

# Pesquisa Operacional

## PERT/CPM

Felipe Augusto Lima Reis  
[felipe.reis@ifmg.edu.br](mailto:felipe.reis@ifmg.edu.br)



# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Rede de Projetos
- 3 PERT/CPM
- 4 PERT + Folgas

# INTRODUÇÃO

# Introdução

- O gerenciamento de um projeto de grande escala requer a coordenação de inúmeras atividades
  - Um conjunto grande de tarefas devem ser consideradas para conclusão do projeto;
- A criação de um cronograma realista e o monitoramento da execução fazem parte dos desafios inerentes da atividade [Hillier and Lieberman, 2010].

# Introdução

- Duas técnicas de Pesquisa Operacional intimamente relacionadas podem auxiliar na coordenação de tarefas
  - PERT<sup>1</sup>: Técnica de Avaliação e Revisão do Programa;
  - CPM<sup>2</sup>: Método do Caminho Crítico
- PERT e CPM foram desenvolvidas de forma independente no final dos anos 1950;
- As técnicas fazem uso de redes (de atividades) para auxiliar o planejamento e coordenação das atividades [Hillier and Lieberman, 2010].

---

<sup>1</sup>PERT é o acrônimo de *Program Evaluation and Review Technique*.

<sup>2</sup>PERT é o acrônimo de *Critical Path Method*.

# Introdução

- Segundo [Hillier and Lieberman, 2010], PERT e CPM podem ser usadas em atividades como:
  - 1 Construção de uma fábrica;
  - 2 Pesquisa e desenvolvimento de um novo produto;
  - 3 Produção de filmes;
  - 4 Construção de navios;
  - 5 Instalação de um sistema de informação;
  - 6 Desenvolvimento de uma campanha de publicidade;
  - 7 Manutenção de equipamentos;
  - 8 ...

# REDE DE PROJETOS

# Rede de Projetos

- Uma rede usada para representar as atividades de um projeto é chamada de **Rede de Projeto**;
  - Consiste em uma série de nós (representados por círculos ou retângulos), conectados por uma série de arestas direcionadas;
- Existem basicamente dois tipos de redes de projeto:
  - **Atividade na Aresta (AOA)**<sup>3</sup>
    - Cada atividade é representada por uma aresta;
  - **Atividade no Nó (AON)**<sup>4</sup>
    - Cada atividade é representada por um nó.

---

<sup>3</sup>AOA é o acrônimo de *Activity-on-arc*.

<sup>4</sup>AON é o acrônimo de *Activity-on-node*.



# Rede Atividade no Arco (AOA)

- O sequenciamento das arestas mostra as relações de precedência entre as atividades;
- Um nó é usado apenas para separar uma atividade de cada um de seus predecessores imediatos;
- As versões originais de PERT/CPM usavam esse tipo de rede
  - Esse foi padrão convencional de construção de diagramas PERT/CPM por muitos anos;
  - Esse tipo de representação ainda é comumente utilizado [Hillier and Lieberman, 2010].

# Rede Atividade no Nó (AON)

- O nó representa as atividades;
- As arestas são usadas para indicar relações de precedência entre as atividades;
  - Cada atividade é ligada por meio de arestas aos seus predecessores imediatos;
- Redes AON, segundo [Hillier and Lieberman, 2010], possuem algumas vantagens sobre redes AOA:
  - São consideravelmente mais fáceis de serem construídas;
  - São mais fáceis de serem entendidas;
  - São mais fáceis de serem revisadas quando há mudanças no projeto.

# MÉTODO PERT/CPM

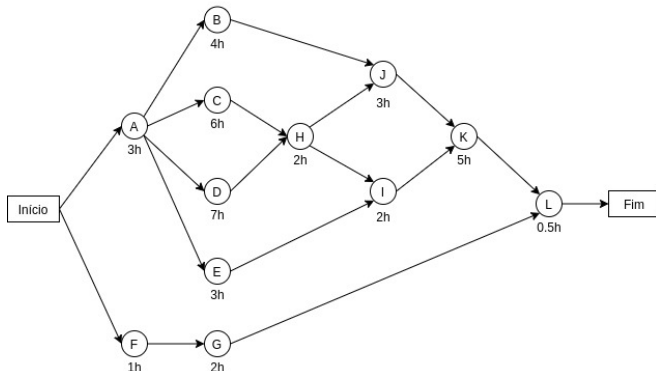
# PERT/CPM

- Exemplo 1: Adaptado de [Gersting, 2014]
  - Considere um problema de agendamento de tarefas, para construção de uma cadeira de balanço.
  - A lista de atividades está detalhada abaixo.

