Matemática Discreta

Técnicas de Demonstração

Felipe Augusto Lima Reis
felipe.reis@ifmg.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

Sumário

Introdução

Introdução

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Esta seção será dedicada a introduzir alguns conceitos necessários a prova de argumentos:
  - Teoremas;
  - Corolários;
  - Axiomas;
  - Fatos;
  - Proposições;
  - Lemas;
  - Conjecturas;
- A seção também irá a apresentar métodos para construção de provas.

Introdução

- Demonstrações podem ser formais ou informais:
  - Demostrações formais: aquelas em que todos os passos são tomados e regras para cada passo são dadas
    - Demonstrações formais podem ser longas e difíceis de serem seguidas [Rosen, 2019];
  - Demonstrações informais: aquelas em que mais de uma regra de inferência pode ser usada em cada etapa
    - Alguns passos podem também ser pulados;
    - Axiomas podem ser assumidos;
    - Regras de inferência nem sempre podem ser demonstradas;
    - Alguns argumentos não são universalmente verdadeiros, sendo apenas em certos contextos [Rosen, 2019] [Cavalcanti, 2020].

Demonstrações informais não constituem um método de prova! Devem ter um mínimo de formalidade para serem aceitas. Somente alguns passos podem ser inferidos.

Tipos de Prova

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Serão estudados os seguintes métodos de prova:
  - Prova Direta;
  - Prova por Contraposição;
  - Prova por Contradição;
  - Prova Trivial.
  - Prova por Exaustão;
  - Prova por Contra-Exemplo;
  - Prova por Vacuidade;
  - Prova por Equivalência.

Conceitos

Axioma

- Axioma ou Postulado: proposição que não é provada, mas é considerada óbvia e aceita como verdade na construção de deduções
  - "Dados quaisquer dois pontos distintos, A e B, existe uma única reta que os contém." [Manfio, 2020].
  - "Para quaisquer três pontos distintos colineares[1], apenas um deles está entre os outros dois." [Manfio, 2020].

[1] Conjunto de pontos que pertencem a uma mesma reta.

Teorema

- Teorema: sentença que pode ser demonstrada como verdadeira [Rosen, 2019];
  - Pode ser definido também como uma afirmação específica que deve ser provada;
  - A dedução de q a partir de p é feita com uso de axiomas, definições, regras de inferência e resultados já provados.

Teorema

- Teoremas possuem, em geral, a forma:

$$\boxed{\textbf{se } p, \textbf{ então } q}$$

- São utilizados para representar resultados matemáticos ou deduções matemáticas;
- Forma:
  - p e q: sentenças simples ou compostas;
  - p: hipótese;
  - q: conclusão.

Teorema

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- As sentenças para proposição de teoremas necessitam de inclusão de um quantificador universal[2]
  - Ex. 1:"Para todos os números reais positivos x e y, se $x > y$, então $x^2 > y^2$."[3] [Rosen, 2019];
  - Ex. 2:"Para todos os números inteiros positivos x e y, se $x \geq y$, então $x^n \geq y^n$";
- Passos:
  - O primeiro passo de um teorema, em geral, consiste em selecionar um elemento do domínio;
  - Os passos seguintes, demonstram uma propriedade em questão;
  - A generalização indica que o elemento é válido em todo o domínio.

[2] Na prática, no entanto, muitas delas não utilizam essa convenção [Rosen, 2019].

[3] Informalmente: "Se $x > y$, em que x e y são números reais positivos, então $x^2 > y^2$".

Teoremas - Exemplos

- Teorema de Pitágoras:
  - "Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos."

$$\boxed{c^2 = b^2 + a^2}$$

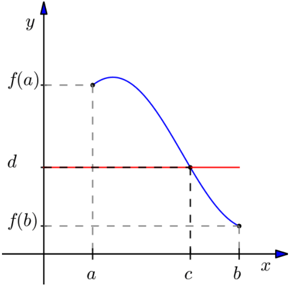
- Teorema Fundamental da Aritmética:
  - "Todo número inteiro maior do que 1, decompõe-se de forma única, exceto pela ordem dos fatores, em produto de fatores primos." [Fonseca, 2015]

- Teorema Fundamental da Álgebra:
  - Uma equação algébrica de grau n tem exatamente n raízes, reais ou complexas [Justo et al., 2020].

Curiosidade (link): Teorema de Etiene.

Teoremas - Exemplos

- Teorema do Valor Intermediário[4][5]
  - Seja f uma função real contínua no intervalo $[a, b]$. Se existe um valor d, tal que $f(a) \leq d \leq f(b)$, ou $f(b) \leq d \leq f(a)$, então existe um valor c tal que $f(c) = d$ [Justo et al., 2020].



Fonte: [Justo et al., 2020]

4 Também chamado de Teorema de Bolzano.

5 Este teorema será estudado posteriormente na disciplina de Matemática Computacional.

Prova

- **Prova:** argumento válido que estabelece a verdade de um teorema (ou declaração matemática) [Rosen, 2019].
  - Itens necessários à prova de um argumento:
    - Definições;
    - Hipóteses;
    - Axiomas (ou postulados);
    - Resultados de teoremas prévios;

Teoremas - Conceitos Relacionados

- Fato: teorema de importância limitada
  - Ex: "$5 + 2 = 7$" [da Silva, 2012b].
- Proposição: teorema de importância secundária
  - Mais importante que um fato e menos que um teorema;
  - Faz parte de um teorema maior;
- Lema: teoremas menos importantes usados na demonstração de teoremas mais complexos
  - Ex.: "Se $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios primitivos, então $f(x) \cdot g(x)$ é um polinômio primitivo" (Lema de Gauss) [Medeiros Jr., 2015] [6] [7].

[6] Um polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são inteiros é chamado primitivo se o máximo divisor comum de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ for 1 (coeficientes são primos entre si) [Anna Carolina Lafetá, 2017]

[7] Lema utilizado em teoremas de fatoração única de polinômios.

Teoremas - Conceitos Relacionados

- Corolário: teoremas estabelecidos sobre outros teoremas provados; é a decorrência imediata de um teorema
  - "Uma equação algébrica de grau ímpar com coeficientes reais tem, no mínimo, uma raiz real." (Corolário do Teorema Fundamental da Álgebra) [Justo et al., 2020];
  - "A diagonal de um quadrado cujos lados medem n unidades é $n\sqrt{2}$ (Corolário do Teorema de Pitágoras) [da Silva, 2012b].

Teoremas - Conceitos Relacionados

- Conjectura: proposição que ainda não foi provada e nem refutada
  - Afirmação que propõe-se ser verdadeira baseada em:
    - evidências parciais;
    - argumentos heurísticos;
    - intuições de um especialista.
  - Ex.: Conjectura de Goldbach[8]
    - "Qualquer número par maior que 2 pode ser expresso pela soma de dois números primos."
    - Ex.: 2+2=4; 3+3=6; 3+5=8; 5+5=10; ...
    - Verificado até 35×10^{17} [Silva, 2015].

[8] Link: Goldbach conjecture verification.

