



Matemática Discreta

Lista de Exercícios para alunos do curso de Matemática, em substituição ao Trabalho Prático.

Data: 17-01-2022

- Professor: Felipe Reis

- Aluno: [insira seu nome aqui]

Pontuação

Valor: 20 pontos

Pontuação

- Seção A: 2 pontos.
- Seção B: 4 pontos.
- Seção C: 3 pontos.
- Seção D: 4 pontos.
- Seção E: 4 pontos.
- Seção F: 3 pontos.

Seção A - Lógica Proposicional

[A-01] [Gersting, 2014]

Utilize lógica proposicional para mostrar que o seguinte argumento é válido.

*Não é o verdade que, se as tarifas de energia elétrica aumentarem, então o uso diminuirá.
Também não é verdade que: novas usinas serão construídas ou as contas não atrasarão.
Portanto, o uso não diminuirá e as contas atrasarão.*

[insira sua resposta aqui]

[A-02] [Gersting, 2014]

Utilize lógica proposicional para mostrar que o seguinte argumento é válido:

*Se as abelhas estão mais ativas e as flores estão florescendo, então deve ser primavera. A primavera traz um clima quente. As flores estão florescendo, mas o tempo não está quente.
Portanto, as abelhas não estão mais ativas.*

[insira sua resposta aqui]

Seção B - Demonstrações

[B-01] [Gersting, 2014]

Considere a seguinte afirmação: Se n for um inteiro $2 \leq n \leq 4$, então temos que $n^2 \geq 2^n$.

- a) Prove ou refute a afirmação.
- b) Indique o método utilizado.

[insira sua resposta aqui]

[B-02] [Gersting, 2014]

Considere a seguinte afirmação: Se n for um inteiro $2 \leq n \leq 5$, então temos que $n^2 \geq 2^n$.

- a) Prove ou refute a afirmação.
- b) Indique o método utilizado.

[insira sua resposta aqui]

[B-03] [Kolman, 1996]

Considere a seguinte afirmação: a soma de quaisquer 5 números inteiros consecutivos é divisível por 5.

- a) Prove ou refute a afirmação.
- b) Indique o método utilizado.

[insira sua resposta aqui]

[B-04] [Rosen, 2019]

Considere a afirmação: se x e y são números reais, então $\max(x,y) + \min(x,y) = x+y$.

- a) Prove ou refute a afirmação.
- b) Indique o método utilizado.

[insira sua resposta aqui]

[B-05] [Levin, 2019]

Considere a seguinte afirmação: para todos os inteiros a e b , se $a^2 + b^2$ for ímpar, então a ou b é ímpar.

- a) Prove ou refute a afirmação.
- b) Indique o método utilizado.

[insira sua resposta aqui]

[B-06] [Gersting, 2014]

Considere a seguinte afirmação: A soma de um inteiro e seu cubo é par.

- a) Prove ou refute a afirmação.
- b) Indique o método utilizado.

[insira sua resposta aqui]

[B-07] [Rosen, 2019]

Considere a seguinte afirmação: *ao menos um dos números reais a_1, a_2, \dots, a_n é maior ou igual à média desses números.*

- a) Prove ou refute a afirmação.
- b) Indique o método utilizado.

[insira sua resposta aqui]

[B-08] [Kolman, 1996]

Considere a seguinte afirmação: **3** é divisor de $n^3 - n$ para todo inteiro positivo n .

- a) Prove ou refute a afirmação.
- b) Indique o método utilizado.

[insira sua resposta aqui]

Seção C - Conjuntos

[C-01]

Responda as questões abaixo:

- I. Escreva, usando construção de conjuntos, o conjunto de números inteiros positivos existentes no intervalo $(-5, 3]$.
- II. Escreva, usando construção de conjuntos, o conjunto de números inteiros ímpares no mesmo intervalo descrito no item I.
- III. Considere S o conjunto descrito no item I. Escreva, usando listas limitadas por chaves, o conjunto potência $P(S)$.
- IV. Indique a cardinalidade conjunto gerado no item III.

