la démonstration de la proposition 1

On sait déjà que la famille  $\mathcal{E}$  possède  $N$  éléments distingués, reste à montrer qu'elle forme une base orthogonale de  $\mathbb{C}^N$  pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Soit  $l \neq k$  avec  $l, k \in \mathbb{Z}$

$$\langle \varepsilon^l, \varepsilon^k \rangle = \sum_{l=0}^{N-1} \varepsilon_n^l \bar{\varepsilon}_n^k = \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi ln}{N}} e^{-\frac{2i\pi kn}{N}} = \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi ln}{N} - \frac{2i\pi kn}{N}} = \sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi (l-k)n}{N}} = 0$$

car comme  $k \neq l$  alors  $l - k \neq 0(\text{mod } N)$  et en appliquant le lemme 1 on a bien  $\sum_{l=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi (l-k)n}{N}} = 0$

Ainsi on a pour tout  $l, k \in \mathbb{Z}$ ,  $\langle \varepsilon^l, \varepsilon^k \rangle = 0$  si  $l \neq k$

Donc on peut conclure que la famille  $\mathcal{E}$  est une famille à  $N$  éléments qui forme une base orthogonale de  $\mathbb{C}^N$ .

Ce qui conclut la démonstration de la proposition 1.

Démonstration du corollaire 1

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $\hat{x}$  le vecteur dont les coordonnées sont  $\hat{x}_l = \langle x, \varepsilon^l \rangle$ .

1. pour tout  $l \in \{0, \dots, N-1\}$ , on développe l'expression de  $\hat{x}_l$  à l'aide de  $\varepsilon_n^l$ , autrement-dit

$$\varepsilon_n^l = \langle x, \varepsilon^l \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \bar{\varepsilon}_n^k = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2i\pi kn}{N}}$$

d'où l'expression de  $\varepsilon_n^l$ .

2. On sait que  $\{\varepsilon^l, l = 0, \dots, N-1\}$  est une base de  $\mathbb{C}^N$  donc pour tout  $x \in \mathbb{C}^N$ , il existe  $a_0, \dots, a_{N-1}$  tel que

$$x = \sum_{l=0}^{N-1} a_l \varepsilon^l \quad (4)$$

Nous voulons montrer que pour tout  $l \in \{0, \dots, N-1\}$   $a_l = \frac{\langle x, \varepsilon^l \rangle}{N}$

On a

$$\langle x, \varepsilon^l \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varepsilon^k, \varepsilon^l \right\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \langle a_k \varepsilon^k, \varepsilon^l \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \langle \varepsilon^k, \varepsilon^l \rangle$$

En utilisant le lemme 1 on a  $\langle \varepsilon^k, \varepsilon^l \rangle = \begin{cases} N & \text{si } l = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors

$$\langle x, \varepsilon^l \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \langle \varepsilon^k, \varepsilon^l \rangle = a_l \langle \varepsilon^l, \varepsilon^l \rangle = a_l N$$

D'où  $\langle x, \varepsilon^l \rangle = a_l N$ , comme  $N \in \mathbb{N}^*$  alors  $a_l = \frac{\langle x, \varepsilon^l \rangle}{N}$  pour tout  $l \in \{0, \dots, N-1\}$  ou encore  $a_l = \frac{\hat{x}_l}{N}$   
En remplaçant cette expression de  $a_l$  dans (4), on obtient

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \varepsilon^k = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\hat{x}_k}{N} \varepsilon^k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \varepsilon^k$$

d'où le résultat

3. On développe  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$  à l'aide du point 2.

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{x}_l \varepsilon^l, \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \varepsilon^k \right\rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1} \langle \hat{x}_l \varepsilon^l, \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \varepsilon^k \rangle$$

or pour tout  $l \in \{0, \dots, N-1\}$  et en utilisant le point 2, on a

$$\langle \hat{x}_l \varepsilon^l, \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \varepsilon^k \rangle = \hat{x}_l \langle \varepsilon^l, \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \varepsilon^k \rangle = \hat{x}_l \left( \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \langle \varepsilon^l, \varepsilon^k \rangle \right) = \hat{x}_l (\hat{x}_l N)$$

Donc en utilisant cette expression on a :

$$\|x\|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1} \langle \hat{x}_l \varepsilon^l, \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \varepsilon^k \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{x}_l (\hat{x}_l N) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{x}_l \hat{x}_l = \frac{1}{N} \|\hat{x}\|^2$$

Ce qui conclut le point 3.

