Pesquisa Operacional

Método Gráfico

Felipe Augusto Lima Reis
felipe.reis@ifmg.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

Sumário

Método Gráfico

Método Gráfico

- Segundo [Hillier and Lieberman, 2010] apud [Belfiore and Fávero, 2013], qualquer problema de PL com duas variáveis de decisão pode ser resolvido graficamente.

Método Gráfico

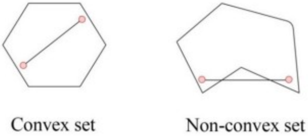
- Passos para solução de um problema usando o método gráfico [Taha, 2007] [Belfiore and Fávero, 2013]
  1. Determinar o espaço de soluções viáveis[1] ou região factível em um eixo cartesiano;
  2. Determinar a solução ótima do modelo (solução factível com melhor valor da função objetivo)
     - Problemas de maximização: maior valor possível;
     - Problemas de minimização: menor valor possível.

[1] Solução viável é aquela que satisfaz todas as restrições, inclusive as de não negatividade.

Teoremas

Teorema 1

- O conjunto K de soluções factíveis de um problema de programação linear é convexo [Belfiore and Fávero, 2013].



Fonte: [Hui, 2019]

Teorema 2

- A função objetivo atinge seu ponto máximo ou mínimo em um ponto extremo do conjunto convexo K [Belfiore and Fávero, 2013].

Determinação do espaço de soluções viáveis

Considere o seguinte modelo de programação linear [Taha, 2007]:

$$max\ z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} \text{suj. a:} \qquad 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \quad (1)\\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \quad (2)\\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \quad (3)\\ x_2 &\leq 2 \quad (4)\\ x_1 &\geq 0 \quad (5)\\ x_2 &\geq 0 \quad (6) \end{aligned}$$

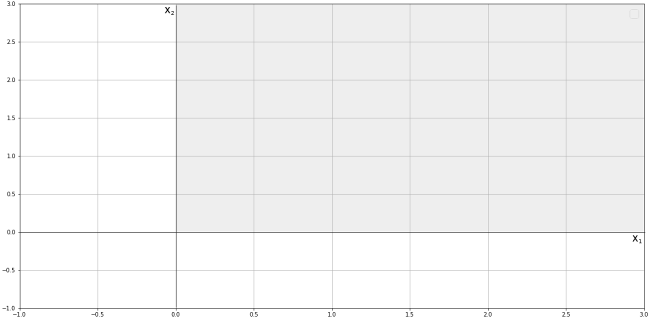
Método

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Passos para solução de um problema usando o método gráfico:
  1. Determinar o espaço de soluções viáveis no eixo cartesiano;
     a. Definir os eixos do gráfico como as variáveis x_1 e x_2;
     b. Determinar o quadrante do gráfico de modo a respeitar as restrições de não negatividade;
     c. Traçar as curvas correspondentes às restrições do modelo;
     d. Determinar a solução de regiões viáveis (região factível).
  2. Determinar a solução ótima do modelo.

Definição do Espaço de Soluções

1. Determinar o espaço de soluções viáveis no eixo cartesiano;
   a. Definir os eixos do gráfico como as variáveis x_1 e x_2;
   b. Determinar o quadrante do gráfico de modo a respeitar as restrições de não negatividade $(x_1, x_2 \geq 0)$;



Fonte: Próprio autor

Definição do Espaço de Soluções

1. Determinar o espaço de soluções viáveis no eixo cartesiano
   c. Traçar as curvas correspondentes às restrições do modelo;
      i. Substitua as desigualdades por igualdades;
      ii. Defina dois pontos distintos no gráfico (substitua x_1 por zero na equação e gere x_2; faça o mesmo com x_2 para gerar x_1);
      iii. Trace uma reta entre os pontos.
      iv. Defina a região correspondente a desigualdade.

