Matemática Computacional

Sistemas Lineares

Felipe Augusto Lima Reis
felipe.reis@ifmg.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

Sumário

Introdução a Sistemas Lineares

Sistemas Lineares

- Um sistema de equações lineares pode ser escrito na **forma algébrica** como:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

- O sistema também pode ser representado na **forma matricial** $Ax = b$, onde :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

- Na forma matricial, temos a seguinte nomenclatura:
    - A: matriz de coeficientes;
    - x: vetor de incógnitas;
    - b: vetor dos termos constantes
- Podemos também definir uma matriz completa (ou estendida) de $Ax = b$ como $[A|b]$:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Matrizes triangulares

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Sistema triangular inferior de ordem n:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & lnn \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

- Sistema triangular superior de ordem n:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Método de Gauss (Eliminação Gaussiana)

Eliminação Gaussiana

- Eliminação Gaussiana (popularmente, escalonamento) é um método para solução de sistemas lineares:
  - Consiste em realizar operações elementares, de forma a transformar a matriz de coeficientes (A) em uma matriz triangular (inferior ou superior);
  - Após o escalonamento, a solução pode ser obtida via substituição regressiva [Justo et al., 2020].

Eliminação Gaussiana

- Operações permitidas na Eliminação Gaussiana:
  - multiplicação de um linha por uma constante não nula;
  - substituição de uma linha por ela mesma somada a um múltiplo de outra linha;
  - permutação de duas linhas [Justo et al., 2020].

Eliminação Gaussiana

- Considere o sistema abaixo: [Justo et al., 2020]

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 4x + 4y + 2z &= 2 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

- O sistema pode ser transformado na seguinte matriz estendida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Eliminação Gaussiana

Pergunta do protocolo:

- A matriz atual é triangular superior ou inferior? Não.

Sequência de solução:

1. Iteração: zerar o primeiro elemento das linhas $m > 1$
   - Consideremos a linha 2, como exemplo:
     - Utilizar a matriz **atual** para cálculo das novas linhas 2 e 3;
     - Considere a_{21} igual ao primeiro elemento da linha 2 e a_{11}, o primeiro elemento da linha 1[1];
     - Fazer: $L_2 \leftarrow a_{11}L_2 - a_{12}L_1$

[1] Não é necessário utilizar fórmula abaixo (apenas sugestão).

Eliminação Gaussiana

Pergunta do protocolo:

- A matriz atual é triangular superior ou inferior? Não.

Sequência de solução:

1. Iteração: zerar o primeiro elemento das linhas $m > 1$
   - Consideremos a linha 2, como exemplo:
     - Utilizar a matriz **atual** para cálculo das novas linhas 2 e 3;
     - Considere a_{21} igual ao primeiro elemento da linha 2 e a_{11}, o primeiro elemento da linha 1[1];
     - Fazer: $L_2 \leftarrow a_{11}L_2 - a_{12}L_1$

[1] Não é necessário utilizar fórmula abaixo (apenas sugestão).

Eliminação Gaussiana

Sequência de solução [cont.]:

1. Iteração: zerar o primeiro elemento das linhas $m > 1$ [2]
   - Consideremos a linha 3, como exemplo:
     - Considere a_{31} igual ao primeiro elemento da linha 3 e $a_1 1$, o primeiro elemento da linha 1;
     - Fazer: $L_3 \leftarrow a_{11} L_3 - a_{31} L_1$

[2] Repetir o mesmo protocolo para todas as linhas $m > 1$ (caso existam)

Eliminação Gaussiana

Matriz estendida

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Aplicação (Iteração 1)

1. Iteração: zerar primeiro elemento linhas $m > 1$:
   - $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ $(a_{21} = 4,\ a_{11} = 1)$;

$$\begin{cases} 4x + 4y + 2z = 2 \quad (L_2) \\ \underline{-4x - 4y - 4z = -4 \quad (-4L_1)} \\ 0x + 0y - 2z = -2 \quad (L_2 - 4L_1) \end{cases}$$

Eliminação Gaussiana

Aplicação (Iteração 1) [cont.]

1. Iteração: zerar primeiro elemento linhas $m > 1$:
   - $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ $(a_{31} = 2,\ a_{11} = 1)$;

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \quad (L_3) \\ -2x - 2y - 2z = -2 \quad (-2L_1) \\ \hline 0x - y - 3z = -2 \quad (L_3 - 2L_1) \end{cases}$$

- Matriz resultante

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Eliminação Gaussiana

Aplicação (Iteração 1) [cont.]