Donc la démonstration du corollaire 1

**Remarque :** La transformée  $x \mapsto \hat{x}$  est appelée « Transformée de Fourier discrète » (ou DFT en anglais : Discrete Fourier Transform).

**Théorème 1 :** Soit  $\mathcal{H}$  un opérateur de convolution de réponse impulsionnelle  $h \in \mathbb{R}^N$ . Alors

1. La base  $\mathcal{E}$  est une base de diagonalisation de  $\mathcal{H}$ , c'est à dire que la matrice représentative  $D$  de  $\mathcal{H}$  dans la base  $\mathcal{E}$  est diagonale.

2.  $D$  a pour coefficients diagonaux les éléments  $\hat{h}_l$  pour  $l \in \{0, \dots, N-1\}$ .

3. Soit  $x \in \mathbb{R}^N$  un vecteur colonne et  $y = Hx$ . Alors

(a) pour tout  $l \in \{0, \dots, N-1\}$  on a  $\hat{y}_l = \hat{h}_l \hat{x}_l$ .

(b) on a aussi  $y = Hx = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{h}_l \hat{x}_l \varepsilon^l$ .

**Question 2**

Démontrer le théorème 1 en complétant les éléments de preuve du sujet.

Démonstration du théorème 1

Soit  $\mathcal{H}$  un opérateur de convolution de réponse impulsionnelle  $h \in \mathbb{R}^N$ . Soit  $\mathcal{H} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$  un opérateur de convolution (ou de filtrage). On note  $h$  la réponse impulsionnelle de  $\mathcal{H}$ . Plusieurs voies sont possibles. On peut par exemple procéder de la manière suivante.

1. On considère  $J$  la matrice de taille  $N \times N$  dans la base canonique de l'opérateur de convolution  $\mathcal{J}$  associé à la réponse impulsionnelle  $\tau = (0, 1, 0, 0, \dots, 0)$ . on a

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que  $J^N = I$ , où  $J$  est une matrice de taille  $N \times N$ . Nous avons réalisé une simulation afin de vérifier ce résultat, et les résultats obtenus confirment effectivement que  $J^N = I$ .

- Cherchons les valeurs propres de  $J$ . On suppose que  $\lambda$  est une valeur propre de  $J$  avec un vecteur propre  $v$ , on a  $Jv = \lambda v$  (1).

On multiplie (1) par  $J$ , on a  $J^2v = \lambda Jv = \lambda^2v$  et donc par itération on a  $J^Nv = \lambda^Nv$  d'où  $Iv = \lambda^Nv$  ainsi  $v = \lambda^Nv$  et ceci est vrai si et seulement si  $\lambda^N = 1$ .

Ainsi les valeurs propres de  $J$  sont le  $N$ -ième racine de l'unité. Donc nous avons  $N$  valeurs propres distinct qui sont de la forme :  $\lambda_k = e^{\frac{2i\pi k}{N}}$  pour tout  $k \in \{0, \dots, N-1\}$ .

- Montrons que les vecteurs de  $\mathcal{E}$  forment une base de vecteurs propres de  $J$ .  
Soit  $l \in \{0, \dots, N-1\}$

$$J\varepsilon^l = \begin{pmatrix} \varepsilon_{N-1}^l \\ \varepsilon_0^l \\ \vdots \\ \varepsilon_{N-2}^l \end{pmatrix}$$

or pour tout  $k \in \{0, \dots, N-2\}$   $\varepsilon_k^l = e^{\frac{2i\pi l k}{N}} = e^{\frac{2i\pi l(k+1-1)}{N}} = e^{\frac{2i\pi l(k+1)}{N}} e^{-\frac{2i\pi l}{N}} = \bar{\lambda}_l e^{\frac{2i\pi l(k+1)}{N}} = \bar{\lambda}_l \varepsilon_{k+1}^l$   
et  $\varepsilon_{N-1}^l = e^{\frac{2i\pi l(N-1)}{N}} = e^{-\frac{2i\pi l}{N}} e^{2i\pi l} = \bar{\lambda}_l \varepsilon_0^l$ .