Métodos de Prova de Teoremas

Construção de Provas

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- A demonstração de teoremas nem sempre é fácil
  - A demonstração de um teorema pode necessitar de múltiplas técnicas de provas;
- Prova de um teorema:
  - Forma: $\forall x(P(x) \to Q(x))$;
  - Prova específica: mostrar que $P(c) \to Q(c)$ é verdadeiro, onde c é arbitrário (prova específica);
  - Generalização: mostrar para que qualquer x, a prova é verdadeira.

Construção de Provas

- Implicação ou Declaração Condicional (lógica):
  - **Se** p, **então** q;
  - O resultado é falso somente quando p é verdadeiro e q é falso;
  - Devemos mostrar que q é verdadeiro se p também o for.
- Omissão de detalhes da prova:
  - Em alguns momentos, pode haver omissão de informações[9]
    - Ex. 1: Obviamente temos que...;
    - Ex. 2: Claramente podemos concluir que...

[9] Em casos de dúvidas, perguntar ao professor quando houver omissões.

Prova Direta

Prova Direta

- **Prova direta** pode ser resumida em 3 passos:
  1. Em uma declaração condicional $p \to q$, supõe-se que p é verdadeiro;
  2. São construídas regras de inferência, de forma consecutiva;
  3. É demonstrado que q também é verdadeiro [Rosen, 2019].
- Processo:
  - Ao demonstrar que p é verdadeiro, deve-se demonstrar que q é obrigatoriamente verdadeiro;
  - Deve-se demonstrar que a combinação de p verdadeiro e q falso é impossível.
    - Podem ser utilizadas definições, teoremas anteriores, regras de inferência, regras de equivalência, entre outros.

Prova Direta - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 1: "Se n for um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar."
  - Proposições:
    - p: "n é um número inteiro ímpar";
    - q: "n^2 é ímpar".
  - Sequência de prova:
    1. Supomos que n seja um número ímpar ($n = 2k + 1$);
    2. Podemos substituir: $n = (2k + 1)$;
    3. Temos, então: $n^2 = (2k + 1)^2 = (4k^2 + 4k + 1)$;
    4. Colocando em função de 2: $2(2k^2 + 2k) + 1$;
    5. Suponha: $t = (2k^2 + 2k)$;
    6. Temos: $n^2 = (2t + 1)$
    7. Fim[10].

[10] **Explicação**: Como $(2t + 1)$ é ímpar, logo n^2 também é ímpar.

Prova Direta - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 1: "Se n for um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar."
  - Proposições:
    - p: "n é um número inteiro ímpar";
    - q: "n^2 é ímpar".
  - Sequência de prova:
    1. Supomos que n seja um número ímpar ($n = 2k + 1$);
    2. Podemos substituir: $n = (2k + 1)$;
    3. Temos, então: $n^2 = (2k + 1)^2 = (4k^2 + 4k + 1)$;
    4. Colocando em função de 2: $2(2k^2 + 2k) + 1$;
    5. Suponha: $t = (2k^2 + 2k)$;
    6. Temos: $n^2 = (2t + 1)$
    7. Fim[10].

[10] **Explicação**: Como $(2t + 1)$ é ímpar, logo n^2 também é ímpar.

Prova Direta - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 1: "Se n for um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar."
  - Proposições:
    - p: "n é um número inteiro ímpar";
    - q: "n^2 é ímpar".
  - Sequência de prova:
    1. Supomos que n seja um número ímpar ($n = 2k + 1$);
    2. Podemos substituir: $n = (2k + 1)$;
    3. Temos, então: $n^2 = (2k + 1)^2 = (4k^2 + 4k + 1)$;
    4. Colocando em função de 2: $2(2k^2 + 2k) + 1$;
    5. Suponha: $t = (2k^2 + 2k)$;
    6. Temos: $n^2 = (2t + 1)$
    7. Fim[10].

[10] **Explicação**: Como $(2t + 1)$ é ímpar, logo n^2 também é ímpar.

Prova Direta - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 2: "Se n e m são quadrados perfeitos[11], então nm também é um quadrado perfeito."
  - Proposições:
    - p: "n e m são quadrados perfeitos";
    - q: "nm é um quadrado perfeito".
  - Sequência de prova:
    1. Pela definição de quadrado perfeito: $m = s^2$ e $n = t^2$;
    2. Temos então: $nm = s^2t^2$;
    3. Desenvolvendo: $s^2t^2 = (ss)(tt) = (st)(st) = (st)^2$;
    4. Suponha $z = st$;
    5. Logo, $nm = z^2$, um quadrado perfeito;
    6. Fim.

[11] Um inteiro a é um quadrado perfeito se existe um inteiro b no qual $a = b^2$. Ex.: $a = 4$, pois $4 = 2^2$.

Prova Direta - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 2: "Se n e m são quadrados perfeitos[11], então nm também é um quadrado perfeito."
  - Proposições:
    - p: "n e m são quadrados perfeitos";
    - q: "nm é um quadrado perfeito".
  - Sequência de prova:
    1. Pela definição de quadrado perfeito: $m = s^2$ e $n = t^2$;
    2. Temos então: $nm = s^2t^2$;
    3. Desenvolvendo: $s^2t^2 = (ss)(tt) = (st)(st) = (st)^2$;
    4. Suponha $z = st$;
    5. Logo, $nm = z^2$, um quadrado perfeito;
    6. Fim.

[11] Um inteiro a é um quadrado perfeito se existe um inteiro b no qual $a = b^2$. Ex.: $a = 4$, pois $4 = 2^2$.

Prova Direta - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 2: "Se n e m são quadrados perfeitos[11], então nm também é um quadrado perfeito."
  - Proposições:
    - p: "n e m são quadrados perfeitos";
    - q: "nm é um quadrado perfeito".
  - Sequência de prova:
    1. Pela definição de quadrado perfeito: $m = s^2$ e $n = t^2$;
    2. Temos então: $nm = s^2t^2$;
    3. Desenvolvendo: $s^2t^2 = (ss)(tt) = (st)(st) = (st)^2$;
    4. Suponha $z = st$;
    5. Logo, $nm = z^2$, um quadrado perfeito;
    6. Fim.

[11] Um inteiro a é um quadrado perfeito se existe um inteiro b no qual $a = b^2$. Ex.: $a = 4$, pois $4 = 2^2$.

Prova Direta - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 3: "Para $n \in \mathbb{Z}^+$, se n é ímpar, então $(3n+2)$ é ímpar."
  - Proposições:
    - p: "n é ímpar".
    - q: "$3n+2$ é ímpar";
  - Sequência de prova:
    1. Supomos que n seja um número ímpar $(n = 2k+1)$;
    2. Podemos substituir: $n = (2k+1)$;
    3. Temos, então: $3n+2 = 3(2k+1)+2 = 6k+3+2 = 6k+5$;
    4. Desenvolvendo: $6k+5 = (6k+4)+1 = 2(3k+2)+1$;
    5. Suponha: $t = (3k+2)$;
    6. Temos: $3n+2 = 2t+1$
    7. Fim[12].

[12] **Explicação**: Como $(2t+1)$ é ímpar, logo $3n+2$ também é ímpar.

