

Inteligência Artificial

Sistemas Especialistas Fuzzy

Felipe Augusto Lima Reis

felipe.reis@ifmg.edu.br



**INSTITUTO
FEDERAL**
Minas Gerais

Sistemas Especialistas Fuzzy - Visão Geral

- **Sistemas especialistas fuzzy são aqueles que utilizam a lógica fuzzy para solução de problemas;**
 - Possuem uma base de conhecimento (ou base de dados) e um mecanismo de inferência para tomada de decisões;
- A **lógica fuzzy**, também chamada de **lógica difusa**, permite que estados indeterminados possam ser tratados por controladores (sistemas de controle);
 - Trabalha frequentemente com conceitos não-quantificáveis;
 - Ex. 1: temperatura (quente, morno, médio, frio, etc.);
 - Ex. 2: felicidade (radiante, feliz, apático, triste, etc.);

Sistemas Especialistas Fuzzy - Visão Geral

- Originada a partir das ideias de Lotfi A. Zadeh, em 1965 [Novak et al., 1999];
- Está relacionado a dois fenômenos: **incerteza** e **imprecisão** [Novak et al., 1999];
- Capaz de expressar o conceito de “verdade parcial”;
- Utilizada em múltiplas aplicações práticas, incluindo controle de sistemas, robótica e inteligência artificial.

Sumário

- 1 Conceitos
- 2 Conjuntos
- 3 Lógica
- 4 Regras
- 5 Inferência
- 6 Ex. Resolvido

CONCEITOS

Lógica Bivalorada x Multivalorada

- A **lógica clássica**, também chamada de lógica aristotélica, permite dois valores possíveis: **verdadeiro (1)** e **falso (0)** [Coppin, 2004];
 - Essa lógica é também chamada de bivalorada ou bivalente, uma vez que possui dois valores veritativos (valores verdade);
- A **lógica multivalorada** possibilita a representação de múltiplos valores veritativos, indicados por números reais no intervalo entre 0 (falso) e 1 (verdadeiro);
 - Valores nesse intervalo são chamados de **grau de certeza** ou **grau de verdade**.

Lógica Multivalorada x Probabilidade

- Consideremos um valor de probabilidade igual a 0,5
 - Para essa probabilidade, um fato é tão verdadeiro quanto falso, porém somente pode assumir uma das opções (verdadeiro ou falso);
- Consideremos uma proposição lógica multivalorada igual a 0,5
 - Nela, indicamos apenas seu grau de verdade;
 - A proposição é algo vago, pode não ser verdadeiro nem falso, ou pode ser verdadeiro e falso ao mesmo tempo;
 - Nesse valor, a proposição lógica pode ser entendida como uma “meia verdade” (proposição 50% verdadeira);

Lógica Multivalorada x Probabilidade - Exemplo

- Ex. 1: "Eu sou um ótimo motorista. Nos últimos trinta anos eu recebi apenas quatro multas por excesso de velocidade." [Wikipedia contributors, 2020].
 - Considerando que a afirmação tivesse **probabilidade de ser verdadeira de 0,5 (50%)**, temos:
 - O motorista está mentindo (não é ótimo motorista, não levou apenas quatro multas);
 - O motorista está falando a verdade (é ótimo motorista, levou apenas quatro multas).

Lógica Multivalorada x Probabilidade - Exemplo

- Ex. 1: "Eu sou um ótimo motorista. Nos últimos trinta anos eu recebi apenas quatro multas por excesso de velocidade." [Wikipedia contributors, 2020].
 - Considerando que a afirmação fosse uma **proposição lógica multivalorada de valor 0,5**, podemos ter, por exemplo:
 - O motorista levou 4 multas nos últimos 30 anos, porém o começou a dirigir há apenas uma semana (meia-verdade);
 - O motorista tirou carteira há 30 anos, levou 4 multas e nunca mais dirigiu (meia-verdade);
 - Essas condições não implicam que o motorista é bom ou não, somente indicam que a afirmação é 50% verdadeira

Lógica Multivalorada x Probabilidade - Exemplo

- Ex. 1: "Eu sou um ótimo motorista. Nos últimos trinta anos eu recebi apenas quatro multas por excesso de velocidade." [Wikipedia contributors, 2020].
 - Considerando que a afirmação fosse uma **proposição lógica multivalorada de valor 0,5**, podemos ter, por exemplo:
 - O motorista levou 4 multas nos últimos 30 anos, porém o começou a dirigir há apenas uma semana (meia-verdade);
 - O motorista tirou carteira há 30 anos, levou 4 multas e nunca mais dirigiu (meia-verdade);
 - **Essas condições não implicam que o motorista é bom ou não, somente indicam que a afirmação é 50% verdadeira.**

Conjuntos Nítidos e Nebulosos

- **Conjuntos nítidos (*crisp*)**, relacionam-se com a lógica bivalorada, onde o elemento pode pertencer (ou não) a um determinado conjunto.

$$P_A(x) : U \rightarrow \{0, 1\} \quad P_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

- **Conjuntos nebulosos (ou fuzzy, ou difusos)** relacionam-se com a lógica multivalorada
 - Esses conjuntos mapeiam o “**grau de pertinência**” de um objeto ao conjunto nebuloso A .

