Matemática Discreta

Funções

Felipe Augusto Lima Reis
felipe.reis@ifmg.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

Sumário

Introdução

Introdução

- O conceito de funções é extremamente importante em Matemática e Computação [Rosen, 2019]
  - São usadas em Cálculo e Álgebra, para expressar relações funcionais entre um valor x e o valor correspondente após a manipulação de x em uma equação [Gersting, 2014];

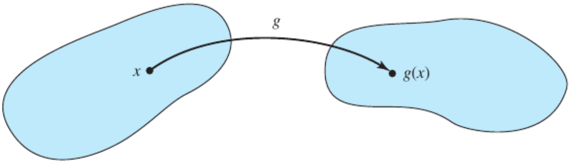
$$f(x) = x^3$$

  - São usadas em Computação, para representação e cálculo numérico de funções matemáticas
    - Podem ser utilizadas para definição de funções recursivas[1];
    - Em uma abstração, são tratadas também como sinônimos de rotinas, do qual um bloco de código será executado para um conjunto de variáveis e produzirá zero ou mais saídas.

[1] Funções recursivas correspondem a funções que são calculadas em termos de si mesmo.

Introdução

- Em Matemática Discreta, funções podem representar estruturas discretas, como sequências e strings;
- São denominadas também mapeamentos ou transformações [Rosen, 2019].



Fonte: [Gersting, 2014]

Terminologia

Função

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

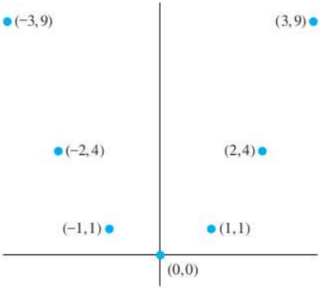
- Definição 1: Considerando A e B conjuntos não vazios, uma função f de A para B é uma determinação de exatamente um elemento de B para cada elemento de A [Rosen, 2019].
  - Escreve-se $f(a) = b$ se b é um elemento único em B determinado pela função f para o elemento $a \in A$;
  - Se f é uma função de A para B, utiliza-se a notação $f : A \to B$ [Rosen, 2019].

Função

- Definição 2: Se $f : A \to B$ é um subconjunto de $A \times B$ onde cada membro de A aparece exatamente como o primeiro componente de um par ordenado (a, b) [Gersting, 2014].
  - Pode ser definida como um tipo especial de relação binária um-para-um ou muitos-para-um;
  - Podem ser considerados subconjuntos que contém restrições especiais no produto cartesiano $A \times B$;
  - Cada membro de A deve ser usado sempre como primeiro elemento na tupla (a, b) [Gersting, 2014].

Função

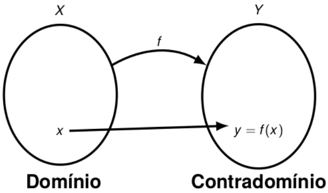
- Funções podem ser representadas graficamente
  - Se f é uma função $f : X \to Y$, o gráfico de f é o conjunto de pares ordenados $\{(x, y) \mid x \in X \text{ e } y = f(x)\}$.



Fonte: [da Silva, 2012]

Domínio, Contradomínio, Imagem e Pré-imagem

- Definição 1: Se f é uma função de A para B, dizemos que A é o domínio de f e B é o contradomínio de f [Rosen, 2019].
- Definição 2: Se $f(a) = b$, então b é denominada imagem de a e a é denominado imagem inversa ou pré-imagem de b
  - A imagem de f é o conjunto com todas as imagens dos elementos de A [Rosen, 2019] [da Silva, 2012];
  - Se $f : A \to B$, então f mapeia A em B.



Fonte: [da Silva, 2012]

Domínio, Contradomínio, Imagem e Pré-imagem

- Nota 1: O contradomínio de $f : A \rightarrow B$ é um conjunto de todos os valores possíveis da função f (todos elementos de B).
  - O intervalo de $f(a), \forall a \in A$ é sempre um subconjunto do contradomínio [Rosen, 2019];
- Nota 2: Domínio e contradomínio estão relacionados aos conjuntos, enquanto imagem e pré-imagem estão relacionados aos elementos.
  - Uma função é uma relação entre conjuntos de domínio e contradomínio;
  - Para cada elemento do domínio, existirá um elemento no contradomínio, e esse elemento correspondente é definido como imagem.

Domínio e Contradomínio

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Exemplo 1: Inspirado em [Rosen, 2019]
  - Considere R a relação entre estudantes de uma disciplina do IFMG e suas idades, representado pelos pares ordenados *(João, 30), (Maria, 20), (Pedro, 25), (Ana, 28), (Lucas, 27)*.
  - Defina uma função f que represente a relação. Indique o domínio, o contradomínio do conjunto
    - Função f: *f(x) é a idade de x, onde x é um estudante.*

      f(João) = 30, f(Maria) = 20, ..., f(Lucas) = 27.
    - Domínio: A = { *João, Maria, Pedro, Ana, Lucas* };
    - Contradomínio: B = { *0, 1, ..., 99, 100* }, correspondente às possíveis idades dos estudantes do IFMG.

O contradomínio escolhido não precisa corresponder exatamente ao conjunto de domínio atual (e essa situação não é recomendada). Novos valores de domínio não exigiriam de uma atualização no contradomínio.

Domínio e Contradomínio

- Exemplo 1: Inspirado em [Rosen, 2019]
  - Considere R a relação entre estudantes de uma disciplina do IFMG e suas idades, representado pelos pares ordenados *(João, 30), (Maria, 20), (Pedro, 25), (Ana, 28), (Lucas, 27)*.
  - Defina uma função f que represente a relação. Indique o domínio, o contradomínio do conjunto
    - Função f: *f(x) é a idade de x, onde x é um estudante.*

      $f(\text{João}) = 30$, $f(\text{Maria}) = 20$, ..., $f(\text{Lucas}) = 27$.
    - Domínio: $A = \{ \text{João, Maria, Pedro, Ana, Lucas} \}$;
    - Contradomínio: $B = \{ 0, 1, ..., 99, 100 \}$, correspondente às possíveis idades dos estudantes do IFMG.

O contradomínio escolhido não precisa corresponder exatamente ao conjunto de domínio atual (e essa situação não é recomendada). Novos valores de domínio não exigiriam de uma atualização no contradomínio.

Domínio e Contradomínio

- Exemplo 2:
  - Para uma função f abaixo, em uma linguagem de programação tipada, indique o domínio e contradomínio.

$$\boxed{\textbf{int } f(\textbf{float } x)\{...\}}$$

- Domínio: float - *números em pontos flutuantes ("reais")*;
- Contradomínio: int - *números inteiros*.

A função f receberá como parâmetro um número "real" x e retornará um valor inteiro.

A função f poderá ser executada com o comando $b = f(a)$ ou $b = f(10)$, onde a e b são variáveis.

Domínio e Contradomínio

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Exemplo 2:
  - Para uma função f abaixo, em uma linguagem de programação tipada, indique o domínio e contradomínio.

$$\boxed{\textbf{int } f(\textbf{float } x)\{...\}}$$

- Domínio: float - *números em pontos flutuantes ("reais")*;
- Contradomínio: int - *números inteiros*.

A função f receberá como parâmetro um número "real" x e retornará um valor inteiro.

A função f poderá ser executada com o comando $b = f(a)$ ou $b = f(10)$, onde a e b são variáveis.

Igualdade de Funções

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Definição: Duas funções são iguais se elas possuem o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e podem mapear um mesmo elemento do domínio em um mesmo elemento do contradomínio [Gersting, 2014] [Rosen, 2019].

