Pesquisa Operacional

Método Simplex

Felipe Augusto Lima Reis
felipe.reis@ifmg.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

Sumário

Método Simplex

Método Simplex

- O algoritmo Simplex foi criado em 1947, por uma equipe liderada por George Dantz para solução de problemas de Programação Linear [Belfiore and Fávero, 2013];
- Segundo [Goldbarg and Luna, 2005], Simplex é o método mais utilizado para solução de PPLs;

Método Simplex

- Para que um problema de Programação Linear possa ser resolvido pelo Método Simplex, ele deverá estar na Forma Padrão[1];

$$\max \text{ ou } \min z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, n & \end{aligned}$$

Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]

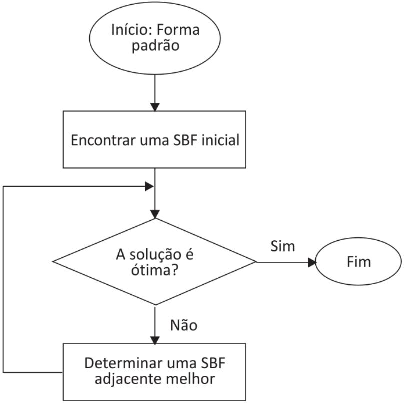
[1] Ver seção Formulação Algébrica do slide de Conceitos

Método Simplex

- O método é um procedimento algébrico que parte de uma solução básica factível (SBF)[2] e busca, iterativamente, outras SBFs com melhor valor na função objetivo, até que o valor ótimo seja atingido [Belfiore and Fávero, 2013].

[2] Ver seção Variáveis, Soluções e Restrições do slide de Conceitos

Fluxograma Método Simplex



Fonte: [Lachtermarcher, 2009] apud [Belfiore and Fávero, 2013]

Método Simplex

- O fluxograma do método simplex pode ser detalhado no seguinte protocolo:

Início: O problema deve estar na forma padrão.

Passo 1: Encontrar uma solução básica factível (SBF) inicial para o problema de PL.

Uma SBF inicial pode ser obtida atribuindo valores iguais a zero às variáveis de decisão. Para que essa solução seja factível, nenhuma das restrições do problema pode ser violada.

Passo 2: Teste de otimalidade.

Uma solução básica factível é ótima se não houver soluções básicas factíveis adjacentes melhores. Uma SBF adjacente é melhor do que a SBF atual se houver um incremento positivo no valor da função objetivo z. Analogamente, uma SBF adjacente é pior do que a SBF atual se o incremento em z for negativo. Enquanto pelo menos uma das variáveis não básicas da função objetivo z tiver coeficiente positivo, há uma SBF adjacente melhor.

Iteração: Determinar uma SBF adjacente melhor.

A direção de maior incremento em z deve ser identificada, para que uma melhor solução básica factível seja determinada. Para isso, três passos devem ser tomados:

1. Determinar a variável não básica que passará para o conjunto de variáveis básicas (base). Ela deve ser aquela que tem maior incremento em z, isto é, com maior coeficiente positivo em z.
2. Escolher a variável básica que passará para o conjunto de variáveis não básicas. A variável escolhida a sair da base deve ser aquela que limita o crescimento da variável não básica selecionada no passo anterior a entrar na base.
3. Resolver o sistema de equações recalculando os valores da nova solução básica adjacente. Antes disso, o sistema de equações deve ser convertido para uma forma mais conveniente, por meio de operações algébricas elementares, utilizando o **método de eliminação de Gauss-Jordan.** A partir do novo sistema de equações, cada nova equação deve possuir apenas uma variável básica com coeficiente igual a 1, cada variável básica deve aparecer em apenas uma equação, e a função objetivo deve ser escrita em função das variáveis não básicas, de forma que os valores das novas variáveis básicas e da função objetivo z podem ser obtidos diretamente, e o teste de otimalidade pode ser verificado facilmente.

Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]

Eliminação Gaussiana (Método de Gauss)

Método de Gauss

- Eliminação Gaussiana (popularmente, escalonamento) é um método para solução de sistemas lineares:
  - Consiste em realizar operações elementares, de forma a transformar a matriz de coeficientes (A) em uma matriz triangular (inferior ou superior);
  - Após o escalonamento, a solução pode ser obtida via substituição regressiva [Justo et al., 2020].

