Matemática Discreta

Lógica Proposicional

Felipe Augusto Lima Reis
felipe.reis@ifmg.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

Sumário

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

Introdução

Introdução

“Lógica é a base de todo raciocínio matemático e de todo raciocínio automatizado” [Rosen, 2019].

Introdução

- A lógica é fundamental tanto na Matemática pura quanto na Ciência da Computação;
- Na computação é utilizada em:
  - Desenvolvimento de circuitos computacionais;
  - Construção de softwares;
  - Verificação de correção de programas;
  - Teoria de bancos de dados;
  - Sistemas distribuídos.
- Em todas essas áreas, é necessária a criação de argumentos e, eventualmente, a prova dos mesmos.

Conceitos

Argumentos

- Argumento: sequência de afirmações com objetivo de demonstrar a validade de uma afirmação [Loureiro, 2018]
    - Um argumento será válido se as afirmações nele contidas forem válidas ou puderem ser deduzidas de afirmações anteriores;
- Um argumento é constituído de premissas e conclusões
    - Um argumento é válido se a verdade de todas as suas premissas implicam em uma conclusão verdadeira [Rosen, 2019]
    - Um argumento é correto se, e somente se, for válido e suas premissas forem verdadeiras (argumentos corretos têm conclusões corretas) [Allen and Hand, 2020].
- Premissas e conclusões de um argumento são proposições.

Proposições

- Proposição: sentença declarativa que é verdadeira ou falsa, mas não ambas [Rosen, 2019] [Gersting, 2014];
- Podem ser consideradas proposições, as seguintes sentenças:
  - A Terra é redonda.
  - A Terra é plana.
  - $2 + 2 = 4$
  - $2 + 2 = 3$
- Não podem ser consideradas proposições:
  - Qual a data da próxima prova?
  - Siga as instruções abaixo.
  - Ele é brasileiro[1].
  - $x + y = 3$

[1] Ele quem? O pronome "ele" é indefinido na frase.

Proposições

- Variáveis proposicionais: correspondem às variáveis que representam as proposições
  - Convencionalmente, utilizam-se as letras $p, q, r, s, \ldots$;
- Valores-verdade: denotado por verdadeiro (V) ou falso (F)
  - Podem ser usados também True/False, T/F ou 1/0;
- Declarações primitivas: proposições que podem ser representadas de forma mais simples
  - Também chamadas de proposições atômicas.
- Proposições compostas: proposições formadas por proposições anteriores usando operadores lógicos [Rosen, 2019].

Proposições Compostas

- As proposições compostas foram discutidas pelo matemático inglês George Boole no livro “As Leis do Pensamento” (1854)
  - Tal trabalho, seguido por outros autores, deram origem à Álgebra Booleana [Rosen, 2019];
- Operações lógicas e respectivos símbolos:
  - Negação: $\neg p$;
  - Conjunção: $\land$;
  - Disjunção: $\lor$;
  - Disjunção Exclusiva: $\oplus$
  - Implicação ou Condicional: $\rightarrow$;
  - Bicondicional: $\leftrightarrow$.

Operações Lógicas

Negação

- Considere uma proposição p;
- A **negação** de p, denotada por $\neg p$, corresponde a “não p”.

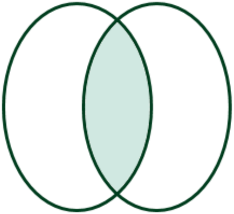
p	$\neg p$
0	1
1	0

Tabela-verdade para operação de negação.

- Exemplo:
  - p: Hoje teremos aula de Matemática Discreta.
  - $\neg p$: Hoje **não** teremos aula de Matemática Discreta.
  - $\neg p$: **Não é verdade** que hoje teremos aula de Mat. Discreta.

Conjunção

- Considere duas proposições, p e q;
- A **conjunção** de p e q, denotada por $p \wedge q$, corresponde à interseção de p e q;
- A conjunção somente é verdadeira quando ambas as proposições são verdadeiras.



