Pesquisa Operacional

Método Simplex Duas Fases

Felipe Augusto Lima Reis
felipe.reis@ifmg.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

Sumário

Análise da Solução Básica Factível Inicial

Análise da SBF Inicial

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Os problemas estudados e resolvidos pelo método Simplex tradicional possuem a seguinte característica:
  - Desigualdades do tipo $\leq$, com constantes não negativas do lado direito;

$$
\begin{aligned}
&\text{max ou min } z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
&\text{sujeito a:} \\
&\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
&\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
&\quad x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Fonte: Adaptado de [Belfiore and Fávero, 2013]

- Esses problemas são denominados RHS (*right hand side*) [Belfiore and Fávero, 2013].

Análise da SBF Inicial

- Em problemas RHS, a definição de uma solução inicial é fácil de ser obtida usando o seguinte procedimento:
    1. Adicionar variáveis de folga do lado esquerdo, em cada restrição;
    2. Definir valores nulos às variáveis de decisão (não básicas);
    3. Indicar as variáveis de folga como a solução básica factível (SBF) inicial [Belfiore and Fávero, 2013].

Análise da SBF Inicial

- No entanto, em problemas "não-RHS"[1], a solução básica factível inicial não pode ser dada de forma trivial
  - Isso ocorre pois a base não atende às restrições de não negatividade das variáveis [Goldbarg and Luna, 2005].
- Para resolver esse problema, é necessária a criação de uma variável artificial, que será utilizada para produzir uma SBF inicial;
- A partir das alterações, as restrições de não-negatividade e a função objetivo devem também ser modificadas.

[1] Problemas de programação linear que envolvem restrições do tipo $=$ e/ou $\geq$.

Análise da SBF Inicial

- Dois métodos (principais) podem ser utilizados para solução de problemas “não-RHS”:
  - Método das Penalidades (*Big M*);
  - Método de Duas Fases
- Nesses métodos, as variáveis artificiais tendem a desaparecer ao longo do algoritmo [Belfiore and Fávero, 2013] [Goldbarg and Luna, 2005].

Simplex Duas Fases

Simplex Duas Fases

- Segundo [Belfiore and Fávero, 2013], o Método Simplex Duas Fases ou Método das Duas Fases é composto por:
  1. Encontrar uma SBF inicial para o problema original;
  2. Encontrar uma solução ótima para o problema original, a partir da solução da Fase 1.

Simplex Duas Fases - Protocolo (1/2)

- [Belfiore and Fávero, 2013] resumem o protocolo do Método das Duas Fases como:

Início: Problema original na forma padrão, adicionando variáveis artificiais para as equações que não têm variáveis de folga.

Fase 1

Cria-se uma nova função objetivo artificial w (sempre de minimização) que corresponde à soma de k variáveis artificiais a_i, $i = 1,\ldots,k$:

$$\min w = a_1 + a_2 + \ldots + a_k \qquad (3.21)$$

sujeito às restrições definidas em **Início**.

Da mesma forma que no método das penalidades, como as variáveis artificiais serão as variáveis básicas iniciais, elas devem ser eliminadas da linha 0 (função objetivo) na forma tabular inicial. Para que os coeficientes das variáveis artificiais sejam nulos na linha 0, deve-se somar (problemas de minimização) ou subtrair (problemas de maximização) cada uma das equações i em que foi introduzida uma variável artificial a_i à equação 0 atual:

a) Nova linha 0 = linha 0 atual + $\sum_i$ equacão i $\times 1$ (problemas de minimização).

b) Nova linha 0 = linha 0 atual + $\sum_i$ equacão i $\times -1$ (problemas de maximização).

A partir daí, aplica-se o método Simplex para o problema original adaptado.

Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]

Simplex Duas Fases - Protocolo (2/2)

- [Belfiore and Fávero, 2013] resumem o protocolo do Método das Duas Fases como:

Como queremos minimizar a função w, e as variáveis artificiais devem assumir valores não negativos, a solução ótima factível dessa fase é atingida quando todas as variáveis artificiais são não básicas e assumem valores nulos ($a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$) e, consequentemente, a função objetivo também é nula ($w = 0$).
Porém, dois casos especiais podem ocorrer:

a) Nesse caso, todas as variáveis artificiais também assumem valores nulos ($a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$) e, consequentemente, a função objetivo também é nula ($w = 0$), porém, pelo menos uma das variáveis artificiais a_i é básica (**solução degenerada em relação a uma variável artificial**). Dessa forma, uma variável não básica, que não seja a variável artificial, deve entrar na base no lugar de outra variável básica. O procedimento deve ser repetido até que todas as variáveis artificiais saiam da base, se não estivermos diante de um *problema ilimitado*. Quando todas as variáveis artificiais foram removidas da base, ir para a fase 2. Esse caso especial (solução ótima degenerada) está detalhado na Seção 3.4.6.4.

b) Se pelo menos uma das variáveis artificiais a_i assume valor positivo (nesse caso $w > 0$) na última iteração dessa fase, temos uma **solução infactível** para o problema original (pelo menos uma das restrições não é respeitada). Quando isso ocorrer, o algoritmo finaliza aqui. Esse caso especial (não existe solução ótima) está detalhado na Seção 3.4.6.3.