Método de Gauss

- Operações permitidas na Eliminação Gaussiana:
  - multiplicação de um linha por uma constante não nula;
  - substituição de uma linha por ela mesma somada a um múltiplo de outra linha;
  - permutação de duas linhas [Justo et al., 2020].

Método de Gauss

- Considere o sistema abaixo: [Justo et al., 2020]

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 4x + 4y + 2z &= 2 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

- O sistema pode ser transformado na seguinte matriz estendida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Método de Gauss

Pergunta do protocolo:

- A matriz atual é triangular superior ou inferior? Não.

Sequência de solução:

1. Iteração: zerar o primeiro elemento das linhas $m > 1$
    - Consideremos a linha 2, como exemplo:
        - Utilizar a matriz **atual** para cálculo das novas linhas 2 e 3;
        - Considere a_{21} igual ao primeiro elemento da linha 2 e a_{11}, o primeiro elemento da linha 1[3];
        - Fazer: $L_2 \leftarrow a_{11}L_2 - a_{12}L_1$

[3] Não é necessário utilizar fórmula abaixo (apenas sugestão).

Método de Gauss

Pergunta do protocolo:

- A matriz atual é triangular superior ou inferior? Não.

Sequência de solução:

1. Iteração: zerar o primeiro elemento das linhas $m > 1$
    - Consideremos a linha 2, como exemplo:
        - Utilizar a matriz **atual** para cálculo das novas linhas 2 e 3;
        - Considere a_{21} igual ao primeiro elemento da linha 2 e a_{11}, o primeiro elemento da linha 1[3];
        - Fazer: $L_2 \leftarrow a_{11}L_2 - a_{12}L_1$

[3] Não é necessário utilizar fórmula abaixo (apenas sugestão).

Método de Gauss

Sequência de solução [cont.]:

1. Iteração: zerar o primeiro elemento das linhas $m > 1$ [4]
   - Consideremos a linha 3, como exemplo:
     - Considere a_{31} igual ao primeiro elemento da linha 3 e $a_1 1$, o primeiro elemento da linha 1;
     - Fazer: $L_3 \leftarrow a_{11} L_3 - a_{31} L_1$

[4] Repetir o mesmo protocolo para todas as linhas $m > 1$ (caso existam)

Método de Gauss

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

Matriz estendida

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Aplicação (Iteração 1)

1. Iteração: zerar primeiro elemento linhas $m > 1$:
   - $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ $(a_{21} = 4,\ a_{11} = 1)$;

$$\begin{cases} 4x + 4y + 2z = 2 \quad (L_2) \\ -4x - 4y - 4z = -4 \quad (-4L_1) \\ \hline 0x + 0y - 2z = -2 \quad (L_2 - 4L_1) \end{cases}$$

Método de Gauss

Aplicação (Iteração 1) [cont.]

1. Iteração: zerar primeiro elemento linhas $m > 1$:
   - $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ $(a_{31} = 2,\ a_{11} = 1)$;

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \quad (L_3) \\ -2x - 2y - 2z = -2 \quad (-2L_1) \\ \hline 0x - y - 3z = -2 \quad (L_3 - 2L_1) \end{cases}$$

- Matriz resultante

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

Aplicação (Iteração 1) [cont.]

1. Iteração: zerar primeiro elemento linhas $m > 1$:
   - $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ ($a_{31} = 2$, $a_{11} = 1$);

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \quad (L_3) \\ -2x - 2y - 2z = -2 \quad (-2L_1) \\ \hline 0x - y - 3z = -2 \quad (L_3 - 2L_1) \end{cases}$$

- Matriz resultante

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

Pergunta do protocolo:

- A matriz atual é triangular superior ou inferior? Não.

Sequência de solução:

2. Iteração: zerar o **segundo** elemento das linhas $m \neq 2$
    - Opções:
        - Zerar as linhas 1 e 3, repetindo o protocolo semelhante ao feito no passo 1 (soma de linhas);
        - Trocar linha 3 com linha 2, multiplicar a linha 2 por (-1) e, em seguida, zerar a linha 1;
    - As duas opções tem o mesmo efeito sobre o escalonamento, cabendo escolha pessoal
        - Devido à facilidade da troca de linhas, sem necessidade de cálculos, optaremos pela segunda opção.