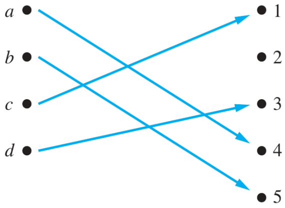
Tipos de Funções

Função Injetora

- Definição 1: Uma função f é injetora se, e somente se, $f(a) = f(b)$ implicar que $a = b$ para todo a e b pertencente ao domínio de f [Rosen, 2019].
- Definição 2: Uma função $f : A \to B$ é injetora se nenhum membro de B for uma imagem para dois elementos distintos de A [Gersting, 2014].
- Definição Formal: $\forall x_i \forall x_j (f(x_i) = f(x_j) \to x_i = x_j)$.

Função Injetora

- Definição Informal: Em uma função $f : A \rightarrow B$ cada elemento do domínio estará associado a um elemento diferente no contradomínio.
    - Um elemento no contradomínio estará associado zero ou um elementos do domínio;
    - A função pode ser associada a uma relação um-para-um.



Fonte: [Rosen, 2019]

Função Injetora

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Exemplo 1:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função injetora?
    - Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que $f(x) = f(y)$ somente se $x = y$.
- Exemplo 2:
  - Uma função $f(x) = x^2$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função injetora?
    - Não. Podemos utilizar a prova por **contra-exemplo**.
    - Supondo $x = 1$ e $y = -1$, temos que $f(x) = f(y)$, o que contraria a definição de funções injetoras.

Função Injetora

- Exemplo 1:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função injetora?
    - Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que $f(x) = f(y)$ somente se $x = y$.
- Exemplo 2:
  - Uma função $f(x) = x^2$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função injetora?
    - Não. Podemos utilizar a prova por **contra-exemplo**.
    - Supondo $x = 1$ e $y = -1$, temos que $f(x) = f(y)$, o que contraria a definição de funções injetoras.

Função Injetora

- Exemplo 1:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função injetora?
    - Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que $f(x) = f(y)$ somente se $x = y$.
- Exemplo 2:
  - Uma função $f(x) = x^2$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função injetora?
    - Não. Podemos utilizar a prova por **contra-exemplo**.
    - Supondo $x = 1$ e $y = -1$, temos que $f(x) = f(y)$, o que contraria a definição de funções injetoras.

Função Injetora

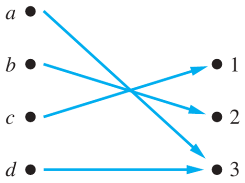
- Exemplo 1:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função injetora?
    - Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que $f(x) = f(y)$ somente se $x = y$.
- Exemplo 2:
  - Uma função $f(x) = x^2$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função injetora?
    - Não. Podemos utilizar a prova por **contra-exemplo**.
    - Supondo $x = 1$ e $y = -1$, temos que $f(x) = f(y)$, o que contraria a definição de funções injetoras.

Função Sobrejetora

- Definição 1: Uma função $f : A \to B$ é sobrejetora se, e somente se, para cada elemento de $b \in B$ existir um elemento $a \in A$ com $f(a) = b$ [Rosen, 2019].
- Definição 2: Uma função $f : A \to B$ é sobrejetora se o intervalo de f é igual ao contradomínio de f [Gersting, 2014].
- Definição Formal: $\forall y \exists x (f(x) = y)$.

Função Sobrejetora

- Definição Informal: Em uma função $f : A \rightarrow B$, cada elemento $b \in B$ deve ter um elemento correspondente $a \in A$, mapeado pela função f.
  - Se houver um elemento no contradomínio que não possui um elemento correspondente no domínio, então a função não será sobrejetora.
  - A função pode ser associada à relação muitos-para-um (mas não um-para-muitos!).



Fonte: [Rosen, 2019]

Função Sobrejetora

- Exemplo 1:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função sobrejetora?
    - Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos um valor x tal que $f(x) = y$.
- Exemplo 2:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros positivos, mapeada em si mesmo, é sobrejetora?
    - Não. Pois para $y = 1$, não existe nenhum inteiro positivo tal que $f(x) = y$.

Função Sobrejetora

- Exemplo 1:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função sobrejetora?
    - Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos um valor x tal que $f(x) = y$.
- Exemplo 2:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros positivos, mapeada em si mesmo, é sobrejetora?
    - Não. Pois para $y = 1$, não existe nenhum inteiro positivo tal que $f(x) = y$.

Função Sobrejetora

- Exemplo 1:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função sobrejetora?
    - Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos um valor x tal que $f(x) = y$.
- Exemplo 2:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros positivos, mapeada em si mesmo, é sobrejetora?
    - Não. Pois para $y = 1$, não existe nenhum inteiro positivo tal que $f(x) = y$.

Função Sobrejetora

- Exemplo 1:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função sobrejetora?
    - Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos um valor x tal que $f(x) = y$.
- Exemplo 2:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros positivos, mapeada em si mesmo, é sobrejetora?
    - Não. Pois para $y = 1$, não existe nenhum inteiro positivo tal que $f(x) = y$.

Função Sobrejetora

- Exemplo 3: [Rosen, 2019]
  - Uma função $f(x) = x^2$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função sobrejetora?
    - Não, pois não existe nenhum número inteiro negativo x tal que $x^2 < 0$;
    - (alternativa) Não, pois alguns números não possuem raiz quadrada inteira exata.

Função Sobrejetora

- Exemplo 3: [Rosen, 2019]
  - Uma função $f(x) = x^2$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função sobrejetora?
    - Não, pois não existe nenhum número inteiro negativo x tal que $x^2 < 0$;
    - (alternativa) Não, pois alguns números não possuem raiz quadrada inteira exata.

Função Sobrejetora

- Exemplo 3: [Rosen, 2019]
  - Uma função $f(x) = x^2$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função sobrejetora?
    - Não, pois não existe nenhum número inteiro negativo x tal que $x^2 < 0$;
    - (alternativa) Não, pois alguns números não possuem raiz quadrada inteira exata.

Função Sobrejetora

- Exemplo 4: [Gersting, 2014]
  - Uma função $f(x) = x^3$ em um conjunto dos números reais, mapeada em si mesmo, é uma função sobrejetora?
    - Sim. Para prova, considere que $f(x)$ é sobrejetora e r corresponde a um valor real arbitrário.
    - Considere $x = \sqrt[3]{r}$, onde x pertence ao domínio de f.
    - Temos então, $f(x) = (\sqrt[3]{r})^3 = r$.
    - Logo, qualquer membro do contradomínio é uma imagem sob um função f de um membro do domínio.

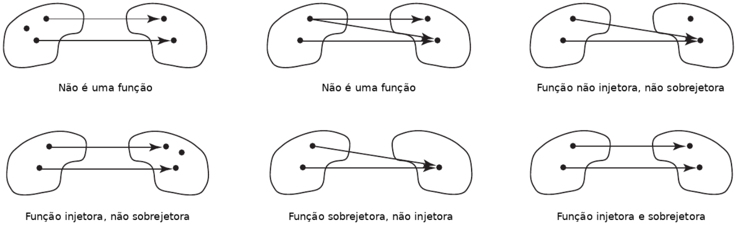
Função Sobrejetora

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Exemplo 4: [Gersting, 2014]
    - Uma função $f(x) = x^3$ em um conjunto dos números reais, mapeada em si mesmo, é uma função sobrejetora?
        - Sim. Para prova, considere que $f(x)$ é sobrejetora e r corresponde a um valor real arbitrário.
        - Considere $x = \sqrt[3]{r}$, onde x pertence ao domínio de f.
        - Temos então, $f(x) = (\sqrt[3]{r})^3 = r$.
        - Logo, qualquer membro do contradomínio é uma imagem sob um função f de um membro do domínio.