Donc

$$J\varepsilon^l = \begin{pmatrix} \varepsilon_{N-1}^l \\ \varepsilon_0^l \\ \vdots \\ \varepsilon_{N-2}^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_l \varepsilon_0^l \\ \bar{\lambda}_l \varepsilon_1^l \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_l \varepsilon_{N-1}^l \end{pmatrix} = \bar{\lambda}_l \begin{pmatrix} \varepsilon_0^l \\ \varepsilon_1^l \\ \vdots \\ \varepsilon_{N-1}^l \end{pmatrix} = \bar{\lambda}_l \varepsilon^l$$

Ainsi les vecteurs de  $\mathcal{E}$  forment une base de vecteurs propres de  $J$ , d'où  $J$  est diagonale dans la base  $\mathcal{E}$ .

Comme  $J$  est une matrice dans la base canonique et que  $J^N = I$  alors  $H$  la matrice représentative de  $\mathcal{H}$  dans la base est bien une combinaison linéaire des matrices  $I, J, \dots, J^N$ . Donc  $H$  est diagonale dans la base  $\mathcal{E}$ .

2. Montrons que  $H$  a pour coefficients diagonaux les éléments  $\hat{h}_l$  pour tout  $l \in \{0, \dots, N-1\}$ .

Soit  $l \in \{0, \dots, N-1\}$

On veut montrer que  $H\varepsilon^l = \hat{h}_l\varepsilon^l$

Par définition on a

$$H\varepsilon^l = h * \varepsilon^l = y$$

$$\text{avec } y_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \varepsilon_{n-k}^l.$$

Or pour tout  $n, k \in \{0, \dots, N-1\}$ , on a  $\varepsilon_{n-k}^l = \varepsilon_{n-k}^l$ .

Donc

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \varepsilon_{n-k}^l = y_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{\frac{2i\pi l(n-k)}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-\frac{2i\pi lk}{N}} e^{\frac{2i\pi ln}{N}} = \left( \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-\frac{2i\pi lk}{N}} \right) e^{\frac{2i\pi ln}{N}}$$

or  $\varepsilon_n^l = e^{\frac{2i\pi ln}{N}}$  et d'après le premier point du corollaire 1,  $\hat{h}_l = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-\frac{2i\pi lk}{N}}$ .

Alors

$$y_n = \left( \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-\frac{2i\pi lk}{N}} \right) e^{\frac{2i\pi ln}{N}} = \hat{h}_l \varepsilon_n^l$$

donc  $y_n = \hat{h}_l \varepsilon_n^l$  pour tout  $l \in \{0, \dots, N-1\}$ .

On peut en conclure que  $y = \hat{h}_l \varepsilon^l$ . Ainsi donc  $H\varepsilon^l = \hat{h}_l \varepsilon^l$ , pour tout  $l \in \{0, \dots, N-1\}$  d'où  $\hat{h}_l$ ,  $l \in \{0, \dots, N-1\}$  sont les coefficient diagonaux de  $H$ .

3. Soit  $x \in R^N$  un vecteur colonne et  $y = Hx$ .

a) Montrons que pour tout  $l \in \{0, \dots, N-1\}$  on a  $\hat{y}_l = \hat{h}_l \hat{x}_l$ .

Soit  $l \in \{0, \dots, N-1\}$ , en utilisant le point 2 du corollaire 1 on a  $x = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{x}_l \varepsilon^l$ .

De plus

$$y = Hx = H \left( \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{x}_l \varepsilon^l \right) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{x}_l H \varepsilon^l = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{x}_l \hat{h}_l \varepsilon^l \quad (1)$$

car  $H\varepsilon^l = \hat{h}_l \varepsilon^l$  d'après ce qui précède.

En utilisant le point 2 du corollaire 1, on peut écrire  $y = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{y}_l \varepsilon^l \quad (2)$ .

En combinant (1) et (2) et par identification des coefficient de  $y$ , on a  $\hat{y}_l = \hat{x}_l \hat{h}_l$  pour tout  $l \in \{0, \dots, N-1\}$ .

b) Montrons aussi qu'on a aussi  $y = Hx = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{h}_l \hat{x}_l \varepsilon^l$ .



On a  $\hat{y}_l = \hat{x}_l \hat{h}_l$  pour tout  $l \in \{0, \dots, N-1\}$  et en appliquant le point 2 du corollaire 1, on a

$$Hx = y = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{y}_l \varepsilon^l = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{x}_l \hat{h}_l \varepsilon^l$$

D'où le résultat.

Ce qui conclut la démonstration du théorème 1.