Prova Direta - Exemplo [Rosen, 2019]

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Ex. 3: "Para $n \in \mathbb{Z}^+$, se n é ímpar, então $(3n+2)$ é ímpar."
  - Proposições:
    - p: "n é ímpar".
    - q: "$3n+2$ é ímpar";
  - Sequência de prova:
    1. Supomos que n seja um número ímpar $(n = 2k+1)$;
    2. Podemos substituir: $n = (2k+1)$;
    3. Temos, então: $3n+2 = 3(2k+1)+2 = 6k+3+2 = 6k+5$;
    4. Desenvolvendo: $6k+5 = (6k+4)+1 = 2(3k+2)+1$;
    5. Suponha: $t = (3k+2)$;
    6. Temos: $3n+2 = 2t+1$
    7. Fim[12].

[12] **Explicação**: Como $(2t+1)$ é ímpar, logo $3n+2$ também é ímpar.

Prova Direta - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 3: "Para $n \in \mathbb{Z}^+$, se n é ímpar, então $(3n + 2)$ é ímpar."
  - Proposições:
    - p: "n é ímpar".
    - q: "$3n + 2$ é ímpar";
  - Sequência de prova:
    1. Supomos que n seja um número ímpar ($n = 2k + 1$);
    2. Podemos substituir: $n = (2k + 1)$;
    3. Temos, então: $3n + 2 = 3(2k + 1) + 2 = 6k + 3 + 2 = 6k + 5$;
    4. Desenvolvendo: $6k + 5 = (6k + 4) + 1 = 2(3k + 2) + 1$;
    5. Suponha: $t = (3k + 2)$;
    6. Temos: $3n + 2 = 2t + 1$
    7. Fim[12].

[12] **Explicação**: Como $(2t + 1)$ é ímpar, logo $3n + 2$ também é ímpar.

Prova por Contraposição

Prova por Contraposição

- **Provas por Contraposição** são aquelas que utilizam proposição contrapositiva
  - Utilizam a equivalência $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$;
  - Podemos provar que $p \rightarrow q$ se conseguirmos provar que $\neg q \rightarrow \neg p$;
  - Podemos inverter a declaração e provar por prova direta;
- Esse método pode ser considerada um tipo de prova indireta
  - Constituem em uma alternativa às provas diretas, que muitas vezes não são capazes de chegar a conclusões [Rosen, 2019];

Prova por Contraposição - Exemplo

- Ex. 1: "Se n^2 for um número inteiro par, então n é par."
  - Proposições:
    - p: "n^2 é um número inteiro par".
    - q: "n é par";
    - $\neg p$: "n^2 é um número inteiro ímpar".
    - $\neg q$: "n é ímpar";
  - Sequência de prova:
    1. Se n é ímpar, temos: $n = 2k + 1$;
    2. Temos, então: $n^2 = (2k + 1)^2 = (4k^2 + 4k + 1)$;
    3. Colocando em função de 2: $2(2k^2 + 2k) + 1$;
    4. Suponha: $t = (2k^2 + 2k)$;
    5. Temos: $n^2 = (2t + 1)$
    6. Como $\neg q \rightarrow \neg p$, a proposição é verdadeira;
    7. Fim.

Prova por Contraposição - Exemplo

- Ex. 1: "Se n^2 for um número inteiro par, então n é par."
  - Proposições:
    - p: "n^2 é um número inteiro par".
    - q: "n é par";
    - $\neg p$: "n^2 é um número inteiro ímpar".
    - $\neg q$: "n é ímpar";
  - Sequência de prova:
    1. Se n é ímpar, temos: $n = 2k + 1$;
    2. Temos, então: $n^2 = (2k+1)^2 = (4k^2 + 4k + 1)$;
    3. Colocando em função de 2: $2(2k^2 + 2k) + 1$;
    4. Suponha: $t = (2k^2 + 2k)$;
    5. Temos: $n^2 = (2t + 1)$
    6. Como $\neg q \rightarrow \neg p$, a proposição é verdadeira;
    7. Fim.

Prova por Contraposição - Exemplo

- Ex. 1: "Se n^2 for um número inteiro par, então n é par."
  - Proposições:
    - p: "n^2 é um número inteiro par".
    - q: "n é par";
    - $\neg p$: "n^2 é um número inteiro ímpar".
    - $\neg q$: "n é ímpar";
  - Sequência de prova:
    1. Se n é ímpar, temos: $n = 2k + 1$;
    2. Temos, então: $n^2 = (2k + 1)^2 = (4k^2 + 4k + 1)$;
    3. Colocando em função de 2: $2(2k^2 + 2k) + 1$;
    4. Suponha: $t = (2k^2 + 2k)$;
    5. Temos: $n^2 = (2t + 1)$
    6. Como $\neg q \to \neg p$, a proposição é verdadeira;
    7. Fim.

Prova por Contraposição - Exemplo

- Ex. 1: "Se n^2 for um número inteiro par, então n é par."
  - Proposições:
    - p: "n^2 é um número inteiro par".
    - q: "n é par";
    - $\neg p$: "n^2 é um número inteiro ímpar".
    - $\neg q$: "n é ímpar";
  - Sequência de prova:
    1. Se n é ímpar, temos: $n = 2k + 1$;
    2. Temos, então: $n^2 = (2k + 1)^2 = (4k^2 + 4k + 1)$;
    3. Colocando em função de 2: $2(2k^2 + 2k) + 1$;
    4. Suponha: $t = (2k^2 + 2k)$;
    5. Temos: $n^2 = (2t + 1)$
    6. Como $\neg q \to \neg p$, a proposição é verdadeira;
    7. Fim.

Prova por Contraposição - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 2: "Para $n \in \mathbb{Z}^+$, se $(3n+2)$ for ímpar, então n é ímpar."
  - Proposições:
    - p: "$3n+2$ é ímpar";
    - q: "n é ímpar".
    - $\neg p$: "$3n+2$ é par";
    - $\neg q$: "n é par".
  - Sequência de prova:
    1. Pela definição, um número par é dado como: $n = 2k$;
    2. Logo, para $3n+2$, temos: $3(2k)+2 = 6k+2 = 2(3k+1)$;
    3. Suponha $t = 3k+1$;
    4. Logo, $n = 2t$, ou seja, é par;
    5. Como $\neg q \rightarrow \neg p$, a proposição é verdadeira;
    6. Fim.

Prova por Contraposição - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 2: "Para $n \in \mathbb{Z}^+$, se $(3n+2)$ for ímpar, então n é ímpar."
  - Proposições:
    - p: "$3n+2$ é ímpar";
    - q: "n é ímpar".
    - $\neg p$: "$3n+2$ é par";
    - $\neg q$: "n é par".
  - Sequência de prova:
    1. Pela definição, um número par é dado como: $n = 2k$;
    2. Logo, para $3n+2$, temos: $3(2k)+2 = 6k+2 = 2(3k+1)$;
    3. Suponha $t = 3k+1$;
    4. Logo, $n = 2t$, ou seja, é par;
    5. Como $\neg q \to \neg p$, a proposição é verdadeira;
    6. Fim.

