Inteligência Artificial

Integração Numérica

Felipe Augusto Lima Reis
felipe.reis@ifmg.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

Sumário

Introdução

Introdução

- Se $f(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$, então $f(x)$ tem uma primitiva $F(x)$ nesse intervalo [Ruggiero and Lopes, 2000]
  - Primitiva é a uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, para todo x no intervalo $[a, b]$;
- A integral, no intervalo, é dada por:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)}$$

- Dependendo da função $f(x)$, o cálculo analítico de $F(x)$ pode ser muito difícil de se obter
  - Podemos, então, aproximar a função $f(x)$ numericamente.

Introdução

- Considere o problema de aproximar uma integral de uma função contínua $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, ou seja,

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

- Podemos aproximar I por meio da subdivisão do intervalo $[a, b]$ em $n - 1$ subintervalos a partir de um conjunto ordenado de pontos $a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ [Justo et al., 2020].

Introdução

- A partir da aproximação pela subdivisão, temos:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \ \dots \ + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

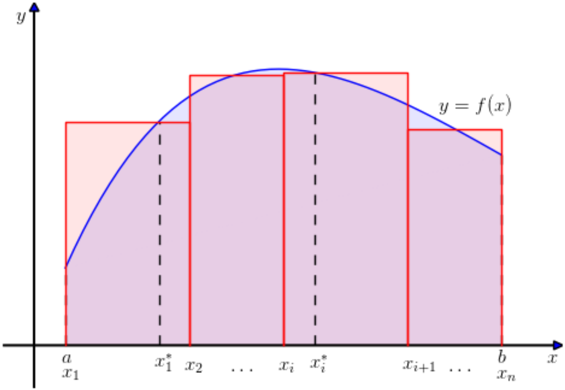
- Definindo um intervalo suficientemente pequeno, podemos aproximar cada subintervalo $h_i = x_{i+1} - x_i$, pela aproximação $f(x_i^*)$, gerando: [Justo et al., 2020]

$$\boxed{I \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i^*) h_i}$$

$f(x_i^*)$ correspondente a aproximar $f(x)$ no intervalo (x_i, x_{i+1}).

Introdução

- Geometricamente, o valor de I corresponde à área entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo das abscissas [Justo et al., 2020].



Fonte: [Justo et al., 2020]

Somas de Riemann

Somas de Riemann

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Considere a aproximação I da integral:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

- Uma das formas de aproxima-la é utilizar um polinômio $p(x)$ constante no intervalo $[a, b]$, ou seja, $f(x) = c$;
- Se aproximarmos $f(x)$ pelo ponto a esquerda do intervalo (a) temos que $f(x) \approx f(a)$

$$I \approx \int_a^b f(a)dx \quad \longrightarrow \quad I = f(a)\int_a^b dx \quad \longrightarrow \quad \boxed{I = f(a)(b-a)}$$

Somas de Riemann

- Podemos, entretanto, melhorar a aproximação, subdividindo $[a, b]$ em n intervalos de igual tamanho h, nos pontos x_i, onde:

$$x_i = a + (i - 1) \cdot h \qquad \text{, onde} \qquad h = \frac{(b - a)}{n}$$

- Em cada intervalo i, podemos aproximar a área por:

$$\Delta S_i \approx f(x_i) \cdot h$$

- A área total é dada pela soma dos intervalos, correspondente à Soma de Riemann à esquerda [Justo et al., 2020].

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot h}$$

Somas de Riemann

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Podemos, ainda aproximar a soma pelos pontos à direita e pelo ponto médio $\xi = \frac{[x_i, x_{i+1}]}{2}$ do intervalo [Justo et al., 2020]
  - Soma de Riemann à direita

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1}) \cdot h}$$

  - Soma de Riemann pelo ponto médio

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi) \cdot h}$$

Fórmulas de Newton-Cotes

Fórmulas de Newton-Cotes

- As fórmulas de Newton-Cotes utilizam a aproximação de um polinômio $p(x)$ que interpola $f(x)$ em pontos do intervalo $[a, b]$ igualmente espaçados [Ruggiero and Lopes, 2000];
- Assim como a Soma de Riemann, as fórmulas subdvidem $[a, b]$ em n subintervalos de comprimento h, onde

$$\boxed{h = \frac{(b-a)}{n}} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{h = (x_i - x_{i+1})}$$

Fórmulas de Newton-Cotes

- Segundo [Ruggiero and Lopes, 2000], as fórmulas fechadas de Newton-Cotes são fórmulas de integração onde

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_n} p(x)dx}$$

- Podemos utilizar um Polinômio de Lagrange $p_n(x)$, dado por

$$p_n(x) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + ... + y_n L_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

- Com isso, temos: [Justo et al., 2020]

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i y_i} \quad ,\text{onde} \quad \boxed{A_i = \int_a^b L_i(x)dx}$$

Fórmulas de Newton-Cotes

- Existem ainda as fórmulas abertas de Newton-Cotes, para o intervalo (a, b) [Ruggiero and Lopes, 2000]
  - Estas, no entanto, não serão estudadas nesta disciplina.
- As seguintes fórmulas de Newton-Cotes serão estudadas:
  - Regra Ponto Médio;
  - Regra do Trapézio;
  - Regras de Simpson.

