Matemática Discreta

Conjuntos

Felipe Augusto Lima Reis
felipe.reis@ifmg.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

Sumário

1. Introdução
2. Conceitos
3. Tipos Conjuntos
4. Operações
5. Identidades
6. Cardinalidade

Introdução

Introdução

- Conjuntos correspondem a um tipo de estrutura discreta fundamental, utilizada para coleção de objetos [Rosen, 2019];
  - Conjuntos podem ser considerados um dos pilares da Matemática [Gersting, 2014];
  - São utilizados frequentemente como base para outras estruturas mais complexas [Rosen, 2019];
- Conceitos de Ciência da Computação e Matemática podem ser expressos em linguagens de conjuntos [Gersting, 2014]
  - A linguagem de conjuntos corresponde ao estudo de coleções em sua organização [Rosen, 2019].

Conceitos

Definição

- **Conjunto:** coleção não ordenada de objetos distintos [Rosen, 2019]
  - Objetos são chamados de elementos ou membros;
  - Diz-se que os elementos pertencem ao conjunto;
  - Notação (I):
    - Conjuntos, frequentemente, utilizam letras maiúsculas;
    - Elementos dos conjuntos utilizam letras minúsculas;
    - O símbolo $\in$ (pertence) indica "adesão ao conjunto";
  - Notação (II):
    - $a \in A$: a é um elemento do conjunto A;
    - $a \notin A$: a não é um elemento do conjunto A.

Representação de Conjuntos

- Representação de Conjuntos (I):
  - Elementos são enumerados em listas, limitadas por chaves;
  - Podem ser utilizados três pontos (...) para suprimir elementos, quando o padrão é óbvio [Rosen, 2019];
  - Exemplos:
    - $V = \{a, e, i, o, u\}$;
    - $I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$;
    - $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...\}$;
    - $F = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...\}$[1];
    - $N = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 97, 98, 99\}$;
    - $E_S = \{MG, SP, RJ, ES\}$[2];
    - $C = \{$América, África, Ásia, Europa, Oceania, Antártida$\}$[2];

[1] O primeiro valor "1" foi mantido no conjunto somente para possibilitar a melhor representação da sequência de Fibonacci. Lembrar que os conjuntos devem conter elementos distintos.

[2] Exemplos de [da Silva, 2012b].

Representação de Conjuntos

- Representação de Conjuntos (II):
  - Outra forma de representar um conjunto é utilizando a notação de construção de conjuntos [Rosen, 2019];
  - Forma: $S = \{x \mid P(x)\}$, onde $P(x)$ é um predicado[3];
  - Exemplos:
    - $I = \{x \mid x \text{ é um número inteiro positivo ímpar menor que } 10\}$;
    - $I = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x \text{ é ímpar menor e } x < 10\}$[4];
    - $E_S = \{x \mid x \text{ é estado da região Sudeste do Brasil}\}$;
    - $C = \{x \mid x \text{ é um continente}\}$;
    - $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$[5].

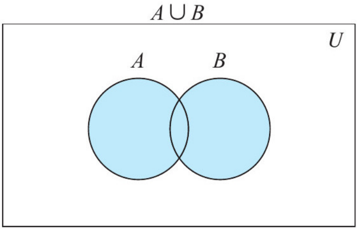
[3] Propriedade ou relacionamento entre objetos [da Silva, 2012a].

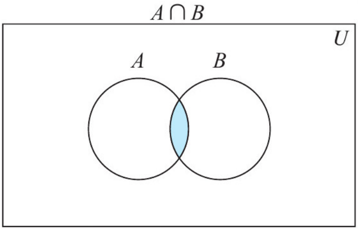
[4] Exemplo de [Rosen, 2019].

[5] Exemplo de [da Silva, 2012b].

Representação de Conjuntos

- Representação de Conjuntos (III):
  - Conjuntos podem ser representados graficamente com auxílio do Diagrama de Venn
    - Nesse diagrama, um conjunto universal U, que contém todo o universo possível é representado por um retângulo;
    - Círculos[6] representam os conjuntos [Rosen, 2019].





Fonte: [Gersting, 2014]

[6] Outras figuras geométricas também podem ser utilizadas para representação dos conjuntos.