Comparação Função Injetora e Sobrejetora

- Podemos estabelecer a seguinte comparação entre funções injetoras e sobrejetoras:



Fonte: [Gersting, 2014]

Função Bijetora

- Definição: Uma função é denominada bijetora se for injetora e sobrejetora [Gersting, 2014] [Rosen, 2019].

Função Bijetora

- Exemplo 1:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função bijetora?
    - Injetora: Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que $f(x) = f(y)$ somente se $x = y$.
    - Sobrejetora: Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos um valor x tal que $f(x) = y$.
- Exemplo 2:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros positivos, mapeada em si mesmo, é bijetora?
    - Injetora: Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}^+$, temos que $f(x) = f(y)$ somente se $x = y$.
    - Sobrejetora: Não. Pois para $y = 1$, não existe nenhum inteiro positivo tal que $f(x) = y$.

Função Bijetora

- Exemplo 1:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função bijetora?
    - Injetora: Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que $f(x) = f(y)$ somente se $x = y$.
    - Sobrejetora: Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos um valor x tal que $f(x) = y$.
- Exemplo 2:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros positivos, mapeada em si mesmo, é bijetora?
    - Injetora: Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}^+$, temos que $f(x) = f(y)$ somente se $x = y$.
    - Sobrejetora: Não. Pois para $y = 1$, não existe nenhum inteiro positivo tal que $f(x) = y$.

Função Bijetora

- Exemplo 1:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função bijetora?
    - Injetora: Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que $f(x) = f(y)$ somente se $x = y$.
    - Sobrejetora: Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos um valor x tal que $f(x) = y$.
- Exemplo 2:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros positivos, mapeada em si mesmo, é bijetora?
    - Injetora: Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}^+$, temos que $f(x) = f(y)$ somente se $x = y$.
    - Sobrejetora: Não. Pois para $y = 1$, não existe nenhum inteiro positivo tal que $f(x) = y$.

Função Bijetora

- Exemplo 1:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros, mapeada em si mesmo, é uma função bijetora?
    - Injetora: Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que $f(x) = f(y)$ somente se $x = y$.
    - Sobrejetora: Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos um valor x tal que $f(x) = y$.
- Exemplo 2:
  - Uma função $f(x) = x + 1$ em um conjunto dos números inteiros positivos, mapeada em si mesmo, é bijetora?
    - Injetora: Sim, pois para $x, y \in \mathbb{Z}^+$, temos que $f(x) = f(y)$ somente se $x = y$.
    - Sobrejetora: Não. Pois para $y = 1$, não existe nenhum inteiro positivo tal que $f(x) = y$.

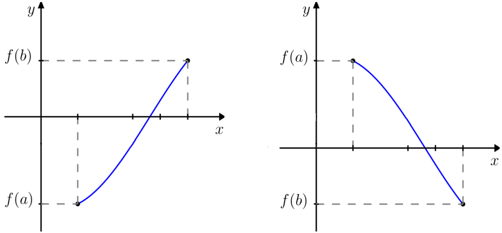
Função Identidade

- Definição: Uma função é denominada identidade de A se $\iota_A : A \to A$, onde $\iota(a) = a$ para todo $a \in A$ [Rosen, 2019].
  - A função identidade ι_A é aquela que mapeia cada elemento em si mesmo.

A função identidade é representada pela letra grega ι (“iota” minúsculo).

Funções Monótonas

- Definição: Uma função $f : A \rightarrow B$ para conjuntos ordenados é denominada monótona se preserva ou inverte a relação de ordem entre os elementos.
  - Uma função monótona é chamada de monótona crescente quando preserva a ordem dos elementos.
  - Uma função monótona é chamada de monótona decrescente quando inverte a ordem dos elementos.

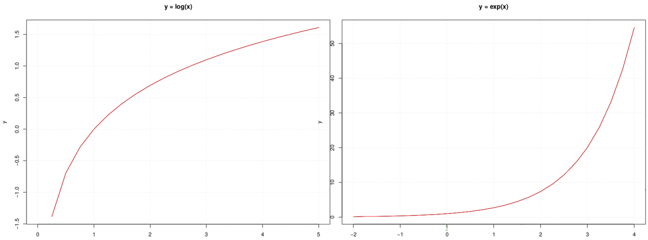


Fonte: [Justo et al., 2020]

Função Monótona Crescente

- Definição: Uma função $f : A \to B$ é denominada crescente se $f(a_1) \leq f(a_2)$, e estritamente crescente se $f(a_1) < f(a_2)$, onde $a_1 < a_2$ e $a_1, a_2 \in A$ [da Silva, 2012].

- Definição Formal:
  - Função crescente: $\forall a_1 \forall a_2 (a_1 < a_2 \to f(a_1) \leq f(a_2))$
  - Função estrit. crescente: $\forall a_1 \forall a_2 (a_1 < a_2 \to f(a_1) < f(a_2))$

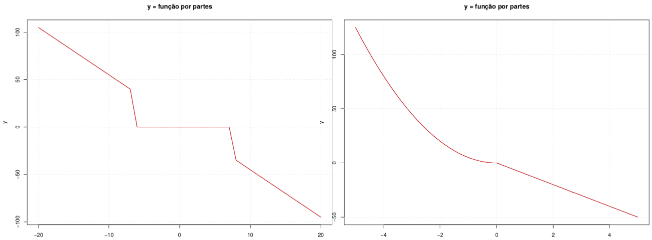


Fonte: [da Silva, 2012]

Função Monótona Decrescente

- Definição: Uma função $f : A \to B$ é denominada decrescente se $f(a_1) \geq f(a_2)$, e estritamente decrescente se $f(a_1) > f(a_2)$, onde $a_1 < a_2$ e $a_1, a_2 \in A$ [da Silva, 2012].

- Definição Formal:
  - Função decrescente: $\forall a_1 \forall a_2 (a_1 < a_2 \to f(a_1) \geq f(a_2))$
  - Função estrit. decrescente: $\forall a_1 \forall a_2 (a_1 < a_2 \to f(a_1) > f(a_2))$

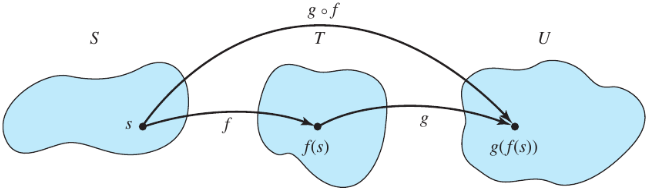


Fonte: [da Silva, 2012]

Composição e Inversa de Funções

Composição de Funções

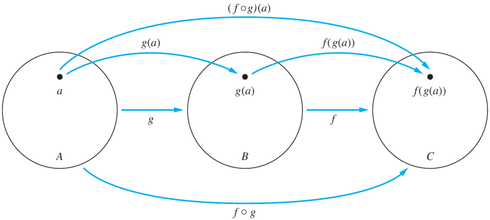
- Definição: Sejam duas funções, $f : A \to B$ e $g : B \to C$. A composição das funções $g \circ f$ corresponde à função de A para C, definida como $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, para todo elemento $a \in A$ [Gersting, 2014] [Rosen, 2019].



Fonte: [Gersting, 2014]

Composição de Funções

- Nota 1: As funções $f \circ g$ e $g \circ f$ são diferentes.
- Nota 2: Se a composição $f \circ g$ existir, não é obrigatório que exista $g \circ f$ (e vice-versa).
- Nota 3: Notações para composição de funções podem ser vistas na figura abaixo[2].



Fonte: [Rosen, 2019]

[2]Observar que, no exemplo, a função inicial é g, seguida por uma função f.

