PRÁCTICA 1

ELEMENTOS DE PROBABILIDAD.

Ejercicio 1. Considere un experimento que consta de cuatro caballos, numerados del 1 al 4, que realizan una carrera, y suponga que el espacio muestral está dado por

$$S = \{\text{todas las permutaciones de } (1,2,3,4)\}.$$

Sea A el evento en el que el caballo número 1 esté entre los tres primeros finalistas, sea B el evento que el caballo número 2 llegue en segundo lugar, y sea C el evento que el caballo número 3 llegue en tercer lugar.

a) Describa el evento $A \cup B$. ¿Cuántos resultados están contenidos en este evento?

b) ¿Cuántos resultados están contenidos en el evento $A \cap B$?

c) ¿Cuántos resultados están contenidos en el evento $A \cap B \cap C$?

d) ¿Cuántos resultados están contenidos en el evento $A \cup (B \cap C)$?

Ejercicio 2. Cualesquiera sean los eventos A y B, muestre que

a) $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$, y que $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ (Trazar diagramas de Venn).

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Ejercicio 3. Se extraen dos bolas de una caja que contiene 9 bolas azules y 7 bolas amarillas, y el experimento es sin reposición. Si las bolas tienen todas la misma probabilidad de ser extraídas,

a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas azules?

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar la primera azul y la segunda amarilla?

Ejercicio 4. Un bolillero, rotulado A, contiene seis (6) bolas rojas y cuatro (4) verdes, y un segundo bolillero, rotulado B, contiene siete (7) bolas rojas y tres (3) verdes. Se realiza el siguiente experimento: Se extrae al azar una bola de A y se coloca en el bolillero B. Luego, se extrae al azar una bola de B y se la coloca en el bolillero A.

a) ¿Cuáles son la probabilidades, $P(R_A)$ y $P(V_A)$ de extraer, respectivamente, una bola roja o una verde de A, en la primera parte del experimento?

b) Calcular las probabilidades condicionales, $P(R_B|R_A)$, de obtener una bola roja de B dado que se extrajo una roja de A y $P(R_B|V_A)$, de obtener una bola roja de B dado que se extrajo una verde de A.

   Ayuda: Analizar el contenido del bolillero B luego de agregarle la bola proveniente de A.

c) Calcular la probabilidad conjunta de obtener una bola roja de A y también una roja de B.

   Ayuda: Recordar la relación entre probabilidad conjunta y condicional.

d) ¿Cuál es la probabilidad, $P(R_B)$, de extraer una bola roja de B?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que al cabo del experimento el bolillero A recupere exactamente la composición de bolas que tenía declarada al comienzo?

Ejercicio 5. La variable aleatoria X toma valores en el conjunto $\{1,2,3,4\}$ con la siguiente probabilidad:

$$P_i = P(X = i) = c\,i \quad \text{para } i = 1,2,3,4$$

a) Determinar el valor de c.

b) Calcular $P(2 \leq X \leq 3)$.

c) Calcular $E[X]$.

Ejercicio 6. Mostrar que para toda variable aleatoria X se cumple: $\mathrm{Var}[aX+b] = a^2\,\mathrm{Var}[X]$.

Ejercicio 7. Calcular la relación de recurrencia $P_{n+1} = f(P_n)$ para la distribución de probabilidad de Poisson. Discutir su uso para un cálculo numérico eficiente de la distribución de Poisson.

★ **Ejercicio 8.** Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución de Poisson con parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente. Demostrar que la variable $Z = X+Y$ es de Poisson con parámetro $\lambda_1+\lambda_2$.

Ejercicio 9. Sea una urna con $N+M$ bolas, de las cuales N tienen color blanco y M color negro (las bolas son distinguibles entre sí). Supongamos que cualquier subconjunto de n elementos distintos tiene la misma chance de ser elegido y sea X la variable aleatoria que cuenta el número de bolas de color blanco en una muestra de n elementos.

Mostrar que la distribución de X es hipergeométrica de parámetros n,M,N.

Ejercicio 10. Probar que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Entonces

$$E[X] = \lambda \quad y \quad Var[X] = \lambda$$

Ejercicio 11. Sean X e Y variables aleatorias *independientes* distribuídas *exponencialmente*

$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\ ,\ \ (x > 0) \qquad\qquad f_Y(y) = \mu \exp(-\mu y)\ ,\ \ (y > 0).$$

a) Calcular $f_{X|Y}(x|y)$.

b) Calcular $P(X < Y)$

★ **Ejercicio 12.** Sean X e Y variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas de forma exponencial. Calcular la densidad de probabilidad condicional de X dado que $X+Y = t$.

Ejercicio 13. La vida útil de cierto refrigerador está distribuida de manera aproximadamente normal con media 4.8 años y desvío 1.4 años.

a) Si el aparato tiene garantía por dos años. ¿Cuál es la probabilidad de que un refrigerador del tipo especificado elegido al azar, deba reemplazarse dentro del periodo de garantía?.

b) Si el fabricante está dispuesto a reponer sólo el 0.5% de los refrigeradores. ¿Cuál es el periodo de garantía que debe ofrecer?.

Ejercicio 14. Encontrar una aproximación a la probabilidad de que el número de unos obtenidos al arrojar 12000 veces un dado esté entre 1900 y 2150.

Ejercicio 15. Un jugador juega quiniela un día. Apuesta una cantidad c a un número entre 0,1,...,99. Se le paga \$70 si sale el número elegido por el jugador y nada en caso contrario. Sea G la v.a. que da la ganancia del juego.

a) Si el valor de la apuesta es de \$1, ¿Cuál es la ganancia esperada del jugador?.

b) El jugador juega todos los días durante dos meses (o sea 60 dias en total). ¿Cuál es la probabilidad que pierda más de 15 pesos en esos dos meses?.

c) ¿Cuánto deberá valer la apuesta c para que el valor esperado de la ganancia sea 0?.