Matemática Discreta

Indução e Recorrência

Felipe Augusto Lima Reis
felipe.reis@ifmg.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

Sumário

Introdução

Introdução

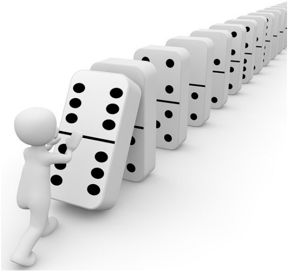
- Um dos principais objetivos da disciplina de Matemática Discreta é apresentar os conceitos de Indução Matemática
  - Essa técnica é particularmente útil em Ciência da Computação [Gersting, 2014];
  - Conceitos relacionados à indução podem ser utilizados para construção de softwares;
  - Indução também pode ser usada para prova de teoremas e definição de conjuntos [Rosen, 2019].

Metáfora - Escada Infinita

- Uma forma simples de entender a Indução Matemática é associando-a à subida por uma escada infinita
- Suponha que uma pessoa deseja subir pela escada infinita;
- Podemos traçar as seguintes suposições para a subida:
  - A pessoa é capaz de subir no primeiro degrau da escada;
  - Uma vez que a pessoa está em um degrau da escada, ela sempre poderá atingir o próximo degrau;
- Baseado somente nessas duas premissas, podemos afirmar que a pessoa será capaz de atingir qualquer degrau da escada infinita.

Metáfora - Fileira de Dominós

- Indução matemática também pode ser associada a uma fileira de dominós que serão derrubados[1]
  - É possível derrubar o primeiro dominó da sequência;
  - O i-ésimo dominó será derrubado, se o $(i-1)$-ésimo dominó também o for.



Fonte: [Lachmann-Anke, 2021]

[1] Supondo uma fileira de dominós perfeitamente ordenados, com distâncias iguais entre si.

Introdução

- O método de Indução Matemática pode ser apresentado a partir das duas metáforas anteriores;
- Em comum, ambas possuem os seguintes etapas:
  - Passo inicial: corresponde ao ínicio do processo (subida do primeiro degrau da escada ou derrubada do primeiro dominó);
  - Passo de indução: se um passo n for verdadeiro, o passo $n+1$ também o será (se o dominó n for derrubado, o dominó $n+1$ também será).
- Na próxima seção, o conceito será formalmente definido.

Indução Matemática

Indução Matemática

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- **Princípio da Indução Matemática**[2] [Gersting, 2014] [Rosen, 2019]
    - Definição: Para provar que uma função proposicional $P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos n, devemos respeitar os seguintes passos:
        1. Passo Inicial: $P(1)$ é verdadeiro;
        2. Passo Indutivo: $(\forall k)[P(k)$ verdadeiro $\rightarrow P(k+1)$ verdadeiro$]$
    - Definição Formal: $[P(1) \wedge \forall k(P(k) \rightarrow P(k+1))] \rightarrow \forall n[P(n)]$.

[2] [Gersting, 2014] denomina como "Primeiro Princípio da Indução Matemática".
A variável k corresponde a um inteiro positivo arbitrário.

Indução Matemática

- No Princípio da Indução Matemática, a suposição de que $P(k)$ é verdadeiro é chamado de Hipótese de Indução;
  - Supomos que $P(k)$ é verdadeiro para provar o passo indutivo;
- Importante: Em uma prova por Indução, não se assume que $P(k)$ é verdadeiro para todos os inteiros positivos.
  - Assume-se, apenas, que se $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k+1)$ também é verdadeiro [Rosen, 2019];
  - A assunção de que $P(k)$ é verdadeiro pode causar raciocínio circular[3].

[3] Ver raciocínio circular no conteúdo de Demonstrações.

Indução Matemática

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Indução Matemática pode ser usada para provar teoremas cujo enunciado difere do Passo Indutivo
  - É possível alterar, inclusive, o passo inicial $P(1)$ para $P(b)$, onde b é um inteiro diferente de 1;
  - Nesse cenário, $P(k) \rightarrow P(k+1)$ será verdadeiro para $k = b, b+1, b+2, \ldots$ [Rosen, 2019];
  - Ao iniciar a sequência de prova em um número diferente de um, não há indicação prévia que a sequência será inválida
    - No exemplo da escada infinita, se a pessoa estiver no meio da escada, a prova pode ser realizada desse ponto em diante;
    - No exemplo da fileira de dominós, é possível iniciar a derrubada pelo b-ésimo dominó.

Passo a passo para prova por Indução

Prova por Indução [Rosen, 2019]

1. Expressar a afirmação que deve ser provada na forma "$\forall n \geq b, P(n)$", para um inteiro fixo b
   - Para algumas declarações do forma $P(n)$, como desigualdades, pode ser necessário determinar o valor apropriado de b;
2. Indicar o "Passo Inicial" (escrevendo a expressão) e, em seguida, mostre que $P(b)$ é verdadeiro
   - Certificar que o valor de b é correto;
3. Indicar o "Passo Indutivo" (escrevendo a expressão) e identifique claramente, a hipótese indutiva
   - Escrever a hipótese na forma "Suponha que $P(k)$ seja verdadeiro para um número inteiro fixo arbitrário $k \geq b$;

Prova por Indução [Rosen, 2019]

4. Declarar o que precisa ser provado sob a suposição de que a hipótese indutiva é verdadeira.
   - Escrever o que $P(k+1)$ indica;
5. Provar a afirmação $P(k+1)$ com base na suposição $P(k)$;
   - Decidir previamente a estratégia de prova mais promissora[4];
   - Certificar que a prova é válida para todos os inteiros k com $k \geq b$;
6. Identificar claramente a conclusão da etapa indutiva
   - Circular ou destacar a conclusão.
7. Identificar claramente a conclusão final (semelhante ao passo anterior).

[4] Consultar aula de Demonstrações.

Demonstrações

Indução Matemática - Exemplo 1 [Rosen, 2019]

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Mostre que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, então $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
  - Passo a passo de prova por indução:
    1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 1$, a soma dos n primeiros inteiros positivos é igual a $n(n+1)/2$;
    2. Passo Inicial: $P(1) = 1(1+1)/2 = 1$;
    3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 1 + 2 + 3 + ... + k = k(k+1)/2$;
    4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:

$$P(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Indução Matemática - Exemplo 1 [Rosen, 2019]

- Mostre que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, então $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
  - Passo a passo de prova por indução:

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 1$, a soma dos n primeiros inteiros positivos é igual a $n(n+1)/2$;
2. Passo Inicial: $P(1) = 1(1+1)/2 = 1$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 1 + 2 + 3 + ... + k = k(k+1)/2$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:

$$P(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Indução Matemática - Exemplo 1 [Rosen, 2019]

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Mostre que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, então $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
  - Passo a passo de prova por indução:
    1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 1$, a soma dos n primeiros inteiros positivos é igual a $n(n+1)/2$;
    2. Passo Inicial: $P(1) = 1(1+1)/2 = 1$;
    3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 1 + 2 + 3 + ... + k = k(k+1)/2$;
    4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:

$$P(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Indução Matemática - Exemplo 1 [Rosen, 2019]

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Mostre que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, então $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
  - Passo a passo de prova por indução:
    1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 1$, a soma dos n primeiros inteiros positivos é igual a $n(n+1)/2$;
    2. Passo Inicial: $P(1) = 1(1+1)/2 = 1$;
    3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 1 + 2 + 3 + ... + k = k(k+1)/2$;
    4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:

$$P(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Indução Matemática - Exemplo 1 [Rosen, 2019]

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Mostre que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, então $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
  - Passo a passo de prova por indução:
    1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 1$, a soma dos n primeiros inteiros positivos é igual a $n(n+1)/2$;
    2. Passo Inicial: $P(1) = 1(1+1)/2 = 1$;
    3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 1 + 2 + 3 + ... + k = k(k+1)/2$;
    4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:

$$P(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Indução Matemática - Exemplo 1 [Rosen, 2019]

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Mostre que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, então $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
    - Passo a passo de prova por indução:
        1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 1$, a soma dos n primeiros inteiros positivos é igual a $n(n+1)/2$;
        2. Passo Inicial: $P(1) = 1(1+1)/2 = 1$;
        3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 1 + 2 + 3 + ... + k = k(k+1)/2$;
        4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:

$$P(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Indução Matemática - Exemplo 1 [Rosen, 2019]

- Mostre que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, então $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
  - Passo a passo de prova por indução:

5. Prova: Sabemos que para um elemento $P(k)$, a soma corresponde a:

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Logo para $k+1$, a soma será igual a $[k(k+1)/2] + (k+1)$. Temos, então:

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{k+1}{1} = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

6. Identificar Conclusão Hipótese Indutiva: Ok.
7. Conclusão Final: Os passos iniciais e indutivos foram completos, logo o teorema foi provado como verdadeiro.

Indução Matemática - Exemplo 1 [Rosen, 2019]

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Mostre que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, então $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
  - Passo a passo de prova por indução:

5. Prova: Sabemos que para um elemento $P(k)$, a soma corresponde a:

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Logo para $k+1$, a soma será igual a $[k(k+1)/2] + (k+1)$. Temos, então:

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{k+1}{1} = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

6. Identificar Conclusão Hipótese Indutiva: Ok.
7. Conclusão Final: Os passos iniciais e indutivos foram completos, logo o teorema foi provado como verdadeiro.

Indução Matemática - Exemplo 1 [Rosen, 2019]

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Mostre que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, então $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
    - Passo a passo de prova por indução:

5. Prova: Sabemos que para um elemento $P(k)$, a soma corresponde a:

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Logo para $k+1$, a soma será igual a $[k(k+1)/2] + (k+1)$. Temos, então:

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{k+1}{1} = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

6. Identificar Conclusão Hipótese Indutiva: Ok.
7. Conclusão Final: Os passos iniciais e indutivos foram completos, logo o teorema foi provado como verdadeiro.