Método de Gauss

Matriz estendida (após passo 1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Aplicação (Iteração 2)

2. Iteração: zerar o **segundo** elemento das linhas $m > 2$:
   - Troca das linhas 2 e 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

Aplicação (Iteração 2) [cont.]

2. Iteração: zerar o **segundo** elemento das linhas $m \neq 2$:
   - Multiplicar a linha 2 por -1
   - Multiplicar a linha 3 por -1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

   - Dividir a linha 3 por 2:[5]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[5] Apesar de não ser obrigatório, procure manter sempre as linhas pivô com coeficiente 1, para facilitar os cálculos.

Método de Gauss

Pergunta do protocolo:

- A matriz atual é triangular superior ou inferior? Sim.

Qual o protocolo **se** a matriz não fosse triangular

- Se a matriz não fosse triangular, deveríamos repetir o protocolo até transformá-la em uma matriz triangular.

Sequência de solução:

3. Como a matriz é triangular (superior), devemos voltar ao resolver o sistema correspondente à matriz atual.

Método de Gauss

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

Matriz atual estendida (após passo 2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sequência de solução

3. Resolver o sistema correspondente à matriz atual.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y + 3z &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

- Temos, por substituição, $z = 1$, $y = -1$ e $x = 1$.

Método de Gauss-Jordan

Método de Gauss-Jordan

- O método de **Método de Gauss-Jordan** complementa o método de Gauss;
- Ele continua o escalonamento da matriz até transformá-la em uma matriz diagonal.

Método de Gauss-Jordan

- Consideremos a seguinte matriz escalonada, após aplicação do Método de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jordan

Pergunta do protocolo:

- A matriz atual é diagonal? Não.

Sequência de solução:

- Continuar a eliminação gaussiana até gerar uma matriz diagonal;
- Protocolo:
  - Iterar até zerar todos os elementos que não pertencem à diagonal da matriz de coeficientes A, seguindo o protocolo de escalonamento.

Método de Gauss-Jordan

Pergunta do protocolo:

- A matriz atual é diagonal? Não.

Sequência de solução:

- Continuar a eliminação gaussiana até gerar uma matriz diagonal;
- Protocolo:
  - Iterar até zerar todos os elementos que não pertencem à diagonal da matriz de coeficientes A, seguindo o protocolo de escalonamento.

Método de Gauss-Jordan

Consideremos a última matriz escalonada[6]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $L_1 = L_1 - L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $L_1 = L_1 + 2L_3$
- $L_2 = L_2 - 3L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[6] Seção Método de Gauss, após passo 2.

Método de Gauss-Jordan

Matriz atual estendida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

- Após a finalização do método, a matriz contém diretamente os valores das variáveis;
- Logo, $x = 1$, $y = -1$ e $z = 1$.

Método de Gauss-Jordan

Matriz atual estendida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

- Após a finalização do método, a matriz contém diretamente os valores das variáveis;
- Logo, $x = 1$, $y = -1$ e $z = 1$.

Simplex Tableau

Simplex Tableau

- Apesar da possibilidade de solução de PPLs usando o procedimento analítico do Método Simplex, é muito comum o uso do método em formato tabular (Simplex Tableau);
- Para cálculos feitos manualmente, o formato tabular é muito mais conveniente [Belfiore and Fávero, 2013].

Simplex Tableau

- De modo semelhante ao Simplex analítico, o Simplex Tableau exige que o problema esteja na forma padrão.

$$
\begin{aligned}
&\text{max ou min } z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
&\text{sujeito a:} \\
&\qquad \begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array} \\
&\qquad\qquad\qquad x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}
$$

Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]

Simplex Tableau

- A Forma Padrão pode ser representada em um quadro (*tableau*) Simplex

$$
\begin{aligned}
&\text{max ou min } z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
&\text{sujeito a:} \\
&\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\
&\qquad\qquad\qquad x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
$$

nº da equação	Coeficientes					Constante
	z	x_1	x_2	...	x_n	
0	1	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0
1	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
2	0	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
m	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]

Simplex Tableau

- Dependendo do autor, o quadro Simplex pode ser ligeiramente diferente;
- Nesta disciplina, iremos adotar um modelo semelhante ao utilizado por [Goldbarg and Luna, 2005].