Prova por Contraposição - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 2: "Para $n \in \mathbb{Z}^+$, se $(3n + 2)$ for ímpar, então n é ímpar."
  - Proposições:
    - p: "$3n + 2$ é ímpar";
    - q: "n é ímpar".
    - $\neg p$: "$3n + 2$ é par";
    - $\neg q$: "n é par".
  - Sequência de prova:
    1. Pela definição, um número par é dado como: $n = 2k$;
    2. Logo, para $3n + 2$, temos: $3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$;
    3. Suponha $t = 3k + 1$;
    4. Logo, $n = 2t$, ou seja, é par;
    5. Como $\neg q \to \neg p$, a proposição é verdadeira;
    6. Fim.

Prova por Contraposição - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 2: "Para $n \in \mathbb{Z}^+$, se $(3n + 2)$ for ímpar, então n é ímpar."
  - Proposições:
    - p: "$3n + 2$ é ímpar";
    - q: "n é ímpar".
    - $\neg p$: "$3n + 2$ é par";
    - $\neg q$: "n é par".
  - Sequência de prova:
    1. Pela definição, um número par é dado como: $n = 2k$;
    2. Logo, para $3n + 2$, temos: $3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$;
    3. Suponha $t = 3k + 1$;
    4. Logo, $n = 2t$, ou seja, é par;
    5. Como $\neg q \rightarrow \neg p$, a proposição é verdadeira;
    6. Fim.

Prova por Contradição

Prova por Contradição

- **Provas por contradição** são aquelas que utilizam uma contradição q, tal qual $(p \wedge \neg q \rightarrow 0)$.
  - Tem-se que $(p \wedge \neg q \rightarrow 0) \rightarrow (p \rightarrow q)$ é uma tautologia;
  - Supõe-se p e $\neg q$ são verdadeiros;
  - Tentamos mostrar que p e $\neg p$ são verdadeiros ao mesmo tempo, para $\neg q$ verdadeiro, gerando uma contradição [Gersting, 2014].

Prova por Contradição

- A prova por contradição também pode ser feita da seguinte forma:
  - Considerando uma proposição r, se $r \land \neg r$ é uma contradição, podemos fazer $\neg p \rightarrow (r \land \neg r)$;
  - Se pudermos provar que p é verdadeiro para essa contradição, conseguimos provar por contradição [Rosen, 2019].

Prova por Contradição - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 1: "Se $(3n + 2)$ é ímpar, então n é ímpar."
  - Proposições:
    - p: "$3n + 2$ é ímpar";
    - q: "n é ímpar";
    - $\neg q$: "n é par".
  - Sequência de prova:
    1. Suponha que p e $\neg q$ são verdadeiros;
    2. Se n é par, então $n = 2k$;
    3. Temos então, $3n + 2 \;=\; 3(2k) + 2 \;=\; 6k + 2 \;=\; 2(3k + 1)$;
    4. Podemos fazer $3k + 1 = t$;
    5. Substituindo, temos $3n + 2 = 2t$ (definição número par);
    6. Se $3n + 2$ é par, temos que $\neg p$ é verdadeiro;
    7. Se p e $\neg p$ são verdadeiros, então, temos uma contradição;
    8. Fim.

Prova por Contradição - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 1: "Se $(3n + 2)$ é ímpar, então n é ímpar."
  - Proposições:
    - p: "$3n + 2$ é ímpar";
    - q: "n é ímpar";
    - $\neg q$: "n é par".
  - Sequência de prova:
    1. Suponha que p e $\neg q$ são verdadeiros;
    2. Se n é par, então $n = 2k$;
    3. Temos então, $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$;
    4. Podemos fazer $3k + 1 = t$;
    5. Substituindo, temos $3n + 2 = 2t$ (definição número par);
    6. Se $3n + 2$ é par, temos que $\neg p$ é verdadeiro;
    7. Se p e $\neg p$ são verdadeiros, então, temos uma contradição;
    8. Fim.

Prova por Contradição - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 1: "Se $(3n+2)$ é ímpar, então n é ímpar."
  - Proposições:
    - p: "$3n+2$ é ímpar";
    - q: "n é ímpar";
    - $\neg q$: "n é par".
  - Sequência de prova:
    1. Suponha que p e $\neg q$ são verdadeiros;
    2. Se n é par, então $n = 2k$;
    3. Temos então, $3n+2 = 3(2k)+2 = 6k+2 = 2(3k+1)$;
    4. Podemos fazer $3k+1 = t$;
    5. Substituindo, temos $3n+2 = 2t$ (definição número par);
    6. Se $3n+2$ é par, temos que $\neg p$ é verdadeiro;
    7. Se p e $\neg p$ são verdadeiros, então, temos uma contradição;
    8. Fim.

Prova por Contradição - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 1: "Se $(3n+2)$ é ímpar, então n é ímpar."
  - Proposições:
    - p: "$3n+2$ é ímpar";
    - q: "n é ímpar";
    - $\neg q$: "n é par".
  - Sequência de prova:
    1. Suponha que p e $\neg q$ são verdadeiros;
    2. Se n é par, então $n = 2k$;
    3. Temos então, $3n+2 \;=\; 3(2k)+2 \;=\; 6k+2 \;=\; 2(3k+1)$;
    4. Podemos fazer $3k+1 = t$;
    5. Substituindo, temos $3n+2 = 2t$ (definição número par);
    6. Se $3n+2$ é par, temos que $\neg p$ é verdadeiro;
    7. Se p e $\neg p$ são verdadeiros, então, temos uma contradição;
    8. Fim.

Prova por Contradição - Exemplo [Gersting, 2014]

- Ex. 2: "Se um número adicionado a si mesmo resulta no próprio número, então esse número é zero."
  - Proposições:
    - p: "$n + n = n$";
    - q: "$n = 0$";
    - $\neg q$: "$n \neq 0$".
  - Sequência de prova:
    - Suponha que p e $\neg q$ são verdadeiros;
    - Se $n + n = n$, temos $2n = n$;
    - Como, $n \neq 0$, podemos dividir ambos os lados da equação;
    - Dividindo os dois lados de $2n = n$, temos $2 = 1$;
    - Tal resultado é uma contradição!;
    - Logo, $(n + n = n) \rightarrow (n = 0)$;
    - Fim.

Prova por Contradição - Exemplo [Gersting, 2014]

- Ex. 2: "Se um número adicionado a si mesmo resulta no próprio número, então esse número é zero."
  - Proposições:
    - p: "$n + n = n$";
    - q: "$n = 0$";
    - $\neg q$: "$n \neq 0$".
  - Sequência de prova:
    - Suponha que p e $\neg q$ são verdadeiros;
    - Se $n + n = n$, temos $2n = n$;
    - Como, $n \neq 0$, podemos dividir ambos os lados da equação;
    - Dividindo os dois lados de $2n = n$, temos $2 = 1$;
    - Tal resultado é uma contradição!;
    - Logo, $(n + n = n) \rightarrow (n = 0)$;
    - Fim.