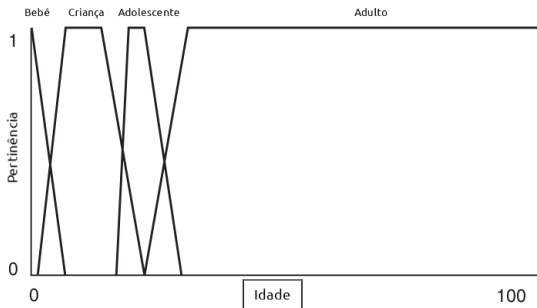
$$P_A(x) : U \rightarrow [0, 1], \quad \text{onde } 0 \leq P_A(x) \leq 1$$

Lógica Nebulosa

- A **lógica nebulosa** (ou **lógica difusa**, ou **lógica fuzzy**) é usada para raciocinar sobre conjuntos difusos [Coppin, 2004]
 - Possibilita o uso de qualquer valor $x \in \mathbb{R}$ no intervalo $[0...1]$;
 - Pode variar entre a completa falsidade e a completa verdade.

Variáveis linguísticas

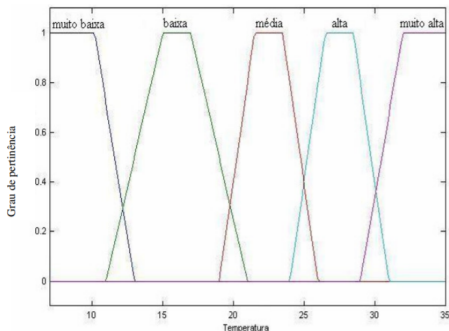
- **Variáveis linguísticas**: conceito correspondente a uma faixa de valores nebulosos [Coppin, 2004]
 - Pode ser definida sobre um **universo de discurso** (ex.: 0 - 100), correspondente a um intervalo de valores que limita a variável linguística.



Fonte: Adaptado de [Coppin, 2004]

Variáveis linguísticas - Exemplo

- Variável linguística: temperatura
 - Universo de Discurso: 0 - 35°;
 - Valores: muito baixa, baixa, média, alta, muito alta¹.

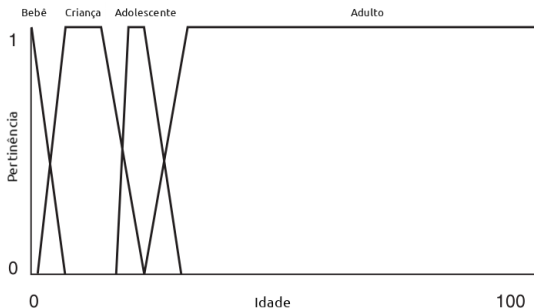


Fonte: [Oliveira et al., 2005]

¹Esses valores são subconjuntos do universo de discurso.

Variáveis linguísticas x Conjuntos Nebulosos

- Variável linguística: Idade;
- Conjuntos Nebulosos: Bebê, Criança, Adolescente, Adulto.



Fonte: Adaptado de [Coppin, 2004]

Modificadores linguísticos

- Um **modificador linguístico** é uma palavra ou expressão capaz de alterar ou detalhar um conjunto fuzzy, gerando um conjunto mais específico;
 - Podem transformar (ou especializar) conjuntos nebulosos, modificando sua função de pertinência.
- Expressões utilizadas:
 - Extremamente;
 - Muito;
 - Razoavelmente;
 - Pouco;
 - Muito pouco.

Modificadores linguísticos - Exemplo

- Considere a existência dos conjuntos abaixo:
 - Automóveis rápidos;
 - Automóveis lentos;
- Modificadores linguísticos podem ser utilizados para subdividir e gerar os seguintes conjuntos:
 - Automóveis **extremamente** rápidos;
 - Automóveis **muito** rápidos;
 - Automóveis rápidos;
 - Automóveis lentos;
 - Automóveis **muito** lentos;
 - Automóveis **extremamente** lentos.

CONJUNTOS NEBULOSOS

Conjuntos Nebulosos

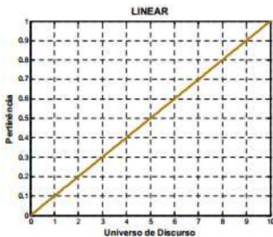
- **Conjuntos nebulosos (ou fuzzy, ou difusos)** são conjuntos aos quais os elementos têm graus de pertinência
 - Um objeto x possui um **grau de pertinência** $P_A(x)$ em relação ao conjunto nebuloso A

$$P_A(x) : U \rightarrow [0, 1], \quad \text{onde} \quad 0 \leq P_A(x) \leq 1$$

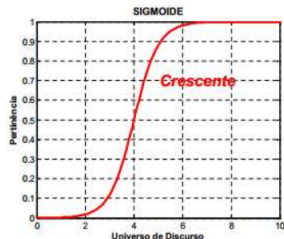
Graus de pertinência também podem ser representados pela notação $\mu_A(x)$.

Funções de pertinência

- **Funções de pertinência:** propriedades semânticas do conceito, indicando o grau de pertinência de seus elementos.



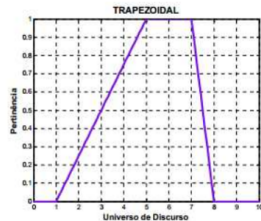
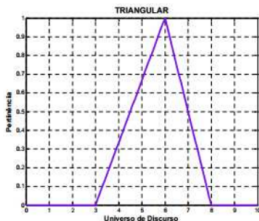
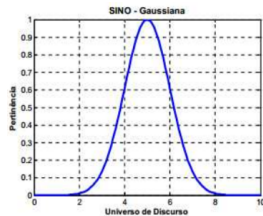
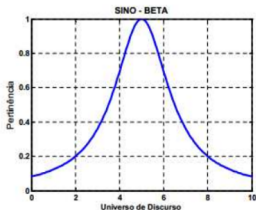
$$f(x) = ax + b$$



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ 2\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2 & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 - 2\left(\frac{x-c}{c-a}\right)^2 & \text{se } b \leq x \leq c \\ 1 & \text{se } x > c \end{cases}$$