Indução Matemática - Exemplo 1 [Rosen, 2019]

- Mostre que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, então $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
  - Passo a passo de prova por indução:

5. Prova: Sabemos que para um elemento $P(k)$, a soma corresponde a:

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Logo para $k+1$, a soma será igual a $[k(k+1)/2] + (k+1)$. Temos, então:

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{k+1}{1} = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

6. Identificar Conclusão Hipótese Indutiva: Ok.
7. Conclusão Final: Os passos iniciais e indutivos foram completos, logo o teorema foi provado como verdadeiro.

Indução Matemática - Exemplo 2 [Rosen, 2019]

- Prove que, $\forall(n \geq 0) \in \mathbb{Z}$, $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 0$, temos $2^0 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$;
2. Passo Inicial: $P(0) = 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^k = 2^{k+1} - 1$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:

$$P(k+1) = 2^0 + 2^1 + ... + 2^{k+1} = \boxed{2^{k+2} - 1}$$

5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1}$$
$$= (2^{k+1} + 2^{k+1}) - 1 = \boxed{2^{k+2} - 1}$$

Indução Matemática - Exemplo 2 [Rosen, 2019]

- Prove que, $\forall (n \geq 0) \in \mathbb{Z}$, $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

  1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 0$, temos $2^0 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$;
  2. Passo Inicial: $P(0) = 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$;
  3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^k = 2^{k+1} - 1$;
  4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:

$$P(k+1) = 2^0 + 2^1 + ... + 2^{k+1} = \boxed{2^{k+2} - 1}$$

  5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^k + 2^{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \\ &= (2^{k+1} + 2^{k+1}) - 1 = \boxed{2^{k+2} - 1} \end{aligned}$$

Indução Matemática - Exemplo 2 [Rosen, 2019]

- Prove que, $\forall (n \geq 0) \in \mathbb{Z}$, $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 0$, temos $2^0 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$;
2. Passo Inicial: $P(0) = 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:

$$P(k+1) = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{k+1} = \boxed{2^{k+2} - 1}$$

5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \\ &= (2^{k+1} + 2^{k+1}) - 1 = \boxed{2^{k+2} - 1} \end{aligned}$$

Indução Matemática - Exemplo 2 [Rosen, 2019]

- Prove que, $\forall(n \geq 0) \in \mathbb{Z}$, $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 0$, temos $2^0 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$;
2. Passo Inicial: $P(0) = 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^k = 2^{k+1} - 1$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:

$$P(k+1) = 2^0 + 2^1 + ... + 2^{k+1} = \boxed{2^{k+2} - 1}$$

5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1}$$
$$= (2^{k+1} + 2^{k+1}) - 1 = \boxed{2^{k+2} - 1}$$

Indução Matemática - Exemplo 2 [Rosen, 2019]

- Prove que, $\forall (n \geq 0) \in \mathbb{Z}$, $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 0$, temos $2^0 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$;
2. Passo Inicial: $P(0) = 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:

$$P(k+1) = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{k+1} = \boxed{2^{k+2} - 1}$$

5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \\ &= (2^{k+1} + 2^{k+1}) - 1 = \boxed{2^{k+2} - 1} \end{aligned}$$

Indução Matemática - Exemplo 2 [Rosen, 2019]

- Prove que, $\forall (n \geq 0) \in \mathbb{Z}$, $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 0$, temos $2^0 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$;
2. Passo Inicial: $P(0) = 2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^k = 2^{k+1} - 1$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:
$$P(k+1) \;=\; 2^0 + 2^1 + ... + 2^{k+1} \;=\; \boxed{2^{k+2} - 1}$$
5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:
$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^k + 2^{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \\ &= (2^{k+1} + 2^{k+1}) - 1 = \boxed{2^{k+2} - 1} \end{aligned}$$

Indução Matemática - Exemplo 3 [da Silva, 2012]

- Suponha que um ancestral (geração 0) teve dois filhos, chamados de geração 1. Suponha que cada filho da geração 1 teve dois filhos, de forma que a geração 2 tenha 4 descendentes. Considere que este comportamento siga adiante nas próximas gerações. Mostre que a n-ésima geração possui 2^n descendentes, i.e., $P(n) = 2^n$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 1$, temos $P(n) = 2^n$;
2. Passo Inicial: $P(1) = 2^1 = 2$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 2^k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:
$$P(k+1) \;=\; 2^{(k+1)} = 2 \cdot 2^k$$
5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:
$$P(k+1) = 2 \times P(k) = 2 \times 2^k = 2^1 \times 2^k = 2^{k+1}$$

Indução Matemática - Exemplo 3 [da Silva, 2012]

- Suponha que um ancestral (geração 0) teve dois filhos, chamados de geração 1. Suponha que cada filho da geração 1 teve dois filhos, de forma que a geração 2 tenha 4 descendentes. Considere que este comportamento siga adiante nas próximas gerações. Mostre que a n-ésima geração possui 2^n descendentes, i.e., $P(n) = 2^n$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 1$, temos $P(n) = 2^n$;
2. Passo Inicial: $P(1) = 2^1 = 2$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 2^k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:
$$P(k+1) \;=\; 2^{(k+1)} = 2 \cdot 2^k$$
5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:
$$P(k+1) = 2 \times P(k) = 2 \times 2^k = 2^1 \times 2^k = 2^{k+1}$$

Indução Matemática - Exemplo 3 [da Silva, 2012]

- Suponha que um ancestral (geração 0) teve dois filhos, chamados de geração 1. Suponha que cada filho da geração 1 teve dois filhos, de forma que a geração 2 tenha 4 descendentes. Considere que este comportamento siga adiante nas próximas gerações. Mostre que a n-ésima geração possui 2^n descendentes, i.e., $P(n) = 2^n$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 1$, temos $P(n) = 2^n$;
2. Passo Inicial: $P(1) = 2^1 = 2$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 2^k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:
$$P(k+1) = 2^{(k+1)} = 2 \cdot 2^k$$
5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:
$$P(k+1) = 2 \times P(k) = 2 \times 2^k = 2^1 \times 2^k = 2^{k+1}$$

Indução Matemática - Exemplo 3 [da Silva, 2012]

- Suponha que um ancestral (geração 0) teve dois filhos, chamados de geração 1. Suponha que cada filho da geração 1 teve dois filhos, de forma que a geração 2 tenha 4 descendentes. Considere que este comportamento siga adiante nas próximas gerações. Mostre que a n-ésima geração possui 2^n descendentes, i.e., $P(n) = 2^n$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 1$, temos $P(n) = 2^n$;
2. Passo Inicial: $P(1) = 2^1 = 2$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 2^k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:

$$P(k+1) = 2^{(k+1)} = 2 \cdot 2^k$$

5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$P(k+1) = 2 \times P(k) = 2 \times 2^k = 2^1 \times 2^k = 2^{k+1}$$

Indução Matemática - Exemplo 3 [da Silva, 2012]

- Suponha que um ancestral (geração 0) teve dois filhos, chamados de geração 1. Suponha que cada filho da geração 1 teve dois filhos, de forma que a geração 2 tenha 4 descendentes. Considere que este comportamento siga adiante nas próximas gerações. Mostre que a n-ésima geração possui 2^n descendentes, i.e., $P(n) = 2^n$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 1$, temos $P(n) = 2^n$;
2. Passo Inicial: $P(1) = 2^1 = 2$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 2^k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:

$$P(k+1) = 2^{(k+1)} = 2 \cdot 2^k$$

5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$P(k+1) = 2 \times P(k) = 2 \times 2^k = 2^1 \times 2^k = 2^{k+1}$$

Indução Matemática - Exemplo 3 [da Silva, 2012]

- Suponha que um ancestral (geração 0) teve dois filhos, chamados de geração 1. Suponha que cada filho da geração 1 teve dois filhos, de forma que a geração 2 tenha 4 descendentes. Considere que este comportamento siga adiante nas próximas gerações. Mostre que a n-ésima geração possui 2^n descendentes, i.e., $P(n) = 2^n$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 1$, temos $P(n) = 2^n$;
2. Passo Inicial: $P(1) = 2^1 = 2$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $P(k) = 2^k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Devemos supor verdadeiro:
$$P(k+1) \;=\; 2^{(k+1)} = 2 \cdot 2^k$$
5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:
$$P(k+1) = 2 \times P(k) = 2 \times 2^k = 2^1 \times 2^k = 2^{k+1}$$

Indução Matemática - Exemplo 4 [Rosen, 2019]

- Prove que $n < 2^n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, temos $n < 2^n$;
2. Passo Inicial: $P(1) \; = \; 1 < 2^1 \; = \; 1 < 2$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $k < 2^k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $k + 1 < 2^{k+1}$;
5. Prova: Para $P(k+1)$, podemos supor:

$$k + 1 \leq 2^k + 1 < 2^k + 2^k \;\rightarrow\; k + 1 \leq 2^k + 1 < 2^{k+1}$$

Logo, $k + 1 < 2^{k+1}$ e $\boxed{n < 2^n \;, \forall n \in \mathbb{Z}^+}$

Indução Matemática - Exemplo 4 [Rosen, 2019]

- Prove que $n < 2^n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, temos $n < 2^n$;
2. Passo Inicial: $P(1) \;=\; 1 < 2^1 \;=\; 1 < 2$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $k < 2^k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $k+1 < 2^{k+1}$;
5. Prova: Para $P(k+1)$, podemos supor:

$$k+1 \leq 2^k + 1 < 2^k + 2^k \;\rightarrow\; k+1 \leq 2^k + 1 < 2^{k+1}$$

Logo, $k+1 < 2^{k+1}$ e $\boxed{n < 2^n, \forall n \in \mathbb{Z}^+}$

Indução Matemática - Exemplo 4 [Rosen, 2019]

