Pesquisa Operacional

Sensibilidade e Dualidade

Felipe Augusto Lima Reis
felipe.reis@ifmg.edu.br

INSTITUTO FEDERAL
Minas Gerais

Sumário

Análise de Sensibilidade

Análise de Sensibilidade

- Análise de Sensibilidade é utilizada para avaliação do impacto de alterações dos parâmetros na solução ótima [Goldbarg and Luna, 2005] [Belfiore and Fávero, 2013];
- As seguinte alterações nos parâmetros podem ser avaliadas:
  - Mudança no vetor de custos;
  - Mudança no vetor de termos independentes;
  - Mudança nos coeficientes das variáveis;
  - Acréscimo de restrições;
  - Acréscimo de novas variáveis [Goldbarg and Luna, 2005].

Análise de Sensibilidade

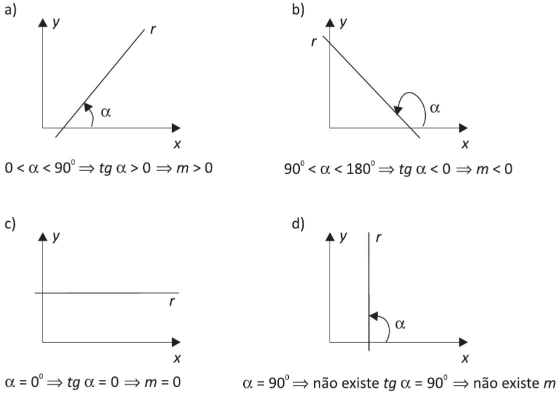
- [Belfiore and Fávero, 2013] divide a Análise de Sensibilidade em dois casos distintos:
  1. Modificações que não alteram a solução ótima (variáveis) ou a região de factibilidade
     - Avalia alterações nos valores que os coeficientes da função objetivo e que as constantes do lado direito das restrições podem assumir (limites inferiores e superiores);
     - Devem ser analisadas uma única modificação por vez;
  2. Modificações que alteram a solução ótima
     - Denominada **Análise de Sensibilidade Pós Otimização**, necessita do recálculo da nova solução ótima do modelo;
     - Pode analisar múltiplas modificação de uma só vez.

Análise de Sensibilidade

- De forma teórica, iremos estudar apenas as modificações que não alteram os valores das variáveis da solução ótima ou a região de factibilidade;
  - Iremos adotar, com base em [Belfiore and Fávero, 2013], a solução pelo Método Gráfico;
  - Para isso, deveremos estudar/rever conceitos relativos à inclinação de retas;
- De forma prática, usando softwares para solução de PPL, iremos estudar cenários onde há alteração da solução / variáveis ótimas
  - Para isso, iremos utilizar programação em Python (PuLP).

Inclinação de Reta

- A inclinação de reta α corresponde ao ângulo entre o eixo x e a reta, no sentido anti-horário.



Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]

Inclinação de Reta

- O coeficiente angular (declividade) m determina a direção da reta, definida pela tangente trigonométrica da inclinação α:
  - O coeficiente angular pode ser calculado a partir de dois pontos na reta:

$$\boxed{m = \text{tg}\alpha = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{cat. adjacente}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

  - Pode ainda ser calculado a partir da equação reduzida de reta $ax + by + c = 0$, reescrita como: [Belfiore and Fávero, 2013]

$$\boxed{y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b} \rightarrow y = mx + n \quad \text{, onde } m = -\frac{a}{b} \text{ e } n = -\frac{c}{b}}$$

    - Na equação anterior, m é denominado *coeficiente angular da reta* e n é denominado *coeficiente linear da reta*.

Inclinação de Reta

- A equação geral de uma função objetivo com variáveis x_1 e x_2, $z = c_1x_1 + c_2x_2$, em sua forma reduzida, é definida como:

$$\boxed{x_2 = -\frac{c_1}{c_2}x_1 + \frac{z}{c_2}}$$

- Considerando um problema com duas restrições ativas[1], podemos calcular os coeficientes angulares das restrições
  - O coeficiente angular da função objetivo, $-c_1/c_2$, estará entre os coeficientes angulares das restrições 1 (m_1) e 2 (m_2).

$$\boxed{m_1 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq m_2}$$

  - Caso a alteração não exceda o intervalo, a alteração não produzirá mudanças na solução ótima (valores de x_1 e x_2).

[1] O valor ótimo está na junção de duas restrições (o sistema de equações gera um ponto no gráfico).