Prova por Contradição - Exemplo [Gersting, 2014]

- Ex. 2: "Se um número adicionado a si mesmo resulta no próprio número, então esse número é zero."
  - Proposições:
    - p: "$n + n = n$";
    - q: "$n = 0$";
    - $\neg q$: "$n \neq 0$".
  - Sequência de prova:
    - Suponha que p e $\neg q$ são verdadeiros;
    - Se $n + n = n$, temos $2n = n$;
    - Como, $n \neq 0$, podemos dividir ambos os lados da equação;
    - Dividindo os dois lados de $2n = n$, temos $2 = 1$;
    - Tal resultado é uma contradição!;
    - Logo, $(n + n = n) \rightarrow (n = 0)$;
    - Fim.

Prova por Contradição - Exemplo [Gersting, 2014]

- Ex. 2: "Se um número adicionado a si mesmo resulta no próprio número, então esse número é zero."
  - Proposições:
    - p: "$n + n = n$";
    - q: "$n = 0$";
    - $\neg q$: "$n \neq 0$".
  - Sequência de prova:
    - Suponha que p e $\neg q$ são verdadeiros;
    - Se $n + n = n$, temos $2n = n$;
    - Como, $n \neq 0$, podemos dividir ambos os lados da equação;
    - Dividindo os dois lados de $2n = n$, temos $2 = 1$;
    - Tal resultado é uma contradição!;
    - Logo, $(n + n = n) \rightarrow (n = 0)$;
    - Fim.

Prova por Contradição - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 3: "Mostre que pelo menos quatro de cada 22 dias devem cair no mesmo dia da semana."
  - Sequência de prova:
    - Temos somente uma proposição, p;
    - p: "pelo menos quatro de cada 22 dias devem cair..."
    - Suponha $\neg p$ verdadeiro: "no máximo três de cada 22 dias...";
    - Sabemos que a semana tem 7 dias;
    - Portanto, 3 semanas têm 21 dias (cada dia repete 3 vezes);
    - No 22º dia, há uma 4ª repetição de um dia;
    - Logo, o a afirmação $\neg p$, que supomos verdadeira, é falsa;
    - Se considerarmos r o argumento que 22 dias foram escolhidos, temos que $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$;
    - Fim[13]

[13] **Explicação**: se $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$, está provado por contradição.

Prova por Contradição - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 3: "Mostre que pelo menos quatro de cada 22 dias devem cair no mesmo dia da semana."
  - Sequência de prova:
    - Temos somente uma proposição, p;
    - p: "pelo menos quatro de cada 22 dias devem cair...";
    - Suponha $\neg p$ verdadeiro: "no máximo três de cada 22 dias...";
    - Sabemos que a semana tem 7 dias;
    - Portanto, 3 semanas têm 21 dias (cada dia repete 3 vezes);
    - No 22º dia, há uma 4ª repetição de um dia;
    - Logo, o a afirmação $\neg p$, que supomos verdadeira, é falsa;
    - Se considerarmos r o argumento que 22 dias foram escolhidos, temos que $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$;
    - Fim[13]

[13] **Explicação**: se $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$, está provado por contradição.

Outros Tipos de Provas

Prova Trivial

- **Prova Trivial**[14] ocorre quando, ao saber que q é verdadeiro, podemos demonstrar que a proposição $p \rightarrow q$ é verdadeira [Rosen, 2019]
  - Pela tabela verdade da operação de Implicação, sabemos que se q é *verdadeiro*, então o resultado é *verdadeiro*.

[14] Também denominada Demonstração por Trivialização.

Prova Trivial - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex.: "Seja $P(n)$ a proposição: 'Se a e b são inteiros positivos com $a \geq b$, então $a^n \geq b^n$', em que o domínio consiste em todos os inteiros não negativos. Mostre que $\underline{P(0)}$ é verdadeira".
  - Sequência de prova:
    - Somente devemos analisar o caso onde $n = 0$;
    - Sabemos que: $a^0 = b^0 = 1$;
    - Logo, a proposição será válida independentemente de p $(a \geq b)$ ser verdadeiro ou falso[15].

[15] **Explicação**: Independente da premissa p, o resultado será sempre igual a 1.

Prova Trivial - Exemplo [Rosen, 2019]

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Ex.: "Seja $P(n)$ a proposição: 'Se a e b são inteiros positivos com $a \geq b$, então $a^n \geq b^n$', em que o domínio consiste em todos os inteiros não negativos. Mostre que $\underline{P(0)}$ é verdadeira".
  - Sequência de prova:
    - Somente devemos analisar o caso onde $n = 0$;
    - Sabemos que: $a^0 = b^0 = 1$;
    - Logo, a proposição será válida independentemente de p $(a \geq b)$ ser verdadeiro ou falso[15].

[15] **Explicação**: Independente da premissa p, o resultado será sempre igual a 1.

Prova por Exaustão

- **Prova por Exaustão** é aquela em que opta-se pela prova de um teorema a partir de um conjunto de exemplos que esgotem todas as possibilidades possíveis.
  - Somente deve ser utilizada caso a quantidade de itens do conjunto seja finita;
  - Todos os itens devem ser analisados - se faltar um único item, a prova estará incompleta (e incorreta);
  - Para conjuntos muito grandes, podem ser utilizados algoritmos.

Prova por Exaustão - Exemplo [da Silva, 2012b]

- Ex.: "Se n é um inteiro positivo e $n \leq 4$, então $(n+1)^3 \geq 3^n$."
  - Sequência de prova:
    - Avaliam-se todas as possibilidades possíveis;
    - $n = 1$: $(1+1)^3 \geq 3^1 \longrightarrow 8 \geq 3$
    - $n = 2$: $(2+1)^3 \geq 3^2 \longrightarrow 27 \geq 9$
    - $n = 3$: $(3+1)^3 \geq 3^3 \longrightarrow 64 \geq 27$
    - $n = 4$: $(4+1)^3 \geq 3^4 \longrightarrow 125 \geq 81$

Prova por Exaustão - Exemplo [da Silva, 2012b]

- Ex.: "Se n é um inteiro positivo e $n \leq 4$, então $(n+1)^3 \geq 3^n$."
  - Sequência de prova:
    - Avaliam-se todas as possibilidades possíveis;
    - $n = 1$: $(1+1)^3 \geq 3^1 \longrightarrow 8 \geq 3$
    - $n = 2$: $(2+1)^3 \geq 3^2 \longrightarrow 27 \geq 9$
    - $n = 3$: $(3+1)^3 \geq 3^3 \longrightarrow 64 \geq 27$
    - $n = 4$: $(4+1)^3 \geq 3^4 \longrightarrow 125 \geq 81$

Prova por Contra-Exemplo

- **Prova por Contra-Exemplo** é aquela onde é necessário encontrar somente um contra-exemplo x para o qual $P(x)$ é falso [Rosen, 2019].
  - A prova busca indicar que um argumento é inválido;
  - Ao encontrar esse exemplo, todo o argumento será invalidado;
  - Assim, o argumento $\forall P(x)$ é falso.