Representação de Conjuntos

- Representação de Conjuntos (IV):
  - Conjuntos podem, ainda, ser representados por relações de recorrência (ou recursão) [da Silva, 2012a];
  - Exemplos[7]:
    - $1 \in A$
    - Se $x \in A$, então $(x+1) \in A$
    - Logo, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

    - $2 \in A$
    - Se $x \in A$, então $(x+2) \in A$
    - Logo, $A = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$.

[7] Exemplos baseados em [da Silva, 2012b].

Conjuntos Numéricos

- Representam agrupamento de números
  - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$: conjunto dos números naturais;
  - $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$: conjunto dos números naturais não nulos;
  - $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$: conjunto dos números inteiros;
  - $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$: conjunto dos números inteiros positivos;
  - $\mathbb{Z}^- = \{..., -3, -2, -1\}$: conjunto dos números inteiros negativos;
  - $\mathbb{Z}^* = \{..., -2, -1, 1, 2, ...\}$: conjunto dos números inteiros não nulos;
  - $\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais[8];
  - $\mathbb{I}$: conjunto dos números irracionais[9];
  - $\mathbb{R}$: conjunto dos números reais;
  - $\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos[10].

---

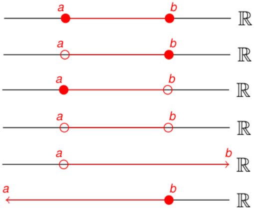
[8] Números que podem ser representados por uma divisão p/q de dois números inteiros não nulos p e q.

[9] Números que não podem ser representados por pela divisão de dois números inteiros. Ex.: π, $\sqrt{2}$.

[10] Números que podem ser escritos na forma $z = x + yi$, onde $i = \sqrt{-1}$.

Intervalos

- Para dois números reais a e b, onde $a \leq b$, é possível denotar os seguintes intervalos [da Silva, 2012b]:
  - $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$
  - $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$
  - $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$
  - $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$
  - $(a, +\infty) = \{x > a\}$
  - $(-\infty, b] = \{x \leq b\}$



- Nomenclatura:
  - Intervalo fechado: $[a, b]$;
  - Intervalo aberto: (a, b).

Nota 1: Utiliza-se também a seguinte notação: $]a, b] \equiv (a, b]$, $[a, b[\equiv [a, b)$ e $]a, b[\equiv (a, b)$.

Nota 2: As notações $[-\infty, a]$, $[a, \infty]$ e $[-\infty, \infty]$ estão incorretas, pois infinito não é um número. Logo, o intervalo não pode ser fechado.

Tipos de Dados - Computação

- Em Ciência da Computação e demais ciências ligadas a computação, utiliza-se o conceito de tipos de dados;
- Cada tipo de dado pode ser entendido como um conjunto:
  - Conjunto de valores binários (0,1): boolean, bool;
  - Conjunto de valores inteiros: int, integer;
  - Conjunto de valores reais[11]: float, double, real;
  - Conjunto de letras do alfabeto (caracteres): char;
  - Conjunto finito de caracteres: string;
- Os nomes dos tipos de dados podem variar de acordo com a linguagem de programação.

[11] As palavras double, float, quad, etc., indicam a precisão da representação de um número. Esses nomes serão detalhados na disciplina de Matemática Computacional.

Igualdade de Conjuntos

- Definição: Dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos [Rosen, 2019];
- Definição formal: Se A e B são dois conjuntos, então A e B são iguais se, e somente se, $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$;
- Notação: $A = B$ se A e B são iguais.
- Exemplos:
  - $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{c, a, b\}$. $A = B$.
  - $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, a, a, a, b, c, c, c\}$. $A = B$.
  - $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, a, c\}$. $A \neq B$.

Tamanho de Conjuntos (Cardinalidade)

- Se S é um conjunto contendo n elementos distintos, então podemos concluir que S é finito e n é a cardinalidade do conjunto [Rosen, 2019]
  - Obviamente, n é um valor inteiro não negativo ($n \geq 0$);
  - A cardinalidade de S é denotada por $|S|$;
  - Um conjunto é infinito se não for finito ($n = \infty$).
- Exemplos:
  - Seja S o conjunto de letras do alfabeto latino. Então $|S| = 26$;
  - Seja S o conjunto dos números primos ≤ 10. Então $|S| = 4$.
  - Seja C o conjunto de continentes. Então $|C| = 6$.