Fase 2

Essa fase combina a função objetivo do problema original com as restrições da solução ótima obtida na fase 1. Porém, algumas alterações são necessárias na nova forma tabular antes da aplicação do método Simplex.
Primeiramente, a partir da forma tabular ótima obtida na fase 1, eliminam-se todas as colunas correspondentes às variáveis artificiais. Além disso, a função objetivo do problema original deve ser reescrita, por meio de operações elementares, de forma que as variáveis básicas da solução ótima da fase 1 tenham coeficientes nulos na função objetivo do problema original.
O método Simplex é então aplicado para que a solução ótima seja obtida. A solução ótima da fase 2 corresponde à solução ótima do problema original.

Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]

Simplex Duas Fases

- Considere o um problema de programação linear abaixo:

$$\begin{aligned} max\ z = x_1 + x_2 + ... + x_n \\ \text{suj. a:} \qquad Ax \geq b \\ x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{aligned}$$

No exemplo, supomos que todas as restrições têm sinal de $\geq$.

Simplex Duas Fases

- O problema deverá ser convertido primeiramente para a forma padrão, com a adição de variáveis de excesso / folga (VF):

$$
\begin{aligned}
max\ z &= x_1 + x_2 + ... + x_n \\
\text{suj. a:} \qquad Ax - VFx &= b \\
x_1, x_2, ..., x_n &\geq 0 \\
x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} &\geq 0
\end{aligned}
$$

Simplex Duas Fases

- Em seguida, na Fase 1, devem ser criadas:
  - Variáveis artificiais $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$;
  - Uma nova função objetivo de minimização w, correspondente a soma das variáveis artificiais

$$\begin{aligned} & \qquad\qquad\qquad min\ w = a_1 + a_2 + ... + a_n \\ \text{suj. a:} \quad & Ax - VFx + \{a_1, a_2, ..., a_n\} = b \\ & x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \\ & x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} \geq 0 \\ & a_1, a_2, ..., a_n \geq 0 \end{aligned}$$

Variáveis artificiais somente são adicionadas às restrições com sinais de $=$ ou $\geq$.
Variáveis artificiais não são necessárias às restrições com sinal $\leq$.

Simplex Duas Fases

- A base será formada pelas variáveis artificiais $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, que minimizarão a função objetivo w;
- Após solucionar o problema gerado pela Fase 1, teremos as seguintes condições:
  - A solução ótima factível ocorre com $w = 0$;
  - Todas as variáveis artificiais serão não básicas, ou seja, $a_1, a_2, ..., a_n = 0$

Simplex Duas Fases

- Na Fase 2, serão combinadas a função objetivo do problema original com as restrições da solução da Fase 1 [Belfiore and Fávero, 2013];
- A partir do Tableau da Fase 1, deve-se:
  - Eliminar todas as colunas correspondentes às variáveis artificiais;
  - Reescrever a função objetivo do problema original, de modo que variáveis básicas da solução da Fase 1 tenham valor zero [Belfiore and Fávero, 2013];
  - Aplicar novamente o método Simplex.

Exercício Minimização

Problema Minimização [Taha, 2007]

- Considere o modelo de Programação Linear

$$
\begin{aligned}
\textit{min } z &= 4x_1 + x_2 \\
\text{suj. a:} \quad 3x_1 + x_2 &= 3 \\
4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Problema Minimização [Taha, 2007]

- Podemos adicionar o problema à forma padrão como:

$$
\begin{aligned}
min\ z &= 4x_1 + x_2 \\
\text{suj. a:} \quad 3x_1 + x_2 &= 3 \\
4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Problema Minimização [Taha, 2007]

- Na Fase 1, fazemos:

$$
\begin{aligned}
\min\ w &= a_1 + a_2 \\
\text{suj. a:} \quad 3x_1 + x_2 + a_1 &= 3 \\
4x_1 + 3x_2 - x_3 + a_2 &= 6 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, a_1, a_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Observe que não foi preciso alterar a restrição 3, uma vez que a inequação já tinha valor ≤ 0.

