Решение семинаров по курсу Теории Чисел пилотного потока ПМИ

Цыганов Аскар

Январь - Март 2023

Содержание

1 Семинары

1.1 Семинар 1

Задание 1

Задание 2

$$(5a + 3b, 13a + 8b) = (5a + 3b, 3a + 2b) = (2a + b, a + b) = (a, a + b) = (a, b)$$

Задание 3

$$(\underbrace{1...1}_{m}, \underbrace{1...1}_{n}) = (\underbrace{1...1}_{m-n}\underbrace{0...0}_{n}, \underbrace{1...1}_{n}) =$$

$$= (\underbrace{1...1}_{m-n}, \underbrace{1...1}_{n}) = \underbrace{1...1}_{(n,m)}$$

Задание 4

Пункт а

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

$$(21n + 4, 14n + 3) = (7n + 1, 1) = 1$$

Пункт б

$$\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}$$

$$(n^2 - n + 1, n^2 + 1) = (-n, n^2 + 1) = (n, n^2 + 1) = 1$$

Задание 5

$$n \geqslant m$$

$$(a^n - 1, a^m - 1) = (a^n - 1 - (a^m - 1)a^{n-m}, a^m - 1) = (a^{n-m} - 1, a^m - 1)$$

Далее повторяем такую операцию пока не придем к $(a^{(n,m)} - 1, a^{(n,m)} - 1)$.

Еще можно сослаться на задачу 3, просто в a-ичной системе счисления

Задание 6

Зафиксируем простое число p, по основное теореме арифметики, нод представляется в виде произведения простых, тогда очевидно будут выполнены наши равенства а и б. Чтобы доказать пункт с можно просто втупую перемножить и получить тоже самое, просто в представлении простых.

Задание 7

Пункт а

$[a,(a,b)] = a$, так как по определению (a,b) он делит a, а меньше взять нельзя.

Пункт б

$abc = [a,b,c](ab,ac,bc)$

Зафиксируем простое p,

$$[a,b,c] = p^{max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$$

$$(ab,ac,bc) = p^{min(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3)}$$

Тогда

$$[a,b,c](ab,ac,bc) = p^{max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} \cdot p^{min(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3)} = p^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = abc$$

Задание 8

Заметим, что количество чисел, которые делит p на отрезке $[1,n]$ равно в точности $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$, доказать можно индукцией.

Для понимания просто заметим, что делятся на p числа вида $k \cdot p$, $p, 2p, 3p, ...$

Чтобы найти степень p, нужно просто проссумировать по всем степеням p наши округленные значения. Почему так? Ну потому что для 1 степени, мы посчитаем все вхождения первой степени, для 2 степени мы посчитаем количество чисел куда оно входит, поэтому посчитаем вхождения 2 степени, и все будет нормально так как 1 степень уже учли. Теперь это можно пруфануть индукцией.

Обозначение $p^a || m$ - p^a делит m, a - такое максимально

Задание 9

Воспользуемся 8 задачей. Найдем какое количество раз p входит в разложение $n!, (n-m)!, m!$.

Переведем в p-ичную систему исчисления, разрежем по k разрядам.

$$\begin{cases} p^{\sum z_k} || n! \\ p^{\sum x_k} || m! \\ p^{\sum y_k} || (n-m)! \end{cases}$$

Тут x_k - k префикс числа m в p-ичной системе счисления, $x_k = k$ слагаемому в разложении α_p, так как мы в p-ичной системе счисления.

$$m = x...a_1a_0$$

$$n - m = y...b_1b_0$$

$$n = z...c_1c_0$$

$p^{\sum\limits_k (z_k - (x_k + y_k))}$ - максимальное вхождение в $\binom{n}{m}$

Посмотрим как мы складывали в столбик, так как x_k - префикс, то разность в $z_k - (x_k + y_k) = 1$, только если был перенос разряда.

Задание 10

$$d_n = \left(\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{n-1}\right)$$

$\binom{n}{1} = n$, n - делится на d_n

Пусть есть какой-то ответ $p^s || n$

Рассмотрим $\binom{n}{p^s}$, если $n \neq p^s$.

$$p^s = 1\,\overset{s}{\underbrace{0...0}}$$

$$n - p^s = ...a...p-1\,\overset{s}{\underbrace{0...0}}$$

$$n = 1\,\overset{s+1}{\underbrace{0...0}}$$

Тогда p не делит $\binom{n}{p^s}$. Значит ответ 1

Если $n = p^s$

$$p^{s-1} = 1\,\overset{s-1}{\underbrace{0...0}}$$

$$n - p^{s-1} = p - 1\,\overset{s-1}{\underbrace{0...0}}$$

$$n = 1\,\overset{s}{\underbrace{0...0}}$$

Если $n = p^{\alpha}$, p - простое, то ответ p, иначе 1.

