Matemática Discreta

Relações (Ordenação)

Felipe Augusto Lima Reis
felipe.reis@ifmg.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

Sumário

Ordenação Parcial

Ordenação Parcial

- Definição: Uma relação binária R em um conjunto S é denominada ordenação parcial se for reflexiva, antissimétrica e transitiva
  - Um conjunto S com uma ordenação parcial R é chamado de conjunto parcialmente ordenado ou *poset*;
  - Esse conjunto é denotado por (S, R);
  - Elementos do conjunto são chamados de elementos do *poset* [Rosen, 2019] [Gersting, 2014].

Ordenação Parcial

- Ordenações parciais em conjuntos (*posets*) representam diferentes operações:
  - $\leq$, para relação de menor ou igual;
  - $\subseteq$, para relação de subconjunto;
  - $|$, para relação de divisor (divide)[1].

- De forma genérica, podemos utilizar a representação $(S, \preceq)$ para denotar ordenações parciais [Rosen, 2019] [Gersting, 2014] [da Silva, 2012]
  - O símbolo $\preceq$ é utilizado para denotar qualquer relação;
  - A notação $a \preceq b$ denota que $(a, b) \in R$ em um *poset* (S, R) arbitrário.

[1] Se $a|b$, a é divisor de b.

O símbolo $\preceq$ é chamado, matematicamente, de "precede ou igual", enquanto $\prec$ é chamado de "precede".

Ordenação Parcial - Exemplo [Rosen, 2019]

- Mostre que a relação "maior ou igual a" ($\geq$) é uma ordenação parcial sobre o conjunto dos inteiros.
  - Reflexiva?
    - $a \geq a, \forall a \in \mathbb{Z}$. Logo, R é reflexiva.
  - Antissimétrica?
    - $a \geq b \wedge b \geq a$ se, e somente se, $a = b$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}$. Logo, R é antissimétrica.
  - Transitiva?
    - Temos $a \geq b \wedge b \geq c \therefore a \geq c$, $\forall a \forall b \forall c \in \mathbb{Z}$. Logo, R é transitiva.
  - Como a relação R é reflexiva, antissimétrica e transitiva, logo é uma ordenação parcial.

Lembrete: devemos supor as relações aRa para relações simétricas, aRb, para relações antissimétricas e $aRb \wedge bRc$ para relações transitivas.

Ordenação Parcial - Exemplo [Rosen, 2019]

- Mostre que a relação "maior ou igual a" ($\geq$) é uma ordenação parcial sobre o conjunto dos inteiros.
  - Reflexiva?
    - $a \geq a, \forall a \in \mathbb{Z}$. Logo, R é reflexiva.
  - Antissimétrica?
    - $a \geq b \wedge b \geq a$ se, e somente se, $a = b$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}$. Logo, R é antissimétrica.
  - Transitiva?
    - Temos $a \geq b \wedge b \geq c \therefore a \geq c$, $\forall a \forall b \forall c \in \mathbb{Z}$. Logo, R é transitiva.
  - Como a relação R é reflexiva, antissimétrica e transitiva, logo é uma ordenação parcial.

Lembrete: devemos supor as relações aRa para relações simétricas, aRb, para relações antissimétricas e $aRb \wedge bRc$ para relações transitivas.

Ordenação Parcial - Exemplo [Rosen, 2019]

- Mostre que a relação "maior ou igual a" ($\geq$) é uma ordenação parcial sobre o conjunto dos inteiros.
  - Reflexiva?
    - $a \geq a, \forall a \in \mathbb{Z}$. Logo, R é reflexiva.
  - Antissimétrica?
    - $a \geq b \wedge b \geq a$ se, e somente se, $a = b$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}$. Logo, R é antissimétrica.
  - Transitiva?
    - Temos $a \geq b \wedge b \geq c \; \therefore \; a \geq c$, $\forall a \forall b \forall c \in \mathbb{Z}$. Logo, R é transitiva.
  - Como a relação R é reflexiva, antissimétrica e transitiva, logo é uma ordenação parcial.

Lembrete: devemos supor as relações aRa para relações simétricas, aRb, para relações antissimétricas e $aRb \wedge bRc$ para relações transitivas.

Ordenação Parcial - Exemplo [Rosen, 2019]

- Mostre que a relação "maior ou igual a" ($\geq$) é uma ordenação parcial sobre o conjunto dos inteiros.
  - Reflexiva?
    - $a \geq a, \forall a \in \mathbb{Z}$. Logo, R é reflexiva.
  - Antissimétrica?
    - $a \geq b \wedge b \geq a$ se, e somente se, $a = b$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}$. Logo, R é antissimétrica.
  - Transitiva?
    - Temos $a \geq b \wedge b \geq c \therefore a \geq c$, $\forall a \forall b \forall c \in \mathbb{Z}$. Logo, R é transitiva.
  - Como a relação R é reflexiva, antissimétrica e transitiva, logo é uma ordenação parcial.

Lembrete: devemos supor as relações aRa para relações simétricas, aRb, para relações antissimétricas e $aRb \wedge bRc$ para relações transitivas.

Ordenação Parcial - Exemplo [Rosen, 2019]

- Mostre que a relação "maior ou igual a" ($\geq$) é uma ordenação parcial sobre o conjunto dos inteiros.
  - Reflexiva?
    - $a \geq a, \forall a \in \mathbb{Z}$. Logo, R é reflexiva.
  - Antissimétrica?
    - $a \geq b \land b \geq a$ se, e somente se, $a = b$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}$. Logo, R é antissimétrica.
  - Transitiva?
    - Temos $a \geq b \land b \geq c \therefore a \geq c$, $\forall a \forall b \forall c \in \mathbb{Z}$. Logo, R é transitiva.
  - Como a relação R é reflexiva, antissimétrica e transitiva, logo é uma ordenação parcial.

