Matemática Computacional

Interpolação

Felipe Augusto Lima Reis
felipe.reis@ifmg.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

Sumário

Introdução

Introdução

“Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por uma outra função $g(x)$, escolhida entre uma classe de funções definidas a *priori* e que satisfaça algumas propriedades” [Ruggiero and Lopes, 2000].

Introdução

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

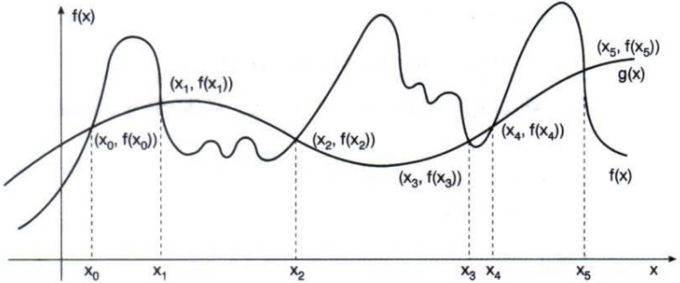
- A interpolação numérica, segundo [Ruggiero and Lopes, 2000] é utilizada para:
  - Cálculo de valores de pontos não tabelados, quando se tem apenas um conjunto finito de pontos;
  - Substituição de funções originais cujas operações como derivação e integração são complexas ou impossíveis de serem realizadas.

Introdução

- Consideremos $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$, chamados de nós da interpolação, e valores $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$ correspondentes à função $f(x)$ nos pontos.
- A interpolação corresponde a encontrar uma função interpoladora $g(x)$ e determinar valores $g(x_0) = f(x_0)$, $g(x_1) = f(x_1), ..., g(x_n) = f(x_n)$ [Ruggiero and Lopes, 2000] [Justo et al., 2020].

Introdução

- A figura abaixo contém um exemplo de uma função interpoladora $g(x)$, que aproxima uma função “complexa” $f(x)$, para um conjunto finito de pontos.



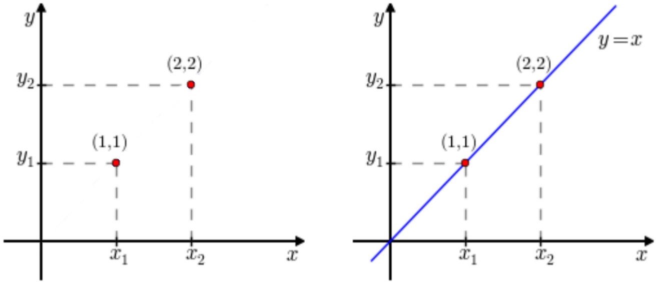
Fonte: [Ruggiero and Lopes, 2000]

Problema Geral de Interpolação

- Seja uma sequência de n números reais $x_1 < x_2 < ... < x_n$ e um conjunto de pontos $\{(x_i, y_i) \in I \times \mathcal{R}\}_{i=1}^{n}$, onde $I = [x_1, x_n]$ e uma família de funções $\mathcal{F}_I = \{\varphi : I \to R\}$, o problema de interpolação consiste em encontrar alguma função interpoladora $f \in \mathcal{F}_I$ tal que $f(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, 3, ..., n$. [Justo et al., 2020].

Problema Geral de Interpolação

- A figura abaixo contém um exemplo de dois pontos, x_1 e x_2, por uma reta [Justo et al., 2020].



Fonte: Adaptado de [Justo et al., 2020]

Interpolação Polinomial

Interpolação Polinomial

- "Interpolação polinomial é um caso particular do problema geral de interpolação, no qual a família de funções é constituída de polinômios." [Justo et al., 2020]
- Seja um conjunto com n pontos $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$.
  Polinômio interpolador corresponde ao polinômio de grau menor ou igual a $n-1$ que os interpola [Justo et al., 2020].