Tipos de Conjuntos

Conjunto Vazio

- Definição: Conjuntos vazios ou nulos são aqueles que não possuem nenhum elemento [Rosen, 2019];
- Representação: $\emptyset$ ou $\{\}$;
- Importante: O conjunto $\{\emptyset\}$ não é um conjunto vazio
  - O conjunto contém um único elemento e esse elemento é vazio.
- Exemplos:
  - $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < x\} = \emptyset$;
  - $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 1\} = \emptyset$;
  - $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 3 = 0\} = \emptyset$;

Subconjuntos

- Definição: Um conjunto A é um subconjunto de B se, e somente se, cada elemento de A estiver em também em B
  - O conjunto B é chamado de superconjunto de A;
- Definição formal: Sejam A e B dois conjuntos, então A é subconjunto de B se, e somente se, $\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$ [Rosen, 2019];
- Notação: $A \subseteq B$ (subconjunto) ou $B \supseteq A$ (superconjunto);
- Prova: para mostrar que $A \subseteq B$, é necessário provar que todos os elementos de A também pertencem a B
  - Para provar que $A \not\subseteq B$, basta encontrar um contra-exemplo.

Subconjuntos

- Exemplos (I):
  - $A = \{a, b\}$ e $B = \{c, a, b, d\}$. $A \subseteq B$.
  - $A = \{a, a, a, a, b, b, b\}$ e $B = \{a, b, c\}$. $A \subseteq B$.
  - $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, b, c\}$. $A \subseteq B$.
  - $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{a, b, c, a, b, c\}$. $A \nsubseteq B$.

- Exemplos (II):
  - $A = \{a, b, c\}$.
  - Subconjuntos de A:
    - $\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$.

Subconjunto Próprio

- Definição: Se um conjunto A é um subconjunto de B e $A \neq B$, então A é um subconjunto próprio de B.
  - $A \neq B$ significa que existe ao menos um elemento de B que não existe em A [Gersting, 2014];
- Definição formal: Sejam A e B são dois conjuntos, então A é subconjunto próprio de B se, e somente se, $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$ [Rosen, 2019];
- Notação: $A \subset B$ (subconjunto próprio);
- Exemplos:
  - $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$;
  - $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z}$;
  - $S = \{x \mid x \text{ é primo}\}$. $S \subset \mathbb{N}$.

Conjunto de Conjuntos

- Definição: Um conjunto pode admitir um outro subconjunto como um de seus elementos [da Silva, 2012a];
- Exemplos:
  - $A = \{a, b, \{a, b, c\}\}$;
  - $A = \{\emptyset\}$;
  - $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
  - $A = \{\emptyset, a, b, \{a, b\}, \{3\}, \{\{7\}\}\}$;
  - $B = \{a, b\}$. $A = \{\emptyset, a, b, B, \{3\}\} = \{\emptyset, a, b, \{a, b\}, \{3\}\}$.

Lembrete: O conjunto $\{\emptyset\}$ não é um conjunto vazio. Ele contém um único elemento e esse elemento é vazio.

Conjunto Potência[12]

- Definição: Se S é um conjunto, $\mathcal{P}(S)$ é o conjunto formado por todos os subconjuntos de S [Gersting, 2014];
- Cardinalidade: Se $|S| = n$, então $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$;
- Exemplos:
  - $S = \{0, 1\}$.
    $\mathcal{P}(S) = \{\}, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$.
  - $S = \{a, b, c\}$.
    $\mathcal{P}(S) = \{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$.

[12] Também chamado de *Conjunto de Partes* ou *Conjunto das Partes*.

Tuplas[13]

- Definição: Uma tupla ordenada $(a_1, a_2, ..., a_n)$ é uma coleção ordenada, onde a_1 é o primeiro elemento, a_2, o segundo, ... e a_n o n-ésimo elemento [Rosen, 2019]
  - Tuplas são utilizadas como alternativa aos conjuntos (que, por definição, não são ordenados).
- Igualdade: $(a_1, a_2, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n)$ se, e somente se, $a_i = b_i$, para $n = 1, 2, ..., n$;
- Pares ordenados: caso particular de tuplas de tamanho 2
  - Exemplos: (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2).

[13] Também chamadas de *n-uplas* ou *ênuplas*.