Lembrete: devemos supor as relações aRa para relações simétricas, aRb, para relações antissimétricas e $aRb \land bRc$ para relações transitivas.

Ordenação Parcial - Exemplo [Rosen, 2019]

- Mostre que a relação "x divide y" (|) é uma ordenação parcial sobre o conjunto dos inteiros positivos.
  - Reflexiva?
    - $a|a, \forall a \in \mathbb{Z}^+$. Logo, R é reflexiva.
  - Antissimétrica?
    - $a|b \land b|a$ se, e somente se, $a = b$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}^+$. Logo, R é antissimétrica.
  - Transitiva?
    - Temos $a|b \land b|c \therefore a|c$, $\forall a \forall b \forall c \in \mathbb{Z}^+$. Logo, R é transitiva.
  - Como a relação R é reflexiva, antissimétrica e transitiva, logo é uma ordenação parcial.

Ordenação Parcial - Exemplo [Rosen, 2019]

- Mostre que a relação “x divide y” ($|$) é uma ordenação parcial sobre o conjunto dos inteiros positivos.
  - Reflexiva?
    - $a|a, \forall a \in \mathbb{Z}^+$. Logo, R é reflexiva.
  - Antissimétrica?
    - $a|b \wedge b|a$ se, e somente se, $a = b$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}^+$. Logo, R é antissimétrica.
  - Transitiva?
    - Temos $a|b \wedge b|c \therefore a|c$, $\forall a \forall b \forall c \in \mathbb{Z}^+$. Logo, R é transitiva.
  - Como a relação R é reflexiva, antissimétrica e transitiva, logo é uma ordenação parcial.

Ordenação Parcial - Exemplo [Rosen, 2019]

- Mostre que a relação "x divide y" (|) é uma ordenação parcial sobre o conjunto dos inteiros positivos.
  - Reflexiva?
    - $a|a, \forall a \in \mathbb{Z}^+$. Logo, R é reflexiva.
  - Antissimétrica?
    - $a|b \wedge b|a$ se, e somente se, $a = b$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}^+$. Logo, R é antissimétrica.
  - Transitiva?
    - Temos $a|b \wedge b|c \ \therefore \ a|c$, $\forall a \forall b \forall c \in \mathbb{Z}^+$. Logo, R é transitiva.
  - Como a relação R é reflexiva, antissimétrica e transitiva, logo é uma ordenação parcial.

Ordenação Parcial - Exemplo [Rosen, 2019]

- Mostre que a relação "x divide y" ($|$) é uma ordenação parcial sobre o conjunto dos inteiros positivos.
  - Reflexiva?
    - $a|a, \forall a \in \mathbb{Z}^+$. Logo, R é reflexiva.
  - Antissimétrica?
    - $a|b \wedge b|a$ se, e somente se, $a = b$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}^+$. Logo, R é antissimétrica.
  - Transitiva?
    - Temos $a|b \wedge b|c \therefore a|c$, $\forall a \forall b \forall c \in \mathbb{Z}^+$. Logo, R é transitiva.
  - Como a relação R é reflexiva, antissimétrica e transitiva, logo é uma ordenação parcial.

Ordenação Parcial - Exemplo [Rosen, 2019]

- Mostre que a relação "x divide y" (|) é uma ordenação parcial sobre o conjunto dos inteiros positivos.
  - Reflexiva?
    - $a|a, \forall a \in \mathbb{Z}^+$. Logo, R é reflexiva.
  - Antissimétrica?
    - $a|b \land b|a$ se, e somente se, $a = b$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}^+$. Logo, R é antissimétrica.
  - Transitiva?
    - Temos $a|b \land b|c \therefore a|c$, $\forall a \forall b \forall c \in \mathbb{Z}^+$. Logo, R é transitiva.
  - Como a relação R é reflexiva, antissimétrica e transitiva, logo é uma ordenação parcial.

Predecessores e Sucessores

- Definição: Se $(S, \preceq)$ é um *poset* parcialmente ordenado e $x \preceq y$, então temos que $x = y$ ou $x \neq y$.
  - Se $x \neq y$, então $x \prec y$;
  - O elemento x é denominado predecessor e y, sucessor;
  - Se $x \prec y$ e não existe nenhum valor z onde $x \prec z \prec y$, então x é predecessor imediato de y [Gersting, 2014].

- Exemplo (Adaptado de [Gersting, 2014])
  - Seja $S = \{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$ e R a relação "x divide y". Indique os predecessores e o predecessor imediato de 6.
    - Predecessores: 1, 2, 3.
    - Predecessor imediato: 3.

Predecessores e Sucessores

- Definição: Se $(S, \preceq)$ é um *poset* parcialmente ordenado e $x \preceq y$, então temos que $x = y$ ou $x \neq y$.
  - Se $x \neq y$, então $x \prec y$;
  - O elemento x é denominado predecessor e y, sucessor;
  - Se $x \prec y$ e não existe nenhum valor z onde $x \prec z \prec y$, então x é predecessor imediato de y [Gersting, 2014].

