Matemática Discreta

Relações

Felipe Augusto Lima Reis
felipe.reis@ifmg.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

Sumário

Introdução

Introdução

- Relações podem ocorrer em diferentes cenários, tanto na Matemática / Computação, quanto no cotidiano
  - Em Matemática, podemos traçar relações entre números inteiros, relações entre funções, entre outras;
  - No cotidiano, podemos traçar relações entre empresas e funcionários, disciplinas e alunos, relações entre indivíduos, dentre outras;
- Relações como as previamente citadas podem ser modeladas usando conceitos matemáticos;
  - Técnicas computacionais possibilitam representar muitos desses tipos de relações.

Introdução

- Nesta seção, aprenderemos:
  - Identificar pares ordenados relacionados por relações binárias;
  - Avaliar propriedades reflexivas, transitivas, simétricas e antissimétricas em relações binárias;
  - Analisar fechos transitivos, reflexivos e simétricos em relações binárias;
  - Desenhar e analisar diagramas PERT;
  - Aprender a escrever consultas relacionais em bancos de dados, usando SQL[1].

[1] Somente serão desenvolvidas consultas em bancos de dados, para aplicação de lógica e relações. Teoria de Banco de Dados será estudada posteriormente, em disciplina própria.

CONCEITOS

Relações Binárias

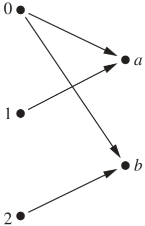
- Definição: Uma relação binária entre dois conjuntos A e B é um subconjunto de $A \times B$ [Rosen, 2019][2]
- Para expressar uma relação entre dois conjuntos, podemos usar pares ordenados de elementos desse conjunto;
  - Uma relação binária, pode ser descrita como um conjunto R de pares ordenados de A para B (a, b);
  - Podemos dizer que a está relacionado a b por R [Rosen, 2019];
- Notação: $\boxed{a \ R \ b \leftrightarrow (a, b) \in R}$[3]
  - Negação: $a \not R \ b \leftrightarrow (a, b) \notin R$

[2] O subconjunto $A \times B$ corresponde a um produto cartesiano de A e B.

[3] [Gersting, 2014] utiliza a notação $a \rho b \leftrightarrow (a, b) \in \rho$.

Relações Binárias - Exemplo [Rosen, 2019]

- Suponha dois conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{a, b\}$. Suponha também a relação $R = \{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$;
  - Relações possíveis: $0 \; R \; a$, $0 \; R \; b$, $1 \; R \; a$, $2 \; R \; b$;
  - Relações não possíveis: $1 \not R \; b$, $2 \not R \; a$.



R	a	b
0	×	×
1	×	
2		×

Fonte: [Rosen, 2019]

Auto-Relações

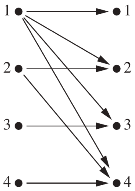
- Definição: Uma relação de um único conjunto A é dada de A para A, ou seja, um subconjunto de $A \times A$ [Rosen, 2019].
- Exemplo:
  - Suponha um conjunto inteiro $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Suponha a relação $R = \{(a, b) \mid b \div a \in \mathbb{Z}\}$.
    - $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$.

Auto-Relações

- Definição: Uma relação de um único conjunto A é dada de A para A, ou seja, um subconjunto de $A \times A$ [Rosen, 2019].
- Exemplo:
  - Suponha um conjunto inteiro $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Suponha a relação $R = \{(a, b) \mid b \div a \ \in \mathbb{Z}\}$.
    - $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$.

Auto-Relações

- Definição: Uma relação de um único conjunto A é dada de A para A, ou seja, um subconjunto de $A \times A$ [Rosen, 2019].
- Exemplo:
  - Suponha um conjunto inteiro $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Suponha a relação $R = \{(a, b) \mid b \div a \ \in \mathbb{Z}\}$.
    - $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$.



R	1	2	3	4
1	×	×	×	×
2		×		×
3			×	
4				×

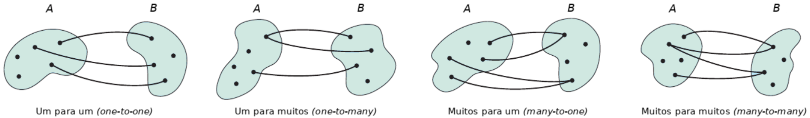
Fonte: [Rosen, 2019]

Relações *n*-árias

- Definição: Dado n conjuntos $S_1, S_2, ..., S_n$, para $n > 2$, uma relação n-ária é um subconjunto de $S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ [Gersting, 2014]
    - Os conjuntos $S_1, S_2, ..., S_n$ são chamados de domínio da relação e n é chamado de grau [Rosen, 2019].

Tipos de Relações

- As relações podem ser divididas nos seguintes tipos [Gersting, 2014][4]:
    - Um para um: elementos de A e B aparecem uma vez na relação;
    - Um para muitos: elementos de A aparecem mais de uma vez;
    - Muitos para um: elementos de B aparecem múltiplas vezes;
    - Muitos para muitos: elementos de A e B aparecem múltiplas vezes.



Fonte: Adaptado de [Gersting, 2014].

[4] Esses tipos de relações serão vistos frequentemente nas disciplinas de Eng. de Software e/ou Banco de Dados.