Produto Cartesiano

- Definição: O produto cartesiano de dois conjuntos A e B corresponde ao conjunto de todos os pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$ [Rosen, 2019];
- Notação: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$;
- Importante: Os produtos $A \times B$ e $B \times A$ são diferentes
  - Esses produtos somente são iguais se $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$.

Produto Cartesiano

- Exemplos:
  - $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.
    $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$.
    $B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.
  - $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$ e $C = \{x, y, z\}$.
    $$A \times B \times C = \{(a, 1, x), (a, 1, y), (a, 1, z), (a, 2, x), (a, 2, y), (a, 2, z), (b, 1, x), (b, 1, y), (b, 1, z), (b, 2, x), (b, 2, y), (b, 2, z)\}.$$

Conjunto Verdade

- Definição: Dado um predicado P e um domínio D, o conjunto verdade de P corresponde ao conjunto de todos os elementos $x \in D$, para qual $P(x)$ é verdadeiro [da Silva, 2012a];
- Definição Formal: $\mathcal{CV} = \{x \in D \mid P(x)\}$;
- Exemplos:
  - Predicado: $|x| = 1$. Domínio: $\mathbb{Z}$.
    $\mathcal{CV} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 1\} = \{\text{-}1, 1\}$.
  - Predicado: $|x| \leq 2$. Domínio: $\mathbb{Z}$.
    $\mathcal{CV} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\} = \{\text{-}2, \text{-}1, 0, 1, 2\}$.
  - Predicado: $|x| = x$. Domínio: $\mathbb{Z}$.
    $\mathcal{CV} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = x\} = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$.

Operações

Conceitos

Operações Fechadas e Bem Definidas

- Operação Fechada: um conjunto é fechado em relação a uma dada operação quando o resultado dessa operação corresponde a um elemento desse mesmo conjunto [Gersting, 2014]
  - Exemplos:
    1. Considere $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$. Uma operação de adição é fechada, uma vez que $(x + y) \in \mathbb{Z}$.
    2. Considere $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$. Uma operação de divisão não é fechada, uma vez que $x \div y$ pode não pertencer aos conjuntos dos inteiros (se $x = 2$ e $y = 3$, então $x \div y \notin \mathbb{Z}$).

Operações Fechadas e Bem Definidas

- Operação Bem Definida: operação que sempre produz um único valor [Gersting, 2014]
  - O valor sempre existe e é único;
  - Exemplos:
    - Considere $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$. Uma operação de adição é bem definida, uma vez que $(x + y)$ produz sempre um único valor;
    - Considere $x \in \mathbb{Z}$. Uma operação de radiciação <u>não</u> é bem definida, uma vez que $\sqrt{x}$ não produz um valor único;
    - Considere $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$. Uma operação de divisão <u>não</u> é bem definida, uma vez que $x \div y$ pode não existir (e se $y = 0$, $\nexists(x \div y)$).

Aridade

- Definição Informal: número de argumentos necessários a uma operação ou função
  - Operação nulária: zero argumentos (apenas funções);
  - Operação unária: apenas um argumento (ex.: negação);
  - Operação binária: dois argumentos (ex.: adição, subtração);
  - Operação *n*-ária: *n*-argumentos.

Aridade

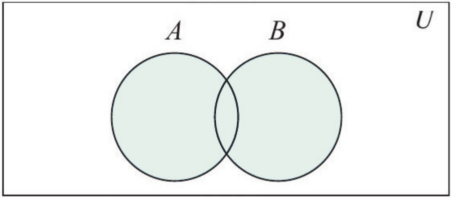
- Operação Unária: uma operação $\bullet$ em um conjunto S é unária somente se, para cada elemento $x \in S$, ela for verdadeira, fechada e bem definida [Gersting, 2014];
- Operação Binária: uma operação $\circ$ em cada par ordenado (x, y) de valores de um conjunto S é binária, somente se $x \circ y$ for fechada e bem definida [Gersting, 2014].

Os símbolos $\circ$ e $\bullet$ não representam, neste contexto, nenhuma operação em especial e sim um conjunto de operações que se adequam às definições de operações unárias e binárias.