- Exemplo (Adaptado de [Gersting, 2014])
  - Seja $S = \{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$ e R a relação "x divide y". Indique os predecessores e o predecessor imediato de 6.
    - Predecessores: 1, 2, 3.
    - Predecessor imediato: 3.

Predecessores e Sucessores

- Definição: Se $(S, \preceq)$ é um *poset* parcialmente ordenado e $x \preceq y$, então temos que $x = y$ ou $x \neq y$.
  - Se $x \neq y$, então $x \prec y$;
  - O elemento x é denominado predecessor e y, sucessor;
  - Se $x \prec y$ e não existe nenhum valor z onde $x \prec z \prec y$, então x é predecessor imediato de y [Gersting, 2014].

- Exemplo (Adaptado de [Gersting, 2014])
  - Seja $S = \{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$ e R a relação "x divide y". Indique os predecessores e o predecessor imediato de 6.
    - Predecessores: 1, 2, 3.
    - Predecessor imediato: 3.

Predecessores e Sucessores

- Definição: Se $(S, \preceq)$ é um *poset* parcialmente ordenado e $x \preceq y$, então temos que $x = y$ ou $x \neq y$.
  - Se $x \neq y$, então $x \prec y$;
  - O elemento x é denominado predecessor e y, sucessor;
  - Se $x \prec y$ e não existe nenhum valor z onde $x \prec z \prec y$, então x é predecessor imediato de y [Gersting, 2014].

- Exemplo (Adaptado de [Gersting, 2014])
  - Seja $S = \{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$ e R a relação "x divide y". Indique os predecessores e o predecessor imediato de 6.
    - Predecessores: 1, 2, 3.
    - Predecessor imediato: 3.

Elementos Comparáveis e Incomparáveis

- Definição (Elementos Comparáveis): Os elementos a e b de um *poset* $(S, \preceq)$ são chamados de comparáveis se $a \preceq b$ ou $b \preceq a$.
- Definição (Elementos Incomparáveis): Os elementos a e b de um conjunto S são chamados de <u>in</u>comparáveis se $a \npreceq b$ e $b \npreceq a$.

Elementos Comparáveis e Incomparáveis - Exemplo

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Exemplo 1 (Adaptado de [Rosen, 2019]):
  - Considere um *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$ com os elementos 3 e 9. Esses elementos são comparáveis?
    - Como 3 é divisor de 9, então 3 e 9 são elementos comparáveis;
  - Considere um *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$ com os elementos 5 e 7. Esses elementos são comparáveis?
    - Como 5 não é divisor de 7, nem 7 é divisor de 5, então 5 e 7 não são comparáveis.
- Exemplo 2:
  - Considere um *poset* $(\{1, 3, 5, 7, 9\}, |)$. Quais elementos são comparáveis?
    - 1 e 3, 1 e 5, 1 e 7, 1 e 9, e 3 e 9.

Elementos Comparáveis e Incomparáveis - Exemplo

- Exemplo 1 (Adaptado de [Rosen, 2019]):
  - Considere um *poset* $(\mathbb{Z}^{+}, |)$ com os elementos 3 e 9. Esses elementos são comparáveis?
    - Como 3 é divisor de 9, então 3 e 9 são elementos comparáveis;
  - Considere um *poset* $(\mathbb{Z}^{+}, |)$ com os elementos 5 e 7. Esses elementos são comparáveis?
    - Como 5 não é divisor de 7, nem 7 é divisor de 5, então 5 e 7 não são comparáveis.
- Exemplo 2:
  - Considere um *poset* $(\{1, 3, 5, 7, 9\}, |)$. Quais elementos são comparáveis?
    - 1 e 3, 1 e 5, 1 e 7, 1 e 9, e 3 e 9.

Elementos Comparáveis e Incomparáveis - Exemplo

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Exemplo 1 (Adaptado de [Rosen, 2019]):
  - Considere um *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$ com os elementos 3 e 9. Esses elementos são comparáveis?
    - Como 3 é divisor de 9, então 3 e 9 são elementos comparáveis;
  - Considere um *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$ com os elementos 5 e 7. Esses elementos são comparáveis?
    - Como 5 não é divisor de 7, nem 7 é divisor de 5, então 5 e 7 não são comparáveis.
- Exemplo 2:
  - Considere um *poset* $(\{1, 3, 5, 7, 9\}, |)$. Quais elementos são comparáveis?
    - 1 e 3, 1 e 5, 1 e 7, 1 e 9, e 3 e 9.

Elementos Comparáveis e Incomparáveis - Exemplo

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Exemplo 1 (Adaptado de [Rosen, 2019]):
  - Considere um *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$ com os elementos 3 e 9. Esses elementos são comparáveis?
    - Como 3 é divisor de 9, então 3 e 9 são elementos comparáveis;
  - Considere um *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$ com os elementos 5 e 7. Esses elementos são comparáveis?
    - Como 5 não é divisor de 7, nem 7 é divisor de 5, então 5 e 7 não são comparáveis.
- Exemplo 2:
  - Considere um *poset* $(\{1, 3, 5, 7, 9\}, |)$. Quais elementos são comparáveis?
    - 1 e 3, 1 e 5, 1 e 7, 1 e 9, e 3 e 9.

Elementos Comparáveis e Incomparáveis - Exemplo

- Exemplo 1 (Adaptado de [Rosen, 2019]):
  - Considere um *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$ com os elementos 3 e 9. Esses elementos são comparáveis?
    - Como 3 é divisor de 9, então 3 e 9 são elementos comparáveis;
  - Considere um *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$ com os elementos 5 e 7. Esses elementos são comparáveis?
    - Como 5 não é divisor de 7, nem 7 é divisor de 5, então 5 e 7 não são comparáveis.