		x_1 .... x_k .... x_s	x_{s+1} .... x_{s+r} .... x_n	
	z	c_1 .... c_{1k} .... c_s	c_{s+1} .... c_{s+r} .... c_n	
x_{s+1}	b_1	a_{11} .... a_{1k} .... a_{1s}	1 ... 0 ... 0	
			0 ... 0 ... 0	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	
x_{s+r}	b_r	a_{r1} .... a_{rk} .... a_{rs}	0 ... 1 ... 0	$\frac{\bar{b}_s}{a_{sk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	
x_n	b_m	a_{m1} .... a_{mk} .... a_{ms}	0 ... 0 ... 1	
	Termo Ind.	Matriz de Restrições $(m \times m - n)$	Variáveis de Folga $(m \times m)$	

Fonte: [Goldbarg and Luna, 2005]

Simplex Tableau

- No entanto, o mecanismo de solução, será definido com base em [Belfiore and Fávero, 2013];
- No modelo de Belfiore, a função objetivo deve ser adicionada ao quadro na forma

$$\boxed{z - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = 0}$$

		Índice das Variáveis		
	Valor da F.O.	Valor de $z_j - c_j$		
Índice das Variáveis Básicas	$\overline{x}_B$	$Y = B^{-1} R$	B^{-1}	Área de Cálculos
		Variáveis Não Básicas	Variáveis Básicas	

Fonte: [Goldbarg and Luna, 2005]

Simplex Tableau - Protocolo (1/2)

- [Belfiore and Fávero, 2013] resumem o protocolo do método Simplex Tableau como:

Início: O problema deve estar na forma padrão.
Passo 1: Encontrar uma SBF inicial para o problema de PL.
Analogamente à forma analítica do método Simplex apresentada na Seção 3.4.2, uma solução básica inicial pode ser obtida atribuindo valores iguais a zero às variáveis de decisão. A SBF inicial corresponde à SBF atual.
Passo 2: Teste de otimalidade.
A SBF atual é ótima se, e somente se, os coeficientes de todas as variáveis não básicas da equação 0 da forma tabular são não negativos (≥ 0). Enquanto houver pelo menos uma das variáveis não básicas com coeficiente negativo na equação 0, há uma SBF adjacente melhor.
Iteração: Determinar uma SBF adjacente melhor.
A direção de maior incremento em z deve ser identificada, para que uma melhor solução básica factível seja determinada. Para isso, três passos devem ser tomados:
1. Determinar a variável não básica que entrará na base.
Ela deve ser aquela que tem maior incremento em z, isto é, com maior coeficiente negativo na equação 0. A coluna da variável não básica escolhida a entrar na base é chamada **coluna pivô**.

Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]

Simplex Tableau - Protocolo (2/2)

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

- [Belfiore and Fávero, 2013] resumem o protocolo do método Simplex Tableau como:

2. Determinar a variável básica que sairá da base.
Analogamente à forma analítica, a variável escolhida deve ser aquela que limita o crescimento da variável não básica selecionada no passo anterior a entrar na base. Para que a variável seja escolhida, três etapas são necessárias:

a) Selecionar os coeficientes positivos da coluna pivô que representam os coeficientes da nova variável básica em cada restrição do modelo atual.
b) Para cada coeficiente positivo selecionado no passo anterior, dividir a constante da mesma linha por ele.
c) Identificar a *linha com menor quociente*. Essa linha contém a variável que sairá da base.

A linha que contém a variável básica escolhida a sair da base é chamada **linha pivô**. O **número pivô** é o valor que corresponde à interseção da linha pivô com a coluna pivô.

3. Transformar a forma tabular atual utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan e recalcular a solução.
Analogamente à solução analítica, a forma tabular atual deve ser convertida para uma forma mais conveniente, por meio de operações elementares, de forma que os valores das novas variáveis básicas e da função objetivo z podem ser obtidos diretamente na nova forma tabular. A função objetivo passa a ser reescrita em função das novas variáveis não básicas da solução adjacente, de forma a verificar facilmente o teste de otimalidade.
A nova forma tabular, segundo Taha (2007), é obtida após as seguintes operações elementares:

a) Nova linha pivô = linha pivô atual ÷ número pivô
b) Para as demais linhas, incluindo z:
Nova linha = (linha atual) – (coeficiente da coluna pivô da linha atual) × (nova linha pivô)

Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]

Simplex Tableau

- Problemas de maximização e minimização têm comportamentos diferentes no Simplex Tableau
  - Problemas de maximização são resolvidos diretamente, seguindo o protocolo;
  - Problemas de minimização devem ser transformados em problemas de maximização e, em sequência, resolvidos [7].

$$\boxed{min\ z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \leftrightarrow max\ \text{-}z = \text{-}f(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

[7] Ver seção Transformações do slide de Conceitos

Convergência Simplex Tableau

- Problemas de maximização e minimização têm convergência garantida em todas as etapas do método Simplex
  - O valor da função objetivo z deve sempre aumentar[8] em todas as etapas de cálculo;
  - Caso o valor diminua de uma etapa para outra, revise novamente se:
    - o protocolo foi feito de forma correta (incluindo entrada inicial de valores na tabela);
    - todos os cálculos estão corretos;

[8] Em alguns casos, a alteração de variáveis da base podem gerar valores iguais ao existente na etapa anterior.

Método Simplex e Simplex Duas Fases

- O Método Simplex somente resolve problemas em que todas as restrições, exceto as de não negatividade, são:
  - Inequações do tipo menor ou igual ($\leq$);
- O Método Simplex Duas Fases resolve problemas em que as restrições são:
  - Equações;
  - Inequações do tipo maior ou igual ($\geq$);
  - Inequações do tipo menor ou igual ($\leq$);

Exercício Maximização

Problema Maximização [Belfiore and Fávero, 2013]

- Considere o modelo de Programação Linear

$$max\ z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{suj. a:} \qquad x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 20 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema Maximização [Belfiore and Fávero, 2013]

- Passo inicial 1: Escrever o problema na forma padrão
  - Para isso, iremos criar duas variáveis auxiliares: x_3 e x_4.

$$max\ z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{suj. a:} \qquad x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 6 \\ 5x_1 + 2x_2 + \qquad + x_4 &= 20 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problema Maximização [Belfiore and Fávero, 2013]

- Passo 1: Construir o quadro Simplex e encontrar uma SBF
  - Definimos uma solução factível ($x_1 = 0$ e $x_2 = 0$).

$$max\ z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} \text{suj. a:} \quad x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 6 \\ 5x_1 + 2x_2 + \quad + x_4 &= 20 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	-3	-2	0	0
x_3	6	1	1	1	0
x_4	20	5	2	0	1

Problema Maximização [Belfiore and Fávero, 2013]

- Vamos analisar o quadro gerado:
  - As variáveis x_3 e x_4 estão na base
    - Isso indica que essas variáveis possuem valor diferente de zero;
    - Temos $x_3 = 6$ e $x_4 = 20$, que são os valores de folga;
    - Neste cenário, não produzimos nada $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ e temos folga de produção;
  - As linhas/colunas referentes a x_3 e x_4 formam uma matriz identidade (uma vez que x_3 e x_4 estão na base).

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	-3	-2	0	0
x_3	6	1	1	1	0
x_4	20	5	2	0	1

Problema Maximização [Belfiore and Fávero, 2013]

- Passo 2: Teste de otimalidade
  - Avaliar se as variáveis não básicas na linha 1 são positivas
    - Se forem todas positivas, o método está encerrado com a solução ótima;
    - Caso contrário, devemos procurar uma SBF melhor.
- Avaliação do Passo 2 no Exercício
  - Variáveis não básicas: (x_1 e x_2)
    - As duas possuem sinal negativo;
    - Com isso, devemos procurar uma SBF melhor.

Problema Maximização [Belfiore and Fávero, 2013]

- Iteração: Determinar uma SBF adjacente melhor.
  1. Determinar a variável não básica que entrará na base.
     - Obter a variável com menor valor, dentre as variáveis negativas, da linha 1;

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	-3	-2	0	0
x_3	6	1	1	1	0
x_4	20	5	2	0	1

Problema Maximização [Belfiore and Fávero, 2013]

- Iteração: Determinar uma SBF adjacente melhor.
  2. Determinar a variável básica que sairá da base.
     - Definir a coluna pivô (coluna da variável básica)
     - Dividir o valor da coluna z pelos valores da coluna pivô.
     - Obter linha com menor quociente não negativo (≥ 0).