Composição de Funções

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Seja g uma função do conjunto $\{a, b, c\}$, mapeada em si mesmo, tal que $g(a) = b$, $g(b) = c$ e $g(c) = a$.
  - Seja f a função que mapeia o conjunto $\{a, b, c\}$ no conjunto $\{1, 2, 3\}$, tal que $f(a) = 3$, $f(b) = 2$ e $f(c) = 1$.
  - Indique a composição de f e g e a composição de g e f.
    - Composição de f e g: $f \circ g = f(g(..))$

      $$f(g(a)) = 2, \quad f(g(b)) = 1, \quad f(g(c)) = 3$$

    - Composição de g e f: $g \circ f = g(f(..))$

      A composição $g \circ f$ não é possível.

Composição de Funções

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Seja g uma função do conjunto $\{a, b, c\}$, mapeada em si mesmo, tal que $g(a) = b$, $g(b) = c$ e $g(c) = a$.
  - Seja f a função que mapeia o conjunto $\{a, b, c\}$ no conjunto $\{1, 2, 3\}$, tal que $f(a) = 3$, $f(b) = 2$ e $f(c) = 1$.
  - Indique a composição de f e g e a composição de g e f.
    - Composição de f e g: $f \circ g = f(g(..))$

      $$f(g(a)) = 2, \quad f(g(b)) = 1, \quad f(g(c)) = 3$$

    - Composição de g e f: $g \circ f = g(f(..))$

      A composição $g \circ f$ não é possível.

Composição de Funções

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Seja g uma função do conjunto $\{a, b, c\}$, mapeada em si mesmo, tal que $g(a) = b$, $g(b) = c$ e $g(c) = a$.
  - Seja f a função que mapeia o conjunto $\{a, b, c\}$ no conjunto $\{1, 2, 3\}$, tal que $f(a) = 3$, $f(b) = 2$ e $f(c) = 1$.
  - Indique a composição de f e g e a composição de g e f.
    - Composição de f e g: $f \circ g = f(g(..))$

      $$f(g(a)) = 2, \quad f(g(b)) = 1, \quad f(g(c)) = 3$$

    - Composição de g e f: $g \circ f = g(f(..))$

      A composição $g \circ f$ não é possível.

Composição de Funções

- Exemplo 2: [Gersting, 2014]
  - Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.
  - Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \lfloor x \rfloor$.
  - Qual o valor de $(g \circ f)(2.3)$?
    - $(g \circ f)(2.3) = g(f(2.3)) = \lfloor (2.3)^2 \rfloor = \lfloor 5.7 \rfloor = 5.$
  - Qual o valor de $(f \circ g)(2.3)$?
    - $(f \circ g)(2.3) = f(g(2.3)) = \lfloor 2.3 \rfloor^2 = 2^2 = 4.$

Função Piso: Denotada por $\lfloor x \rfloor$, atribui a cada número real x o maior inteiro que é menor ou igual a x.
Função Teto: Denotada por $\lceil x \rceil$, atribui a cada número real x o menor inteiro que é maior ou igual a x.

Composição de Funções

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Exemplo 2: [Gersting, 2014]
  - Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.
  - Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \lfloor x \rfloor$.
  - Qual o valor de $(g \circ f)(2.3)$?
    - $(g \circ f)(2.3) = g(f(2.3)) = \lfloor (2.3)^2 \rfloor = \lfloor 5.7 \rfloor = 5.$
  - Qual o valor de $(f \circ g)(2.3)$?
    - $(f \circ g)(2.3) = f(g(2.3)) = \lfloor 2.3 \rfloor^2 = 2^2 = 4.$

Função Piso: Denotada por $\lfloor x \rfloor$, atribui a cada número real x o maior inteiro que é menor ou igual a x.

Função Teto: Denotada por $\lceil x \rceil$, atribui a cada número real x o menor inteiro que é maior ou igual a x.

Composição de Funções

- Exemplo 2: [Gersting, 2014]
  - Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.
  - Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \lfloor x \rfloor$.
  - Qual o valor de $(g \circ f)(2.3)$?
    - $(g \circ f)(2.3) = g(f(2.3)) = \lfloor (2.3)^2 \rfloor = \lfloor 5.7 \rfloor = 5.$
  - Qual o valor de $(f \circ g)(2.3)$?
    - $(f \circ g)(2.3) = f(g(2.3)) = \lfloor 2.3 \rfloor^2 = 2^2 = 4.$

Função Piso: Denotada por $\lfloor x \rfloor$, atribui a cada número real x o maior inteiro que é menor ou igual a x.

Função Teto: Denotada por $\lceil x \rceil$, atribui a cada número real x o menor inteiro que é maior ou igual a x.

Composição de Funções

- Exemplo 2: [Gersting, 2014]
  - Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.
  - Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \lfloor x \rfloor$.
  - Qual o valor de $(g \circ f)(2.3)$?
    - $(g \circ f)(2.3) \ = g(f(2.3)) \ = \lfloor (2.3)^2 \rfloor \ = \lfloor 5.7 \rfloor \ = 5.$
  - Qual o valor de $(f \circ g)(2.3)$?
    - $(f \circ g)(2.3) \ = f(g(2.3)) \ = \lfloor 2.3 \rfloor^2 \ = 2^2 \ = 4.$

Função Piso: Denotada por $\lfloor x \rfloor$, atribui a cada número real x o maior inteiro que é menor ou igual a x.
Função Teto: Denotada por $\lceil x \rceil$, atribui a cada número real x o menor inteiro que é maior ou igual a x.

Composição de Funções

- Exemplo 2: [Gersting, 2014]
  - Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.
  - Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \lfloor x \rfloor$.
  - Qual o valor de $(g \circ f)(2.3)$?
    - $(g \circ f)(2.3) \ = g(f(2.3)) \ = \lfloor (2.3)^2 \rfloor \ = \lfloor 5.7 \rfloor \ = 5.$
  - Qual o valor de $(f \circ g)(2.3)$?
    - $(f \circ g)(2.3) \ = f(g(2.3)) \ = \lfloor 2.3 \rfloor^2 \ = 2^2 \ = 4.$

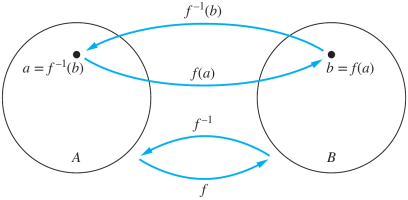
Função Piso: Denotada por $\lfloor x \rfloor$, atribui a cada número real x o maior inteiro que é menor ou igual a x.

Função Teto: Denotada por $\lceil x \rceil$, atribui a cada número real x o menor inteiro que é maior ou igual a x.

Função Inversa

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

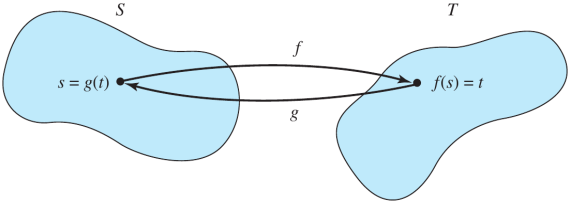
- Definição 1: Seja $f : A \to B$ uma função bijetora. A função inversa de f, denotada por f^{-1} é uma função que atribui um elemento $b \in B$ a um único elemento A tal que $f(a) = b$.
  - Logo, $f^{-1}(b) = a$ se $f(a) = b$.
  - Uma função bijetora é chamada inversível, pois admite uma inversa. Uma função é não inversível se não for uma bijeção [Rosen, 2019].



Fonte: [Rosen, 2019]

Função Inversa

- Definição 2: Seja $f : A \rightarrow B$. Se existir uma função $g : B \rightarrow A$, tal que $g \circ f = \iota_A$ (função identidade de A) e $f \circ g = \iota_B$, então g é denominada função inversa de f e denotada por f^{-1} [Gersting, 2014].