- Exemplo 2:
  - Considere um *poset* $(\{1, 3, 5, 7, 9\}, |)$. Quais elementos são comparáveis?
    - 1 e 3, 1 e 5, 1 e 7, 1 e 9, e 3 e 9.

Ordenação Total[2]

- Definição: Se $(S, \preceq)$ é um *poset* e cada dois elementos de S são comparáveis, então S é chamado de conjunto totalmente ordenado e $\preceq$ é chamado de ordenação total [Rosen, 2019]
  - Um conjunto totalmente ordenado é também denominado cadeia.
- Exemplo [Rosen, 2019]
  - Considere um *poset* $(\mathbb{Z}^+, \leq)$. Esse *poset* é totalmente ordenado?
    - Sim, pois temos $a \leq b$ ou $b \leq a$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

[2] Também denominado Ordenação Linear.

Ordenação Total[2]

- Definição: Se $(S, \preceq)$ é um *poset* e cada dois elementos de S são comparáveis, então S é chamado de conjunto totalmente ordenado e $\preceq$ é chamado de ordenação total [Rosen, 2019]
  - Um conjunto totalmente ordenado é também denominado cadeia.

- Exemplo [Rosen, 2019]
  - Considere um *poset* $(\mathbb{Z}^+, \leq)$. Esse *poset* é totalmente ordenado?
    - Sim, pois temos $a \leq b$ ou $b \leq a$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

[2] Também denominado Ordenação Linear.

Ordenação Total[2]

- Definição: Se $(S, \preceq)$ é um *poset* e cada dois elementos de S são comparáveis, então S é chamado de conjunto totalmente ordenado e $\preceq$ é chamado de ordenação total [Rosen, 2019]
    - Um conjunto totalmente ordenado é também denominado cadeia.

- Exemplo [Rosen, 2019]
    - Considere um *poset* $(\mathbb{Z}^+, \leq)$. Esse *poset* é totalmente ordenado?
        - Sim, pois temos $a \leq b$ ou $b \leq a$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

[2] Também denominado Ordenação Linear.

Ordenação Parcial e Ordenação Total

- Ordenação Parcial e Ordenação Total estão ligadas ao conceito de comparabilidade
  - Se cada dois pares de elementos puderem ser comparados, a relação é chamada de ordenação total;
  - Se somente alguns pares de elementos puderem ser comparados, então a relação é chamada de ordenação parcial [Rosen, 2019].

Conjunto Bem Ordenado

- Definição: Se $(S, \preceq)$ é um conjunto bem ordenado se for um *poset* tal que $\preceq$ seja totalmente ordenado e todo subconjunto não vazio de S tenha um elemento mínimo [Rosen, 2019].

- Exemplo 1 (Adaptado de [Rosen, 2019])
  - Considere o produto cartesiano de dois *posets* $(\mathbb{Z}^+, \leq)$. O *poset* resultante é bem ordenado?
    - Se $(a_1, a_2, ..., a_n) \preceq (b_1, b_2, ..., b_n)$, onde $a_1 \leq b_1, ..., a_n \leq b_n$ então $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ é bem ordenado.

- Exemplo 2 (Adaptado de [Rosen, 2019])
  - Considere o produto cartesiano de dois *posets* $(\mathbb{Z}, \leq)$. O *poset* resultante é bem ordenado?
    - Não, pois $\mathbb{Z}$ não possui um elemento mínimo.

Conjunto Bem Ordenado

- Definição: Se $(S, \preceq)$ é um conjunto bem ordenado se for um *poset* tal que $\preceq$ seja totalmente ordenado e todo subconjunto não vazio de S tenha um elemento mínimo [Rosen, 2019].

- Exemplo 1 (Adaptado de [Rosen, 2019])
  - Considere o produto cartesiano de dois *posets* $(\mathbb{Z}^+, \leq)$. O *poset* resultante é bem ordenado?
    - Se $(a_1, a_2, ..., a_n) \preceq (b_1, b_2, ..., b_n)$, onde $a_1 \leq b_1, ..., a_n \leq b_n$ então $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ é bem ordenado.

- Exemplo 2 (Adaptado de [Rosen, 2019])
  - Considere o produto cartesiano de dois *posets* $(\mathbb{Z}, \leq)$. O *poset* resultante é bem ordenado?
    - Não, pois $\mathbb{Z}$ não possui um elemento mínimo.

Conjunto Bem Ordenado

- Definição: Se $(S, \preceq)$ é um conjunto bem ordenado se for um *poset* tal que $\preceq$ seja totalmente ordenado e todo subconjunto não vazio de S tenha um elemento mínimo [Rosen, 2019].

- Exemplo 1 (Adaptado de [Rosen, 2019])
  - Considere o produto cartesiano de dois *posets* $(\mathbb{Z}^+, \leq)$. O *poset* resultante é bem ordenado?
    - Se $(a_1, a_2, ..., a_n) \preceq (b_1, b_2, ..., b_n)$, onde $a_1 \leq b_1, ..., a_n \leq b_n$ então $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ é bem ordenado.

- Exemplo 2 (Adaptado de [Rosen, 2019])
  - Considere o produto cartesiano de dois *posets* $(\mathbb{Z}, \leq)$. O *poset* resultante é bem ordenado?
    - Não, pois $\mathbb{Z}$ não possui um elemento mínimo.