Definição do Espaço de Soluções

1. Determinar o espaço de soluções viáveis no eixo cartesiano;
   c. Traçar as curvas correspondentes às restrições do modelo
      i. Substitua as desigualdades por igualdades;

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \quad (1) \quad \Longrightarrow \quad 6x_1 + 4x_2 = 24 \quad (1)$$

      ii. Defina dois pontos distintos no gráfico;

$$6x_1 + 4x_2 = 24 \quad (1)$$

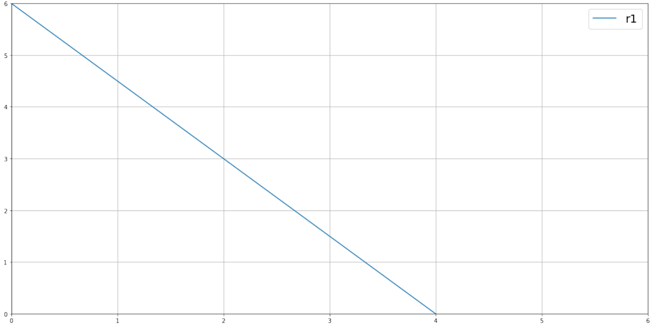
para $x_1 = 0$, temos $(6 \times 0) + 4x_2 = 24 \rightarrow x_2 = 6$
para $x_2 = 0$, temos $6x_1 + (4 \times 0) = 24 \rightarrow x_1 = 4$
pontos gerados: $(0, 6)$ e $(4, 0)$

Definição do Espaço de Soluções

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

1. Determinar o espaço de soluções viáveis no eixo cartesiano
   - c. Traçar as curvas correspondentes às restrições do modelo;
     - iii. Trace uma reta entre os pontos.

$$6x_1 + 4x_2 = 24 \quad (1)$$



Fonte: Próprio autor

Definição do Espaço de Soluções

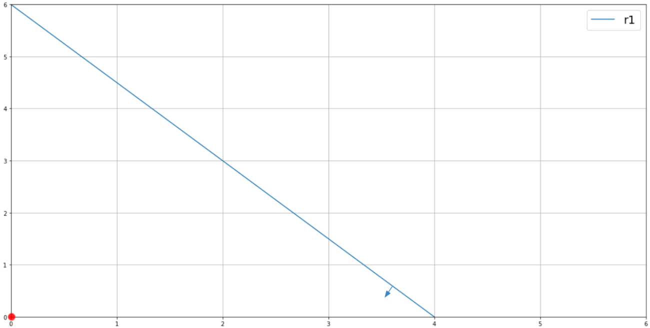
1. Determinar o espaço de soluções viáveis no eixo cartesiano
   - c. Traçar as curvas correspondentes às restrições do modelo
     - iv. Defina a região correspondente a desigualdade [Taha, 2007]
       1. Defina o ponto $(0, 0)$ como "ponto de referência";
       2. Verifique se o ponto satisfaz a desigualdade;
       3. Se a desigualdade for satisfeita, o lado no qual ele se encontra é a região viável;
       4. Caso contrário, a região viável é o outro lado.

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \implies (6 \times 0) + (4 \times 0) \leq 24 \implies 0 \leq 24$$

Definição do Espaço de Soluções

1. Determinar o espaço de soluções viáveis no eixo cartesiano
   - c. Traçar as curvas correspondentes às restrições do modelo
     - iv. Defina a região correspondente a desigualdade.

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \quad (1)$$

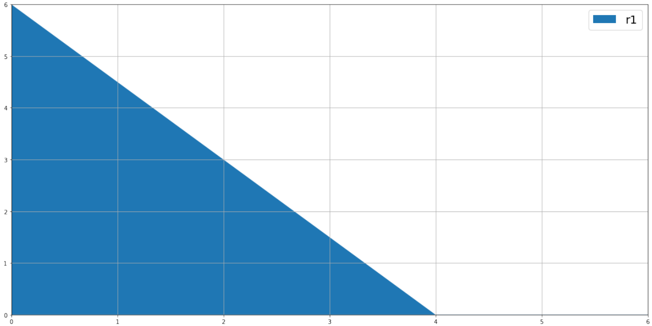


Fonte: Próprio autor

Definição do Espaço de Soluções

1. Determinar o espaço de soluções viáveis no eixo cartesiano
   - c. Traçar as curvas correspondentes às restrições do modelo
     - iv. Defina a região correspondente a desigualdade.

