

Pesquisa Operacional

Modelagem de PPL - Outros Problemas

Felipe Augusto Lima Reis

felipe.reis@ifmg.edu.br



**INSTITUTO
FEDERAL**
Minas Gerais

Sumário

- 1 Problemas de Mistura
- 2 Escala de Funcionários
- 3 Programação de Ônibus
- 4 Investimentos

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]

A refinaria de petróleo Petrisul utiliza três tipos de óleo bruto (óleo 1, óleo 2 e óleo 3) para produzir três tipos de gasolina: comum, super e extra. Para garantir a qualidade, cada tipo de gasolina exige determinadas especificações, a partir da composição dos tipos de óleo, conforme tabela abaixo. Para atender a demanda de seus clientes, a refinaria precisa produzir pelo menos 5.000 barris por dia da gasolina comum e 3.000 barris por dia das gasolinas super e extra. A capacidade diária disponível é de 10.000 barris de óleo 1, 8.000 de óleo 2 e 7.000 de óleo 3. A refinaria pode produzir até 20.000 barris de gasolina por dia. A refinaria lucra \$5 para cada barril de gasolina comum produzido, \$7 por barril de gasolina super e \$8 por barril de gasolina extra. Os custos de óleo bruto 1, 2 e 3, por barril, são \$2, \$3 e \$3, respectivamente.

Tipo de gasolina	Especificações
Comum	Não mais que 70% do óleo 1
Super	Não mais que 50% do óleo 1 Não menos que 10% do óleo 2
Extra	Não mais que 50% do óleo 2 Não menos que 40% do óleo 3

Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]


Formule o problema de programação linear para maximizar o lucro diário.

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]

- O problema descrito possui características especiais;
- Ele trabalha tanto com a maximização direta do lucro, quanto a minimização de custos (para aumento do lucro);
- Com isso, pode ser dividido em 4 partes distintas:
 - 1 Maximização do lucro;
 - 2 Minimização de custos;
 - 3 Fusão das condições anteriores;
 - 4 Adição de restrições comuns às partes 1 e 2.

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]

- Para solucioná-lo, precisamos relembrar a Transformação 1, da aula de Conceitos e Formulação Algébrica

Programação Linear ○○○○○	Conceitos e Objetivos ○○○○○○○○○	Formulação Algébrica ○○○○○○○○○○○	Transformações ○○●○○○○○
1. Maximização ↔ Minimização			 INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais
<ul style="list-style-type: none"> ● Um problema de maximização pode ser transformado em minimização e vice-versa <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0; text-align: center;"> $\max z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow \min -z = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0; text-align: center;"> $\min z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow \max -z = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ </div>			
Prof. Felipe Reis	Pesquisa Operacional	07/2020	32 / 38

Fonte: Próprio autor

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 1 - Maximização do lucro:

- Qual o objetivo do problema?
 - Maximizar o lucro
- Quais as variáveis de produção?
 - Gasolina comum: (g_1)
 - Gasolina super: (g_2)
 - Gasolina extra: (g_3)
- Quais as restrições de produção?
 - Capacidade de produção: (20000 barris)
- Quais as restrições de demanda?
 - Demanda gasolina comum: (5000 barris)
 - Demanda gasolina super: (3000 barris)
 - Demanda gasolina extra: (3000 barris)

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]

Parte 1 - Maximização do lucro:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro**
- Quais as variáveis de produção?
 - Gasolina comum: (g_1)
 - Gasolina super: (g_2)
 - Gasolina extra: (g_3)
- Quais as restrições de produção?
 - Capacidade de produção: (20000 barris)
- Quais as restrições de demanda?
 - Demanda gasolina comum: (5000 barris)
 - Demanda gasolina super: (3000 barris)
 - Demanda gasolina extra: (3000 barris)

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]

Parte 1 - Maximização do lucro:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro**
- Quais as variáveis de produção?
 - Gasolina comum: (g_1)
 - Gasolina super: (g_2)
 - Gasolina extra: (g_3)
- Quais as restrições de produção?
 - Capacidade de produção: (20000 barris)
- Quais as restrições de demanda?
 - Demanda gasolina comum: (5000 barris)
 - Demanda gasolina super: (3000 barris)
 - Demanda gasolina extra: (3000 barris)

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]

Parte 1 - Maximização do lucro:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro**
- Quais as variáveis de produção?
 - Gasolina comum: (g_1)
 - Gasolina super: (g_2)
 - Gasolina extra: (g_3)
- Quais as restrições de produção?
 - Capacidade de produção: (20000 barris)
- Quais as restrições de demanda?
 - Demanda gasolina comum: (5000 barris)
 - Demanda gasolina super: (3000 barris)
 - Demanda gasolina extra: (3000 barris)

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]

Parte 1 - Maximização do lucro:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro**
- Quais as variáveis de produção?
 - Gasolina comum: (g_1)
 - Gasolina super: (g_2)
 - Gasolina extra: (g_3)
- Quais as restrições de produção?
 - Capacidade de produção: (20000 barris)
- Quais as restrições de demanda?
 - Demanda gasolina comum: (5000 barris)
 - Demanda gasolina super: (3000 barris)
 - Demanda gasolina extra: (3000 barris)

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]

Parte 1 - Maximização do lucro:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro**
- Quais as variáveis de produção?
 - Gasolina comum: (g_1)
 - Gasolina super: (g_2)
 - Gasolina extra: (g_3)
- Quais as restrições de produção?
 - **Capacidade de produção: (20000 barris)**
- Quais as restrições de demanda?
 - Demanda gasolina comum: (5000 barris)
 - Demanda gasolina super: (3000 barris)
 - Demanda gasolina extra: (3000 barris)

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]

Parte 1 - Maximização do lucro:

- Qual o objetivo do problema?
 - Maximizar o lucro
- Quais as variáveis de produção?
 - Gasolina comum: (g_1)
 - Gasolina super: (g_2)
 - Gasolina extra: (g_3)
- Quais as restrições de produção?
 - Capacidade de produção: (20000 barris)
- Quais as restrições de demanda?
 - Demanda gasolina comum: (5000 barris)
 - Demanda gasolina super: (3000 barris)
 - Demanda gasolina extra: (3000 barris)

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]

Parte 1 - Maximização do lucro:

- Qual o objetivo do problema?
 - Maximizar o lucro
- Quais as variáveis de produção?
 - Gasolina comum: (g_1)
 - Gasolina super: (g_2)
 - Gasolina extra: (g_3)
- Quais as restrições de produção?
 - Capacidade de produção: (20000 barris)
- Quais as restrições de demanda?
 - Demanda gasolina comum: (5000 barris)
 - Demanda gasolina super: (3000 barris)
 - Demanda gasolina extra: (3000 barris)

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 1 - Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - Maximizar o lucro
- Qual o lucro por produto?
 - Gasolina comum: (\$5)
 - Gasolina super: (\$7)
 - Gasolina extra: (\$8)

$$\max z = 5g_1 + 7g_2 + 8g_3$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 1 - Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro**
- Qual o lucro por produto?
 - Gasolina comum: (\$5)
 - Gasolina super: (\$7)
 - Gasolina extra: (\$8)

$$\max z = 5g_1 + 7g_2 + 8g_3$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 1 - Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro**
- Qual o lucro por produto?
 - Gasolina comum: (\$5)
 - Gasolina super: (\$7)
 - Gasolina extra: (\$8)

$$\max z = 5g_1 + 7g_2 + 8g_3$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 1 - Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro**
- Qual o lucro por produto?
 - Gasolina comum: (\$5)
 - Gasolina super: (\$7)
 - Gasolina extra: (\$8)

$$\max z = 5g_1 + 7g_2 + 8g_3$$

Problema de Produção [Silva et al., 2010]

Parte 1 - Restrições:

- Restrição 1: Capacidade de produção: (20000 barris)

$$g_1 + g_2 + g_3 \leq 20000$$

- Restrição 2: Demanda gasolina comum: (5000 barris)

$$g_1 \geq 5000$$

- Restrição 3: Demanda gasolina super: (3000 barris)

$$g_2 \geq 3000$$

- Restrição 4: Demanda gasolina extra: (3000 barris)

$$g_3 \geq 3000$$

Problema de Produção [Silva et al., 2010]

Parte 1 - Restrições:

- Restrição 1: Capacidade de produção: (20000 barris)

$$g_1 + g_2 + g_3 \leq 20000$$

- Restrição 2: Demanda gasolina comum: (5000 barris)

$$g_1 \geq 5000$$

- Restrição 3: Demanda gasolina super: (3000 barris)

$$g_2 \geq 3000$$

- Restrição 4: Demanda gasolina extra: (3000 barris)

$$g_3 \geq 3000$$

Problema de Produção [Silva et al., 2010]

Parte 1 - Restrições:

- Restrição 1: Capacidade de produção: (20000 barris)

$$g_1 + g_2 + g_3 \leq 20000$$

- Restrição 2: Demanda gasolina comum: (5000 barris)

$$g_1 \geq 5000$$

- Restrição 3: Demanda gasolina super: (3000 barris)

$$g_2 \geq 3000$$

- Restrição 4: Demanda gasolina extra: (3000 barris)

$$g_3 \geq 3000$$

Problema de Produção [Silva et al., 2010]

Parte 1 - Restrições:

- Restrição 1: Capacidade de produção: (20000 barris)

$$g_1 + g_2 + g_3 \leq 20000$$

- Restrição 2: Demanda gasolina comum: (5000 barris)

$$g_1 \geq 5000$$

- Restrição 3: Demanda gasolina super: (3000 barris)

$$g_2 \geq 3000$$

- Restrição 4: Demanda gasolina extra: (3000 barris)

$$g_3 \geq 3000$$

Problema de Produção [Silva et al., 2010]

Parte 1 - Restrições:

- Restrição 1: Capacidade de produção: (20000 barris)

$$g_1 + g_2 + g_3 \leq 20000$$

- Restrição 2: Demanda gasolina comum: (5000 barris)

$$g_1 \geq 5000$$

- Restrição 3: Demanda gasolina super: (3000 barris)

$$g_2 \geq 3000$$

- Restrição 4: Demanda gasolina extra: (3000 barris)

$$g_3 \geq 3000$$

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 2 - Minimização de custos:

- Qual o objetivo do problema?
 - Minimizar custos de matérias-primas (para maximizar o lucro)
- Quais as variáveis de matérias primas?
 - Óleo 1: (α_1)
 - Óleo 2: (α_2)
 - Óleo 3: (α_3)
- Quais as restrições de matérias primas?
 - Óleo 1: (10000 barris)
 - Óleo 2: (8000 barris)
 - Óleo 3: (7000 barris)
- Existem outras restrições?
 - Não

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 2 - Minimização de custos:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar custos de matérias-primas (para maximizar o lucro)**
- Quais as variáveis de matérias primas?
 - Óleo 1: (α_1)
 - Óleo 2: (α_2)
 - Óleo 3: (α_3)
- Quais as restrições de matérias primas?
 - Óleo 1: (10000 barris)
 - Óleo 2: (8000 barris)
 - Óleo 3: (7000 barris)
- Existem outras restrições?
 - Não

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 2 - Minimização de custos:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar custos de matérias-primas (para maximizar o lucro)**
- Quais as variáveis de matérias primas?
 - Óleo 1: (α_1)
 - Óleo 2: (α_2)
 - Óleo 3: (α_3)
- Quais as restrições de matérias primas?
 - Óleo 1: (10000 barris)
 - Óleo 2: (8000 barris)
 - Óleo 3: (7000 barris)
- Existem outras restrições?
 - Não

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]

Parte 2 - Minimização de custos:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar custos de matérias-primas (para maximizar o lucro)**
- Quais as variáveis de matérias primas?
 - Óleo 1: (α_1)
 - Óleo 2: (α_2)
 - Óleo 3: (α_3)
- Quais as restrições de matérias primas?
 - Óleo 1: (10000 barris)
 - Óleo 2: (8000 barris)
 - Óleo 3: (7000 barris)
- Existem outras restrições?
 - Não

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 2 - Minimização de custos:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar custos de matérias-primas (para maximizar o lucro)**
- Quais as variáveis de matérias primas?
 - Óleo 1: (α_1)
 - Óleo 2: (α_2)
 - Óleo 3: (α_3)
- Quais as restrições de matérias primas?
 - Óleo 1: (10000 barris)
 - Óleo 2: (8000 barris)
 - Óleo 3: (7000 barris)
- Existem outras restrições?
 - Não

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]

Parte 2 - Minimização de custos:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar custos de matérias-primas (para maximizar o lucro)**
- Quais as variáveis de matérias primas?
 - Óleo 1: (α_1)
 - Óleo 2: (α_2)
 - Óleo 3: (α_3)
- Quais as restrições de matérias primas?
 - Óleo 1: (10000 barris)
 - Óleo 2: (8000 barris)
 - Óleo 3: (7000 barris)
- Existem outras restrições?
 - Não

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 2 - Minimização de custos:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar custos de matérias-primas (para maximizar o lucro)**
- Quais as variáveis de matérias primas?
 - Óleo 1: (α_1)
 - Óleo 2: (α_2)
 - Óleo 3: (α_3)
- Quais as restrições de matérias primas?
 - Óleo 1: (10000 barris)
 - Óleo 2: (8000 barris)
 - Óleo 3: (7000 barris)
- Existem outras restrições?
 - Não

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 2 - Minimização de custos:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar custos de matérias-primas (para maximizar o lucro)**
- Quais as variáveis de matérias primas?
 - Óleo 1: (α_1)
 - Óleo 2: (α_2)
 - Óleo 3: (α_3)
- Quais as restrições de matérias primas?
 - Óleo 1: (10000 barris)
 - Óleo 2: (8000 barris)
 - Óleo 3: (7000 barris)
- Existem outras restrições?
 - Não

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 2 - Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - Minimizar custos de matérias-primas (para maximizar o lucro)
- Qual o custo por matéria-prima?
 - Óleo 1: (\$2)
 - Óleo 2: (\$3)
 - Óleo 3: (\$3)

$$\min z = 2o_1 + 3o_2 + 3o_3$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 2 - Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar custos de matérias-primas (para maximizar o lucro)**
- Qual o custo por matéria-prima?
 - Óleo 1: (\$2)
 - Óleo 2: (\$3)
 - Óleo 3: (\$3)

$$\min z = 2o_1 + 3o_2 + 3o_3$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 2 - Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar custos de matérias-primas (para maximizar o lucro)**
- Qual o custo por matéria-prima?
 - Óleo 1: (\$2)
 - Óleo 2: (\$3)
 - Óleo 3: (\$3)

$$\min z = 2o_1 + 3o_2 + 3o_3$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 2 - Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar custos de matérias-primas (para maximizar o lucro)**
- Qual o custo por matéria-prima?
 - Óleo 1: (\$2)
 - Óleo 2: (\$3)
 - Óleo 3: (\$3)

$$\min z = 2o_1 + 3o_2 + 3o_3$$

Problema de Produção [Silva et al., 2010]

Parte 2 - Restrições:

- Restrição 1: Restrição de disponibilidade do óleo 1: (10000 barris)

$$o_1 \leq 10000$$

- Restrição 2: Restrição de disponibilidade do óleo 2: (8000 barris)

$$o_2 \leq 8000$$

- Restrição 3: Restrição de disponibilidade do óleo 3: (7000 barris)

$$o_3 \leq 7000$$

Problema de Produção [Silva et al., 2010]

Parte 2 - Restrições:

- Restrição 1: Restrição de disponibilidade do óleo 1: (10000 barris)

$$o_1 \leq 10000$$

- Restrição 2: Restrição de disponibilidade do óleo 2: (8000 barris)

$$o_2 \leq 8000$$

- Restrição 3: Restrição de disponibilidade do óleo 3: (7000 barris)

$$o_3 \leq 7000$$

Problema de Produção [Silva et al., 2010]

Parte 2 - Restrições:

- Restrição 1: Restrição de disponibilidade do óleo 1: (10000 barris)

$$o_1 \leq 10000$$

- Restrição 2: Restrição de disponibilidade do óleo 2: (8000 barris)

$$o_2 \leq 8000$$

- Restrição 3: Restrição de disponibilidade do óleo 3: (7000 barris)

$$o_3 \leq 7000$$

Problema de Produção [Silva et al., 2010]

Parte 2 - Restrições:

- Restrição 1: Restrição de disponibilidade do óleo 1: (10000 barris)

$$o_1 \leq 10000$$

- Restrição 2: Restrição de disponibilidade do óleo 2: (8000 barris)

$$o_2 \leq 8000$$

- Restrição 3: Restrição de disponibilidade do óleo 3: (7000 barris)

$$o_3 \leq 7000$$

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Fusão das condições anteriores:

- Qual o objetivo do problema?
 - Maximizar o lucro e minimizar custos
- Quais as correlações entre gasolina e óleos?
 - Gasolina comum: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
 - Gasolina super: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
 - Gasolina extra: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
- Precisaremos de uma nova variável para combinar gasolina e óleo

$$x_{go}$$

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Fusão das condições anteriores:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro e minimizar custos**
- Quais as correlações entre gasolina e óleos?
 - Gasolina comum: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
 - Gasolina super: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
 - Gasolina extra: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
- Precisaremos de uma nova variável para combinar gasolina e óleo

$$x_{go}$$

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Fusão das condições anteriores:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro e minimizar custos**
- Quais as correlações entre gasolina e óleos?
 - Gasolina comum: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
 - Gasolina super: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
 - Gasolina extra: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
- Precisaremos de uma nova variável para combinar gasolina e óleo

$$x_{go}$$

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Fusão das condições anteriores:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro e minimizar custos**
- Quais as correlações entre gasolina e óleos?
 - Gasolina comum: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
 - Gasolina super: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
 - Gasolina extra: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
- Precisaremos de uma nova variável para combinar gasolina e óleo

$$x_{go}$$

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Fusão das condições anteriores:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro e minimizar custos**
- Quais as correlações entre gasolina e óleos?
 - Gasolina comum: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
 - Gasolina super: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
 - Gasolina extra: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
- Precisaremos de uma nova variável para combinar gasolina e óleo

$$x_{go}$$

Problema de Mistura [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Fusão das condições anteriores:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro e minimizar custos**
- Quais as correlações entre gasolina e óleos?
 - Gasolina comum: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
 - Gasolina super: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
 - Gasolina extra: (óleo 1 || óleo 2 || óleo 3)
- Precisaremos de uma nova variável para combinar gasolina e óleo

$$X_{go}$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Correspondência de variáveis:

- Gasolina comum
 - Óleo 1: (x_{11})
 - Óleo 2: (x_{12})
 - Óleo 3: (x_{13})
- Gasolina super
 - Óleo 1: (x_{21})
 - Óleo 2: (x_{22})
 - Óleo 3: (x_{23})
- Gasolina extra
 - Óleo 1: (x_{31})
 - Óleo 2: (x_{32})
 - Óleo 3: (x_{33})

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Correspondência de variáveis:

- Gasolina comum
 - Óleo 1: (x_{11})
 - Óleo 2: (x_{12})
 - Óleo 3: (x_{13})
- Gasolina super
 - Óleo 1: (x_{21})
 - Óleo 2: (x_{22})
 - Óleo 3: (x_{23})
- Gasolina extra
 - Óleo 1: (x_{31})
 - Óleo 2: (x_{32})
 - Óleo 3: (x_{33})

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Correspondência de variáveis:

- Gasolina comum
 - Óleo 1: (x_{11})
 - Óleo 2: (x_{12})
 - Óleo 3: (x_{13})
- Gasolina super
 - Óleo 1: (x_{21})
 - Óleo 2: (x_{22})
 - Óleo 3: (x_{23})
- Gasolina extra
 - Óleo 1: (x_{31})
 - Óleo 2: (x_{32})
 - Óleo 3: (x_{33})

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Correspondência de variáveis:

- Gasolina comum
 - Óleo 1: (x_{11})
 - Óleo 2: (x_{12})
 - Óleo 3: (x_{13})
- Gasolina super
 - Óleo 1: (x_{21})
 - Óleo 2: (x_{22})
 - Óleo 3: (x_{23})
- Gasolina extra
 - Óleo 1: (x_{31})
 - Óleo 2: (x_{32})
 - Óleo 3: (x_{33})