Algoritmo de Horner

- Considere p é um polinômio de grau n, o valor $p(x)$ para um x real pode ser calculado por $n+1$ operações de multiplicação e $n+1$ operações de adição.
- O Método de Horner é uma forma de reescreer $p(x)$ de modo a evitar as potências [Justo et al., 2020]
    - Considere um polinômio p de grau n:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

    - Esse polinômio pode ser reescrito como:

$$a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(\ldots + x(a_{n-1} + xa_n)\ldots)))$$

Algoritmo de Horner - Exemplo

- Ex. Considere o polinômio, de grau 5:

$$P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1$$

- O polinômio pode ser reescrito como:

$$((((3x - 2)x + 5)x + 7)x - 3)x + 1$$

- O mesmo polinômio também pode ser reescrito como:

$$1 + x(-3 + x(7 + x(5 + x(-2 + 3x))))$$

Teorema de Weierstrass

- O Teorema de Weierstrass estabelece que qualquer função contínua definida em um intervalo fechado pode ser aproximada uniformemente por um polinômio.
- Definição: Seja f uma função contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$ e seja δ um número positivo. Então existe um polinômio p, tal que para todo $x \in [a, b]$, temos $|f(x) - p(x)| < \delta$ [Justo et al., 2020].

Teorema da Interpolação Polinomial[1]

- O Teorema da Interpolação Polinomial indica que existe um polinômio de grau $n-1$ ou inferior que passa por um conjunto de n pontos.

- Definição: Seja $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ um conjunto de n pares ordenados de números reais tais que $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Existe, então, um único polinômio $p(x)$ de grau $n-1$ ou inferior que passa por todos os pontos dados, isto é:

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

[1] O teorema não possui nome, porém tal designação foi adotada para diferenciá-lo do Teorema de Weierstrass.

Teorema da Interpolação Polinomial[2]

- Considere um polinômio p de grau n:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$$

- Encontrar os coeficientes do polinômio, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, tal que $p(x_i) = y_i$, corresponde a resolver um sistema linear, com n equações e n incógnitas [Justo et al., 2020].

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_1 + a_1 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} &= y_1 \\
a_0 + a_1 x_2 + a_1 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} &= y_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad &\vdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_1 x_n^2 + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} &= y_n
\end{aligned}$$

[2] O teorema não possui nome, porém tal designação foi adotada para diferenciá-lo do Teorema de Weierstrass.

Polinômios de Lagrange

Polinômios de Lagrange

- Seja um conjunto com $n+1$ pontos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ distintos;
- Segundo [Justo et al., 2020] e [Ruggiero and Lopes, 2000], o Polinômio de Lagrange é definido como o polinômio $p_n(x)$ de grau $\leq n$ que interpola os dados e respeita a condição:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1, \text{se } k = i \\ 0, \text{se } k \neq i \end{cases}$$

- O polinômio $p_n(x_i) = y_i$ é dado por:

$$p_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \dots + y_n L_n(x_i) = y_i$$

Polinômios de Lagrange

- De forma geral, o polinômio interpolador de Lagrange pode ser definido por: [Justo et al., 2020] [Ruggiero and Lopes, 2000]

$$p_n(x) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + ... + y_n L_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

- Onde $L_k(x)$ é definido como:

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n) \\
L_1(x) &= (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n) \\
L_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)\dots(x - x_n) \\
&\vdots \\
L_n(x) &= \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{(n-1)})}_{\text{polinômio de grau } n}
\end{aligned}$$

Polinômios de Lagrange

- De forma geral, $L_k(x)$ é dado por:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

- Substituindo $L_k(x)$ em $p_n(x)$ temos:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Polinômio Lagrange - Exemplo [Justo et al., 2020]

- Suponha um polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ que passa pelos pontos (0, 0), (1, 1), (2, 4) e (3, 9):

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{11}{6}x + 1 \\
L_1(x) &= \frac{x(x-2)(x-3)}{1(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x \\
L_2(x) &= \frac{x(x-1)(x-3)}{2(2-1)(2-3)} = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{3}{2}x \\
L_3(x) &= \frac{x(x-1)(x-2)}{3(3-1)(3-2)} = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x
\end{aligned}$$

Fonte: Adaptado de [Justo et al., 2020]

- O polinômio interpolador será dado por:

$$P(x) = 0 \cdot L_0(x) + 1 \cdot L_1(x) + 4 \cdot L_2(x) + 9 \cdot L_3(x) \longrightarrow P(x) = x^2$$

Polinômio Lagrange - Exemplo [da Silva, 2020]