1.2 Семинар 2

Задание 1

$$45x - 37y = 25$$

$$45x - 37y = 1$$

$$\begin{gathered}
45 = 1 \cdot 37 + 8 \\
37 = 4 \cdot 8 + 5 \\
8 = 1 \cdot 5 + 3 \\
5 = 1 \cdot 3 + 2 \\
3 = 1 \cdot 2 + 1 \\
2 = 1 \cdot 1 + 0
\end{gathered}$$

Теперь просто выражаем красные через синие и подставляем в уравнение, так доходим до самого верха.

$$1 = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1 \cdot 3 - (5 - 3) = -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = -1 \cdot 5 + 2 \cdot (8 - 5) = -3 \cdot 5 + 2 \cdot 8 =$$

$$= -3 \cdot (37 - 4 \cdot 8) + 2 \cdot 8 = -3 \cdot 37 + 14 \cdot 8 = -17 \cdot 37 + 14 \cdot 45$$

$$\hat{x_0} = 14, \hat{y_0} = 17$$

$$x_0 = 14 \cdot 25, y_0 = 17 \cdot 25$$

$$\begin{cases} x = x_0 + 37t \\ y = y_0 + 45t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 14 \cdot 25 + 37t \\ y = 17 \cdot 25 + 45t \end{cases}$$

Задание 2

Пункт а

$$\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} - 1 = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2+\sqrt{3}-1}} = [1, \overline{1, 2}]$$

Пункт б

$$\frac{1}{2} + \sqrt{7} = 3 + \sqrt{7} - \frac{5}{2} = 3 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{7}-\frac{5}{2}}} = 3 + \frac{1}{\frac{4\sqrt{7}+10}{3}} =$$

$$= 3 + \frac{1}{6 + \frac{4\sqrt{7}-8}{3}} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\frac{3}{4\sqrt{7}-8}}} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+2}{4}}} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1+\frac{\sqrt{7}-2}{4}}} =$$

$$= 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4(\sqrt{7}+2)}{3}}}} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{4\sqrt{7}-10}{3}}}} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\frac{3}{4\sqrt{7}-10}}}}} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\frac{3(4\sqrt{7}+10)}{12}}}}} =$$

$$= 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\frac{2\sqrt{7}+5}{2}}}}} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{5 + \frac{2\sqrt{7}-5}{2}}}}} = [3, \overline{6,1,6,5}]$$

Задание 3

Пункт а

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{x}{3x+1}} = 1 + \frac{3x+1}{6x+2+x} = 1 + \frac{3x+1}{7x+2} = \frac{3x+1+7x+2}{7x+2} = \frac{10x+3}{7x+2}$$

$$x(7x+2) = 10x + 3$$
$$7x^2 + 2x = 10x + 3$$
$$7x^2 - 8x - 3 = 0$$
$$d = 64 + 84 = 148$$

$$\sqrt{d} = 2\sqrt{37}$$

$$x = \frac{8 + -2\sqrt{37}}{14} \Rightarrow x = \frac{4+\sqrt{37}}{7}$$

Пункт б

Аналогично с пунктом а просто посчитать дробь $[5, \overline{1, 4}]$

Задание 4

Задание 5

$$\sqrt{2} < \frac{m}{n} < \frac{297}{210}$$

$$\sqrt{2} - 1 < \frac{m}{n} - 1 < \frac{87}{210}$$
$$\frac{210}{87} < \frac{1}{\frac{m}{n} - 1} < \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$$

Задание 6

Задание 7

Задание 8

Задание 9

Задание 10

1.3 Семинар 3

Задание 1

Пункт а)

$$\alpha = [1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128]$$

a	1	2	4	8	16	32
p	1	3	13	107	1725	55307
q	1	2	9	74	1193	38250

Возьмем до 4 элемента включая, так как нам хватит точности $\frac{1}{1193 \cdot 74}$ итого приближение равно $\frac{107}{74}$.

Пункт б)

$$\alpha = \sqrt{5} + 2$$

$$2 + \sqrt{5} = 4 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}} = 4 + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+2}{1}} = [4; \overline{4}]$$

a		4	4	4	4	4	4
p	1	4	17	72	305	1292	...
q	0	1	4	17	72	305	1292

Так как $72 \cdot 305 > 10000$, то нужное приближение равно $\frac{305}{72}$.