Fonte: [Gersting, 2014]

Função Inversa

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Seja $f : A \to B$ a função que mapeia o conjunto $A = \{a, b, c\}$ no conjunto $B = \{1, 2, 3\}$, tal que $f(a) = 2$, $f(b) = 3$ e $f(c) = 1$.
  - Indique se f é inversível.
    - Injetora: Sim, pois $f(a) = f(b) = f(c)$ somente se $a = b = c$;
    - Sobrejetora: Sim, pois cada elemento de B possui um correspondente em A.
    - Bijetora: Sim, pois é injetora e sobrejetora.
  - Qual a sua inversa?
    - Inversa: $f^{-1} : B \to A$

$$f^{-1}(1) = c, \quad f^{-1}(2) = a, \quad f^{-1}(3) = b$$

Função Inversa

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Seja $f : A \to B$ a função que mapeia o conjunto $A = \{a, b, c\}$ no conjunto $B = \{1, 2, 3\}$, tal que $f(a) = 2$, $f(b) = 3$ e $f(c) = 1$.
  - Indique se f é inversível.
    - Injetora: Sim, pois $f(a) = f(b) = f(c)$ somente se $a = b = c$;
    - Sobrejetora: Sim, pois cada elemento de B possui um correspondente em A.
    - Bijetora: Sim, pois é injetora e sobrejetora.
  - Qual a sua inversa?
    - Inversa: $f^{-1} : B \to A$

$$f^{-1}(1) = c, \quad f^{-1}(2) = a, \quad f^{-1}(3) = b$$

Função Inversa

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Seja $f : A \to B$ a função que mapeia o conjunto $A = \{a, b, c\}$ no conjunto $B = \{1, 2, 3\}$, tal que $f(a) = 2$, $f(b) = 3$ e $f(c) = 1$.
  - Indique se f é inversível.
    - Injetora: Sim, pois $f(a) = f(b) = f(c)$ somente se $a = b = c$;
    - Sobrejetora: Sim, pois cada elemento de B possui um correspondente em A.
    - Bijetora: Sim, pois é injetora e sobrejetora.
  - Qual a sua inversa?
    - Inversa: $f^{-1} : B \to A$

$$f^{-1}(1) = c, \quad f^{-1}(2) = a, \quad f^{-1}(3) = b$$

Função Inversa

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Seja $f : A \to B$ a função que mapeia o conjunto $A = \{a, b, c\}$ no conjunto $B = \{1, 2, 3\}$, tal que $f(a) = 2$, $f(b) = 3$ e $f(c) = 1$.
  - Indique se f é inversível.
    - Injetora: Sim, pois $f(a) = f(b) = f(c)$ somente se $a = b = c$;
    - Sobrejetora: Sim, pois cada elemento de B possui um correspondente em A.
    - Bijetora: Sim, pois é injetora e sobrejetora.
  - Qual a sua inversa?
    - Inversa: $f^{-1} : B \to A$

$$f^{-1}(1) = c, \quad f^{-1}(2) = a, \quad f^{-1}(3) = b$$

Função Inversa

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
    - Seja $f : A \to B$ a função que mapeia o conjunto $A = \{a, b, c\}$ no conjunto $B = \{1, 2, 3\}$, tal que $f(a) = 2$, $f(b) = 3$ e $f(c) = 1$.
    - Indique se f é inversível.
        - Injetora: Sim, pois $f(a) = f(b) = f(c)$ somente se $a = b = c$;
        - Sobrejetora: Sim, pois cada elemento de B possui um correspondente em A.
        - Bijetora: Sim, pois é injetora e sobrejetora.
    - Qual a sua inversa?
        - Inversa: $f^{-1} : B \to A$

$$f^{-1}(1) = c, \quad f^{-1}(2) = a, \quad f^{-1}(3) = b$$

Função Inversa

- Exemplo 2: [Rosen, 2019]
  - Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tal que $f(x) = x + 1$.
  - Indique se f é inversível e qual a sua inversa.
    - Inversível?: Sim, pois f é bijetora (ver exemplos anteriores).
    - Inversa: Se $y = x + 1$, então $x = y - 1$. Logo, a inversa é $f^{-1}(y) = y - 1$.
- Exemplo 3:
  - Seja $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, tal que $f(x) = x + 1$.
  - Indique se f é inversível e qual a sua inversa.
    - Inversível?: Não, pois a função não é sobrejetora.
    - Inversa: Como a função não é bijetora, não possui inversa.

Função Inversa

- Exemplo 2: [Rosen, 2019]
  - Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tal que $f(x) = x + 1$.
  - Indique se f é inversível e qual a sua inversa.
    - Inversível?: Sim, pois f é bijetora (ver exemplos anteriores).
    - Inversa: Se $y = x + 1$, então $x = y - 1$. Logo, a inversa é $f^{-1}(y) = y - 1$.

- Exemplo 3:
  - Seja $f : \mathbb{Z}^{+} \to \mathbb{Z}^{+}$, tal que $f(x) = x + 1$.
  - Indique se f é inversível e qual a sua inversa.
    - Inversível?: Não, pois a função não é sobrejetora.
    - Inversa: Como a função não é bijetora, não possui inversa.

Função Inversa

- Exemplo 2: [Rosen, 2019]
  - Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tal que $f(x) = x + 1$.
  - Indique se f é inversível e qual a sua inversa.
    - Inversível?: Sim, pois f é bijetora (ver exemplos anteriores).
    - Inversa: Se $y = x + 1$, então $x = y - 1$. Logo, a inversa é $f^{-1}(y) = y - 1$.
- Exemplo 3:
  - Seja $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, tal que $f(x) = x + 1$.
  - Indique se f é inversível e qual a sua inversa.
    - Inversível?: Não, pois a função não é sobrejetora.
    - Inversa: Como a função não é bijetora, não possui inversa.

Função Inversa

- Exemplo 2: [Rosen, 2019]
  - Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tal que $f(x) = x + 1$.
  - Indique se f é inversível e qual a sua inversa.
    - Inversível?: Sim, pois f é bijetora (ver exemplos anteriores).
    - Inversa: Se $y = x + 1$, então $x = y - 1$. Logo, a inversa é $f^{-1}(y) = y - 1$.
- Exemplo 3:
  - Seja $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, tal que $f(x) = x + 1$.
  - Indique se f é inversível e qual a sua inversa.
    - Inversível?: Não, pois a função não é sobrejetora.
    - Inversa: Como a função não é bijetora, não possui inversa.

Ordem de Crescimento de Funções

Ordem de Crescimento

- Na área de Computação, um tópico importante de estudo é referente ao crescimento de funções;
  - Funções podem representar o crescimento de algoritmos em termos de tempo e espaço;
- Para resolução de problemas, são criados algoritmos que executam sequências de operações;
  - Definição: Algoritmo é uma sequência finita de instruções precisas para realização de um cálculo ou para solução de um problema [Rosen, 2019].

Ordem de Crescimento

- É possível estimar a complexidade (custo de execução) de um algoritmo utilizando funções matemáticas
  - O estudo dessas funções possibilita a identificação dos algoritmos que solucionam problemas com menor esforço computacional;
  - É importante salientar que algoritmos diferentes para solução de um mesmo problema podem ter custo de execução muito diferentes;
  - Dependendo da quantidade de operações, o custo de execução de um algoritmo pode ser muito alto ou até mesmo inviável
    - Com isso, algoritmos devem ser escritos usando técnicas que reduzam o esforço computacional;

Ordem de Crescimento

- Esta disciplina buscará estudar, de forma genérica, o comportamento de funções matemáticas que representam a ordem de grandeza da complexidade de algoritmos
  - Esta seção somente demonstrará o comportamento de funções;
  - Não faz parte do escopo:
    - Ensino de técnicas para estimar os custos computacionais;
    - Ensino dos melhores algoritmos para solução de diferentes problemas;
  - O estudo aprofundado de algoritmos será feito em disciplinas pertinentes.