Cardinalidade

- A cardinalidade de um produto cartesiano $A \times A$ é dada por:

$$\boxed{|A \times A| = |A|^2 = n^2}$$

- Uma relação R é um subconjunto do produto cartesiano
  - Considerando relações binárias, temos:

$$\boxed{|R| = 2^{(n^2)}}$$

Propriedades das Relações Binárias

Relação Reflexiva

- Definição: Uma relação R para um conjunto S é reflexiva se, para cada elemento $x \in S$, existir $(x, x) \in R$ [Rosen, 2019] [Gersting, 2014]
  - Não é necessário que o conjunto seja formado apenas por elementos reflexivos;
  - No entanto, todas as situações reflexivas devem estar no conjunto.
- Definição Formal: $\forall x \ (x \in S \rightarrow (x, x) \in R)$;
- Definição Informal: Todo elemento x está relacionado a si mesmo [da Silva, 2012].

Relação Reflexiva - Exemplo

- Considere as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$
  - $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,1)\}$;
  - $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$;
  - $R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}$;
  - $R_4 = \{(1,2), (2,1), (3,1), (3,2), (3,3)\}$;
  - $R_5 = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$;
  - $R_6 = \{(2,3), (3,2)\}$;
  - $R_7 = \{(1,2)\}$.
- Quais dessas relações são reflexivas?
  - $R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}$;

Relação Reflexiva - Exemplo

- Considere as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$
  - $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,1)\}$;
  - $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$;
  - $R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}$;
  - $R_4 = \{(1,2), (2,1), (3,1), (3,2), (3,3)\}$;
  - $R_5 = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$;
  - $R_6 = \{(2,3), (3,2)\}$;
  - $R_7 = \{(1,2)\}$.
- Quais dessas relações são reflexivas?
  - $R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}$;

Relação Simétrica

- Definição: Uma relação R para um conjunto S é simétrica se existir $(y, x) \in R$ sempre que existir $(x, y) \in R$, para todo $x, y \in S$ [Rosen, 2019] [Gersting, 2014]
  - É necessário que sempre que haja um elemento simétrico a outro elemento do conjunto.
- Definição Formal[5]: $\forall x \forall y \; ((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R)$.
- Definição Informal: Se x está relacionado a y, então y está relacionado a x [da Silva, 2012].

[5] Notação completa: $\forall x \forall y((x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in R) \rightarrow (y, x) \in R)$.

Relação Simétrica - Exemplo

- Considere as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$
  - $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,1)\}$;
  - $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$;
  - $R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}$;
  - $R_4 = \{(1,2), (2,1), (3,1), (3,2), (3,3)\}$;
  - $R_5 = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$;
  - $R_6 = \{(2,3), (3,2)\}$;
  - $R_7 = \{(1,2)\}$.
- Quais dessas relações são simétricas?
  - $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$;
  - $R_6 = \{(2,3), (3,2)\}$.

Relação Simétrica - Exemplo

- Considere as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$
  - $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,1)\}$;
  - $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$;
  - $R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}$;
  - $R_4 = \{(1,2), (2,1), (3,1), (3,2), (3,3)\}$;
  - $R_5 = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$;
  - $R_6 = \{(2,3), (3,2)\}$;
  - $R_7 = \{(1,2)\}$.
- Quais dessas relações são simétricas?
  - $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$;
  - $R_6 = \{(2,3), (3,2)\}$.

Relação Antissimétrica

- Definição: Uma relação R para um conjunto S é antissimétrica se, para $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, então $x = y$, para todo $x, y \in S$ [Rosen, 2019] [Gersting, 2014]
  - A simetria somente ocorre para $a = b$
    - Caso existam outras simetrias, a relação não é antissimétrica;
  - Relações simétricas e antissimétricas não são necessariamente opostas;
- Definição Formal[6]: $\forall x \forall y\ (((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \rightarrow x = y)$
- Definição Informal: Se x está relacionado a y e y está relacionado a x, então $x = y$ [da Silva, 2012].

[6] Notação completa: $\forall x \forall y((x \in S \wedge y \in S \wedge (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \rightarrow x = y)$.

Relação Antissimétrica - Exemplo

- Considere as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$
  - $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1)\}$;
  - $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$;
  - $R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$;
  - $R_4 = \{(1,2),(2,1),(3,1),(3,2),(3,3)\}$;
  - $R_5 = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$;
  - $R_6 = \{(2,3),(3,2)\}$;
  - $R_7 = \{(1,2)\}$.

- Quais dessas relações são antissimétricas?
  - $R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$;
  - $R_5 = \{(1,2),(3,2)\}$;
  - $R_7 = \{(1,2)\}$.

R_1, R_2 e R_4 não são antissimétricas pois existe $(1,2)$ e $(2,1)$. R_6 não é antissimétrica pois existe $(2,3)$ e $(3,2)$.

Relação Antissimétrica - Exemplo

- Considere as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$
  - $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,1)\}$;
  - $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$;
  - $R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}$;
  - $R_4 = \{(1,2), (2,1), (3,1), (3,2), (3,3)\}$;
  - $R_5 = \{(1,2), (2,3), (1,3)\}$;
  - $R_6 = \{(2,3), (3,2)\}$;
  - $R_7 = \{(1,2)\}$.

- Quais dessas relações são antissimétricas?
  - $R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}$;
  - $R_5 = \{(1,2), (3,2)\}$;
  - $R_7 = \{(1,2)\}$.