Conjunto Bem Ordenado

- Definição: Se $(S, \preceq)$ é um conjunto bem ordenado se for um *poset* tal que $\preceq$ seja totalmente ordenado e todo subconjunto não vazio de S tenha um elemento mínimo [Rosen, 2019].

- Exemplo 1 (Adaptado de [Rosen, 2019])
  - Considere o produto cartesiano de dois *posets* $(\mathbb{Z}^+, \leq)$. O *poset* resultante é bem ordenado?
    - Se $(a_1, a_2, ..., a_n) \preceq (b_1, b_2, ..., b_n)$, onde $a_1 \leq b_1, ..., a_n \leq b_n$ então $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ é bem ordenado.

- Exemplo 2 (Adaptado de [Rosen, 2019])
  - Considere o produto cartesiano de dois *posets* $(\mathbb{Z}, \leq)$. O *poset* resultante é bem ordenado?
    - Não, pois $\mathbb{Z}$ não possui um elemento mínimo.

Conjunto Bem Ordenado

- Definição: Se $(S, \preceq)$ é um conjunto bem ordenado se for um *poset* tal que $\preceq$ seja totalmente ordenado e todo subconjunto não vazio de S tenha um elemento mínimo [Rosen, 2019].

- Exemplo 1 (Adaptado de [Rosen, 2019])
  - Considere o produto cartesiano de dois *posets* $(\mathbb{Z}^+, \leq)$. O *poset* resultante é bem ordenado?
    - Se $(a_1, a_2, ..., a_n) \preceq (b_1, b_2, ..., b_n)$, onde $a_1 \leq b_1, ..., a_n \leq b_n$ então $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ é bem ordenado.

- Exemplo 2 (Adaptado de [Rosen, 2019])
  - Considere o produto cartesiano de dois *posets* $(\mathbb{Z}, \leq)$. O *poset* resultante é bem ordenado?
    - Não, pois $\mathbb{Z}$ não possui um elemento mínimo.

Ordenação Lexicográfica

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

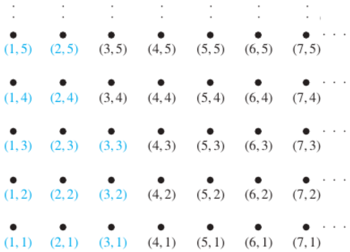
- Definição: A ordenação lexicográfica é definida como o produto cartesiano de n *posets* $(A_1, \preceq_1)$, ..., $(A_n, \preceq_n)$. A ordenação parcial $\preceq$ de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ é dada por $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \prec (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ [Rosen, 2019]
  - Na ordenação, temos que $a_1 \prec b_1$ ou $a_1 = b_1 \wedge a_2 \prec b_2$ ou $a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge a_3 \prec b_3 \wedge \ldots$;
  - Ordenação lexicográfica é a mesma presente no dicionário e pode ser utilizada para ordenar *strings*.

Ordenação Lexicográfica

- Exemplo 1:
  - Considere um conjunto formado por letras do alfabeto. Defina a ordenação lexicográfica das seguintes palavras: *alfa*, *beta*, *gama*, *delta*.
    - $alfa \prec beta \prec delta \prec gama$.
- Exemplo 2:
  - Considere um conjunto formado por letras do alfabeto. Defina a ordenação lexicográfica das seguintes palavras: *matemática*, *discreta*, *matematicamente*, *matemático*.
    - $discreta \prec matemática \prec matematicamente \prec matemático$.

Ordenação Lexicográfica

- Exemplo 3 ([Rosen, 2019]):
  - Considere os pares ordenados em $\mathbb{Z}^{+} \times \mathbb{Z}^{+}$ menores que $(3, 4)$ em ordem lexicográfica.



Fonte: [Rosen, 2019]

Diagrama de Hasse

Diagrama de Hasse

- O Diagrama de Hasse permite a representação visual de um conjunto $(S, \preceq)$ finito e parcialmente ordenado [Gersting, 2014]
  - Utiliza-se um grafo para representação do Diagrama de Hasse;
  - Cada elemento de S é representado por um nó no diagrama;
  - As arestas correspondem às relações entre elementos[3].
    - Se x é predecessor imediato de y, então y é desenhado acima de x;
    - Se x é predecessor imediato de y, então x e y são ligados por um arco [Gersting, 2014];

[3] Conforme detalhado na sequência, arestas no Diagrama de Hasse possuem requisitos extras em relação a arestas comuns em grafos.

Diagrama de Hasse

- Um Diagrama de Hasse pode ser criado a partir da criação de um dígrafo (grafo direcionado);
- Após a criação do dígrafo, reordena-se os vértices, elimina-se laços (*loops*) e a direção dos arcos (arestas);

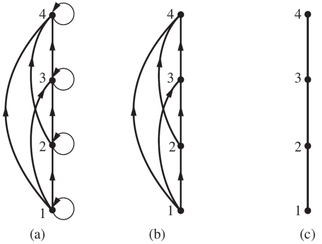
Algoritmo ConstroiDiagramaHasse(R)

1: Desenhe o dígrafo G da relação R
2: $G' \leftarrow G$
3: Elimine de G' todos os laços
4: Elimine de G' todos os arcos que existem devido à transitividade
5: Rearranje cada arco (i, j) de G' tal que o nó i esteja abaixo do nó j
6: Elimine a direção dos arcos de G'
7: **return** G'

Fonte: [da Silva, 2012]