Fonte: Adaptado de [da Silva, 2014]

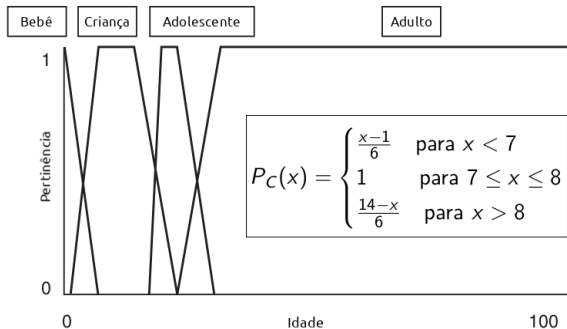
Funções de pertinência



Fonte: Adaptado de [da Silva, 2014]

Funções de Pertinência - Exemplo

- Considerando a curva abaixo, podemos estabelecer a seguinte função para a pertinência em relação ao conjunto Criança:



Fonte: Adaptado de [Coppin, 2004]

Operações sobre conjuntos nebulosos

- **Vazio:** “O conjunto nebuloso A é vazio se, e somente se, para todo x pertencente ao universo de números U , o grau de pertinência de x em relação a A é igual a zero”

$$A = \emptyset \iff \forall x \in U, P_A(x) = 0$$

- **Igualdade:** “O conjunto nebuloso A é igual ao conjunto B , e somente se, para todo x pertencente ao universo de números U , o grau de pertinência de x em relação a A é igual o grau de pertinência de x em relação a B ”

$$A = B \iff \forall x \in U, P_A(x) = P_B(x)$$

Operações sobre conjuntos nebulosos

- **Subconjunto:** “O conjunto nebuloso A está contido no conjunto B , se para todo x pertencente ao universo de números U , o grau de pertinência de x em relação a A é menor que o grau de pertinência de x em relação a B ”

$$A \subset B \text{ se } \forall x \in U, P_A(x) \leq P_B(x)$$

- **Complemento:** “O complemento de x em relação ao conjunto A é dado pela diferença entre o valor de pertinência máxima de conjuntos (1) subtraído pela pertinência de x em relação ao conjunto A ”

$$P_{\neg A}(x) = 1 - P_A(x)$$

Operações sobre conjuntos nebulosos

- **União:** “A união entre os conjuntos nebulosos A e B é dada pela maior pertinência de x em relação aos conjuntos A e B ”

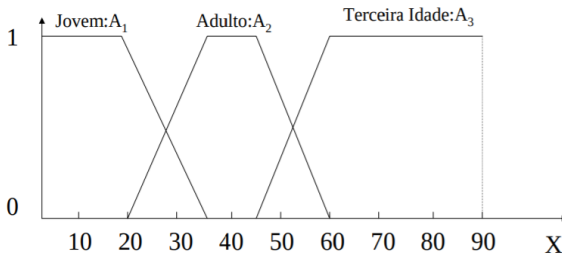
$$P_{A \cup B}(x) = \max\{P_A(x), P_B(x)\}$$

- **Interseção:** “A interseção entre os conjuntos nebulosos A e B é dada pela menor pertinência de x em relação aos conjuntos A e B ”

$$P_{A \cap B}(x) = \min\{P_A(x), P_B(x)\}$$

Operações - Ex. [Heloisa de Arruda Camargo, 2007]

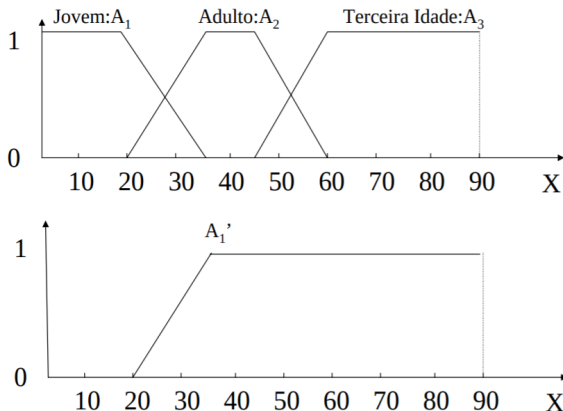
- Ex.1: Considere os seguintes conjuntos fuzzy:



Fonte: [Heloisa de Arruda Camargo, 2007]

Operações - Ex. [Heloisa de Arruda Camargo, 2007]

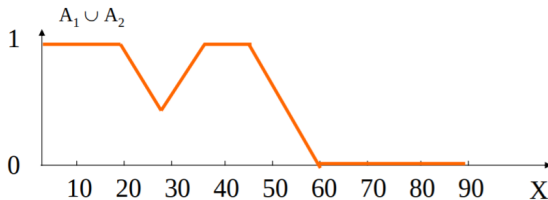
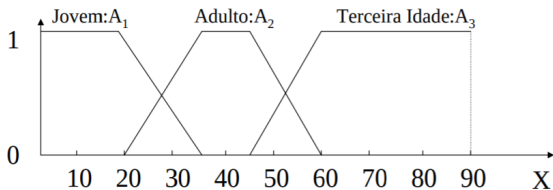
● Complemento



Fonte: [Heloisa de Arruda Camargo, 2007]

Operações - Ex. [Heloisa de Arruda Camargo, 2007]

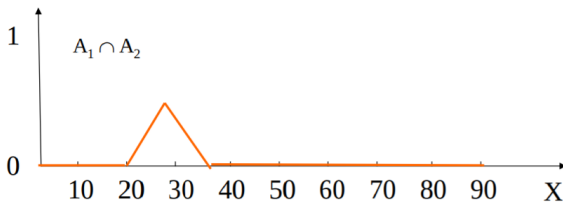
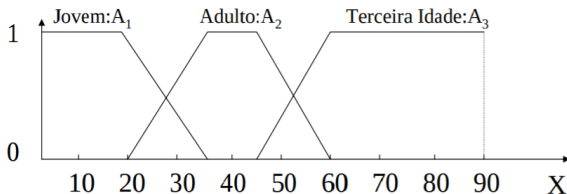
● União