**Remarque :** Les calculs de  $\hat{x}$  et  $\hat{h}$  ne sont pas effectués tels quels par un ordinateur.

En effet un calcul direct donnerait en réalité pour chaque coordonnée de  $\hat{x}$   $N$  multiplications suivies de  $N-1$  additions, soit un coût d'environ  $2N^2$  opérations pour le calcul de  $\hat{x}$  (Pourquoi?). Dès que  $N$  commence à être grand (par exemple ici  $N = 10^6$ , ce qui est une taille très courante en image ou même en son), le calcul direct devient très coûteux, voire impossible à mener.

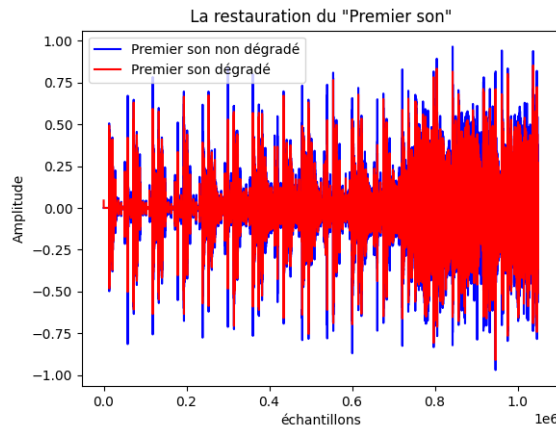
Heureusement dans le cas où on a  $N = 2^{n_0}$  avec  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ , nous avons la possibilité d'utiliser un algorithme basé sur des factorisations matricielles astucieuses pour effectuer le calcul de  $\hat{x}$  à partir de  $x$ . Cet algorithme est appelé « Transformée de Fourier rapide » ou encore FFT en anglais (Fast Fourier Transform) et c'est un des algorithmes les plus efficaces du monde. Il permet de calculer  $\hat{x}$  en  $\mathcal{O}(N \ln(N))$  opérations, c'est à dire que le nombre d'opérations pour effectuer le calcul est proportionnel à  $N \ln(N)$ .

### Question 3 : Avec Python : La restauration du son !

En utilisant les résultats du théorème 1 restaurons avec Python le son  $y = Hx$  pour obtenir  $u = x$ .

Notre réponse se trouve dans un autre fichier, spécifiquement dans l'algorithme qui y est documenté.

Voici un figure qui illustre la restauration du premier.



On constate que la restauration du "Premier son" est pertinent.

## IV. Restauration du deuxième son

En appliquant la stratégie précédente au cas du deuxième son. Il semble que cela ne marche pas.

### Question 4 :

L'opérateur  $\mathcal{G}$  qui nous intéresse est-il inversible ? Illustrez ce point numériquement.

L'opérateur  $\mathcal{G}$  n'est pas inversible, notre réponse se trouve dans un autre fichier, spécifiquement dans l'algorithme qui y est documenté.

Nous ne sommes plus en mesure de garantir que nous allons pouvoir reconstruire le son original ! C'est ce qui arrive aussi dans les problèmes réels !  
Ce que nous pouvons néanmoins faire c'est développer une stratégie pour calculer une estimation la meilleure possible de ce son original.

En particulier remarquons que résoudre le système d'inconnue  $x$

$$z = Gx \quad (5)$$

revient à calculer  $x$  tel que

$$\|Gx - z\|^2 = \min_{a \in \mathbb{R}^N} \|Ga - z\|^2 \quad (6)$$

L'avantage d'écrire la formulation (6) c'est qu'on peut toujours calculer  $x$  même si (5) n'a pas de solution.

En effet dans notre cas nous avons la proposition suivante (qui peut se généraliser avec un peu de travail à toute matrice non nulle).

**Proposition 2 :** Soit  $\mathcal{G}$  un opérateur de convolution de réponse impulsionnelle  $g$  non nulle, et  $G$  sa matrice dans la base canonique. Soit  $z \in \mathbb{R}^N$ .

Soit  $F$  la fonction de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$F(a) = \|Ga - z\|^2$$

Alors le problème

$$(\mathcal{P}) \quad \text{Trouver } x \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } F(x) = \min\{F(a) : a \in \mathbb{R}^N\}$$

a au moins une solution dans  $\mathbb{R}^N$ .

### Question 5 :

1. Détailler la démonstration de la proposition 2.
2. Donner l'ensemble des solutions du problème  $(\mathcal{P})$ .

Le problème ( $\mathcal{P}$ ) est un problème dit de « moindres carrés ».