- Prove que $n < 2^n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, temos $n < 2^n$;
2. Passo Inicial: $P(1) \;=\; 1 < 2^1 \;=\; 1 < 2$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $k < 2^k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $k+1 < 2^{k+1}$;
5. Prova: Para $P(k+1)$, podemos supor:

$$k+1 \leq 2^k + 1 < 2^k + 2^k \;\rightarrow\; k+1 \leq 2^k + 1 < 2^{k+1}$$

Logo, $k+1 < 2^{k+1}$ e $\boxed{n < 2^n, \forall n \in \mathbb{Z}^+}$

Indução Matemática - Exemplo 4 [Rosen, 2019]

- Prove que $n < 2^n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, temos $n < 2^n$;
2. Passo Inicial: $P(1) \; = \; 1 < 2^1 \; = \; 1 < 2$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $k < 2^k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $k+1 < 2^{k+1}$;
5. Prova: Para $P(k+1)$, podemos supor:

$$k+1 \leq 2^k + 1 < 2^k + 2^k \;\rightarrow\; k+1 \leq 2^k + 1 < 2^{k+1}$$

Logo, $k+1 < 2^{k+1}$ e $\boxed{n < 2^n \, , \forall n \in \mathbb{Z}^+}$

Indução Matemática - Exemplo 4 [Rosen, 2019]

- Prove que $n < 2^n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, temos $n < 2^n$;
2. Passo Inicial: $P(1) \ = \ 1 < 2^1 \ = \ 1 < 2$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $k < 2^k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $k+1 < 2^{k+1}$;
5. Prova: Para $P(k+1)$, podemos supor:

$$k+1 \leq 2^k + 1 < 2^k + 2^k \ \rightarrow \ k+1 \leq 2^k + 1 < 2^{k+1}$$

Logo, $k+1 < 2^{k+1}$ e $\boxed{n < 2^n \ , \forall n \in \mathbb{Z}^+}$

Indução Matemática - Exemplo 4 [Rosen, 2019]

- Prove que $n < 2^n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, temos $n < 2^n$;
2. Passo Inicial: $P(1) \ = \ 1 < 2^1 \ = \ 1 < 2$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $k < 2^k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $k + 1 < 2^{k+1}$;
5. Prova: Para $P(k+1)$, podemos supor:

$$k + 1 \leq 2^k + 1 < 2^k + 2^k \ \rightarrow \ k + 1 \leq 2^k + 1 < 2^{k+1}$$

Logo, $k + 1 < 2^{k+1}$ e $\boxed{n < 2^n \ , \forall n \in \mathbb{Z}^+}$

Indução Matemática - Exemplo 5 [Gersting, 2014]

- Prove que $n^2 > 3n$ para $n \geq 4$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 4$, temos $n^2 > 3n$;
2. Passo Inicial: $P(4) \rightarrow 4^2 > 3 \times 4 \rightarrow 16 > 12$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $k^2 > 3k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $(k+1)^2 > 3(k+1)$
5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$(k+1)^2 > 3(k+1) \rightarrow k^2 + (2k+1) > 3k + (3)$$

Temos que $2k+1 > 3$ para $k \geq 4$.

Para $k \geq 4$, temos ainda que $k^2 \geq 4k > 3k$.

Logo, $\boxed{n^2 > 3n \text{ para } n \geq 4}$.

Indução Matemática - Exemplo 5 [Gersting, 2014]

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Prove que $n^2 > 3n$ para $n \geq 4$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 4$, temos $n^2 > 3n$;
2. Passo Inicial: $P(4) \rightarrow 4^2 > 3 \times 4 \rightarrow 16 > 12$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $k^2 > 3k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $(k+1)^2 > 3(k+1)$
5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$(k+1)^2 > 3(k+1) \rightarrow k^2 + (2k+1) > 3k + (3)$$

Temos que $2k+1 > 3$ para $k \geq 4$.

Para $k \geq 4$, temos ainda que $k^2 \geq 4k > 3k$.

Logo, $\boxed{n^2 > 3n \text{ para } n \geq 4}$.

Indução Matemática - Exemplo 5 [Gersting, 2014]

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Prove que $n^2 > 3n$ para $n \geq 4$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 4$, temos $n^2 > 3n$;
2. Passo Inicial: $P(4) \rightarrow 4^2 > 3 \times 4 \rightarrow 16 > 12$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $k^2 > 3k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $(k+1)^2 > 3(k+1)$
5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$(k+1)^2 > 3(k+1) \rightarrow k^2 + (2k+1) > 3k + (3)$$

Temos que $2k+1 > 3$ para $k \geq 4$.

Para $k \geq 4$, temos ainda que $k^2 \geq 4k > 3k$.

Logo, $\boxed{n^2 > 3n \text{ para } n \geq 4}$.

Indução Matemática - Exemplo 5 [Gersting, 2014]

- Prove que $n^2 > 3n$ para $n \geq 4$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 4$, temos $n^2 > 3n$;
2. Passo Inicial: $P(4) \rightarrow 4^2 > 3 \times 4 \rightarrow 16 > 12$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $k^2 > 3k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $(k+1)^2 > 3(k+1)$
5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$(k+1)^2 > 3(k+1) \rightarrow k^2 + (2k+1) > 3k + (3)$$

Temos que $2k+1 > 3$ para $k \geq 4$.

Para $k \geq 4$, temos ainda que $k^2 \geq 4k > 3k$.

Logo, $\boxed{n^2 > 3n \text{ para } n \geq 4}$.

Indução Matemática - Exemplo 5 [Gersting, 2014]

- Prove que $n^2 > 3n$ para $n \geq 4$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 4$, temos $n^2 > 3n$;
2. Passo Inicial: $P(4) \rightarrow 4^2 > 3 \times 4 \rightarrow 16 > 12$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $k^2 > 3k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $(k+1)^2 > 3(k+1)$
5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$(k+1)^2 > 3(k+1) \rightarrow k^2 + (2k+1) > 3k + (3)$$

Temos que $2k + 1 > 3$ para $k \geq 4$.

Para $k \geq 4$, temos ainda que $k^2 \geq 4k > 3k$.

Logo, $\boxed{n^2 > 3n \text{ para } n \geq 4}$.

Indução Matemática - Exemplo 5 [Gersting, 2014]

- Prove que $n^2 > 3n$ para $n \geq 4$.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \geq 4$, temos $n^2 > 3n$;
2. Passo Inicial: $P(4) \rightarrow 4^2 > 3 \times 4 \rightarrow 16 > 12$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $k^2 > 3k$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $(k+1)^2 > 3(k+1)$
5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$(k+1)^2 > 3(k+1) \rightarrow k^2 + (2k+1) > 3k + (3)$$

Temos que $2k + 1 > 3$ para $k \geq 4$.

Para $k \geq 4$, temos ainda que $k^2 \geq 4k > 3k$.

Logo, $\boxed{n^2 > 3n \text{ para } n \geq 4}$.

Indução Matemática - Exemplo 6 [Gersting, 2014]

- Prove que, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, temos $(2^{2n} - 1) = 3m$;
2. Passo Inicial: $P(1) = (2^{2\times 1} - 1) = 3$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $2^{2k} - 1 = 3m \rightarrow \boxed{2^{2k} = 3m + 1}$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $(2^{2(k+1)} - 1) \bmod 3 = 0$
5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$2^{2(k+1)} - 1 \;=\; (2^{2k} \cdot 2^2) - 1 \;=\; 2^2 \cdot 2^{2k} - 1$$

Considerando o passo indutivo, podemos substituir 2^{2k} por $3m + 1$.

$$2^2 \cdot (3m+1) - 1 \;=\; 12m + 4 - 1 \;=\; 12m + 3 \;=\; 3(4m+1)$$

Se $(4m+1) \in \mathbb{Z}$, temos que $\boxed{2^{2n} - 1 \text{ é divisível por } 3}$.

Indução Matemática - Exemplo 6 [Gersting, 2014]

- Prove que, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, temos $(2^{2n} - 1) = 3m$;
2. Passo Inicial: $P(1) = (2^{2\times 1} - 1) = 3$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $2^{2k} - 1 = 3m \rightarrow \boxed{2^{2k} = 3m + 1}$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $(2^{2(k+1)} - 1) \bmod 3 = 0$
5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$2^{2(k+1)} - 1 \ = \ (2^{2k} \cdot 2^2) - 1 \ = \ 2^2 \cdot 2^{2k} - 1$$

Considerando o passo indutivo, podemos substituir 2^{2k} por $3m + 1$.

$$2^2 \cdot (3m + 1) - 1 \ = \ 12m + 4 - 1 \ = \ 12m + 3 \ = \ 3(4m + 1)$$

Se $(4m + 1) \in \mathbb{Z}$, temos que $\boxed{2^{2n} - 1 \text{ é divisível por } 3}$.

Indução Matemática - Exemplo 6 [Gersting, 2014]

- Prove que, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, temos $(2^{2n} - 1) = 3m$;
2. Passo Inicial: $P(1) = (2^{2\times 1} - 1) = 3$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $2^{2k} - 1 = 3m \rightarrow \boxed{2^{2k} = 3m + 1}$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $(2^{2(k+1)} - 1) \bmod 3 = 0$
5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$2^{2(k+1)} - 1 \ = \ (2^{2k} \cdot 2^2) - 1 \ = \ 2^2 \cdot 2^{2k} - 1$$

Considerando o passo indutivo, podemos substituir 2^{2k} por $3m+1$.

$$2^2 \cdot (3m+1) - 1 \ = \ 12m + 4 - 1 \ = \ 12m + 3 \ = \ 3(4m+1)$$

Se $(4m+1) \in \mathbb{Z}$, temos que $\boxed{2^{2n} - 1 \text{ é divisível por } 3}$.

