



# Lógica Proposicional 1

---

rafael ramirez

[rafael@iua.upf.es](mailto:rafael@iua.upf.es)

Ocata 320



# Lógica proposicional

---

- Un conjunto de variables  $p, q, r, \dots$  que representan afirmaciones tales como

- Esta caja es roja
- La luna es de queso
- La pelota es de plomo
- La pelota se undira

Cada una toma uno de los valores  $T$  (verdadero) o  $F$  (falso)

- Estas variables pueden “conectarse” usando conectivos lógicos  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

- Ejercicio: p1-#1



# Negación

---

$\phi$	$\neg\phi$
T	F
F	T

Si  $p$  representa "pau esta en casa",  
 $\neg p$  representa "pau no esta en casa"



# Conjunción

$\phi$	$\psi$	$\phi \wedge \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Si  $p$  representa “el objeto es rojo” y  $q$  representa “el objeto es redondo”, entonces  $p \wedge q$  represents “el objeto es rojo y el objeto es redondo”.

$\wedge$  es **conmutativa**: para cualquier valor de  $p$  y  $q$ ,  $p \wedge q$  tiene el mismo valor que  $q \wedge p$

$\wedge$  y **asociativa**: para cualquier valor de  $p$ ,  $q$  y  $r$ ,  $p \wedge (q \wedge r)$  tiene el mismo valor que  $(q \wedge p) \wedge r$



# Disjunción

$\phi$	$\psi$	$\phi \vee \psi$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Si  $p$  representa "el objeto es rojo" y  $q$  representa "el objeto es redondo", entonces  $p \vee q$  represents "el objeto es rojo o el objeto es redondo (o ambas cosas)".

$\vee$  es conmutativa? y asociativa?

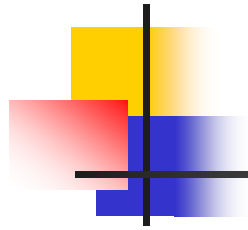


# Implicación

$\phi$	$\psi$	$\phi \rightarrow \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Si  $p$  representa “el coche no esta en casa” y  
 $q$  representa “Pau esta fuera (de casa)”,  
entonces  $p \rightarrow q$  represents “si el coche no esta en casa,  
Pau esta fuera”.

Si el coche esta en casa, no podemos concluir nada: Pau puede  
o no estar en casa – en todo caso la afirmación  $p \rightarrow q$  es T.



# Equivalencia

$p$  es equivalente a  $q$  si y solo si  $p$  y  $q$  tienen el mismo valor de verdad

Escribimos  $p \leftrightarrow q$

$p \leftrightarrow q$  es lo mismo que  $(p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p)$

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Ejercicio: p1-#2



# Prioridades

---

Para evitar parentesis exesivos, por convencion los conectivos se aplican Siguiendo el siguiente orden:

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

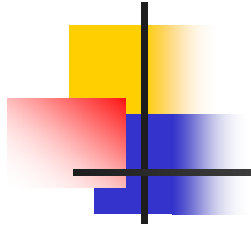
Por ejemplo la fórmula,

$p \wedge q \rightarrow r \wedge s$

Es interpretada como

$(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$





# Tablas de verdad

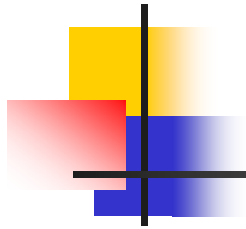
La **tabla de verdad** de una formula puede determinarse tomando todos las posibles combinaciones de valores de verdad para las variables en la formula, y evaluando el efecto de cada conectivo.

Por ejemplo:

$$((\neg p) \vee q)$$

Tendria la tabla de verdad

p	q	$((\neg p) \vee q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

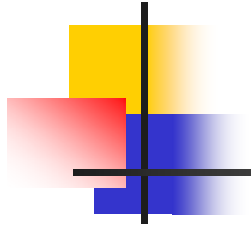


# Tablas de verdad

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$q \vee \neg p$	$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \vee \neg p)$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

or

$p$	$q$	$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \vee \neg p)$									
		1	3	2	1	4	1	3	2	1	
T	T	T	F	F	T	T	T	T	F	T	
T	F	T	T	T	F	F	F	F	F	T	
F	T	F	T	F	T	T	T	T	T	F	
F	F	F	T	T	F	T	F	T	T	F	



# Tipos de formulas

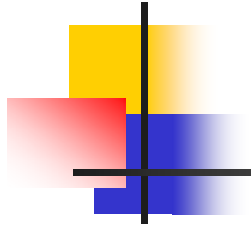
---

**Tautología:** formula que toma siempre el valor de verdad T  
(tambien se les llama formula **válida**)

**Contradicción:** formula que toma siempre el valor de verdad F

**Formula mixta:** formula que puede tomar T o F.

Ejercicio: p1-#3



# Tablas de verdad identicas

Dos formulas A y B son **equivalentes** sus tablas de verdad son **idénticas**.