Inclinação de Reta - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

A empresa Romes Calçados está interessada em planejar sua produção de chinelos e tamancos para o próximo verão. Os produtos passam pelo processo de corte, montagem e acabamento. A tabela abaixo mostra o total de horas de mão de obra (horas-homem) necessárias para produzir uma unidade de cada componente em cada processo de fabricação, além do tempo total disponível por semana, também em horas-homem. O lucro unitário por chinelo e tamanco fabricado é de R$15,00 e R$20,00, respectivamente. Determinar a solução gráfica do modelo.

Setor	Tempo (horas-homem) para processar 1 unidade		Tempo disponível (horas-homem/semana)
	chinelo	tamanco	
corte	5	4	240
montagem	4	8	360
acabamento	0	7,5	300

Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]

Inclinação de Reta - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

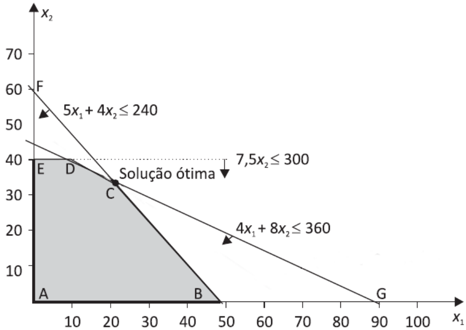
- O problema pode ser modelado como:

$$\begin{aligned} & max\ z = 15x_1 + 20x_2 & \\ \text{suj. a:} \quad & 5x_1 + 4x_2 \leq 240 & \text{(corte)} \\ & 4x_1 + 8x_2 \leq 360 & \text{(montagem)} \\ & 7,5x_2 \leq 300 & \text{(acabamento)} \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 & \text{(não negatividade)} \end{aligned}$$

onde,
x_1 = quantidade de chinelos produzidos por semana, e
x_2 = quantidade de tamancos produzidos por semana.

Inclinação de Reta - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- A partir da solução do problema, temos os seguintes valores:
    - $z = 1000$ (lucro líquido semanal);
    - $x_1 = 20$ (chinelos por semana);
    - $x_2 = 35$ (tamancos por semana).



Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]

Inclinação de Reta - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- A partir da solução do problema usando o método gráfico, podemos ver que o valor ótimo está na interseção das restrições 1 e 2 (restrições ativas)
  - Podemos calcular as inclinações e avaliar o intervalo para o qual mudanças na função objetivo não alteram a solução ótima.

Restrição 1:

$$x_2 = -\frac{5}{4}x_1 + 60 \quad \rightarrow \quad m_1 = -\frac{5}{4}$$

Restrição 2:

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 45 \quad \rightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{2}$$

Inclinação de Reta - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- A partir da solução do problema usando o método gráfico, podemos ver que o valor ótimo está na interseção das restrições 1 e 2 (restrições ativas)
  - Podemos calcular as inclinações e avaliar o intervalo para o qual mudanças na função objetivo não alteram a solução ótima.

Restrição 1:

$$x_2 = -\frac{5}{4}x_1 + 60 \quad \rightarrow \quad m_1 = -\frac{5}{4}$$

Restrição 2:

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 45 \quad \rightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{2}$$

Inclinação de Reta - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- A partir da solução do problema usando o método gráfico, podemos ver que o valor ótimo está na interseção das restrições 1 e 2 (restrições ativas)
  - Podemos calcular as inclinações e avaliar o intervalo para o qual mudanças na função objetivo não alteram a solução ótima.

  Restrição 1:

  $$x_2 = -\frac{5}{4}x_1 + 60 \quad \rightarrow \quad m_1 = -\frac{5}{4}$$

  Restrição 2:

  $$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 45 \quad \rightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{2}$$

Inclinação de Reta - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- A partir das restrições ativas podemos calcular o intervalo no qual não há alteração da solução ótima.

$$\boxed{-\frac{5}{4} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{5}{4}}$$

- Caso os aumentos dos lucros unitários passe de R$15,00 e R$20,00, respectivamente, para R$20,00 e R$25,00, haverá alteração nas condições iniciais?
  - Calculando o fator c_1/c_2 , vemos que seu valor será igual a 0,8;
  - Como $0,5 \leq 0,8 \leq 1,25$, a modificação não altera a solução ótima;
  - O lucro será, então, de $z = 20 \times 20 + 25 \times 35 = 1275$.

Inclinação de Reta - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- A partir das restrições ativas podemos calcular o intervalo no qual não há alteração da solução ótima.

$$\boxed{-\frac{5}{4} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{5}{4}}$$

- Caso os aumentos dos lucros unitários passe de R$15,00 e R$20,00, respectivamente, para R$20,00 e R$25,00, haverá alteração nas condições iniciais?
  - Calculando o fator c_1/c_2 , vemos que seu valor será igual a 0,8;
  - Como $0,5 \leq 0,8 \leq 1,25$, a modificação não altera a solução ótima;
  - O lucro será, então, de $z = 20 \times 20 + 25 \times 35 = 1275$.