1. Iteração: zerar primeiro elemento linhas $m > 1$:
   - $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ $(a_{31} = 2,\ a_{11} = 1)$;

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \quad (L_3) \\ -2x - 2y - 2z = -2 \quad (-2L_1) \\ \hline 0x - y - 3z = -2 \quad (L_3 - 2L_1) \end{cases}$$

- Matriz resultante

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Eliminação Gaussiana

Pergunta do protocolo:

- A matriz atual é triangular superior ou inferior? Não.

Sequência de solução:

2. Iteração: zerar o **segundo** elemento das linhas $m \neq 2$
   - Opções:
     - Zerar as linhas 1 e 3, repetindo o protocolo semelhante ao feito no passo 1 (soma de linhas);
     - Trocar linha 3 com linha 2, multiplicar a linha 2 por (-1) e, em seguida, zerar a linha 1;
   - As duas opções tem o mesmo efeito sobre o escalonamento, cabendo escolha pessoal
     - Devido à facilidade da troca de linhas, sem necessidade de cálculos, optaremos pela segunda opção.

Eliminação Gaussiana

Matriz estendida (após passo 1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Aplicação (Iteração 2)

2. Iteração: zerar o **segundo** elemento das linhas $m > 2$:
   - Troca das linhas 2 e 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Eliminação Gaussiana

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

Aplicação (Iteração 2) [cont.]

2. Iteração: zerar o **segundo** elemento das linhas $m \neq 2$:
   - Multiplicar a linha 2 por -1
   - Multiplicar a linha 3 por -1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

   - Dividir a linha 3 por 2:[3]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[3] Apesar de não ser obrigatório, procure manter sempre as linhas pivô com coeficiente 1, para facilitar os cálculos.

Eliminação Gaussiana

Pergunta do protocolo:

- A matriz atual é triangular superior ou inferior? Sim.

Qual o protocolo **se** a matriz não fosse triangular

- Se a matriz não fosse triangular, deveríamos repetir o protocolo até transformá-la em uma matriz triangular.

Sequência de solução:

3. Como a matriz é triangular (superior), devemos voltar ao resolver o sistema correspondente à matriz atual.

Eliminação Gaussiana

Matriz atual estendida (após passo 2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sequência de solução

3. Resolver o sistema correspondente à matriz atual.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y + 3z &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

- Temos, por substituição, $z = 1$, $y = -1$ e $x = 1$.

Método de Gauss-Jordan

Método de Gauss-Jordan

- O método de **Método de Gauss-Jordan** complementa o método de Gauss;
- Ele continua o escalonamento da matriz até transformá-la em uma matriz diagonal.

Método de Gauss-Jordan

- Consideremos a seguinte matriz escalonada, após aplicação do Método de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jordan

Pergunta do protocolo:

- A matriz atual é diagonal? Não.

Sequência de solução:

- Continuar a eliminação gaussiana até gerar uma matriz diagonal;
- Protocolo:
  - Iterar até zerar todos os elementos que não pertencem à diagonal da matriz de coeficientes A, seguindo o protocolo de escalonamento.

Método de Gauss-Jordan

Pergunta do protocolo:

- A matriz atual é diagonal? Não.

Sequência de solução:

- Continuar a eliminação gaussiana até gerar uma matriz diagonal;
- Protocolo:
  - Iterar até zerar todos os elementos que não pertencem à diagonal da matriz de coeficientes A, seguindo o protocolo de escalonamento.

Método de Gauss-Jordan

Consideremos a última matriz escalonada[4]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $L_1 = L_1 - L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $L_1 = L_1 + 2L_3$
- $L_2 = L_2 - 3L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[4] Seção Método de Gauss, após passo 2.

Método de Gauss-Jordan

Matriz atual estendida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

- Após a finalização do método, a matriz contém diretamente os valores das variáveis;
- Logo, $x = 1$, $y = -1$ e $z = 1$.

Método de Gauss-Jordan

Matriz atual estendida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

- Após a finalização do método, a matriz contém diretamente os valores das variáveis;
- Logo, $x = 1$, $y = -1$ e $z = 1$.

Eliminação Gaussiana com Pivotamento Parcial

Elim. Gauss com Pivotamento Parcial

- Consiste em fazer permutação de linhas de forma a escolher o maior pivô (em módulo) a cada passo [Justo et al., 2020].