Fonte: Próprio autor

Conjunção

- A operação de conjunção produz a seguinte tabela-verdade:

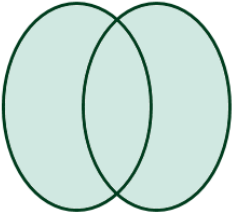
p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabela-verdade para operação de conjunção.

- Exemplo:
  - p: Hoje é sexta-feira.
  - q: Hoje teremos aula de Matemática Discreta.
  - $p \wedge q$: Hoje é sexta-feira **e** teremos aula de Mat. Discreta.

Disjunção

- Considere duas proposições, p e q;
- A **disjunção**[2] de p e q, denotada por $p \vee q$, corresponde à união de p e q;
- A disjunção é verdadeira quando ao menos uma proposição for verdadeira.



Fonte: Próprio autor

[2] Também chamada de disjunção inclusiva.

Disjunção

- A operação de disjunção produz a seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

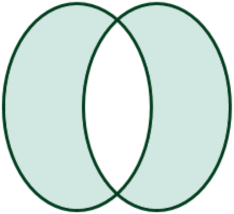
Tabela-verdade para operação de disjunção.

- Exemplo:
  - p: Alunos que sabem C resolverão a questão.
  - q: Alunos que sabem C++ resolverão a questão.
  - $p \vee q$: Alunos que sabem C **e/ou** C++ resolverão a questão[3].

[3] Normalmente utiliza-se somente o conector **ou** para a operação de disjunção. Para evitar ambiguidade e diferenciar da operação de disjunção exclusiva, foi utilizado o conector **e/ou**.

Disjunção Exclusiva

- Considere duas proposições, p e q;
- A **disjunção exclusiva** de p e q é denotada por $p \oplus q$;
- A disjunção é verdadeira se apenas uma das proposições for verdadeira
  - Se ambas forem verdadeiras, a proposição composta é falsa.



Fonte: Próprio Autor

Disjunção Exclusiva

- A disjunção exclusiva produz a seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabela-verdade para operação de disjunção exclusiva.

- Exemplo:
  - p: Hoje é domingo.
  - q: Hoje irei trabalhar.
  - $p \oplus q$: Hoje é domingo **ou** (hoje) irei trabalhar[4].

[4] Se for domingo, não irei trabalhar. Caso contrário, irei trabalhar.

Implicação

- Considere duas proposições, p e q;
- A **declaração condicional** ou **implicação** de p e q é denotada por $p \rightarrow q$ e corresponde à proposição *"se p, então q"*[5];
- A implicação é falsa quando p é verdadeira e q é falsa.
  - Para todos os outros casos, a proposição é verdadeira.
- Na implicação $p \rightarrow q$, p é chamada de premissa (antecedente ou hipótese) e q é chamada de conclusão (ou consequência) [Rosen, 2019].

[5] Em linguagem natural, a proposição também pode ser expressa como "p é suficiente para q" ou "p implica em q" ou "q, se p" ou "q sempre que p", entre outras expressões [Rosen, 2019].

Implicação

- A operação de implicação produz a seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Tabela-verdade para operação de implicação.

- Exemplo:
  - p: O aluno tem nota acima de 60 pontos.
  - q: O aluno será aprovado.
  - $p \to q$: **Se** o aluno tiver nota acima de 60 pontos, **então** será aprovado.

Implicação - Observações

- Implicação na matemática corresponde a um conceito mais genérico, independente da relação de causa e efeito.
  - A validade de uma declaração condicional depende apenas da satisfação das condições expressas em sua forma [Rosen, 2019].

- Exemplo:
  - p: Hoje é domingo.
  - q: $2 + 2 = 4$.
  - r: $2 + 2 = 5$.
  - s: Belo Horizonte é capital do Brasil.
  - $p \rightarrow q$: **Se** hoje é domingo, **então** $2 + 2 = 4$.
  - $p \rightarrow r$: **Se** hoje é domingo, **então** $2 + 2 = 5$.
  - $p \rightarrow s$: **Se** hoje é domingo, **então** BH é capital do Brasil.