Inclinação de Reta - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- A partir das restrições ativas podemos calcular o intervalo no qual não há alteração da solução ótima.

$$\boxed{-\frac{5}{4} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{5}{4}}$$

- Caso os aumentos dos lucros unitários passe de R$15,00 e R$20,00, respectivamente, para R$20,00 e R$25,00, haverá alteração nas condições iniciais?
  - Calculando o fator c_1/c_2 , vemos que seu valor será igual a 0,8;
  - Como $0,5 \leq 0,8 \leq 1,25$, a modificação não altera a solução ótima;
  - O lucro será, então, de $z = 20 \times 20 + 25 \times 35 = 1275$.

Inclinação de Reta - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- *[continuação...]*
  - Qual o intervalo de valores que c_2 pode assumir, a partir do problema original, de modo que não haja alteração das condições da solução ótima?
    - A partir do intervalo de c_1/c_2, temos:

$$\begin{cases} 0,5\ c_2 \leq 15 \ \rightarrow c_2 \leq 30 \\ 1,25\ c_2 \geq 15 \ \rightarrow c_2 \geq 12 \end{cases}$$

    - Com base nos cálculos anteriores, temos que as solução $(x_1 = 20, x_2 = 35)$ permanecerá inalterada[2] se $12 \leq c_2 \leq 30$.
  - Suponha que o lucro unitário de c_2 caiu para R$18,00. Qual o intervalo de lucro de c_1 para manutenção da solução atual?
    - Definindo $c_2 = 18$, temos que o intervalo ficará $0,5 \times 18 \leq c_1 \leq 1,25 \times 18 \ \rightarrow \ 9 \leq c_1 \leq 22,5$.

[2] Apenas a quantidade de itens produzidos de x_1 e x_2, não necessariamente o valor ótimo z.

Inclinação de Reta - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- *[continuação...]*
  - Qual o intervalo de valores que c_2 pode assumir, a partir do problema original, de modo que não haja alteração das condições da solução ótima?
    - A partir do intervalo de c_1/c_2, temos:

$$\begin{cases} 0,5\ c_2 \leq 15 \ \rightarrow c_2 \leq 30 \\ 1,25\ c_2 \geq 15 \ \rightarrow c_2 \geq 12 \end{cases}$$

    - Com base nos cálculos anteriores, temos que as solução $(x_1 = 20, x_2 = 35)$ permanecerá inalterada[2] se $12 \leq c_2 \leq 30$.
  - Suponha que o lucro unitário de c_2 caiu para R$18,00. Qual o intervalo de lucro de c_1 para manutenção da solução atual?
    - Definindo $c_2 = 18$, temos que o intervalo ficará $0,5 \times 18 \leq c_1 \leq 1,25 \times 18 \ \rightarrow \ 9 \leq c_1 \leq 22,5$.

[2] Apenas a quantidade de itens produzidos de x_1 e x_2 , não necessariamente o valor ótimo z.

Inclinação de Reta - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- *[continuação...]*
  - Qual o intervalo de valores que c_2 pode assumir, a partir do problema original, de modo que não haja alteração das condições da solução ótima?
    - A partir do intervalo de c_1/c_2, temos:

$$\begin{cases} 0,5\ c_2 \leq 15 & \rightarrow c_2 \leq 30 \\ 1,25\ c_2 \geq 15 & \rightarrow c_2 \geq 12 \end{cases}$$

    - Com base nos cálculos anteriores, temos que as solução $(x_1 = 20, x_2 = 35)$ permanecerá inalterada[2] se $12 \leq c_2 \leq 30$.
  - Suponha que o lucro unitário de c_2 caiu para R$18,00. Qual o intervalo de lucro de c_1 para manutenção da solução atual?
    - Definindo $c_2 = 18$, temos que o intervalo ficará $0,5 \times 18 \leq c_1 \leq 1,25 \times 18 \ \rightarrow \ 9 \leq c_1 \leq 22,5$.

[2] Apenas a quantidade de itens produzidos de x_1 e x_2 , não necessariamente o valor ótimo z.