Indução Matemática - Exemplo 6 [Gersting, 2014]

- Prove que, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, temos $(2^{2n} - 1) = 3m$;
2. Passo Inicial: $P(1) = (2^{2\times 1} - 1) = 3$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $2^{2k} - 1 = 3m \rightarrow \boxed{2^{2k} = 3m + 1}$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $(2^{2(k+1)} - 1) \bmod 3 = 0$
5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$2^{2(k+1)} - 1 = (2^{2k} \cdot 2^2) - 1 = 2^2 \cdot 2^{2k} - 1$$

Considerando o passo indutivo, podemos substituir 2^{2k} por $3m + 1$.

$$2^2 \cdot (3m + 1) - 1 = 12m + 4 - 1 = 12m + 3 = 3(4m + 1)$$

Se $(4m + 1) \in \mathbb{Z}$, temos que $\boxed{2^{2n} - 1 \text{ é divisível por } 3}$.

Indução Matemática - Exemplo 6 [Gersting, 2014]

- Prove que, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, temos $(2^{2n} - 1) = 3m$;
2. Passo Inicial: $P(1) = (2^{2\times 1} - 1) = 3$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $2^{2k} - 1 = 3m \rightarrow \boxed{2^{2k} = 3m + 1}$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $(2^{2(k+1)} - 1) \bmod 3 = 0$
5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$2^{2(k+1)} - 1 \;=\; (2^{2k} \cdot 2^2) - 1 \;=\; 2^2 \cdot 2^{2k} - 1$$

Considerando o passo indutivo, podemos substituir 2^{2k} por $3m + 1$.

$$2^2 \cdot (3m+1) - 1 \;=\; 12m + 4 - 1 \;=\; 12m + 3 \;=\; 3(4m+1)$$

Se $(4m+1) \in \mathbb{Z}$, temos que $\boxed{2^{2n} - 1 \text{ é divisível por } 3}$.

Indução Matemática - Exemplo 6 [Gersting, 2014]

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Prove que, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

1. Hipótese de Indução: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, temos $(2^{2n} - 1) = 3m$;
2. Passo Inicial: $P(1) = (2^{2\times 1} - 1) = 3$;
3. Passo Indutivo: Devemos supor $P(k)$ verdadeiro para um valor k arbitrário. Logo $2^{2k} - 1 = 3m \rightarrow \boxed{2^{2k} = 3m + 1}$;
4. Suposição de $P(k+1)$: Supomos: $(2^{2(k+1)} - 1) \bmod 3 = 0$
5. Prova: Para $P(k+1)$, temos:

$$2^{2(k+1)} - 1 \;=\; (2^{2k} \cdot 2^2) - 1 \;=\; 2^2 \cdot 2^{2k} - 1$$

Considerando o passo indutivo, podemos substituir 2^{2k} por $3m + 1$.

$$2^2 \cdot (3m+1) - 1 \;=\; 12m + 4 - 1 \;=\; 12m + 3 \;=\; 3(4m+1)$$

Se $(4m+1) \in \mathbb{Z}$, temos que $\boxed{2^{2n} - 1 \text{ é divisível por } 3}$.

Sequências e Somatórios

Sequências

- Definição 1: Uma sequência é uma função de um subconjunto de $\mathbb{Z}$ (em geral, $\mathbb{Z}^+$) para um conjunto S [Rosen, 2019]
  - Utiliza-se a notação a_n para denotar a imagem de um inteiro n;
  - Nesta notação, a_n é denominado termo da sequência.
- Definição 2: Uma sequência S (infinita) é uma lista de objetos enumerados em alguma ordem [Gersting, 2014]
  - Existe um primeiro objeto, seguido de um segundo objeto, seguido de um terceiro objeto, e assim por diante;
  - A notação $S(k)$ denota o k-ésimo elemento (termo) da sequência.

Sequências - Exemplos

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Considere uma sequência $\{a_n\}$, onde $a_n = 1/n$. Indique os termos dessa sequência.

$$\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

- Exemplo 2: [Rosen, 2019]
  - Considere uma sequência $\{b_n\}$, onde $b_n = 2 \cdot 5^{(n-1)}$. Indique os termos dessa sequência.

$$\{b_n\} = 2, 10, 50, 250, 1250, \ldots$$

Sequências - Exemplos

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Considere uma sequência $\{a_n\}$, onde $a_n = 1/n$. Indique os termos dessa sequência.

$$\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

- Exemplo 2: [Rosen, 2019]
  - Considere uma sequência $\{b_n\}$, onde $b_n = 2 \cdot 5^{(n-1)}$. Indique os termos dessa sequência.

$$\{b_n\} = 2, 10, 50, 250, 1250, \ldots$$

Sequências - Exemplos

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Considere uma sequência $\{a_n\}$, onde $a_n = 1/n$. Indique os termos dessa sequência.

$$\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

- Exemplo 2: [Rosen, 2019]
  - Considere uma sequência $\{b_n\}$, onde $b_n = 2 \cdot 5^{(n-1)}$. Indique os termos dessa sequência.

$$\{b_n\} = 2, 10, 50, 250, 1250, \ldots$$

Sequências - Exemplos

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Considere uma sequência $\{a_n\}$, onde $a_n = 1/n$. Indique os termos dessa sequência.

$$\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

- Exemplo 2: [Rosen, 2019]
  - Considere uma sequência $\{b_n\}$, onde $b_n = 2 \cdot 5^{(n-1)}$. Indique os termos dessa sequência.

$$\{b_n\} = 2, 10, 50, 250, 1250, \ldots$$

Sequências - Progressão

- Progressão Aritmética: sequência contendo um termo inicial $a \in \mathbb{R}$ e uma razão $r \in \mathbb{R}$, que possui a forma:

$$\boxed{S = a, a + r, a + 2r, a + 3r, ..., a + nr}$$

- Progressão Geométrica: sequência contendo um termo inicial $a \in \mathbb{R}$ e uma razão $q \in \mathbb{R}$, que possui a forma:

$$\boxed{S = a, aq, aq^2, aq^3, ..., aq^n}$$

Sequências - Computação

- Sequências finitas na forma $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ são usadas com frequência em ciência da computação e denominadas cadeias (strings) [Rosen, 2019];
  - Uma cadeia pode ser também indicada por $a_0a_1a_2...a_n$;
  - A extensão / tamanho (lenght) de uma cadeia S corresponde ao número de termos dessa cadeia;
  - Uma string vazia é denotada por λ e possui tamanho $= 0$.

Somatórios

Somatórios

- A notação de somatórios permite considerar a adição de termos em uma sequência
  - Para expressar a soma de termos $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ de uma sequência $\{a_n\}$, podemos usar a seguinte notação:

$$\boxed{\sum_{i=m}^{n} a_i}$$

, onde m corresponde ao limite inferior, n corresponde ao limite superior e i corresponde ao índice do somatório.

A escolha de letras para o índice do somatório é indiferente, logo $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{k=m}^{n} a_k$.

Somatórios - Exemplos

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Use a notação de somatórios para representar a soma dos primeiros 100 termos da sequência $\{a_j\}$, onde $a_j = 1/j$, para $j = 1, 2, 3, \ldots$.

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

- Exemplo 2: [Rosen, 2019]
  - Qual o valor de $\sum_{j=1}^{5} j^2$?

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Somatórios - Exemplos

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Use a notação de somatórios para representar a soma dos primeiros 100 termos da sequência $\{a_j\}$, onde $a_j = 1/j$, para $j = 1, 2, 3, \ldots$.

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

- Exemplo 2: [Rosen, 2019]
  - Qual o valor de $\sum_{j=1}^{5} j^2$?

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Somatórios - Exemplos

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Use a notação de somatórios para representar a soma dos primeiros 100 termos da sequência $\{a_j\}$, onde $a_j = 1/j$, para $j = 1, 2, 3, ...$

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

- Exemplo 2: [Rosen, 2019]
  - Qual o valor de $\sum_{j=1}^{5} j^2$?

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Somatórios - Exemplos

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Use a notação de somatórios para representar a soma dos primeiros 100 termos da sequência $\{a_j\}$, onde $a_j = 1/j$, para $j = 1, 2, 3, \ldots$.

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

- Exemplo 2: [Rosen, 2019]
  - Qual o valor de $\sum_{j=1}^{5} j^2$?

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Somatórios - Exemplos

- Exemplo 3:
  - Qual o valor de $\sum_{j=1}^{5} 3j$?

$$\sum_{j=1}^{5} 3j = 3\sum_{j=1}^{5} j = 3(1+2+3+4+5) = 45$$

- Exemplo 4: [Rosen, 2019]
  - Qual o valor de $\sum_{s\in\{0,2,4\}} s$?

$$\sum_{s\in\{0,2,4\}} s = 0+2+4 = 6$$

Somatórios - Exemplos

- Exemplo 3:
  - Qual o valor de $\sum_{j=1}^{5} 3j$?

$$\sum_{j=1}^{5} 3j = 3\sum_{j=1}^{5} j = 3(1+2+3+4+5) = 45$$

- Exemplo 4: [Rosen, 2019]
  - Qual o valor de $\sum_{s\in\{0,2,4\}} s$?

$$\sum_{s\in\{0,2,4\}} s = 0+2+4 = 6$$

Somatórios - Exemplos

- Exemplo 3:
  - Qual o valor de $\sum_{j=1}^{5} 3j$?

$$\sum_{j=1}^{5} 3j = 3\sum_{j=1}^{5} j = 3(1+2+3+4+5) = 45$$

- Exemplo 4: [Rosen, 2019]
  - Qual o valor de $\sum_{s\in\{0,2,4\}} s$?

$$\sum_{s\in\{0,2,4\}} s = 0+2+4 = 6$$

Somatórios - Exemplos

- Exemplo 3:
  - Qual o valor de $\sum_{j=1}^{5} 3j$?

$$\sum_{j=1}^{5} 3j = 3\sum_{j=1}^{5} j = 3(1+2+3+4+5) = 45$$

- Exemplo 4: [Rosen, 2019]
  - Qual o valor de $\sum_{s \in \{0,2,4\}} s$?

$$\sum_{s \in \{0,2,4\}} s = 0 + 2 + 4 = 6$$

Somatórios

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- A tabela abaixo contém a forma fechada[5] de alguns somatórios comuns na literatura:

Sum	***Closed Form***
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \ (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, r \neq 1$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

Fonte: [Rosen, 2019]

[5] A forma fechada corresponde à solução de um dado somatório.