Implicação - Proposições Relacionadas

- As seguintes proposições compostas são relacionadas à Implicação
  - **Oposta** de $p \rightarrow q$: $q \rightarrow p$;
  - **Contrapositiva** de $p \rightarrow q$: $\neg q \rightarrow \neg p$;
  - **Inversa** de $p \rightarrow q$: $\neg p \rightarrow \neg q$;
- As proposições Implicação e Contrapositiva são logicamente equivalentes.
- As proposições Oposta e Inversa são logicamente equivalentes.

p	q	Implicação	Oposta	Contrapositiva	Inversa
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Tabela-verdade para proposições compostas Oposta, Inversa e Contrapositiva.

Implicação - Proposições Relacionadas

- Exemplo [da Silva, 2012a]:
  - p: Hoje é Páscoa.
  - q: Amanha é segunda-feira.
  - $\neg p$: Hoje não é Páscoa.
  - $\neg q$: Amanha não é segunda-feira.
  - Implicação ($p \rightarrow q$):
    - **Se** hoje é Páscoa, **então** amanhã é segunda-feira.
  - Contrapositiva ($\neg q \rightarrow \neg p$):
    - **Se** amanhã não é segunda-feira, **então** hoje não é Páscoa.
  - Oposta ($q \rightarrow p$):
    - **Se** amanhã é segunda-feira, **então** hoje é Páscoa.
  - Inversa ($\neg p \rightarrow \neg q$):
    - **Se** hoje não é Páscoa, **então** amanhã não é segunda-feira.

Declaração Bicondicional

- Considere duas proposições, p e q;
- A **declaração bicondicional** ou **bi-implicação** de p e q é denotada por $p \leftrightarrow q$ e corresponde à proposição *"p se, e somente se, q"*[6];
- A proposição composta é verdadeira apenas quando p e q possuem o mesmo valor veritativo
  - Para valores-verdade diferentes, a proposição é falsa.

[6] Em linguagem natural, a proposição também pode ser expressa como "p é necessário e suficiente para q" [Gersting, 2014].

Declaração Bicondicional

- A declaração bicondicional produz a seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabela-verdade para operação de implicação bicondicional.

- Exemplo:
  - p: Você paga a conta à vista.
  - q: Você possui dinheiro.
  - $p \leftrightarrow q$: Você paga a conta à vista **se, e somente se,** você possui dinheiro.

Precedência de Operações

- Segundo [Rosen, 2019] e [Gersting, 2014], os operadores lógicos têm a seguinte precedência (prioridade):

Operador	[Rosen, 2019]	[Gersting, 2014]
$\neg$	1	1
$\wedge$	2	2
$\vee$	3	2
$\rightarrow$	4	4
$\leftrightarrow$	5	5

Precedência de operadores, segundo [Rosen, 2019] e [Gersting, 2014].

- Como não existe consenso, **recomenda-se o uso de parênteses**, para evitar erros [Loureiro, 2018].

Equivalências e Tautologias

Tautologia, Contradição e Contingência

Tautologia

- **Tautologia**: proposição composta que é **sempre verdadeira**, independentemente dos valores-verdade das variáveis proposicionais [Rosen, 2019];

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

Exemplo Tautologia [Rosen, 2019].

Contradição

- **Contradição**: proposição composta que é **sempre falsa**, independentemente dos valores-verdade das variáveis proposicionais [Rosen, 2019];

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
0	1	0
1	0	0

Exemplo Contradição [Rosen, 2019].

Contingência

- **Contingência**: proposição composta que não é uma tautologia nem uma contradição [Rosen, 2019];

p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$
0	1	1
1	0	0

Exemplo Contingência.