R_1, R_2 e R_4 não são antissimétricas pois existe $(1,2)$ e $(2,1)$. R_6 não é antissimétrica pois existe $(2,3)$ e $(3,2)$.

Relação Transitiva

- Definição: Uma relação R para um conjunto S é transitiva se, sempre que $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$, para todo $x, y, z \in S$ [Rosen, 2019] [Gersting, 2014];
- Definição Formal[7]:
$\forall x \forall y \forall z \; ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R)$;
- Definição Informal: Se x está relacionado a y e y está relacionado a z, então x está relacionado a z [da Silva, 2012].

[7] Notação completa: $\forall x \forall y \forall z ((x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S \wedge (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \rightarrow (x, z) \in R)$.

Relação Transitiva - Exemplo

- Considere as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$
  - $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1)\}$;
  - $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$;
  - $R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$;
  - $R_4 = \{(1,2),(2,1),(3,1),(3,2),(3,3)\}$;
  - $R_5 = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$;
  - $R_6 = \{(2,3),(3,2)\}$;
  - $R_7 = \{(1,2)\}$.
- Quais dessas relações são transitivas?
  - $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$;
  - $R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$;
  - $R_5 = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$;
  - $R_7 = \{(1,2)\}$.

R_1 não é transitiva pois existe $(2,1)$ e $(1,2)$, mas não existe $(2,2)$. R_4 não é transitiva pois existe $(1,2)$ e $(2,1)$, mas não existe $(2,2)$. R_6 não é transitiva pois não existe $(2,2)$.

Relação Transitiva - Exemplo

- Considere as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$
  - $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1)\}$;
  - $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$;
  - $R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$;
  - $R_4 = \{(1,2),(2,1),(3,1),(3,2),(3,3)\}$;
  - $R_5 = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$;
  - $R_6 = \{(2,3),(3,2)\}$;
  - $R_7 = \{(1,2)\}$.
- Quais dessas relações são transitivas?
  - $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$;
  - $R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$;
  - $R_5 = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$;
  - $R_7 = \{(1,2)\}$.

R_1 não é transitiva pois existe $(2,1)$ e $(1,2)$, mas não existe $(2,2)$. R_4 não é transitiva pois existe $(1,2)$ e $(2,1)$, mas não existe $(2,2)$. R_6 não é transitiva pois não existe $(2,2)$.

Relação Transitiva - Exemplo [Rosen, 2019]

- Considere as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$
  - $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$
  - $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
  - $R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
  - $R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$
  - $R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$
  - $R_6 = \{(3,4)\}$
- Quais dessas relações são transitivas?
  - $R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$
  - $R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$
  - $R_6 = \{(3,4)\}$.

R_1 não é transitiva pois existe $(3,4)$ e $(4,1)$, mas não existe $(3,1)$. R_2 não é transitiva pois existe $(2,1)$ e $(1,2)$, mas não existe $(2,2)$. R_3 não é transitiva pois existe $(4,1)$ e $(1,2)$, mas não existe $(4,2)$.

Relação Transitiva - Exemplo [Rosen, 2019]

- Considere as relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$
  - $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$
  - $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
  - $R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
  - $R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$
  - $R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$
  - $R_6 = \{(3,4)\}$
- Quais dessas relações são transitivas?
  - $R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$
  - $R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$
  - $R_6 = \{(3,4)\}$.

R_1 não é transitiva pois existe $(3,4)$ e $(4,1)$, mas não existe $(3,1)$. R_2 não é transitiva pois existe $(2,1)$ e $(1,2)$, mas não existe $(2,2)$. R_3 não é transitiva pois existe $(4,1)$ e $(1,2)$, mas não existe $(4,2)$.

Composição de Relações

Composição de Relações

- Definição: Seja R_1 uma relação de um conjunto A para B e R_2 uma relação do conjunto B para C. A relação composta de R_1 e R_2, denotada por $R_2 \circ R_1$, consiste em pares ordenados (a, c) onde $a \in A$ e $c \in C$, no qual existe um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in R_1$ e $(b, c) \in R_2$ [Rosen, 2019];
- Definição Formal: $R_2 \circ R_1 = ((a, c)|(a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2)$.

Composição de Relações - Exemplo [Rosen, 2019]

- Considere os conjuntos
  - $A = \{1, 2, 3\}$;
  - $B = \{1, 2, 3, 4\}$;
  - $C = \{0, 1, 2\}$;
- Considere as relações
  - $R_{AB} = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$;
  - $R_{BC} = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$;
- Qual a relação composta entre R_{AB} e R_{BC}?

Composição de Relações - Exemplo [Rosen, 2019]

- Objetivo: Encontrar $R_2 \circ R_1$ ($R_{BC} \circ R_{AB}$);
- Relações (a partir do enunciado):
  - $R_{AB} = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$;
  - $R_{BC} = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$;
- Sequência:
  1. $R_{AB1} = (1,1), R_{BC1} = (1,0), R_{BC1} \circ R_{AB1} = (1,0)$;
  2. $R_{AB2} = (1,4), R_{BC5} = (4,1), R_{BC5} \circ R_{AB2} = (1,1)$;
  3. $R_{AB3} = (2,3), R_{BC3} = (3,1), R_{BC3} \circ R_{AB3} = (2,1)$;
  4. ...
- Conclusão:
  $R_{BC} \circ R_{AB} = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}$.