Inclinação de Reta - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- *[continuação...]*
  - Qual o intervalo de valores que c_2 pode assumir, a partir do problema original, de modo que não haja alteração das condições da solução ótima?
    - A partir do intervalo de c_1/c_2, temos:

$$\begin{cases} 0,5\ c_2 \leq 15 \ \rightarrow c_2 \leq 30 \\ 1,25\ c_2 \geq 15 \ \rightarrow c_2 \geq 12 \end{cases}$$

    - Com base nos cálculos anteriores, temos que as solução $(x_1 = 20, x_2 = 35)$ permanecerá inalterada[2] se $12 \leq c_2 \leq 30$.
  - Suponha que o lucro unitário de c_2 caiu para R$18,00. Qual o intervalo de lucro de c_1 para manutenção da solução atual?
    - Definindo $c_2 = 18$, temos que o intervalo ficará $0,5 \times 18 \leq c_1 \leq 1,25 \times 18 \ \rightarrow \ 9 \leq c_1 \leq 22,5$.

[2] Apenas a quantidade de itens produzidos de x_1 e x_2 , não necessariamente o valor ótimo z.

Preço Sombra

Preço Sombra

- Preço Sombra (*shadow price*) corresponde ao "acréscimo (ou decréscimo) no valor da função objetivo caso seja adicionada (ou retirada) uma unidade na quantidade atual de recursos disponíveis da i-ésima restrição" [Belfiore and Fávero, 2013]
  - Caso seja adicionado uma unidade à uma restrição i ($b_i + 1$), qual será o impacto no valor da função objetivo?
  - O preço sombra busca responder a essa questão e avaliar o comportamento do modelo nessa condição;
  - De forma análoga, pode ser usado para avaliar o decréscimo de uma unidade de uma restrição i.

Preço Sombra

- O preço sombra pode ser interpretado como:
  - Preço justo a ser pago pela utilização de uma unidade do recurso i;
  - Custo de oportunidade de recursos pela perda de uma unidade do recurso i [Belfiore and Fávero, 2013];
- Preço sombra também corresponde ao nome dado às variáveis de decisão do problema dual [Belfiore and Fávero, 2013].

Preço Sombra

- O preço sombra para adição de uma unidade em um recurso b_i^0 é dada por: [Belfiore and Fávero, 2013]

$$\boxed{P_i = \frac{\Delta z_{+1}}{\Delta b_{i,+1}} = \frac{z_{+1} - z_0}{+1}}$$

onde,

Δz_{+1} = acréscimo no valor de z caso seja adicionada 1 unidade de recurso em b_i^0;
z_0 = valor inicial da função objetivo;
z_{+1} = novo valor da função objetivo após ser adicionada 1 unidade em b_i^0; e
$\Delta b_{i,+1}$ = acréscimo em b_i^0 (definição de preço-sombra).

Preço Sombra

- O preço sombra para remoção de uma unidade em um recurso b_i^0 é dada por: [Belfiore and Fávero, 2013]

$$\boxed{P_i = \frac{\Delta z_{-1}}{\Delta b_{i,-1}} = \frac{z_{-1} - z_0}{-1} = \frac{z_0 - z_{-1}}{1}}$$

onde,

Δz_{-1} = decréscimo no valor de z caso seja adicionada 1 unidade de recurso em b_i^0;
z_0 = valor inicial da função objetivo;
z_{-1} = novo valor da função objetivo após ser removida 1 unidade em b_i^0; e
$\Delta b_{i,+1}$ = decréscimo em b_i^0 (definição de preço-sombra).

Preço Sombra

- Para alterações em uma das constantes do lado direito da restrição, é necessário utilizar o conceito de preço sombra para cálculo das variáveis;
  - O objetivo da análise é determinar o intervalo de valores em que b_i pode variar;
  - Para isso, é necessário obter o intervalo em que o preço-sombra permanece constante;
  - O cálculo do preço-sombra é válido somente para as restrições ativas;
  - O preço-sombra para restrições não ativas é zero [Belfiore and Fávero, 2013].

Preço Sombra

- O intervalo em que o preço-sombra deve permanece constante deve satisfazer a seguinte relação: [Belfiore and Fávero, 2013]

$$\boxed{\frac{\Delta z_{+p}}{\Delta b_{i,+p}} = \frac{\Delta z_{-q}}{\Delta b_{i,-q}} = \frac{z_{+p} - z_0}{p} = \frac{z_{-q} - z_0}{q} = P_i}$$

onde,

Δz_{+p} = acréscimo no valor de z se forem adicionadas p unidades de recurso em b_i^0;
Δz_{-q} = acréscimo no valor de z se forem removidas q unidades de recurso em b_i^0;
z_0 = valor inicial da função objetivo;
z_{+p} = novo valor da função objetivo após serem adicionadas p unidades em b_i^0;
z_{-q} = novo valor da função objetivo após serem removidas q unidades em b_i^0;
$\Delta b_{i,+p}$ = acréscimo em b_i^0; e
$\Delta b_{i,-q}$ = acréscimo em b_i^0;

Preço Sombra

- Segundo [Belfiore and Fávero, 2013], a equação do preço sombra pode ser interpretada da seguinte forma:
  - Preço justo a ser pago pela utilização de p unidades do recurso i, sendo proporcional ao preço sombra;
    - Se adicionadas p unidades, o valor da função objetivo cresceria $\Delta z_{+p} = P_i \times p$;
  - Custo de oportunidade, pela perda de q unidades do recurso i.
    - Se adicionadas q unidades, o valor da função objetivo decresceria $\Delta z_{-q} = P_i \times q$.