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Correspondência de variáveis:

● Óleo 1

- Gasolina comum: (x_{11})
- Gasolina super: (x_{21})
- Gasolina extra: (x_{31})

● Óleo 2

- Gasolina comum: (x_{12})
- Gasolina super: (x_{22})
- Gasolina extra: (x_{32})

● Óleo 3

- Gasolina comum: (x_{13})
- Gasolina super: (x_{23})
- Gasolina extra: (x_{33})

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Correspondência de variáveis:

- Óleo 1

- Gasolina comum: (x_{11})
- Gasolina super: (x_{21})
- Gasolina extra: (x_{31})

- Óleo 2

- Gasolina comum: (x_{12})
- Gasolina super: (x_{22})
- Gasolina extra: (x_{32})

- Óleo 3

- Gasolina comum: (x_{13})
- Gasolina super: (x_{23})
- Gasolina extra: (x_{33})

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Correspondência de variáveis:

- Óleo 1
 - Gasolina comum: (x_{11})
 - Gasolina super: (x_{21})
 - Gasolina extra: (x_{31})
- Óleo 2
 - Gasolina comum: (x_{12})
 - Gasolina super: (x_{22})
 - Gasolina extra: (x_{32})
- Óleo 3
 - Gasolina comum: (x_{13})
 - Gasolina super: (x_{23})
 - Gasolina extra: (x_{33})

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Correspondência de variáveis:

- Óleo 1
 - Gasolina comum: (x_{11})
 - Gasolina super: (x_{21})
 - Gasolina extra: (x_{31})
- Óleo 2
 - Gasolina comum: (x_{12})
 - Gasolina super: (x_{22})
 - Gasolina extra: (x_{32})
- Óleo 3
 - Gasolina comum: (x_{13})
 - Gasolina super: (x_{23})
 - Gasolina extra: (x_{33})

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Função objetivo - Parte 1

$$\max z = 5g_1 + 7g_2 + 8g_3$$

- Função objetivo - Parte 1 - Reescrita

$$\max z = 5(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 7(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 8(x_{31} + x_{32} + x_{33})$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Função objetivo - Parte 1

$$\max z = 5g_1 + 7g_2 + 8g_3$$

- Função objetivo - Parte 1 - Reescrita

$$\max z = 5(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 7(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 8(x_{31} + x_{32} + x_{33})$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Função objetivo - Parte 1

$$\max z = 5g_1 + 7g_2 + 8g_3$$

- Função objetivo - Parte 1 - Reescrita

$$\max z = 5(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 7(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 8(x_{31} + x_{32} + x_{33})$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Função objetivo - Parte 2

$$\min z = 2o_1 + 3o_2 + 3o_3$$

- Função objetivo - Parte 2 - Reescrita

$$\min z = 2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 3(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Função objetivo - Parte 2

$$\min z = 2o_1 + 3o_2 + 3o_3$$

- Função objetivo - Parte 2 - Reescrita

$$\min z = 2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 3(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Função objetivo - Parte 2

$$\min z = 2o_1 + 3o_2 + 3o_3$$

- Função objetivo - Parte 2 - Reescrita

$$\min z = 2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 3(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Função objetivo - União das Partes 1 e 2

- Temos um função de maximização e uma função de minimização.
- Então, como solucionar??
- Relembrar a Transformação 1, da aula de Conceitos e Formulação Algébrica

$$\max z = \min -z \text{ ou } \min z = \max -z$$

$$\min z = 2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 3(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

$$\max -z = -2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) - 3(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Função objetivo - União das Partes 1 e 2
 - Temos um função de maximização e uma função de minimização.
 - Então, como solucionar??
 - Relembrar a Transformação 1, da aula de Conceitos e Formulação Algébrica

$$\max z = \min -z \text{ ou } \min z = \max -z$$

$$\min z = 2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 3(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

$$\max -z = -2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) - 3(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Função objetivo - União das Partes 1 e 2
 - Temos um função de maximização e uma função de minimização.
 - Então, como solucionar??
 - Relembrar a Transformação 1, da aula de Conceitos e Formulação Algébrica

$$\max z = \min -z \text{ ou } \min z = \max -z$$

$$\min z = 2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 3(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

$$\max -z = -2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) - 3(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Função objetivo - União das Partes 1 e 2
 - Temos um função de maximização e uma função de minimização.
 - Então, como solucionar??
 - Relembrar a Transformação 1, da aula de Conceitos e Formulação Algébrica

$$\max z = \min -z \text{ ou } \min z = \max -z$$

$$\min z = 2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 3(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

$$\max -z = -2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) - 3(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Função objetivo - União das Partes 1 e 2
 - Temos um função de maximização e uma função de minimização.
 - Então, como solucionar??
 - Relembrar a Transformação 1, da aula de Conceitos e Formulação Algébrica

$$\max z = \min -z \text{ ou } \min z = \max -z$$

$$\min z = 2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 3(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

$$\max -z = -2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) - 3(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Função objetivo - União das Partes 1 e 2
 - Temos um função de maximização e uma função de minimização.
 - Então, como solucionar??
 - Relembrar a Transformação 1, da aula de Conceitos e Formulação Algébrica

$$\max z = \min -z \text{ ou } \min z = \max -z$$

$$\min z = 2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 3(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

$$\max -z = -2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) - 3(x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Função objetivo - União das Partes 1 e 2

- Somando as duas funções de maximização, temos..

$$\begin{aligned} \max z = & 5(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 7(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 8(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ & - 2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) - 3(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \end{aligned}$$

$$\max z = (3x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13}) + (5x_{21} + 4x_{22} + 4x_{23}) + (6x_{31} + 5x_{32} + 5x_{33})$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Função objetivo - União das Partes 1 e 2
 - Somando as duas funções de maximização, temos..

$$\begin{aligned} \max z = & 5(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 7(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 8(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ & - 2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) - 3(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \end{aligned}$$

$$\max z = (3x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13}) + (5x_{21} + 4x_{22} + 4x_{23}) + (6x_{31} + 5x_{32} + 5x_{33})$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Função objetivo - União das Partes 1 e 2
 - Somando as duas funções de maximização, temos..

$$\begin{aligned} \max z = & 5(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 7(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 8(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ & - 2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) - 3(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \end{aligned}$$

$$\max z = (3x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13}) + (5x_{21} + 4x_{22} + 4x_{23}) + (6x_{31} + 5x_{32} + 5x_{33})$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Função objetivo - União das Partes 1 e 2
 - Somando as duas funções de maximização, temos..

$$\begin{aligned} \max z = & 5(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 7(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 8(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ & - 2(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 3(x_{12} + x_{22} + x_{32}) - 3(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \end{aligned}$$

$$\max z = (3x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13}) + (5x_{21} + 4x_{22} + 4x_{23}) + (6x_{31} + 5x_{32} + 5x_{33})$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Restrições das gasolinas

- Demanda gasolina comum

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 5000$$

- Demanda gasolina super

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 3000$$

- Demanda gasolina extra

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 3000$$

- Capacidade de produção

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 20000$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Restrições das gasolinas
 - Demanda gasolina comum

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 5000$$

- Demanda gasolina super

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 3000$$

- Demanda gasolina extra

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 3000$$

- Capacidade de produção

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 20000$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Restrições das gasolinas
 - Demanda gasolina comum

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 5000$$

- Demanda gasolina super

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 3000$$

- Demanda gasolina extra

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 3000$$

- Capacidade de produção

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 20000$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Restrições das gasolinas
 - Demanda gasolina comum

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 5000$$

- Demanda gasolina super

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 3000$$

- Demanda gasolina extra

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 3000$$

- Capacidade de produção

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 20000$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Restrições das gasolinas
 - Demanda gasolina comum

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 5000$$

- Demanda gasolina super

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 3000$$

- Demanda gasolina extra

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 3000$$

- Capacidade de produção

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 20000$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Restrições das gasolinas
 - Demanda gasolina comum

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 5000$$

- Demanda gasolina super

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 3000$$

- Demanda gasolina extra

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 3000$$

- Capacidade de produção

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 20000$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Restrições dos óleos

- Disponibilidade óleo 1

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 10000$$

- Disponibilidade óleo 2

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 8000$$

- Disponibilidade óleo 3

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 7000$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Restrições dos óleos
 - Disponibilidade óleo 1

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 10000$$

- Disponibilidade óleo 2

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 8000$$

- Disponibilidade óleo 3

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 7000$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Restrições dos óleos

- Disponibilidade óleo 1

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 10000$$

- Disponibilidade óleo 2

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 8000$$

- Disponibilidade óleo 3

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 7000$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Restrições dos óleos

- Disponibilidade óleo 1

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 10000$$

- Disponibilidade óleo 2

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 8000$$

- Disponibilidade óleo 3

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 7000$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 3 - Transformação de variáveis:

- Restrições dos óleos

- Disponibilidade óleo 1

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 10000$$

- Disponibilidade óleo 2

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 8000$$

- Disponibilidade óleo 3

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 7000$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



- Sumarizando (até a parte 3):

$$\max z = 3x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} + 5x_{21} + 4x_{22} + 4x_{23} + 6x_{31} + 5x_{32} + 5x_{33}$$

sub. a:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 20000 \quad (\text{capacidade produção})$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 5000 \quad (\text{demanda gas. comum})$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 3000 \quad (\text{demanda gas. super})$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 3000 \quad (\text{demanda gas. extra})$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 10000 \quad (\text{disponibil. óleo 1})$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 8000 \quad (\text{disponibil. óleo 2})$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 7000 \quad (\text{disponibil. óleo 3})$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0 \quad (\text{não negatividade})$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 4 - Adição de restrições comuns aos itens 1 e 2:

- Restrições da qualidade das gasolinas
 - Gasolina comum → Não mais que 70% de óleo 1
 - Gasolina super → Não mais que 50% de óleo 1
 - Gasolina super → Não menos que 10% de óleo 2
 - Gasolina extra → Não mais que 50% de óleo 2
 - Gasolina extra → Não menos que 40% de óleo 3

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 4 - Adição de restrições comuns aos itens 1 e 2:

- Restrições da qualidade das gasolinas
 - Gasolina comum → Não mais que 70% de óleo 1
 - Gasolina super → Não mais que 50% de óleo 1
 - Gasolina super → Não menos que 10% de óleo 2
 - Gasolina extra → Não mais que 50% de óleo 2
 - Gasolina extra → Não menos que 40% de óleo 3

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 4 - Adição de restrições comuns aos itens 1 e 2:

- Restrições da qualidade das gasolinas
 - Gasolina comum → Não mais que 70% de óleo 1

$$\frac{x_{11}}{x_{11} + x_{12} + x_{13}} \leq 0.7$$

$$x_{11} \leq 0.7x_{11} + 0.7x_{12} + 0.7x_{13}$$

$$0.3x_{11} - 0.7x_{12} - 0.7x_{13} \leq 0$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 4 - Adição de restrições comuns aos itens 1 e 2:

- Restrições da qualidade das gasolinas
 - Gasolina comum → Não mais que 70% de óleo 1

$$\frac{x_{11}}{x_{11} + x_{12} + x_{13}} \leq 0.7$$

$$x_{11} \leq 0.7x_{11} + 0.7x_{12} + 0.7x_{13}$$

$$0.3x_{11} - 0.7x_{12} - 0.7x_{13} \leq 0$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 4 - Adição de restrições comuns aos itens 1 e 2:

- Restrições da qualidade das gasolinas
 - Gasolina comum → Não mais que 70% de óleo 1

$$\frac{x_{11}}{x_{11} + x_{12} + x_{13}} \leq 0.7$$

$$x_{11} \leq 0.7x_{11} + 0.7x_{12} + 0.7x_{13}$$

$$0.3x_{11} - 0.7x_{12} - 0.7x_{13} \leq 0$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 4 - Adição de restrições comuns aos itens 1 e 2:

- Restrições da qualidade das gasolinas
 - Gasolina comum → Não mais que 70% de óleo 1

$$\frac{x_{11}}{x_{11} + x_{12} + x_{13}} \leq 0.7$$

$$x_{11} \leq 0.7x_{11} + 0.7x_{12} + 0.7x_{13}$$

$$0.3x_{11} - 0.7x_{12} - 0.7x_{13} \leq 0$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 4 - Adição de restrições comuns aos itens 1 e 2:

- Restrições da qualidade das gasolinas
 - Gasolina comum → Não mais que 70% de óleo 1

$$\frac{x_{11}}{x_{11} + x_{12} + x_{13}} \leq 0.7$$

$$x_{11} \leq 0.7x_{11} + 0.7x_{12} + 0.7x_{13}$$

$$0.3x_{11} - 0.7x_{12} - 0.7x_{13} \leq 0$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 4 - Adição de restrições comuns aos itens 1 e 2:

- Restrições da qualidade das gasolinas

- Gasolina super → Não mais que 50% de óleo 1

$$0.5x_{12} - 0.5x_{22} - 0.5x_{32} \leq 0$$

- Gasolina super → Não menos que 10% de óleo 2

$$-0.1x_{12} + 0.9x_{22} - 0.1x_{32} \geq 0$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 4 - Adição de restrições comuns aos itens 1 e 2:

- Restrições da qualidade das gasolinas
 - Gasolina super → Não mais que 50% de óleo 1

$$0.5x_{12} - 0.5x_{22} - 0.5x_{32} \leq 0$$

- Gasolina super → Não menos que 10% de óleo 2

$$-0.1x_{12} + 0.9x_{22} - 0.1x_{32} \geq 0$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 4 - Adição de restrições comuns aos itens 1 e 2:

- Restrições da qualidade das gasolinas
 - Gasolina super → Não mais que 50% de óleo 1

$$0.5x_{12} - 0.5x_{22} - 0.5x_{32} \leq 0$$

- Gasolina super → Não menos que 10% de óleo 2

$$-0.1x_{12} + 0.9x_{22} - 0.1x_{32} \geq 0$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 4 - Adição de restrições comuns aos itens 1 e 2:

- Restrições da qualidade das gasolinas
 - Gasolina super → Não mais que 50% de óleo 1

$$0.5x_{12} - 0.5x_{22} - 0.5x_{32} \leq 0$$

- Gasolina super → Não menos que 10% de óleo 2

$$-0.1x_{12} + 0.9x_{22} - 0.1x_{32} \geq 0$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 4 - Adição de restrições comuns aos itens 1 e 2:

- Restrições da qualidade das gasolinas

- Gasolina extra → Não mais que 50% de óleo 2

$$-0.5x_{13} + 0.5x_{23} - 0.5x_{33} \leq 0$$

- Gasolina extra → Não menos que 40% de óleo 3

$$-0.4x_{13} - 0.4x_{23} + 0.6x_{33} \geq 0$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 4 - Adição de restrições comuns aos itens 1 e 2:

- Restrições da qualidade das gasolinas
 - Gasolina extra → Não mais que 50% de óleo 2

$$-0.5x_{13} + 0.5x_{23} - 0.5x_{33} \leq 0$$

- Gasolina extra → Não menos que 40% de óleo 3

$$-0.4x_{13} - 0.4x_{23} + 0.6x_{33} \geq 0$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 4 - Adição de restrições comuns aos itens 1 e 2:

- Restrições da qualidade das gasolinas
 - Gasolina extra → Não mais que 50% de óleo 2

$$-0.5x_{13} + 0.5x_{23} - 0.5x_{33} \leq 0$$

- Gasolina extra → Não menos que 40% de óleo 3

$$-0.4x_{13} - 0.4x_{23} + 0.6x_{33} \geq 0$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



Parte 4 - Adição de restrições comuns aos itens 1 e 2:

- Restrições da qualidade das gasolinas
 - Gasolina extra → Não mais que 50% de óleo 2

$$-0.5x_{13} + 0.5x_{23} - 0.5x_{33} \leq 0$$

- Gasolina extra → Não menos que 40% de óleo 3

$$-0.4x_{13} - 0.4x_{23} + 0.6x_{33} \geq 0$$

Problema de Produção [Belfiore and Fávero, 2013]



● Sumarizando...

$$\max z = 3x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} + 5x_{21} + 4x_{22} + 4x_{23} + 6x_{31} + 5x_{32} + 5x_{33}$$

suj. a:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 20000 \quad (\text{capacidade produção})$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 5000 \quad (\text{demanda gas. comum})$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 3000 \quad (\text{demanda gas. super})$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 3000 \quad (\text{demanda gas. extra})$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 10000 \quad (\text{disponibil. óleo 1})$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 8000 \quad (\text{disponibil. óleo 2})$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 7000 \quad (\text{disponibil. óleo 3})$$

$$0.3x_{11} - 0.7x_{12} - 0.7x_{13} \leq 0 \quad (\text{qualidade gas. comum})$$

$$0.5x_{12} - 0.5x_{22} - 0.5x_{32} \leq 0 \quad (\text{qualidade gas. super})$$

$$-0.1x_{12} + 0.9x_{22} - 0.1x_{32} \geq 0 \quad (\text{qualidade gas. super})$$

$$-0.5x_{13} + 0.5x_{23} - 0.5x_{33} \leq 0 \quad (\text{qualidade gas. extra})$$

$$-0.4x_{13} - 0.4x_{23} + 0.6x_{33} \geq 0 \quad (\text{qualidade gas. extra})$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0 \quad (\text{não negatividade})$$

ESCALA DE FUNCIONÁRIOS

ESCALA DE FUNCIONÁRIOS

[WINSTON AND GOLDBERG, 2004]

[LACHTERMARCHER, 2009]¹

¹Apud. [Diego Mello da Silva, 2016]

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]

A LCL Correios e Malotes, uma franquia da ECT, deseja determinar o número de funcionários de horário integral que deve contratar para iniciar suas atividades. O sindicato dos empregados de franqueadores dos Correios mantém um acordo sindical que determina que cada empregado deve trabalhar 5 dias consecutivos e folgar, em seguida, dois dias. As franquias devem ter empregados apenas em tempo integral. Para isso, a franquia, recebeu uma tabela da ECT com o número mínimo de funcionários por dia da semana.

Dia da Semana	No. Funcionários
Domingo	11
Segunda	18
Terça	12
Quarta	15
Quinta	19
Sexta	14
Sábado	16

Fonte: [Lachtermarcher, 2009]

Formule o problema de programação linear que determine o número de empregados que a franquia deve contratar, assim como o número de empregados por dia.

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]

- Qual o objetivo do problema?
 - Minimizar o número de empregados
- Quais as variáveis do problema?
 - Empregados que iniciam jornada no domingo: (x_1)
 - Empregados que iniciam jornada na segunda-feira: (x_2)
 - Empregados que iniciam jornada na terça-feira: (x_3)
 - Empregados que iniciam jornada na quarta-feira: (x_4)
 - Empregados que iniciam jornada na quinta-feira: (x_5)
 - Empregados que iniciam jornada na sexta-feira: (x_6)
 - Empregados que iniciam jornada no sábado: (x_7)

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar o número de empregados**
- Quais as variáveis do problema?
 - Empregados que iniciam jornada no domingo: (x_1)
 - Empregados que iniciam jornada na segunda-feira: (x_2)
 - Empregados que iniciam jornada na terça-feira: (x_3)
 - Empregados que iniciam jornada na quarta-feira: (x_4)
 - Empregados que iniciam jornada na quinta-feira: (x_5)
 - Empregados que iniciam jornada na sexta-feira: (x_6)
 - Empregados que iniciam jornada no sábado: (x_7)

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar o número de empregados**
- Quais as variáveis do problema?
 - Empregados que iniciam jornada no domingo: (x_1)
 - Empregados que iniciam jornada na segunda-feira: (x_2)
 - Empregados que iniciam jornada na terça-feira: (x_3)
 - Empregados que iniciam jornada na quarta-feira: (x_4)
 - Empregados que iniciam jornada na quinta-feira: (x_5)
 - Empregados que iniciam jornada na sexta-feira: (x_6)
 - Empregados que iniciam jornada no sábado: (x_7)