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	-3	-2	0	0
x_3	6	1	1	1	0
x_4	20	5	2	0	1

Problema Maximização [Belfiore and Fávero, 2013]

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Iteração: Determinar uma SBF adjacente melhor.
  2. Determinar a variável básica que sairá da base.
     - Definir a coluna pivô (coluna da variável básica).
     - Dividir o valor da coluna z pelos valores da coluna pivô.
     - Obter linha com menor quociente não negativo (≥ 0).

		x_1	x_2	x_3	x_4	
z	0	-3	-2	0	0	
x_3	6	1	1	1	0	$6/1 = 6$
x_4	20	5	2	0	1	$20/5 = 4$

Problema Maximização [Belfiore and Fávero, 2013]

- Iteração: Determinar uma SBF adjacente melhor.
  2. Determinar a variável básica que sairá da base.
     - Definir a coluna pivô (coluna da variável básica).
     - Dividir o valor da coluna z pelos valores da coluna pivô.
     - Obter linha com menor quociente não negativo (≥ 0).

		x_1	x_2	x_3	x_4	
z	0	-3	-2	0	0	
x_3	6	1	1	1	0	$6/1 = 6$
x_4	20	5	2	0	1	$20/5 = 4$

Problema Maximização [Belfiore and Fávero, 2013]

- Iteração: Determinar uma SBF adjacente melhor.
  3. Escalonamento por Gauss-Jordan
     - A linha do pivô deve ter valor 1 e as demais, valor 0;
     - Podemos definir o pivô como o valor $\alpha = 5$;
     - Precisaremos dividir o resultado por β, correspondente ao valor na linha à escalonar e coluna pivô ($L_1 = -3$ e $L_2 = 1$).

Problema Maximização [Belfiore and Fávero, 2013]

- Iteração: Determinar uma SBF adjacente melhor.
  3. Escalonamento por Gauss-Jordan
     - $L_3 = L_3/\alpha$;
     - $L_1 = (\beta L_1 - \alpha L_3)/\beta$;
     - $L_2 = (\beta L_2 - \alpha L_3)/L_3$;

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	12	0	-4/5	0	3/5
x_3	2	0	3/5	1	-1/5
x_1	4	1	2/5	0	1/5

$L_1 = (5[0, -3, -2, 0, 0] - (-3)[20, 5, 2, 0, 1])/5;$
$L_1 = ([0, -15, -10, 0, 0] + [60, 15, 6, 0, 3])/5;$
$L_1 = [60, 0, -4, 0, 3]/5;$
$L_1 = [12, 0, -4/5, 0, 3/5];$

$L_2 = (5[6, 1, 1, 1, 0] - 1[20, 5, 2, 0, 1])/5;$
$L_2 = ([30, 5, 5, 5, 0] - [20, 5, 2, 0, 1])/5;$
$L_2 = [10, 0, 3, 5, -1]/5;$
$L_2 = [2, 0, 3/5, 1, -1/5];$

Problema Maximização [Belfiore and Fávero, 2013]

- Vamos analisar o quadro gerado:
  - As variáveis x_1 e x_3 estão na base
    - Isso indica que essas variáveis possuem valor diferente de zero;
    - Temos: $x_3 = 2$, $x_1 = 4$ e $z = 12$
    - Neste cenário, produzimos 4 unidades em x_1 e temos 2 unidades da variável de folga, x_3;
    - O lucro, neste cenário, é de 12 unidades monetárias.

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	12	0	-4/5	0	3/5
x_3	2	0	3/5	1	-1/5
x_1	4	1	2/5	0	1/5

Problema Maximização [Belfiore and Fávero, 2013]

- Passo 2: Teste de otimalidade
  - Avaliar se as variáveis não básicas na linha 1 são positivas
    - Se forem todas positivas, o método está encerrado com a solução ótima;
    - Caso contrário, devemos procurar uma SBF melhor.
- Avaliação do Passo 2 no Exercício
  - Variáveis não básicas: (x_2 e x_4)
    - A variável x_2 possui valor negativo e x_4 possui valor positivo;
    - Com isso, a variável x_2 deve entrar na base.