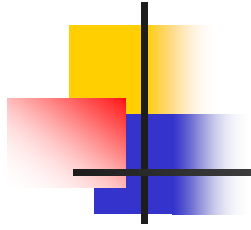
Ejemplo

$$p =_T \neg(\neg p)$$

Donde  $A = p$ , y  $B = \neg(\neg p)$

Ejercicio: p1-#4

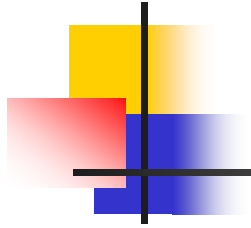
Ejercicio: p1-#5



# Interpretaciones y modelos

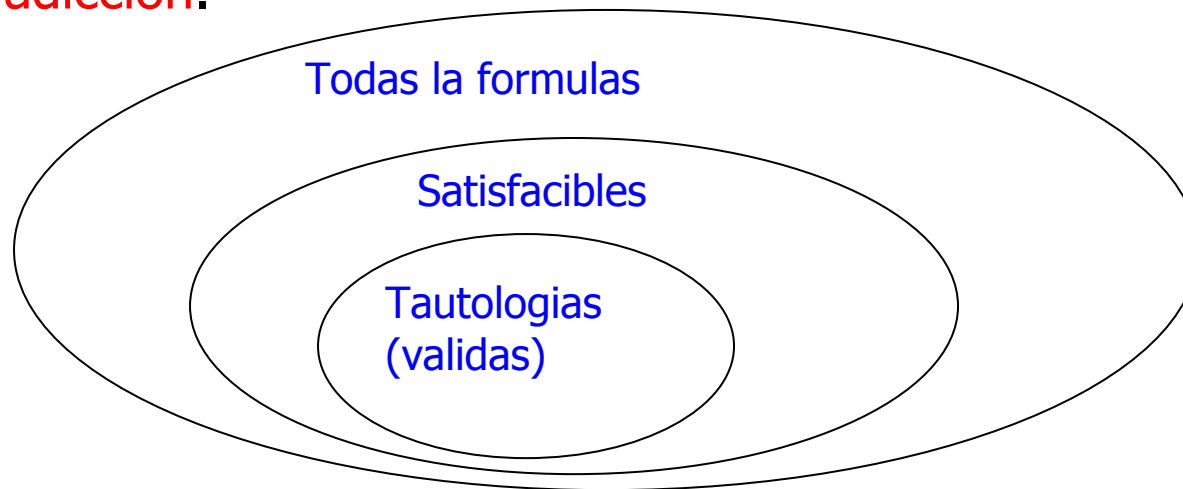
---

- Una **interpretación** de una fórmula  $P$  es una asignación de valores verdad a todas las variables de  $P$ .
- Entonces, una interpretacion es una **linea en la tabla de verdad**.
- Si  $I$  es una interpretacion, decimos que  $P$  es T o F con respecto a  $I$
- Un **modelo** de una formula  $P$  es una interpretación de  $P$  si  $P$  es T con respecto a esa interpretacion.

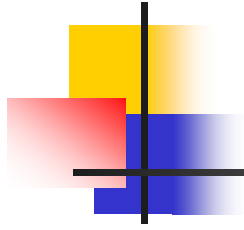


# Satisfacibilidad

- Una fórmula proposicional es **satisfacible** si toma el valor T para alguna interpretación
- Una fórmula proposicional es **insatisfacible** si no es satisfacible, e.d. si su valor es F para todas las interpretaciones, e.d. si es una **contradicción**.



