Parallele Untermannigfaltigkeiten in pseudo-euklidischen Räumen

Projektarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Bachelor für Mathematik mit Informatik

an der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

vorgelegt von

Falk Meyer

geboren am 20.05.1988 in Stralsund

unter der Betreuung von

Prof. Dr. Ines Kath

Greifswald, den 13.10.2010

1. Gutachter: Prof. Dr. Ines Kath

2. Gutachter: Prof. Dr. Jürgen Eichhorn

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In vielen mathematischen und physikalischen Fachbereichen, beispielsweise in der allgemeinen Relativitätstheorie, sind *pseudo-euklidische* Räume zentraler Untersuchungsgegenstand. Durch die mögliche Indefinitheit des pseudo-euklidischen Skalarprodukts kann nicht mehr auf die im euklidischen Raum üblichen Begriffe der Norm, der Länge und des Winkels zurückgegriffen werden. Daher stellt sich die Frage welche Theorien, die im euklidischen Raum Gültigkeit besitzen, ebenso im pseudo-euklidischen Fall anwend- bzw. beweisbar sind. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich in diesem Kontext mit folgender Problemstellung:

Im Jahr 1979 veröffentlichte W. Strübing (vgl. [Str79]) einen Artikel, in dem u. a. mithilfe der *Frenet*-Theorie gezeigt wurde, dass Untermannigfaltigkeiten von speziellen riemannschen Mannigfaltigkeiten, deren 2. Fundamentalform parallel ist, symmetrisch sind. Da die *Frenet*-Theorie allerdings mit Normen bzgl. positiv-definiten Skalarprodukten arbeitet, lässt sich diese Herangehensweise nicht allgemein auf pseudo-euklidische Räume ausweiten. In dieser Arbeit wollen wir daher einen Teil der Ergebnisse dieses Artikels auf solche Räume übertragen.

Hierzu beschränken wir uns auf Untermannigfaltigkeiten in pseudo-euklidischen Räumen und verwenden die Theorie der parallelen Vektorfeldern entlang spezieller Kurven, den *Geodäten*, um Untermannigfaltigkeiten mit paralleler 2. Fundamentalform (sogenannte *parallele* Untermannigfaltigkeiten) zu charakterisieren. Wie wir sehen werden ist jede Geodäte auf einem solchen Objekt die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung und durch die Kenntnis der Eindeutigkeit der Lösung einer solchen Differentialgleichung lassen sich dann die zentralen Behauptungen dieser Arbeit beweisen. Hauptziel ist es zu zeigen, dass eine parallele Untermannigfaltigkeit unter gewissen Voraussetzungen symmetrisch ist.

Zur Vorbereitung werden in Kapitel 2 grundlegende Begriffe und Konstruktionen eingeführt, für deren expliziten, theoretischen Unterbau auf Fachbücher wie [Car92] bzw. [O'N83] verwiesen sei.

In Kapitel 3 wird dann der Begriff der Parallelität in den Kontext von Vektorfeldern und Untermannigfaltigkeiten gesetzt, um anschließend die Existenz oben erwähnter Differentialgleichung für eine Geodäte auf einer parallelen Untermannigfaltigkeit zu zeigen.

Für die Beschreibung der Symmetrie findet in Kapitel 4 der Begriff der *Isometrie* Verwendung und als Spezialfall wird dann die Spiegelung am Normalenraum in einem Punkt betrachtet, die obige Geodäten in sich selbst überführt.

Dann lassen sich die Hauptergebnisse dieser Arbeit in Kapitel 5 beweisen, die gerade die grundlegende Fragestellung beantworten, unter welchen Bedingungen eine parallele Untermannigfaltigkeit symmetrisch ist.

In Kapitel 6 folgen dann abschließend ausführliche Beispiele, die die vorherigen Theoreme illustrieren. Dazu werden schrittweise die Ergebnisse aus den anderen Kapiteln veranschaulicht.

Im letzten Kapitel fassen wir dann die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen.

2 Grundlegende Vorbereitungen

In diesem Kapitel befassen wir uns zunächst mit grundlegenden Begriffen und Konstruktionen, die wir im Kontext der Differentialgeometrie für unser Hauptziel benötigen. Hierzu wird u. a. der Begriff des pseudo-euklidischen Raums und der Untermannigfaltigkeit definiert und erläutert, sowie durch kurze Beispiele veranschaulicht. Außerdem werden die Grundlagen für die Behandlung von Kurven (insbesondere Geodäten) und Vektorfeldern gelegt, auf die wir in dieser Arbeit zurückgreifen wollen.

2.1 Der pseudo-euklidische Raum

Definition 2.1.1 Sei das pseudo-euklidische Skalarprodukt wie folgt gegeben:

$$g(X,X) = \langle X,X \rangle_k = -\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2$$

für einen Vektor $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \{0, 1, ..., n\}$ fest, wobei k Index genannt wird. Hier ist g als Analogon zum Standardskalarprodukt aufgefasst, allerdings lässt sich g auf die gleiche Weise als beliebiges Skalarprodukt definieren. k gibt dann die Anzahl der negativ-eingehenden Einträge in g an.
Das Paar $\mathbb{R}^{k,n} := (\mathbb{R}^n, g)$ heißt *pseudo-euklidischer Raum*.

Im Unterschied zum Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt existieren für $k \geq 1$ Vektoren $X \in \mathbb{R}^n$ ungleich dem Nullvektor, für die $\langle X, X\rangle_k = 0$ gilt. Insbesondere ist damit das pseudo-euklidische Skalarprodukt für $k \geq 1$ kein Skalarprodukt im eigentlichen Sinne und induziert folgerichtig auch keine Vektornorm. Allerdings ist es biliniear, symmetrisch und nicht ausgeartet, d.h. es existiert kein $X \in \mathbb{R}^n$ ungleich dem Nullvektor, sodass $\langle X, Y\rangle_k = 0$ für alle $Y \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Beispiel 2.1.1 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ zusammen mit dem Standardskalarprodukt ist ein spezieller pseudo-euklidischer Raum für $k = 0$.

Beispiel 2.1.2 In der speziellen Relativitätstheorie wird als Modell der $\mathbb{R}^{1,4}$ verwendet, hierbei entsprechen die 3 positiv eingehenden Dimensionen den Raumdimensionen und die negativ eingehende Dimension der Zeit. Zusammen erhält man so ein Modell für die Raumzeit.