Composição de Relações - Exemplo [Rosen, 2019]

- Objetivo: Encontrar $R_2 \circ R_1$ ($R_{BC} \circ R_{AB}$);
- Relações (a partir do enunciado):
  - $R_{AB} = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$;
  - $R_{BC} = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$;
- Sequência:
  1. $R_{AB1} = (1,1), R_{BC1} = (1,0), R_{BC1} \circ R_{AB1} = (1,0)$;
  2. $R_{AB2} = (1,4), R_{BC5} = (4,1), R_{BC5} \circ R_{AB2} = (1,1)$;
  3. $R_{AB3} = (2,3), R_{BC3} = (3,1), R_{BC3} \circ R_{AB3} = (2,1)$;
  4. ...
- Conclusão:
  $R_{BC} \circ R_{AB} = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}$.

Composição de Relações - Exemplo [Rosen, 2019]

- Objetivo: Encontrar $R_2 \circ R_1$ $(R_{BC} \circ R_{AB})$;
- Relações (a partir do enunciado):
  - $R_{AB} = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$;
  - $R_{BC} = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$;
- Sequência:
  1. $R_{AB1} = (1,1), R_{BC1} = (1,0), R_{BC1} \circ R_{AB1} = (1,0)$;
  2. $R_{AB2} = (1,4), R_{BC5} = (4,1), R_{BC5} \circ R_{AB2} = (1,1)$;
  3. $R_{AB3} = (2,3), R_{BC3} = (3,1), R_{BC3} \circ R_{AB3} = (2,1)$;
  4. ...
- Conclusão:
  $R_{BC} \circ R_{AB} = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}$.

Composição de Relações - Exemplo [Rosen, 2019]

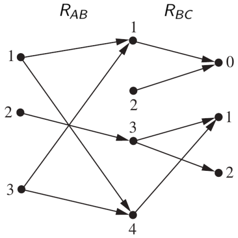
- Objetivo: Encontrar $R_2 \circ R_1$ $(R_{BC} \circ R_{AB})$;
- Relações (a partir do enunciado):
  - $R_{AB} = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$;
  - $R_{BC} = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$;
- Sequência:
  1. $R_{AB1} = (1,1), R_{BC1} = (1,0), R_{BC1} \circ R_{AB1} = (1,0)$;
  2. $R_{AB2} = (1,4), R_{BC5} = (4,1), R_{BC5} \circ R_{AB2} = (1,1)$;
  3. $R_{AB3} = (2,3), R_{BC3} = (3,1), R_{BC3} \circ R_{AB3} = (2,1)$;
  4. ...
- Conclusão:
  $R_{BC} \circ R_{AB} = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}$.

Composição de Relações - Exemplo [Rosen, 2019]

- Resultado analítico:

$$R_{BC} \circ R_{AB} = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}$$

- Resultado visual:



$1 \to 1 \to 0$	$(1, 0)$
$1 \to 4 \to 1$	$(1, 1)$
$2 \to 3 \to 1$	$(2, 1)$
$2 \to 3 \to 2$	$(2, 2)$
$3 \to 1 \to 0$	$(3, 0)$
$3 \to 4 \to 1$	$(3, 1)$

Fonte: Adaptado de [Rosen, 2019]

Potências de uma Relação

- Definição: Seja R uma relação em um conjunto. As potências R^n, onde $n = 1, 2, 3, \ldots$ são definidas recursivamente como: [Rosen, 2019]

$$\boxed{R^1 = R \quad \text{e} \quad R^{(n+1)} = R^n \circ R}$$

- Exemplo: [Rosen, 2019]
  - Seja $R = \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,3)\}$. Encontre R^2 e R^3.
    - $R^2 = R \circ R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,2)\}$
    - $R^3 = R^2 \circ R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\}$

Potências de uma Relação

- Definição: Seja R uma relação em um conjunto. As potências R^n, onde $n = 1, 2, 3, \ldots$ são definidas recursivamente como: [Rosen, 2019]

$$\boxed{R^1 = R \quad \text{e} \quad R^{(n+1)} = R^n \circ R}$$

- Exemplo: [Rosen, 2019]
  - Seja $R = \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,3)\}$. Encontre R^2 e R^3.
    - $R^2 = R \circ R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,2)\}$
    - $R^3 = R^2 \circ R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\}$

Potências de uma Relação

- Definição: Seja R uma relação em um conjunto. As potências R^n, onde $n = 1, 2, 3, ...$ são definidas recursivamente como: [Rosen, 2019]

$$\boxed{R^1 = R \quad \text{e} \quad R^{(n+1)} = R^n \circ R}$$

- Exemplo: [Rosen, 2019]
  - Seja $R = \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,3)\}$. Encontre R^2 e R^3.
    - $R^2 = R \circ R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,2)\}$
    - $R^3 = R^2 \circ R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\}$

Operações (Composição de Relações)

- Operações também podem ser aplicadas às relações:
  - União: $R1 \cup R2$;
  - Interseção: $R1 \cap R2$;
  - Diferença: $R1 - R2$;
  - Complemento: $\overline{R1}$.