Fonte: [Heloisa de Arruda Camargo, 2007]

Operações - Ex. [Heloisa de Arruda Camargo, 2007]

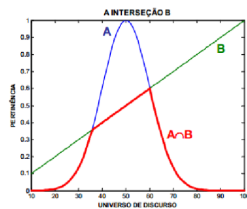
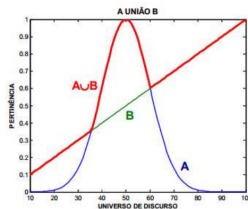
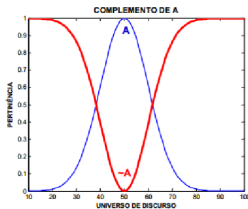
● Interseção



Fonte: [Heloisa de Arruda Camargo, 2007]

Operações - Ex. [da Silva, 2014]

- Ex.2: Operações de complemento, união e interseção.



Fonte: [da Silva, 2014]

LÓGICA NEBULOSA

Lógica Nebulosa

- A **lógica nebulosa (ou fuzzy)** é uma forma de lógica aplicada a variáveis nebulosas [Coppin, 2004];
- A lógica nebulosa é estritamente dependente das variáveis: a adição ou remoção de variáveis da base de dados pode causar modificação nas conclusões previamente obtidas;

Conjunção

- A operação de **conjunção**, assim como na lógica clássica, utiliza o conector lógico \wedge .
 - Pode ser associada à operação de interseção de conjuntos.

$$A \wedge B = \min\{A, B\}$$

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	0.5	0
0	1	0
0.5	0	0
0.5	0.5	0.5
0.5	1	0.5
1	0	0
1	0.5	0.5
1	1	1

Fonte: [da Silva, 2014]

Disjunção

- A operação de **disjunção** utiliza o conector lógico \vee
 - Pode ser correlacionada à operação de união entre conjuntos.

$$A \vee B = \max\{A, B\}$$

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	0.5	0.5
0	1	1
0.5	0	0.5
0.5	0.5	0.5
0.5	1	1
1	0	1
1	0.5	1
1	1	1

Fonte: [da Silva, 2014]

Negação

- A operação de **negação** utiliza o conector lógico \neg
 - Pode ser associada à operação de complemento de conjuntos;

$$\neg A \equiv 1 - A$$

A	$\neg A$
0	1
0.5	0.5
1	0

Fonte: [da Silva, 2014]

O sinal gráfico \equiv corresponde ao conceito de equivalente (Matemática Discreta).

Implicação

- A operação de **implicação** utiliza o conector lógico \rightarrow
 - A implicação é falsa quando p é verdadeira e q é falsa.
 - Para todos os outros casos, a proposição é verdadeira.

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	0.5	1
0	1	1
0.5	0	0.5
0.5	0.5	0.5
0.5	1	1
1	0	0
1	0.5	0.5
1	1	1

Fonte: [da Silva, 2014]

REGRAS NEBULOSAS

Regras Fuzzy

- Regras possuem a estrutura:

se A , então B

- Regras Fuzzy** possuem a seguinte estrutura:

se $A = x$, então $B = y$

se $A \{op\} x$, então $B = y$

onde **op** corresponde a um operador matemático qualquer: $=, \neq, >, <, \leq, \geq, \dots$

Regras Fuzzy

- Nas regras fuzzy, a parte inicial é denominada **antecedente**, enquanto a parte final é denominada **consequente**.

se A {op} x , então $B = y$

Regras Fuzzy - Exemplos

- Seguem exemplos de regras fuzzy [Coppin, 2004]:
 - **se** *altura = alta* , **então** *comprimento camisa = longa*;
 - **se** *tempo estudo = curto* , **então** *nota = baixa*.

INFERÊNCIA NEBULOSA

Fuzzificação e Defuzzificação

- Fuzzificação (ou nebulização ou *fuzzify*) corresponde ao processo de conversão de um valor numérico em um conjunto nebuloso;
- Defuzzificação (ou desnebulização ou *defuzzify*) corresponde a processo inverso ao de fuzzificação, ou seja, de conversão de conjunto nebuloso em um valor numérico;

Fuzzificação (definição formal)

- Considere A , B e C , conjuntos fuzzy e x , y e z , variáveis fuzzy;

se x é A e y é B , então z é C

- **Fuzzificação** é o processo de encontrar um grau de pertinência $P_A(x')$ e $P_B(y')$ para o qual as entradas nítidas x' e y' pertençam aos conjuntos fuzzy A e B na parte antecedente de uma regra fuzzy [Kasabov, 1996].