Ordem de Crescimento - Exemplo

- Exemplo 1: Adaptado de [da Silva, 2012]
  - Suponha dois algoritmos, α e β, com complexidades $f(x) = x^2$ e $g(x) = 100x$, respectivamente, para ordenação de conjuntos.
  - Suponha um conjunto A, de cardinalidade $|A| = 10$. Qual o número de operações para ordenação desse conjunto?
    - $f(x) = 10^2 = 100$ operações.
    - $g(x) = 100 \times 10 = 1000$ operações.
  - Suponha um conjunto B, de cardinalidade $|B| = 10^6$. Qual o número de operações para ordenação desse conjunto?
    - $f(x) = (10^6)^2 = 10^{12}$ operações.
    - $g(x) = 100 \times 10^6 = 10^2 \times 10^6 = 10^8$ operações.

Ordem de Crescimento - Exemplo

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Exemplo 1: Adaptado de [da Silva, 2012]
  - Suponha dois algoritmos, α e β, com complexidades $f(x) = x^2$ e $g(x) = 100x$, respectivamente, para ordenação de conjuntos.
  - Suponha um conjunto A, de cardinalidade $|A| = 10$. Qual o número de operações para ordenação desse conjunto?
    - $f(x) = 10^2 = 100$ operações.
    - $g(x) = 100 \times 10 = 1000$ operações.
  - Suponha um conjunto B, de cardinalidade $|B| = 10^6$. Qual o número de operações para ordenação desse conjunto?
    - $f(x) = (10^6)^2 = 10^{12}$ operações.
    - $g(x) = 100 \times 10^6 = 10^2 \times 10^6 = 10^8$ operações.

Ordem de Crescimento - Exemplo

- Exemplo 1: Adaptado de [da Silva, 2012]
  - Suponha dois algoritmos, α e β, com complexidades $f(x) = x^2$ e $g(x) = 100x$, respectivamente, para ordenação de conjuntos.
  - Suponha um conjunto A, de cardinalidade $|A| = 10$. Qual o número de operações para ordenação desse conjunto?
    - $f(x) = 10^2 = 100$ operações.
    - $g(x) = 100 \times 10 = 1000$ operações.
  - Suponha um conjunto B, de cardinalidade $|B| = 10^6$. Qual o número de operações para ordenação desse conjunto?
    - $f(x) = (10^6)^2 = 10^{12}$ operações.
    - $g(x) = 100 \times 10^6 = 10^2 \times 10^6 = 10^8$ operações.

Ordem de Crescimento - Exemplo

- Exemplo 1: Adaptado de [da Silva, 2012]
  - Suponha dois algoritmos, α e β, com complexidades $f(x) = x^2$ e $g(x) = 100x$, respectivamente, para ordenação de conjuntos.
  - Suponha um conjunto A, de cardinalidade $|A| = 10$. Qual o número de operações para ordenação desse conjunto?
    - $f(x) = 10^2 = 100$ operações.
    - $g(x) = 100 \times 10 = 1000$ operações.
  - Suponha um conjunto B, de cardinalidade $|B| = 10^6$. Qual o número de operações para ordenação desse conjunto?
    - $f(x) = (10^6)^2 = 10^{12}$ operações.
    - $g(x) = 100 \times 10^6 = 10^2 \times 10^6 = 10^8$ operações.

Ordem de Crescimento - Exemplo

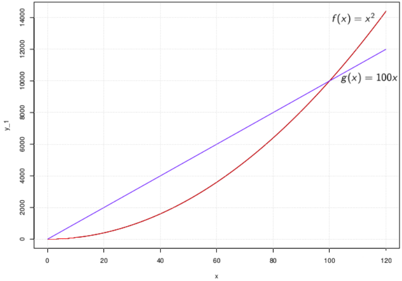
- Exemplo 1: Adaptado de [da Silva, 2012]
  - Suponha que a execução de cada operação leve 0,001 segundos para ser executada. Qual o tempo para ordenação do conjunto B?
    - $f(x) = 10^{12} \times 10^{-3} = 10^{9}$ segundos $\approx 31,7$ anos.
    - $g(x) = 10^{8} \times 10^{-3} = 10^{5}$ segundos $\approx 1,15$ dias.

Ordem de Crescimento - Exemplo

- Exemplo 1: Adaptado de [da Silva, 2012]
  - Suponha que a execução de cada operação leve 0,001 segundos para ser executada. Qual o tempo para ordenação do conjunto B?
    - $f(x) = 10^{12} \times 10^{-3} = 10^{9}$ segundos $\approx 31,7$ anos.
    - $g(x) = 10^{8} \times 10^{-3} = 10^{5}$ segundos $\approx 1,15$ dias.

Ordem de Crescimento - Exemplo

- Exemplo 1: Adaptado de [da Silva, 2012]
  - Suponha que a execução de cada operação leve 0,001 segundos para ser executada. Qual o tempo para ordenação do conjunto B?
    - $f(x) = 10^{12} \times 10^{-3} = 10^{9}$ segundos $\approx 31,7$ anos.
    - $g(x) = 10^{8} \times 10^{-3} = 10^{5}$ segundos $\approx 1,15$ dias.



Fonte: Adaptado de [da Silva, 2012]

Ordem de Crescimento

- O tempo de execução de um algoritmo é sujeito à influência do hardware[3]
  - Quanto mais rápido o hardware, mais rápido o algoritmo será executado;
- A mudança de pequenas condições na avaliação de desempenho de algoritmos podem causar incorreções nos resultados
  - Para que a comparação possa ser feita de forma justa, é recomendada a utilização de um padrão capaz de avaliar o desempenho de algoritmos em um mesmo cenário;
  - Com isso, é comum transformar a complexidade de algoritmos em funções e avaliar a ordem de grandeza das mesmas.

[3] Outras variáveis também influenciam no desempenho de um software, porém no contexto, serão ignoradas.

Ordem de Grandeza

- Definição: Sejam funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. A função f possui a mesma ordem de grandeza de g, definida por $f = \Theta(g)$, se existirem constantes positivas x_0, c_1 e c_2 tal que $x \geq x_0$ e $c_1 \cdot g(x) \leq f(x) \leq c_2 \cdot g(x)$ [Gersting, 2014]
    - Essa definição indica que a função $f(x)$ é dominada assintoticamente pelas funções $c_1 \cdot g(x)$ e $c_2 \cdot g(x)$.

Ordem de Grandeza

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

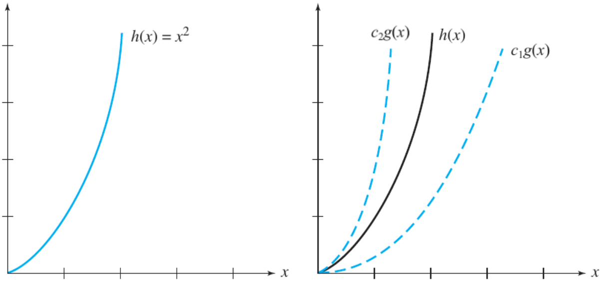
- Para a equação abaixo, com constantes positivas c_1 e c_2, podemos estabelecer as seguintes conclusões:

$$\boxed{c_1 \cdot g(x) \leq f(x) \leq c_2 \cdot g(x)}$$

  - A função $f(x)$ irá se manter sempre dentro de um "envelope" das demais;
  - A expressão $c_1 \cdot g(x)$ será um limite inferior, enquanto a expressão $c_2 \cdot g(x)$ será um limite superior de $f(x)$;
  - A alteração do valor das constantes altera a largura do envelope, porém não altera sua forma;
  - Se f está contida, a partir de n_0, em um envelope definido por g, então f e g tem a mesma ordem de grandeza [da Silva, 2012].

