Pesquisa Operacional

Conceitos e Formulação Algébrica

Felipe Augusto Lima Reis
felipe.reis@ifmg.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

Sumário

1. Programação Linear
2. Conceitos e Objetivos
3. Formulação Algébrica
4. Transformações
5. Soluções e Restrições

Programação Linear

Programação Linear

"O modelo de programação linear é básico para a compreensão de todos os outros modelos da Programação Matemática" [Goldbarg and Luna, 2005].

Programação Linear

A programação linear (PL) é uma das principais ferramentas da Pesquisa Operacional e sua aplicação está cada vez mais difundida [Belfiore and Fávero, 2013].

Programação Linear

- Segundo [Goldbarg and Luna, 2005], o modelo de programação linear é importante pois:
  - seus conceitos podem ser estendidos a outros métodos;
  - os algoritmos para sua solução são eficientes e possuem alta capacidade de cálculo.

Características

- Para que um problema possa ser representado por um modelo de PL, são necessárias as seguintes características:
  1. Proporcionalidade
     - A contribuição em relação à função objetivo e às restrições devem ser diretamente proporcionais ao valor da variável de decisão;
  2. Divisibilidade e não negatividade
     - Qualquer proporção de um dado recurso deve sempre poder ser utilizado.
     - A atividade deve sempre positiva (não é possível ter um recurso negativo);

Características

- Para que um problema possa ser representado por um modelo de PL, são necessárias as seguintes características:

3. Aditividade
    - O custo total é a soma das parcelas associadas;
    - Se uma atividade tem 3 recursos, o custo é dado pela soma desses 3 recursos;
4. Separabilidade[1]
    - Pode-se identificar o custo específico de cada atividade;
5. Certeza[2]
    - Coeficientes da função objetivo, restrições e os termos independentes são determinísticos (constantes e conhecidos com certeza).

[1] Citado apenas em [Goldbarg and Luna, 2005]

[2] Citado apenas em [Belfiore and Fávero, 2013]

Conceitos e Objetivos

Conceitos

- Um modelo de programação linear é composto por três elementos principais:
  1. Variáveis de decisão e parâmetros;
  2. Função objetivo;
  3. Restrições;
- Os problemas de programação linear buscam determinar valores ótimos.

1. Variáveis de Decisão e Parâmetros

- Variáveis de decisão:
  - Correspondem às incógnitas, ou aos valores desconhecidos, que serão determinados pela solução do modelo;
  - Podem ser classificadas como: variáveis contínuas, discretas ou binárias;
  - As variáveis de decisão devem assumir valores não negativos.
- Parâmetros:
  - Valores fixos previamente conhecidos do problema;
  - Ex.: demanda por produtos, custo de produção de um determinado item, custo por funcionário, margem de contribuição unitária, etc.

2. Função objetivo

- Função objetivo é uma "função matemática que determina o valor-alvo que se pretende alcançar, em função das variáveis de decisão e dos parâmetros" [Belfiore and Fávero, 2013];
- Pode ser classificada como:
  - Função de maximização: utilizada para alcançar o maior valor possível (ex. lucro, receita, nível de serviço, etc);
  - Função de minimização: utilizada para alcançar o menor valor possível (ex. custo, risco, erro, etc).

3. Restrições

- Restrições correspondem a um "conjunto de equações e inequações que as variáveis de decisão do modelo devem satisfazer" [Belfiore and Fávero, 2013];

- As restrições são adicionadas devido a limitações do sistema[3] e afetam diretamente os valores das variáveis de decisão [Belfiore and Fávero, 2013].

[3] Restrições podem indicar limitações físicas, de produção, de demanda, entre outras.

Solução Ótima

- A solução de um problema de programação linear (PPL) deve gerar uma a solução ótima para o modelo:
  - Se o problema for de maximização, a solução ótima é o maior valor possível;
  - Se o problema for de minimização, a solução ótima é o menor valor possível.

Solução Ótima

A solução ótima consiste no melhor valor possível para um problema, segundo critérios estabelecidos previamente.

Solução Ótima

- Sobre a solução ótima:
  - Não existe qualquer valor possível, segundo os critérios do problema, que seja melhor que a solução ótima[4];
  - Para gerar soluções ótimas é necessário uso de métodos comprovados que geram soluções ótimas;
  - Caso a solução não tenha sido gerada por um método, ela deve ser provada matematicamente.

[4] Em alguns problemas, podem ocorrer múltiplas soluções ótimas. Todas possuem o mesmo valor.

Objetivo de um problema de programação linear

"O objetivo consiste em maximizar ou minimizar determinada função linear de variáveis de decisão, sujeita a um conjunto de restrições representadas por equações ou inequações lineares, incluindo as de não negatividade das variáveis de decisão" [Belfiore and Fávero, 2013].