Preço Sombra - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- Considere novamente o problema anterior, da Romes Calçados [Belfiore and Fávero, 2013].
  - Qual o impacto da adição de uma hora-homem no setor de corte?
    - Se alterarmos o tempo disponível do setor de cortes em uma hora-homem, a restrição será dada por:

$$5x_1 + 4x_2 \leq 241$$

    - A solução ótima será dada pela interseção das retas ativas $5x_1 + 4x_2 = 241$ e $4x_1 + 8x_2 = 360$;
    - A nova solução ótima será: $x_1 = 20,33$, $x_2 = 34,83$ e $z = 1.001,67$.

Preço Sombra - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

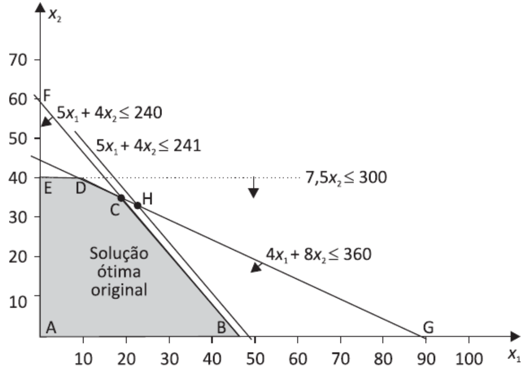
- Considere novamente o problema anterior, da Romes Calçados [Belfiore and Fávero, 2013].
  - Qual o impacto da adição de uma hora-homem no setor de corte?
    - Se alterarmos o tempo disponível do setor de cortes em uma hora-homem, a restrição será dada por:

$$5x_1 + 4x_2 \leq 241$$

    - A solução ótima será dada pela interseção das retas ativas $5x_1 + 4x_2 = 241$ e $4x_1 + 8x_2 = 360$;
    - A nova solução ótima será: $x_1 = 20,33$, $x_2 = 34,83$ e $z = 1.001,67$.

Preço Sombra - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- *[continuação...]*
  - A solução pelo método gráfico pode ser vista na figura abaixo:



Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]

Preço Sombra - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- *[continuação...]*
  - Qual o preço sombra do setor de corte?
    - O preço sombra pode ser calculado por:

$$\boxed{P_1 = \frac{1001,67 - 1000}{241 - 240} = 1,67}$$

    - Podemos concluir que a adição de uma hora-homem no setor de corte causa um aumento no valor da função objetivo de 1,67.
    - De forma similar, o preço justo para cada hora-homem no setor de corte é 1,67 [Belfiore and Fávero, 2013].

Preço Sombra - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- *[continuação...]*
  - Qual o preço sombra do setor de corte?
    - O preço sombra pode ser calculado por:

$$\boxed{P_1 = \frac{1001,67 - 1000}{241 - 240} = 1,67}$$

    - Podemos concluir que a adição de uma hora-homem no setor de corte causa um aumento no valor da função objetivo de 1,67.
    - De forma similar, o preço justo para cada hora-homem no setor de corte é 1,67 [Belfiore and Fávero, 2013].

Preço Sombra - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- *[continuação...]*
  - Caso reduzissemos uma hora-homem, qual seria o impacto no setor de cortes?
    - Usando a fórmula negativa, o preço sombra também pode ser calculado como:

$$\boxed{P_1 = \frac{1000 - 998,33}{240 - 239} = 1,67}$$

    - Podemos concluir que cada hora-homem retirada do setor de corte promove um decrescimento na função objetivo de 1,67;
    - De forma similar, o custo de oportunidade por cada hora-homem perdida no setor de corte é 1,67 [Belfiore and Fávero, 2013].

Preço Sombra - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- *[continuação...]*
  - Caso reduzissemos uma hora-homem, qual seria o impacto no setor de cortes?
    - Usando a fórmula negativa, o preço sombra também pode ser calculado como:

$$\boxed{P_1 = \frac{1000 - 998,33}{240 - 239} = 1,67}$$

    - Podemos concluir que cada hora-homem retirada do setor de corte promove um decrescimento na função objetivo de 1,67;
    - De forma similar, o custo de oportunidade por cada hora-homem perdida no setor de corte é 1,67 [Belfiore and Fávero, 2013].