Fórmulas de Newton-Cotes
Regra do Ponto Médio

Regra do Ponto Médio

- Considere, inicialmente, a Soma de Riemann pelo ponto médio

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi) \cdot h \qquad \text{,onde} \qquad \xi = \frac{[x_i, x_{i+1}]}{2}$$

- Podemos estabelecer uma das fórmulas de Newton-Cotes também pelo ponto médio
  - Neste caso, temos $x_0 = (a + b)/2$ e o polinômio interpolador é o polinômio de grau zero, $L_0(x) \equiv 1$ [Justo et al., 2020]

$$\boxed{p(x) = f(x_0)L_0(x) = f(x_0)}$$

Regra do Ponto Médio

- Pela fórmula de original Newton-Cotes, temos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx$$

- Como, pela Regra do Ponto Médio, $f(x) \approx p(x) = f(x_0)$, temos:

$$\int_a^b f(x_0)dx \quad \longrightarrow \quad f(x_0)\int_a^b dx \quad \longrightarrow \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a)$$

- Substituindo $h = (b-a)$, temos:

$$\boxed{I = h \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

Regra do Ponto Médio - Exemplo [Justo et al., 2020]

- Calcule a integral abaixo, usando a Regra do Ponto Médio:

$$\int_{0.1}^{0.3} e^{-x} sen(x) dx$$

- Resolvendo pelo ponto médio, temos

$$\boxed{I = h \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

- Onde:

$$x = \frac{a+b}{2} = 0,2 \quad \text{e} \quad h = (b-a) = 0,2$$

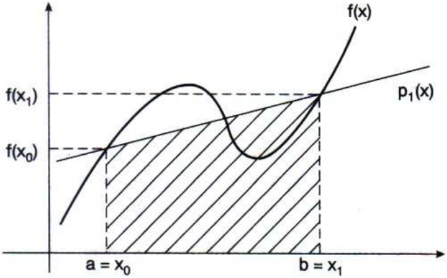
- Temos então:

$$I = (0,2) \cdot e^{-0,2} sen(0,2) = 3,25 \times 10^{-2}$$

Fórmulas de Newton-Cotes
Regra do Trapézio

Regra do Trapézio

- A Regra do Trapézio corresponde a aproximar a integral por um polinômio de grau 1
  - O nome do método está relacionado à região entre o eixo x e a reta que liga os pontos do gráfico da função nos extremos do intervalo, formando um trapézio [Justo et al., 2020]



Fonte: [Ruggiero and Lopes, 2000]

Regra do Trapézio

- Considere inicialmente um Polinômio de Lagrange de grau 1

$$p_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$$

- Substituindo na Fórmula de Newton-Cotes, temos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_1} p_1(x)dx$$

- Substituindo pelo polinômio, temos:

$$I_T = \int_{a=x_0}^{b=x_1} y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)dx$$

Regra do Trapézio

- Simplificando, temos:

$$I_T = y_0 \int_{a=x_0}^{b=x_1} L_0(x)dx + y_1 \int_{a=x_0}^{b=x_1} L_1(x)dx$$

- Podemos ainda fazer:

$$A_0 = \int_{a=x_0}^{b=x_1} \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}dx \longrightarrow \boxed{A_0 = \frac{h}{2}} \quad \text{, onde} \quad h = x_1 - x_0$$

- Da mesma forma:

$$A_1 = \int_{a=x_0}^{b=x_1} \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}dx \longrightarrow \boxed{A_1 = \frac{h}{2}} \quad \text{, onde} \quad h = x_1 - x_0$$

Todos os cálculos podem ser encontradas detalhados na Seção 9.2.2 de [Justo et al., 2020].

Regra do Trapézio

- A Regra do Trapézio, então, é dada por:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right) h}$$

- A Regra do Trapézio, pode ser ainda escrita como:

$$\boxed{I_T = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))}$$

Regra do Trapézio - Exemplo [Justo et al., 2020]

- Calcule a integral abaixo, usando a Regra do Trapézio:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

  - A fórmula da Regra do Trapézio é:

$$\boxed{I_T = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))}$$

  - Temos então:

$$I_T = \frac{(1-0)}{2}(e^0 + e^{-1}) = 0,6839$$

Regra do Trapézio - Exemplo [da Silva, 2020]

- Calcule a integral abaixo, usando a Regra do Trapézio:

$$\int_1^7 \frac{1}{x} dx$$

  - A fórmula da Regra do Trapézio é:

$$\boxed{I_T = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))}$$

  - Temos então:

$$I_T = \frac{(7-1)}{2}\left(\frac{1}{7} + 1\right) = 3,4286$$

Resultado analítico esperado: $\int \frac{1}{x} dx = ln(x) = 1.9459$.