ID	Atividade	Dep.	Hrs.
A	Seleção da madeira	-	3
B	Entalhamento dos arcos	A	4
C	Entalhamento do assento	A	6
D	Entalhamento do encosto	A	7
E	Entalhamento dos braços	A	3
F	Escolha do tecido	-	1
G	Costura da almofada	F	2
H	Montagem: assento e encosto	C; D	2
I	Fixação dos braços	E; H	2
J	Fixação dos arcos	B; H	3
K	Verniz	I; J	5
L	Instalação almofada	G; K	0.5

# PERT/CPM

- A partir da tabela, podemos gerar o seguinte diagrama:



Fonte: Próprio autor

Observe que nesta etapa, os tempos das atividades estão abaixo dos círculos.

# PERT/CPM



- Podemos calcular o **tempo mínimo** para execução da atividade;
  - Para isso, caminha-se da esquerda para direita no diagrama;
  - Supõe-se que todas as tarefas predecessoras de uma tarefa  $i$  devam ser previamente concluídas;
  - Para definir o tempo mínimo até uma tarefa  $i$ , adiciona-se o tempo máximo das atividades predecessoras;

# PERT/CPM



- Podemos definir a seguinte notação: [Nogueira, 2010]
  - $EF$ : Tempo Final Mais Cedo (*Earliest Finish*);
  - $i$ : atividade atual (que está sendo analisada);
  - $j$ : atividade precedente que está sendo analisada;
  - $k$ : atividade sucessora que está sendo analisada;
  - $\rho_i$ : conjunto de atividades precedentes à atividade  $i$ ;
  - $\sigma_i$ : conjunto de atividades sucessoras à atividade  $i$ ;
  - $D$ : duração da atividade.

# PERT/CPM



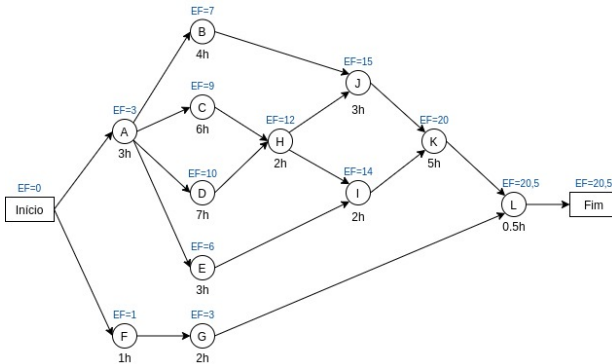
- Fórmula de cálculo para caminho mínimo:
  - **Tempo final mais cedo (EF)**: corresponde ao maior valor  $EF_j$  das atividades precedentes  $j$

$$EF_i = \max_{j \in \rho_i} (EF_j) + D_i$$



# PERT/CPM

- A partir do cálculo dos tempos mínimos de cada atividade, temos:

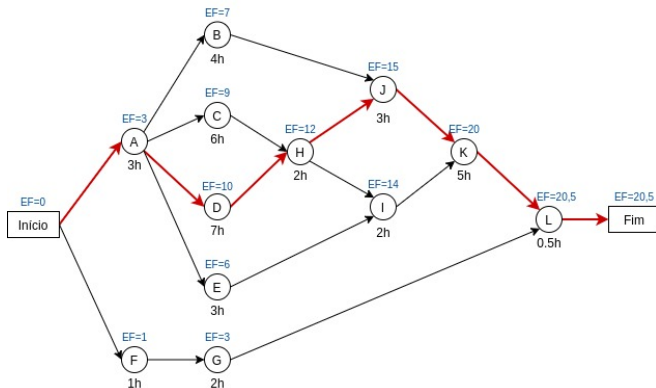


Fonte: Próprio autor

Observe que nesta etapa, os tempos das atividades estão abaixo dos círculos.

# PERT/CPM

- Para definição do **caminho crítico**, voltamos da direita para esquerda, recuperando o valor máximo das atividades precedentes.