Problema Minimização [Taha, 2007]

- Para resolver o problema, devemos zerar o valor de a_1 e a_2, uma vez que eles devem pertencer à base
  - Como vimos no método Simplex convencional, variáveis na base devem ter valor igual a zero na linha da solução;

Problema Minimização [Taha, 2007]

- Para zerar a_1 e a_2, devemos reescrever a função objetivo a partir de outras variáveis
  - Procederemos um mecanismo semelhante ao escalonamento.

$$
\begin{cases}
min\ w - a_1 - a_2 = 0 & \\
\qquad 3x_1 + x_2 + a_1 = 3 & (R1) \\
\qquad 4x_1 + 3x_2 - x_3 + a_2 = 6 & (R2) \\
\hline
min\ w + 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 9 &
\end{cases}
$$

Problema Minimização [Taha, 2007]

- A partir da nova função objetivo, podemos realizar os mesmos procedimentos do método Simplex e montar o Tableau:

$$max \;\; -w - 7x_1 - 4x_2 + x_3 = -9$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2
w	-9	-7	-4	1	0	0	0
a_1	3	3	1	0	0	1	0
a_2	6	4	3	-1	0	0	1
x_4	4	1	2	0	1	0	0

Problema Minimização [Taha, 2007]

- Resolvendo o tableau temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2
w	0	0	0	0	0	1	1
x_1	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
x_2	$\frac{6}{5}$	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_4	1	0	0	1	1	1	-1

- Observe que o valor da função objetivo w é igual a zero;
- Observe também que a base não contém as variáveis artificiais a_1 e a_2;
- Com essas duas condições, podemos concluir que o problema é factível e iniciar a Fase 2.

Problema Minimização [Taha, 2007]

- Valores do Tableau: $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{6}{5}$, $x_3 = 0$ e $x_4 = 1$.
- Ao remover as colunas das variáveis artificiais, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4
w	0	0	0	0	0
x_1	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0
x_2	$\frac{6}{5}$	0	1	$-\frac{3}{5}$	0
x_4	1	0	0	1	1

Problema Minimização [Taha, 2007]

- Reescrevendo o problema na forma padrão, temos:

$$\begin{aligned} & min\ z = 4x_1 + x_2 \\ \text{suj. a:} \quad & x_1 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{3}{5} \\ & x_2 - \frac{3}{5}x_3 = \frac{6}{5} \\ & x_3 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- A função objetivo foi atualizada para o valor original;
- Os valores das variáveis nas restrições foram recuperados a partir da tabela anterior (sem variáveis artificiais);

Problema Minimização [Taha, 2007]

- Para resolver o problema, devemos voltar ao problema original
  - No entanto, x_1 e x_2 participam da base;
  - Com isso, devemos zerá-los na função objetivo, usando o mesmo procedimento realizado na Fase 1.

$$
\begin{cases}
min\ z - 4x_1 - x_2 = 0 & \\
\qquad 4x_1 + 4/5x_3 = 12/5 & (R1 \times 4) \\
\qquad x_2 - 3/5x_3 = 6/5 & (R2) \\
\hline
min\ z + 1/5x_3 = 18/5 &
\end{cases}
$$

Problema Minimização [Taha, 2007]

- A partir da função objetivo e invertendo a função objetivo, temos:

$$max - z - \frac{1}{5}x_3 = -\frac{18}{5}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	$-\frac{18}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	0
x_1	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0
x_2	$\frac{6}{5}$	0	1	$-\frac{3}{5}$	0
x_4	1	0	0	1	1

Problema Minimização [Taha, 2007]

- Resolvendo o Tableau, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	$-\frac{17}{5}$	0	0	0	$\frac{1}{5}$
x_1	$\frac{2}{5}$	1	0	0	$-\frac{1}{5}$
x_2	$\frac{9}{5}$	0	1	0	$-\frac{3}{5}$
x_3	1	0	0	1	1

Problema Minimização [Taha, 2007]

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Para finalizar, devemos inverter o valor da função objetivo e das variáveis, retornando ao problema para minimização:
  - Função objetivo: $z = \frac{17}{5}$
  - Variáveis de decisão: $x_1 = \frac{2}{5}$ e $x_2 = \frac{9}{5}$

Referências I

Belfiore, P. and Fávero, L. P. (2013).
Pesquisa operacional para cursos de engenharia.
Elsevier, 1 edition.

Diego Mello da Silva (2016).
Pesquisa Operacional - Slides de Aula.
IFMG - Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Formiga.

Goldbarg, M. C. and Luna, H. P. L. (2005).
Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos.
Elsevier, 2 edition.

Taha, H. A. (2007).
Pesquisa Operacional.
Editora Prentice-Hall, 8 edition.