Equivalência Lógica

Equivalência Lógica

- **Equivalência Lógica**: Proposições compostas que possuem um mesmos valores-verdade para todos os casos possíveis [Rosen, 2019];
  - A notação $p \equiv q$ indica que p e q são logicamente equivalentes[7][8];
  - Proposições compostas p e q são logicamente equivalentes se a declaração bicondicional $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia [Rosen, 2019].

[7] O símbolo $\equiv$ não é um conectivo lógico e $p \equiv q$ não corresponde a uma proposição composta [Rosen, 2019].

[8] [Gersting, 2014] utiliza o símbolo $\Leftrightarrow$ para expressar a equivalencia ($p \Leftrightarrow q$).

Identificação de Equivalências Lógica

- Para avaliar se duas proposições são logicamente equivalentes, é necessária a construção de tabelas verdades para ambas as proposições
    - Se os resultados forem idênticos para cada combinação de valores, então as proposições são equivalentes [Loureiro, 2018];
    - Outra solução é verificar se as proposições correspondem a leis de equivalência bem conhecidas na literatura
        - Veremos algumas dessas leis na sequência do conteúdo.

Leis de De Morgan[9]

- As Leis de De Morgan correspondem a duas equivalências lógicas importantes:
  1. $\boxed{\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q}$
  2. $\boxed{\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q}$
- De Morgan foi o primeiro a expressar essas duas equivalências [Loureiro, 2018].

[9] Augustus De Morgan (1806-1871), matemático indo-britânico.

Leis de De Morgan - Exemplos

- Exemplo 1: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
  - p: João tem uma bola.
  - q: João tem um carrinho.

  - $p \wedge q$: João tem uma bola e tem um carrinho.
  - $\neg(p \wedge q)$: [Não] (João tem uma bola e tem um carrinho).
  - $\neg p \vee \neg q$: João não tem uma bola ou não tem um carrinho.

Leis de De Morgan - Exemplos

- Exemplo 2: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
  - p: Maria vai à festa.
  - q: João vai à festa.

  - $p \vee q$: Maria vai à festa ou João vai à festa.
  - $\neg(p \vee q)$: [Não] (Maria vai à festa ou João vai à festa).
  - $\neg p \wedge \neg q$: Maria não vai à festa e João não vai à festa

Equivalências Lógicas bem conhecidas

- As seguintes equivalências lógicas são bem conhecidas e importantes na literatura:

Propriedade	Equivalência lógica
Identidade	$p \wedge 1 \equiv p$ $p \vee 0 \equiv p$
Dominação	$p \vee 1 \equiv 1$ $p \wedge 0 \equiv 0$
Idempotente	$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$
Dupla Negação	$\neg(\neg p) \equiv p$
Comutativa	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
Implicação	$p \rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$

Propriedade	Equivalência lógica
Associativa	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Distributiva	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Leis de De Morgan	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
Absorção	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Negação ou Inversa	$p \vee \neg p \equiv 1$ $p \wedge \neg p \equiv 0$
Equivalência	$(p \leftrightarrow q) \equiv (q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)$

Fonte: Adaptado de [da Silva, 2012a]

Satisfabilidade

- Uma proposição composta é satisfatível quando é verdadeira sob algumas condições (interpretações);
  - A proposição é uma tautologia ou é uma contingência;
- Uma proposição composta é insatisfatível quando sua negação for verdadeira para todas as condições
  - Se, e somente se, sua negação for uma tautologia [Rosen, 2019] [do Lago Pereira, 2020].

Argumentos

Argumentos

- **Argumento**: sequência de afirmações para demonstrar a validade de uma declaração [da Silva, 2012a] [Rosen, 2019];
- **Forma de Argumento**: sequência de proposições compostas envolvendo variáveis proposicionais [da Silva, 2012a]
  - A forma de um argumento é diferente do argumento [Loureiro, 2018] (em lógica proposicional);
  - A substituição de proposições por variáveis proposicionais possibilita a forma de um argumento [da Silva, 2012a].