[insira sua resposta aqui]

[C-02]

Prove que $A \cup (A \cap B) = A$ (Identidade “Absorção”).

[insira sua resposta aqui]

[C-03]

Prove que $A \cap (A \cup B) = A$ (Identidade “Absorção”).

[insira sua resposta aqui]

[C-04]

Defina (a) conjunto contável e (b) conjunto denumerável. (c) Explique como um conjunto denumerável pode ser mapeado em um conjunto contável (a explicação pode ser feita com exemplos).

[insira sua resposta aqui]

[C-05] [Rosen, 2019]

Explique por quê:

- a) $A \times B \times C \neq (A \times B) \times C$
- b) $A \times B \neq B \times A$, quando A e B não são vazios, exceto se $A=B$.

[insira sua resposta aqui]

[C-06]

Sejam $A=\{p, q, r, s\}$, $B=\{r, t, v\}$ e $C=\{p, s, t, u\}$ subconjuntos de $S=\{p, q, r, s, t, u, v, w\}$. Determine.

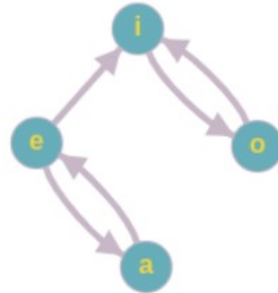
- a) $B \cap C$
- b) $A \cup C$
- c) $\neg C$
- d) $(A \cap B) \cap C$
- e) $(A \cup B) \cap C$

[insira sua resposta aqui]

Seção D - Relações

[D-01]

Dado o dígrafo abaixo, que representa uma relação R em um conjunto $\{a, e, i, o\}$.



(a) Transforme o dígrafo em listas limitadas por chaves.

(b) Encontre, se necessário (e justifique, se a relação já for o próprio fecho), os seguintes fechos:

- I. Fecho Reflexivo
- II. Fecho Simétrico

[insira sua resposta aqui]

[D-02]

Considere a relação $R = \{(a, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, c), (c, d), (d, a), (d, d)\}$ em um conjunto $\{a, b, c, d\}$. Verifique (e justifique) se a relação corresponde a uma:

- I. Ordenação Parcial
- II. Relação de Equivalência.

[insira sua resposta aqui]

[D-03] Adaptado de [Rosen, 2019]

Considere o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Considere a relação $R = \{(0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 0)\}$. Encontre os seguintes fechos:

- (a) Fecho reflexivo de R .
- (b) Fecho simétrico de R .

[insira sua resposta aqui]

[D-04] Adaptado de [Rosen, 2019]

Considere o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Considere a relação $R = \{(0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 0)\}$. Encontre o Fecho Transitivo de R (passo a passo).

[insira sua resposta aqui]

[D-05] [Rosen, 2019]

Indique se as relações abaixo, no conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$, são ordenações parciais. Justifique.

(a) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

(b) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

[insira sua resposta aqui]

[D-06]

Considere a relação $R = \{(a, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, c), (c, d), (d, a), (d, d)\}$ em um conjunto $\{a, b, c, d\}$. Verifique (e justifique) se a relação corresponde a uma:

III. Ordenação Parcial

IV. Relação de Equivalência.

[insira sua resposta aqui]

[D-07] [Hillier, 2001]

Construa o gráfico PERT a partir da tabela de tarefas abaixo.

Tarefa	Pré-requisitos	Tempo
A	-	2
B	-	1
C	B	2
D	A, B	2
E	A, C	3
F	A	2
G	A	1
H	F, G	1
I	D, H	1
J	I	3
K	E, J	4

[insira sua resposta aqui]

[D-08] [Gersting, 2014]

Construa o gráfico PERT a partir da tabela de tarefas abaixo.