Diagrama de Hasse - Exemplo [Rosen, 2019]

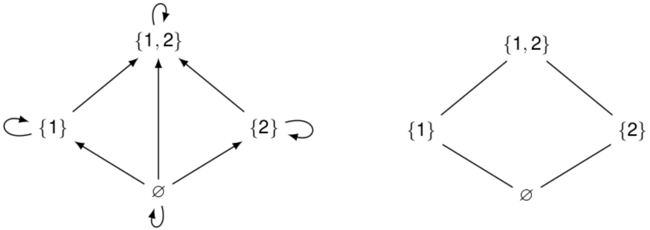
- Suponha um grafo direcionado para a ordenação parcial $\{(a, b) | a \leq b\}$ no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.
  - Para a ordenação parcial, teremos os seguintes valores: $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)$;
  - O processo abaixo detalha a transformação do dígrafo em um Diagrama de Hasse.



Fonte: [Rosen, 2019]

Diagrama de Hasse - Exemplo [da Silva, 2012]

- Seja o conjunto parcialmente ordenado $(P(\{1,2\}), \subseteq)$. Defina o Diagrama de Hasse.
  - $P(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.
  - Pares ordenados da relação: $(\emptyset, \emptyset), (\{1\}, \{1\}), (\{2\}, \{2\}), (\{1,2\}, \{1,2\}), (\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, \{1,2\}), (\{1\}, \{1,2\}), (\{2\}, \{1,2\})$.



Fonte: [da Silva, 2012]

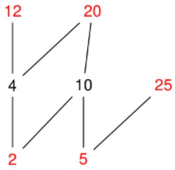
Elementos Maximal e Minimal

- Definição: Um elemento em um *poset* é denominado maximal se não existe nenhum outro elemento maior no *poset*
  - Em um *poset* $(S, \preceq)$, um elemento a é maximal se não existe nenhum elemento $b \in S$ tal que $a \prec b$ [Rosen, 2019];
  - Esse elemento não possui sucessores no *poset* [da Silva, 2012];
- Definição: Um elemento em um *poset* é denominado minimal se não existe nenhum outro elemento menor no *poset*
  - Em um *poset* $(S, \preceq)$, um elemento a é minimal se não existe nenhum elemento $b \in S$ tal que $b \prec a$ [Rosen, 2019].
  - Esse elemento não possui predecessores no *poset* [da Silva, 2012];

Elementos Maximal e Minimal

- Elementos maximais e minimais podem ser identificados no Diagrama de Hasse
  - Elementos minimais estão na "parte de baixo" e elementos maximais, na "parte de cima" do diagrama [da Silva, 2012].

- Exemplo 1 ([da Silva, 2012])
  - Considere um *poset* $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$. Quais os elementos maximais e minimais?.
    - Maximais: 12, 20 e 25
    - Minimais: 2 e 5.



Fonte: [da Silva, 2012]

Elementos Máximos e Mínimos

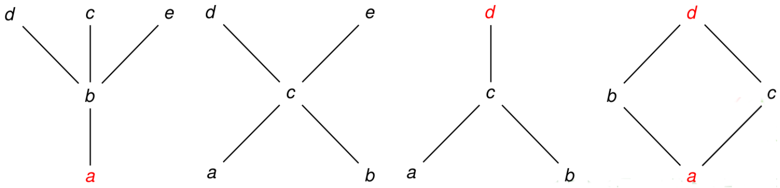
- Definição: Um elemento em um *poset* é denominado máximo[4] se é maior que todos os demais (e único)
  - Em um *poset* $(S, \preceq)$, um elemento a é máximo se não existe nenhum elemento $a \preceq b$, $\forall b \in S$ [Rosen, 2019];
- Definição: Um elemento em um *poset* é denominado mínimo[5] se é menor que todos os demais (e único)
  - Em um *poset* $(S, \preceq)$, um elemento a é mínimo se não existe nenhum elemento $b \preceq a$, $\forall b \in S$ [Rosen, 2019];

[4] Um elemento máximo também podem ser denominado "maior elemento".

[5] Um elemento mínimo também podem ser denominado "menor elemento".

Elementos Máximos e Mínimos

- Elementos máximos e mínimos são únicos, e podem ser identificados no Diagrama de Hasse
  - Nem todos os *posets* contém máximos e mínimos.



Fonte: [da Silva, 2012]

Ordenação Topológica[6]

[6] Também pode ser definida como “Linearização de Ordenação Parcial” ou “Linearização de Ordem Parcial”.

Ordenação Topológica

- Ordenação Topológica é utilizada para ordenar atividades que possuem como pré-requisitos outras atividades[7]
  - Está relacionada ao conceito de dependência entre atividades (ou recursos, processos, etc.);
- Exemplo: (Adaptado de [Rosen, 2019])
  - Suponha um projeto composto de n tarefas;
  - Algumas tarefas possuem como pré-requisito a finalização de outras tarefas;
  - Como calcular o tempo necessário para que uma tarefa b, dependente de uma tarefa a, seja finalizada?
    - Podemos estabelecer uma ordem parcial de modo que $a \prec b$ sse a e b sejam tarefas em que b não pode ser iniciada até que a tenha sido concluída.

[7] Ordenação Topológica pode ser aplicada a outras tarefas que possam ser mapeadas nessas atividades.