Prova por Contra-Exemplo - Ex. [Rosen, 2019]

- Ex.: Prove que a afirmação "cada inteiro positivo é a soma dos quadrados de dois inteiros (quaisquer)" é falsa.
  - Sequência de prova:
    - Procura-se um exemplo que desrespeite a afirmação:
    - $n = 1$: $0^2 + (-1)^2$ (ok);
    - $n = 2$: $1^2 + (-1)^2$ (ok);
    - $n = 3$: impossível;
    - Como $n = 3$ desrespeita a afirmação, provando, por contra-exemplo, que a afirmação é falsa.

Prova por Contra-Exemplo - Ex. [Rosen, 2019]

- Ex.: Prove que a afirmação "cada inteiro positivo é a soma dos quadrados de dois inteiros (quaisquer)" é falsa.
  - Sequência de prova:
    - Procura-se um exemplo que desrespeite a afirmação:
    - $n = 1$: $0^2 + (-1)^2$ (ok);
    - $n = 2$: $1^2 + (-1)^2$ (ok);
    - $n = 3$: impossível;
    - Como $n = 3$ desrespeita a afirmação, provando, por contra-exemplo, que a afirmação é falsa.

Prova por Vacuidade

- **Prova por Vacuidade** é aquela na qual, sabendo que p é falso, mostramos que $p \rightarrow q$ é verdadeiro [Rosen, 2019]
  - Ocorre quando a hipótese da implicação é sempre falsa;
  - Pela tabela verdade da operação de Implicação, sabemos que se p é *falso* e q é *verdadeiro*, o resultado é *verdadeiro*;
  - Essas demonstrações são utilizadas em casos especiais de teoremas [Rosen, 2019][16];
  - Nesse tipo de prova, a consequência da hipótese não tem muito significado, pois é falsa.

[16] [Rosen, 2019] indica que esse método é especificamente usado em teoremas que indicam "que uma condicional é verdadeira para todos os números inteiros positivos".

Prova por Vacuidade - Exemplo [Hokama, 2021]

- Ex. 1: "Para todo número inteiro n, se $n^2 = 5$ então n é par"
  - Proposições:
    - p: "$n^2 = 5$";
    - q: "n é par";
  - Sequência de prova:
    - Se $n^2 = 5$, logo $n = \sqrt{5}$;
    - Como $n = \sqrt{5}$ não é inteiro, a hipótese é falsa;
    - Como p é **falso**, então é q é automaticamente verdadeiro.

Prova por Vacuidade - Exemplo [Hokama, 2021]

- Ex. 1: "Para todo número inteiro n, se $n^2 = 5$ então n é par"
  - Proposições:
    - p: "$n^2 = 5$";
    - q: "n é par";
  - Sequência de prova:
    - Se $n^2 = 5$, logo $n = \sqrt{5}$;
    - Como $n = \sqrt{5}$ não é inteiro, a hipótese é falsa;
    - Como p é **falso**, então é q é automaticamente verdadeiro.

Prova por Vacuidade - Exemplo [Hokama, 2021]

- Ex. 1: "Para todo número inteiro n, se $n^2 = 5$ então n é par"
  - Proposições:
    - p: "$n^2 = 5$";
    - q: "n é par";
  - Sequência de prova:
    - Se $n^2 = 5$, logo $n = \sqrt{5}$;
    - Como $n = \sqrt{5}$ não é inteiro, a hipótese é falsa;
    - Como p é **falso**, então é q é automaticamente verdadeiro.

Prova por Vacuidade - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 2: "Mostre que a proposição $P(0)$ é verdadeira, em que $P(n)$ é 'Se $n > 1$, então $n^2 > n$' e o domínio consiste em todos os números inteiros."
  - Proposições:
    - p: "$n > 1$";
    - q: "$n^2 > n$";
  - Sequência de prova:
    - Temos: $P(0)$, ou seja, $n = 0$;
    - Substituindo na proposição p, temos $0 > 1$;
    - Como $0 > 1$ é **falso**, então é $n^2 > n$ é automaticamente verdadeiro.

O fato da conclusão $0^2 > 0$ ser falsa é irrelevante. Deve-se atentar para o valor verdade da sentença condicional, onde F|T=T [Rosen, 2019]

Prova por Vacuidade - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 2: "Mostre que a proposição $P(0)$ é verdadeira, em que $P(n)$ é 'Se $n > 1$, então $n^2 > n$' e o domínio consiste em todos os números inteiros."
  - Proposições:
    - p: "$n > 1$";
    - q: "$n^2 > n$";
  - Sequência de prova:
    - Temos: $P(0)$, ou seja, $n = 0$;
    - Substituindo na proposição p, temos $0 > 1$;
    - Como $0 > 1$ é **falso**, então é $n^2 > n$ é automaticamente verdadeiro.

O fato da conclusão $0^2 > 0$ ser falsa é irrelevante. Deve-se atentar para o valor verdade da sentença condicional, onde F|T=T [Rosen, 2019]

Prova por Vacuidade - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex. 2: "Mostre que a proposição $P(0)$ é verdadeira, em que $P(n)$ é 'Se $n > 1$, então $n^2 > n$' e o domínio consiste em todos os números inteiros."
  - Proposições:
    - p: "$n > 1$";
    - q: "$n^2 > n$";
  - Sequência de prova:
    - Temos: $P(0)$, ou seja, $n = 0$;
    - Substituindo na proposição p, temos $0 > 1$;
    - Como $0 > 1$ é **falso**, então é $n^2 > n$ é automaticamente verdadeiro.

O fato da conclusão $0^2 > 0$ ser falsa é irrelevante. Deve-se atentar para o valor verdade da sentença condicional, onde F|T=T [Rosen, 2019]

Prova por Equivalência

- **Prova por Equivalência** é aquela que utilizamos para provar uma declaração bicondicional $p \leftrightarrow q$
  - Devemos mostrar que $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são ambos verdadeiros;
  - Baseado na seguinte tautologia:

$$\boxed{(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p))}$$

Prova por Equivalência - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex.: "Para $n \in \mathbb{Z}^+$, se $(3n + 2)$ for ímpar, então n é ímpar."
  - Proposições:
    - p: "n é ímpar";
    - q: "n^2 é ímpar";
  - Sequência de prova:
    - Devemos provar $p \leftrightarrow q$;
    - $p \rightarrow q$: Ver Slide 25 (prova direta);
    - $q \rightarrow p$: Ver Slide 29 (prova por contraposição).

Prova por Equivalência - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex.: "Para $n \in \mathbb{Z}^+$, se $(3n + 2)$ for ímpar, então n é ímpar."
  - Proposições:
    - p: "n é ímpar";
    - q: "n^2 é ímpar";
  - Sequência de prova:
    - Devemos provar $p \leftrightarrow q$;
    - $p \rightarrow q$: Ver Slide 25 (prova direta);
    - $q \rightarrow p$: Ver Slide 29 (prova por contraposição).

Prova por Equivalência - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex.: "Para $n \in \mathbb{Z}^+$, se $(3n + 2)$ for ímpar, então n é ímpar."
  - Proposições:
    - p: "n é ímpar";
    - q: "n^2 é ímpar";
  - Sequência de prova:
    - Devemos provar $p \leftrightarrow q$;
    - $p \rightarrow q$: Ver Slide 25 (prova direta);
    - $q \rightarrow p$: Ver Slide 29 (prova por contraposição).