- Exemplo: [Rosen, 2019]
  - Considere as relações $R1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ e $R2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$. Encontre $R1 \cup R2$, $R1 \cap R2$, $R1 - R2$ e $R2 - R1$.
    - $R1 \cup R2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(3,3)\}$
    - $R1 \cap R2 = \{(1,1)\}$
    - $R1 - R2 = \{(2,2),(3,3)\}$
    - $R2 - R1 = \{(1,2),(1,3),(1,4)\}$

Operações (Composição de Relações)

- Operações também podem ser aplicadas às relações:
  - União: $R1 \cup R2$;
  - Interseção: $R1 \cap R2$;
  - Diferença: $R1 - R2$;
  - Complemento: $\overline{R1}$.

- Exemplo: [Rosen, 2019]
  - Considere as relações $R1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ e $R2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$. Encontre $R1 \cup R2$, $R1 \cap R2$, $R1 - R2$ e $R2 - R1$.
    - $R1 \cup R2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(3,3)\}$
    - $R1 \cap R2 = \{(1,1)\}$
    - $R1 - R2 = \{(2,2),(3,3)\}$
    - $R2 - R1 = \{(1,2),(1,3),(1,4)\}$

Operações (Composição de Relações)

- Operações também podem ser aplicadas às relações:
  - União: $R1 \cup R2$;
  - Interseção: $R1 \cap R2$;
  - Diferença: $R1 - R2$;
  - Complemento: $\overline{R1}$.

- Exemplo: [Rosen, 2019]
  - Considere as relações $R1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ e $R2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$. Encontre $R1 \cup R2$, $R1 \cap R2$, $R1 - R2$ e $R2 - R1$.
    - $R1 \cup R2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(3,3)\}$
    - $R1 \cap R2 = \{(1,1)\}$
    - $R1 - R2 = \{(2,2),(3,3)\}$
    - $R2 - R1 = \{(1,2),(1,3),(1,4)\}$

Representações

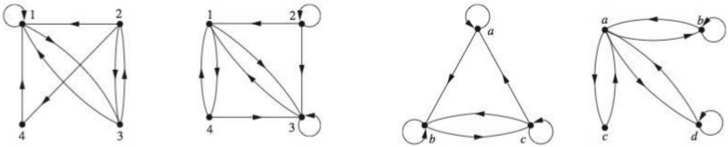
Representações de Relações

- Existem diferentes formas de representação de uma relação[8]
  - Pares ordenados;
  - Matrizes de zero-ou-um;
  - Grafos direcionados (dígrafos).

[8] Nesta seção, todas as relações apresentadas correspondem a relações binárias.

Representações usando Dígrafos[9]

- Definição Dígrafo: Um dígrafo consiste em um conjunto V de vértices (ou nós) junto a um conjunto E de pares ordenados, chamados de arestas [Rosen, 2019]
  - Em uma aresta (a, b), o vértice a é chamado de inicial e o vértice b é chamado de terminal;
  - Uma aresta (a, a) é chamada de laço (ou *loop*).

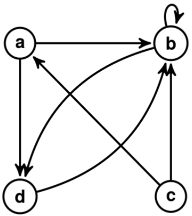


Fonte: [Rosen, 2019]

[9] Também chamados de grafos direcionados, grafos orientados ou grafos dirigidos.

Representações Dígrafos - Exemplo [da Silva, 2012]

- Suponha um conjunto $A = \{a, b, c, d\}$.
- Relação: $R = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b), (d, b)\}$
- Representação:



Fonte: [da Silva, 2012]

Representações usando Matrizes

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Considere conjuntos $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$
- Uma relação R pode ser representada por uma matriz $M_R = [m_{ij}]$, onde:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, se\ (a_i, b_j) \in R \\ 0, se\ (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

- Exemplo:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

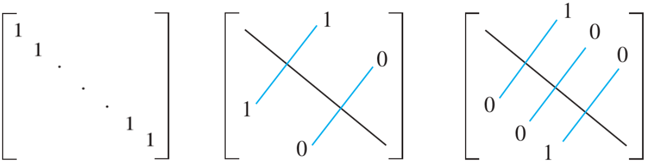
Representações Matrizes - Exemplo [da Silva, 2012]

- Suponha dois conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$. A relação entre eles é dada por $R = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge a > b\}$.
- Resultado: $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$
- Representação:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Representações Matrizes - Propriedades

- As propriedades reflexivas, simétricas e antissimétricas podem ser vistas na figura abaixo:



(a) Reflexiva (b) Simétrica (c) Antissimétrica

Fonte: Adaptado de [Rosen, 2019]

Fecho

Fecho de uma Relação

- Definição: Uma relação binária R^* em um conjunto S é o fecho de uma relação R em S, com respeito a uma à propriedade P, se:
  1. R^* respeitar a propriedade P;
  2. $R \subseteq R^*$;
  3. R^* é subconjunto de qualquer outra relação S que inclua R e satisfaça P [Gersting, 2014].

Propriedades P: reflexiva, simétrica, antissimétrica, transitiva, etc.

Fecho vem da expressão *closure* em inglês. Não confundir com fechamento.

Fecho de uma Relação

- Definição Informal:
  - Suponha que R é uma relação binária sobre um conjunto S e não possua uma propriedade P;
  - Suponha "extensão" da relação R, chamada de R^*, que contenha P;
  - R^* é o menor conjunto que conterá os pares de R, tal que $R \subseteq R^*$, de modo a satisfazer a propriedade P;
  - Se existir uma relação R' que contém R e possui P, então $R^* \subseteq R'$;
  - R^* é chamado de fecho de R [Rosen, 2019].
- Obs.: Se uma relação R já possui a propriedade P, então ela é o seu próprio fecho [da Silva, 2012].