Ordem de Grandeza

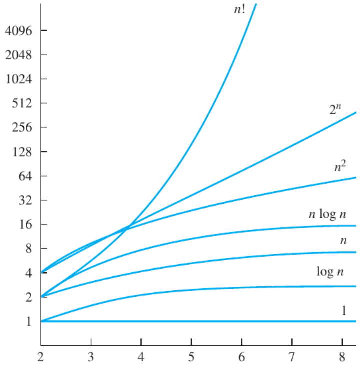
- A figura abaixo exibe o comportamento de uma função $h(x)$, dominada assintoticamente por $c_1 \cdot g(x)$ e $c_2 \cdot g(x)$.
  - Utilizam-se como limite, em geral, funções já conhecidas, para que seja possível inferir um comportamento da função avaliada.



Fonte: Adaptado de [Gersting, 2014]

Ordem de Grandeza

- Algumas funções genéricas com comportamento conhecido na literatura podem ser vistas na figura abaixo.



Fonte: [Rosen, 2019]

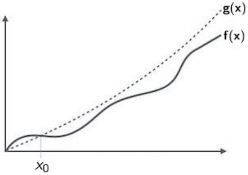
As funções são utilizadas como estimativa de comportamento. Gráfico em escala logarítmica.

Notações Big-O, Big-Ω e Big-Θ

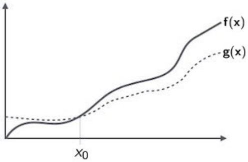
- A notação Big-O é utilizada como uma estimativa teórica do limite superior de execução de um algoritmo
  - Está associada à execução do algoritmo no pior caso, ou seja, ao tempo máximo (ou tamanho máximo em memória) para finalização da execução do algoritmo;
  - A notação é criada com base no crescimento de funções;
- Além da notação Big-O, mais utilizada, também existem as notações Big-Ω e Big-Θ
  - Big-Ω: expressa o limite inferior do algoritmo - associada ao melhor caso em complexidade de tempo ou espaço;
  - Big-Θ: expressa limites inferiores e superiores do algoritmo.

Notações Big-O, Big-Ω e Big-Θ

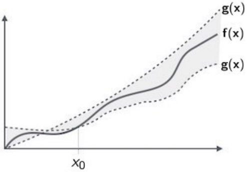
- O comportamento das notações Big-O, Big-Ω e Big-Θ pode ser visto na figura abaixo.



(a) Big-O



(b) Big-Ω



(c) Big-Θ

Fonte: Adaptado de [Point, 2021]

Notação Big-O

Notação Big-O

- Definição 1: Sejam funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. A função $f(x)$ é $O(g(x))$ se existirem constantes positivas x_0 e c tal que $x \geq x_0$ e $f(x) \leq c \cdot g(x)$ [Gersting, 2014].
  - Lê-se a notação como: $f(x)$ é "O" de $g(x)$;
  - As constantes x_0 e c são chamadas de parâmetros da relação;
  - A definição indica que $f(x)$ cresce de forma mais devagar que uma função $g(x)$ multiplicada por uma constante fixa.

- Definição 2: Sejam funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A função $f(x)$ é $O(g(x))$ se existirem constantes c e x_0 tal que $|f(x)| \leq c|g(x)|$ sempre que $x > x_0$ [Rosen, 2019].

A notação $f(x) = O(g(x))$ é válida, porém <u>não</u> indica igualdade. A notação $f(x) \in O(g(x))$ também é aceita.

Notação Big-O

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Para indicar que $f(x)$ é $O(g(x))$ devemos encontrar um par de parâmetros para a relação
  - Deve-se mostrar que $|f(x)| \leq c|g(x)|$ sempre que $x > x_0$;
  - Nesta relação existem infinitos pares de valores de c e x_0 possíveis;
  - Uma técnica é definir um valor de x_0 para o qual o tamanho de $f(x)$ possa ser rapidamente estimado quando $x > x_0$ e indicar um valor de c que respeite as condições [Rosen, 2019].

Notação Big-O - Exemplo

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Mostre que a função $f(x) = x^2 + 2x + 1$ é $O(x^2)$.
    - Podemos demonstrar usando o artifício a seguir...
    - Consideramos que $x \leq x^2$ e $1 \leq x^2$ para $x > 1$ ($x_0 = 1$);
    - Fazemos, $|x^2 + 2x + 1| \leq |x^2 + 2x^2 + x^2|$;
    - Logo, $|x^2 + 2x + 1| \leq 4|x^2|$;
    - Podemos considerar $x_0 = 1$ e $c = 4$.
    - Podemos, ainda, utilizar outros valores de x_0 e c e mostrar que a relação é válida;
    - Com isso, podemos concluir que a função $f(x)$ é $O(x^2)$;
    - (Opcional[4])
    - De forma semelhante, temos ainda que x^2 é $(O(x^2 + 2x + 1))$;
    - Logo, temos $1x^2 \leq x^2 + 2x + 1 \leq 4x^2$;

[4] A notação descrita busca estabelecer limites inferiores e superiores.

Notação Big-O - Exemplo

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Mostre que a função $f(x) = x^2 + 2x + 1$ é $O(x^2)$.
    - Podemos demonstrar usando o artifício a seguir...
    - Consideramos que $x \leq x^2$ e $1 \leq x^2$ para $x > 1$ ($x_0 = 1$);
    - Fazemos, $|x^2 + 2x + 1| \ \leq \ |x^2 + 2x^2 + x^2|$;
    - Logo, $|x^2 + 2x + 1| \ \leq \ 4|x^2|$;
    - Podemos considerar $x_0 = 1$ e $c = 4$.
    - Podemos, ainda, utilizar outros valores de x_0 e c e mostrar que a relação é válida;
    - Com isso, podemos concluir que a função $f(x)$ é $O(x^2)$;
    - (Opcional[4])
    - De forma semelhante, temos ainda que x^2 é $(O(x^2 + 2x + 1))$;
    - Logo, temos $1x^2 \ \leq \ x^2 + 2x + 1 \ \leq \ 4x^2$;

[4] A notação descrita busca estabelecer limites inferiores e superiores.

Notação Big-O - Exemplo

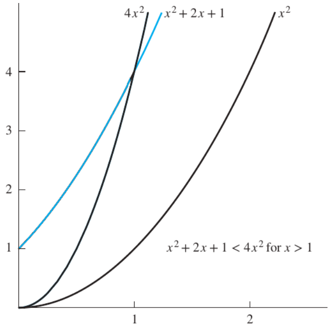
INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Exemplo 1: [Rosen, 2019]
  - Mostre que a função $f(x) = x^2 + 2x + 1$ é $O(x^2)$.
    - Podemos demonstrar usando o artifício a seguir...
    - Consideramos que $x \leq x^2$ e $1 \leq x^2$ para $x > 1$ $(x_0 = 1)$;
    - Fazemos, $|x^2 + 2x + 1| \;\leq\; |x^2 + 2x^2 + x^2|$;
    - Logo, $|x^2 + 2x + 1| \;\leq\; 4|x^2|$;
    - Podemos considerar $x_0 = 1$ e $c = 4$.
    - Podemos, ainda, utilizar outros valores de x_0 e c e mostrar que a relação é válida;
    - Com isso, podemos concluir que a função $f(x)$ é $O(x^2)$;
    - (Opcional[4])
    - De forma semelhante, temos ainda que x^2 é $(O(x^2 + 2x + 1))$;
    - Logo, temos $1x^2 \;\leq\; x^2 + 2x + 1 \;\leq\; 4x^2$;

[4] A notação descrita busca estabelecer limites inferiores e superiores.

Notação Big-O - Exemplo

- Exemplo 1: [Rosen, 2019] *[cont..]*
  - Mostre que a função $f(x) = x^2 + 2x + 1$ é $O(x^2)$.
    - O gráfico das curvas pode ser visto na figura abaixo.