Prova por Casos

- **Prova por Casos** é aquela que ao invés de utilizar um único argumento que cubra todos os casos possíveis, analisa múltiplos casos, separadamente [Rosen, 2019];
  - A prova deve cobrir todos os casos possíveis;
  - Caso uma única situação não seja coberta pela prova, esta será considerada inválida;
- Para prova por casos, devemos analisar a seguinte tautologia:

$$\boxed{[(p_1 \vee p_2 \vee p_n) \rightarrow q] \leftrightarrow [(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow q)]}$$

Prova por Casos - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex.: "Prove que se n for um número inteiro, então $n^2 \geq n$."
  - Proposições:
    - p: "n é inteiro";
    - q: "$n^2 \geq n$";
  - Sequência de prova:
    - Caso 1 ($n = 0$): $0^2 \geq 0$ **(verdadeiro)**;
    - Caso 2 ($n > 0$): Suponha $n \geq 1$. Se multiplicarmos ambos os lados por n, então $n^2 \geq n$ **(verdadeiro)**;
    - Caso 3 ($n < 0$): Temos $n \leq -1$. Se $n^2 \geq 0$ (multiplicação de mesmo sinal), logo $n^2 > n$ **(verdadeiro)**.

Prova por Casos - Exemplo [Rosen, 2019]

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- Ex.: "Prove que se n for um número inteiro, então $n^2 \geq n$."
  - Proposições:
    - p: "n é inteiro";
    - q: "$n^2 \geq n$";
  - Sequência de prova:
    - Caso 1 ($n = 0$): $0^2 \geq 0$ **(verdadeiro)**;
    - Caso 2 ($n > 0$): Suponha $n \geq 1$. Se multiplicarmos ambos os lados por n, então $n^2 \geq n$ **(verdadeiro)**;
    - Caso 3 ($n < 0$): Temos $n \leq -1$. Se $n^2 \geq 0$ (multiplicação de mesmo sinal), logo $n^2 > n$ **(verdadeiro)**.

Prova por Casos - Exemplo [Rosen, 2019]

- Ex.: "Prove que se n for um número inteiro, então $n^2 \geq n$."
  - Proposições:
    - p: "n é inteiro";
    - q: "$n^2 \geq n$";
  - Sequência de prova:
    - Caso 1 ($n = 0$): $0^2 \geq 0$ **(verdadeiro)**;
    - Caso 2 ($n > 0$): Suponha $n \geq 1$. Se multiplicarmos ambos os lados por n, então $n^2 \geq n$ **(verdadeiro)**;
    - Caso 3 ($n < 0$): Temos $n \leq -1$. Se $n^2 \geq 0$ (multiplicação de mesmo sinal), logo $n^2 > n$ **(verdadeiro)**.

Erros Comuns em Demonstrações

Erros Comuns

- Segundo [Rosen, 2019], são comuns os erros durante a construção de provas matemáticas
  - Erros podem ser causadas por operações incorretas ou condições não observadas durante o processo de prova;
- Erros, obviamente, invalidam a prova matemática
  - Cada passo precisa ser correto;
  - A conclusão deve seguir logicamente os passos anteriores.

"Prova" que 2=1 [Rosen, 2019]

- Considere o "método de prova" abaixo:

	Passo	Descrição
1.	$a = b$	Condição inicial.
2.	$a^2 = ab$	Multiplicação dos dois lados por a.
3.	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	Subtração de b^2 dos dois lados.
4.	$(a - b)(a + b) = b(a - b)$	Fatoração de ambos os lados.
5.	$a + b = b$	Divisão dos dois lados por $a - b$.
6.	$2b = b$	Substituição de a por b (condição inicial).
7.	$2 = 1$	Divisão dos dois lados por b.

- Qual o erro do "método de prova" acima?
    - Passo 5: Se $a = b$, o passo corresponderia a dividir por zero. Essa condição é inválida para manutenção da igualdade.

"Prova" que 2=1 [Rosen, 2019]

- Considere o "método de prova" abaixo:

	Passo	**Descrição**
1.	$a = b$	Condição inicial.
2.	$a^2 = ab$	Multiplicação dos dois lados por a.
3.	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	Subtração de b^2 dos dois lados.
4.	$(a - b)(a + b) = b(a - b)$	Fatoração de ambos os lados.
5.	$a + b = b$	Divisão dos dois lados por $a - b$.
6.	$2b = b$	Substituição de a por b (condição inicial).
7.	$2 = 1$	Divisão dos dois lados por b.

- Qual o erro do "método de prova" acima?
  - Passo 5: Se $a = b$, o passo corresponderia a dividir por zero. Essa condição é inválida para manutenção da igualdade.

"Prova" que 2=1 [Rosen, 2019]

- Considere o "método de prova" abaixo:

	Passo	Descrição
1.	$a = b$	Condição inicial.
2.	$a^2 = ab$	Multiplicação dos dois lados por a.
3.	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	Subtração de b^2 dos dois lados.
4.	$(a - b)(a + b) = b(a - b)$	Fatoração de ambos os lados.
5.	$a + b = b$	Divisão dos dois lados por $a - b$.
6.	$2b = b$	Substituição de a por b (condição inicial).
7.	$2 = 1$	Divisão dos dois lados por b.

- Qual o erro do "método de prova" acima?
  - Passo 5: Se $a = b$, o passo corresponderia a dividir por zero. Essa condição é inválida para manutenção da igualdade.

"Prova" que 0=1

- Considere o "método de prova" abaixo:

	Passo	**Descrição**
1.	$0 = 1$	Condição inicial.
2.	$0 = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$	Uso de uma série igual ao valor 0.
3.	$0 = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$	Substituição do valor 0 por (1-1).
4.	$0 = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots$	Alteração da posição dos parênteses.
5.	$0 = 1 + 0 + 0 + 0\ldots$	Substituição de (-1+1) por 0.
6.	$0 = 1$	Fim.

- Qual o erro do "método de prova" acima?
  - A série tem infinitos números e não pode ser simplificada dessa forma.

"Prova" que 0=1

- Considere o "método de prova" abaixo:

	Passo	Descrição
1.	$0 = 1$	Condição inicial.
2.	$0 = 0 + 0 + 0 + 0 + \dots$	Uso de uma série igual ao valor 0.
3.	$0 = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$	Substituição do valor 0 por (1-1).
4.	$0 = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots$	Alteração da posição dos parênteses.
5.	$0 = 1 + 0 + 0 + 0\dots$	Substituição de (-1+1) por 0.
6.	$0 = 1$	Fim.

- Qual o erro do "método de prova" acima?
  - A série tem infinitos números e não pode ser simplificada dessa forma.

"Prova" que 0=1

- Considere o "método de prova" abaixo:

	Passo	**Descrição**
1.	$0 = 1$	Condição inicial.
2.	$0 = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$	Uso de uma série igual ao valor 0.
3.	$0 = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$	Substituição do valor 0 por (1-1).
4.	$0 = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots$	Alteração da posição dos parênteses.
5.	$0 = 1 + 0 + 0 + 0\ldots$	Substituição de (-1+1) por 0.
6.	$0 = 1$	Fim.