Forma de Argumento

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Um argumento possui a seguinte forma:
  - Premissa 1
  - Premissa 2
  - ...
  - Premissa N
  - Portanto, Conclusão.
- Forma de Argumento (exemplo)

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Premissas também podem ser chamadas de hipóteses ou suposições [Loureiro, 2018].

Forma de Argumento - Exemplos

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Exemplo 1:

$$\begin{array}{rlr} p \to q\text{:} & \text{Se estiver ensolarado, então João jogará futebol.} & (p \to q) \\ p\text{:} & \text{Está ensolarado.} & (p) \\ \hline \therefore q\text{:} & \text{João jogará futebol.} & (\therefore q) \end{array}$$

- Exemplo 2:

$$\begin{array}{rlr} r \to s\text{:} & \text{Se você tem arrais, então pode conduzir um barco.} & (r \to s) \\ r\text{:} & \text{Você tem arrais.} & (r) \\ \hline \therefore s\text{:} & \text{Você pode conduzir um barco.} & (\therefore s) \end{array}$$

Arrais: nome da habilitação para dirigir pequenas embarcações nos limites da navegação interior.

Argumentos Válidos e Inválidos

- **Argumento Válido**: a conclusão é verdadeira se as premissas forem todas verdadeiras. Argumento no qual a verdade de todas as suas premissas implicam em uma conclusão verdadeira [Rosen, 2019]
  - Um argumento com n premissas $p_1, p_2, ..., p_n$ e uma conclusão q é válido quando $(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \rightarrow q$ for uma tautologia [Rosen, 2019] [Gersting, 2014];
- **Argumento Inválido**: argumento no qual a verdade de uma ou mais premissas não implicam em uma conclusão verdadeira [Loureiro, 2018].

Validade da Forma de Argumentos

- **Forma de Argumento Válida**: forma na qual a conclusão mantém-se verdadeira se as premissas forem todas verdadeiras, mesmo que haja substituição de proposições particulares por variáveis proposicionais [Rosen, 2019] [Loureiro, 2018];
  - Forma genérica, aplicada a qualquer tipo de situação;
  - A verificação de validade é feita nas linhas críticas - aquelas em que todas as premissas são verdadeiras [Loureiro, 2018];
  - Pode-se utilizar o seguinte algoritmo:

Algoritmo Validade da forma de um argumento

```
1: Identifique as premissas e a conclusão da forma de argumento
2: Construa a tabela verdade, destacando as premissas e a conclusão
3: Encontre as linhas críticas da tabela
4: if em todas as linhas críticas a conclusão é verdadeira then
5:     A forma de argumento é válida
6: else
7:     A forma de argumento é inválida
8: end if
```

Fonte: [da Silva, 2012a]

Validade da Forma de Argumentos - Exemplo

- Considere o algoritmo para verificação de um argumento, visto anteriormente:
  1. Identificar premissas e a conclusão da forma do argumento;

$p \rightarrow q$: Se estiver ensolarado, então João jogará futebol. (premissa)

p: Está ensolarado. (premissa)

$\therefore q$: João jogará futebol. (conclusão)

  2. Construir a tabela verdade, destacando a forma do argumento;

		premissas				conclusão
p	q	$p \rightarrow q$	p	$(p \rightarrow q) \wedge p$	q	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

Validade da Forma de Argumentos - Exemplo

- Considere o algoritmo para verificação de um argumento
  3. Encontrar linhas críticas

		premissas				conclusão
p	q	$p \rightarrow q$	p	$(p \rightarrow q) \wedge p$	q	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	$\boxed{\mathbf{1}}$	$\boxed{\mathbf{1}}$	1	1	$\boxed{\mathbf{1}}$

  4. Se em todas as linhas críticas, a conclusão for verdadeira, então a forma do argumento é válida. Senão, a forma do argumento é inválida.
     - Como todas as linhas críticas (apenas linha 4, no exemplo) possui valor verdadeiro, a forma do argumento é válida.