Características

- Em um problema de programação linear:
  - A função objetivo e todas as restrições são representadas por funções lineares;
  - As variáveis de decisão devem ser todas contínuas (podem assumir quaisquer valores em um intervalo de números reais).

Formulação Algébrica

Forma Geral (ou mista)

A forma geral de um Problema de Programação Linear é dada por:

$$\max \text{ ou } \min z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\ \{\leq, =, \geq\} b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\ \{\leq, =, \geq\} b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots &\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\ \{\leq, =, \geq\} b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 &\ \text{(restrição de não negatividade)}
\end{aligned}$$

em que:

- z é a função objetivo;
- x_j são as variáveis de decisão, principais ou controláveis, $j = 1, 2, \ldots, n$;
- a_{ij} é a constante ou coeficiente da i-ésima restrição da j-ésima variável, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$;
- b_i é o termo independente ou quantidade de recursos disponíveis da i-ésima restrição, $i = 1, 2, \ldots, m$;
- c_j é a constante ou coeficiente da j-ésima variável da função objetivo, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Fonte: Adaptado de [Belfiore and Fávero, 2013]

Forma Padrão

Para resolver um problema de programação linear, a formulação do modelo deve estar na forma padrão.

$$
\begin{aligned}
&\text{max ou min } z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
&\text{sujeito a:} \\
&\qquad \begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array} \\
&\qquad\qquad\qquad x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}
$$

Forma Padrão - Requisitos

1. Termos independentes das restrições devem ser não negativos;

$$\max \text{ ou } \min z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \\
x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \dots, n &
\end{aligned}$$

Forma Padrão - Requisitos

2. Todas as restrições devem estar representadas por equações lineares e apresentadas na forma de igualdade;

$$\text{max ou min } z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

sujeito a:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \boxed{=} & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \boxed{=} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \boxed{=} & b_m \end{array}$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

Forma Padrão - Requisitos

3. Variáveis de decisão devem ser não negativas.

$$\text{max ou min } z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

sujeito a:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ \qquad\qquad \boxed{x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n} \end{array}$$

Forma Matricial

Um PPL também pode ser expresso em formato matricial.

$$\max \text{ ou } \min f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}$$

sujeito a:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

em que:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fonte: Adaptado de [Belfiore and Fávero, 2013]

Forma Matricial

Um PPL também pode ser expresso em formato matricial.

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{max ou min } f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \\ &\text{sujeito a:} \\ &\qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\qquad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}}$$

em que:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fonte: Adaptado de [Belfiore and Fávero, 2013]

Forma Canônica

- Na forma canônica, as restrições são apresentadas em forma de inequações;
- A forma canônica para maximização e minimização são diferentes!
  - Maximização: inequações com sinal de menor ou igual ($\leq$);
  - Minimização: inequações com sinal de maior ou igual ($\geq$);

Forma Canônica - Maximização

Na forma canônica para maximização as restrições possuem sinais de menor ou igual.

$$\boxed{\max z} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

sujeito a:

$$\begin{array}{l|l|}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots & \quad\ \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \leq b_m \\
\end{array}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Fonte: Adaptado de [Belfiore and Fávero, 2013]

Forma Canônica - Minimização

Na forma canônica para minimização as restrições possuem sinais de maior ou igual.

$$\boxed{\min z} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

sujeito a:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & \geq b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & \geq b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & \geq b_m \end{array}$$

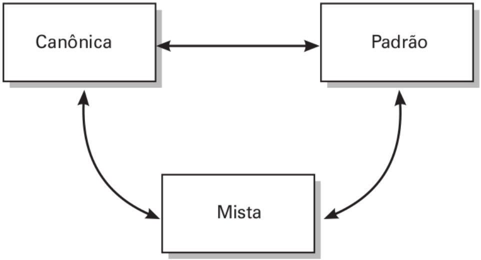
$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

Fonte: Adaptado de [Belfiore and Fávero, 2013]

Transformações entre Formas Algébricas

Correspondência entre formas de representação

As formulações de problemas lineares são equivalentes e podem ser feitas transformações entre elas.



Fonte: [Goldbarg and Luna, 2005]

1. Maximização $\leftrightarrow$ Minimização

- Um problema de maximização pode ser transformado em minimização e vice-versa

$$\boxed{max\ z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \leftrightarrow min\ \text{-}z = \text{-}f(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

$$\boxed{min\ z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \leftrightarrow max\ \text{-}z = \text{-}f(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

2. Menor ou igual ($\leq$) $\leftrightarrow$ Maior ou igual ($\geq$)

- Uma restrição de desigualdade "menor ou igual ($\leq$)" pode ser transformada em uma "maior ou igual ($\geq$)", pela multiplicação de ambos os lados por (-1).

$$\boxed{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \quad \equiv \quad -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \geq -b_i}$$

$$\boxed{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \quad \equiv \quad -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leq -b_i}$$

O símbolo $\equiv$ corresponde ao conceito matemático de equivalente.