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar o número de empregados**
- Quais as variáveis do problema?
 - Empregados que iniciam jornada no domingo: (x_1)
 - Empregados que iniciam jornada na segunda-feira: (x_2)
 - Empregados que iniciam jornada na terça-feira: (x_3)
 - Empregados que iniciam jornada na quarta-feira: (x_4)
 - Empregados que iniciam jornada na quinta-feira: (x_5)
 - Empregados que iniciam jornada na sexta-feira: (x_6)
 - Empregados que iniciam jornada no sábado: (x_7)

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]

- Quais as restrições para escala de funcionários?
 - Mínimo de empregados no domingo: (11)
 - Mínimo de empregados na segunda-feira: (18)
 - Mínimo de empregados na terça-feira: (12)
 - Mínimo de empregados na quarta-feira: (15)
 - Mínimo de empregados na quinta-feira: (19)
 - Mínimo de empregados na sexta-feira: (14)
 - Mínimo de empregados no sábado: (16)
- Existem outras restrições?
 - Não

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



- Quais as restrições para escala de funcionários?
 - Mínimo de empregados no domingo: (11)
 - Mínimo de empregados na segunda-feira: (18)
 - Mínimo de empregados na terça-feira: (12)
 - Mínimo de empregados na quarta-feira: (15)
 - Mínimo de empregados na quinta-feira: (19)
 - Mínimo de empregados na sexta-feira: (14)
 - Mínimo de empregados no sábado: (16)
- Existem outras restrições?
 - Não

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



- Quais as restrições para escala de funcionários?
 - Mínimo de empregados no domingo: (11)
 - Mínimo de empregados na segunda-feira: (18)
 - Mínimo de empregados na terça-feira: (12)
 - Mínimo de empregados na quarta-feira: (15)
 - Mínimo de empregados na quinta-feira: (19)
 - Mínimo de empregados na sexta-feira: (14)
 - Mínimo de empregados no sábado: (16)
- Existem outras restrições?
 - Não

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]

- Quais as restrições para escala de funcionários?
 - Mínimo de empregados no domingo: (11)
 - Mínimo de empregados na segunda-feira: (18)
 - Mínimo de empregados na terça-feira: (12)
 - Mínimo de empregados na quarta-feira: (15)
 - Mínimo de empregados na quinta-feira: (19)
 - Mínimo de empregados na sexta-feira: (14)
 - Mínimo de empregados no sábado: (16)
- Existem outras restrições?
 - Não

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



- Quais as restrições para escala de funcionários?
 - Mínimo de empregados no domingo: (11)
 - Mínimo de empregados na segunda-feira: (18)
 - Mínimo de empregados na terça-feira: (12)
 - Mínimo de empregados na quarta-feira: (15)
 - Mínimo de empregados na quinta-feira: (19)
 - Mínimo de empregados na sexta-feira: (14)
 - Mínimo de empregados no sábado: (16)
- Existem outras restrições?
 - Não

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - Minimizar o número de empregados
- Quais as variáveis a serem otimizadas?
 - Empregados que iniciam jornada no domingo: (x_1)
 - Empregados que iniciam jornada na segunda-feira: (x_2)
 - Empregados que iniciam jornada na terça-feira: (x_3)
 - Empregados que iniciam jornada na quarta-feira: (x_4)
 - Empregados que iniciam jornada na quinta-feira: (x_5)
 - Empregados que iniciam jornada na sexta-feira: (x_6)
 - Empregados que iniciam jornada no sábado: (x_7)

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar o número de empregados**
- Quais as variáveis a serem otimizadas?
 - Empregados que iniciam jornada no domingo: (x_1)
 - Empregados que iniciam jornada na segunda-feira: (x_2)
 - Empregados que iniciam jornada na terça-feira: (x_3)
 - Empregados que iniciam jornada na quarta-feira: (x_4)
 - Empregados que iniciam jornada na quinta-feira: (x_5)
 - Empregados que iniciam jornada na sexta-feira: (x_6)
 - Empregados que iniciam jornada no sábado: (x_7)

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar o número de empregados**
- Quais as variáveis a serem otimizadas?
 - Empregados que iniciam jornada no domingo: (x_1)
 - Empregados que iniciam jornada na segunda-feira: (x_2)
 - Empregados que iniciam jornada na terça-feira: (x_3)
 - Empregados que iniciam jornada na quarta-feira: (x_4)
 - Empregados que iniciam jornada na quinta-feira: (x_5)
 - Empregados que iniciam jornada na sexta-feira: (x_6)
 - Empregados que iniciam jornada no sábado: (x_7)

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar o número de empregados**
- Quais as variáveis a serem otimizadas?
 - Empregados que iniciam jornada no domingo: (x_1)
 - Empregados que iniciam jornada na segunda-feira: (x_2)
 - Empregados que iniciam jornada na terça-feira: (x_3)
 - Empregados que iniciam jornada na quarta-feira: (x_4)
 - Empregados que iniciam jornada na quinta-feira: (x_5)
 - Empregados que iniciam jornada na sexta-feira: (x_6)
 - Empregados que iniciam jornada no sábado: (x_7)

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]

Restrições:

- Restrição 1: Mínimo de empregados no domingo: (11)
 - Empregados que iniciam jornada no domingo: Sim
 - Empregados que iniciam jornada na segunda-feira: Não
 - Empregados que iniciam jornada na terça-feira: Não
 - Empregados que iniciam jornada na quarta-feira: Sim
 - Empregados que iniciam jornada na quinta-feira: Sim
 - Empregados que iniciam jornada na sexta-feira: Sim
 - Empregados que iniciam jornada no sábado: Sim

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 1: Mínimo de empregados no domingo: (11)
 - Empregados que iniciam jornada no domingo: Sim
 - Empregados que iniciam jornada na segunda-feira: Não
 - Empregados que iniciam jornada na terça-feira: Não
 - Empregados que iniciam jornada na quarta-feira: Sim
 - Empregados que iniciam jornada na quinta-feira: Sim
 - Empregados que iniciam jornada na sexta-feira: Sim
 - Empregados que iniciam jornada no sábado: Sim

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 1: Mínimo de empregados no domingo: (11)
 - Empregados que iniciam jornada no domingo: Sim
 - Empregados que iniciam jornada na segunda-feira: Não
 - Empregados que iniciam jornada na terça-feira: Não
 - Empregados que iniciam jornada na quarta-feira: Sim
 - Empregados que iniciam jornada na quinta-feira: Sim
 - Empregados que iniciam jornada na sexta-feira: Sim
 - Empregados que iniciam jornada no sábado: Sim

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 2: Mínimo de empregados na segunda-feira: (18)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Domingo: (x_1)
 - Segunda-feira: (x_2)
 - Quinta-feira: (x_5)
 - Sexta-feira: (x_6)
 - Sábado: (x_7)

$$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 18$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 2: Mínimo de empregados na segunda-feira: (18)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Domingo: (x_1)
 - Segunda-feira: (x_2)
 - Quinta-feira: (x_5)
 - Sexta-feira: (x_6)
 - Sábado: (x_7)

$$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 18$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 2: Mínimo de empregados na segunda-feira: (18)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Domingo: (x_1)
 - Segunda-feira: (x_2)
 - Quinta-feira: (x_5)
 - Sexta-feira: (x_6)
 - Sábado: (x_7)

$$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 18$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 3: Mínimo de empregados na terça-feira: (12)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Domingo: (x_1)
 - Segunda-feira: (x_2)
 - Terça-feira: (x_3)
 - Sexta-feira: (x_6)
 - Sábado: (x_7)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 12$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 3: Mínimo de empregados na terça-feira: (12)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Domingo: (x_1)
 - Segunda-feira: (x_2)
 - Terça-feira: (x_3)
 - Sexta-feira: (x_6)
 - Sábado: (x_7)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 12$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 3: Mínimo de empregados na terça-feira: (12)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Domingo: (x_1)
 - Segunda-feira: (x_2)
 - Terça-feira: (x_3)
 - Sexta-feira: (x_6)
 - Sábado: (x_7)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 12$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 4: Mínimo de empregados na quarta-feira: (15)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Domingo: (x_1)
 - Segunda-feira: (x_2)
 - Terça-feira: (x_3)
 - Quarta-feira: (x_4)
 - Sábado: (x_7)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 15$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 4: Mínimo de empregados na quarta-feira: (15)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Domingo: (x_1)
 - Segunda-feira: (x_2)
 - Terça-feira: (x_3)
 - Quarta-feira: (x_4)
 - Sábado: (x_7)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 15$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 4: Mínimo de empregados na quarta-feira: (15)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Domingo: (x_1)
 - Segunda-feira: (x_2)
 - Terça-feira: (x_3)
 - Quarta-feira: (x_4)
 - Sábado: (x_7)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 15$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 5: Mínimo de empregados na quinta-feira: (19)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Domingo: (x_1)
 - Segunda-feira: (x_2)
 - Terça-feira: (x_3)
 - Quarta-feira: (x_4)
 - Quinta-feira: (x_5)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 19$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 5: Mínimo de empregados na quinta-feira: (19)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Domingo: (x_1)
 - Segunda-feira: (x_2)
 - Terça-feira: (x_3)
 - Quarta-feira: (x_4)
 - Quinta-feira: (x_5)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 19$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 5: Mínimo de empregados na quinta-feira: (19)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Domingo: (x_1)
 - Segunda-feira: (x_2)
 - Terça-feira: (x_3)
 - Quarta-feira: (x_4)
 - Quinta-feira: (x_5)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 19$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 6: Mínimo de empregados na sexta-feira: (14)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Segunda-feira: (x_2)
 - Terça-feira: (x_3)
 - Quarta-feira: (x_4)
 - Quinta-feira: (x_5)
 - Sexta-feira: (x_6)

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 14$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 6: Mínimo de empregados na sexta-feira: (14)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Segunda-feira: (x_2)
 - Terça-feira: (x_3)
 - Quarta-feira: (x_4)
 - Quinta-feira: (x_5)
 - Sexta-feira: (x_6)

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 14$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 6: Mínimo de empregados na sexta-feira: (14)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Segunda-feira: (x_2)
 - Terça-feira: (x_3)
 - Quarta-feira: (x_4)
 - Quinta-feira: (x_5)
 - Sexta-feira: (x_6)

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 14$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 7: Mínimo de empregados na sábado: (16)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Terça-feira: (x_3)
 - Quarta-feira: (x_4)
 - Quinta-feira: (x_5)
 - Sexta-feira: (x_6)
 - Sábado: (x_7)

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 16$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]

Restrições:

- Restrição 7: Mínimo de empregados na sábado: (16)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Terça-feira: (x_3)
 - Quarta-feira: (x_4)
 - Quinta-feira: (x_5)
 - Sexta-feira: (x_6)
 - Sábado: (x_7)

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 16$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



Restrições:

- Restrição 7: Mínimo de empregados na sábado: (16)
 - Empregados que iniciam jornada:
 - Terça-feira: (x_3)
 - Quarta-feira: (x_4)
 - Quinta-feira: (x_5)
 - Sexta-feira: (x_6)
 - Sábado: (x_7)

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 16$$

Escala de Funcionários [Lachtermarcher, 2009]



● Sumarizando...