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \quad (1)$$

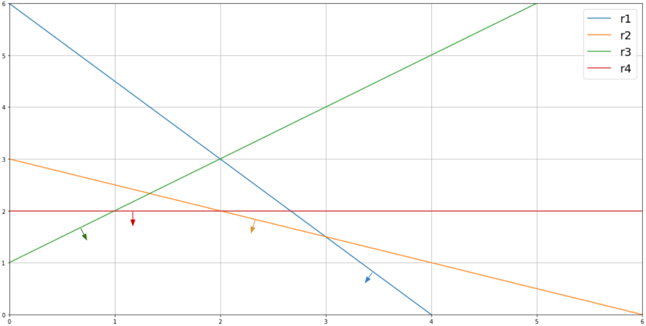


Fonte: Próprio autor

Definição do Espaço de Soluções

1. Determinar o espaço de soluções viáveis no eixo cartesiano;
   c. Traçar as curvas correspondentes às restrições do modelo;

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \quad (1) \qquad -x_1 + x_2 \leq 1 \quad (3)$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (2) \qquad x_2 \leq 2 \quad (4)$$

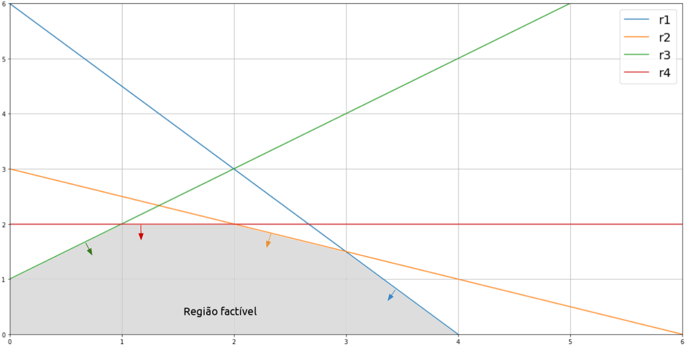


Fonte: Próprio autor

Definição do Espaço de Soluções

1. Determinar o espaço de soluções viáveis no eixo cartesiano
   c. Traçar as curvas correspondentes às restrições do modelo;

$$
\begin{aligned}
6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \quad (1) & \qquad -x_1 + x_2 &\leq 1 \quad (3)\\
x_1 + 2x_2 &\leq 6 \quad (2) & x_2 &\leq 2 \quad (4)
\end{aligned}
$$



Fonte: Próprio autor

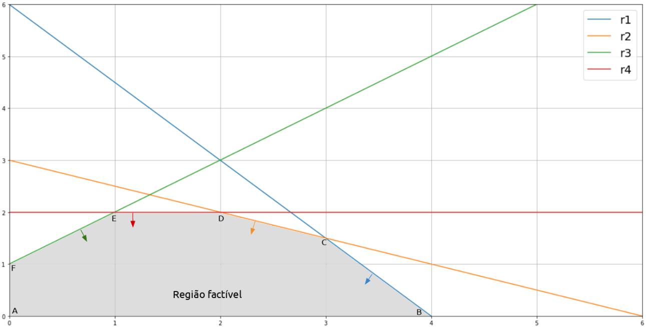
Definição da solução ótima do modelo

Método

- Passos para solução de um problema usando o método gráfico:
  1. Determinar o espaço de soluções viáveis no eixo cartesiano;
  2. Determinar a solução ótima do modelo
     a. Identificar todos os vértices da região factível;
     b. Resolver o sistema de equações para encontrar os pontos de interseção entre as restrições.
     c. Testar os pontos cartesianos correspondentes aos vértices na função objetivo.

Definição do Espaço de Soluções

1. Determinar a solução ótima do modelo
   a. Identificar todos os vértices da região factível



Fonte: Próprio autor

Definição do Espaço de Soluções

1. Determinar a solução ótima do modelo
   b. Resolver o sistema de equações para encontrar os pontos de interseção entre as restrições.

$$6x_1 + 4x_2 = 24 \quad (1)$$
$$x_1 + 2x_2 = 6 \quad (2)$$

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = 1.5$$

Definição do Espaço de Soluções

1. Determinar a solução ótima do modelo
   - c. Testar os pontos cartesianos correspondentes aos vértices na função objetivo.

$$max\ z = 5x_1 + 4x_2$$

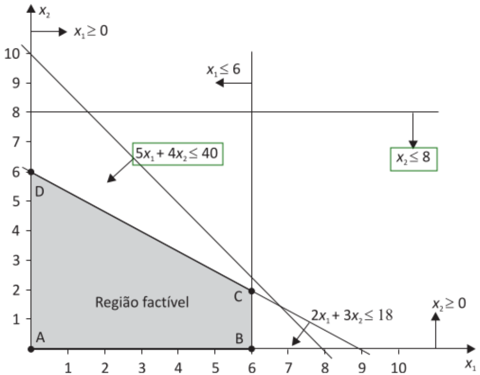
Ponto	(x_1, x_2)	z
A	(0, 0)	0
B	(4, 0)	20
C	(3, 1.5)	**21**
D	(2, 2)	18
E	(1, 2)	13
F	(0, 1)	4