Fonte: Próprio autor

# MÉTODO PERT/CPM

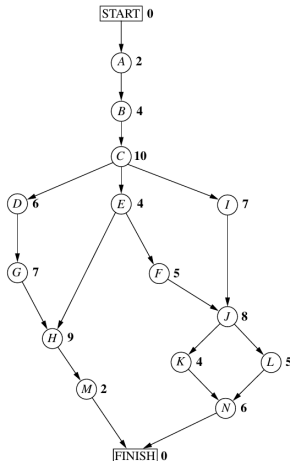
# PERT/CPM

- Exemplo 1: [Hillier and Lieberman, 2010]
  - Considere um problema de agendamento de tarefas para construção de uma casa.

ID	Atividade	Dep.	Semanas
A	Escavação	-	2
B	Fundação	A	4
C	Paredes, contrapiso e laje	B	10
D	Telhado	C	6
E	Encanamento externo	C	4
F	Encanamento interno	E	5
G	Revestimento externo	D	7
H	Pintura exterior	E; G	9
I	Serviços elétricos	C	7
J	Gesso / massa corrida	F; I	8
K	Instalação do piso	J	4
L	Pintura interior	J	5
M	Acabamento externo	H	2
N	Acabamento interno	K; L	6

# PERT/CPM

- A partir da tabela, podemos gerar o seguinte diagrama:



Fonte: [Hillier and Lieberman, 2010]

# PERT/CPM

- Os tempos de início e término de cada atividade, se nenhum atraso ocorrer, são chamados de:
  - ES (Hora de Início Mais Cedo)
  - EF (Hora de Término Mais Cedo)

- ES corresponde à subtração de EF da duração estimada da atividade

$$ES = EF - D$$

- A hora de início mais cedo pode ser definida como o maior tempo de término mais cedo dos predecessores imediatos

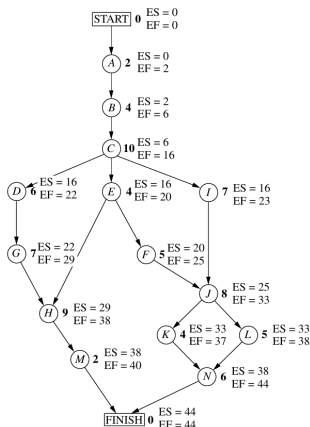
$$ES = \max_{j \in \rho_i} (EF_j)$$

---

ES é o acrônimo de *Earliest Start Time*. EF é o acrônimo de *Earliest Finish Time*.

# PERT/CPM

- A partir do diagrama anterior, podemos adicionar as informações de início e término mais cedo (EF + ES).



Fonte: [Hillier and Lieberman, 2010]

# PERT/CPM

- Os tempos de início e término de cada atividade, para que nenhum atraso ocorra no cronograma, são chamados de:
  - LS (Hora de Início Mais Tarde)
  - LF (Hora de Término Mais Tarde)
- LS corresponde à subtração de LF da duração estimada da atividade [Hillier and Lieberman, 2010].

$$LS = LF - D$$

- A hora de término mais tarde pode ser definida como o menor tempo de início mais tarde dos sucessores imediatos

$$LF = \min_{k \in \sigma_i} (LS_k)$$

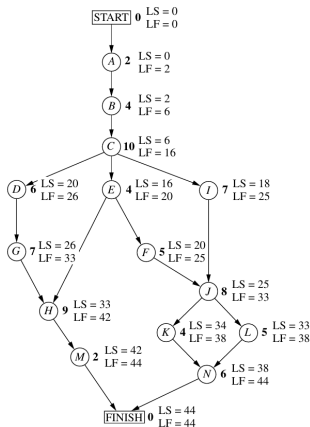
---

ES é o acrônimo de *Latest Start Time*. EF é o acrônimo de *Latest Finish Time*.



# PERT/CPM

- A partir do diagrama original, podemos adicionar as informações de início e término mais tarde (LF + LS)



Fonte: [Hillier and Lieberman, 2010]

# PERT/CPM

- Informações de início (ES e LS) e término (EF e LF) podem ser agrupadas em variáveis de **Início (S)** e **Término (F)**, respectivamente;
- A **folga (slack)** corresponde à diferença entre as horas de término mais tarde (LF) e mais cedo (EF)<sup>5</sup>

$$Fo = LF - EF$$

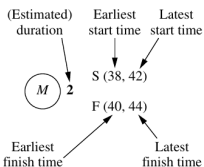
- O conjunto de atividades com **folga zero** corresponde ao **Caminho Crítico (CPM)** [Hillier and Lieberman, 2010].