Um fecho R^* não contém somente os itens que faltam na relação. O fecho será composto pela relação R acrescido de itens necessários para que seja respeitada uma propriedade P.

Tipos de Fecho

- Tipos de fechos existentes:
  - Fecho Reflexivo;
  - Fecho Simétrico;
  - Fecho Transitivo;

Fecho Reflexivo

- Definição: O fecho reflexivo R^* de uma relação binária R em A corresponde a $R^* = R \cup \{(x, x) \mid x \in A\}$ [da Silva, 2012].
- Exemplo: [Rosen, 2019]
  - Suponha um conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e uma relação não reflexiva $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$.
  - O objetivo é encontrar uma relação R^* que complemente R e torne a relação reflexiva;
  - Temos que: $R^* = R \cup \{(x, x) \mid x \in A\}$;
  - Logo, $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$;
  - R^* deve ser a menor relação que atenda à propriedade.

Fecho Reflexivo

- Definição: O fecho reflexivo R^* de uma relação binária R em A corresponde a $R^* = R \cup \{(x, x) \mid x \in A\}$ [da Silva, 2012].
- Exemplo: [Rosen, 2019]
  - Suponha um conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e uma relação não reflexiva $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$.
  - O objetivo é encontrar uma relação R^* que complemente R e torne a relação reflexiva;
  - Temos que: $R^* = R \cup \{(x, x) \mid x \in A\}$;
  - Logo, $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$;
  - R^* deve ser a menor relação que atenda à propriedade.

Fecho Simétrico

- Definição: O fecho simétrico R^* de uma relação R em A corresponde a $R^* = R \cup \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$ [da Silva, 2012].
- Exemplo: [Rosen, 2019]
  - Suponha um conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e uma relação não reflexiva $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$.
  - O objetivo é encontrar uma relação R^* que complemente R e torne a relação simétrica;
  - Temos que: $R^* = R \cup \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$;
  - Logo, $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2), (3, 1)\}$.

Lembrete: pela definição, um conjunto é uma coleção não ordenada de objetos distintos [Rosen, 2019].

Fecho Simétrico

- Definição: O fecho simétrico R^* de uma relação R em A corresponde a $R^* = R \cup \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$ [da Silva, 2012].
- Exemplo: [Rosen, 2019]
  - Suponha um conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e uma relação não reflexiva $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$.
  - O objetivo é encontrar uma relação R^* que complemente R e torne a relação simétrica;
  - Temos que: $R^* = R \cup \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$;
  - Logo, $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 2), (3, 1)\}$.

Lembrete: pela definição, um conjunto é uma coleção não ordenada de objetos distintos [Rosen, 2019].

Fecho Transitivo

- Definição: O fecho transitivo R^* de uma relação R em A que satisfaz: [da Silva, 2012]
  1. R^* respeitar a propriedade transitiva P;
  2. $R \subseteq R^*$;
  3. R^* é subconjunto de qualquer relação S que inclua R e satisfaça P.
- Ao contrário dos fechos reflexivos e simétricos, o fecho transitivo pode exigir uma análise mais elaborada;
- O fecho transitivo pode ser obtido pelo algoritmo abaixo:

$R^* \leftarrow R$
while (R^* não for uma relação transitiva) **do**
    Inspecionar os pares ordenados de R^*
    Adicionar novos pares em R^* se necessário
end while
return R^*

Fonte: [da Silva, 2012]

Fecho Transitivo

- Exemplo: [da Silva, 2012]
  - Suponha um conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e uma relação não transitiva $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$.
  - Devemos executar o algoritmo, seguindo os passos:
    1. $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (2, 1)\}$;
    2. $R^* = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (2, 1), (2, 2)\}$;
  - Após a execução do algoritmo, R^* é uma relação transitiva e $R \subseteq R^*$.

Relações de Equivalência

Relações de Equivalência

- Definição: Uma relação binária em um conjunto A é uma relação de equivalência se for reflexiva, simétrica e transitiva
  - Dois elementos a e b relacionados por uma relação de equivalência são chamados equivalentes e denotados por $a \sim b$;
  - Para que a equivalência entre elementos tenha sentido, cada elemento deve ser equivalente a si mesmo [Rosen, 2019].

Relações Equivalência - Ex. Adapt. [Rosen, 2019]

- Seja R uma relação sobre o conjuntos dos números inteiros tal que aRb sse[10] $a - b \in \mathbb{Z}$. A relação R é equivalente?
  - Reflexiva?
    - Supor aRa;
    - $a - a = 0, \forall a \in \mathbb{Z}$, onde $0 \in \mathbb{Z}$. Logo, R é reflexiva.
  - Simétrica?
    - Supor aRb;
    - $(a - b = k \wedge b - a = \text{-}k)$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}$. Logo, R é simétrica.
  - Transitiva?
    - Supor aRb, bRc e $((a - b) \in \mathbb{Z} \wedge (b - c) \in \mathbb{Z})$;
    - Temos $(a - c) = (a - b) + (b - c), \forall a \forall b \forall c \in \mathbb{Z}$. Logo, R é transitiva.
  - Como R é reflexiva, simétrica e transitiva, logo é equivalente.

[10] Se e somente se.