- A partir da tabela abaixo, calcule $f(2)$:

x	1.6	2.5	3.0	4.2	5.4	6.7
$f(x)$	-1.5	-2.1	0.3	1.4	2.1	3.9

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{(x-2.5)(x-3.0)(x-4.2)(x-5.4)(x-6.7)}{(1.6-2.5)(1.6-3.0)(1.6-4.2)(1.6-5.4)(1.6-6.7)} \\ L_1(x) = \dfrac{(x-1.6)(x-3.0)(x-4.2)(x-5.4)(x-6.7)}{(2.5-1.6)(2.5-3.0)(2.5-4.2)(2.5-5.4)(2.5-6.7)} \\ L_2(x) = \dfrac{(x-1.6)(x-2.5)(x-4.2)(x-5.4)(x-6.7)}{(3.0-1.6)(3.0-2.5)(3.0-4.2)(3.0-5.4)(3.0-6.7)} \\ L_3(x) = \dfrac{(x-1.6)(x-2.5)(x-3.0)(x-5.4)(x-6.7)}{(4.2-1.6)(4.2-2.5)(4.2-3.0)(4.2-5.4)(4.2-6.7)} \\ L_4(x) = \dfrac{(x-1.6)(x-2.5)(x-3.0)(x-4.2)(x-6.7)}{(5.4-1.6)(5.4-2.5)(5.4-3.0)(5.4-4.2)(5.4-6.7)} \\ L_5(x) = \dfrac{(x-1.6)(x-2.5)(x-3.0)(x-4.2)(x-5.4)}{(6.7-1.6)(6.7-2.5)(6.7-3.0)(6.7-4.2)(6.7-5.4)} \end{cases}$$

Fonte: [da Silva, 2020]

- O polinômio interpolador será dado por:

$$P_5(x) = -1.5 \cdot L_0(x) - 2.1 \cdot L_1(x) + 0.3 \cdot L_2(x) + 1.4 \cdot L_3(x) + 2.1 \cdot L_4(x) + 3.9 \cdot L_5(x)$$

Polinômio Lagrange - Exemplo [da Silva, 2020]

- Substituindo $f(2.0)$:

$$
\begin{cases}
L_0(2.0) = \dfrac{(2.0-2.5)(2.0-3.0)(2.0-4.2)(2.0-5.4)(2.0-6.7)}{(1.6-2.5)(1.6-3.0)(1.6-4.2)(1.6-5.4)(1.6-6.7)} = 0.2768674 \\
L_1(2.0) = \dfrac{(2.0-1.6)(2.0-3.0)(2.0-4.2)(2.0-5.4)(2.0-6.7)}{(2.5-1.6)(2.5-3.0)(2.5-4.2)(2.5-5.4)(2.5-6.7)} = 1.5092140 \\
L_2(2.0) = \dfrac{(2.0-1.6)(2.0-2.5)(2.0-4.2)(2.0-5.4)(2.0-6.7)}{(3.0-1.6)(3.0-2.5)(3.0-4.2)(3.0-5.4)(3.0-6.7)} = -0.9426212 \\
L_3(2.0) = \dfrac{(2.0-1.6)(2.0-2.5)(2.0-3.0)(2.0-5.4)(2.0-6.7)}{(4.2-1.6)(4.2-2.5)(4.2-3.0)(4.2-5.4)(4.2-6.7)} = 0.2008547 \\
L_4(2.0) = \dfrac{(2.0-1.6)(2.0-2.5)(2.0-3.0)(2.0-4.2)(2.0-6.7)}{(5.4-1.6)(5.4-2.5)(5.4-3.0)(5.4-4.2)(5.4-6.7)} = -0.05012254 \\
L_5(2.0) = \dfrac{(2.0-1.6)(2.0-2.5)(2.0-3.0)(2.0-4.2)(2.0-5.4)}{(6.7-1.6)(6.7-2.5)(6.7-3.0)(6.7-4.2)(6.7-5.4)} = 0.005808006
\end{cases}
$$

Fonte: [da Silva, 2020]

- O valor do polinômio será dado por:

$$P_5(2.0) = -1.5(0.2768674) - 2.1(1.5092140) + 0.3(-0.9426212) + 1.4(0.2008547)$$
$$+2.1(-0.05012254) + 3.9(0.005808006) = -3.6689$$

Polinômios de Newton

Polinômios de Newton

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- O Polinômio de Newton também é conhecido como Método das Diferenças Divididas de Newton;
- Seja um conjunto com $n+1$ pontos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ distintos;
- Segundo [Justo et al., 2020] e [Ruggiero and Lopes, 2000], o Polinômio de Newton é definido como:

$$\boxed{p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + d_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})}$$