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + y - z &= 0 \\ 2x + 2y + z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{2} & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{2} & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1/2} & 1/2 \end{bmatrix}$$

Fonte: Adaptado de [Justo et al., 2020]

Elim. Gauss com Pivotamento Parcial

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- A técnica de eliminação gaussiana com pivotamento parcial ajuda a evitar a propagação dos erros de arredondamento [Justo et al., 2020].

Elim. Gauss com Pivotamento Parcial

- Considere o seguinte sistema linear, onde $0 \ll \epsilon \ll 1$

$$\begin{aligned} \epsilon x + 2y &= 4 \\ x + \epsilon y &= 3 \end{aligned}$$

- Em formato matricial e escalonando o sistema, temos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 2 & 4 \\ 1 & \varepsilon & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 2 & 4 \\ 0 & \varepsilon - \frac{2}{\varepsilon} & 3 - \frac{4}{\varepsilon} \end{array}\right]$$

Elim. Gauss com Pivotamento Parcial

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Resolvendo o sistema, temos:

$$y = \frac{3 - \frac{4}{\epsilon}}{\epsilon - \frac{2}{\epsilon}} \quad \text{e} \quad x = \frac{4 - 2y}{\epsilon}$$

- Quando $\epsilon \to 0$, temos:

$$y = \frac{3 - \frac{4}{\epsilon}}{\epsilon - \frac{2}{\epsilon}} = \frac{3\epsilon - 4}{\epsilon^2 - 2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Elim. Gauss com Pivotamento Parcial

- Calculado o valor de y, podemos calcular x:

$$x = \frac{4 - 2y}{\epsilon} = \frac{2}{\epsilon}(2 - y) = 0$$

- No entanto, o resultado está incorreto!

Elim. Gauss com Pivotamento Parcial

- Calculado o valor de y, podemos calcular x:

$$x = \frac{4 - 2y}{\epsilon} = \frac{2}{\epsilon}(2 - y) = 0$$

- **No entanto, o resultado está incorreto!**

Elim. Gauss com Pivotamento Parcial

- Para conferir, vamos substituir no sistema original, onde $\epsilon \to 0$, $x = 0$ e $y = 2$:

$$
\begin{aligned}
\epsilon x + 2y = 4 \quad &\Longrightarrow \quad (0 \times 0) + (2 \times 2) = 4 \\
x + \epsilon y = 3 \quad &\Longrightarrow \quad 0 + (0 \times 2) \neq 3
\end{aligned}
$$

- Quando ϵ é pequeno e utilizamos um sistema de ponto flutuante de acurácia finita, o resultado de x depende de y, gerando $x = 0$;
- Essa condição é chamada Cancelamento Catastrófico;
- Para soluciona-la, devemos utilizar o Pivotamento Parcial.

Elim. Gauss com Pivotamento Parcial

- Com o pivotamento parcial, temos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 2 & 4 \\ 1 & \varepsilon & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \varepsilon & 3 \\ 0 & 2-\varepsilon^2 & 4-3\varepsilon \end{array}\right]$$

- Resolvendo o sistema, temos:

$$y = \frac{4-4\epsilon}{2-\epsilon^2} \quad \text{e} \quad x = 3 - \epsilon y$$

- Nesse resultado, o resultado de x não depende de y, de modo que seja possível um cancelamento catastrófico;
- Resolvendo o sistema, para $\epsilon \to 0$, temos $x \approx 3$ e $y = 2$.

Fatoração LU

Fatoração LU

- Para matrizes densas, é possível fatorar a matriz A como o produto de uma matriz L triangular inferior e uma matriz U triangular superior, ou seja, $A = LU$ [Justo et al., 2020].

$$Ax = b$$

$$LUx = b$$

$$L(Ux) = b$$

$$Ly = b \qquad Ux = y$$

- A matriz U da fatoração LU é a matriz obtida ao final do escalonamento da matriz A.

Matriz densa: matrizes cuja maioria dos valores são diferentes de zero.

Matriz esparsa: matrizes cuja maioria dos valores são iguais a zero.

Fatoração LU

- Para resolver um sistema utilizando Fatoração LU, devemos seguir o seguinte protocolo:
    1. Escalonar a matriz e aplicar as frações usadas no escalonamento à posição correspondente na matriz identidade;
    2. Resolver o sistema triangular inferior $Ly = b$;
    3. Resolver o sistema triangular superior $Ux = y$.