Problema Maximização [Belfiore and Fávero, 2013]

- Devemos proceder novamente uma iteração, agora para a variável x_2.
  - Após proceder novamente a iteração para x_2 temos o seguinte quadro[9].

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	44/3	0	0	4/3	1/3
x_2	10/3	0	1	5/3	-1/3
x_1	8/3	1	0	-2/3	1/3

[9] A iteração não será apresentada no slide, para que o mesmo não fique repetitivo

Problema Maximização [Belfiore and Fávero, 2013]

- A partir do quadro, temos a seguinte conclusão.
  - Função objetivo (lucro): 44/3 unidades;
  - Variável x_1: (produzir) 8/3 unidades;
  - Variável x_2: (produzir) 10/3 unidades;

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	44/3	0	0	4/3	1/3
x_2	10/3	0	1	5/3	-1/3
x_1	8/3	1	0	-2/3	1/3

Exercício Minimização

Problema Minimização [Belfiore and Fávero, 2013]

- Considere o modelo de Programação Linear

$$
\begin{aligned}
& min\ z = 4x_1 - 2x_2 \\
\text{suj. a:} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\
& x_1 - x_2 \leq 8 \\
& x_1,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema Minimização [Belfiore and Fávero, 2013]

- Para problemas de minimização, primeiro devemos transformá-lo em um problema de maximização.
  - Em seguida, iremos criar duas variáveis auxiliares: x_3 e x_4.

$$
\begin{aligned}
& max\ \text{-}z = \text{-}4x_1 + 2x_2 \\
\text{suj. a:} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \quad = 10 \\
& x_1 - x_2 + \quad + x_4 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema Minimização [Belfiore and Fávero, 2013]

- Passo 1: Construir o quadro Simplex e encontrar uma SBF
  - Definimos uma solução factível ($x_1 = 0$ e $x_2 = 0$).
  - Lembrar que os valores de z entram no quadro com valores invertidos: $-z + 4x_1 - 2x_2 = 0$

$$
\begin{aligned}
max\ \text{-}z &= \text{-}4x_1 + 2x_2 \\
\text{suj. a:}\quad 2x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 10 \\
x_1 - x_2 + \quad + x_4 &= 8 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	4	-2	0	0
x_3	10	2	1	1	0
x_4	8	1	-1	0	1

Problema Minimização [Belfiore and Fávero, 2013]

- Passo 2: Teste de otimalidade
    - Avaliar se todas as variáveis não básicas na linha 1 são positivas
        - Se forem todas positivas, o método está encerrado com a solução ótima;
        - Caso contrário, devemos procurar uma SBF melhor.

Problema Minimização [Belfiore and Fávero, 2013]

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Iteração: Determinar uma SBF adjacente melhor.
  1. Determinar a variável não básica que entrará na base.
     - Obter a variável com maior valor negativo da linha 1;
     - Observe que na linha 3 da coluna pivô, o valor é negativo. Com isso, a linha pivô é a linha 2.

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	4	-2	0	0
x_3	10	2	1	1	0
x_4	8	1	-1	0	1

Problema Minimização [Belfiore and Fávero, 2013]

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Iteração: Determinar uma SBF adjacente melhor.
  1. Usando a eliminação de Gauss-Jordan, temos a nova tabela

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	20	8	0	2	0
x_2	10	2	1	1	0
x_4	18	3	0	1	1

Problema Minimização [Belfiore and Fávero, 2013]

- A partir do quadro anterior, temos a seguinte conclusão.
  - Função objetivo (mínimo): -20 unidades;
  - Variável x_2 (variável): 10 unidades;
  - Variável x_4 (folga): 18 unidades;

Referências I

Belfiore, P. and Fávero, L. P. (2013).
Pesquisa operacional para cursos de engenharia.
Elsevier, 1 edition.

Diego Mello da Silva (2016).
Pesquisa Operacional - Slides de Aula.
IFMG - Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Formiga.

Goldbarg, M. C. and Luna, H. P. L. (2005).
Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos.
Elsevier, 2 edition.

Justo, D., Sauter, E., Azevedo, F., Guidi, L., and Konzen, P. H. (2020).
Cálculo Numérico, Um Livro Colaborativo - Versão Python.
UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/livro-py.pdf.

Lachtermarcher, G. (2009).
Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões.
Pearson Prentice Hall.