Operações sobre Conjuntos

União

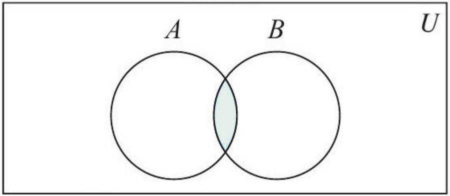
- Definição: Dados dois conjuntos A e B, a união $A \cup B$ corresponde ao conjunto formado pelos elementos que estejam em A, B ou em ambos [Rosen, 2019] [Gersting, 2014];
- Definição Formal: $A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$;
- Exemplos:
  - $A = \{a, b, c\}$. $B = \{b, c, d, e\}$. $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$.



Fonte: Adaptado de [Gersting, 2014]

Interseção

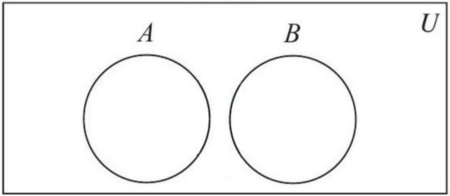
- Definição: Dados dois conjuntos A e B, a interseção $A \cap B$ corresponde ao conjunto formado pelos elementos que estejam em A e B [Rosen, 2019] [Gersting, 2014];
- Definição Formal: $A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$;
- Exemplos:
  - $A = \{a, b, c\}$. $B = \{b, c, d, e\}$. $A \cap B = \{b, c\}$.



Fonte: Adaptado de [Gersting, 2014]

Conjuntos Disjuntos

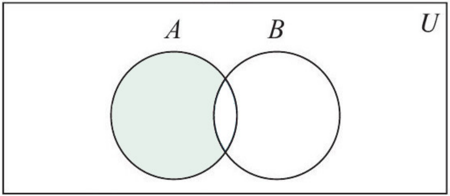
- Definição: Dados dois conjuntos A e B, estes são chamados de conjuntos disjuntos se sua interseção é um conjunto vazio [Rosen, 2019];
- Definição Formal: $A \cap B = \emptyset$;
- Exemplos:
  - $A = \{a, b, c\}$. $B = \{d, e, f\}$. $A \cap B = \{\}$.



Fonte: Próprio autor

Diferença

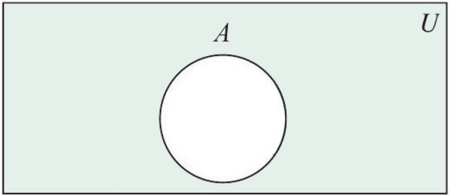
- Definição: Dados dois conjuntos A e B, a diferença $A - B$ corresponde ao conjunto de elementos que estejam em A e não estejam em B [Rosen, 2019] [Gersting, 2014];
- Definição Formal: $A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$;
- Exemplos:
  - $A = \{a, b, c\}$. $B = \{b, c, d\}$. $A - B = \{a\}$. $B - A = \{d\}$.
  - $A = \{a, b, c\}$. $B = \{d, e, f\}$. $A - B = \{a, b, c\}$.



Fonte: Próprio autor

Complemento

- Definição: Dados dois conjuntos A e o universo de valores possíveis U, o complemento $\overline{A}$, corresponde a todos os elementos de U que não estão em A [Rosen, 2019] ;
- Definição Formal: $\overline{A} = \{x \in U | x \notin A\}$;
- Exemplos:
  - $U = \mathbb{N}$. $A = \{0, 1, 2, 3\}$. $\overline{A} = \{4, 5, 6, 7, ...\}$.
  - $U =$ alfabeto. $A = \{a, b, c, d, e\}$. $\overline{A} = \{f, g, h, ..., z\}$.



Fonte: Próprio autor

Resumo das Operações

- As operações sobre conjuntos podem ser resumidas na tabela a seguir:

Operação	**Proposição**
União	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Intersecção	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Diferença	$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Complemento	$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$

Fonte: [da Silva, 2012a]

Identidade e Provas

Identidades

- As identidades são igualdades que são verdadeiras para todos os subconjuntos de um dado conjunto S [Gersting, 2014]
  - Independem de subconjuntos particulares [da Silva, 2012a];
  - Muitas delas utilizam operações de união, interseção, diferença e complemento;
  - Nomes e formas das identidades são similares às equivalências tautológicas;
- As identidades podem ser utilizadas para realização de operações com conjuntos
  - Podem também ser usadas para representação dos conjuntos sem uso dos diagramas de Venn.