Оценим разность оценки и самого числа сверху и снизу

$$\frac{1}{72 \cdot 305} \geqslant |\alpha - \frac{305}{72}| \geqslant \frac{a_{k+2}}{q_k q_{k+2}} = \frac{4}{72 \cdot 1292}$$

Задание 2

$$\sqrt{n} = [a_0; \overline{a_1, a_2, ..., a_2, a_1, 2a_0}]$$

$$a_0 + \sqrt{n} = [\overline{2a_0, a_1, a_2, ..., a_2, a_1}]$$

$$\frac{x}{y} = \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_2, a_1]$$

$$x^2 - dy^2 = \pm 1$$

$$(x - \sqrt{d}y)(x + \sqrt{d}y) = \pm 1$$

$$(\frac{x}{y} - \sqrt{d})(\frac{x}{y} + \sqrt{d}) = \pm \frac{1}{y^2}$$

$$|\frac{x}{y} - \sqrt{d}| \leqslant \frac{1}{y^2(\sqrt{d}+1)} \leqslant \frac{1}{2y^2}$$

По теореме с лекции понимаем, что решениями будут числа являющиеся подходящими к $\sqrt{d}$ и достаточная точность будет, если оборвать дробь при $2a_0$, это мы пока принимаем без доказательства.

Пункт а)

$$\sqrt{10} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{10}+3}{1}} = [3; \overline{6}] \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \delta = 2$$

$$3^2 - 10 \cdot 1^2 = -1$$

a		3	6
p	1	3	19
q	0	1	6

$$(x_1, y_1) = (p_1, q_1) = (19, 6)$$
$$\dots$$
$$(x_n, y_n) = (p_{2n-1}, q_{2n-1})$$

$$x_n + \sqrt{d}y_n = (p_{k-1} + q_{k-1}\sqrt{d})^{\delta n} = (3 + 1 \cdot \sqrt{10})^{2n} = (19 + 6\sqrt{10})^n$$

$$x_n + \sqrt{d}y_n = (19 + 6\sqrt{10})^n$$

$$x_n - \sqrt{d}y_n = (19 - 6\sqrt{10})^n$$

$$x_n = \frac{1}{2}((19 + 6\sqrt{10})^n - (19 - 6\sqrt{10})^n)$$

Почему все решения в натуральных чисел представимы именно так и мы не потеряли других? Поверим теореме из условия, пока не доказываем.

Пункт б)

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13}+3}{4}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13}+1}{3}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13}+2}{3}}}} =$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{13}-1}{3}}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{13}+1}{4}}}}} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}] \Rightarrow k = 5 \Rightarrow \delta = 2$$

Тут мне стало лень техать, это глина, можете сами проверить руками.

$$3^2 - 10 \cdot 1^2 = -1$$

a		3	1	1	1	1	6
p	1	3	4	7	11	18	119
q	0	1	1	2	3	5	33

$$(x_1, y_1) = (p_1, q_1) = (19, 6)$$
$$\dots$$
$$(x_n, y_n) = (p_{2n-1}, q_{2n-1})$$

$$x_n + \sqrt{13}y_n = (18 + 5\sqrt{13})^{2n}$$

Задание 3

Так как мы рассматриваем $c > 2$ воспользуемся Теоремой Лежандра.

$$\alpha = [a_0; a_1, ..., a_n, \alpha_{n+1}] \qquad \sqrt{2} = [1; \overline{2}]$$

$$\alpha_{n+1} = \sqrt{2} + 1$$

$$|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q^2(\sqrt{2} + 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n})}$$

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{q_{n-1}}{2q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{1}{2 + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}}$$

По индукции докажем, что для номеров одной четности $\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \leqslant \sqrt{2} - 1$, пруфаните сами или поверьте Кириллу Кудряшову. Для другой четности неравенство обратное.

$$\frac{1}{q^2(\sqrt{2} + 1 + \frac{q_{n-1}}{q_n})} \geqslant \frac{1}{q^2(\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}q^2}$$

Доказали первый пункт.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{q_{n-1}}{q_n} = \sqrt{2} - 1$$

$$|\frac{q_{n-1}}{q_n} - (\sqrt{2} - 1)| \leqslant \frac{1}{q_n^2}$$

Поэтому если мы возьмем $c > 2\sqrt{2}$, то начиная с некоторого числа решений не будет, так как у нас есть предел.