Casos Especiais

Restrições Redundantes

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

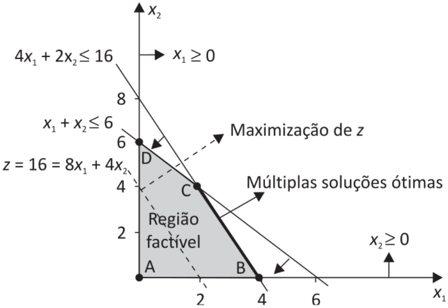
- Restrições Redundantes são aquelas que se eliminadas do modelo não alteram o espaço de soluções factíveis [Belfiore and Fávero, 2013].



Fonte: Adaptado de [Belfiore and Fávero, 2013]

Múltiplas Soluções Ótimas

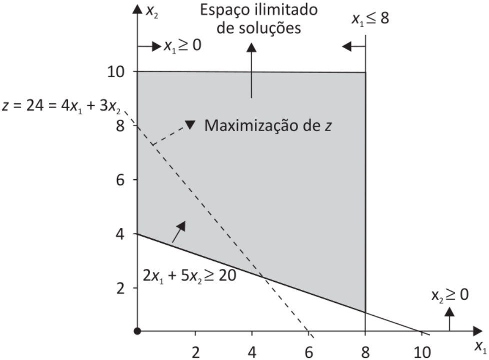
- PPLs podem apresentar mais de uma solução ótima;
- A função objetivo assume o valor ótimo em pelo menos dois pontos extremos e em todas as combinações lineares desses pontos (segmentos de reta) [Belfiore and Fávero, 2013].



Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]

Função Objetivo Ilimitada

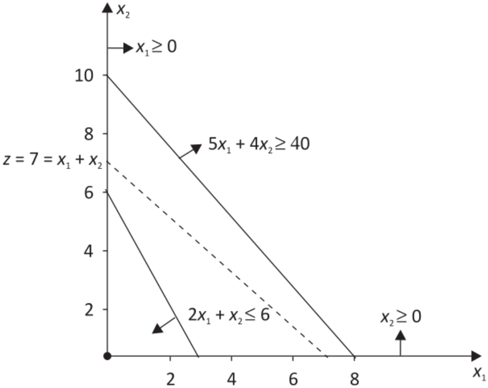
- Não existe limite para o crescimento do valor de pelo menos uma variável de decisão, resultando em uma região factível e uma função objetivo ilimitada [Belfiore and Fávero, 2013].



Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]

Não existe solução Ótima

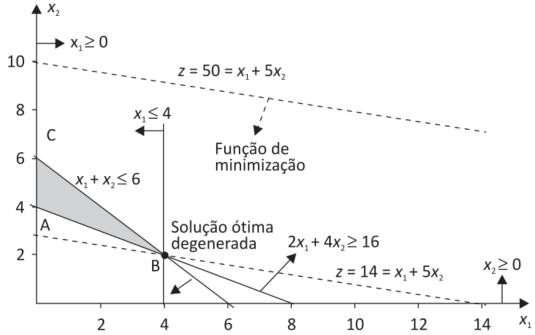
- Em alguns PPLs, o conjunto de soluções factíveis é vazio, ou seja, não existe solução. [Belfiore and Fávero, 2013].



Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]

Solução Ótima Degenerada

- É possível identificar uma solução degenerada "quando um dos vértices da região factível é obtido pela interseção de mais de duas retas distintas" [Belfiore and Fávero, 2013]



Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]

Referências I

Belfiore, P. and Fávero, L. P. (2013).
Pesquisa operacional para cursos de engenharia.
Elsevier, 1 edition.

Diego Mello da Silva (2016).
Pesquisa Operacional - Slides de Aula.
IFMG - Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Formiga.

Goldbarg, M. C. and Luna, H. P. L. (2005).
Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos.
Elsevier, 2 edition.

Hillier, F. and Lieberman, G. (2010).
Introduction to Operations Research.
McGraw-Hill higher education. McGraw-Hill Higher Education.

Hui, J. (2019).
Machine learning â lagrange multiplier and dual decomposition.
[Online]; acessado em 27 de Agosto de 2020. Disponível em: https://medium.com/@jonathan_hui/machine-learning-lagrange-multiplier-dual-decomposition-4afe66158c9.

Taha, H. A. (2007).
Pesquisa Operacional.
Editora Prentice-Hall, 8 edition.