2.2 Untermannigfaltigkeiten in pseudo-euklidischen Räumen

Definition 2.2.1 (Immersion) Sei $T \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge und φ eine stetig differenzierbare Abbildung mit:

$$\varphi : T \to \mathbb{R}^{k,n}\ ,\ (t_1, t_2, ..., t_m) \mapsto \varphi(t_1, t_2, ..., t_m).$$

Dann heißt φ *Immersion*, falls $Rang(D\varphi) = m$ für alle $t \in T$ gilt.

Falls $Rang(D\varphi) = m$ gefordert ist, folgt damit $n \geq m$, da $D\varphi$ bereits eine $n \times m$-Matrix ist. Außerdem besagt diese Bedingung, dass die Vektoren

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t), \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t), ..., \frac{\partial\varphi}{\partial t_m}(t) \in \mathbb{R}^{k,n}$$

linear unabhängig für alle $t \in T$ sind, d.h. $D\varphi$ ist injektiv.
Mithilfe des Begriffs der Immersion können wir nun den Begriff der Untermannigfaltigkeit formulieren:

Definition 2.2.2 (Untermannigfaltigkeit im pseudo-euklidischen Raum) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$, dann heißt M m-dimensionale *Untermannigfaltigkeit* im $\mathbb{R}^{k,n}$, wenn für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$ und eine Immersion

$$\varphi : T \to \mathbb{R}^{k,n}$$

für eine offene Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^m$ existiert, sodass φ die Menge T homöomorph auf $\varphi(T) = M \cap U$ abbildet.

Die Abbildung

$$\varphi : T \to M \cap U$$

heißt dann eine Parameterdarstellung oder ein lokales Koordinatensystem der Untermannigfaltigkeit M in einer Umgebung von p. Die Zahl $n - m$ nennt man die *Kodimension* der Untermannigfaltigkeit M. Sind die lokalen Koordinatensysteme φ stets von der Klasse C^l, so nennen wir M C^l-Untermannigfaltigkeit.
Zur Veranschaulichung des Begriffs der Untermannigfaltigkeit wenden wir uns einem einfachen Beispiel im euklidischen Fall zu, auf den wir in den abschließenden Beispielen dieser Arbeit nocheinmal zurückgreifen wollen:

Beispiel 2.2.1 (Die Sphäre S^1) Sei $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ die 1-*Sphäre*. S^1 ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, da es das Bild folgender Immersionen für $i = 1, 2$ ist:

$$\varphi_i : T_i \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \varphi_i(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix};$$

wobei die $T_i \subseteq \mathbb{R}$ offen mit beispielsweise $T_1 := (0, 2\pi)$ und $T_2 := (-\pi, \pi)$ sind.

2.3 Kurven, Tangential- und Normalenraum

In diesem Abschnitt führen wir zunächst den Begriff der Kurve ein und definieren mit dessen Hilfe den Tangential- und Normalenraum an einer Untermannigfaltigkeit.

2.3.1 Kurven

Definition 2.3.1 (Kurve) Eine *Kurve* ist eine stetig differenzierbare Abbildung $c : I \to \mathbb{R}^{k,n}$ für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Zusätzlich benötigen wir im weiteren Verlauf eine spezielle Art von Kurven:

Definition 2.3.2 (Reguläre Kurve) Sei $c : I \to \mathbb{R}^{k,n}$ eine stetig differenzierbare Immersion, definiert auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt c *reguläre Kurve*.

Obige Definition besagt also, dass

$$\dot{c}(t) = \frac{dc}{dt} \neq 0 \text{ für alle } t \in I,$$

d.h. die Ableitung von c verschwindet nirgendwo. Physikalisch kann man eine reguläre Kurve als Bewegung eines Massenpunktes in Abhängigkeit von dem Zeitparameter t sehen, dessen Momentangeschwindigkeit nicht 0 wird.

2.3.2 Der Tangentialraum an einer Untermannigfaltigkeit

Definition 2.3.3 (Tangentialbündel des $\mathbb{R}^{k,n}$) Sei $T\mathbb{R}^{k,n} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $T\mathbb{R}^{k,n}$ heißt Tangentialbündel des $\mathbb{R}^{k,n}$. Für alle festen Punkte $p \in \mathbb{R}^{k,n}$ ist

$$T_p\mathbb{R}^{k,n} := \{p\} \times \mathbb{R}^n$$

der Tangentialraum im Punkt p.

Betrachten wir nun den Tangentialraum an einer Untermannigfaltigkeit:

Definition 2.3.4 (Tangentialraum an einer Untermannigfaltigkeit) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ eine beliebige Kurve für $\epsilon > 0$ mit $c(0) = p$. Dann heißt

$$\dot{c}(0) =: V \in \mathbb{R}^n$$

Tangentialvektor an M in p. Die Menge aller Tangentialvektoren an M in p sei mit T_pM bezeichnet und heißt Tangentialraum an M in p, d.h.

$$T_pM := \{p\} \times \operatorname{span}\left(\{V \in \mathbb{R}^n | \exists \text{ Kurve } c \text{ auf } M \text{ mit } c(0) = p \text{ und } \dot{c}(0) = V\}\right).$$

Zur Abkürzung der Schreibweise verstehen wir im Folgenden $V \in T_pM$ als Tangentialvektor V in p. Der Tangentialraum an einer Untermannigfaltigkeit lässt sich mithilfe eines entsprechenden lokalen Koordinatensystems leicht bestimmen, wie folgendes Lemma, für dessen leichten Beweis auf [For08] verwiesen sei, zeigt:

Lemma 2.3.1 *Seien die Bezeichnungen aus Definition* 2.3.4 *gegeben. Dann ist* T_pM *ein* m*-dimensionaler Untervektorraum von* $T_p\mathbb{R}^{k,n}$*.*
Sei zusätzlich $\varphi : T \to M$ *ein lokales Koordinatensystem von* M *in einer offenen Umgebung von* p *mit einer offenen Menge* $T \subseteq \mathbb{R}^m$ *und* $\bar{x} \in T$ *mit* $\varphi(\bar{x}) = p$*. Dann gilt:*

$$T_pM = \{p\} \times \operatorname{span}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\bar{x}), \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(\bar{x}), ..., \frac{\partial\varphi}{\partial x_m}(\bar{x})\right).$$