Polinômios de Newton

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Como $p(x_i) = y_i$, os coeficientes d_i satisfazem um sistema triangular inferior: [Justo et al., 2020]

$$
\begin{aligned}
& d_0 && = y_0 \\
& d_0 + d_1(x_1 - x_0) && = y_1 \\
& d_0 + d_1(x_2 - x_0) + d_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) && = y_2 \\
& \vdots && \vdots \\
& d_0 + d_1(x_n - x_0) + d_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \ldots + d_n(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1}) && = y_n
\end{aligned}
$$

Polinômios de Newton

- Conforme vimos na resolução de sistemas lineares, podemos resolver esse sistema por meio de substituição regressiva [Justo et al., 2020].

$$
\begin{aligned}
d_0 &= y_0 \\
d_1 &= \frac{y_1 - d_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\
d_2 &= \frac{y_2 - d_1(x_2 - x_0) - d_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Polinômios de Newton

- Para facilitar o entendimento, [Justo et al., 2020] e [Ruggiero and Lopes, 2000] estabelecem a seguinte notação:

$$
\begin{aligned}
f[x_j] &:= y_j \\
f[x_j, x_{j+1}] &:= \frac{f[x_{j+1}] - f[x_j]}{x_{j+1} - x_j} \\
f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] &:= \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}] - f[x_j, x_{j+1}]}{x_{j+2} - x_j} \\
&\vdots \\
f[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}] &:= \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_{j+k}] - f[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j}
\end{aligned}
$$

Fonte: [Justo et al., 2020]

Polinômios de Newton

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Nessa notação $f[x_j]$ corresponde à diferença dividida de ordem zero, $f[x_i, x_{j+1}]$ corresponde a diferença dividida de ordem 1, e assim sucessivamente [Justo et al., 2020].

Polinômios de Newton

- O operador de diferenças divididas, segundo [Ruggiero and Lopes, 2000], pode ser definido como:

$$
\begin{cases}
f[x_0] = f(x_0) & \text{(Ordem Zero)} \\[2ex]
f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} & \text{(Ordem 1)} \\[2ex]
f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} & \text{(Ordem 2)} \\[2ex]
f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} & \text{(Ordem 3)} \\[2ex]
\vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\[2ex]
f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \dfrac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} & \text{(Ordem n)}
\end{cases}
$$

Fonte: [Ruggiero and Lopes, 2000]

Polinômios de Newton

- Esse operador permite a construção da tabela de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	...	Ordem n
x_0	$f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		.	
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	.	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$	.		$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$
		$f[x_3, x_4]$	.	.	.	
x_4	$f[x_4]$	.	.	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
.	.	.	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$			
.	.	$f[x_{n-1}, x_n]$				
x_n	$f[x_n]$					

Fonte: [Ruggiero and Lopes, 2000]

Polinômio Newton - Exemplo [Justo et al., 2020]

- Utilize o método das diferenças divididas para calcular o polinômio nos pontos (-1, 3), (0, 1), (1, 3) e (3, 43).

j	x_j	$f[x_j]$	$f[x_{j-1}, x_j]$	$f[x_{j-2}, x_{j-1}, x_j]$	$f[x_{j-3}, x_{j-2}, x_{j-1}, x_j]$
1	-1	$\boxed{\mathbf{3}}$			
			$\frac{1-3}{0-(-1)} = \boxed{\mathbf{-2}}$		
2	0	1		$\frac{2-(-2)}{1-(-1)} = \boxed{\mathbf{2}}$	
			$\frac{3-1}{1-0} = 2$		$\frac{6-2}{3-(-1)} = \boxed{\mathbf{1}}$
3	1	3		$\frac{20-2}{3-0} = 6$	
			$\frac{43-3}{3-1} = 20$		
4	3	43			

Fonte: [Justo et al., 2020]

Polinômio Newton - Exemplo [Justo et al., 2020]

- O Polinômio de Newton é definido como:

$$p(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + d_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

$$p(x) = 3 - 2(x + 1) + 2(x + 1)(x) + (x + 1)(x)(x - 1)$$

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$$

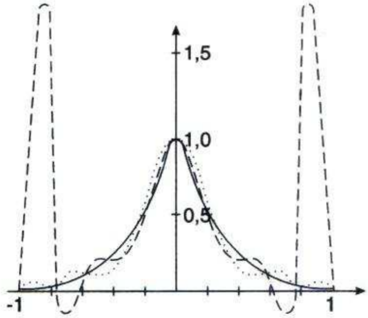
Interpolação Segmentada

Interpolação Segmentada

- A interpolação segmentada (principalmente a *spline*) é, muitas vezes, utilizadas no lugar da interpolação polinomial;
- Os resultados práticos são similares, mesmo com polinômios de pequeno grau;
- A interpolação segmentada evita ainda do Fenômeno de Runge, quando a interpolação usa polinômios de graus elevados.