Preço Sombra - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

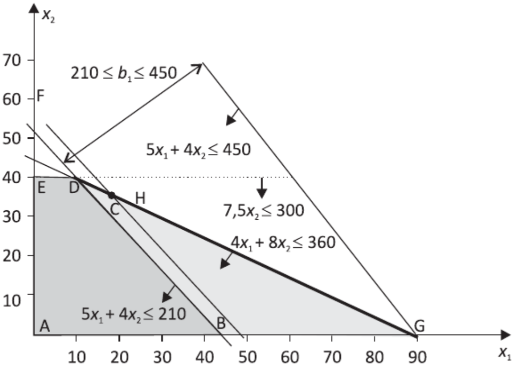
- *[continuação...]*
  - Qual o crescimento e decrescimento máximos permitidos para um valor b_1 (setor de corte)?
    - O valor de b_1 deve variar no intervalo $b_1^0 - q \leq b_1 \leq b_1^0 + p$
    - A partir do cálculos dos preços sombras, temos que o intervalo possível é $1,67 \times q \leq b_1 \leq 1,67 \times p$;
    - Percebemos pelo gráfico anterior que a nova reta da solução ótima é paralela à reta da solução original;
    - Com isso, o objetivo seria deslocar a reta o máximo possível, paralelamente à reta da solução original, produzindo uma nova solução ótima.

Preço Sombra - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- *[continuação...]*
  - Qual o crescimento e decrescimento máximos permitidos para um valor b_1 (setor de corte)?
    - O valor de b_1 deve variar no intervalo $b_1^0 - q \leq b_1 \leq b_1^0 + p$
    - A partir do cálculos dos preços sombras, temos que o intervalo possível é $1,67 \times q \leq b_1 \leq 1,67 \times p$;
    - Percebemos pelo gráfico anterior que a nova reta da solução ótima é paralela à reta da solução original;
    - Com isso, o objetivo seria deslocar a reta o máximo possível, paralelamente à reta da solução original, produzindo uma nova solução ótima.

Preço Sombra - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- *[continuação...]*
  - Temos, para o cenário indicado, a seguinte representação gráfica:



Fonte: [Belfiore and Fávero, 2013]

Preço Sombra - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- *[continuação...]*
  - Qual o crescimento e decrescimento máximos permitido para um valor b_1 (setor de corte)?
    - Pela imagem, podemos definir os pontos D e G como limites da direção de deslocamento;
    - Os pontos D e G correspondem, graficamente, aos pontos $(10, 40)$ e $(90, 0)$;
    - Substituindo os valores na equação da restrição $(5x_1 + 4x_2)$, temos que $D = 210$ e $G = 450$;
    - Logo, enquanto tivermos $210 \leq b_1 \leq 450$, a solução (x_1, x_2) permanecerá constante;
    - Considerando o valor original $(b_1^0 = 240)$, temos o seguinte intervalo: $b_1^0 - 30 \leq b_1 \leq b_1^0 + 210$;
    - O lucro de cada cenário pode ser calculado para o intervalo.

Preço Sombra - Ex. [Belfiore and Fávero, 2013]

- *[continuação...]*
  - Qual o crescimento e decrescimento máximos permitido para um valor b_1 (setor de corte)?
    - Pela imagem, podemos definir os pontos D e G como limites da direção de deslocamento;
    - Os pontos D e G correspondem, graficamente, aos pontos $(10, 40)$ e $(90, 0)$;
    - Substituindo os valores na equação da restrição $(5x_1 + 4x_2)$, temos que $D = 210$ e $G = 450$;
    - Logo, enquanto tivermos $210 \leq b_1 \leq 450$, a solução (x_1, x_2) permanecerá constante;
    - Considerando o valor original ($b_1^0 = 240$), temos o seguinte intervalo: $b_1^0 - 30 \leq b_1 \leq b_1^0 + 210$;
    - O lucro de cada cenário pode ser calculado para o intervalo.

Dualidade

Dualidade

- "Dualidade é um conceito amplo que engloba a possibilidade do tratamento de duas naturezas distintas de uma mesma entidade". [Goldbarg and Luna, 2005]
  - Correspondem a processos que podem ser representados por modelos de estruturas distintas e comportamentos iguais
    - A interpretação, entretanto, é completamente diferente;
  - Ex.: Para aumentar o lucro de uma empresa, podemos atuar tanto na maximização de receitas quanto na minimização de custos.