Nach Definition 2.3.4 hängt der Tangentialraum getreu Lemma 2.3.1 folglich auch nicht von der Wahl des lokalen Koordinatensystems in p ab. D.h. zur Bestimmung des Tangentialraums genügt es, diesen bezüglich eines einzigen lokalen Koordinatensystems zu berechnen. Abschließend betrachten wir noch die Gesamtheit aller Tangentialräume an M und definieren: Die Menge

$$TM := \bigcup_{p\in M} T_pM$$

zusammen mit der sogenannten Projektionsabbildung $\pi : T_pM \to M$, d.h. $\pi(p, X) = p$ für jeden Vektor $X \in T_pM$, heißt *Tangentialbündel* von M.
Schränkt man das pseudo-euklidische Skalarprodukt auf Vektoren aus dem Tangentialraum T_pM für alle $p \in M$ ein, so spricht man von der 1. Fundamentalform I der Untermannigfaltigkeit M. Also ist

$$I(X, Y) := \langle X, Y\rangle_k \text{ für alle } X, Y \in T_pM$$

die 1. Fundamentalform von X und Y (im Punkt p). Eine Untermannigfaltigkeit mit nichtausgearteter 1. Fundamentalform bezeichnen wir im Folgenden als *nichtausgeartete* Untermannigfaltigkeit.

2.3.3 Der Normalraum an einer Untermannigfaltigkeit

Definition 2.3.1 (Normalenraum) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$ eine m-dimensionale, nichtausgeartete Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Der *Normalenraum* an M in p ist der Untervektorraum $(T_pM)^\perp \subseteq T_p\mathbb{R}^{k,n}$ mit

$$T_p\mathbb{R}^{k,n} := T_pM \oplus^\perp (T_pM)^\perp,$$

wobei $\oplus^\perp$ die direkte Summe bezüglich des pseudo-euklidischen Skalarprodukts bezeichne.

Abschließend fassen wir noch alle Normalenräume an M zusammen. Die Menge

$$(TM)^\perp := \bigcup_{p\in M} (T_pM)^\perp$$

mit der Projektionsabbildung $\psi : (T_pM)^\perp \to M$ heißt *Normalenbündel* von M.

2.4 Die kovariante Ableitung, Geodäten und die Weingartenabbildung

2.4.1 Die kovariante Ableitung und die 2. Fundamentalform

Bezeichne $D_X Y$ im Folgenden die Richtungsableitung eines Vektorfelds Y nach dem Vektorfeld X auf dem $\mathbb{R}^{k,n}$.

Definition 2.4.1 (Die kovariante Ableitung) Sei Y ein differenzierbares, tangentiales Vektorfeld und X ein tangentiales Vektorfeld auf einer m-dimensionalen, nichtausgearteten Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$, dann heißt das eindeutig bestimmte Vektorfeld

$$\nabla_X Y := (D_X Y)^T = \mathrm{proj}_{TM}(D_X Y)$$

kovariante Ableitung von Y in Richtung X.
Sei $Y : I \to M$ nun ein tangentiales, differenzierbares Vektorfeld entlang einer Kurve $c : I \to M$ (d.h. $Y(t) \in T_{c(t)}M$ für $t \in I$). Definiere

$$\frac{\nabla}{dt}\, Y(t) := \left(\frac{d}{dt}\, Y(t)\right)^T = \mathrm{proj}_{\,T_{c(t)}M}\left(\frac{d}{dt}\, Y(t)\right).$$

Ist c zusätzlich regulär, so existiert stets ein Vektorfeld $\tilde{Y}$ auf M in einer Umgebung von $c(t)$ mit $\tilde{Y}\,|_{c(s)}= Y(s)$ für s nahe t. Für jedes solches $\tilde{Y}$ gilt

$$\frac{\nabla}{dt}\, Y(t) = \nabla_{\dot{c}(t)}\tilde{Y}\big(c(t)\big).$$

Vereinfacht schreiben wir in diesem Fall $\nabla_{\dot{c}(t)}Y\big(c(t)\big)$ und nennen dies die kovariante Ableitung von Y entlang c.

Analog zu ∇ definiere die kovariante Ableitung $\nabla^\perp$ auf dem Normalenbündel $(TM)^\perp$, d.h.

$$\nabla^\perp_X Y := (D_X Y)^\perp = \mathrm{proj}_{(TM)^\perp}(D_X Y)$$

für entsprechendes tangentiales Vektorfeld X und differenzierbares, normales Vektorfeld Y (also $Y \subset (TM)^\perp$). Sei wiederum eine reguläre Kurve $c : I \to M$ und ein differenzierbares, normales Vektorfeld $Y : I \to M$ entlang c (d.h. $Y(t) \in (T_{c(t)}M)^\perp$ für $t \in I$) gegeben. Dann können wir analog zur Definition 2.4.1

$$\frac{\nabla^\perp}{dt}\, Y(t) = \nabla^\perp_{\dot{c}(t)}\tilde{Y}\big(c(t)\big) =: \nabla^\perp_{\dot{c}(t)}Y\big(c(t)\big)$$

für ein entsprechendes Vektorfeld $\tilde{Y}$ auf M schreiben.
Folgende Rechenregeln für die kovariante Ableitung benötigen wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit:

Lemma 2.4.1 *Seien Y_1, Y_2 tangentiale Vektorfelder auf M und $\varphi : M \to \mathbb{R}$ eine skalare Funktion auf M sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann gilt:*

i. $\nabla(\alpha + \beta)Y_1 = \alpha\nabla Y_1 + \beta\nabla Y_1$
(Linearität)

ii. $\nabla(Y_1 + Y_2) = \nabla Y_1 + \nabla Y_2$
(Additivität)

iii. $\nabla(\varphi Y_1) = \varphi\nabla Y_1 + \varphi' Y_1$
(Produktregel)

iv. $D\langle Y_1, Y_2\rangle_k = \langle\nabla Y_1, Y_2\rangle_k + \langle Y_1, \nabla Y_2\rangle_k$
(Verträglichkeit mit dem Skalarprodukt)

Beweis. Die Behauptungen folgen unmittelbar aus Definition 1. □

Die Rechenregeln aus Lemma 2.4.1 gelten analog für $\nabla^\perp$ und normale Vektorfelder Y_1, Y_2.