Método Composto do Trapézio

- O Método Composto do Trapézio[1], divide o intervalo $[a, b]$ para melhor aproximação [Ruggiero and Lopes, 2000];
    - O espaço de integração é dividido em n intervalos iguais, $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$;
    - Em cada um deles, utiliza-se a Regra do Trapézio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

[1] [Ruggiero and Lopes, 2000] usa a nomenclatura Regra do Trapézio Repetida.

Método Composto do Trapézio

- O Método Composto do Trapézio é dado então por:

$$\boxed{I_{TC} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot [f(x_i) + f(x_{i+1})]}$$

onde $h = (x_{i+1} - x_i)$

Trapézio Composto - Exemplo [da Silva, 2020]

- Calcule a integral abaixo, usando o Método Composto do Trapézio, com 4 trapézios:

$$\int_1^7 \frac{1}{x} dx$$

  - A fórmula da Método Composto do Trapézio é:

$$\boxed{I_{TC} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot [f(x_i) + f(x_{i+1})]}$$

  - Temos então:

$$I_{TC} = \frac{1}{2}(2,1 + 0,975 + 0,6477 + 0,4870) = 2,1049$$

Resultado analítico esperado: $\int \frac{1}{x} dx = ln(x) = 1.9459$.

Fórmulas de Newton-Cotes
Regras de Simpson

Regra de Simpson

- A Regra de Simpson corresponde a aproximar a integral por um polinômio de grau 2 [Justo et al., 2020]
  - Também é utiliza a nomenclatura de Regra 1/3 de Simpson [Ruggiero and Lopes, 2000];
- A regra necessita de 3 pontos no intervalo fechado $[a, b]$

$$x_0 = a, \quad x_1 = (a + b)/2, \quad x_2 = b$$

- Cada subintervalo de comprimento h é dado por $h = \frac{x_2 - x_0}{2}$
- A aproximação é realizada pelo Polinômio de Lagrange.

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

Regra de Simpson

- Aproximando $f(x)$ por $p_2(x)$ e calculando a integral, temos:[2]

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

- Uma vez que $h = \frac{(b-a)}{2}$, podemos reescrever a equação como:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

[2] Cálculos não serão exibidos nesta seção. Cálculos disponíveis 9.2.3 de [Justo et al., 2020]

Regra de Simpson - Exemplo [Justo et al., 2020]

- Calcule a integral abaixo, usando a Regra de Simpson:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

- A fórmula da Regra de Simpson é:

$$\boxed{I_S = \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

- Temos então:

$$I_S = \frac{1}{6}(e^0 + 4e^{-\frac{1}{4}} + e^{-1}) = 0,7472$$

Método Composto de Simpson

- O Método Composto de Simpson[3], divide o intervalo $[a, b]$ para melhor aproximação [Ruggiero and Lopes, 2000];
- Na literatura, esse cálculo é feito de duas formas ligeiramente distintas
  - A diferença é relacionada ao número de intervalos usados para divisão do espaço de integração;
  - Preferencialmente, é recomendado o uso da Forma 2, conforme livro de [Ruggiero and Lopes, 2000].

[3] [Ruggiero and Lopes, 2000] usa a nomenclatura Regra de Simpson Repetida.

Método Composto de Simpson

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Forma 1 [Justo et al., 2020]
  - O espaço de integração é dividido em $2n$ intervalos iguais, $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$;[4]
  - Em cada um deles, utiliza-se a Regra do Simpson
  - O Método Composto do Simpson é dado então por:

$$\boxed{I_{SC} = \frac{h}{3}\left[f(x_1) + \left(2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i+1})\right) + \left(4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i})\right) + f(x_{2n+1})\right]}$$

  - Onde h é dado por $h = (b-a)/(2n)$.

[4] Observe que a fórmula inicia em y_1.

Método Composto de Simpson

- Forma 2 [Ruggiero and Lopes, 2000] [Alves, 1997]
  - O espaço de integração é dividido em n intervalos iguais, $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$;[5]
  - Em cada um deles, utiliza-se a Regra do Simpson
  - O Método Composto do Simpson é dado então por:

$$\boxed{I_{SC} = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + \left(2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i})\right) + \left(4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1})\right) + f(x_n)\right]}$$

  - Onde h é dado por $h = (b-a)/(n)$.

[5] Observe que a fórmula inicia em y_0.

Regra 3/8 de Simpson

- A Regra 3/8 de Simpson corresponde a aproximar a integral por um polinômio de grau 3 [da Silva, 2020];
- A aproximação é realizada pelo Polinômio de Lagrange.

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$$

- A fórmula da Regra 3/8 de Simpson é dada por

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right)}$$

Referências I

Alves, C. J. S. (1997).
Análise numérica - notas de aula.
[Online]; acessado em 23 de Outubro de 2020. Disponível em:
https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/~calves/courses/.

da Silva, D. M. (2020).
Cálculo Numérico - Slides de Aula.
IFMG - Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Formiga.

Justo, D., Sauter, E., Azevedo, F., Guidi, L., and Konzen, P. H. (2020).
Cálculo Numérico, Um Livro Colaborativo - Versão Python.
UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/livro-py.pdf.

Ruggiero, M. A. G. and Lopes, V. L. d. R. (2000).
Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais.
Editora Makron, 2 edition.