Dualidade

- Problemas duais correspondem a um par de modelos de PL, compostos por um problema primal e um problema dual, que respeitam as seguinte condições: [Goldbarg and Luna, 2005]
  - Possuem funções objetivo simétricas:
    - Se o problema primal é de maximização então, o problema dual é de minimização (e vice-versa);
  - Possuem simetria nas restrições:
    - Restrições de $\leq$ no problema primal correspondem a restrições de $\geq$ no dual (e vice-versa);
  - Termos independentes no problema primal surgem como os coeficientes da função objetivo no dual (e vice-versa);
  - A matriz de restrição do problema primal é a transposta da matriz de restrição do dual (e vice-versa).

Dualidade

- Apesar das características distintas, os problemas primal e dual levam à mesma solução ótima [Belfiore and Fávero, 2013];
- A teoria da dualidade pode ser aplicada em casos em que a solução do problema primal não é simples ou trivial;
  - A solução do problema dual pode ser mais simples;
  - Além disso, a teoria da dualidade possibilita uma interpretação econômica adicional [Belfiore and Fávero, 2013].

Conversão Primal $\leftrightarrow$ Dual

- A conversão de um problema primal em um problema dual pode ser representada na tabela abaixo.

	Primal	***Dual***
Forma Canônica	Min $z = cx$ sujeito a: $Ax \geq b$ $x \geq 0$	Max $w = ub$ sujeito a: $uA \leq c$ $u \geq 0$
Forma Padrão	Min $z = cx$ sujeito a: $Ax = b$ $x \geq 0$	Max $w = ub$ sujeito a: $uA \leq c$ $u \in R$

Fonte: [Goldbarg and Luna, 2005]

Conversão Primal $\leftrightarrow$ Dual - Generalização

- De forma geral, a conversão de um problema primal em um problema dual é resumida na tabela abaixo.

Primal	Dual
objetivo (maximização)	objetivo (minimização)
objetivo (minimização)	objetivo (maximização)
restrição $\geq$	variável ≤ 0
restrição $\leq$	variável ≥ 0
restrição $=$	variável irrestrita
variável ≥ 0	restrição $\geq$
variável ≤ 0	restrição $\leq$
variável irrestrita	restrição $=$

Fonte: Adaptado de [Oliveira and Carravilla, 2013] [Taha, 2007]

Conversão Primal $\leftrightarrow$ Dual - Exemplo

- Exemplo da conversão de um problema primal em um problema dual:

Primal

$$
\begin{array}{llrcll}
\max & 5x_1 + 2x_2 & & & & \\
s.t. & & x_1 & \leq & 3 & (1) \\
 & & x_2 & \leq & 4 & (2) \\
 & & x_1 + 2x_2 & \leq & 9 & (3) \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0 & (4)
\end{array}
$$

Dual

$$
\begin{array}{llrcll}
\min & 3y_1 + 4y_2 + 9y_3 & & & & \\
s.t. & & y_1 + y_3 & \geq & 5 & (1) \\
 & & y_2 + 2y_3 & \geq & 2 & (2) \\
 & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 & (3)
\end{array}
$$

Fonte: [Diego Mello da Silva, 2016]

Teoremas

- **Dualidade Fraca**
  - Se x é uma solução factível para o problema primal, e u é a solução factível para o problema dual, então:

$$\boxed{u'b \leq c'x}$$

  - Corolário:
    - Se x e u são, respectivamente, soluções factíveis para o primal e dual, e $u'b \leq c'x$, então x e u são soluções ótimas para o primal e dual, respectivamente [Goldbarg and Luna, 2005].

- **Dualidade Forte**
  - Se um PPL tem uma solução ótima, então seu dual também possui solução e os respectivos custos ótimos são iguais [Diego Mello da Silva, 2016].

Teoremas

- **Teorema da Existência**
  - Para um par de problemas duais, uma e somente uma das alternativas é verdadeira [Goldbarg and Luna, 2005]:
    - Nenhum dos problemas tem solução;
    - Um deles não tem solução viável e o outro tem solução ótima ilimitada.
    - Ambos possuem solução ótima finita

- O Teorema da Existência pode ser resumido na tabela abaixo:

		Dual	
		Viável	*Inviável* ($U = \varnothing$)
Primal	*Viável*	Min cx = Max ub	$cx = -\infty$
	Inviável ($X = \varnothing$)	$ub = +\infty$	*possível*

Fonte: [Goldbarg and Luna, 2005]

Teoremas

- **Teorema das Folgas Complementares**
  - Dado um par de programas duais, uma condição necessária e suficiente para que as soluções x e u sejam ótimas é que se verifiquem as seguintes relações de complementaridade de folga:
    1. $u(Ax - b) = 0$
    2. $(c - uA)x = 0$

Interpretação Econômica

Interpretação Econômica

- A programação matemática pode ser utilizada para a tomada de decisão nos sistemas de produção;
  - Ela é capaz de prover uma análise econômica racional;
- Em problemas econômicos, podemos representar o problema primal como um modelo de alocação de recursos;
  - O objetivo, comumente, é maximizar um recurso ou uma receita [Diego Mello da Silva, 2016].