---

<sup>5</sup>Também pode ser calculada usando as horas de início mais tarde (LS) e mais cedo (ES).

# PERT/CPM

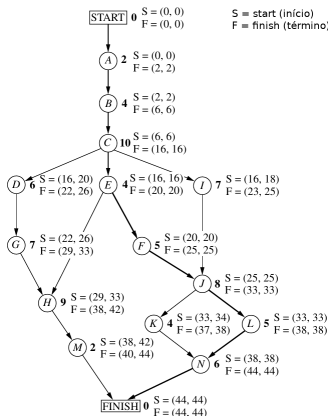
- Uma folga pode ser identificada com base nos tempos de término, conforme figura abaixo:



Fonte: [Hillier and Lieberman, 2010]

# PERT/CPM

- A partir do diagrama original, podemos adicionar as informações de Início ( $S$ ) e o Término ( $F$ ).



Fonte: [Hillier and Lieberman, 2010]

## PERT COM 3 ESTIMATIVAS

# PERT com 3 Estimativas

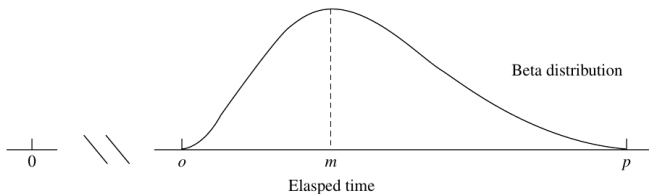
- O modelo PERT possui uma incerteza, devido à estimativa de duração das atividades;
  - Em alguns cenários, pode ser recomendado a criação de múltiplas estimativas de duração de atividade;
  - Tal abordagem permite maior tolerância a eventuais falhas no cronograma;
  - Essas estimativas podem, ainda, ser combinadas, gerando uma estimativa mais próxima à realidade [Hillier and Lieberman, 2010].

# PERT com 3 Estimativas

- Frequentemente são geradas 3 estimativas para cada atividade [Hillier and Lieberman, 2010]:
  - Estimativa mais provável ( $m$ );
  - Estimativa otimista ( $o$ );
  - Estimativa pessimista ( $p$ ).

# PERT com 3 Estimativas

- As estimativas devem respeitar uma probabilidade de distribuição **beta**, com a forma da figura abaixo, onde:
  - Distribuição mais provável ( $m$ ) corresponde ao valor mais alto de probabilidade na curva;
  - Distribuições otimistas ( $o$ ) e pessimistas ( $p$ ) correspondem aos extremos da distribuição.



Fonte: [Hillier and Lieberman, 2010]



# PERT com 3 Estimativas

- Nessa distribuição, podemos calcular a **variância** ( $\sigma^2$ ) e a **média** ( $\mu$ )
  - Média (aritmética): soma dos valores do conjunto de dados dividido pela cardinalidade;
  - Variância: medida de quão dispersos estão os valores em relação ao valor esperado (ex.: média aritmética) <sup>6</sup>;

---

<sup>6</sup>Pode ser descrita como “a média do quadrado da distância de cada ponto até a média”.

# PERT com 3 Estimativas

- A variância, de acordo com as estimativas PERT, pode ser calculada por<sup>7</sup> [Hillier and Lieberman, 2010]:

$$\sigma^2 = \left( \frac{p - o}{6} \right)^2$$

- A média, de acordo com as estimativas PERT, pode ser calculada por [Hillier and Lieberman, 2010]:

$$\mu = \frac{o + 4m + p}{6}$$

---

<sup>7</sup>Considerando que o intervalo da distribuição esteja limitado a  $(\mu - 3\sigma)$  e  $(\mu + 3\sigma)$ .

# Referências I



Gersting, J. L. (2014).  
Mathematical Structures for Computer Science.  
W. H. Freeman and Company, 7 edition.



Hillier, F. and Lieberman, G. (2010).  
Introduction to Operations Research.  
McGraw-Hill higher education. McGraw-Hill Higher Education.



Nogueira, F. (2010).  
Pert/cpm - notas de aulas.  
[Online]; acessado em 11 de Fevereiro de 2021. Disponível em:  
[https://www.ufjf.br/epd015/files/2010/06/PERT\\_CPM1.pdf](https://www.ufjf.br/epd015/files/2010/06/PERT_CPM1.pdf).