Лекция 2

Определение 1. Подмножество I кольца R называется *идеалом*, если оно является подгруппой по сложению и $ra \in I$, $ar \in I$ для любых $a \in I$, $r \in R$.

Определение 2. Идеал I называется *главным*, если существует такой элемент $a \in R$, что $I = (a)$.

Теорема 3 (Теорема о гомоморфизме)**.** *Пусть $\varphi : R \to R'$ - гомоморфизм колец. Тогда имеет место изоморфизм*

$$R/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$$

Определение 4. Кольцо R - *нетерово*, если любой идеал в R конечно порожден

Теорема 5. *Кольцо R - нетерово тогда и только тогда, когда любая возрастающая цепочка идеалов в R стабилизируется.*

Теорема 6. *Пусть кольцо R - нетерово и $\varphi : R \to R$ - сюръекция. Тогда φ - изоморфизм.*

Теорема 7 (Гильберта о базисе)**.** *Пусть кольцо R - нетерово. Тогда кольцо $R[x]$ - тоже нетерово.*

Теорема 8. *Пусть кольцо R - нетерово. Тогда R/I - тоже нетерово.*

Определение 9. Необратимый элемент $a \in R$ *неприводим*, если не существует разложения $a = b \cdot c$, где b, c - необратимы.

Определение 10. Необратимый элемент $a \in R$ называется *простым*, если для любого элемента bc, который делится на a, верно, что либо $a|b$, либо $a|c$.

Теорема 11. *Пусть кольцо R - нетерово. Тогда для любого необратимого $a \in R$ существует разложение $a = a_1 \cdot \ldots a_n$, где a_i - необратимы.*

Определение 12. Идеал I - *неприводим*, если для любого разложения $I = J_1 \cap J_2$ или $J_1 \in I$, или $J_2 \in I$.

Определение 13. Идеал I - *простой*, если для любых $a, b \in R$ из $a \cdot b \in I$ следует, что либо $a \in I$, либо $b \in I$.

Определение 14. Аффинное пространство $\mathbb{A}^n = \{(a_1, \ldots, a_n), a_i \in \mathbb{K}\}$.

Определение 15. $X \subset \mathbb{A}^n$ - называется алгебраическим множеством, если $X = \{p = 0 \mid p \in \mathcal{P}\}$.

Определение 16. Пусть I - идеал, тогда множеством нулей этого идеала называется множество

$$\mathbb{V}(I) = \{x \mid \forall f \in I f(x) = 0\}$$

Определение 17. Возьмем $X \subset \mathbb{A}^n$, тогда аннулирующим идеалом этого множества называется идеал

$$\mathbb{I}(X) = \{f \mid f|_X \equiv 0\}$$

Определение 18. Идеал I называется *радикальным*, если

$$\forall f \in R\ \exists n\ f^n \in I \Rightarrow f \in I$$

Определение 19. Радикалом идеала I называется такой идеал

$$\sqrt{I} = \{f \mid \exists n\ f^n \in I\}$$

Теорема 20 (Гильберта о нулях)**.**

$$\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = \sqrt{I}$$

Определение 21. Для кольца R *областью целостности* называется кольцо без делителей нуля.

Лекция 3

Теорема 22 (Слабая теорема Гильберта о нулях).

$$I \subset \mathbb{K}[x_1 \dots x_n] \Rightarrow \mathbb{V}(I) \neq \varnothing$$

Определение 23. Топология Зарисского в $\mathbb{A}^n$. Замкнутые множества - алгебраические. Пусть X_i - замкнуто, тогда $\bigcap\limits_{i \in I} X_i$ - замкнуто. Пусть X_i - открыто, тогда $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$ - открыто.

Определение 24. Для подмножества $Z \in \mathbb{A}^n$ его замыканием называется

$$\overline{Z} = \bigcap_{X \supset Z, X - \text{замкнуто}} X$$

Определение 25. Подмножество $Y \subset X$, где X - алгебраическое, называется плотным в X, если $\overline{Y} = X$.

Определение 26. Регулярной функцией на алгебраическом множестве $X \subset \mathbb{A}^n$ называется ограничение многочлена на X.

Определение 27. Алгеброй регулярных функций на X называется $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1 \dots x_n]/\mathbb{I}(X)$

Определение 28. Замкнутое множество X называется *неприводимым*, если не существует $X_1, X_2 \subsetneq X$ - замкнутых таких, что $X_1 \cup X_2 = X$.

Теорема 29. *Любое замкнутое $X \subset \mathbb{A}^n$ раскладывается единственным образом в объединение неприводимых.*

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_n$$

Теорема 30. *X - неприводимо тогда и только тогда, когда в $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1 \dots x_n]/\mathbb{I}(X)$ нет делителей нуля.*

Лекция 4

Определение 31. Квазиаффинное множество - открытое подмножество в алгебраическом множестве.

Определение 32. Множество X - локально замкнуто, если $X = U \cap V$, где U - открытое, V - замкнутое. Это эквивалентно тому, что X - открыто в замкнутом.

Определение 33. Если X - неприводимо, то определим $\mathrm{Frac}\mathbb{K}[X] = \{\frac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{K}[X], g \neq 0\}/\frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'}$

Определение 34. Функция f - рациональная, если $f \in \mathrm{Frac}\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}(X)$.

Определение 35. Рациональная функция f регулярна в точке $x \in X$, если $f \sim \frac{g}{h}, h(x) \neq 0$.

Определение 36. Область определения функции f - $\{x \mid f - \text{регулярна в } x\}$. Это множество открыто и не пусто.