Tarefa	Pré-requisitos	Tempo
A	G	3
B	A, J	5
C	G	7
D	F	2
E	G	5
F	-	4
G	D, H	1
H	-	7
I	K	2
J	C, E	3
K	B	6

[insira sua resposta aqui]

Seção E - Funções

[E-01] Adaptado de [Rosen, 2019]

Determine se cada uma das funções abaixo, de um conjunto $\{a, b, c, d\}$ mapeada em si mesmo, são injetoras e sobrejetoras.

(a) $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c, f(d) = d$

(b) $f(a) = b, f(b) = b, f(c) = d, f(d) = c$

[insira sua resposta aqui]

[E-02] [Rosen, 2019]

Determine se cada uma das funções abaixo são bijeções de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x) = 2x + 1$

(b) $f(x) = x^2 + 1$

[insira sua resposta aqui]

[E-03] [Rosen, 2019]

Estime as complexidades computacionais da função $f(n) = (n^2 + 8)(n + 1)$.

[insira sua resposta aqui]

[E-04] [Rosen, 2019]

Estime as complexidades computacionais da função $f(n) = (n \log n + n^2)(n^3 + 2)$.

[insira sua resposta aqui]

[E-05]

Verifique se a função $f(x) = 3x^3 - 7x$ é $O(x^2)$. Caso a função não seja $O(x^2)$, indique sua ordem de grandeza.

[insira sua resposta aqui]

[E-06]

Indique a ordem de grandeza da função $f(x) = x^3 + 2^x$.

[insira sua resposta aqui]

[E-07]

Indique a ordem de grandeza da função $f(x) = 3x \log x + 2$.

[insira sua resposta aqui]

[E-08]

Verifique se a função $f(x) = x! + x^3 + x^2$ é $O(x^3)$. Caso a função não seja $O(x^3)$, indique sua ordem de grandeza.

[insira sua resposta aqui]

Seção F - Indução

[F-01] [Gersting, 2004]

Encontre os primeiros 5 elementos da sequência:

(a) $S(1) = 10$

$$S(n) = S(n-1) + 10, \text{ para } n \geq 2$$

(b) $C(1) = 5$

$$C(n) = 2 C(n-1) + 5, \text{ para } n \geq 2$$

[insira sua resposta aqui]

[F-02] [Gersting, 2004]

Prove, utilizando Indução Matemática, que $1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = n(2n - 1)$, para qualquer inteiro positivo n .

[insira sua resposta aqui]

[F-03] [Gersting, 2004]

Prove, por Indução Matemática, que: $n^2 \geq 2n + 3$, para $n \geq 3$.

[insira sua resposta aqui]

[F-04]

Resolva, usando o método Expandir, Advinhar e Verificar, a relação de recorrência:

$$Z(1) = 2$$

$$Z(n) = A(n-1) - 5, \text{ para } n \geq 2$$

[insira sua resposta aqui]

[F-05]

Resolva, usando o método Expandir, Advinhar e Verificar, a relação de recorrência:

$$B(1) = -2$$

$$B(n) = 2 \cdot B(n-1), \text{ para } n \geq 2$$

[insira sua resposta aqui]

Referências

1. ROSEN, Kenneth. **Matemática Discreta e suas Aplicações**, Tradução da 6a edição em inglês. 2009. Editora Mc-Graw Hill Brasil. ISBN 978-8577260362.
2. GERSTING, Judith. **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: Um Tratamento Moderno de Matemática Discreta**. 5a edição. 2004. Editora LTC, ISBN 978-8521614227.
3. LEVIN, Oscar. **Discrete Mathematics - An Open Introduction** - 3rd edition. 2019. University of Northern Colorado. ISBN: 978-1792901690. *Disponível em:* <http://discrete.openmathbooks.org/dmoi3.html>.
4. HILLIER, Frederick, LIEBERMAN, Gerald. **Introduction to Operations Research**. 7^a edição. 2002. Editora McGraw-Hill. ISBN: 0-07-232169-5.
5. KOLMAN, Bernard; BUSBY, Robert C.; ROSS, Sharon Cutler. **Discrete mathematical structures** - 3rd edition. 1996. Editora Prentice Hall. ISBN: 978-0135159170.