Ordenação Topológica

- Ordenação Topológica é utilizada para ordenar atividades que possuem como pré-requisitos outras atividades[7]
  - Está relacionada ao conceito de dependência entre atividades (ou recursos, processos, etc.);
- Exemplo: (Adaptado de [Rosen, 2019])
  - Suponha um projeto composto de n tarefas;
  - Algumas tarefas possuem como pré-requisito a finalização de outras tarefas;
  - Como calcular o tempo necessário para que uma tarefa b, dependente de uma tarefa a, seja finalizada?
    - Podemos estabelecer uma ordem parcial de modo que $a \prec b$ sse a e b sejam tarefas em que b não pode ser iniciada até que a tenha sido concluída.

[7] Ordenação Topológica pode ser aplicada a outras tarefas que possam ser mapeadas nessas atividades.

Ordenação Topológica

- Ordenação Topológica é utilizada para ordenar atividades que possuem como pré-requisitos outras atividades[7]
  - Está relacionada ao conceito de dependência entre atividades (ou recursos, processos, etc.);
- Exemplo: (Adaptado de [Rosen, 2019])
  - Suponha um projeto composto de n tarefas;
  - Algumas tarefas possuem como pré-requisito a finalização de outras tarefas;
  - Como calcular o tempo necessário para que uma tarefa b, dependente de uma tarefa a, seja finalizada?
    - Podemos estabelecer uma ordem parcial de modo que $a \prec b$ sse a e b sejam tarefas em que b não pode ser iniciada até que a tenha sido concluída.

[7] Ordenação Topológica pode ser aplicada a outras tarefas que possam ser mapeadas nessas atividades.

Ordenação Topológica

- Definição: Uma ordenação total $\preceq$ é considerada compatível com uma ordenação parcial R se $a \preceq b$ sempre que aRb.
  - A construção de uma ordenação total compatível a partir de uma ordenação parcial é chamada de ordenação topológica [Rosen, 2019].

- Definição Informal: O processo de ordenação topológica corresponde à obtenção de uma ordenação total que é a extensão de uma ordenação parcial, onde: [da Silva, 2012]

$$\boxed{x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec \ldots \prec x_{n-1} \prec x_n}$$

Ordenação Topológica

- Lema: Cada *poset* $(S, \preceq)$ finito não vazio tem pelo menos um elemento minimal [Rosen, 2019].
  - Prova:
    1. Escolha um elemento a_0 de S;
    2. Se a_0, não é mínimo, escolher a_1, onde $a_1 \prec a_0$;
    3. Se a_1 não for mínimo, seguir sucessivamente, escolhendo elementos a_k menores que o elemento atual;
    4. Como o conjunto é finito, o processo irá terminar com algum elemento mínimo a_n.

Ordenação Topológica

- Lema: Cada *poset* $(S, \preceq)$ finito não vazio tem pelo menos um elemento minimal [Rosen, 2019].
  - Prova:
    1. Escolha um elemento a_0 de S;
    2. Se a_0, não é mínimo, escolher a_1, onde $a_1 \prec a_0$;
    3. Se a_1 não for mínimo, seguir sucessivamente, escolhendo elementos a_k menores que o elemento atual;
    4. Como o conjunto é finito, o processo irá terminar com algum elemento mínimo a_n.

Ordenação Topológica

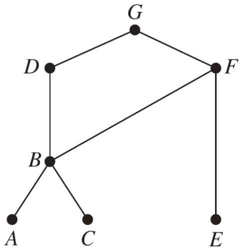
- A partir do lema anterior, é possível realizar a ordenação topológica para qualquer conjunto finito
  - Podemos obter o menor elemento de conjunto S e, em seguida, retirá-lo do conjunto;
  - O elemento pode ser adicionado sequencialmente a uma lista ordenada T;
  - Para o subconjunto restante, realizamos o mesmo procedimento (obter elemento mínimo e retirá-lo do conjunto);
  - O procedimento deve ser repetido até que o conjunto S esteja vazio.

Obs.1: Existem algoritmos mais eficientes que o método descrito acima.

Obs.2: Métodos de ordenação de elementos serão estudados nas disciplinas de Estrutura de Dados.

Ordenação Topológica

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
    - Considere o projeto abaixo, detalhado em um Diagrama de Hasse e que requer execução de 7 tarefas;
    - Algumas etapas somente podem ser executadas após a finalização de outras;
    - Encontre uma ordem em que essas tarefas possam ser realizadas para conclusão do projeto.

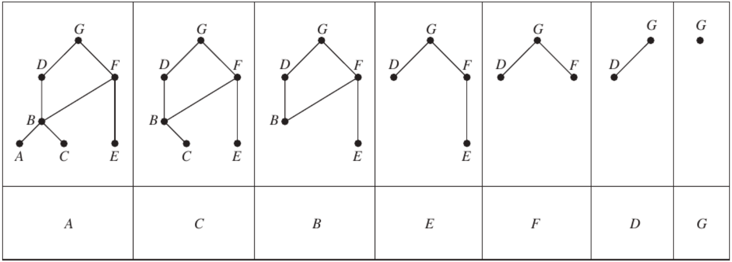


Fonte: [Rosen, 2019]

Ordenação Topológica

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Para solução do problema, podemos considerar que as tarefas serão executadas por uma única pessoa;
  - Uma das múltiplas soluções possíveis para o problema é:

$$\boxed{A \prec C \prec B \prec E \prec F \prec D \prec G}$$



Fonte: [Rosen, 2019]