- Qual o erro do "método de prova" acima?
    - A série tem infinitos números e não pode ser simplificada dessa forma.

Raciocínio Circular

- Ocorre quando um ou mais passos da demonstração baseiam-se na própria sentença a ser demonstrada;
  - Pode ser considerado um tipo de erro desonesto [Rosen, 2019].
- Exemplo[17]:
  - Suponha n^2 é ímpar.
  - Então, $n^2 = 2k + 1$, para um inteiro k qualquer;
  - Do mesmo modo, $n = 2l + 1$ para um inteiro l qualquer;
  - Logo, n é ímpar.

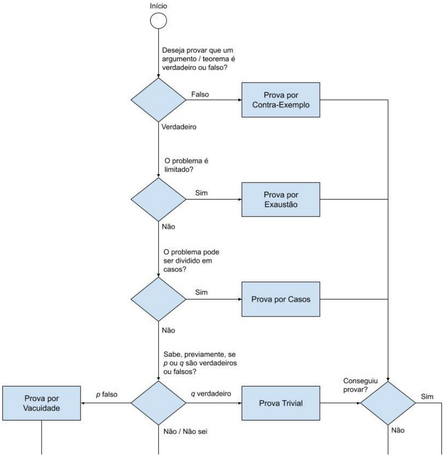
[17] Erro de Raciocínio Circular.

Estratégias para Prova de Teoremas

Estratégias para Prova de Teoremas

- Não existe um método pré-definido, que se aplique a qualquer tipo de prova matemática;
  - O ideal é ter conhecimento de diferentes técnicas;
  - Fatores pessoais podem influenciar na escolha do método
    - A percepção de características do problema é individual;
- A resolução de muitos exercícios pode fornecer conhecimento para escolha da técnica mais promissora.

Sequência Sugerida de Prova 1/2

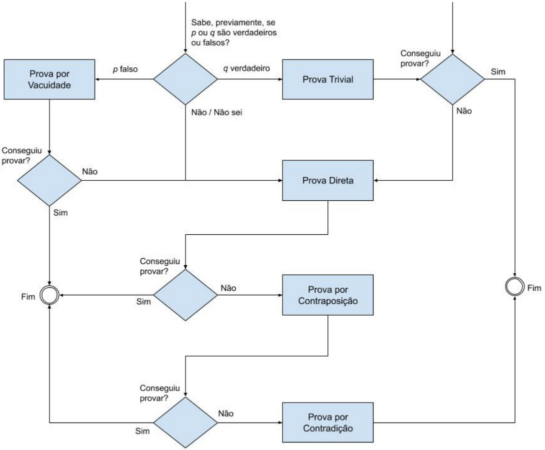


Fonte: Próprio autor

Link: Imagem completa e ampliada.

Sequência Sugerida de Prova 2/2

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais



Fonte: Próprio autor

Link: Imagem completa e ampliada.

Estratégias [Rosen, 2019]

- Avaliar primeiramente o método de Prova Direta
  - Tente expandir as definições existentes nas hipóteses;
  - Raciocine sobre as hipóteses (avalie suas características e faça inferência possíveis cenários);
  - Avalie postulados e teoremas relacionados[18];
  - Caso a Prova Direta não gere resultados, avalie outros métodos, como Contraposição e Contradição;
- No Método da Contraposição, tente inverter a conclusão, para verificar se o resultado fica mais claro;
- No Método da Contradição, verifique se é possível gerar uma contradição a respeito do resultado inicial.

[18] Também proposições, lemas, corolários, etc.

Adaptação de Provas Existentes [Rosen, 2019]

- Uma abordagem para construção de provas é analisar possíveis provas anteriores
  - Adequar uma prova já existente ao problema atual pode ser um procedimento mais rápido e efetivo;
- Na escrita de um novo teorema (ou prova), procure avaliar teoremas ou provas semelhantes
  - O conhecimento prévio de problemas e a repetição, com exercícios, pode facilitar esta etapa.

Fortuidade[19] (*Serendipity*) [Gersting, 2014]

- Corresponde a uma análise inteligente e esperta a respeito do problema;
- Ao analisar o problema, busca-se observar e tirar conclusões secundárias
  - Conclusões secundárias podem auxiliar na generalização;
  - Nem sempre esse passo é trivial.

[19] Tradução da palavra em inglês *serendipity*, definida por [Gersting, 2014]. Pode ser também traduzida como "acontecimento fortuito", "acaso", "coincidência", "feliz coincidência", "sorte", etc.

Referências I

Anna Carolina Lafetá, Elaine Silva, J. L. (2017).
Teoria dos Números Transcendentes: Do Teorema de Liouville à Conjectura de Schanuel.
Sociedade Brasileira de Matemática, 1 edition.
[Online]; acessado em 22 de Setembro de 2021. Disponível em
http://www.im.ufrj.br/walcy/Bienal/textos/TEORIA%20DOS%20NUMEROS.pdf.

Cavalcanti, J. (2020).
Matemática discreta - 04.
Disponível em http://www.univasf.edu.br/ jorge.cavalcanti/Mat_Disc_Parte04.pdf.

da Silva, D. M. (2012a).
Notas de Aula 1: Lógica, Predicados, Quantificadores e Inferência.
IFMG - Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Formiga.

da Silva, D. M. (2012b).
Slides de aula.

Fonseca, R. V. (2015).
Números primos e o Teorema Fundamental da Aritmética: uma investigação entre estudantes de licenciatura em Matemática.
PhD thesis.
Disponível em https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11036.

Gersting, J. L. (2014).
Mathematical Structures for Computer Science.
W. H. Freeman and Company, 7 edition.

Referências II

Hokama, P. (2021).
Matemática discreta.
[Online]; acessado em 28 de Setembro de 2021. Disponível em
https://www.hokama.com.br/disciplinas/mat017_2021s1/aula07-handout.pdf.

Justo, D., Sauter, E., Azevedo, F., Guidi, L., and Konzen, P. H. (2020).
Cálculo Numérico, Um Livro Colaborativo - Versão Python.
UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/livro-py.pdf.

Levin, O. (2019).
Discrete Mathematics - An Open Introduction.
University of Northern Colorado, 7 edition.
[Online] Disponível em http://discrete.openmathbooks.org/dmoi3.html.

Manfio, F. (2020).
Fundamentos da geometria.
Disponível em https://sites.icmc.usp.br/manfio/GeoAxiomatica.pdf.

Medeiros Jr., N. N. d. (2015).
O lema de gauss.
[Online]; acessado em 22 de Setembro de 2021. Disponível em https://www.professores.uff.br/nmedeiros/wp-content/uploads/sites/88/2017/08/Algebra-II-2015_1-lemagauss.pd.

Rosen, K. H. (2019).
Discrete Mathematics and Its Applications.
McGraw-Hill, 8 edition.

Referências III

Silva, T. O. e. (2015).
Goldbach conjecture verification.
[Online]; acessado em 22 de Setembro de 2021. Disponível em `http://sweet.ua.pt/tos/goldbach.html`.