Defuzzificação (definição formal)

- **Defuzzificação** é o processo de cálculo de um valor numérico de saída única para uma variável de saída fuzzy, com base na função de pertinência inferida para essa variável [Kasabov, 1996];

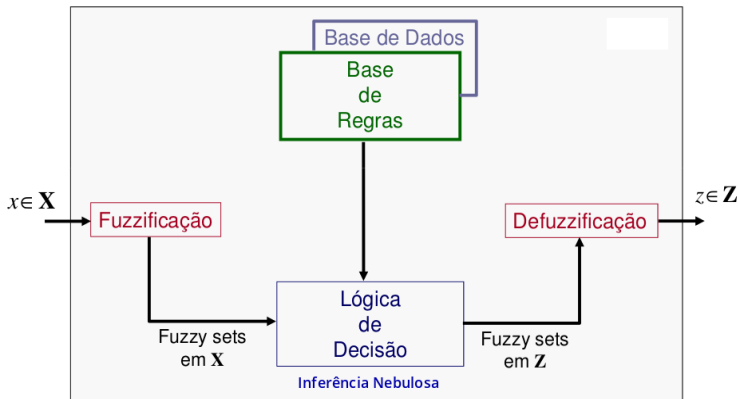
Inferência de Mamdani

- A **Implicação de Mamdani (ou Inferência de Mamdani)** é frequentemente usada em sistemas nebulosos [Coppin, 2004]
 - Permite que o sistema obtenha dados de entrada a partir de conjuntos nítidos (*crisp*) e aplique regras fuzzy nesses dados;
 - A saída do sistema será uma ação ou recomendação;
 - Aplicações:
 - Ex. 1: sensores de uma máquina industrial;
 - Ex. 2: sensores de um veículo (velocidade, distância, etc);
 - Ex. 3: controladores de sistemas de irrigação.

Inferência de Mamdani

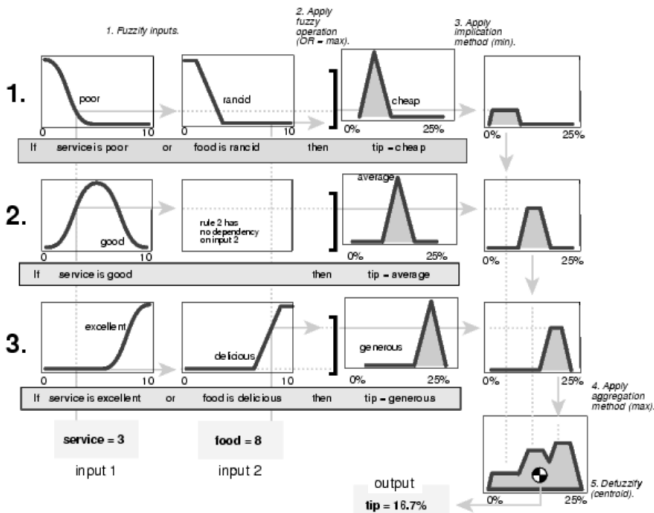
- Passo a passo: [da Silva, 2014]
 - ① Definir variáveis linguísticas e conjuntos nebulosos;
 - ② Definir as regras de produção nebulosas;
 - ③ Nebulizar (*fuzzificar*) os valores de entrada usando funções de pertinência;
 - ④ Combinar as entradas nebulosas de acordo com os antecedentes das regras;
 - ⑤ Encontrar o consequente da regras combinando valores;
 - ⑥ Combinar os consequentes das regras para obter distribuição de saída;
 - ⑦ Desnebulizar (*defuzzificar*) a saída para obter um valor nítido como resultado.

Inferência Nebulosa



Fonte: Adaptado de [Ricardo J. G. B. Campello, 2010]

Inferência Nebulosa - Exemplos



Fonte: Adaptado de [da Silva, 2014]

Métodos de Defuzzificação

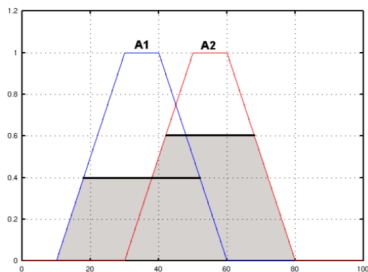
- Métodos baseados no máximo:
 - Método do Critério Máximo (ou Mínimo);
 - Média dos Máximos (MOM);
 - Primeiro dos Máximos (FOM);
 - Último dos Máximos (LOM);
- Métodos baseados no centroide:
 - Método do Centroide (COG);
 - Método do Centro de Soma (CoS);
 - Método do Centro da Área (CoA);
- Métodos baseados em pesos ponderados.

Métodos de Defuzzificação

1 Método do Critério Máximo

- Produz um valor numérico igual ao maior valor ativado;
- Adequado principalmente a funções triangulares, que geram saídas com possibilidade de “picos”.

$$z', \text{ onde } P_A(z') \geq P_A(z), \forall z \in Z$$



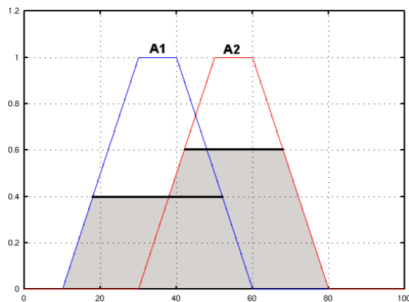
Fonte: [Jacson Rodrigues, 2013]

Métodos de Defuzzificação

② Método do Critério Mínimo

- Produz um valor numérico igual ao menor valor ativado;

$$z', \text{ onde } P_A(z') \leq P_A(z), \forall z \in Z$$



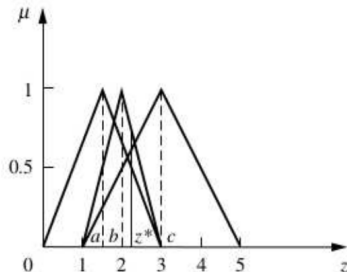
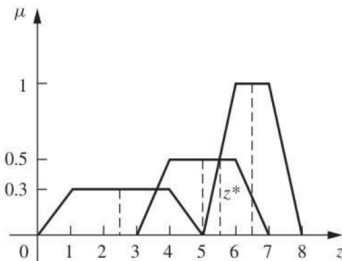
Fonte: [Jacson Rodrigues, 2013]

Métodos de Defuzzificação

3 Média dos Máximos (Mean of Maxima - MOM)

- Média dos maiores valores de cada conjunto.