Validade e Corretude

- Validade e corretude de argumentos são conceitos diferentes, conforme visto previamente;
  - Um argumento pode ser válido e incorreto;
  - Um argumento é válido se sua forma for válida
    - **A validade de um argumento segue a validade da forma do argumento [Rosen, 2019] [da Silva, 2012a]**;
  - No entanto, para que um algoritmo seja correto, é necessário que todas as premissas sejam verdadeiras
    - Argumentos corretos têm conclusões corretas [Allen and Hand, 2020].

Validade e Corretude - Exemplo [Rosen, 2019]

- Argumento

$p \rightarrow q$: Se $\sqrt{2} > (3/2)$, então $(\sqrt{2})^2 > (3/2)^2$. (premissa)

p: $\sqrt{2} > (3/2)$. (premissa*)

$\therefore q$: Logo, $(\sqrt{2})^2 > (3/2)^2$. (conclusão)

- Tabela-verdade

p	q	$p \rightarrow q$	p	$(p \rightarrow q) \land p$	q	$((p \rightarrow q) \land p) \rightarrow q$
0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

- Conclusões sobre o argumento:
  - Válido, pois sua forma é válida;
  - Incorreto, pois a premissa 2 é incorreta [da Silva, 2012b].

* Premissa propositalmente incorreta.

Regras de Inferência

Regras de Inferência

- Tabelas-verdade, como mostradas nas seções anteriores, são ferramentas úteis para provar a validade de argumentos [Rosen, 2019];
  - No entanto, elas possuem uma desvantagem: seu tamanho;
  - Para n variáveis, são necessárias 2^n linhas!
- Uma alternativa às tabelas-verdade são as Regras de Inferência.

Regras de Inferência

- **Regras de Inferência**: "formas de argumento válidas simples usadas para construir formas de argumento válidas mais complexas" [da Silva, 2012a];

- Principais Regras de Inferência, segundo [Rosen, 2019]:
  - *Modus ponens*: $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$;
  - *Modus tollens*: $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$;
  - Silogismo Hipotético: $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$;
  - Silogismo Disjuntivo: $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$;
  - Adição: $p \rightarrow (p \vee q)$;
  - Simplificação: $(p \wedge q) \rightarrow p$;
  - Conjunção: $((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$;
  - Resolução: $((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$.

Modus ponens

- *Modus ponens* ("modo que afirma") é possivelmente a regra de inferência mais intuitiva [Gersting, 2014] [Rosen, 2019];
- Pode ser resumido à forma:

$$\begin{array}{r} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

- Exemplo:

$$\begin{array}{rl} p \rightarrow q\text{: Se estiver ensolarado, então João jogará futebol.} & (p \rightarrow q) \\ p\text{: Está ensolarado.} & (p) \\ \hline \therefore q\text{: Portanto, João jogará futebol.} & (\therefore q) \end{array}$$

Modus tollens

- *Modus tollens* ("modo que nega") pode ser resumido à forma:

$$\begin{array}{r} p \to q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

- Exemplo: [Loureiro, 2018]

$$\begin{array}{rl} p \to q\text{: Se Zeus é humano então Zeus é mortal.} & (p \to q) \\ \neg q\text{: Zeus não é mortal.} & (\neg q) \\ \hline \therefore \neg p\text{: Portanto, Zeus não é humano.} & (\therefore \neg p) \end{array}$$

Silogismo Hipotético

- Pode ser resumido à forma:

$$\begin{array}{r} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

- Exemplo:

$$\begin{array}{rl} p \to q\text{: Se eu fizer os exercícios, então aprenderei a matéria.} & (p \to q) \\ q \to r\text{: Se eu aprender a matéria, então tirarei boas notas.} & (q \to r) \\ \hline \therefore p \to r\text{: Portanto, se eu fizer os exercícios, então tirarei boas notas.} & (\therefore p \to r) \end{array}$$