Definition 2.4.2 (Die 2. Fundamentalform) Sei M wie in Definition 2.4.1 gegeben. Die 2. Fundamentalform für ein tangentiales Vektorfeld X und ein differenzierbares, tangentiales Vektorfeld Y auf M ist definiert als die bilineare Abbildung

$$II(X, Y) := (D_X Y)^\perp = \text{proj}_{(TM)^\perp} D_X Y.$$

Die 2. Fundamentalform $II(X(p), Y(p))$ hängt dabei nur von $X(p)$ und $Y(p)$ für entsprechende Vektofelder X und Y, d.h. nur von den Werten der Vektorfelder in p, ab.

Definition 2.4.3 (Die kovariante Ableitung der 2. Fundamentalform) Die kovariante Ableitung von II als bilineare Abbildung in Richtung des tangentialen Vektorfelds X für 2 tangentiale, differenzierbare Vektorfelder Y_1, Y_2 ist definiert durch

$$(\nabla_X^\perp II)(Y_1, Y_2) := \nabla_X^\perp(II(Y_1, Y_2)) - II(\nabla_X Y_1, Y_2) - II(Y_1, \nabla_X Y_2).$$

Die Ableitung eines differenzierbaren Vektorfelds Y in Richtung eines tangentialen Vektorfelds X auf M lässt sich also nach Definition 2.3.1 stets wie folgt aufteilen:

$$D_X Y = (D_X Y)^T + (D_X Y)^\perp = \nabla_X Y + II(X, Y).$$

Wir spalten also die Ableitung von Y in die Summe des normalen und tangentialen Anteils auf. Hilfreiche Beispiele und Veranschaulichungen zu den obigen Definitionen sind in den abschließenden Beispielen dieser Arbeit zu finden.

2.4.2 Geodäten und die Exponentialabbildung

Von zentraler Bedeutung für unsere weiteren Betrachtungen sind spezielle Kurven, die sogenannten Geodäten:

Definition 2.4.4 (Geodäte) Sei $c : I \to M$ eine nicht-konstante Kurve für eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$. Dann heißt c Geodäte, wenn

$$\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t) = 0 \text{ für alle } t \in I$$

gilt.

Diese Definition impliziert also, dass die Ableitung von $\dot{c}$ überall in tangentiale Richtung verschwindet. Nach Definition 2.4.1 der kovarianten Ableitung, ist $\ddot{c}$ also entweder bereits 0 oder liegt im Normalenbündel. Wir sagen eine Geodäte $c : I \to M$ verläuft durch einen Punkt $p \in M$ in Richtung der tangentialen Richtung $V \in T_pM$, falls ein $t_0 \in I$ existiert, sodass $c(t_0) = p$ und $\dot{c}(t_0) = V$ gilt. Betrachten wir die Kurve c wiederum als die Bewegung eines Massenpunktes im physikalischen Sinne, so ist die Ableitung von $\dot{c}$ in Richtung der Kurve einfach der Beschleunigungsvektor innerhalb der Untermannigfaltigkeit M. Das heißt also, c simuliert die beschleunigungsfreie Bewegung des Massenpunktes auf M. Auf dem $\mathbb{R}^n$ beispielsweise sind Geodäten Geraden und auf Sphären die sogenannten Großkreise, wie es dieses Beispiel konkret veranschaulicht:

Beispiel 2.4.1 Sei $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ die 2-*Sphäre* als Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$. Dann sind die Geodäten auf S^2 gerade die Großkreise auf der Sphäre. Die reguläre Kurve $c : [0, 2\pi] \to S^2$ mit

$$c(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt den Großkreis auf S^2, der in der x_1-x_2-Ebene des $\mathbb{R}^3$ liegt. Überprüfen ob c eine Geodäte ist:

$$\frac{\nabla}{dt}\,\dot{c}(x) = \frac{\nabla}{dt}\begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(x) \\ -\sin(x) \\ 0 \end{pmatrix}^T = 0, \text{ da bereits } \ddot{c}(x) \perp \dot{c}(x) \in T_{c(x)}S^2.$$

Damit ist c also eine Geodäte auf der Untermannigfaltigkeit $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$.

Wir interessieren uns insbesondere für die Existenz und Eindeutigkeit von Geodäten durch einen Punkt $p \in M$, da diese Geodäten notwendig sind um die theoretischen Ergebnisse in den nächsten Kapitel zu garantieren. Zunächst müssen wir hierzu Tangentialvektoren normieren können um eine einheitliche Beschreibung von Geodäten in beliebige tangentiale Richtungen zu erhalten. Da das pseudoeuklidische Skalarprodukt hierfür nicht benutzt werden kann, fixieren wir im Folgenden ein positiv-definites Skalarprodukt g^T auf dem Tangentialraum T_pM. Ein

Vektor $E \in T_pM$ mit $\|E\| := \sqrt{g^T(E,E)} = 1$ heißt dann Einheitsvektor. Bezeichne mit

$$B_\epsilon(0) = \{tE \mid t \in (-\epsilon, \epsilon), E \in T_pM \text{ Einheitsvektor}\}$$

den offenen Ball mit Radius ϵ und Zentrum in $0 \in T_pM$ bzgl. g^T. Diese Bezeichnungen seien in den weiteren Ausführungen gültig. Nach den Erläuterungen in [Pet98] gilt nun folgender Satz:

Satz 2.4.1 (Eindeutigkeit der Geodäte) *Sei M eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann existiert zu jedem Punkt $p \in M$ und jedem Tangentialvektor $V \in T_pM$ ein $\epsilon > 0$ und eine eindeutige Geodäte $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ mit $c(0) = p$ sowie $\dot{c}(0) = V$.*

Mithilfe der vorherigen Ausführungen und dem Satz 2.4.1 ist dann folgende Definition sinnvoll:

Definition 2.4.5 Sei $p \in M$ ein fester Punkt und bezeichne $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ die eindeutig bestimmte Geodäte durch p in Richtung eines beliebigen Einheitsvektors E. Dann heißt

$$\exp_p : W \to M \text{ mit } (p, tE) \longmapsto c(t)$$

für $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ *Exponentialabbildung*, wobei W eine bestimmte Umgebung des Nullvektors $0 \in T_pM$ ist (siehe z.B. Lemma 2.4.2). Diese Abbildung ist nach Satz 2.4.1 wohldefiniert.