Relações Equivalência - Ex. Adapt. [Rosen, 2019]

- Seja R uma relação sobre o conjuntos dos números inteiros tal que aRb sse[10] $a - b \in \mathbb{Z}$. A relação R é equivalente?
  - Reflexiva?
    - Supor aRa;
    - $a - a = 0, \forall a \in \mathbb{Z}$, onde $0 \in \mathbb{Z}$. Logo, R é reflexiva.
  - Simétrica?
    - Supor aRb;
    - $(a - b = k \wedge b - a = \text{-}k)$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}$. Logo, R é simétrica.
  - Transitiva?
    - Supor aRb, bRc e $((a - b) \in \mathbb{Z} \wedge (b - c) \in \mathbb{Z})$;
    - Temos $(a - c) = (a - b) + (b - c), \forall a \forall b \forall c \in \mathbb{Z}$. Logo, R é transitiva.
  - Como R é reflexiva, simétrica e transitiva, logo é equivalente.

[10] Se e somente se.

Relações Equivalência - Ex. Adapt. [Rosen, 2019]

- Seja R uma relação sobre o conjuntos dos números inteiros tal que aRb sse[10] $a - b \in \mathbb{Z}$. A relação R é equivalente?
  - Reflexiva?
    - Supor aRa;
    - $a - a = 0, \forall a \in \mathbb{Z}$, onde $0 \in \mathbb{Z}$. Logo, R é reflexiva.
  - Simétrica?
    - Supor aRb;
    - $(a - b = k \wedge b - a = \text{-}k)$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}$. Logo, R é simétrica.
  - Transitiva?
    - Supor aRb, bRc e $((a - b) \in \mathbb{Z} \wedge (b - c) \in \mathbb{Z})$;
    - Temos $(a - c) = (a - b) + (b - c), \forall a \forall b \forall c \in \mathbb{Z}$. Logo, R é transitiva.
  - Como R é reflexiva, simétrica e transitiva, logo é equivalente.

[10] Se e somente se.

Relações Equivalência - Ex. Adapt. [Rosen, 2019]

- Seja R uma relação sobre o conjuntos dos números inteiros tal que aRb sse[10] $a - b \in \mathbb{Z}$. A relação R é equivalente?
  - Reflexiva?
    - Supor aRa;
    - $a - a = 0, \forall a \in \mathbb{Z}$, onde $0 \in \mathbb{Z}$. Logo, R é reflexiva.
  - Simétrica?
    - Supor aRb;
    - $(a - b = k \wedge b - a = \text{-}k)$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}$. Logo, R é simétrica.
  - Transitiva?
    - Supor aRb, bRc e $((a - b) \in \mathbb{Z} \wedge (b - c) \in \mathbb{Z})$;
    - Temos $(a - c) = (a - b) + (b - c), \forall a \forall b \forall c \in \mathbb{Z}$. Logo, R é transitiva.
  - Como R é reflexiva, simétrica e transitiva, logo é equivalente.

[10] Se e somente se.

Relações Equivalência - Ex. Adapt. [Rosen, 2019]

- Seja R uma relação sobre o conjuntos dos números inteiros tal que aRb sse[10] $a - b \in \mathbb{Z}$. A relação R é equivalente?
  - Reflexiva?
    - Supor aRa;
    - $a - a = 0, \forall a \in \mathbb{Z}$, onde $0 \in \mathbb{Z}$. Logo, R é reflexiva.
  - Simétrica?
    - Supor aRb;
    - $(a - b = k \wedge b - a = \text{-}k)$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}$. Logo, R é simétrica.
  - Transitiva?
    - Supor aRb, bRc e $((a - b) \in \mathbb{Z} \wedge (b - c) \in \mathbb{Z})$;
    - Temos $(a - c) = (a - b) + (b - c), \forall a \forall b \forall c \in \mathbb{Z}$. Logo, R é transitiva.
  - Como R é reflexiva, simétrica e transitiva, logo é equivalente.

[10] Se e somente se.

Relações Equivalência - Exemplo [Rosen, 2019]

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Seja R uma relação sobre o conjuntos dos números inteiros tal que aRb sse $a \div b \in \mathbb{Z}$. A relação R é equivalente?
  - Reflexiva?
    - $a \div a = 1, \forall a \in \mathbb{Z}$, onde $1 \in \mathbb{Z}$. Logo, R é reflexiva.
  - Simétrica?
    - $(a \div b = k \wedge b \div a \neq \text{-}k)$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}$. Logo, R não é simétrica.
  - Como R não é simétrica, logo não é equivalente.

Relações Equivalência - Exemplo [Rosen, 2019]

- Seja R uma relação sobre o conjuntos dos números inteiros tal que aRb sse $a \div b \in \mathbb{Z}$. A relação R é equivalente?
  - Reflexiva?
    - $a \div a = 1, \forall a \in \mathbb{Z}$, onde $1 \in \mathbb{Z}$. Logo, R é reflexiva.
  - Simétrica?
    - $(a \div b = k \wedge b \div a \neq -k)$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}$. Logo, R não é simétrica.
  - Como R não é simétrica, logo não é equivalente.

Relações Equivalência - Exemplo [Rosen, 2019]

- Seja R uma relação sobre o conjuntos dos números inteiros tal que aRb sse $a \div b \in \mathbb{Z}$. A relação R é equivalente?
  - Reflexiva?
    - $a \div a = 1, \forall a \in \mathbb{Z}$, onde $1 \in \mathbb{Z}$. Logo, R é reflexiva.
  - Simétrica?
    - $(a \div b = k \wedge b \div a \neq -k)$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}$. Logo, R não é simétrica.
  - Como R não é simétrica, logo não é equivalente.