Identidades

- A lista das identidades mais importantes está disponível na tabela a seguir:

Propriedade	Identidade
Elementos Neutros	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$
Dominação	$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
Idempotentes	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Complementação	$\overline{(\overline{A})} = A$
Comutativa	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Associativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Propriedade	Identidade
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Absorção	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Complementares	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$

Fonte: [da Silva, 2012a]

Provas

Prova

- Para provar identidades de conjuntos vamos considerar a seguinte representação:
  - α: Identidade do lado esquerdo;
  - β: Identidade do lado direito;

- A prova deve ser feita mostrando que:
  1. $\alpha \subseteq \beta$
  2. $\beta \subseteq \alpha$.

A notação utilizada nesse slide não é comum na literatura. Ela foi escolhida apenas para generalização.

Prova - Lei de De Morgan[14]

- Prove que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

1. $\overline{A \cap B} = \{x \mid x \notin (A \cap B)\}$
2. $= \{x \mid \neg(x \in (A \cap B))\}$
3. $= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\}$
4. $= \{x \mid (\neg x \in A) \vee (\neg x \in B)\}$
5. $= \{x \mid (x \notin A) \vee (x \notin B)\}$
6. $= \{x \mid (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B})\}$
7. $= \{x \mid (x \in (\overline{A} \cup \overline{B})\}$
8. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

[14] Prova baseada em [da Silva, 2012b] e [Rosen, 2019].

Prova - Propriedade Distributiva[15]

- Prove que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1. $A \cup (B \cap C) = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in (B \cap C))\}$
2. $= \{x \mid (x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C))\}$
3. $= \{x \mid ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in C))\}$
4. $= \{x \mid (x \in (A \cup B)) \wedge (x \in (A \cup C))\}$
5. $= \{x \mid x \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))\}$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

[15] Prova baseada em [Gersting, 2014].

Cardinalidade

Conjuntos Contáveis e Incontáveis

- Conjunto Contável: conjunto finito ou que tem a mesma cardinalidade do conjunto de inteiros positivos;
  - Quando um conjunto infinito é contável, sua cardinalidade é definida por $\aleph_0$ (*alef*, letra do alfabeto hebraico);
  - Se $|S| = \aleph_0$, dizemos que S tem cardinalidade "alef zero"[16];
- Conjunto Incontável: conjunto que não atende as condições dos conjuntos contáveis [Rosen, 2019];

[16] Também pode ser utilizada a expressão em inglês "aleph null".

Conjuntos Contáveis

- Se em um conjunto infinito S, for possível selecionar o elementos sequenciais $s_1, s_2, ..., s_n$, esse conjunto é chamado denumerável [Gersting, 2014]
  - Conjuntos denumeráveis são contáveis, uma vez que podemos contar ou enumerar elementos;
- Importante: Ser contável não significa que o número total de elementos é conhecido. Significa apenas que é possível indicar cada um dos n elementos do conjunto em uma sequência [Gersting, 2014] [Rosen, 2019].

Conjuntos Contáveis- Exemplo

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Mostre que o conjunto de números inteiros positivos ímpares é contável [Rosen, 2019].
  - Para isso, basta indicar que o conjunto possui a mesma cardinalidade do conjunto de inteiros positivos;
  - Podemos correlacionamos cada um dos números inteiros a cada um dos números do conjunto;
  - Como o conjunto de inteiros positivos é infinito, a cardinalidade é a mesma.

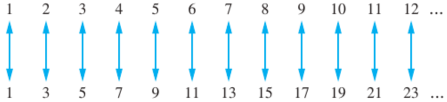
Conjuntos Contáveis- Exemplo

- Mostre que o conjunto de números inteiros positivos ímpares é contável [Rosen, 2019].
  - Para isso, basta indicar que o conjunto possui a mesma cardinalidade do conjunto de inteiros positivos;
  - Podemos correlacionamos cada um dos números inteiros a cada um dos números do conjunto;
  - Como o conjunto de inteiros positivos é infinito, a cardinalidade é a mesma.

Conjuntos Contáveis- Exemplo

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Mostre que o conjunto de números inteiros ímpares é contável [Rosen, 2019].
  - Para isso, basta indicar que o conjunto possui a mesma cardinalidade do conjunto de inteiros positivos;
  - Podemos correlacionamos cada um dos números inteiros a cada um dos números do conjunto;
  - Como o conjunto de inteiros positivos é infinito, a cardinalidade é a mesma.