Wir benötigen noch folgendes Lemma, dessen Behauptung mithilfe des Satzes über die Umkehrabbildung (siehe [Pet98]) folgt:

Lemma 2.4.2 *Sei $p \in M$ und 0 der Nullvektor in T_pM, dann ist*

$$d\ \exp_p : T_0(T_pM) \to T_pM \text{ regulär.}$$

Daher existiert eine offene Umgebung U_p der 0 in T_pM, sodass $\exp_p : U_p \to M$ ein Diffeomorphismus von U_p auf eine offene Menge $\exp_p(U_p) \subseteq M$ ist.

Abschließend sei anzumerken, dass falls M eine C^∞ Untermannigfaltigkeit ist, so ist jede Geodäte c auf M beliebig oft stetig-differenzierbar.

2.4.3 Die Weingartenabbildung

Zum Abschluss dieses Kapitels konstruieren wir ein weitere Hilfsmittel, das die Formulierung der weiteren Ergebnisse erleichtern wird:

Definition 2.4.6 Sei die m-dimensionale, nichtausgeartete Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$ und das Vektorfeld N mit $N(p) \in (T_pM)^\perp$ sowie ein Tangentialvektor (oder auch Vektorfeld) $X(p) \in T_pM$ für $p \in M$ gegeben. Dann heißt

$$A_N(X) = -(D_XN)^T$$

die Weingarten-Abbildung von N.

Die Weingartenabbildung in einem Punkt p getreu der Definition hängt wiederum nur von $N(p)$ und $X(p)$ ab, d.h. lediglich von den konkreten Werten der Vektorfelder N und X in p.
Wir benutzen die Weingartenabbildung um die Projektion der Ableitung eines Vektorfelds im Normalenraum von M auf den Tangentialraum auszudrücken.
Nun bringen wir die Weingartenabbildung und die 2. Fundamentalform in folgende Relation bezüglich des pseudo-euklidischen Skalarprodukts:

Lemma 2.4.3 *Seien die Voraussetzungen wie in Definition 1 gegeben und zudem $Y(p)$ ein Vektorfeld mit $Y \in T_pM$. Dann folgt:*

$$\langle A_N(X), Y\rangle_k = \langle II(X,Y), N\rangle_k.$$

Beweis. Es gelten Voraussetzungen wie im Lemma, dann folgt:

$$\begin{aligned}\langle A_N(X), Y\rangle_k &= \left\langle -\left(D_X N\right)^T, Y\right\rangle_k = \left\langle -D_X N + \left(D_X N\right)^\perp, Y\right\rangle_k \\ &= \langle -D_X N, Y\rangle_k + \underbrace{\left\langle \left(D_X N\right)^\perp, Y\right\rangle_k}_{=0} = -\langle D_X N, Y\rangle_k \\ &= -D\underbrace{\langle N, Y\rangle_k}_{=0} + \langle N, D_X Y\rangle_k = \left\langle \left(D_X Y\right)^\perp, N\right\rangle_k \\ &= \langle II(X,Y), N\rangle_k\end{aligned}$$

□

3 Parallele Vektorfelder und Untermannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel betrachten wir parallele Vektorfelder entlang regulären Kurven auf Untermannigfaltigkeiten und definieren den Begriff der parallelen Untermannigfaltigkeit. Abschließend charakterisieren wir dann Geodäten auf solchen Untermannigfaltigkeiten durch parallele Vektorfelder.

3.1 Parallele Vektorfelder und Paralleltransport

Definition 3.1.1 Sei $c : I \to M$ eine Kurve in einer m-dimensionalen, nichtausgeartete Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$. Ein tangentiales Vektorfeld Y entlang c heißt (∇-)*parallel*, falls

$$\nabla_{\dot{c}(t)} Y(t) = 0 \text{ für alle } t \in I$$

gilt.

Ein paralleles, tangentiales Vektorfeld entlang einer Kurve ist also ein Vektorfeld, dessen Ableitung in Richtung der Kurve (d.h. auf dem Tangentialraum $T_{c(t)}M$) 0 ist. Anschaulich stellt ein paralleles Vektorfeld auf einer Untermannigfaltigkeit das Analogon zur Parallelverschiebung im euklidischen Raum dar.
Weiterhin heißt ein normales Vektorfeld Y entlang c *parallel* auf dem Normalenbündel bzw. ($\nabla^{\perp}$-)*parallel*, falls

$$\nabla^{\perp}_{\dot{c}(t)} Y(t) = 0 \text{ für alle } t \in I \text{ gilt.}$$

Nach [Küh10] ausgeweitet auf den Normalenraum gilt folgender Satz:

Satz 3.1.1 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$ eine m-dimensionale, nichtausgeartete Untermannigfaltigkeit und $c : I \to M$ eine reguläre Kurve. Dann existiert für jeden Vektor $V_0 \in T_{c(t_0)}\mathbb{R}^{k,n}$ ein eindeutiges, paralleles (tangentiales oder normales) Vektorfeld Y entlang c mit $Y(t_0) = V_0$. Y nennt man den Paralleltransport von V_0 entlang c.*

Mithilfe dieses Satzes lässt sich nun ein interessantes und nützliches Lemma zeigen:

Lemma 3.1.1 *Sei $c : I \to M$ eine reguläre Kurve und $B_1, B_2, ..., B_l$ parallele Vektorfelder entlang c, die in einem Punkt $c(t_0)$ linear unabhängig sind. Dann sind diese Vektorfelder für alle $t \in I$ linear unabhängig.*

Beweis. Angenommen die Vektorfelder $B_1, B_2, ..., B_l$ sind in einem $t_o \in I$ linear abhängig, d.h. es existieren Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l$, wobei nicht alle Konstanten gleich 0 sind, sodass

$$\alpha_1 B_1(t_0) + \alpha_2 B_2(t_0) + ... + \alpha_l B_l(t_0) = 0.$$

Insbesondere ist $\alpha_1 B_1(t) + \alpha_2 B_2(t) + ... + \alpha_l B_l(t)$ wieder ein paralleles Vektorfeld und nach Satz 1 folglich das Nullvektorfeld, da in t_0 schon gleich 0. D.h. die Vektorfelder $B_1, B_2, ..., B_l$ sind überall linear abhängig, was im Widerspruch zur Voraussetzung des Lemmas steht. □

Somit können wir die lineare Unabhängigkeit von Vektoren in einem Kurvenpunkt auf die lineare Unabhängigkeit von entsprechenden parallelen Vektorfeldern bzw. Paralleltransporten ausweiten.