Método PERT/CPM Simplificado

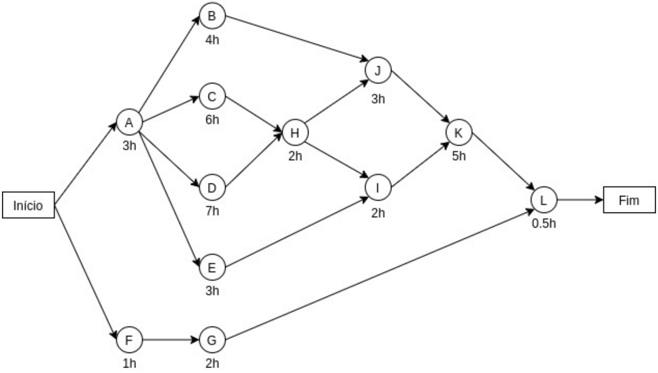
PERT/CPM Simplificado

- Exemplo 1: Adaptado de [Gersting, 2014]
  - Considere um problema de agendamento de tarefas, para construção de uma cadeira de balanço;
  - A lista de atividades está detalhada abaixo.

ID	Atividade	Dep.	Hrs.
A	Seleção da madeira	-	3
B	Entalhamento dos arcos	A	4
C	Entalhamento do assento	A	6
D	Entalhamento do encosto	A	7
E	Entalhamento dos braços	A	3
F	Escolha do tecido	-	1
G	Costura da almofada	F	2
H	Montagem: assento e encosto	C;D	2
I	Fixação dos braços	E;H	2
J	Fixação dos arcos	B;H	3
K	Verniz	I;J	5
L	Instalação almofada	G;K	0.5

PERT/CPM Simplificado

- A partir da tabela, podemos gerar o seguinte diagrama:



Fonte: Próprio autor

Observe que nesta etapa, os tempos das atividades estão abaixo dos círculos.

PERT/CPM Simplificado

- Podemos calcular o tempo mínimo para execução da atividade;
  - Para isso, caminha-se da esquerda para direita no diagrama;
  - Supõe-se que todas as tarefas predecessoras de uma tarefa i devam ser previamente concluídas;
  - Para definir o tempo mínimo até uma tarefa i, adiciona-se o tempo <u>máximo</u> das atividades predecessoras;

PERT/CPM Simplificado

- Podemos definir a seguinte notação: [Nogueira, 2010]
  - EF: Tempo Final Mais Cedo (*Earliest Finish*);
  - i: atividade atual (que está sendo analisada);
  - j: atividade precedente que está sendo analisada;
  - ρ_i: conjunto de atividades precedentes à atividade i;
  - D: duração da atividade.

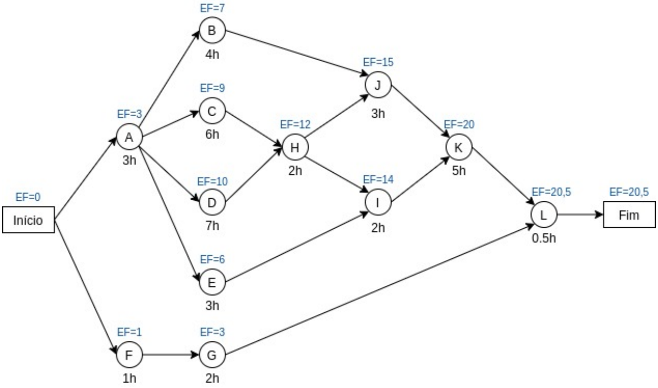
PERT/CPM Simplificado

- Fórmula de cálculo para caminho mínimo:
  - Tempo final mais cedo (EF): corresponde ao maior valor EF_j das atividades precedentes j

$$\boxed{EF_i = \max_{j \in \rho_i}(EF_j) + D_i}$$

PERT/CPM Simplificado

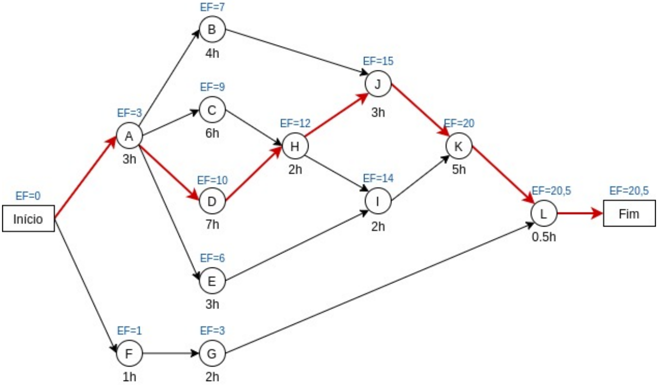
- A partir do cálculo dos tempos mínimos de cada atividade, temos:



Fonte: Próprio autor

PERT/CPM Simplificado

- Para definição do caminho crítico, voltamos da direita para esquerda, recuperando o valor máximo das atividades precedentes.



Fonte: Próprio autor

Referências I

da Silva, D. M. (2012).
Slides de aula.

Gersting, J. L. (2014).
Mathematical Structures for Computer Science.
W. H. Freeman and Company, 7 edition.

Levin, O. (2019).
Discrete Mathematics - An Open Introduction.
University of Northern Colorado, 7 edition.
[Online] Disponível em http://discrete.openmathbooks.org/dmoi3.html.

Nogueira, F. (2010).
Pert/cpm - notas de aulas.
[Online]; acessado em 11 de Fevereiro de 2021. Disponível em:
https://www.ufjf.br/epd015/files/2010/06/PERT_CPM1.pdf.

Rosen, K. H. (2019).
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill, 8 edition.