Definição Recursiva

Definição Recursiva

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Uma definição no qual o item que está sendo definido aparece como parte da definição é chamada de Definição Recursiva [Gersting, 2014];
  - O objeto (ou item) é definido em termos de si mesmo;
  - Em alguns casos, existe uma dificuldade da definição explícita de um objeto;
  - A definição do objeto e termos de si mesmo pode ser mais fácil;
  - Esse tipo de processo é chamado de Recursão [Rosen, 2019].

Definição Recursiva

- Uma Definição Recursiva possui duas partes:
  1. Passo Base: alguns casos simples do item a ser definido são explicitamente dados;
  2. Passo Recursivo[6]: novos casos são dados em termos de casos anteriores [Gersting, 2014].

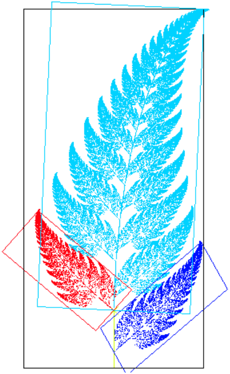
[6] Também chamado de Passo Indutivo [Rosen, 2019].

Definição Recursiva

- Definições recursivas podem ser utilizadas, na Matemática e na Computação, para descrição de:
  - Conjuntos;
  - Operações;
  - *Strings* (cadeia de caracteres);
  - Algoritmos.
- Recursão pode ser utilizada para criação de fractais
  - Fractais são figuras geométricas encontradas na natureza e que apresentam partes separadas que repetem traços do todo completo (padrão repetitivo);
  - Fractais são estudados em Física e Matemática;

Fractais

- Árvores e samambaias são pseudo-fractais que podem ser modelados em computadores que usam algoritmos recursivos.



Fonte: [de Campos, 2006]

Fractais

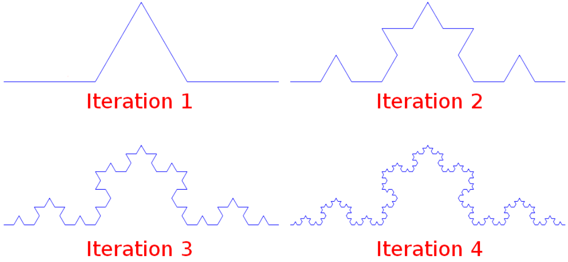
INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

Fonte: [Leidus, 2021]

Fractais - Curva de Koch

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Podemos definir uma Curva de Koch a partir de um segmento de reta, submetido a iterações recursivas:
  1. Dividir o segmento em três segmentos de igual comprimento;
  2. Desenhar um triângulo equilátero, em que o segmento original (passo 1) serve de base;
  3. Apagar o segmento que serviu de base ao triângulo do passo 2.



Fonte: [Scratch Wiki, 2013]

Curiosidade - Acrônimo Recursivo

- Recursão é um assunto tão frequente em Computação que alguns acrônimos, incluindo nome de empresas e tecnologias, utilizam esse recurso;
  - Esse tipo de sigla é chamado de acrônimo recursivo e gera uma definição circular;
  - São exemplos de acrônimos recursivos:
    - PHP[7]: *PHP: Hypertext Preprocessor*;
    - GNU[8]: *GNU is not Unix*;
    - PIP[9]: *PIP Installs Packages*;
    - WINE[10]: *WINE is Not an Emulator*.

[7] PHP é uma linguagem interpretada livre, usada para o desenvolvimento de aplicações web (lado servidor).

[8] GNU é um sistema operacional completo e totalmente composto por software livre. Contém ainda uma an coleção de softwares livres que pode ser utilizado como parte de outros sistemas operacionais.

[9] PIP é um gerenciador de pacotes escrito em Python usado para instalar e gerenciar pacotes de software.

[10] Emulador de open-source de aplicações desenvolvidas em MS Windows para sistemas Unix-like.

Definição Recursiva - Exemplo [Gersting, 2014]

- Uma sequência S é uma lista de objetos enumerados em alguma ordem; existe um primeiro elemento, um segundo e daí em diante [Gersting, 2014].
- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $S(1) = 2$
  2. $S(n) = 2 \cdot S(n-1)$ para $n \geq 2$.
- Indique a sequência representada pela relação de recorrência.
  - Pela definição, o primeiro valor é: $S(1) = 2$;
  - O segundo valor é dado por: $S(2) = 2 \cdot S(1) = 2 \cdot 2 = 4$;
  - O terceiro valor é dado por: $S(3) = 2 \cdot S(2) = 2(4) = 8$;
  - Continuando a sequência, temos: $2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$;

Definição Recursiva - Exemplo [Gersting, 2014]

- Uma sequência S é uma lista de objetos enumerados em alguma ordem; existe um primeiro elemento, um segundo e daí em diante [Gersting, 2014].
- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $S(1) = 2$
  2. $S(n) = 2 \cdot S(n-1)$ para $n \geq 2$.
- Indique a sequência representada pela relação de recorrência.
  - Pela definição, o primeiro valor é: $S(1) = 2$;
  - O segundo valor é dado por: $S(2) = 2 \cdot S(1) = 2 \cdot 2 = 4$;
  - O terceiro valor é dado por: $S(3) = 2 \cdot S(2) = 2(4) = 8$;
  - Continuando a sequência, temos: $2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$;

Definição Recursiva - Ex. Adapt. [Rosen, 2019]

- Considere a função definida abaixo:
  1. $f(0) = 3$
  2. $f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 3$.
- Indique a sequência representada pela relação de recorrência.
  - Pela definição, o primeiro valor é: $f(0) = 3$;
  - O segundo valor, $f(1)$, é dado por: $f(0+1) = 2 \cdot f(0) + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$;
  - O terceiro valor, $f(2)$, é dado por: $f(1+1) = 2 \cdot f(1) + 3 = 2 \cdot 9 + 3 = 21$;
  - O quarto valor, $f(3)$, é dado por: $f(2+1) = 2 \cdot f(2) + 3 = 2 \cdot 21 + 3 = 45$;
  - Continuando a sequência, temos: $3, 9, 21, 45, 93, 189, \ldots$;

Definição Recursiva - Ex. Adapt. [Rosen, 2019]

- Considere a função definida abaixo:
  1. $f(0) = 3$
  2. $f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 3$.
- Indique a sequência representada pela relação de recorrência.
  - Pela definição, o primeiro valor é: $f(0) = 3$;
  - O segundo valor, $f(1)$, é dado por: $f(0+1) = 2 \cdot f(0) + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$;
  - O terceiro valor, $f(2)$, é dado por: $f(1+1) = 2 \cdot f(1) + 3 = 2 \cdot 9 + 3 = 21$;
  - O quarto valor, $f(3)$, é dado por: $f(2+1) = 2 \cdot f(2) + 3 = 2 \cdot 21 + 3 = 45$;
  - Continuando a sequência, temos: $3, 9, 21, 45, 93, 189, \ldots$;

Definição Recursiva - Exemplo [Rosen, 2019]

- Considere o subconjunto S, de um conjunto de inteiros, definido recursivamente como:
  1. $3 \in S$
  2. Se $x \in S$ e $y \in S$, então $x + y \in S$.
- Indique o subconjunto indicado pela definição.
  - Por definição, o subconjunto S na 1ª iteração é: $S = \{3\}$;
  - O subconjunto S na 2ª iteração é: $S = \{3, 6\ (3+3)\}$;
  - O subconjunto S na 3ª iteração é: $S = \{3, 6, 9\ (3+6), 12\ (6+6)\}$;
  - O subconjunto S na 4ª iteração é: $S = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$;

Definição Recursiva - Exemplo [Rosen, 2019]

- Considere o subconjunto S, de um conjunto de inteiros, definido recursivamente como:
  1. $3 \in S$
  2. Se $x \in S$ e $y \in S$, então $x + y \in S$.
- Indique o subconjunto indicado pela definição.
  - Por definição, o subconjunto S na 1ª iteração é: $S = \{3\}$;
  - O subconjunto S na 2ª iteração é: $S = \{3, 6\ (3+3)\}$;
  - O subconjunto S na 3ª iteração é: $S = \{3, 6, 9\ (3+6), 12\ (6+6)\}$;
  - O subconjunto S na 4ª iteração é: $S = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$;

Definição Recursiva - Exemplos [Rosen, 2019]

- Exemplo 1:
  - Indique uma relação recursiva para a definição de $f(n) = a^n$, onde $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{Z}^{0+}$.
    - Passo Base: $f(0) = a^0 = 1$;
    - Passo Recursivo: $f(n) = a \cdot f(n-1)$.
- Exemplo 2:
  - Indique uma relação recursiva para o somatório $\sum_{k=0}^{n} a_k$.
    - Passo Base: $\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$;
    - Passo Recursivo: $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = (\sum_{k=0}^{n} a_k) + a_{n+1}$.
- Exemplo 3:
  - Indique uma relação recursiva para a função de Fibonacci.
    - Passo Base: $f(0) = 1, f(1) = 1$;
    - Passo Recursivo: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.