Folgerung 3.1.1 *Bezeichnungen seien wie zuvor gegeben. Sei $V_0 \in T_{c(t_0)}\mathbb{R}^{k,n}$ ein beliebiger Vektor für ein $t_0 \in I$ und Y das eindeutige, parallele Vektorfeld nach Satz* 3.1.1 *mit $Y(t_0) = V_0$. Dann lässt sich Y entlang c als Linearkombination linear unabhängiger, paralleler Vektorfelder $B_1, B_2, ..., B_l$ für $l = m$, falls V_0 tangential ist, oder $l = n - m$, falls V_0 normal ist, mit konstanten Koeffizienten schreiben.*

Beweis. Sei V_0 o.B.d.A ein Tangentialvektor und Y folglich das eindeutige, parallele sowie tangentiale Vektorfeld entlang c mit $Y(t_0) = V_0$. Für V_0 als normaler Vektor ist der Beweis analog.
Sei $B(T_{c(t_0)}M) := \{B_1(t_0), B_2(t_0), ..., B_m(t_0)\}$ eine Basis des Tangentialraums in $c(t_0) \in M$ für entsprechende parallele Vektorfelder B_i, diese existiert nach Satz 3.1.1 . Dann ist $B(T_{c(t)}M)$ nach Lemma 3.1.1 eine Basis des $T_{c(t)}M$ für alle $t \in I$. Folglich lässt sich $Y(t)$ entlang c als Linearkombination bzgl. $B(T_{c(t)}M)$ auffassen. Da Y mit $Y(t_0) = V_0$ nach Satz 3.1.1 eindeutig entlang c ist, sind die Koeffizienten in dieser Linearkombination konstant. □

Diese Folgerung impliziert, dass die konstanten Koeffizienten in einer solchen Linearkombination schon durch den Wert von Y in einem einzigen Punkt $c(t_0)$ bestimmt sind.
Wenden wir uns nun wieder den Geodäten zu, nach deren Definition ist schon die Ableitung einer Geodäte (∇-)parallel. Mithilfe von Satz 3.1.1 lässt sich folgendes Resultat zeigen:

Lemma 3.1.2 *Sei $c : I \to M$ eine Geodäte in einer m-dimensionalen, nichtausgearteten Untermannigfaltigkeit M, dann ist c regulär.*

Beweis. Zu zeigen ist also, dass $\dot{c}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt.
Nach Definition einer Geodäte ist $\dot{c}$ bereits ein paralleles Vektorfeld entlang c. Angenommen, es existiert ein festes $t_0 \in I$ mit $\dot{c}(t_0) = 0$. Nach Satz 3.1.1 ist $\dot{c}$ das eindeutige, parallele Vektorfeld mit dieser Eigenschaft, also gerade das Nullvektorfeld (d.h. $\dot{c}(t) = 0$ für alle $t \in I$). Dies steht aber im Widerspruch zur Definition einer Geodäte als nicht-konstante Kurve. □

3.2 Parallele Vektorfelder entlang Geodäten auf parallelen Untermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt weiten wir den Begriff der Parallelität auf Untermannigfaltigkeiten aus und erhalten dann erste Resultate, mit denen wir Geodäten auf solchen parallelen Untermannigfaltigkeiten beschreiben können.
Im weiteren Verlauf dieser Arbeit sei M stets eine C^∞-Untermannigfaltigkeit.

Definition 3.2.1 (Parallele Untermannigfaltigkeit) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$ eine m-dim., nichtausgeartete Untermannigfaltigkeit. Dann heißt M parallele Untermannigfaltigkeit, wenn

$$\nabla^\perp\, II = 0$$

gilt. D.h. II ist parallel im Normalenbündel.

Lemma 3.2.1 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$ eine m-dimensionale, parallele Untermannigfaltigkeit und X, Y parallele, tangentiale Vektorfelder entlang einer regulären Kurve $c : I \to M$. Dann folgt*

$$\nabla^\perp_{\dot c}\, (II(X, Y)) = 0.$$

Beweis. Nach der Bildungsregel der kovarianten Ableitung von II für X, Y folgt (vgl. Definition 2.4.3):

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\nabla^\perp_{\dot c}\, II\right)}_{=0}(X,Y) &= \nabla^\perp_{\dot c}\, (II(X, Y)) - II\left(\underbrace{\nabla_{\dot c}\, X}_{=0}, Y\right) - II\left(X, \underbrace{\nabla_{\dot c}\, Y}_{=0}\right) \\ \Leftrightarrow \qquad 0 &= \nabla^\perp_{\dot c}\, (II(X, Y)) \end{aligned}$$

□

Definition 3.2.2 Sei $c : I \to M$ eine reguläre Kurve in einer m-dimensionalen, parallelen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$. Dann bezeichne mit

$$N(t) = \{II(x, y) \mid x, y \in T_{c(t)}M\}$$

das Bild der 2.Fundamentalform II.

Insbesondere ist $N(t)$ ein Untervektorraum von $(T_{c(t)}M)^\perp$ und mithilfe der vorherigen Betrachtungen folgt:

Lemma 3.2.2 *Bezeichnungen seien wie in Definiton* 3.2.2 *gegeben. Dann ist*

$$l := \dim(N(t)) \leq n - m \textit{ konstant.}$$

Beweis. Wähle eine Basis von parallelen, tangentialen Vektorfeldern $X_1, X_2, ..., X_m$ im $T_{c(t)}M$ für alle $t \in I$, dies ist möglich nach Lemma 3.1.1 und Satz 3.1.1 . Dann ist

$$N(t) = \operatorname{span}\{II(X_i(t), X_j(t)) \mid i, j \in \{1, 2, ..., m\}\} \text{ für alle } t \in I.$$

Wähle hieraus eine Basis von $N(t_0)$ für ein festes $t_0 \in I$, die einzelnen normalen Vektorfelder in dieser Basis sind überall parallel nach Voraussetzung an II und nach Lemma 3.1.1 überall linear-unabhängig, bilden also auch eine Basis von $N(t)$ für alle $t \in I$. Also ist die Dimension von $N(t)$ konstant. $\square$

Mit den soeben konstruierten Voraussetzungen erhält man durch das Differenzieren einer Geodäte c auf M beliebig viele parallele Vektorfelder entlang c, die bis zu einem gewissen Grad linear unabhängig sind. Dies wollen wir im folgenden Satz ausnutzen, dessen Aussage uns dann zur Beschreibung der Geodäte durch eine gewöhnliche Differentialgleichung führt, die für die weiteren Ergebnisse essentiell ist.