Silogismo Disjuntivo

- Pode ser resumido às formas:

$$\begin{array}{r} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array} \qquad \begin{array}{r} p \vee q \\ \neg q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

- Exemplo:

$$\begin{array}{rr} p \vee q\text{: Já amanheceu ou eu esqueci a luz da varanda acesa.} & (p \vee q) \\ \neg p\text{: Não amanheceu ainda.} & (\neg p) \\ \hline \therefore q\text{: Portanto, eu esqueci a luz da varanda acesa.} & (\therefore q) \end{array}$$

Adição ou Disjunção Aditiva

- Pode ser resumido à forma:

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

- Exemplo:

p:	Perdi meu celular.	(p)
$\therefore p \vee q$:	Portanto, perdi meu celular ou fui roubado.	$(\therefore p \vee q)$

Simplificação

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Pode ser resumido à forma:

$$\frac{p \land q}{\therefore p}$$

- Exemplo:

$p \land q$:	Está chovendo forte e relampejando.	$(p \land q)$
$\therefore p$:	Portanto, está chovendo forte.	$(\therefore p)$

Conjunção

- Pode ser resumido à forma:

$$\begin{array}{r} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

- Exemplo: [da Silva, 2012a]

$$\begin{array}{rr} p\text{: Eu estudo Matemática Discreta.} & (p) \\ q\text{: Eu estudo Cálculo II.} & (q) \\ \hline \therefore p \wedge q\text{: Portanto, eu estudo Matemática Discreta e Cálculo II.} & (\therefore p \wedge q) \end{array}$$

Resolução

- Pode ser resumido à forma:

$$\begin{array}{r} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$$

- Exemplo:

$$\begin{array}{rlr} p \vee q\text{:} & \text{Pedro será jogador de futebol ou irá estudar.} & (p \vee q) \\ \neg p \vee r\text{:} & \text{Pedro não será jogador de futebol ou irá trabalhar.} & (\neg p \vee r) \\ \hline \therefore q \vee r\text{:} & \text{Portanto, Pedro irá estudar ou irá trabalhar.} & (\therefore q \vee r) \end{array}$$

Regras de Inferência - Resumo

Rule of Inference	*Tautology*	*Name*
p $p \to q$ $\therefore q$	$(p \land (p \to q)) \to q$	Modus ponens
$\neg q$ $p \to q$ $\therefore \neg p$	$(\neg q \land (p \to q)) \to \neg p$	Modus tollens
$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$	$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$	Hypothetical syllogism
$p \lor q$ $\neg p$ $\therefore q$	$((p \lor q) \land \neg p) \to q$	Disjunctive syllogism
p $\therefore p \lor q$	$p \to (p \lor q)$	Addition
$p \land q$ $\therefore p$	$(p \land q) \to p$	Simplification
p q $\therefore p \land q$	$((p) \land (q)) \to (p \land q)$	Conjunction
$p \lor q$ $\neg p \lor r$ $\therefore q \lor r$	$((p \lor q) \land (\neg p \lor r)) \to (q \lor r)$	Resolution

Fonte: [Rosen, 2019]

Tabelas-Verdade (Exemplos)

Tabelas-Verdade (Exemplos)

- *Modus ponens*

		premissas			conclusão	
p	q	$p \to q$	p	$(p \to q) \land p$	$((p \to q) \land p) \to q$	q
0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

- *Modus tollens*

		premissas			conclusão	
p	q	$p \to q$	$\neg q$	$(p \to q) \land \neg q$	$((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$	$\neg p$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0

Tabelas-Verdade (Exemplos)

- Silogismo Hipotético

			premissas		conclusão	
p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$(p \rightarrow r)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Construção de Argumentos