3. Equação $\rightarrow$ Inequação

- Uma restrição de igualdade pode ser transformada em duas restrições de desigualdade.

$$\boxed{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad \equiv \quad \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i \end{cases}}$$

4. Variáveis de folga

- Variável de folga corresponde a uma variável extra adicionada a uma inequação de desigualdade do tipo $\leq$ para que ela seja reescrita em forma de uma equação;
- A variável de folga está restrita a condição $x_k \geq 0$.

$$\boxed{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i \quad \equiv \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + \mathbf{x_k} = b_i}$$

5. Variáveis de excesso

- Variável de excesso corresponde a uma variável extra <u>subtraída</u> a uma inequação de desigualdade do tipo $\geq$, para que ela seja reescrita em forma de uma equação;
- A variável de excesso está restrita a condição $x_k \geq 0$.

$$\boxed{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq b_i \quad \equiv \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - \mathbf{x_k} = b_i}$$

6. Variáveis livres

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Uma variável livre corresponde a uma variável que não tem restrição de sinal ($x_j \in \mathcal{R}$);
- Pode ser expressa como a diferença entre duas variáveis (auxiliares) não negativas;
- A soma das variáveis auxiliares deve ser igual a soma da variável original.

$$\boxed{x_j = x_j^1 - x_j^2 \quad \text{, onde } x_j^1 \geq 0 \; e \; x_j^2 \geq 0}$$

Variáveis, Soluções e Restrições

Variáveis

Tipos de Variáveis

- Variável básica:
  - Variáveis que fazem parte da solução básica, ou seja, possuem valor diferente de zero durante a solução de um PPL;
  - No método Simplex, são as variáveis que que apresentam coeficiente igual a 1 em apenas uma equação e 0 nas demais [Belfiore and Fávero, 2013];
- Variável não básica: todas as demais variáveis que não apresentam as condições da variável básica [Belfiore and Fávero, 2013].

Soluções

Tipos de Soluções

- Solução básica: Se um sistema de m equações a m variáveis tiver solução, ela será chamada de solução básica;
  - As n variáveis que não fazem parte da solução devem ter valor igual a zero;
- Solução inviável (ou infactível): viola ao menos uma das restrições do modelo [Belfiore and Fávero, 2013].

Tipos de Soluções

- Solução viável (ou factível): solução que satisfaz as restrições do modelo;
  - Solução básica factível (SBF): solução básica que atende inclusive as restrições de não negatividade;
  - Solução básica factível adjacente (SBF-A): solução básica utilizada no método Simplex a partir da substituição de uma variável básica da solução por uma variável não básica;

Casos Especiais

- Múltiplas Soluções Ótimas
  - Alguns problemas de programação linear podem apresentar mais de uma solução ótima;
  - Nesses modelos, diferentes valores das variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ possibilitam alcançar o melhor resultado possível.
- Função Objetivo Ilimitada
  - A ausência de restrições ou restrições que não limitam o espaço de soluções podem fazer com que a função objetivo z seja ilimitada;
  - Nesse caso, o valor ótimo tenderia a infinito, em problemas de maximização, e a zero, em problemas de minimização.

Casos Especiais

- Inexistência de Solução Ótima
  - Nem todos os problemas de programação linear podem ter soluções ótimas;
  - Nesse caso, o conjunto de soluções factíveis é vazio, ou seja, não existe solução.
- Solução Ótima Degenerada
  - Ocorre quando duas ou mais variáveis ficam "empatadas" , ou seja, possuem um mesmo valor;
  - A solução do problema, então, requer a escolha aleatória de uma delas;
  - A outra variável básica passa a ter valor nulo.

Restrições

Restrições Ativas e Inativas

- Restrições Ativas: são aquelas que definem a solução ótima do modelo [Belfiore and Fávero, 2013].
  - Possuem valores das variáveis de folga iguais a zero;
- Restrições Inativas: são aquelas que não fazem parte da solução ótima [Belfiore and Fávero, 2013].
  - Se as restrições inativas forem eliminadas, a solução ótima não será afetada.

Restrições Redundantes e Não-Redundantes

- Restrições Redundantes: aquelas que se eliminadas do modelo não alteram o espaço de soluções factíveis [Belfiore and Fávero, 2013]
- Restrições Não-Redundantes: aquelas que se eliminadas do modelo alteram o espaço de soluções factíveis (podem, consequentemente, alterar a solução ótima).

Referências I

Belfiore, P. and Fávero, L. P. (2013).
Pesquisa operacional para cursos de engenharia.
Elsevier, 1 edition.

Diego Mello da Silva (2016).
Pesquisa Operacional - Slides de Aula.
IFMG - Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Formiga.

Goldbarg, M. C. and Luna, H. P. L. (2005).
Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos.
Elsevier, 2 edition.