Ejercicio: clasifica las siguientes formulas (entre validas, satisfacibles, insatisfacibles)  
 $p$ ,  $(p \wedge \neg q)$ ,  $(p \wedge \neg p)$ ,  $(p \vee \neg p)$ ,  $(p \rightarrow p)$ ,  $\neg(p \rightarrow p)$ ,  $((p \rightarrow q) \rightarrow p)$ ,  $(p \rightarrow \neg p)$

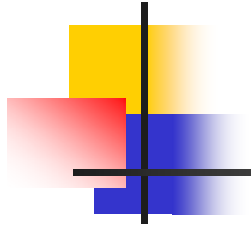


# Satisfacibilidad

---

- Una formula  $A$  es tautología (valida) si y solo si  $\neg A$  es insatisfacible
- $A$  es satisfacible si y solo si  $\neg A$  es falsificable.\*

\*  $A$  es **falsificable** si existe una interpretacion que hace que  $A$  valga F



# La validez de un argumento

---

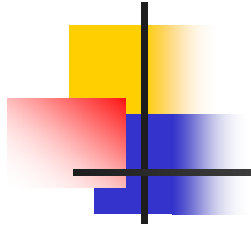
Si riego mi jardín, entonces las flores crecerán; (premisa)

Si las flores no crecen, entonces las malas hierbas lo harán; (premisa)

Sabemos que las malas hierbas crecerán en mi jardín; (premisa)

Por lo tanto, yo riego mi jardín. (conclusión)





# La validez de un argumento

Si riego mi jardin, entonces las flores creceran; (premisa)

Si las flores no crecen, entonces las malas yerbas lo haran; (premisa)

Sabemos que las malas yerbas crecieran en mi jardin; (premisa)

Por lo tanto, yo riego mi jardin. (conclusion)

p: riego mi jardin

q: las flores crecieran

r: las malas yerbas crecieran

$(p \rightarrow q), (\neg q \rightarrow r), r$  por lo tanto  $p$

Que se escribe:  $(p \rightarrow q), (\neg q \rightarrow r), r \models p$

# La validez de un argumento

Si riego mi jardin, entonces las flores creceran; (premisa)

Si las flores no crecen, entonces las malas yerbas lo haran; (premisa)

Sabemos que las malas yerbas creceran en mi jardin; (premisa)

Por lo tanto, yo riego mi jardin. (conclusion)

p: riego mi jardin

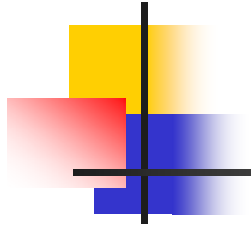
q: las flores creceran

r: las malas yerbas creceran

$(p \rightarrow q), (\neg q \rightarrow r), r$  por lo tanto  $p$

Variables			Hypotheses			Consequent	Hypotheses	Consequent
p	q	r	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow r$	r	p	all true?	true?
T	T	T	T	T	T	T	yes	yes, OK
T	T	F	T	T	F	T		
T	F	T	F	T	T	T		
T	F	F	F	F	F	T		
F	T	T	T	T	T	F	yes	no, fail
F	T	F	T	T	F	F		
F	F	T	T	T	T	F	yes	no, fail
F	F	F	T	F	F	F		

In this case there are two lines of the table on which the hypotheses all take the value T, but the consequent takes the value F. The above argument form is thus invalid.

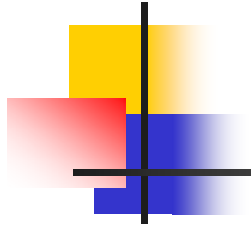


# La validez de un argumento

Si no hay control de nacimientos, entonces la poblacion crece ilimitadamente.  
Pero si la poblacion crece ilimitadamente, aumentara el indice de pobreza.  
Por consiguiente, si no hay control de nacimientos, aumentara el indice de pobreza.

Ejercicio: verificar si el argumento es valido.

Si los jovenes socialistas españoles apoyan a Almunia, entonces renuncian a su programa de reivindicaciones. Y si combaten a Almunia, entonces favorecen a Aznar. Pero una de dos: o apoyan a Almunia o lo combaten. Por consiguiente, habran de renunciar a su programa de reivindicaciones o favorecer a Aznar



# Tableaux Semanticos

- El **tableau semantico** es un algoritmo para probar la satisfacibilidad de formulas
- Una **literal** es una variable (p.e.  $p, q, \dots$ ) o la negacion de una variable
- $\{p, \neg p\}$  es una pareja de **literales complementarias**
- $\{A, \neg A\}$  es una pareja de **formulas complementarias**. A es el **complemento** de  $\neg A$  y  $\neg A$  es el complemento de A.