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

suj. a: $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11$ (demanda domingo)
 $x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 18$ (demanda segunda)
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 12$ (demanda terça)
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 15$ (demanda quarta)
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 19$ (demanda quinta)
 $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 14$ (demanda sexta)
 $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 16$ (demanda sábado)
 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$ (não negatividade)

PROGRAMAÇÃO DE ÔNIBUS

PROGRAMAÇÃO DE ÔNIBUS [TAHA, 2007]²

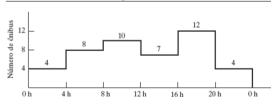
²Apud. [Diego Mello da Silva, 2016]

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



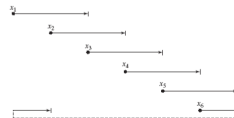
A cidade de *Progress* está estudando a viabilidade de introduzir um novo sistema de ônibus para transporte de massa, que aliviará o problema da mistura de nevoeiro com fumaça, por meio da redução do trânsito no centro da cidade. O estudo busca encontrar a quantidade mínima de ônibus necessários ao bom funcionamento da cidade. Após colher as informações de demanda, o engenheiro da prefeitura percebeu que a necessidade de ônibus da população varia de acordo com o horário. Além disso, percebeu que a quantidade de veículos pode ser aproximada por constantes, em intervalos sucessivos de 4 horas. Devido à manutenção diária obrigatória, cada ônibus pode circular por apenas 8 horas sucessivas.

Figura 2.8
Número de ônibus como função do horário do dia



Período	No. Ônibus Circ.
00:01 - 04:00	$x_1 + x_6$
04:01 - 08:00	$x_1 + x_2$
08:01 - 12:00	$x_2 + x_3$
12:01 - 16:00	$x_3 + x_4$
16:01 - 20:00	$x_4 + x_5$
20:01 - 00:00	$x_5 + x_6$

Fonte: [Taha, 2007]



Formule o problema de programação linear que determine a quantidade de ônibus em cada turno, de modo a atender à demanda da população.

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



- Qual o objetivo do problema?
 - Minimizar a quantidade de ônibus
- Quais as variáveis do problema?
 - Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)
 - Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)
 - Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)
 - Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)
 - Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)

Programação de Ônibus [Taha, 2007]

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar a quantidade de ônibus**
- Quais as variáveis do problema?
 - Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)
 - Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)
 - Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)
 - Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)
 - Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)

Programação de Ônibus [Taha, 2007]

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar a quantidade de ônibus**
- Quais as variáveis do problema?
 - Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)
 - Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)
 - Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)
 - Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)
 - Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)

Programação de Ônibus [Taha, 2007]

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar a quantidade de ônibus**
- Quais as variáveis do problema?
 - Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)
 - Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)
 - Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)
 - Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)
 - Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)

Programação de Ônibus [Taha, 2007]

- Quais as restrições para escala de funcionários?
 - Quantidade de ônibus entre 00:01 e 04:00: (4)
 - Quantidade de ônibus entre 04:01 e 08:00: (8)
 - Quantidade de ônibus entre 08:01 e 12:00: (10)
 - Quantidade de ônibus entre 12:01 e 16:00: (7)
 - Quantidade de ônibus entre 16:01 e 20:00: (12)
 - Quantidade de ônibus entre 20:01 e 00:00: (4)
- Existem outras restrições?
 - Não

Programação de Ônibus [Taha, 2007]

- Quais as restrições para escala de funcionários?
 - Quantidade de ônibus entre 00:01 e 04:00: (4)
 - Quantidade de ônibus entre 04:01 e 08:00: (8)
 - Quantidade de ônibus entre 08:01 e 12:00: (10)
 - Quantidade de ônibus entre 12:01 e 16:00: (7)
 - Quantidade de ônibus entre 16:01 e 20:00: (12)
 - Quantidade de ônibus entre 20:01 e 00:00: (4)
- Existem outras restrições?
 - Não

Programação de Ônibus [Taha, 2007]

- Quais as restrições para escala de funcionários?
 - Quantidade de ônibus entre 00:01 e 04:00: (4)
 - Quantidade de ônibus entre 04:01 e 08:00: (8)
 - Quantidade de ônibus entre 08:01 e 12:00: (10)
 - Quantidade de ônibus entre 12:01 e 16:00: (7)
 - Quantidade de ônibus entre 16:01 e 20:00: (12)
 - Quantidade de ônibus entre 20:01 e 00:00: (4)
- Existem outras restrições?
 - Não

Programação de Ônibus [Taha, 2007]

- Quais as restrições para escala de funcionários?
 - Quantidade de ônibus entre 00:01 e 04:00: (4)
 - Quantidade de ônibus entre 04:01 e 08:00: (8)
 - Quantidade de ônibus entre 08:01 e 12:00: (10)
 - Quantidade de ônibus entre 12:01 e 16:00: (7)
 - Quantidade de ônibus entre 16:01 e 20:00: (12)
 - Quantidade de ônibus entre 20:01 e 00:00: (4)
- Existem outras restrições?
 - Não

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



- Quais as restrições para escala de funcionários?
 - Quantidade de ônibus entre 00:01 e 04:00: (4)
 - Quantidade de ônibus entre 04:01 e 08:00: (8)
 - Quantidade de ônibus entre 08:01 e 12:00: (10)
 - Quantidade de ônibus entre 12:01 e 16:00: (7)
 - Quantidade de ônibus entre 16:01 e 20:00: (12)
 - Quantidade de ônibus entre 20:01 e 00:00: (4)
- Existem outras restrições?
 - Não

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - Minimizar a quantidade de ônibus
- Quais as variáveis a serem otimizadas?
 - Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)
 - Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)
 - Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)
 - Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)
 - Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar a quantidade de ônibus**
- Quais as variáveis a serem otimizadas?
 - Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)
 - Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)
 - Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)
 - Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)
 - Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar a quantidade de ônibus**
- Quais as variáveis a serem otimizadas?
 - Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)
 - Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)
 - Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)
 - Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)
 - Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Minimizar a quantidade de ônibus**
- Quais as variáveis a serem otimizadas?
 - Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)
 - Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)
 - Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)
 - Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)
 - Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Restrições:

● Restrição 1: Quantidade de ônibus entre 00:01 e 04:00 (4)

- Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)
- Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)

$$x_1 + x_6 \geq 4$$

● Restrição 2: Quantidade de ônibus entre 04:01 e 08:00 (8)

- Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)
- Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 1: Quantidade de ônibus entre 00:01 e 04:00 (4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)
 - Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)

$$x_1 + x_6 \geq 4$$

- Restrição 2: Quantidade de ônibus entre 04:01 e 08:00 (8)
 - Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)
 - Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 1: Quantidade de ônibus entre 00:01 e 04:00 (4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)
 - Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)

$$x_1 + x_6 \geq 4$$

- Restrição 2: Quantidade de ônibus entre 04:01 e 08:00 (8)
 - Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)
 - Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 1: Quantidade de ônibus entre 00:01 e 04:00 (4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)
 - Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)

$$x_1 + x_6 \geq 4$$

- Restrição 2: Quantidade de ônibus entre 04:01 e 08:00 (8)
 - Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)
 - Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 1: Quantidade de ônibus entre 00:01 e 04:00 (4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)
 - Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)

$$x_1 + x_6 \geq 4$$

- Restrição 2: Quantidade de ônibus entre 04:01 e 08:00 (8)
 - Ônibus que iniciam jornada às 00:01: (x_1)
 - Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Restrições:

● Restrição 3: Quantidade de ônibus entre 08:01 e 12:00 (10)

- Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)
- Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)

$$x_2 + x_3 \geq 10$$

● Restrição 4: Quantidade de ônibus entre 12:01 e 16:00 (7)

- Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)
- Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)

$$x_3 + x_4 \geq 7$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 3: Quantidade de ônibus entre 08:01 e 12:00 (10)
 - Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)
 - Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)

$$x_2 + x_3 \geq 10$$

- Restrição 4: Quantidade de ônibus entre 12:01 e 16:00 (7)
 - Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)
 - Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)

$$x_3 + x_4 \geq 7$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 3: Quantidade de ônibus entre 08:01 e 12:00 (10)
 - Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)
 - Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)

$$x_2 + x_3 \geq 10$$

- Restrição 4: Quantidade de ônibus entre 12:01 e 16:00 (7)
 - Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)
 - Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)

$$x_3 + x_4 \geq 7$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 3: Quantidade de ônibus entre 08:01 e 12:00 (10)
 - Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)
 - Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)

$$x_2 + x_3 \geq 10$$

- Restrição 4: Quantidade de ônibus entre 12:01 e 16:00 (7)
 - Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)
 - Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)

$$x_3 + x_4 \geq 7$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 3: Quantidade de ônibus entre 08:01 e 12:00 (10)
 - Ônibus que iniciam jornada às 04:01: (x_2)
 - Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)

$$x_2 + x_3 \geq 10$$

- Restrição 4: Quantidade de ônibus entre 12:01 e 16:00 (7)
 - Ônibus que iniciam jornada às 08:01: (x_3)
 - Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)

$$x_3 + x_4 \geq 7$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Restrições:

● Restrição 5: Quantidade de ônibus entre 16:01 e 20:00 (12)

- Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)
- Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)

$$x_4 + x_5 \geq 12$$

● Restrição 6: Quantidade de ônibus entre 20:01 e 00:00 (4)

- Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)
- Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)

$$x_5 + x_6 \geq 4$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 5: Quantidade de ônibus entre 16:01 e 20:00 (12)
 - Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)

$$x_4 + x_5 \geq 12$$

- Restrição 6: Quantidade de ônibus entre 20:01 e 00:00 (4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)
 - Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)

$$x_5 + x_6 \geq 4$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 5: Quantidade de ônibus entre 16:01 e 20:00 (12)
 - Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)

$$x_4 + x_5 \geq 12$$

- Restrição 6: Quantidade de ônibus entre 20:01 e 00:00 (4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)
 - Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)

$$x_5 + x_6 \geq 4$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 5: Quantidade de ônibus entre 16:01 e 20:00 (12)
 - Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)

$$x_4 + x_5 \geq 12$$

- Restrição 6: Quantidade de ônibus entre 20:01 e 00:00 (4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)
 - Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)

$$x_5 + x_6 \geq 4$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 5: Quantidade de ônibus entre 16:01 e 20:00 (12)
 - Ônibus que iniciam jornada às 12:01: (x_4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)

$$x_4 + x_5 \geq 12$$

- Restrição 6: Quantidade de ônibus entre 20:01 e 00:00 (4)
 - Ônibus que iniciam jornada às 16:01: (x_5)
 - Ônibus que iniciam jornada às 20:01: (x_6)

$$x_5 + x_6 \geq 4$$

Programação de Ônibus [Taha, 2007]

● Sumarizando...