$$z' = \frac{\sum_{i=1}^n \max_{A_i}(z) \cdot P_{A_i}(z)}{\sum P_{A_i}(z)}$$



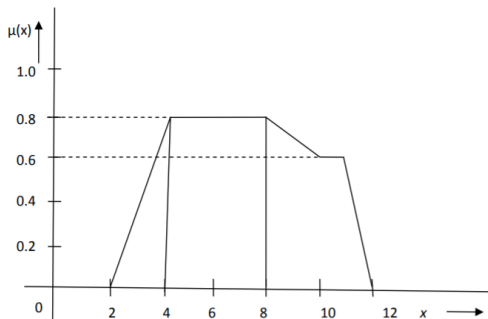
Fonte: [da Silva, 2014]

Métodos de Defuzzificação

④ Primeiro dos Máximos (First of Maxima Method - FOM)

- Primeiro dos maiores valores de cada conjunto.

$$z' = \min\{z \mid P_A(z) = \max_{A_i}(z) \cdot P_{A_i}(z)\}$$



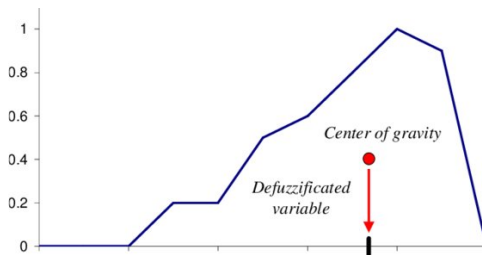
Fonte: [Debasis Samanta, 2016]

Métodos de Defuzzificação

5 Método do Centroide (Center of Gravity - COG)

- Soma discreta com uma seleção “razoável” de valores, de modo a se aproximar da integral contínua.

$$z' = \frac{\sum z \cdot P_A(z)}{\sum P_A(z)}$$



Fonte: Adaptado de [Sgambi and Bontempo, 2005]

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Sistema de freio para carro

- Exemplo extraído de [Coppin, 2004];
- Suponha o desenvolvimento de um sistema de freio para carros, semelhante ao sistema de ABS,
 - Tal sistema tem o objetivo de evitar o travamento das rodas, para diminuir o tempo de frenagem e manter o controle do veículo;
- O intervalo (universo de discurso) será entre 0 e 100 (%);
- O processo de defuzzificação será calculado pelo Método do Centroide (COG);
- Seguiremos o passo a passo da Inferência de Mamdani.

Inferência de Mamdani

- Passo a passo:
 - ➊ Definir **variáveis linguísticas e conjuntos nebulosos**;
 - ➋ Definir as regras de produção nebulosas;
 - ➌ Nebulizar (*fuzzificar*) os valores de entrada usando funções de pertinência;
 - ➍ Combinar as entradas nebulosas de acordo com os antecedentes das regras;
 - ➎ Encontrar o consequente da regras combinando valores;
 - ➏ Combinar os consequentes das regras para obter distribuição de saída;
 - ➐ Desnebulizar (*defuzzificar*) a saída para obter um valor nítido como resultado.

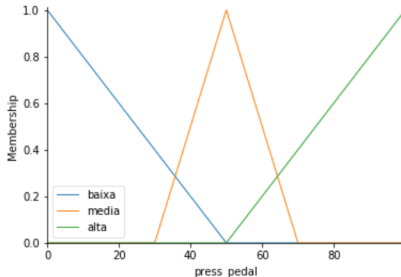
Sistema de freio para carro

- Variáveis Linguísticas e Conjuntos Nebulosos
 - **Entrada 1:** Pressão pedal: baixa, média, alta
 - **Entrada 2:** Velocidade carro: devagar, médio, rápido
 - **Entrada 3:** Velocidade roda: devagar, médio, rápido
 - **Saída:** Pressão freio: aplicar, liberar

Fonte: [Coppin, 2004] e [da Silva, 2014]

Sistema de freio para carro

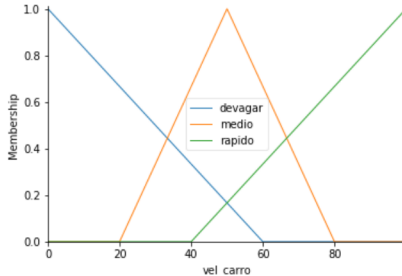
- Variável Linguística: Pressão no Pedal
- Conjuntos:
 - Baixa: $\{(0, 1), (50, 0)\}$;
 - Média: $\{(30, 0), (50, 1), (70, 0)\}$;
 - Alta: $\{(50, 0), (100, 1)\}$;



Fonte: Próprio autor

Sistema de freio para carro

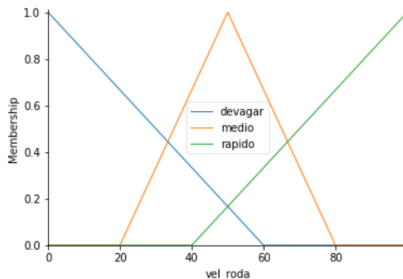
- Variável Linguística: **Velocidade do Carro**
- Conjuntos:
 - Devagar: $\{(0, 1), (60, 0)\}$;
 - Médio: $\{(20, 0), (50, 1), (80, 0)\}$;
 - Rápido: $\{(40, 0), (100, 1)\}$;



Fonte: Próprio autor

Sistema de freio para carro

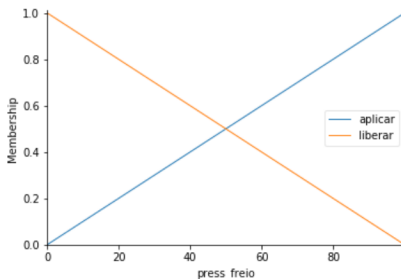
- Variável Linguística: **Velocidade da Roda**
- Conjuntos:
 - Devagar: $\{(0, 1), (60, 0)\}$;
 - Médio: $\{(20, 0), (50, 1), (80, 0)\}$;
 - Rápido: $\{(40, 0), (100, 1)\}$;