Definição Recursiva - Exemplos [Rosen, 2019]

- Exemplo 1:
  - Indique uma relação recursiva para a definição de $f(n) = a^n$, onde $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{Z}^{0+}$.
    - Passo Base: $f(0) = a^0 = 1$;
    - Passo Recursivo: $f(n) = a \cdot f(n-1)$.
- Exemplo 2:
  - Indique uma relação recursiva para o somatório $\sum_{k=0}^{n} a_k$.
    - Passo Base: $\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$;
    - Passo Recursivo: $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = (\sum_{k=0}^{n} a_k) + a_{n+1}$.
- Exemplo 3:
  - Indique uma relação recursiva para a função de Fibonacci.
    - Passo Base: $f(0) = 1, f(1) = 1$;
    - Passo Recursivo: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.

Definição Recursiva - Exemplos [Rosen, 2019]

- Exemplo 1:
  - Indique uma relação recursiva para a definição de $f(n) = a^n$, onde $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{Z}^{0+}$.
    - Passo Base: $f(0) = a^0 = 1$;
    - Passo Recursivo: $f(n) = a \cdot f(n-1)$.
- Exemplo 2:
  - Indique uma relação recursiva para o somatório $\sum_{k=0}^{n} a_k$.
    - Passo Base: $\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$;
    - Passo Recursivo: $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = (\sum_{k=0}^{n} a_k) + a_{n+1}$.
- Exemplo 3:
  - Indique uma relação recursiva para a função de Fibonacci.
    - Passo Base: $f(0) = 1, f(1) = 1$;
    - Passo Recursivo: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.

Definição Recursiva - Exemplos [Rosen, 2019]

- Exemplo 1:
  - Indique uma relação recursiva para a definição de $f(n) = a^n$, onde $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{Z}^{0+}$.
    - Passo Base: $f(0) = a^0 = 1$;
    - Passo Recursivo: $f(n) = a \cdot f(n-1)$.
- Exemplo 2:
  - Indique uma relação recursiva para o somatório $\sum_{k=0}^{n} a_k$.
    - Passo Base: $\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$;
    - Passo Recursivo: $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = (\sum_{k=0}^{n} a_k) + a_{n+1}$.
- Exemplo 3:
  - Indique uma relação recursiva para a função de Fibonacci.
    - Passo Base: $f(0) = 1, f(1) = 1$;
    - Passo Recursivo: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.

Definição Recursiva - Exemplos [Rosen, 2019]

- Exemplo 1:
  - Indique uma relação recursiva para a definição de $f(n) = a^n$, onde $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{Z}^{0+}$.
    - Passo Base: $f(0) = a^0 = 1$;
    - Passo Recursivo: $f(n) = a \cdot f(n-1)$.
- Exemplo 2:
  - Indique uma relação recursiva para o somatório $\sum_{k=0}^{n} a_k$.
    - Passo Base: $\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$;
    - Passo Recursivo: $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = (\sum_{k=0}^{n} a_k) + a_{n+1}$.
- Exemplo 3:
  - Indique uma relação recursiva para a função de Fibonacci.
    - Passo Base: $f(0) = 1, f(1) = 1$;
    - Passo Recursivo: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.

Definição Recursiva - Exemplos [Rosen, 2019]

- Exemplo 1:
  - Indique uma relação recursiva para a definição de $f(n) = a^n$, onde $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{Z}^{0+}$.
    - Passo Base: $f(0) = a^0 = 1$;
    - Passo Recursivo: $f(n) = a \cdot f(n-1)$.
- Exemplo 2:
  - Indique uma relação recursiva para o somatório $\sum_{k=0}^{n} a_k$.
    - Passo Base: $\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$;
    - Passo Recursivo: $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = (\sum_{k=0}^{n} a_k) + a_{n+1}$.
- Exemplo 3:
  - Indique uma relação recursiva para a função de Fibonacci.
    - Passo Base: $f(0) = 1, f(1) = 1$;
    - Passo Recursivo: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.

Relações de Recorrência

Relações de Recorrência

- Definição: Uma relação de recorrência para a sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa a_n em termos de um ou mais dos termos anteriores da sequência $(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ [Rosen, 2019]

- Definição: Uma sequência é chamada de solução de uma relação de recorrência se seus termos satisfazem a relação de recorrência [Rosen, 2019].

Relações de Recorrência

- Uma equação que substitui uma relação de recorrência é denominada Solução de Forma Fechada
  - Nessa equação, podemos substituir um valor de entrada e obter o valor de saída diretamente [Gersting, 2014];
  - Matematicamente, uma expressão de forma fechada é um tipo de expressão que utiliza um conjunto finito de operações padrão [van Hoeij, 2017][11];
- Encontrar um solução de forma fechada é chamado de "resolver uma relação de recorrência" [Gersting, 2014].

[11] Dentre as operações estão: $+$, -, $\times$, $\div$, exp, log, raiz (enésima) e funções trigonométricas. Não inclui integrais, derivadas e limites.

Relações de Recorrência - Exemplo [Gersting, 2014]

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $S(1) = 2$
  2. $S(n) = 2 \cdot S(n-1)$ para $n \geq 2$.
- Indique a sequência representada pela relação de recorrência. Defina a forma fechada da solução.
  - Pela definição, o primeiro valor é: $S(1) = 2$;
  - O segundo valor é dado por: $S(2) = 2 \cdot S(1) = 2 \cdot 2 = 4$;
  - O terceiro valor é dado por: $S(3) = 2 \cdot S(2) = 2(4) = 8$;
  - Continuando a sequência, temos: $2, 4, 8, 16, 32, 64, ...$;
  - A forma fechada da solução é dada por: $\boxed{S(n) = 2^n, \forall n \in Z^+}$.

Relações de Recorrência - Exemplo [Gersting, 2014]

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $S(1) = 2$
  2. $S(n) = 2 \cdot S(n-1)$ para $n \geq 2$.
- Indique a sequência representada pela relação de recorrência. Defina a forma fechada da solução.
  - Pela definição, o primeiro valor é: $S(1) = 2$;
  - O segundo valor é dado por: $S(2) = 2 \cdot S(1) = 2 \cdot 2 = 4$;
  - O terceiro valor é dado por: $S(3) = 2 \cdot S(2) = 2(4) = 8$;
  - Continuando a sequência, temos: $2, 4, 8, 16, 32, 64, ...$;
  - A forma fechada da solução é dada por: $\boxed{S(n) = 2^n, \forall n \in Z^+}$.

Relações de Recorrência - Exemplo [Gersting, 2014]

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $S(1) = 2$
  2. $S(n) = 2 \cdot S(n-1)$ para $n \geq 2$.
- Indique a sequência representada pela relação de recorrência. Defina a forma fechada da solução.
  - Pela definição, o primeiro valor é: $S(1) = 2$;
  - O segundo valor é dado por: $S(2) = 2 \cdot S(1) = 2 \cdot 2 = 4$;
  - O terceiro valor é dado por: $S(3) = 2 \cdot S(2) = 2(4) = 8$;
  - Continuando a sequência, temos: $2, 4, 8, 16, 32, 64, ...$;
  - A forma fechada da solução é dada por: $\boxed{S(n) = 2^n, \forall n \in Z^+}$.

Tipos de Relações de Recorrência

- Relações de Recorrência Lineares de Primeira Ordem são relações com a seguinte forma:
  - Passo Base: $S(1) = b$
  - Passo Recursivo: $S(n) = cS(n-1) + g(n)$
- Relações de Recorrência Lineares de Segunda Ordem são relações com a seguinte forma:
  - Passo Base: $S(1) = b_1, S(2) = b_2$
  - Passo Recursivo: $S(n) = c_1 S(n-1) + c_2 S(n-2)$
- Relações de Recorrência de Divisão e Conquista são relações com a seguinte forma:
  - Passo Base: $S(1) = b$
  - Passo Recursivo: $S(n) = cS(\frac{n}{2}) + g(n)$, para $n \geq 2, n = 2^m$.

Tipos de Relações de Recorrência

- Cada tipo de relação de recorrência possui um protocolo mais adequado de solução
  - Nesta disciplina, iremos verificar apenas a solução de relações de recorrência de primeira ordem.
- Para solução de Relações de Primeira Ordem podemos utilizar as seguintes técnicas: [Gersting, 2014]
  1. Expandir, Adivinhar e Verificar;
  2. Fórmula de Solução.

Relações de Recorrência Lineares de Primeira Ordem

Relações Lineares de 1ª Ordem

- A forma geral é dada por:

$$\boxed{S(n) = f_1(n)S(n-1) + f_2(n)S(n-2) + \ldots + f_k(n)S(n-k) + g(n)}$$

- A relação de recorrência possui coeficientes constantes se todas as funções f_i são constantes;
- A relação é chamada de 1ª ordem pois o n-ésimo termo depende somente do termo $n-1$;
- A relação é homogênea se $g(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ [Gersting, 2014].

Na forma geral, f_i e g são expressões envolvendo n.

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

- O objetivo dessa técnica é expandir os termos da relação de recorrência em busca de adivinhar a expressão geral
  - Após definir uma proposta para *n*-ésimo termo, é necessário verificar a expressão, usando Indução Matemática;
- O processo pode ser sumarizado em: [Gersting, 2014]
  1. Expandir a relação de recorrência até que seja possível adivinhar um padrão;
  2. Decidir o padrão para o *k*-ésimo elemento;
     - Para simplificar, suponha que $k = n - 1$;
  3. Verificar a expressão obtida no passo 2 usando Indução Matemática.

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.
- Defina a forma fechada da solução.
  1. Expansão:
     - $T(n) = T(n-1) + 3;$
     - $T(n) = [T(n-2) + 3] + 3 \;=\; T(n-2) + (2 \times 3);$
     - $T(n) = [[T(n-3) + 3] + 3] + 3 \;=\; T(n-3) + (3 \times 3);$
     - ...
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3);$
  2. Suposição:
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3);$
     - Considerando $k = n-1$, temos: $\boxed{T(n) = T(1) + 3(n-1)}$;

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.