Considera la formula  $A = p \wedge (\neg q \vee \neg p)$

- A es T si y solo si ambos  $p$  es T y  $(\neg q \vee \neg p)$  es T
- entonces A es T si y solo si
  1. P es T y  $\neg q$  es T, o
  2. P es T y  $\neg p$  es T



# Tableaux Semanticos

$$A = p \wedge (\neg q \vee \neg p)$$

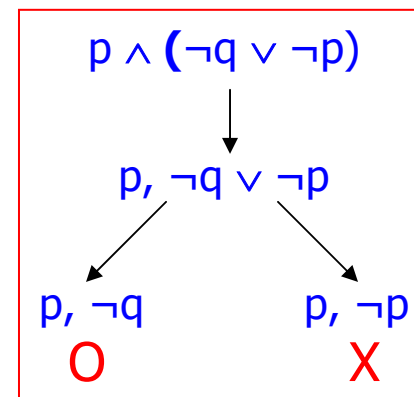
- A es T si y solo si ambos p es T y  $(\neg q \vee \neg p)$  es T
- entonces A es T si y solo si
  1. p es T y  $\neg q$  es T, o
  2. p es T y  $\neg p$  es T

- A es satisfacible sii existe una interpretacion tal que 1. pasa, o existe una interpretacion tal que 2. pasa.
- **Es A satisfacible?** Se reduce a una pregunta sobre la satisfacibilidad de un conjunto de literales
- Un conjunto de literales es satisfacible sii no contiene una pareja de literales complementarias
- En el ejemplo, el primer conjunto  $\{p, \neg q\}$  de literales no contiene una pareja de literales complementarias por lo que el conjunto es satisfacible y por lo tanto A es satisfacible.
- Es mas facil de razonar si representamos la busqueda **graficamente**.

# Tableaux Semanticos

$$A = p \wedge (\neg q \vee \neg p)$$

- A es T si y solo si ambos p es T y  $(\neg q \vee \neg p)$  es T
- entonces A es T si y solo si
  1. p es T y  $\neg q$  es T, o
  2. p es T y  $\neg p$  es T



- Arbol: la raiz es la formula original
- Las hojas que contengan una pareja de literales compl. se marcan con X mientras que una hoja satisfacible se marca con O
- El arbol resultante se llama **tableau semantico**

Ejercicio: hacer el mismo analisis para la formula  $B = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

# Tableaux Semantics

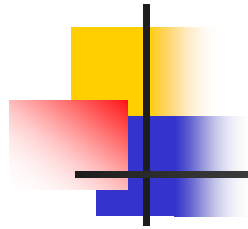
- Formulas  $\alpha$  son **conjunciones** y son satisfacibles sii ambas formulas  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son satisfechas
- Formulas  $\beta$  son **disyunciones** y son satisfacibles si al menos una de las subformulas  $\beta_1$  o  $\beta_2$  es satisfacha.

$\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
$\neg\neg A$	$A$	
$A_1 \wedge A_2$	$A_1$	$A_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \Rightarrow A_2)$	$A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \Leftarrow A_2)$	$\neg A_1$	$A_2$
$A_1 \equiv A_2$	$A_1 \Rightarrow A_2$	$A_2 \Rightarrow A_1$

Semantic tableaux rules for  $\alpha$ -formulas

$\beta$	$\beta_1$	$\beta_2$
$B_1 \vee B_2$	$B_1$	$B_2$
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \Rightarrow B_2$	$\neg B_1$	$B_2$
$B_1 \Leftarrow B_2$	$B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \equiv B_2)$	$\neg(B_1 \Rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \Rightarrow B_1)$