Satz 3.2.1 *Sei $c : I \to M$ eine Geodäte auf einer m-dimensionalen, parallelen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$. Sei $l := \dim(N(t)) \leq n - m$ die konstante Dimension des Bildes von II entlang c. Dann existiert ein*

$$r \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \textit{ mit } r \leq \min(2m, 2l+1) \leq n$$

und linear unabhängige Vektorfelder $B_1, B_2, ...B_r$ entlang c mit parallelem Vektorfeld $B_1 := \dot{c}$, sodass gilt:

(1) $B_{2i} := \frac{d}{dt}\ B_{2i-1} = II(\dot{c}, B_{2i-1})$ *ist $\nabla^{\perp}$-parallel,*

(2) $B_{2i+1} := \frac{d}{dt}\ B_{2i} = -A_{B_{2i}}(\dot{c})$ *ist ∇-parallel und*

(3) $B_{r+1} := \frac{d}{dt}\ B_r = \begin{cases} \sum_{i=0}^{r/2} \alpha_{2i+1} B_{2i+1}, & \textit{falls } r \textit{ gerade} \\ \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \alpha_{2i} B_{2i}, & \textit{falls } r \textit{ ungerade} \end{cases} \quad \textit{mit } \alpha_i \in \mathbb{R}\ \forall i.$

für $i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, wobei $2i+1 \leq r$ falls r ungerade und $2i \leq r$ falls r gerade ist.

Beweis. Zeigen Behauptungen (1) und (2) per Induktion über r:

IA: Sei r=1, $B_1 = \dot{c} \neq 0$ ist parallel, da c eine Geodäte ist.

IS: Schließen nun von r auf $r+1$ für folgende Fälle:

1.Fall: Sei r ungerade, d.h. Voraussetzung (2) gilt für $2i+1 = r$, $i \in \mathbb{N}$. Zeigen nun Behauptung (1) für $2i+2 = r+1$:

$$\begin{aligned} B_{2i+2}(t) = \frac{d}{dt}\ B_{2i+1}(t) &= \underbrace{\nabla_{\dot{c}(t)} B_{2i+1}(t)}_{=0, \text{ da } B_{2i+1} \text{ parallel}} + II(\dot{c}(t), B_{2i+1}(t)) \\ &= II(\dot{c}(t), B_{2i+1}(t)) \end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen, dass B_{2i+2} parallel im Normalenbündel ist:

$$\nabla^{\perp}_{\dot{c}(t)}\ II(\dot{c}(t), B_{2i+1}(t)) = 0 \text{ für alle } t \in I,$$

nach Lemma 3.2.1 .

2.Fall: Sei r gerade, d.h. Voraussetzung (1) gilt für $2i+2=r$, $i \in \mathbb{N}$. Zeigen nun Behauptung (2) für $2i+3=r+1$:

$$\begin{aligned} B_{2i+3}(t) &= \frac{d}{dt}\, B_{2i+2}(t) = -A_{B_{2i+2}(t)}(\dot{c}(t)) + \underbrace{\nabla^{\perp}_{\dot{c}(t)} II(\dot{c}(t), B_{2i+1}(t))}_{=0,\text{ da } II \text{ parallel}} \\ &= -A_{B_{2i+2}(t)}(\dot{c}(t)) \end{aligned}$$

für alle $t \in I$. Außerdem ist B_{2i+3} parallel, denn für alle parallelen Vektorfelder $Y \subseteq TM$ entlang c folgt mit Lemma 2.4.2 und den Rechenregeln aus Lemma 2.4.1:

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla_{\dot{c}} A_{B_{2i+2}}(\dot{c}), Y \right\rangle_k &= D\left\langle A_{B_{2i+2}}(\dot{c}), Y\right\rangle_k - \left\langle A_{B_{2i+2}}(\dot{c}), \underbrace{\nabla_{\dot{c}} Y}_{=0} \right\rangle_k \\ &= D\langle II(\dot{c}, Y), B_{2i+2}\rangle_k \\ &= \left\langle \underbrace{\nabla^{\perp}_{\dot{c}} II(\dot{c}, Y)}_{=0}, B_{2i+2} \right\rangle_k + \left\langle II(\dot{c}, Y), \underbrace{\nabla^{\perp}_{\dot{c}} B_{2i+2}}_{=0} \right\rangle_k \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ $\nabla_{\dot{c}}(-A_{B_{2i+2}})(\dot{c}) = 0$, da M nichtausgeartet ist und es hier nach Lemma 3.1.1 genügt parallele Vektorfelder Y zu betrachten.

Damit sind (1) sowie (2) bewiesen.

Zur Behauptung (3): Wir erhalten B_{r+1} durch Differenzieren von B_r, damit ist B_{r+1} ein paralleles Vektorfeld im Tangential- oder Normalenbündel entlang c nach dem Beweis von (1) bzw. (2).
Es reicht dann aus r so zu wählen, dass sich $B_{r+1}(t_0)$ für ein $t_0 \in I$, d.h. in einem Punkt, als Linearkombination der linear unabhängigen Vektoren $B_1(t_0), B_2(t_0), ...,$ $B_r(t_0)$ bilden lässt. Da die zugehörigen Vektorfelder parallel sind, ist $B_{r+1}(t)$ analog zu Folgerung 3.1.1 für alle $t \in I$ die Linearkombination dieser Vektorfelder. So ein r existiert spätestens wenn

$$r+1 > \min(2m, 2l+1),$$

da dann die Menge der jeweiligen B_{2i} oder B_{2i+1} schon eine Basis von $N(t)$ oder des Tangentialraums entlang c bilden. Dies impliziert unmittelbar die Behauptung, dass $r \leq \min(2m, 2l+1)$.
Weil $B_{r+1}(t)$ entweder im Tangentialraum oder Normalenraum entlang c liegt, gehen die zuvor erwähnten Vektorfelder, die nicht im gleichen Raum liegen, mit 0 in die Linearkombination ein, genauer ausgedrückt:
Liegt also B_{r+1} im Tangentialbündel (d.h. r gerade) so ist es die Linearkombination von $B_1, B_3, ..., B_{r-1}$ und liegt B_{r+1} im Normalenbündel (d.h. r ungerade) so ist es die Linearkombination von $B_2, B_4, ..., B_r$:

$$B_{r+1} := \frac{d}{dt}\ B_r = \begin{cases} \sum_{i=0}^{r/2} \alpha_{2i+1} B_{2i+1}, & \text{falls } r \text{ gerade.} \\ \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \alpha_{2i} B_{2i}, & \text{falls } r \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Insbesondere sind die Koeffizienten α_i in dieser Linearkombination nach Folgerung 3.1.1 konstant. □