Fonte: Adaptado de [Rosen, 2019]

Notação Big-O - Exemplo

- Exemplo 2:
  - Mostre que a função $f(x) = x^2 - 2x + 1$ é $O(x^2)$.
    - Condição inicial: $\boxed{\exists c \geq 0, x_0 \geq 0 \mid f(x) \leq c \cdot g(x), \forall x \geq x_0}$;
    - Temos então, que: $f(x) \leq c \cdot g(x^2)$
    - Consideramos que $-x \leq x^2$ e $1 \leq x^2$ para $x > 1$;
    - Fazemos, $|x^2 - 2x + 1| \leq x^2 + 2x^2 + x^2$;
    - Logo, $|x^2 - 2x + 1| \leq 4|x^2|$;
    - Podemos considerar $x_0 = 1$ e $c = 4$.
    - Com isso, podemos concluir que a função $f(x)$ é $O(x^2)$;

Notação Big-O - Exemplo

- Exemplo 2:
  - Mostre que a função $f(x) = x^2 - 2x + 1$ é $O(x^2)$.
    - Condição inicial: $\boxed{\exists c \geq 0, x_0 \geq 0 \mid f(x) \leq c \cdot g(x), \forall x \geq x_0}$;
    - Temos então, que: $f(x) \leq c \cdot g(x^2)$
    - Consideramos que $-x \leq x^2$ e $1 \leq x^2$ para $x > 1$;
    - Fazemos, $|x^2 - 2x + 1| \ \leq \ x^2 + 2x^2 + x^2$;
    - Logo, $|x^2 - 2x + 1| \ \leq \ 4|x^2|$;
    - Podemos considerar $x_0 = 1$ e $c = 4$.
    - Com isso, podemos concluir que a função $f(x)$ é $O(x^2)$;

Notação Big-O - Exemplo

- Exemplo 3:
  - Verifique se a função $f(x) = x^2$ é $O(x)$.
    - Condição inicial: $\boxed{\exists c \geq 0, x_0 \geq 0 \mid f(x) \leq c \cdot g(x), \forall x \geq x_0}$;
    - Temos então, que: $f(x) \leq c \cdot g(x) \ \rightarrow \ |x^2| \ \leq \ c \cdot x$
    - Podemos perceber que não existe qualquer $c \in \mathbb{R}$ no qual $c \cdot x \geq x^2$, onde $x > x_0$.
- Exemplo 4:
  - Verifique se a função $f(x) = 5x^2$ é $O(x^3)$.
    - Condição inicial: $\boxed{\exists c \geq 0, x_0 \geq 0 \mid f(x) \leq c \cdot g(x), \forall x \geq x_0}$;
    - Temos então, que: $f(x) \leq c \cdot g(x^3) \ \rightarrow \ 5x^2 \ \leq \ c \cdot x^3$
    - Podemos observar, que se $c = 1$, temos $5x^2 \leq x^3$;
    - Com isso, $f(x) = 5x^2$ é $O(g(x^3))$, apesar de existir uma ordem de grandeza inferior que atenda à relação.

Notação Big-O - Exemplo

- Exemplo 3:
  - Verifique se a função $f(x) = x^2$ é $O(x)$.
    - Condição inicial: $\boxed{\exists c \geq 0, x_0 \geq 0 \mid f(x) \leq c \cdot g(x), \forall x \geq x_0}$;
    - Temos então, que: $f(x) \leq c \cdot g(x) \;\rightarrow\; |x^2| \;\leq\; c \cdot x$
    - Podemos perceber que não existe qualquer $c \in \mathbb{R}$ no qual $c \cdot x \geq x^2$, onde $x > x_0$.
- Exemplo 4:
  - Verifique se a função $f(x) = 5x^2$ é $O(x^3)$.
    - Condição inicial: $\boxed{\exists c \geq 0, x_0 \geq 0 \mid f(x) \leq c \cdot g(x), \forall x \geq x_0}$;
    - Temos então, que: $f(x) \leq c \cdot g(x^3) \;\rightarrow\; 5x^2 \;\leq\; c \cdot x^3$
    - Podemos observar, que se $c = 1$, temos $5x^2 \leq x^3$;
    - Com isso, $f(x) = 5x^2$ é $O(g(x^3))$, apesar de existir uma ordem de grandeza inferior que atenda à relação.

Notação Big-O - Exemplo

- Exemplo 3:
  - Verifique se a função $f(x) = x^2$ é $O(x)$.
    - Condição inicial: $\boxed{\exists c \geq 0, x_0 \geq 0 \mid f(x) \leq c \cdot g(x), \forall x \geq x_0}$;
    - Temos então, que: $f(x) \leq c \cdot g(x) \ \rightarrow \ |x^2| \ \leq \ c \cdot x$
    - Podemos perceber que <u>não</u> existe qualquer $c \in \mathbb{R}$ no qual $c \cdot x \geq x^2$, onde $x > x_0$.
- Exemplo 4:
  - Verifique se a função $f(x) = 5x^2$ é $O(x^3)$.
    - Condição inicial: $\boxed{\exists c \geq 0, x_0 \geq 0 \mid f(x) \leq c \cdot g(x), \forall x \geq x_0}$;
    - Temos então, que: $f(x) \leq c \cdot g(x^3) \ \rightarrow \ 5x^2 \ \leq \ c \cdot x^3$
    - Podemos observar, que se $c = 1$, temos $5x^2 \leq x^3$;
    - Com isso, $f(x) = 5x^2$ é $O(g(x^3))$, apesar de existir uma ordem de grandeza inferior que atenda à relação.

Notação Big-O - Exemplo

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Exemplo 3:
  - Verifique se a função $f(x) = x^2$ é $O(x)$.
    - Condição inicial: $\boxed{\exists c \geq 0, x_0 \geq 0 \mid f(x) \leq c \cdot g(x), \forall x \geq x_0}$;
    - Temos então, que: $f(x) \leq c \cdot g(x) \ \rightarrow \ |x^2| \ \leq \ c \cdot x$
    - Podemos perceber que <u>não</u> existe qualquer $c \in \mathbb{R}$ no qual $c \cdot x \geq x^2$, onde $x > x_0$.
- Exemplo 4:
  - Verifique se a função $f(x) = 5x^2$ é $O(x^3)$.
    - Condição inicial: $\boxed{\exists c \geq 0, x_0 \geq 0 \mid f(x) \leq c \cdot g(x), \forall x \geq x_0}$;
    - Temos então, que: $f(x) \leq c \cdot g(x^3) \ \rightarrow \ 5x^2 \ \leq \ c \cdot x^3$
    - Podemos observar, que se $c = 1$, temos $5x^2 \leq x^3$;
    - Com isso, $f(x) = 5x^2$ é $O(g(x^3))$, apesar de existir uma ordem de grandeza inferior que atenda à relação.

Referências I

da Silva, D. M. (2012).
Slides de aula.

Gersting, J. L. (2014).
Mathematical Structures for Computer Science.
W. H. Freeman and Company, 7 edition.

Justo, D., Sauter, E., Azevedo, F., Guidi, L., and Konzen, P. H. (2020).
Cálculo Numérico, Um Livro Colaborativo - Versão Python.
UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/livro-py.pdf.

Levin, O. (2019).
Discrete Mathematics - An Open Introduction.
University of Northern Colorado, 7 edition.
[Online] Disponível em http://discrete.openmathbooks.org/dmoi3.html.

Point, T. (2021).
Data structures - asymptotic analysis.
[Online]; acessado em 17 de Março de 2021. Disponível em:
https://www.tutorialspoint.com/data_structures_algorithms/asymptotic_analysis.htm.

Rosen, K. H. (2019).
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill, 8 edition.