- Após a solução do sistema triangular superior, teremos o resultado de $Ax = b$.

Fatoração LU

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- A fatoração LU tem como vantagem a possibilidade de resolução de qualquer sistema que tenha cuja matriz de coeficientes seja igual à matriz A [Ruggiero and Lopes, 2000]
  - Se o vetor b for alterado, não será necessário fatorar a matriz novamente;
  - Os resultados serão obtidos somente pelas etapas de resolução dos sistemas triangulares.
- Fatoração LU também pode ser utilizada para cálculo de determinantes e matrizes inversas[5] [Campos Filho, 2007].

[5] Essas aplicações não serão abordadas nesta disciplina.

Fatoração LU

- Considere o sistema abaixo: [Justo et al., 2020]

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\
2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\
2x_1 - x_2 + x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

- O sistema pode ser transformado nas seguintes matrizes:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

Fatoração LU

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Para utilizar o método, devemos definir a seguinte estrutura:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{U}$$

- Para escalonamento da matriz U, iremos utilizar uma fórmula diferente daquela utilizada na Eliminação Gaussiana
  - Essa fórmula também pode ser usada no Método de Gauss[6].

[6]Como a fórmula pode gerar frações, optei pela abordagem anterior na apresentação do Método de Gauss, uma vez que julguei que os resultados, em geral, são mais simples, o que evita erros de cálculos.

Fatoração LU

- Consideremos que desejamos zerar o elemento u_{21} (linha 2), com base na linha 1 (elemento u_{11});
- Para isso, iremos definir um valor α, correspondente a:

$$\alpha_{21} = u_{21}/u_{11}$$

- A atualização da matriz U será dada por:

$$U_2 = U_2 - \alpha_{21} U_1$$

- Esse valor α_{21} substituirá o elemento l_{21} da matriz L (esse valor na matriz identidade, originalmente é zero).

Não confundir o elemento l_{21}, da matriz L (em fatoração LU) com a linha da matriz gaussiana, previamente indicada pela letra L.

Fatoração LU

- De forma análoga, para zerar o elemento u_{31} (linha 3), com base na linha 1 (elemento u_{11}):

$$\alpha_{31} = u_{31}/u_{11}$$

- A atualização da matriz U será dada por:

$$U_3 = U_3 - \alpha_{31} U_1$$

- O valor α_{31} substituirá o elemento l_{31} da matriz L;
- A mesma ideia será aplicada a outros elementos que forem atualizados na matriz LU.

Fatoração LU

- Fase 1 do Protocolo:
  1. Escalonar a matriz e aplicar as frações usadas no escalonamento à posição correspondente na matriz identidade;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\alpha_{21} = u_{21}/u_{11} \rightarrow \alpha_{21} = 2$
- $U_2 = U_2 - 2U_1$
- $l_{21} = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fatoração LU

- Fase 1 do Protocolo: [cont.]
  1. Escalonar a matriz e aplicar as frações usadas no escalonamento à posição correspondente na matriz identidade;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ \mathbf{2} & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\alpha_{31} = u_{31}/u_{11} \rightarrow \alpha_{31} = 2$
- $U_3 = U_3 - 2U_1$
- $l_{31} = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Fatoração LU

- Fase 1 do Protocolo: [cont.]
  1. Escalonar a matriz e aplicar as frações usadas no escalonamento à posição correspondente na matriz identidade;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \textbf{-1} & -3 \\ 0 & \textbf{-3} & -1 \end{bmatrix}$$

- $\alpha_{32} = u_{32}/u_{22} \rightarrow \alpha_{22} = -3/-1 = 3$
- $U_3 = U_3 - 3U_2$
- $l_{32} = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Fatoração LU

- Após a fatoração, devemos aplicar a Fase 2 do Protocolo:

  2. Resolver o sistema triangular inferior $Ly = b$;

$$\begin{aligned} y_1 &= -2 \\ 2y_1 + y_2 &= 1 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 &= 3 \end{aligned}$$

- Após a solução do sistema, temos:

$$y_1 = -2 \quad , \quad y_2 = 5 \quad \text{e} \quad y_3 = -8$$

Fatoração LU

- Obtido os valores de y, devemos aplicar a Fase 3:

    3. Resolver o sistema triangular superior $Ux = y$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ -x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 8x_3 &= -8 \end{aligned}$$

- Solucionando o sistema, temos:

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = -2 \quad \text{e} \quad x_3 = -1$$

- A solução da Fase 3 do Protocolo corresponde à solução final do sistema, utilizando a Fatoração LU.