Relações Equivalência - Exemplo [Rosen, 2019]

- Seja R uma relação sobre o conjuntos dos números inteiros tal que aRb sse $a \div b \in \mathbb{Z}$. A relação R é equivalente?
  - Reflexiva?
    - $a \div a = 1, \forall a \in \mathbb{Z}$, onde $1 \in \mathbb{Z}$. Logo, R é reflexiva.
  - Simétrica?
    - $(a \div b = k \wedge b \div a \neq \text{-}k)$, $\forall a \forall b \in \mathbb{Z}$. Logo, R <u>não</u> é simétrica.
  - Como R não é simétrica, logo não é equivalente.

Classes de Equivalência

- Definição: Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. O conjunto de todos os elementos que estão relacionados com um dado elemento $a \in A$ é denominado de classe de equivalência de a [Rosen, 2019].
    - A classe de equivalência é denotada por $[a]_R$;
    - Em alguns cenários, com somente uma relação, a classe de equivalência pode ser denotada somente por $[a]$.
- Definição Formal: $[a]_R = \{b \mid b \in A \wedge (a, b) \in R\}$.

Representante da Classe de Equivalência

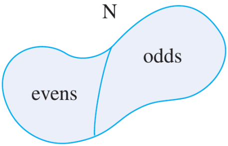
- Definição: Se $x \in [a]_R$, então x é chamado de representante da classe de equivalência [Rosen, 2019].
    - Qualquer elemento da classe pode ser definido como representante;
    - Não existe qualquer característica especial nesse elemento.

Classes de Equivalência - Exemplo [Rosen, 2019]

- Definição (Congruência Módulo m): Se x e y são inteiros e $m > 1$ é um inteiro positivo, $x \equiv y (mod\ m)$ se $x - y$ é um múltiplo inteiro de m [da Silva, 2012] [Gersting, 2014];
- Seja $R = \{a \in \mathbb{Z} \mid a\ mod\ 4 \in \mathbb{Z}\}$. Defina as classes de equivalência dos números 0, 1, 2 e 3.
  - Devemos obter todos os inteiros tal que $a\ mod\ 4 = n$, para $n = 0, 1, 2, 3$;
  - $a \equiv 0$: $[0] = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$;
  - $a \equiv 1$: $[1] = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, , ...\}$;
  - $a \equiv 2$: $[2] = \{..., -6, -2, 2, 6, 10, ...\}$;
  - $a \equiv 3$: $[3] = \{..., -5, -1, 3, 7, 11, ...\}$.

Partições de um conjunto

- Definição: A partição de um conjunto A é uma coleção de subconjuntos disjuntos não vazios cuja união é igual a A [Gersting, 2014].
  - Os subconjuntos que constituem a partição são chamados de blocos da partição;
  - Toda relação de equivalência R particiona um conjunto A no qual está definida em uma partição [Gersting, 2014] [da Silva, 2012].



Fonte: [Gersting, 2014]

Classes de Equivalência e Partições

- Definição: Uma relação de equivalência R em um conjunto A determina a partição de A.
  - Analogamente, a partição de um conjunto A determina a relação de equivalência R em A [Gersting, 2014].

- Definição Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. Temos, para os elementos a e b, pertencentes ao conjunto A, as seguintes propriedades [Rosen, 2019]:
  1. aRb;
  2. $[a] = [b]$;
  3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

Equivalências e Partições - Exemplo [Rosen, 2019]

- Suponha um conjunto S correspondente ao alunos de uma classe. Suponha uma relação R, no qual um aluno senta-se na mesma fileira que outro aluno.
- Formalmente:
  - $S = \{x \mid x \text{ é um aluno da classe}\}$;
  - $R = \{(x, y) \mid x \text{ senta-se na mesma fileira que } y\}$.
- S pode ser dividido em subconjuntos disjuntos tal que cada aluno pertence à um destes e cuja união gera o conjunto S.
  - Suponha que João e Maria se sentam na mesma fileira;
  - Temos: $[\text{João}] = [\text{Maria}]$ e $[\text{João}] \cap [\text{Maria}] \neq \emptyset$.

Equivalências e Partições - Exemplo [da Silva, 2012]

- Seja R a relação de equivalência que particiona elementos em números pares e ímpares, definida por:

$$R = \{(x, y) \mid x + y \text{ é par e } x + y \in \mathbb{N}\}$$

- Temos, então, as seguintes classes de equivalências:
  - Se x é par, para todo y par temos $x + y$ par;
  - Se x é ímpar, para todo y ímpar temos $x + y$ par;
- Podemos representar as classes de equivalência como:
  - Classe números pares: $[2] = [4] = ... = [2k]$;
  - Classe números ímpares: $[1] = [3] = ... = [2k + 1]$.

Referências I

da Silva, D. M. (2012).
Slides de aula.

Gersting, J. L. (2014).
Mathematical Structures for Computer Science.
W. H. Freeman and Company, 7 edition.

Levin, O. (2019).
Discrete Mathematics - An Open Introduction.
University of Northern Colorado, 7 edition.
[Online] Disponível em http://discrete.openmathbooks.org/dmoi3.html.

Rosen, K. H. (2019).
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill, 8 edition.