Теорема 37. *Рациональная функция $f \in \mathbb{K}(X)$ регулярна в x $\forall x \in X$, тогда $f \in \mathbb{K}[X]$.*

Определение 38. Пусть $X \subset Y$ - квазиаффинное, тогда

$$\mathbb{K}[X] = \{f \in \mathbb{K}(Y) \mid f - \text{регулярна в } x \ \forall x \in X\}$$

Определение 39. Пусть R - область целостности ($R = K[X]$), $S \subset R$ - мультипликативное подмножество

$$S^{-1}R = \left\{\frac{r}{s} \mid r \in R, s \in S\right\} / \left\{\frac{r}{s} \sim \frac{r'}{s'} \mid rs' - r's = 0\right\}$$

Определение 40. Регулярное отображение (морфизм) $\varphi : X \to Y$, $X \subset \mathbb{A}^n, Y \subset \mathbb{A}^m$ - алгебраические подмножества или квазиафинные многообразия.

$$\varphi = (\varphi_1 ... \varphi_m), \quad \varphi_i \in k[X], \quad \varphi(X) \subset Y$$

Определение 41. $\varphi* : k[Y] \to k[X]$ - двойственный (обратный) гомоморфизм.

$$f \in k[Y], \quad x \in X, \quad (\varphi * f)(x) = f(\varphi(x))$$

Теорема 42.

$$\{\varphi : X \to Y - \textit{регулярна}\} \Longleftrightarrow \{\varphi* : k[Y] \to k[X] - \textit{гомоморфизм}\}$$

Определение 43. $\varphi : X \to Y$ - гомоморфизм, если $\exists \psi : Y \to X$, такой что $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ и $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$

Определение 44. Квазиаффинное многообразие X называется аффинным, если $\exists Y \subset \mathbb{A}^n$ - замкнутое и X, Y - изоморфны.

Определение 45. Отображение $\varphi : X \to Y$ - доминантное, если $\overline{\mathrm{Im}\varphi} = Y$

Теорема 46. *φ - доминантно, тогда $\varphi* : k[Y] \to k[X]$ - инъективен.*

Определение 47. Рациональное отображение $\varphi : X \dashrightarrow Y$, $X \in \mathbb{A}^n, Y \in \mathbb{A}^m$ - замкнутые неприводимые.

$$\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m), \quad \varphi_i \in k(X), \quad \varphi(X) \subset Y$$

Если мы возьмем $U \subset X$, $V \subset Y$ - открытые, то $\varphi : U \to V$ - регулярное отобрражение

Теорема 48. *$U \subset X$ - открыто, то $k(U) = k(V)$.*

Теорема 49. *Рациональное отображение φ - доминантно, тогда $\varphi* : k(Y) \to k(X)$ - инъективен.*

Определение 50. Рациональное отображение $\varphi : X \dashrightarrow Y$ - бирационально, если $\exists \psi : Y \dashrightarrow X$, такой что $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ - на области определения.

Теорема 51. *Если рациональные функции совпадают на открытом подмножестве, то они равны.*

Теорема 52. *Если рациональные отображения совпадают на открытом подмноэжестве, то они равны.*

Теорема 53. *φ - бирационально тогда и только тогда, когда $\varphi*$ - изоморфизм $k(Y)$ и $k(X)$.*

Определение 54. Алгебраический тор - $(\mathbb{A}\backslash\{0\})^n$.

$$(t_1, ..., t_n) \cdot (t'_1, ..., t'_n) = (t_1 \cdot t'_1, ..., t_n \cdot t'_n)$$

Определение 55. G - алгебраическая группа, если G - аффинное многообразие и группа. И если mul : $G \times G \to G$, $inv : G \times G \to G$ - регулярные отображения.

Определение 56. $G \curvearrowright X$ - действие алгебраической группы, если это действие и регулярное отображение на аффинных многообразиях.

Определение 57. Торическое многообразие $X \supset T$ - открытое, $T \curvearrowright X$ - продолжение действия тора на себе.

Лекция 5

Лекция 6

Тут базисы Гребнера, мне лент их техать.

Определение 58. $f : X \dashrightarrow Y$ - бирационально тогда и только тогда, когда $\exists U \subset X, V \subset Y$, f - изоморфизм U, V.

Определение 59. X, Y - бирационально эквивалентны, если $\exists f : X \dashrightarrow Y$ - бирациональное.

Теорема 60. *Любое многообразие бирационально эквиалентно какой-то гиперповерхности $\{f = 0\} \subset \mathbb{A}^n$*

Теорема 61. *$L \supset K$ - конечное расширение полей, тогда $\exists x, L = K(x)$.*

Теорема 62. *Пусть $T_1 \subset X_1, T_2 \subset X_2$. И $\varphi : T_1 \to T_2$ - гомоморфизм*

$$\varphi : X_1 \dashrightarrow X_2 - \textit{бирациональное} \Longleftrightarrow \varphi : T_1 \to T_2 - \textit{изоморфизм} \Longleftrightarrow \varphi* : M_2 \to M_1 - \textit{изоморфизм}$$

Определение 63. X - торическое, тогда X - бирационально эквивалентно $\mathbb{A}^n$.

Определение 64. X - неприводимо, то размерность $\dim X$ = степень трансцедентности $trdegK(X)$. Если приводимо $X = \cup X_i$, то $\dim X = max$ размерностей его компонент.

Теорема 65.
$$\dim X = 0 \Longleftrightarrow |X| < \infty$$

Теорема 66.
$$\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$$

Теорема 67.

1. $X \subset Y$, *тогда* $\dim X \leq \dim Y$
2. $X \subset Y$, Y *- неприводим,* $\dim X = \dim Y$, *тогда* $X = Y$
3. $Y = \{f = 0\} \subset \mathbb{A}^n \Longleftrightarrow Y = \cup Y_i, \dim Y_i = n - 1$, $codim_{\mathbb{A}^n} Y = \dim \mathbb{A}^n - \dim Y$