Métodos Iterativos

Método de Jacobi

Método de Jacobi

- Considere um sistema linear, escrito na forma algébrica:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned}$$

- O valor de x_1, em uma iteração $k+1$ pode ser dado por:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{y_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}}$$

Método de Jacobi

- Para um determinado elemento x_n, em uma iteração $k+1$, temos:

$$x_n^{(k+1)} = \frac{y_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + ... + a_{n,n-2}x_{n-2}^{(k)} + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})}{a_{nn}}$$

- O Método de Jacobi corresponde a [Justo et al., 2020]:

$$x^{(1)} = \text{aproximação inicial}$$

$$x_i^{(k+1)} = \left(y_i - \frac{\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{nn}} \right)$$

Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

- Considere um sistema linear, escrito na forma algébrica:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned}$$

- O valor de x_1, em uma iteração $k+1$, é dado da mesma forma que o Método de Jacobi, por:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{y_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}}$$

Método de Gauss-Seidel

- O cálculo de x_2, no entanto, é dado a partir de x_1, como:

$$x_2^{(k+1)} = \frac{y_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + ... + a_{2n}x_n^{(k)})}{a_{22}}$$

- Para um elemento x_n, em uma iteração $k+1$, temos:

$$x_n^{(k+1)} = \frac{y_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + ... + a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k+1)})}{a_{nn}}$$

Método de Gauss-Seidel

- O Método de Gauss-Seidel corresponde a [Justo et al., 2020]:

$$x^{(1)} = \text{aproximação inicial}$$

$$x_i^{(k+1)} = \left(\frac{y_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} \right)$$

Convergência dos Métodos de Jacobi e Gauss-Seidel

Convergência de Jacobi e Gauss-Seidel

- A condição suficiente para que os métodos de Gauss-Seidel e Jacobi convirjam é a que a matriz seja estritamente diagonal dominante[7] [Justo et al., 2020].
  - Uma matriz é estritamente diagonal dominante quando:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , \ i = 1, 2, ..., n$$

  - Uma matriz é diagonal dominante quando:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , \ i = 1, 2, ..., n$$

[7] Condição não obrigatória

Comparação entre os Métodos de Jacobi e Gauss-Seidel

Comparação Métodos Iterativos

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Considere o seguinte sistema linear:

$$10x + y = 23$$
$$x + 8y = 26$$

- A resolução pelos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel:

Método de Jacobi

$$\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= \frac{23 - y^{(k)}}{10}\\
y^{(k+1)} &= \frac{26 - x^{(k)}}{8}\\
x^{(2)} &= \frac{23 - y^{(1)}}{10} = 2{,}3\\
y^{(2)} &= \frac{26 - x^{(1)}}{8} = 3{,}25\\
x^{(3)} &= \frac{23 - y^{(2)}}{10} = 1{,}975\\
y^{(3)} &= \frac{26 - x^{(2)}}{8} = 2{,}9625
\end{aligned}$$

Método de Gauss-Seidel

$$\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= \frac{23 - y^{(k)}}{10}\\
y^{(k+1)} &= \frac{26 - x^{(k+1)}}{8}\\
x^{(2)} &= \frac{23 - y^{(1)}}{10} = 2{,}3\\
y^{(2)} &= \frac{26 - x^{(2)}}{8} = 2{,}9625\\
x^{(3)} &= \frac{23 - y^{(2)}}{10} = 2{,}00375\\
y^{(3)} &= \frac{26 - x^{(3)}}{8} = 2{,}9995312
\end{aligned}$$

Fonte: [Justo et al., 2020]

Referências I

Campos Filho, F. F. (2007).
ALGORITMOS NUMERICOS.
LTC, 2 edition.

da Silva, D. M. (2020).
Cálculo Numérico - Slides de Aula.
IFMG - Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Formiga.

Justo, D., Sauter, E., Azevedo, F., Guidi, L., and Konzen, P. H. (2020).
Cálculo Numérico, Um Livro Colaborativo - Versão Python.
UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/livro-py.pdf.

Ruggiero, M. A. G. and Lopes, V. L. d. R. (2000).
Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais.
Editora Makron, 2 edition.