Interpretação Econômica

- Como contexto teórico econômico, o método Simplex auxilia na definição do equilíbrio entre o valor agregado de um processo/produto em relação aos insumos que o constituem [Goldbarg and Luna, 2005].
  - Teoria do custo de oportunidade: corresponde à oportunidade renunciada ao escolher um determinado bem, produto e/ou insumo;
  - Ex.: Ao comprar um carro à vista, você renuncia ao possível lucro gerado pelo aplicação financeira resultante do dinheiro usado para compra do carro.

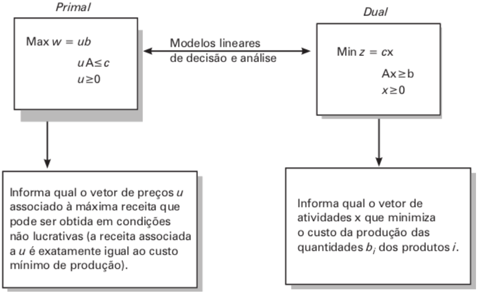
Interpretação Econômica

- Para um sistema de produção modelado em um PPL de maximização, objetivando o lucro e restrito a fatores de produção, o problema dual deve satisfazer à teoria do valor marginal: [Goldbarg and Luna, 2005]
    - O valor da unidade marginal de um fator de produção é igual ao máximo valor da produção que poderia ser obtida usando essa unidade do fator." [Carl Menger, 1871][3]

[3] [Carl Menger, 1871] apud [Goldbarg and Luna, 2005]

Interpretação Econômica

- Na interpretação utilizada por [Goldbarg and Luna, 2005], maximização de lucros na face primal, é substituído pela minimização de custos, na face dual.



Fonte: Adaptado de [Goldbarg and Luna, 2005]

Interpretação Econômica

- Considere a relação entre o problema primal e dual:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{n} u_i b_i = w$$

- A igualdade z = w é valida quando ambas as soluções primal e dual são ótimas;
- Podemos interpretar a igualdade z = w da seguinte maneira:

$$\boxed{\text{receita} = \sum_{i} (\text{unidades recursos } i) \times (\$ \text{ por unidades do recurso } i)}$$

Interpretação Econômica

INSTITUTO FEDERAL Minas Gerais

- Variável dual u_i representa o valor equivalente por unidade do recurso i;
    - Ela corresponde ao preço sombra (*shadow price*) do recurso i;
- O preço sombra indica qual a modificação na função objetivo se aumentarmos 1 unidade do i-ésimo recurso;
    - Também pode ser interpretado como o custo marginal por unidade aumentada no i-ésimo recurso b_i;
    - Na otimalidade ele é interpretado como o "preço justo" por unidade do i-ésimo recurso.

Interpretação Econômica

- De forma semelhante, podemos representar a desigualdade $z \leq w$ como:

$$\boxed{\text{receita} \leq \text{valor equivalente de recursos}}$$

- Quando a receita de todas as atividades for menor do que o valor equivalente dos recursos, as soluções do primal e dual não são ótimas.
- Otimalidade somente é atingida quando os recursos são explorados completamente
  - Quando a entrada (valor equivalente dos recursos) for igual a saída (receita) [Diego Mello da Silva, 2016].

Referências I

Belfiore, P. and Fávero, L. P. (2013).
Pesquisa operacional para cursos de engenharia.
Elsevier, 1 edition.

Diego Mello da Silva (2016).
Pesquisa Operacional - Slides de Aula.
IFMG - Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Formiga.

Goldbarg, M. C. and Luna, H. P. L. (2005).
Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos.
Elsevier, 2 edition.

Oliveira, J. F. and Carravilla, M. A. (2013).
Duality in linear programming - companion slides of applied mathematical programming by bradley, hax, and magnanti.
[Online]; acessado em 11 de Outubro de 2020. Disponível em: https://web.fe.up.pt/~mac/ensino/docs/OT20122013/Chapter%204%20-%20Duality%20in%20Linear%20Programming.pdf.

Taha, H. A. (2007).
Pesquisa Operacional.
Editora Prentice-Hall, 8 edition.