Fonte: Próprio autor

Sistema de freio para carro

- Variável Linguística: Pressão no Freio
- Conjuntos:
 - Aplicar: $\{(0, 0), (100, 1)\}$;
 - Liberar: $\{(0, 1), (100, 0)\}$;



Fonte: Próprio autor

Inferência de Mamdani

- Passo a passo:
 - ① Definir variáveis linguísticas e conjuntos nebulosos;
 - ② **Definir as regras de produção nebulosas;**
 - ③ Nebulizar (*fuzzificar*) os valores de entrada usando funções de pertinência;
 - ④ Combinar as entradas nebulosas de acordo com os antecedentes das regras;
 - ⑤ Encontrar o consequente da regras combinando valores;
 - ⑥ Combinar os consequentes das regras para obter distribuição de saída;
 - ⑦ Desnebulizar (*defuzzificar*) a saída para obter um valor nítido como resultado.

Sistema de freio para carro

■ Regras de Produção Nebulosas

R_1 **se** pressão pedal freio = média
então aplicar freio

R_2 **se** pressão pedal freio = alta
e velocidade carro = alta
e velocidade rodas = alta
então aplicar freio

R_3 **se** pressão pedal freio = alta
e velocidade carro = alta
e velocidade rodas = baixa
então liberar freio

R_4 **se** pressão pedal freio = baixa
então liberar freio

Fonte: [Coppin, 2004] e [da Silva, 2014]

Inferência de Mamdani

- Passo a passo:
 - ① Definir variáveis linguísticas e conjuntos nebulosos;
 - ② Definir as regras de produção nebulosas;
 - ③ **Nebulizar (*fuzzificar*) os valores de entrada usando funções de pertinência;**
 - ④ Combinar as entradas nebulosas de acordo com os antecedentes das regras;
 - ⑤ Encontrar o consequente da regras combinando valores;
 - ⑥ Combinar os consequentes das regras para obter distribuição de saída;
 - ⑦ Desnebulizar (*defuzzificar*) a saída para obter um valor nítido como resultado.

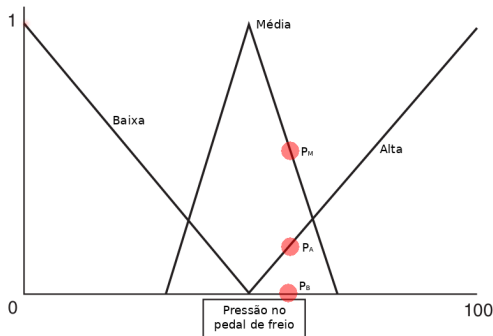
Sistema de freio para carro

- Considere a seguinte entrada nítida:
 - Pressão no pedal de freio: 60;
 - Velocidade do carro: 80;
 - Velocidade da roda: 55.

Sistema de freio para carro

- Pressão no pedal de freio (60)

- Baixa: $P_B(x) = 0$;
- Média: $P_M(x) = 0.5$;
- Alta: $P_A(x) = 0.2$;



Fonte: Adaptado de [Coppin, 2004]

Sistema de freio para carro

- Velocidade do carro (80)

- Devagar: $P_D(x) = 0$;
- Médio: $P_M(x) = 0$;
- Rápido: $P_R(x) = 0.667$;

- Velocidade da roda (55)

- Devagar: $P_D(x) = 0.083$;
- Médio: $P_M(x) = 0.883$;
- Rápido: $P_R(x) = 0.25$;

Inferência de Mamdani

- Passo a passo:
 - ① Definir variáveis linguísticas e conjuntos nebulosos;
 - ② Definir as regras de produção nebulosas;
 - ③ Nebulizar (*fuzzificar*) os valores de entrada usando funções de pertinência;
 - ④ **Combinar as entradas nebulosas de acordo com os antecedentes das regras;**
 - ⑤ Encontrar o consequente da regras combinando valores;
 - ⑥ Combinar os consequentes das regras para obter distribuição de saída;
 - ⑦ Desnebulizar (*defuzzificar*) a saída para obter um valor nítido como resultado.

Sistema de freio para carro

- As entradas nebulosas, de acordo com os antecedentes das regras estão disponíveis na figura abaixo.

R_1 se pressão pedal freio = média
então aplicar freio

Antec. $P_M(60) = 0.5$

R_3 se pressão pedal freio = alta
e velocidade carro = alta
e velocidade rodas = baixa
então liberar freio

Antec. $P_A(60) = 0.2, P_R(80) = 0.667,$
 $P_D(55) = 0.083$

R_2 se pressão pedal freio = alta
e velocidade carro = alta
e velocidade rodas = alta
então aplicar freio

Antec. $P_A(60) = 0.2, P_R(80) = 0.667,$
 $P_R(55) = 0.25$

R_4 se pressão pedal freio = baixa
então liberar freio

Antec. $P_B(60) = 0$

Fonte: Adaptado de [da Silva, 2014]

Inferência de Mamdani

- Passo a passo:
 - ① Definir variáveis linguísticas e conjuntos nebulosos;
 - ② Definir as regras de produção nebulosas;
 - ③ Nebulizar (*fuzzificar*) os valores de entrada usando funções de pertinência;
 - ④ Combinar as entradas nebulosas de acordo com os antecedentes das regras;
 - ⑤ **Encontrar o consequente da regras combinando valores;**
 - ⑥ Combinar os consequentes das regras para obter distribuição de saída;
 - ⑦ Desnebulizar (*defuzzificar*) a saída para obter um valor nítido como resultado.