Fonte: [Rosen, 2019]

Conjuntos Contáveis - Teoremas[18]

- Teorema da União[17]: Se dois conjuntos A e B são contáveis, então $A \cup B$ também é contável;
- Teorema de Schröder-Bernstein: Se A e B são conjuntos e $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$, então $|A| = |B|$.

[17] Na literatura, o teorema não recebe essa nomenclatura - usada apenas para facilitar a identificação.

[18] Provas dos teoremas podem ser encontradas em [Rosen, 2019].

Conjuntos Incontáveis

- Ao contrário dos números inteiros, que são considerados contáveis, os números reais são considerados incontáveis
  - Para demonstrar essa condição, iremos utilizar o método criado pelo matemático alemão Georg Cantor em 1879;
  - A técnica é chamada de Método de Diagonalização de Cantor
    - É usada em Lógica Matemática e Teoria da Computação [Rosen, 2019]
    - Utiliza a prova por contradição.

Método de Diagonalização de Cantor

- Mostre que o conjunto de todos os números reais entre 0 e 1 é incontável [Gersting, 2014].
  - Para provar por contradição, primeiramente devemos supor que o conjunto de valores reais entre 0 e 1 é contável;
  - Um número real pode ser escrito na forma decimal[19] como:
$$0.d_1 d_2 d_3 \ldots$$
  - Cada um dos n números reais, pode ser escrito, de forma única, na forma d_{ij}:
$$r_1 = 0.d_{11} d_{12} d_{13} \ldots$$
$$r_2 = 0.d_{21} d_{22} d_{23} \ldots$$
$$r_3 = 0.d_{31} d_{32} d_{33} \ldots$$
$$\vdots$$

[19] Cada dígito d_{ij} corresponde a um número no intervalo $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Método de Diagonalização de Cantor

- Mostre que o conjunto de todos os números reais entre 0 e 1 é incontável [Gersting, 2014].
  - Para provar por contradição, primeiramente devemos supor que o conjunto de valores reais entre 0 e 1 é contável;
  - Um número real pode ser escrito na forma decimal[19] como:

$$0.d_1 d_2 d_3 \ldots$$

  - Cada um dos n números reais, pode ser escrito, de forma única, na forma d_{ij}:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.d_{11} d_{12} d_{13} \ldots \\ r_2 &= 0.d_{21} d_{22} d_{23} \ldots \\ r_3 &= 0.d_{31} d_{32} d_{33} \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

[19] Cada dígito d_{ij} corresponde a um número no intervalo $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Método de Diagonalização de Cantor

- Mostre que o conjunto de todos os números reais entre 0 e 1 é incontável [Gersting, 2014].
  - Suponha que desejamos criar um novo número z, com base na lista de todos números reais possíveis;
  - Esse número será criado utilizando a fórmula $z_i = d_{ii} + 1$;[20]
  - Após a criação desse novo número, teremos um valor que não estava na lista original de números reais;
  - Com isso, teremos um número que é real e não estava na lista original, o que é uma contradição!

[20] Caso o dígito seja 9, o novo dígito será igual a 0.

Método de Diagonalização de Cantor

- Mostre que o conjunto de todos os números reais entre 0 e 1 é incontável [Gersting, 2014].
  - Exemplo:
    - Suponha que tenhamos uma lista com os seguintes números: $r_1 = 0.\underline{1}3324..$, $r_2 = 0.3\underline{3}465..$, $r_3 = 0.14\underline{1}05..$, $r_4 = 0.989\underline{9}5..$;
    - Novo número: $0.(1+1)(3+1)(1+1)(9+1).. = 0.2420...$
    - No entanto, esse número deveria ser igual a um número existente na lista de números reais;
    - Como temos que o número é novo, temos uma contradição, pois o conjunto de números reais não seria contável.

Referências I

da Silva, D. M. (2012a).
Notas de Aula 2: Conjuntos.
IFMG - Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Formiga.

da Silva, D. M. (2012b).
Slides de aula.

Gersting, J. L. (2014).
Mathematical Structures for Computer Science.
W. H. Freeman and Company, 7 edition.

Levin, O. (2019).
Discrete Mathematics - An Open Introduction.
University of Northern Colorado, 7 edition.
[Online] Disponível em http://discrete.openmathbooks.org/dmoi3.html.

Rosen, K. H. (2019).
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill, 8 edition.