Construção de Argumentos

- Regras de Inferência podem ser utilizadas para construção de argumentos mais complexos;
  - Muitas regras de inferência podem ser usadas durante a prova de que um argumento é válido [Rosen, 2019];
  - Argumentos podem ser, primeiramente, transformados em formas de argumentos, para facilitar a análise;
  - Em seguida, as formas de argumentos podem ser transformadas ou simplificadas;

Construção de Argumentos

- Dica: Simplifique os modelos, de cima para baixo
  - Procure, na tabela de Regra de Inferências, a regra mais próxima às duas últimas premissas analisadas[10];
  - Faça a busca consultando preferencialmente o operador lógico;
  - Caso não seja encontrada nenhuma regra de inferência que se adeque ao argumento, utilize também a tabela de Regras de Equivalências, para transformação prévia.

[10] A primeira premissa, frequentemente, é analisada individualmente.

Construção de Argumentos

- Exemplo: [Rosen, 2019]
  - p: Está ensolarado esta tarde.
  - q: Está mais frio que ontem.
  - r: Nós iremos nadar no rio.
  - s: Nós iremos andar de barco.
  - t: Estaremos em casa antes de anoitecer.

  - $\neg p \land q$: Não está ensolarado esta tarde e está mais frio que ontem.
  - $r \rightarrow p$: Se nós iremos nadar no rio, então está ensolarado esta tarde.
  - $\neg r \rightarrow s$: Se nós não iremos nadar no rio, então nós iremos andar de barco.
  - $s \rightarrow t$: Se nós iremos andar de barco então estaremos em casa antes de anoitecer.
  - $\therefore$?: (qual a conclusão?)

Construção de Argumentos

- Exemplo: [Rosen, 2019]
  - p: Está ensolarado esta tarde.
  - q: Está mais frio que ontem.
  - r: Nós iremos nadar no rio.
  - s: Nós iremos andar de barco.
  - t: Estaremos em casa antes de anoitecer.

  - $\neg p \wedge q$: Não está ensolarado esta tarde e está mais frio que ontem.
  - $r \rightarrow p$: Se nós iremos nadar no rio, então está ensolarado esta tarde.
  - $\neg r \rightarrow s$: Se nós não iremos nadar no rio, então nós iremos andar de barco.
  - $s \rightarrow t$: Se nós iremos andar de barco então estaremos em casa antes de anoitecer.
  - $\therefore t$: Logo, estaremos em casa antes do anoitecer.

Construção de Argumentos

- Dedução do Exemplo: [Rosen, 2019]

  1. $\neg p \wedge q$: (premissa)
  2. $\neg p$: (simplificação de (1))
  3. $r \rightarrow p$: (premissa)
  4. $\neg r$: (*modus tollens* usando (2) e (3))
  5. $\neg r \rightarrow s$: (premissa)
  6. s: (*modus ponens* usando (4) e (5))
  7. $s \rightarrow t$: (premissa)
  8. $\therefore t$: (*modus ponens* usando (6) e (7))

Referências I

Allen, C. and Hand, M. (2020).
Cartilha lógica.
Disponível em https://www.unicamp.br/ joaojose/cartilhalogica.pdf.

da Silva, D. M. (2012a).
Notas de Aula 1: Lógica, Predicados, Quantificadores e Inferência.
IFMG - Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Formiga.

da Silva, D. M. (2012b).
Slides de aula.

do Lago Pereira, S. (2020).
Lógica proposicional.
Disponível em https://www.ime.usp.br/ slago/ia-2.pdf.

Gersting, J. L. (2014).
Mathematical Structures for Computer Science.
W. H. Freeman and Company, 7 edition.

Levin, O. (2019).
Discrete Mathematics - An Open Introduction.
University of Northern Colorado, 7 edition.
[Online] Disponível em http://discrete.openmathbooks.org/dmoi3.html.

Loureiro, A. A. F. (2018).
Matemática discreta - slides de aula.
Disponível em https://homepages.dcc.ufmg.br/ loureiro/md.html.

Referências II

Rosen, K. H. (2019).
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill, 8 edition.