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\text{sujeito a: } x_1 + x_6 \geq 4 \quad (\text{qtd. ônibus 00:01 e 04:00})$$

$$x_1 + x_2 \geq 8 \quad (\text{qtd. ônibus 04:01 e 08:00})$$

$$x_2 + x_3 \geq 10 \quad (\text{qtd. ônibus 08:01 e 12:00})$$

$$x_3 + x_4 \geq 7 \quad (\text{qtd. ônibus 12:01 e 16:00})$$

$$x_4 + x_5 \geq 12 \quad (\text{qtd. ônibus 16:01 e 20:00})$$

$$x_5 + x_6 \geq 4 \quad (\text{qtd. ônibus 20:01 e 00:00})$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \quad (\text{não negatividade})$$

INVESTIMENTOS

POLÍTICA DE EMPRÉSTIMO [TAHA, 2007]

Política de Empréstimo [Taha, 2007]

O Thriften Bank está em processo de elaboração de uma política de empréstimo que envolve um montante máximo de \$12 milhões. A concorrência com outras instituições financeiras requer que o banco destine no mínimo 40% dos fundos a créditos agrícolas e comerciais. Para auxiliar o setor de construção de residências da região, a quantia destinada ao crédito habitacional deve ser igual a no mínimo 50% da soma dos empréstimos pessoais, para aquisição de automóveis e aquisição habitacional. O banco também estabeleceu uma política de não permitir que a taxa global de inadimplência sobre todos os empréstimos exceda 4%. A tabela abaixo detalha os dados pertinentes aos tipos de empréstimos disponíveis. A inadimplência são débitos incobráveis e não geram receita de juros.

Tipo de empréstimo	Taxa de juros	Taxa de inadimplência
Pessoal	0,140	0,10
Automóvel	0,130	0,07
Habitacional	0,120	0,03
Agrícola	0,125	0,05
Comercial	0,100	0,02

Fonte: [Taha, 2007]

Formule o problema de programação linear que maximize o lucro líquido (diferença entre receita de juros e créditos inadimplentes) do Thriften Bank.

Política de Empréstimo [Taha, 2007]

- Qual o objetivo do problema?
 - Maximizar o lucro líquido dos empréstimos.
- Quais as variáveis do problema?
 - Empréstimos pessoais: (x_1)
 - Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
 - Empréstimos habitacionais: (x_3)
 - Empréstimos agrícolas: (x_4)
 - Empréstimos comerciais: (x_5)

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro líquido dos empréstimos.**
- Quais as variáveis do problema?
 - Empréstimos pessoais: (x_1)
 - Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
 - Empréstimos habitacionais: (x_3)
 - Empréstimos agrícolas: (x_4)
 - Empréstimos comerciais: (x_5)

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro líquido dos empréstimos.**
- Quais as variáveis do problema?
 - Empréstimos pessoais: (x_1)
 - Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
 - Empréstimos habitacionais: (x_3)
 - Empréstimos agrícolas: (x_4)
 - Empréstimos comerciais: (x_5)

Política de Empréstimo [Taha, 2007]

- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro líquido dos empréstimos.**
- Quais as variáveis do problema?
 - Empréstimos pessoais: (x_1)
 - Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
 - Empréstimos habitacionais: (x_3)
 - Empréstimos agrícolas: (x_4)
 - Empréstimos comerciais: (x_5)

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



- Quais as restrições para empréstimos?
 - Total de fundos não deve exceder \$12M
 - Empréstimos agrícolas e comerciais no mínimo 40%
 - Crédito habitacional no mínimo 50% dos empréstimos pessoais, para compra de automóveis e habitacionais
 - Inadimplência não deve exceder 4%
- Existem outras restrições?
 - Não

Política de Empréstimo [Taha, 2007]

- Quais as restrições para empréstimos?
 - Total de fundos não deve exceder \$12M
 - Empréstimos agrícolas e comerciais no mínimo 40%
 - Crédito habitacional no mínimo 50% dos empréstimos pessoais, para compra de automóveis e habitacionais
 - Inadimplência não deve exceder 4%
- Existem outras restrições?
 - Não

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



- Quais as restrições para empréstimos?
 - Total de fundos não deve exceder \$12M
 - Empréstimos agrícolas e comerciais no mínimo 40%
 - Crédito habitacional no mínimo 50% dos empréstimos pessoais, para compra de automóveis e habitacionais
 - Inadimplência não deve exceder 4%
- Existem outras restrições?
 - Não

Política de Empréstimo [Taha, 2007]

- Quais as restrições para empréstimos?
 - Total de fundos não deve exceder \$12M
 - Empréstimos agrícolas e comerciais no mínimo 40%
 - Crédito habitacional no mínimo 50% dos empréstimos pessoais, para compra de automóveis e habitacionais
 - Inadimplência não deve exceder 4%
- Existem outras restrições?
 - Não

Política de Empréstimo [Taha, 2007]

- Quais as restrições para empréstimos?
 - Total de fundos não deve exceder \$12M
 - Empréstimos agrícolas e comerciais no mínimo 40%
 - Crédito habitacional no mínimo 50% dos empréstimos pessoais, para compra de automóveis e habitacionais
 - Inadimplência não deve exceder 4%
- Existem outras restrições?
 - Não

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - Maximizar o lucro líquido dos empréstimos.
- Quais as variáveis a serem maximizadas?
 - Empréstimos pessoais: (x_1)
 - Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
 - Empréstimos habitacionais: (x_3)
 - Empréstimos agrícolas: (x_4)
 - Empréstimos comerciais: (x_5)

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro líquido dos empréstimos.**
- Quais as variáveis a serem maximizadas?
 - Empréstimos pessoais: (x_1)
 - Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
 - Empréstimos habitacionais: (x_3)
 - Empréstimos agrícolas: (x_4)
 - Empréstimos comerciais: (x_5)

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Função Objetivo:

- Qual o objetivo do problema?
 - **Maximizar o lucro líquido dos empréstimos.**
- Quais as variáveis a serem maximizadas?
 - Empréstimos pessoais: (x_1)
 - Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
 - Empréstimos habitacionais: (x_3)
 - Empréstimos agrícolas: (x_4)
 - Empréstimos comerciais: (x_5)

Política de Empréstimo [Taha, 2007]

Função Objetivo:

- Qual a relação com a inadimplência?
 - Somente parte dos empréstimos são pagos, então somente é possível auferir lucro da parte adimplente;

$$\begin{aligned} \max z = & (0.14 \times 0.9)x_1 + (0.13 \times 0.93)x_2 + (0.12 \times 0.97)x_3 \\ & + (0.125 \times 0.95)x_4 + (0.1 \times 0.98)x_5 \end{aligned}$$

$$\max z = 0.126x_1 + 0.121x_2 + 0.116x_3 + 0.119x_4 + 0.098x_5$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]

Função Objetivo:

- Qual a relação com a inadimplência?
 - Somente parte dos empréstimos são pagos, então somente é possível auferir lucro da parte adimplente;

$$\begin{aligned} \max z = & (0.14 \times 0.9)x_1 + (0.13 \times 0.93)x_2 + (0.12 \times 0.97)x_3 \\ & + (0.125 \times 0.95)x_4 + (0.1 \times 0.98)x_5 \end{aligned}$$

$$\max z = 0.126x_1 + 0.121x_2 + 0.116x_3 + 0.119x_4 + 0.098x_5$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]

Função Objetivo:

- Qual a relação com a inadimplência?
 - Somente parte dos empréstimos são pagos, então somente é possível auferir lucro da parte adimplente;

$$\begin{aligned} \max z = & (0.14 \times 0.9)x_1 + (0.13 \times 0.93)x_2 + (0.12 \times 0.97)x_3 \\ & + (0.125 \times 0.95)x_4 + (0.1 \times 0.98)x_5 \end{aligned}$$

$$\max z = 0.126x_1 + 0.121x_2 + 0.116x_3 + 0.119x_4 + 0.098x_5$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]

Função Objetivo:

- Qual a relação com a inadimplência?
 - Somente parte dos empréstimos são pagos, então somente é possível auferir lucro da parte adimplente;

$$\begin{aligned} \max z = & (0.14 \times 0.9)x_1 + (0.13 \times 0.93)x_2 + (0.12 \times 0.97)x_3 \\ & + (0.125 \times 0.95)x_4 + (0.1 \times 0.98)x_5 \end{aligned}$$

$$\max z = 0.126x_1 + 0.121x_2 + 0.116x_3 + 0.119x_4 + 0.098x_5$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Função Objetivo:

- Qual a relação com a inadimplência?
 - Somente parte dos empréstimos são pagos, então somente é possível auferir lucro da parte adimplente;
 - Além disso, podemos considerar que o restante não é recuperável.

$$\begin{aligned} \max z = & (0.126x_1 + 0.121x_2 + 0.116x_3 + 0.119x_4 + 0.098x_5) \\ & - (0.1x_1 + 0.07x_2 + 0.03x_3 + 0.05x_4 + 0.02x_5) \end{aligned}$$

$$\max z = 0.026x_1 + 0.051x_2 + 0.086x_3 + 0.069x_4 + 0.078x_5$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Função Objetivo:

- Qual a relação com a inadimplência?
 - Somente parte dos empréstimos são pagos, então somente é possível auferir lucro da parte adimplente;
 - Além disso, podemos considerar que o restante não é recuperável.

$$\begin{aligned} \max z = & (0.126x_1 + 0.121x_2 + 0.116x_3 + 0.119x_4 + 0.098x_5) \\ & - (0.1x_1 + 0.07x_2 + 0.03x_3 + 0.05x_4 + 0.02x_5) \end{aligned}$$

$$\max z = 0.026x_1 + 0.051x_2 + 0.086x_3 + 0.069x_4 + 0.078x_5$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Função Objetivo:

- Qual a relação com a inadimplência?
 - Somente parte dos empréstimos são pagos, então somente é possível auferir lucro da parte adimplente;
 - Além disso, podemos considerar que o restante não é recuperável.

$$\begin{aligned} \max z = & (0.126x_1 + 0.121x_2 + 0.116x_3 + 0.119x_4 + 0.098x_5) \\ & - (0.1x_1 + 0.07x_2 + 0.03x_3 + 0.05x_4 + 0.02x_5) \end{aligned}$$

$$\max z = 0.026x_1 + 0.051x_2 + 0.086x_3 + 0.069x_4 + 0.078x_5$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Função Objetivo:

- Qual a relação com a inadimplência?
 - Somente parte dos empréstimos são pagos, então somente é possível auferir lucro da parte adimplente;
 - Além disso, podemos considerar que o restante não é recuperável.

$$\begin{aligned} \max z = & (0.126x_1 + 0.121x_2 + 0.116x_3 + 0.119x_4 + 0.098x_5) \\ & - (0.1x_1 + 0.07x_2 + 0.03x_3 + 0.05x_4 + 0.02x_5) \end{aligned}$$

$$\max z = 0.026x_1 + 0.051x_2 + 0.086x_3 + 0.069x_4 + 0.078x_5$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 1: Total de fundos não deve exceder \$12M

- Empréstimos pessoais: (x_1)
- Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
- Empréstimos habitacionais: (x_3)
- Empréstimos agrícolas: (x_4)
- Empréstimos comerciais: (x_5)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

- Restrição 2: Empréstimos agrícolas e comerciais no mínimo 40%

- Empréstimos agrícolas: (x_4)
- Empréstimos comerciais: (x_5)

$$x_4 + x_5 \leq 0.4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$0.4x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 - 0.6x_4 - 0.6x_5 \geq 0$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 1: Total de fundos não deve exceder \$12M

- Empréstimos pessoais: (x_1)
- Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
- Empréstimos habitacionais: (x_3)
- Empréstimos agrícolas: (x_4)
- Empréstimos comerciais: (x_5)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

- Restrição 2: Empréstimos agrícolas e comerciais no mínimo 40%

- Empréstimos agrícolas: (x_4)
- Empréstimos comerciais: (x_5)

$$x_4 + x_5 \leq 0.4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$0.4x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 - 0.6x_4 - 0.6x_5 \geq 0$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 1: Total de fundos não deve exceder \$12M

- Empréstimos pessoais: (x_1)
- Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
- Empréstimos habitacionais: (x_3)
- Empréstimos agrícolas: (x_4)
- Empréstimos comerciais: (x_5)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

- Restrição 2: Empréstimos agrícolas e comerciais no mínimo 40%

- Empréstimos agrícolas: (x_4)
- Empréstimos comerciais: (x_5)

$$x_4 + x_5 \leq 0.4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$0.4x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 - 0.6x_4 - 0.6x_5 \geq 0$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 1: Total de fundos não deve exceder \$12M

- Empréstimos pessoais: (x_1)
- Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
- Empréstimos habitacionais: (x_3)
- Empréstimos agrícolas: (x_4)
- Empréstimos comerciais: (x_5)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

- Restrição 2: Empréstimos agrícolas e comerciais no mínimo 40%

- Empréstimos agrícolas: (x_4)
- Empréstimos comerciais: (x_5)

$$x_4 + x_5 \leq 0.4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$0.4x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 - 0.6x_4 - 0.6x_5 \geq 0$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 1: Total de fundos não deve exceder \$12M

- Empréstimos pessoais: (x_1)
- Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
- Empréstimos habitacionais: (x_3)
- Empréstimos agrícolas: (x_4)
- Empréstimos comerciais: (x_5)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

- Restrição 2: Empréstimos agrícolas e comerciais no mínimo 40%

- Empréstimos agrícolas: (x_4)
- Empréstimos comerciais: (x_5)

$$x_4 + x_5 \leq 0.4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$0.4x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 - 0.6x_4 - 0.6x_5 \geq 0$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 1: Total de fundos não deve exceder \$12M

- Empréstimos pessoais: (x_1)
- Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
- Empréstimos habitacionais: (x_3)
- Empréstimos agrícolas: (x_4)
- Empréstimos comerciais: (x_5)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

- Restrição 2: Empréstimos agrícolas e comerciais no mínimo 40%

- Empréstimos agrícolas: (x_4)
- Empréstimos comerciais: (x_5)

$$x_4 + x_5 \leq 0.4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$0.4x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 - 0.6x_4 - 0.6x_5 \geq 0$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 3: Crédito habitacional no mínimo 50% dos empréstimos pessoais, para compra de automóveis e habitacionais
 - Empréstimos pessoais: (x_1)
 - Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
 - Empréstimos habitacionais: (x_3)

$$x_3 \geq 0.5(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 - 0.5x_3 \leq 0$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 3: Crédito habitacional no mínimo 50% dos empréstimos pessoais, para compra de automóveis e habitacionais
 - Empréstimos pessoais: (x_1)
 - Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
 - Empréstimos habitacionais: (x_3)

$$x_3 \geq 0.5(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 - 0.5x_3 \leq 0$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]

Restrições:

- Restrição 3: Crédito habitacional no mínimo 50% dos empréstimos pessoais, para compra de automóveis e habitacionais
 - Empréstimos pessoais: (x_1)
 - Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
 - Empréstimos habitacionais: (x_3)

$$x_3 \geq 0.5(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 - 0.5x_3 \leq 0$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 3: Crédito habitacional no mínimo 50% dos empréstimos pessoais, para compra de automóveis e habitacionais
 - Empréstimos pessoais: (x_1)
 - Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
 - Empréstimos habitacionais: (x_3)

$$x_3 \geq 0.5(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 - 0.5x_3 \leq 0$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]

Restrições:

- Restrição 4: Inadimplência não deve exceder 4%

- Empréstimos pessoais: (x_1)
- Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
- Empréstimos habitacionais: (x_3)
- Empréstimos agrícolas: (x_4)
- Empréstimos comerciais: (x_5)

$$0.1x_1 + 0.07x_2 + 0.03x_3 + 0.05x_4 + 0.02x_5 \leq 0.04(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$0.06x_1 + 0.03x_2 - 0.01x_3 + 0.01x_4 - 0.02x_5 \leq 0$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]

Restrições:

- Restrição 4: Inadimplência não deve exceder 4%
 - Empréstimos pessoais: (x_1)
 - Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
 - Empréstimos habitacionais: (x_3)
 - Empréstimos agrícolas: (x_4)
 - Empréstimos comerciais: (x_5)

$$0.1x_1 + 0.07x_2 + 0.03x_3 + 0.05x_4 + 0.02x_5 \leq 0.04(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$0.06x_1 + 0.03x_2 - 0.01x_3 + 0.01x_4 - 0.02x_5 \leq 0$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 4: Inadimplência não deve exceder 4%
 - Empréstimos pessoais: (x_1)
 - Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
 - Empréstimos habitacionais: (x_3)
 - Empréstimos agrícolas: (x_4)
 - Empréstimos comerciais: (x_5)

$$0.1x_1 + 0.07x_2 + 0.03x_3 + 0.05x_4 + 0.02x_5 \leq 0.04(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$0.06x_1 + 0.03x_2 - 0.01x_3 + 0.01x_4 - 0.02x_5 \leq 0$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



Restrições:

- Restrição 4: Inadimplência não deve exceder 4%
 - Empréstimos pessoais: (x_1)
 - Empréstimos para compra de automóveis: (x_2)
 - Empréstimos habitacionais: (x_3)
 - Empréstimos agrícolas: (x_4)
 - Empréstimos comerciais: (x_5)

$$0.1x_1 + 0.07x_2 + 0.03x_3 + 0.05x_4 + 0.02x_5 \leq 0.04(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

$$0.06x_1 + 0.03x_2 - 0.01x_3 + 0.01x_4 - 0.02x_5 \leq 0$$

Política de Empréstimo [Taha, 2007]



● Sumarizando...

$$\max z = 0.026x_1 + 0.051x_2 + 0.086x_3 + 0.069x_4 + 0.078x_5$$

sujeito a:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12 \quad (\text{total fundos})$$

$$0.4x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 - 0.6x_4 - 0.6x_5 \geq 0 \quad (\text{crédito agro/comercial})$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 - 0.5x_3 \leq 0 \quad (\text{crédito habitacional})$$

$$0.06x_1 + 0.03x_2 - 0.01x_3 + 0.01x_4 - 0.02x_5 \leq 0 \quad (\text{inadimplência máxima})$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \quad (\text{não negatividade})$$

Referências I



Belfiore, P. and Fávero, L. P. (2013).
Pesquisa operacional para cursos de engenharia.
Elsevier, 1 edition.



Diego Mello da Silva (2016).
Pesquisa Operacional - Slides de Aula.
IFMG - Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Formiga.



Goldbarg, M. C. and Luna, H. P. L. (2005).
Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos.
Elsevier, 2 edition.



Lachtermarcher, G. (2009).
Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões.
Pearson Prentice Hall.



Silva, E. M. d., Silva, E. M. d., and Gonçalves, V. (2010).
Pesquisa Operacional para os Cursos de Administração e Engenharia.
Editora Atlas, 4 edition.



Taha, H. A. (2007).
Pesquisa Operacional.
Editora Prentice-Hall, 8 edition.



Winston, W. and Goldberg, J. (2004).
Operations Research: Applications and Algorithms.
Operations Research: Applications and Algorithms. Thomson Brooks/Cole.