- Defina a forma fechada da solução.
  1. Expansão:
     - $T(n) = T(n-1) + 3$;
     - $T(n) = [T(n-2) + 3] + 3 \ = \ T(n-2) + (2 \times 3)$;
     - $T(n) = [[T(n-3) + 3] + 3] + 3 \ = \ T(n-3) + (3 \times 3)$;
     - ...
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3)$;
  2. Suposição:
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3)$;
     - Considerando $k = n-1$, temos: $\boxed{T(n) = T(1) + 3(n-1)}$;

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.
- Defina a forma fechada da solução.
  1. Expansão:
     - $T(n) = T(n-1) + 3$;
     - $T(n) = [T(n-2) + 3] + 3 = T(n-2) + (2 \times 3)$;
     - $T(n) = [[T(n-3) + 3] + 3] + 3 = T(n-3) + (3 \times 3)$;
     - ...
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3)$;
  2. Suposição:
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3)$;
     - Considerando $k = n - 1$, temos: $\boxed{T(n) = T(1) + 3(n-1)}$;

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.

- Defina a forma fechada da solução.
  1. Expansão:
     - $T(n) = T(n-1) + 3$;
     - $T(n) = [T(n-2) + 3] + 3 \;=\; T(n-2) + (2 \times 3)$;
     - $T(n) = [[T(n-3) + 3] + 3] + 3 \;=\; T(n-3) + (3 \times 3)$;
     - ...
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3)$;
  2. Suposição:
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3)$;
     - Considerando $k = n-1$, temos: $\boxed{T(n) = T(1) + 3(n-1)}$;

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.

- Defina a forma fechada da solução.
  1. Expansão:
     - $T(n) = T(n-1) + 3$;
     - $T(n) = [T(n-2) + 3] + 3 \;=\; T(n-2) + (2 \times 3)$;
     - $T(n) = [[T(n-3) + 3] + 3] + 3 \;=\; T(n-3) + (3 \times 3)$;
     - ...
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3)$;
  2. Suposição:
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3)$;
     - Considerando $k = n-1$, temos: $\boxed{T(n) = T(1) + 3(n-1)}$;

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.

- Defina a forma fechada da solução.
  1. Expansão:
     - $T(n) = T(n-1) + 3$;
     - $T(n) = [T(n-2) + 3] + 3 \ = \ T(n-2) + (2 \times 3)$;
     - $T(n) = [[T(n-3) + 3] + 3] + 3 \ = \ T(n-3) + (3 \times 3)$;
     - ...
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3)$;
  2. Suposição:
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3)$;
     - Considerando $k = n - 1$, temos: $\boxed{T(n) = T(1) + 3(n-1)}$;

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.

- Defina a forma fechada da solução.
  1. Expansão:
     - $T(n) = T(n-1) + 3;$
     - $T(n) = [T(n-2) + 3] + 3 \;=\; T(n-2) + (2 \times 3);$
     - $T(n) = [[T(n-3) + 3] + 3] + 3 \;=\; T(n-3) + (3 \times 3);$
     - ...
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3);$
  2. Suposição:
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3);$
     - Considerando $k = n-1$, temos: $\boxed{T(n) = T(1) + 3(n-1)}$;

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.

- Defina a forma fechada da solução.
  1. Expansão:
     - $T(n) = T(n-1) + 3;$
     - $T(n) = [T(n-2) + 3] + 3 \;=\; T(n-2) + (2 \times 3);$
     - $T(n) = [[T(n-3) + 3] + 3] + 3 \;=\; T(n-3) + (3 \times 3);$
     - ...
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3);$
  2. Suposição:
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3);$
     - Considerando $k = n - 1$, temos: $\boxed{T(n) = T(1) + 3(n-1)}$;

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.

- Defina a forma fechada da solução.
  1. Expansão:
     - $T(n) = T(n-1) + 3$;
     - $T(n) = [T(n-2) + 3] + 3 \;=\; T(n-2) + (2 \times 3)$;
     - $T(n) = [[T(n-3) + 3] + 3] + 3 \;=\; T(n-3) + (3 \times 3)$;
     - ...
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3)$;
  2. Suposição:
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3)$;
     - Considerando $k = n - 1$, temos: $\boxed{T(n) = T(1) + 3(n-1)}$;

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.

- Defina a forma fechada da solução.
  1. Expansão:
     - $T(n) = T(n-1) + 3$;
     - $T(n) = [T(n-2) + 3] + 3 \;=\; T(n-2) + (2 \times 3)$;
     - $T(n) = [[T(n-3) + 3] + 3] + 3 \;=\; T(n-3) + (3 \times 3)$;
     - ...
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3)$;
  2. Suposição:
     - $T(n) = T(n-k) + (k \times 3)$;
     - Considerando $k = n - 1$, temos: $\boxed{T(n) = T(1) + 3(n-1)}$;

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.
- Defina a forma fechada da solução.
  3. Verificação:
     1. Hipótese: $T(n) = T(1) + 3(n-1) \; = \; 1 + 3(n-1)$;
     2. Caso base: $T(1) = 1 + 3(1-1) = 1$;
     3. Assumir verdadeiro: $T(k) = 1 + 3(k-1)$;
     4. $T(k+1)$: $T(k+1) = 1 + 3(k+1-1) \; = \; \boxed{1+3k}$;
     5. Prova: $T(k+1) =$
        $T(k) + 3 \; = \; 1 + 3(k-1) + 3 \; = \; 1 + 3k - 3 + 3 \; = \; \boxed{1+3k}$
     6. Fórmula geral: $\boxed{T(n) = 1 + 3(n-1)}$.

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.
- Defina a forma fechada da solução.
  3. Verificação:
     1. Hipótese: $T(n) = T(1) + 3(n-1) = 1 + 3(n-1)$;
     2. Caso base: $T(1) = 1 + 3(1-1) = 1$;
     3. Assumir verdadeiro: $T(k) = 1 + 3(k-1)$;
     4. $T(k+1)$: $T(k+1) = 1 + 3(k+1-1) = \boxed{1+3k}$;
     5. Prova: $T(k+1) =$
        $T(k) + 3 = 1 + 3(k-1) + 3 = 1 + 3k - 3 + 3 = \boxed{1+3k}$
     6. Fórmula geral: $\boxed{T(n) = 1 + 3(n-1)}$.

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.
- Defina a forma fechada da solução.
  3. Verificação:
     1. Hipótese: $T(n) = T(1) + 3(n-1) = 1 + 3(n-1)$;
     2. Caso base: $T(1) = 1 + 3(1-1) = 1$;
     3. Assumir verdadeiro: $T(k) = 1 + 3(k-1)$;
     4. $T(k+1)$: $T(k+1) = 1 + 3(k+1-1) = \boxed{1+3k}$;
     5. Prova: $T(k+1) =$
        $T(k) + 3 = 1 + 3(k-1) + 3 = 1 + 3k - 3 + 3 = \boxed{1+3k}$
     6. Fórmula geral: $\boxed{T(n) = 1 + 3(n-1)}$.

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Considere a sequência definida abaixo:
    1. $T(1) = 1$
    2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.
- Defina a forma fechada da solução.
    3. Verificação:
        1. Hipótese: $T(n) = T(1) + 3(n-1) \; = \; 1 + 3(n-1)$;
        2. Caso base: $T(1) = 1 + 3(1-1) = 1$;
        3. Assumir verdadeiro: $T(k) = 1 + 3(k-1)$;
        4. $T(k+1)$: $T(k+1) = 1 + 3(k+1-1) \; = \; \boxed{1+3k}$;
        5. Prova: $T(k+1) =$
           $T(k) + 3 \; = \; 1 + 3(k-1) + 3 \; = \; 1 + 3k - 3 + 3 \; = \; \boxed{1+3k}$
        6. Fórmula geral: $\boxed{T(n) = 1 + 3(n-1)}$.

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.
- Defina a forma fechada da solução.
  3. Verificação:
     1. Hipótese: $T(n) = T(1) + 3(n-1) \; = \; 1 + 3(n-1)$;
     2. Caso base: $T(1) = 1 + 3(1-1) = 1$;
     3. Assumir verdadeiro: $T(k) = 1 + 3(k-1)$;
     4. $T(k+1)$: $T(k+1) = 1 + 3(k+1-1) \; = \; \boxed{1 + 3k}$;
     5. Prova: $T(k+1) =$
        $T(k) + 3 \; = \; 1 + 3(k-1) + 3 \; = \; 1 + 3k - 3 + 3 \; = \; \boxed{1 + 3k}$
     6. Fórmula geral: $\boxed{T(n) = 1 + 3(n-1)}$.

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.
- Defina a forma fechada da solução.
  3. Verificação:
     1. Hipótese: $T(n) = T(1) + 3(n-1) \;=\; 1 + 3(n-1)$;
     2. Caso base: $T(1) = 1 + 3(1-1) = 1$;
     3. Assumir verdadeiro: $T(k) = 1 + 3(k-1)$;
     4. $T(k+1)$: $T(k+1) = 1 + 3(k+1-1) \;=\; \boxed{1 + 3k}$;
     5. Prova: $T(k+1) =$
        $T(k) + 3 \;=\; 1 + 3(k-1) + 3 \;=\; 1 + 3k - 3 + 3 \;=\; \boxed{1 + 3k}$
     6. Fórmula geral: $\boxed{T(n) = 1 + 3(n-1)}$.

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.