### Démonstration :

Soit  $\mathcal{G}$  un opérateur de convolution de réponse impulsionnelle  $g$  non nulle, et  $G$  sa matrice dans la base canonique. Soit  $z \in \mathbb{R}^N$

1. Dans notre cas une stratégie possible est de le résoudre de façon explicite de la manière suivante.

Tout d'abord, considérons la fonction  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  définie comme suit :

$$F : x \mapsto \|Gx - z\|^2$$

Montrons que  $F(x)$  est différentiable.

Soit  $h \in \mathbb{R}^N$  un vecteur non nul. On a :

$$F(x+h) = \|G(x+h) - z\|^2 = \langle G(x+h) - z, G(x+h) - z \rangle = \langle Gx - z, Gx - z \rangle + 2\langle Gh, Gx - z \rangle + \langle Gh, Gh \rangle$$

Ainsi,  $F(x) = \langle Gx - z, Gx - z \rangle$  et la différentielle de  $F$  en  $x$  est :

$$DF_x h = 2\langle Gh, Gx - z \rangle = 2\langle h, G^*(Gx - z) \rangle$$

Maintenant, pour que  $F(x)$  soit minimale, la différentielle doit être nulle pour tout  $h$  :

$$DF_x h = 0 \Rightarrow 2\langle h, G^*(Gx - z) \rangle = 0$$

Cela se produit si et seulement si  $G^*Gx = G^*z$ . Donc, il existe un  $x_p$  tel que  $G^*Gx_p = G^*z$ .

La fonction  $F(x)$  est convexe car elle est la norme euclidienne au carré de la différence entre deux fonctions linéaires ( $Gx$  et  $z$ ). Les normes euclidiennes au carré sont toujours convexes.

Dans le cas d'une fonction convexe, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point  $x_p$  soit un minimum global est que sa dérivée s'annule. Autrement dit,  $x_p$  est un minimum global si et seulement si  $DF_x(h) = 0$  pour tout vecteur  $h$ .

Nous avons montré précédemment que la différentielle de  $F(x)$  est donnée par  $DF_x(h) = 2\langle G^*Gh, x - z \rangle$ . Pour que cette différentielle soit nulle pour tout  $h$ , il faut et il suffit que  $G^*Gx = G^*z$ .

Ainsi, le point  $x_p$  qui satisfait l'équation  $G^*Gx_p = G^*z$  est le point où la différentielle de  $F(x)$  s'annule, ce qui signifie que  $x_p$  est un minimum global de  $F(x)$ .

En conclusion, la solution  $x_p$  est le vecteur qui minimise la fonction  $F(x)$ .

Ce qui conclut le premier point de la question 5.

2. Soit  $a \in \mathbb{R}^N$  et  $z \in \mathbb{R}^N$

D'après le point 3 du corollaire 1 l'expression de  $F$  peut s'écrire comme suit :

$$F(a) = \|Ga - z\|^2 = \frac{1}{N} \|\widehat{Ga} - z\|^2 = \frac{1}{N} \|\widehat{Ga} - \hat{z}\|^2$$

On a donc

$$F(a) = \frac{1}{N} \|\widehat{Ga} - \hat{z}\|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{g} \cdot \hat{a} - \hat{z}\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |\hat{g}_i \hat{a}_i - \hat{z}_i|^2$$

où  $\hat{g}_i$ ,  $\hat{a}_i$  et  $\hat{z}_i$  représentent les composantes correspondantes dans les transformées de Fourier de  $g$ ,  $a$  et  $z$  respectivement.

Pour minimiser  $F(a)$ , chaque terme  $|\hat{g}_i \hat{a}_i - \hat{z}_i|^2$  doit être nul. Cela signifie que pour chaque  $i$ , soit  $\hat{g}_i \hat{a}_i = \hat{z}_i$ , soit  $\hat{a}_i$  est indéterminé (c'est-à-dire, il peut prendre n'importe quelle valeur), tant que  $\hat{g}_i \hat{a}_i = \hat{z}_i$  est satisfait.

En résumé, l'ensemble des solutions  $a$  est l'ensemble des fonctions  $a$  telles que  $\hat{g}_i \hat{a}_i = \hat{z}_i$  pour chaque  $i$ .

Ce qui conclut le deuxième point de la question 5.

Dans le cas où  $\hat{g}_l \neq 0$  pour tout  $l$  et donc  $G$  inversible on retrouve la solution unique du système  $Gx = z$ .