Sistema de freio para carro

Segundo [Coppin, 2004], na conjunção de 2 ou mais variáveis, pega-se o mínimo entre os valores de pertinência.

- Regra 1:

R_1 **se** pressão pedal freio = média
então aplicar freio

Antec. $P_M(60) = 0.5$

Conseq. Aperte o freio: 0.5

- Regra 2:

R_2 **se** pressão pedal freio = alta
e velocidade carro = alta
e velocidade rodas = alta
então aplicar freio

Antec. $P_A(60) = 0.2, P_R(80) = 0.667, P_R(55) = 0.25$

Conseq. Aperte o freio: 0.2

Sistema de freio para carro

Segundo [Coppin, 2004], normalmente, na conjunção de 2 ou mais variáveis, pega-se o mínimo entre os valores de pertinência.

- Regra 3:

R_3 **se** pressão pedal freio = alta
e velocidade carro = alta
e velocidade rodas = baixa
então liberar freio

Antec. $P_A(60) = 0.2$, $P_R(80) = 0.667$, $P_D(55) = 0.083$

Conseq. Libere o freio: 0.083

- Regra 4:

R_4 **se** pressão pedal freio = baixa
então liberar freio

Antec. $P_B(60) = 0$

Conseq. Libere o freio: 0

Inferência de Mamdani

- Passo a passo:
 - ① Definir variáveis linguísticas e conjuntos nebulosos;
 - ② Definir as regras de produção nebulosas;
 - ③ Nebulizar (*fuzzificar*) os valores de entrada usando funções de pertinência;
 - ④ Combinar as entradas nebulosas de acordo com os antecedentes das regras;
 - ⑤ Encontrar o consequente da regras combinando valores;
 - ⑥ **Combinar os consequentes das regras para obter distribuição de saída;**
 - ⑦ Desnebulizar (*defuzzificar*) a saída para obter um valor nítido como resultado.

Inferência de Mamdani

- Passo a passo:
 - ① Definir variáveis linguísticas e conjuntos nebulosos;
 - ② Definir as regras de produção nebulosas;
 - ③ Nebulizar (*fuzzificar*) os valores de entrada usando funções de pertinência;
 - ④ Combinar as entradas nebulosas de acordo com os antecedentes das regras;
 - ⑤ Encontrar o consequente da regras combinando valores;
 - ⑥ Combinar os consequentes das regras para obter distribuição de saída;
 - ⑦ **Desnebulizar (*defuzzificar*) a saída para obter um valor nítido como resultado.**

Sistema de freio para carro

- Cálculo da etapa de defuzzificação, pelo Método do Centroide;

$$C = \frac{(5 \times 0.083) + (10 \times 0.1) + (15 \times 0.15) + (20 \times 0.2) + \dots + (100 \times 0.7)}{0.083 + 0.1 + 0.15 + 0.2 + \dots + 0.7} = 65.53$$

Fonte: Adaptado de [Coppin, 2004].

- Valor de saída nítido é **65.53**, correspondente à pressão aplicada pelo freio nas rodas do carro.

Referências I



Coppin, B. (2004).

Artificial intelligence illuminated.

Jones and Bartlett illuminated series. Jones and Bartlett Publishers, 1 edition.



da Silva, D. M. (2014).

Inteligência Artificial - Slides de Aula.

IFMG - Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Formiga.



Debasis Samanta (2016).

Defuzzification methods.

[Online]; acessado em 23 de Julho de 2020. Disponível em: <https://cse.iitkgp.ac.in/~dsamanta/courses/archive/sca/Archives/Chapter%205%20Defuzzification%20Methods.pdf>.



Heloisa de Arruda Camargo (2007).

Sistemas Nebulosos - slides de aula.

[Online]; acessado em 21 de Julho de 2020. Disponível em:

<http://www2.dc.ufscar.br/~heloisa/SN2007/Conjuntos%20Fuzzy1.pdf>.



Jacson Rodrigues (2013).

Lógica Nebulosa (Fuzzy) - slides de aula.

[Online]; acessado em 23 de Julho de 2020. Disponível em:

http://jeiks.net/wp-content/uploads/2013/10/IntArt_Fuzzy.pdf.



Kasabov, N. K. (1996).

Foundations of Neural Networks, Fuzzy Systems, and Knowledge Engineering.

MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1st edition.

Referências II



Novak, V., Perfiljeva, I., and Mockor, J. (1999).
Mathematical Principles of Fuzzy Logic, page 336.
Springer Nature.
SECS, volume 517.



Oliveira, H. L. d., Amendola, M., and Nääs, I. d. A. (2005).
Estimativa das condições de conforto térmico para avicultura de postura usando a teoria dos conjuntos Fuzzy.
Engenharia Agrícola, 25:300 – 307.



Ricardo J. G. B. Campello (2010).
Introdução a Sistemas Inteligentes - slides de aula.
[Online]; acessado em 23 de Julho de 2020. Disponível em:
http://wiki.icmc.usp.br/images/6/65/Raciocinio_Aproximado_e_Sistemas_Fuzzy_II.pdf.



Russel, S. and Norvig, P. (2013).
Inteligência artificial.
Campus - Elsevier, 3 edition.



Sgambi, L. and Bontempi, F. (2005).
Handling uncertainties in the seismic analysis using fuzzy theory.
In 9th International Conference on Structural Safety and Reliability.



Wikipedia contributors (2020).
Meia-verdade.
[Online]; acessado em 19 de Julho de 2020. Disponível em:
<https://pt.wikipedia.org/wiki/Meia-verdade>.

Referências III