- Defina a forma fechada da solução.
  3. Verificação:
     1. Hipótese: $T(n) = T(1) + 3(n-1) \ = \ 1 + 3(n-1)$;
     2. Caso base: $T(1) = 1 + 3(1-1) = 1$;
     3. Assumir verdadeiro: $T(k) = 1 + 3(k-1)$;
     4. $T(k+1)$: $T(k+1) = 1 + 3(k+1-1) \ = \ \boxed{1 + 3k}$;
     5. Prova: $T(k+1) =$
        $T(k) + 3 \ = \ 1 + 3(k-1) + 3 \ = \ 1 + 3k - 3 + 3 \ = \ \boxed{1 + 3k}$
     6. Fórmula geral: $\boxed{T(n) = 1 + 3(n-1)}$.

Relações 1ª Ordem - Expandir, Adivinhar e Verificar

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.
- Defina a forma fechada da solução.
  3. Verificação:
     1. Hipótese: $T(n) = T(1) + 3(n-1) \;=\; 1 + 3(n-1)$;
     2. Caso base: $T(1) = 1 + 3(1-1) = 1$;
     3. Assumir verdadeiro: $T(k) = 1 + 3(k-1)$;
     4. $T(k+1)$: $T(k+1) = 1 + 3(k+1-1) \;=\; \boxed{1 + 3k}$;
     5. Prova: $T(k+1) =$
        $T(k) + 3 \;=\; 1 + 3(k-1) + 3 \;=\; 1 + 3k - 3 + 3 \;=\; \boxed{1 + 3k}$
     6. Fórmula geral: $\boxed{T(n) = 1 + 3(n-1)}$.

Relações 1ª Ordem - Fórmula de Solução

- O objetivo da técnica é utilizar uma forma genérica para transformar a relação de recorrência em uma expressão geral;
- Podemos gerar a equação a partir do seguinte procedimento:
  - $S(n) = cS(n-1) + g(n)$;
  - $S(n) = c[cS(n-2) + g(n-1)] + g(n)$;
  - $S(n) = c^2S(n-2) + cg(n-1) + g(n)$;
  - $S(n) = c^2[cS(n-3) + g(n-2)] + cg(n-1) + g(n)$;
  - $S(n) = c^3S(n-3) + c^2g(n-2) + cg(n-1) + g(n)$;
  - ...
  - $S(n) = c^kS(n-k) + c^{k-1}g(n-(k-1)) + ... + cg(n-1) + g(n)$

Relações 1ª Ordem - Fórmula de Solução

- De forma genérica, podemos fazer $n = k + 1$. Logo:
  - $S(n) = c^k S(n-k) + c^{k-1} g(n-(k-1)) + \ldots + cg(n-1) + g(n)$
  - $S(n) = c^{n-1} S(1) + c^{n-2} g(2) + \ldots + c^1 g(n-1) + c^0 g(n)$
- Podemos utilizar a notação de somatório ($\sum$);
- Utilizando a notação de somatório, a fórmula de solução é definida por:

$$\boxed{S(n) = c^{n-1} S(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i} g(i)}$$

Suponha a sequência $S(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$. A sequência pode ser representada por $\sum_{i=1}^{n}(i)$.

Suponha a sequência $S(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 101$. A sequência pode ser representada por $\sum_{i=0}^{50}(2n+1)$.

Relações 1ª Ordem - Fórmula de Solução

- O processo pode ser sumarizado em: [Gersting, 2014]
  1. Combinar a relação de recorrência com a fórmula abaixo, para encontrar c e $g(n)$;

$$S(n) = cS(n-1) + g(n)$$

  2. Usar c, $g(n)$ e $S(1)$ na fórmula;

$$S(n) = c^{n-1}S(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i}g(i)$$

  3. Avaliar o somatório para obter a expressão final.

Relações 1ª Ordem - Fórmula de Solução

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.
- Defina a forma fechada da solução.
  1. Temos que: $T(n) = 1 \times T(n-1) + 3$;
  2. Logo: $c = 1$ e $g(n) = 3$;
  3. Fórmula: $T(n) = c^{n-1}T(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i}g(i)$;
  4. Substituindo: $T(n) = 1^{(n-1)}T(1) + \sum_{i=2}^{n} 1^{(n-i)}3 = 1 + 3\sum_{i=2}^{n} 1 = \boxed{1 + 3(n-1)}$.

O somatório $\sum_{i=2}^{n} 1$ corresponde a fazer $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ por $(n-1)$ vezes.

Número termos (NT) somatório: $NT = (LS - LI) + 1$, onde LS é o limite superior e LI é o limite inferior.

Relações 1ª Ordem - Fórmula de Solução

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.
- Defina a forma fechada da solução.
  1. Temos que: $T(n) = 1 \times T(n-1) + 3$;
  2. Logo: $c = 1$ e $g(n) = 3$;
  3. Fórmula: $T(n) = c^{n-1}T(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i}g(i)$;
  4. Substituindo: $T(n) =$
     $1^{(n-1)}T(1) + \sum_{i=2}^{n} 1^{(n-i)}3 \; = \; 1 + 3\sum_{i=2}^{n} 1 \; = \; \boxed{1 + 3(n-1)}$.

O somatório $\sum_{i=2}^{n} 1$ corresponde a fazer $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ por $(n-1)$ vezes.

Número termos (NT) somatório: $NT = (LS - LI) + 1$, onde LS é o limite superior e LI é o limite inferior.

Relações 1ª Ordem - Fórmula de Solução

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.
- Defina a forma fechada da solução.
  1. Temos que: $T(n) = 1 \times T(n-1) + 3$;
  2. Logo: $c = 1$ e $g(n) = 3$;
  3. Fórmula: $T(n) = c^{n-1}T(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i}g(i)$;
  4. Substituindo: $T(n) =$
     $1^{(n-1)}T(1) + \sum_{i=2}^{n} 1^{(n-i)}3 \;=\; 1 + 3\sum_{i=2}^{n} 1 \;=\; \boxed{1 + 3(n-1)}$.

O somatório $\sum_{i=2}^{n} 1$ corresponde a fazer $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ por $(n-1)$ vezes.

Número termos (NT) somatório: $NT = (LS - LI) + 1$, onde LS é o limite superior e LI é o limite inferior.

Relações 1ª Ordem - Fórmula de Solução

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.
- Defina a forma fechada da solução.
  1. Temos que: $T(n) = 1 \times T(n-1) + 3$;
  2. Logo: $c = 1$ e $g(n) = 3$;
  3. Fórmula: $T(n) = c^{n-1}T(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i}g(i)$;
  4. Substituindo: $T(n) = 1^{(n-1)}T(1) + \sum_{i=2}^{n} 1^{(n-i)}3 = 1 + 3\sum_{i=2}^{n} 1 = \boxed{1 + 3(n-1)}$.

O somatório $\sum_{i=2}^{n} 1$ corresponde a fazer $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ por $(n-1)$ vezes.

Número termos (NT) somatório: $NT = (LS - LI) + 1$, onde LS é o limite superior e LI é o limite inferior.

Relações 1ª Ordem - Fórmula de Solução

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.

- Defina a forma fechada da solução.
  1. Temos que: $T(n) = 1 \times T(n-1) + 3$;
  2. Logo: $c = 1$ e $g(n) = 3$;
  3. Fórmula: $T(n) = c^{n-1}T(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i}g(i)$;
  4. Substituindo: $T(n) = 1^{(n-1)}T(1) + \sum_{i=2}^{n} 1^{(n-i)}3 \;=\; 1 + 3\sum_{i=2}^{n} 1 \;=\; \boxed{1 + 3(n-1)}$.

O somatório $\sum_{i=2}^{n} 1$ corresponde a fazer $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ por $(n-1)$ vezes.

Número termos (NT) somatório: $NT = (LS - LI) + 1$, onde LS é o limite superior e LI é o limite inferior.

Relações 1ª Ordem - Fórmula de Solução

- Considere a sequência definida abaixo:
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$, para $n \geq 2$.
- Defina a forma fechada da solução.
  1. Temos que: $T(n) = 1 \times T(n-1) + 3$;
  2. Logo: $c = 1$ e $g(n) = 3$;
  3. Fórmula: $T(n) = c^{n-1}T(1) + \sum_{i=2}^{n} c^{n-i}g(i)$;
  4. Substituindo: $T(n) =$ $1^{(n-1)}T(1) + \sum_{i=2}^{n} 1^{(n-i)}3 \; = \; 1 + 3\sum_{i=2}^{n} 1 \; = \; \boxed{1 + 3(n-1)}$.

O somatório $\sum_{i=2}^{n} 1$ corresponde a fazer $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ por $(n-1)$ vezes.

Número termos (NT) somatório: $NT = (LS - LI) + 1$, onde LS é o limite superior e LI é o limite inferior.

Referências I

da Silva, D. M. (2012).
Slides de aula.

de Campos, A. M. (2006).
Fractal.
[Online]; acessado em 21 de Março de 2021. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal.

Gersting, J. L. (2014).
Mathematical Structures for Computer Science.
W. H. Freeman and Company, 7 edition.

Lachmann-Anke, M. (2021).
Domino.
[Online]; acessado em 17 de Março de 2021. Disponível em:
https://pixabay.com/illustrations/mikado-domino-stones-pay-steinchen-1013878/.

Leidus, I. (2021).
Fractal.
[Online]; acessado em 21 de Março de 2021. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal.

Levin, O. (2019).
Discrete Mathematics - An Open Introduction.
University of Northern Colorado, 7 edition.
[Online] Disponível em http://discrete.openmathbooks.org/dmoi3.html.

Referências II

Rosen, K. H. (2019).
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill, 8 edition.

Scratch Wiki (2013).
Fractal.
[Online]; acessado em 21 de Março de 2021. Disponível em:
https://en.scratch-wiki.info/wiki/File:Iterations_of_Koch_Curve.png.

van Hoeij, M. (2017).
Closed form solutions.
[Online]; acessado em 25 de Março de 2021. Disponível em:
https://www.math.fsu.edu/~hoeij/issac2017.pdf.