Lorsque  $G$  n'est pas inversible le problème  $(\mathcal{P})$  a une infinité de solutions et il est difficile de savoir laquelle serait la plus pertinente pour notre problème! De plus il est aussi difficile de savoir laquelle est la plus proche de la solution recherchée  $v$ .

Une stratégie est alors de chercher à résoudre un problème proche de  $(\mathcal{P})$ , qui ne permettra pas de retrouver exactement  $v$ , mais qui a une solution unique. C'est le cas du problème suivant.

On fixe  $\lambda > 0$  et on s'intéresse à l'application  $F_\lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $F_\lambda(a) = F(a) + \lambda \|a\|^2$ . On examine alors le problème suivant

$$(\mathcal{P}_\lambda) \quad \text{Trouver } x_\lambda \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } F_\lambda(x_\lambda) = \min\{F_\lambda(a) : a \in \mathbb{R}^N\}$$

**Proposition 3** Soit  $\mathcal{G}$  un opérateur de convolution de réponse impulsionnelle  $g$  non nulle, et  $G$  sa matrice dans la base canonique. Soit  $z \in \mathbb{R}^N$ .

Alors le problème  $(\mathcal{P}_\lambda)$  a une unique solution  $x$  dans  $\mathbb{R}^N$  telle que pour tout  $l \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\hat{x}_l = \frac{\overline{\hat{g}_l} z_l}{|\hat{g}_l|^2 + \lambda}$$

#### Question 6 :

1. Démontrer la proposition 3.
2. Proposer une restauration du son  $v$ . Quel choix de  $\lambda$  est pertinent ?

1. Démonstration de la proposition 3 :

En utilisant les données de la proposition, on peut dire que la fonction  $F_\lambda$  est strictement convexe et différentiable sur  $\mathbb{R}^N$ , de plus comme  $F$  admet un minimum donc  $F_\lambda$  est aussi coercive.

Donc elle a un unique minimum global en  $x$  tel que le gradient de  $F_\lambda$  s'annule en  $x$ .

Or pour tout  $a \in \mathbb{R}^N$  on a  $\nabla F_\lambda(a) = \nabla F(a) + \lambda \nabla \|a\|^2 = G^*(Ga - z) + \lambda a$

Donc  $G^*(Gx - z) + \lambda x = 0$  ou encore  $G^*Gx + \lambda x = G^*z$

Or remarquons que  $G^*$  a pour valeurs propres  $\bar{g}_l$  associées aux vecteurs propres  $\varepsilon^l$  pour  $l \in \{0, \dots, N-1\}$ .

En effet par définition

$$\langle \varepsilon^l, \bar{g}_l \varepsilon^l \rangle = \langle \hat{g}_l \varepsilon^l, \varepsilon^l \rangle = \langle G \varepsilon^l, \varepsilon^l \rangle = \langle \varepsilon^l, G^* \varepsilon^l \rangle \text{ d'où } \langle \varepsilon^l, \bar{g}_l \varepsilon^l \rangle = \langle \varepsilon^l, G^* \varepsilon^l \rangle$$

Ainsi par identification on a bien  $G^* \varepsilon^l = \bar{g}_l \varepsilon^l$

D'où

$$(G^*G + \lambda) \varepsilon^l = G^*G \varepsilon^l + \lambda \varepsilon^l = \hat{g}_l G^* \varepsilon^l + \lambda \varepsilon^l = \hat{g}_l \bar{g}_l \varepsilon^l + \lambda \varepsilon^l = |\hat{g}_l|^2 \varepsilon^l + \lambda \varepsilon^l = (|\hat{g}_l|^2 + \lambda) \varepsilon^l$$

Donc  $G^*G + \lambda I$  où  $I$  est la matrice identité a pour valeurs propres  $|\hat{g}_l|^2 + \lambda$