Fenômeno de Runge

- O Fenômeno de Runge ocorre em interpolações polinomiais de graus elevados em conjuntos de interpolação equidistantes;
  - Nessa situação, ocorre um problema de oscilação nas bordas dos intervalos, levando a valores indesejados.



Fonte: [Ruggiero and Lopes, 2000]

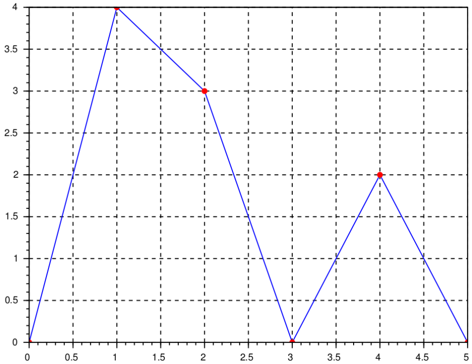
Interpolação Linear Segmentada

- Seja um conjunto com $n+1$ pontos $(x_i, y_i)_{i=0}^{n}$ distintos, onde $x_{i+1} > x_i$ são distintos e crescentes;
- Segundo [Justo et al., 2020] a função linear que interpola os pontos é dada por:

$$p_i(x) = y_i \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} + y_{i+1} \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

Interpolação Linear Segmentada

- O resultado da interpolação linear segmentada é uma função contínua separada em partes (segmentos).



Fonte: [Justo et al., 2020]

Interp. Linear Segmentada - Ex. [Justo et al., 2020]

- Crie uma função linear por partes que interpole os pontos (0,0), (1,4), (2,3), (3,0), (4,2), (5,0).

$$f(x) = \begin{cases} 0\frac{x-1}{0-1} + 4\frac{x-0}{1-0}, & 0 \leq x < 1 \\ 4\frac{x-2}{1-2} + 3\frac{x-1}{2-1}, & 1 \leq x < 2 \\ 3\frac{x-3}{2-3} + 0\frac{x-2}{3-2}, & 2 \leq x < 3 \\ 0\frac{x-4}{3-4} + 2\frac{x-3}{4-3}, & 3 \leq x < 4 \\ 2\frac{x-5}{4-5} + 0\frac{x-4}{5-4}, & 4 \leq x \leq 5 \end{cases} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x < 1 \\ -x+5, & 1 \leq x < 2 \\ -3x+9, & 2 \leq x < 3 \\ 2x-6, & 3 \leq x < 4 \\ -2x+10, & 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Fonte: [Justo et al., 2020]

Interpolação Cúbica Segmentada - *Spline*

- Uma extensão da interpolação linear segmentada é utilizar polinômios de grau superior [Justo et al., 2020];
  - Polinômios de grau superior podem melhorar a eficiência, além de permitir maior liberdade na construção da interpolação;
  - A liberdade propicia maior suavidade na interpolação.
- Um *spline* é uma curva definida matematicamente por dois ou mais pontos de controle, chamados de nós.

Interpolação Cúbica Segmentada - *Spline*

- Definição de spline de ordem m [Justo et al., 2020]
  - Considere um conjunto de n pontos distintos e crescentes $I = (x_j, y_j)_{j=1}^{n}$ tais que $x_{j+1} > x_j$; um *spline* de ordem m que interpola estes pontos é uma função s com as seguintes propriedades:
    - Em cada intervalo $[x_j, x_{j+1}), j = 1, 2, ..., n-2$ e no segmento $[x_{n-1}, x_n] s$ é um polinômio de grau menor ou igual a m;
    - Em algum dos intervalos s é um polinômio de grau m;
    - Em cada $x_j \in I, s(x_j) = y_j$, isto é, o *spline* interpola os pontos dados;
    - s é uma função de classe C^{m-1} , isto é, é função $m-1$ vezes continuamente diferenciável.

Referências I

da Silva, D. M. (2020).
Cálculo Numérico - Slides de Aula.
IFMG - Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Formiga.

Justo, D., Sauter, E., Azevedo, F., Guidi, L., and Konzen, P. H. (2020).
Cálculo Numérico, Um Livro Colaborativo - Versão Python.
UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/livro-py.pdf.

Ruggiero, M. A. G. and Lopes, V. L. d. R. (2000).
Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais.
Editora Makron, 2 edition.