Semantic tableaux rules for  $\beta$ -formulas



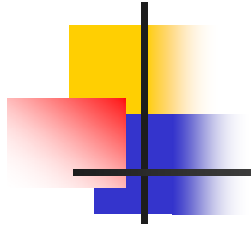
# Manipulacion de formulas

## Identidades

1	$p \vee p =_T p$	
2	$p \wedge p =_T p$	
3	$(p \vee q) \vee r =_T p \vee (q \vee r)$	Associativity of $\vee$
4	$(p \wedge q) \wedge r =_T p \wedge (q \wedge r)$	Associativity of $\wedge$
5	$p \vee q =_T q \vee p$	Commutativity of $\vee$
6	$p \wedge q =_T q \wedge p$	Commutativity of $\wedge$
7	$p \vee (q \wedge r) =_T (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributivity of $\vee$ over $\wedge$
8	$p \wedge (q \vee r) =_T (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributivity of $\wedge$ over $\vee$
9	$p \vee T =_T T$	
10	$p \wedge F =_T F$	
11	$p \vee F =_T p$	
12	$p \wedge T =_T p$	
13	$p \vee \neg p =_T T$	
14	$p \wedge \neg p =_T F$	
15	$\neg(p \vee q) =_T \neg p \wedge \neg q$	De Morgan's law
16	$\neg(p \wedge q) =_T \neg p \vee \neg q$	De Morgan's law
17	$p \Rightarrow q =_T \neg p \vee q$	
18	$p \Leftrightarrow q =_T (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	
19	$p \Rightarrow q =_T \neg q \Rightarrow \neg p$	Contrapositive
20	$\neg\neg p =_T p$	

Each of 1-20 above can be verified using truth-tables.





# Manipulacion de formulas

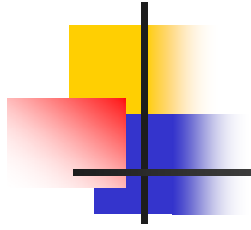
**Ejemplo:** sin usar tablas de verdad prueba la siguiente formula.

$$\neg p \wedge ((r \wedge s) \vee (r \wedge \neg s)) \wedge (p \vee q) =_T \neg p \wedge q \wedge r.$$

**Solution**

$$\begin{aligned} & \neg p \wedge ((r \wedge s) \vee (r \wedge \neg s)) \wedge (p \vee q) \\ &= _T ((r \wedge s) \vee (r \wedge \neg s)) \wedge \neg p \wedge (p \vee q) \quad (\text{by rule 6}) \\ &= _T (r \wedge (s \vee \neg s)) \wedge \neg p \wedge (p \vee q) \quad (\text{by rule 8}) \\ &= _T (r \wedge T) \wedge \neg p \wedge (p \vee q) \quad (\text{by rule 13}) \\ &= _T r \wedge \neg p \wedge (p \vee q) \quad (\text{by rule 12}) \\ &= _T r \wedge ((\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge q)) \quad (\text{by rule 8}) \\ &= _T r \wedge (F \vee (\neg p \wedge q)) \quad (\text{by rule 14}) \\ &= _T r \wedge \neg p \wedge q \quad (\text{by rule 11}) \\ &= _T \neg p \wedge q \wedge r \quad (\text{by rule 6}). \end{aligned}$$

**Ejercicio:** sin usar tablas de verdad prueba  $p \wedge (p \vee q) =_T p$  [hint:  $(p \vee F) \wedge (p \vee q)$ ]



# Conectivos suficientes

Se dice que un conjunto de conectivos es **completo** si puede ser usado para definir todas las formulas posibles

Por ejemplo  $\{\neg, \vee\}$  es un conjunto completo

e.d. podemos definir los otros conectivos a partir de estos dos:

$$p \rightarrow q =_{\text{def}} \neg p \vee q$$

$$p \wedge q =_{\text{def}} \neg(\neg p \vee \neg q)$$

# Normal Forms

$p$	$q$	$r$	$(\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg r)))$	conjunct
T	T	T	T	$p \wedge q \wedge r$
T	T	F	F	
T	F	T	F	
T	F	F	T	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$
F	T	T	T	$\neg p \wedge q \wedge r$
F	T	F	T	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$
F	F	T	T	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$
F	F	F	T	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

## Forma normal *disyuntiva*

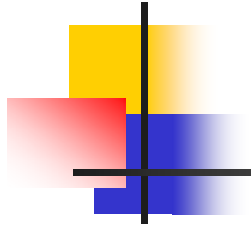
$$\begin{aligned}
 &(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
 &\vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \\
 &\vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r).
 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee \neg p.$$

## Forma normal *conjuntiva*

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r).$$



# La negación de una fórmula

Dada una fórmula  $P$ , la **negación de  $P$**  es simplemente  $\neg P$

*Si la criatura tiene orejas largas y dientes grandes, entonces es un conejo*

Solución:

- $p = \text{"la criatura tiene orejas largas"}$
- $q = \text{"la criatura tiene dientes grandes"}$
- $r = \text{"la criatura es un conejo"}$

Ejercicio: Traducir la afirmación de conejo a lógica proposicional,  
negar la formula y traducirla otra vez a lenguaje natural.