Ainsi

$$G^* \widehat{Gx} + \lambda x = \widehat{G^*z}$$

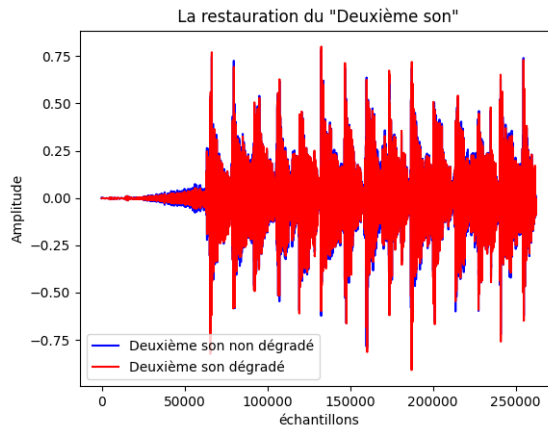
donc d'après ce qu'on a fait précédemment pour tout  $l \in \{0, \dots, N-1\}$  on a  $(G^* \widehat{Gx} + \lambda x)_l = (|\hat{g}_l|^2 + \lambda) \hat{x}_l$  et  $(\widehat{G^*z})_l = \bar{g}_l \hat{z}_l$  en d'autre terme  $(|\hat{g}_l|^2 + \lambda) \hat{x}_l = \bar{g}_l \hat{z}_l$ . En résumé on a pour tout  $l \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\hat{x}_l = \frac{\bar{g}_l \hat{z}_l}{|\hat{g}_l|^2 + \lambda}$$

D'où le résultat

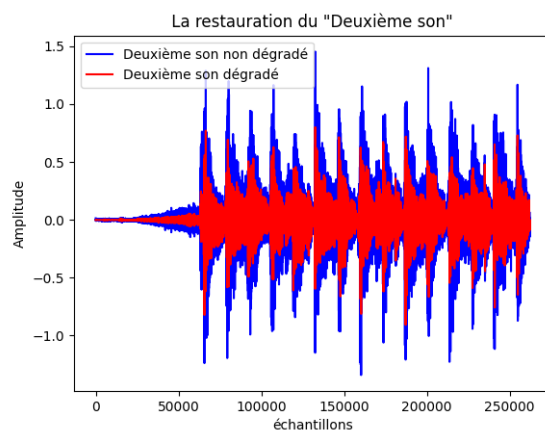
2. Proposer une restauration du son  $v$ .

Avec  $\lambda = 0.1$  on a l'illustration suivant :



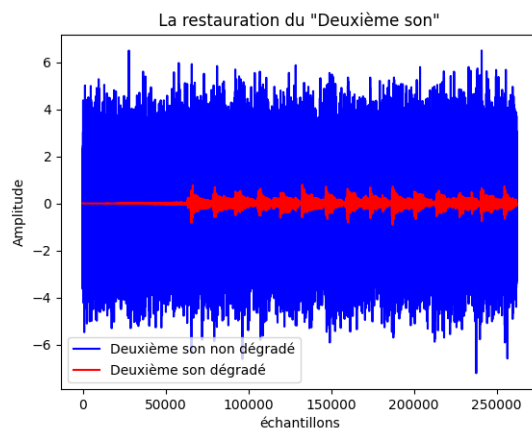
On remarque qu'une légère variation du "Deuxième son non dégradé".

Avec  $\lambda = 10^{-27}$  on a l'illustration suivant :



On remarque qu'une légère restauration du "Deuxième son".

Avec  $\lambda = 10^{-35}$  on a l'illustration suivant :



On remarque qu'avec  $\lambda = 10^{-35}$  la restauration du "Deuxième son" n'est pas bonne.

Donc  $\lambda = 10^{-27}$  est celui qui est pertinent.

## V. Conclusion

En conclusion, la restauration de sons musicaux dégradés lors de leur enregistrement constitue un défi complexe mais crucial dans le domaine de l'audio. En utilisant des outils mathématiques et des techniques de traitement du signal, notre objectif est de comprendre et de résoudre ces problèmes. Nous abordons les dégradations connues, qui sont analogues aux phénomènes de flou dans les images photographiques, en élaborant des modèles mathématiques pour les décrire et en développant des stratégies efficaces pour restaurer les signaux musicaux dans leur forme originale.

Une observation cruciale dans cette démarche est que les opérateurs de dégradation présentent une structure parcimonieuse dans une base spécifique. En exploitant cette propriété, nous envisageons de concevoir des algorithmes de restauration capables de récupérer au mieux les signaux musicaux altérés. Cette approche prometteuse ouvre de nouvelles perspectives pour restaurer la qualité sonore des enregistrements dégradés, ce qui pourrait avoir des applications pratiques significatives dans les domaines de la musique, de l'audiovisuel et de la technologie audio. Notre travail vise à préserver et à restaurer l'essence même de la musique, tout en offrant des solutions innovantes pour améliorer l'expérience auditive dans divers contextes.