Folgerung 3.2.1 *Die Geodäte $c : I \to M$ erfüllt aufgrund von Satz 1 und der Eigenschaft der Vektorfelder $B_{i+1} = d/dt\ B_i$ für $1 \leq i \leq r$ mit $B_1 = \dot{c}$, folgende lineare, gewöhnliche Differentialgleichung $(r+1)$-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (o.B.d.A. r ungerade):*

$$B_{r+1}(t) = \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \alpha_{2i} B_{2i}(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}}\ c(t) = \alpha_2 \frac{d^2}{dt^2}\ c(t) + \alpha_4 \frac{d^4}{dt^4}\ c(t) + ... + \alpha_{r-1} \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}\ c(t) \ \textit{für alle } t \in I$$

$$\Leftrightarrow \quad c^{(r+1)} = \alpha_2 c^{(2)} + \alpha_4 c^{(4)} + ... + \alpha_{r-1} c^{(r-1)}$$

Für gerades r analog zu Satz 1.

Wir haben nun die Geodäte c als die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung charakterisiert. Damit ergibt sich die Möglichkeit mithilfe der Theorie zu linearen, gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten Eindeutigkeitsaussagen zur Lösung einer solchen Gleichung zu treffen. Diese Folgerung findet in Abschnitt 4 Verwendung.

4 Isometrie und Symmetrie

Der Begriff der Symmetrie ist eng verbunden mit dem der Isometrie. Hierzu schaffen wir zu Beginn dieses Kapitels die notwendigen Grundlagen, insbesondere die Definition der symmetrischen Untermannigfaltigkeit führt uns zu unserem angestrebten Hauptziel. Anschließend verwenden wir die Ergebnisse aus Kapitel 3 um eine Aussage zu treffen, inwiefern und vor allem unter welchen Bedingungen eine Geodäte durch eine spezielle Isometrie in sich selbst überführt werden kann. Dies liefert uns dann das letzte vorbereitende Resultat für die Hauptergebnisse aus Abschnitt 5.

4.1 Isometrien und symmetrische Untermannigfaltigkeiten

Definition 4.1.1 (Isometrie) Eine Isometrie auf dem pseudo-euklidischen Raum ist eine Abbildung $\sigma : \mathbb{R}^{k,n} \to \mathbb{R}^{k,n}$ sodass

$$d(p,q) = d(\sigma(p), \sigma(q)) \text{ für beliebige } p, q \in \mathbb{R}^{k,n}$$

gilt, wobei d die Standardmetrik auf dem metrischen Raum $(\mathbb{R}^{k,n}, d)$ bezeichne.

Diese Definiton ist gleichbedeutend damit, dass σ eine affine Abbildung auf $\mathbb{R}^{k,n}$ mit $d\sigma \in O(n)$ ist, d.h. $d\sigma$ ist eine orthogonale $n \times n$-Matrix. Nun stellen wir weitere Forderungen an σ und definieren eine spezielle Art von Isometrien bezüglich einer Untermannigfaltigkeit:

Definition 4.1.2 (Die Spiegelung am Normalenraum) Sei $\sigma_p : \mathbb{R}^{k,n} \to \mathbb{R}^{k,n}$ eine Isometrie mit

$$\sigma_p(p) = p, d\sigma_p\big|_{(T_pM)^\perp} = \mathrm{id}, d\sigma_p\big|_{T_pM} = -\mathrm{id}$$

in einer m-dimensionalen, nichtausgearteten Untermannigfaltigkeit M und einem Punkt $p \in M$. Dann heißt σ_p die Spiegelung am Normalenraum an M in p.

So eine Isometrie σ_p existiert stets im $\mathbb{R}^{k,n}$ und ist eindeutig mit

$$\sigma_p(q) = A \cdot (q - p) + p$$

für eine orthogonale Matrix $A \in O(n)$, für die $A \cdot N = N$, falls $N \in (T_pM)^\perp$ und $A \cdot V = -V$, falls $V \in T_pM$.
Ein solches σ_p motiviert die folgende Definition:

Definition 4.1.3 (Symmetrische Untermannigfaltigkeit) Eine m-dimensionale, nichtausgeartete Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$ heißt symmetrisch, falls für jeden Punkt $p \in M$ und die zugehörige Isometrie $\sigma_p : \mathbb{R}^{k,n} \to \mathbb{R}^{k,n}$ gerade $\sigma_p(M) = M$ gilt.

Im Kontext dieser Definition spiegelt also die Isometrie σ_p die Punkte auf der Untermannigfaltigkeit M an dem affinen Normalenraum $N := p + (T_pM)^\perp$ wieder auf M.

4.2 Symmetrie von Geodäten

Das Hauptziel dieser Arbeit besteht gerade darin, zu untersuchen unter welchen Bedingungen eine parallele Untermannigfaltigkeit symmetrisch ist. Hierzu fangen wir zunächst im Kleinen an und führen die vorherigen Definitionen und die Erkenntnisse aus Abschnitt 3 in nachfolgendem Satz zusammen, in dem wir zum Schluss kommen, dass eine Isometrie σ_p nach Definition 4.1.2 gerade Geodäten auf parallelem M in sich selbst abbildet.

Satz 4.2.1 *Sei $c : I \to M$ eine Geodäte mit linear unabhängigen Vektorfeldern $B_1, B_2, ..., B_r$, die nach Satz 3.2.1 bestimmt wurden, in einer m-dimensionalen, parallelen Untermannigfaltigkeit M. I sei symmetrisch um $0 \in I$ gewählt, d.h. $t \in I \Leftrightarrow -t \in I$, und es sei eine Isometrie $\sigma_p : \mathbb{R}^{k,n} \to \mathbb{R}^{k,n}$ nach Definition 4.1.2 gegeben mit*

$$\sigma(c(0)) = c(0) \text{ und } d\sigma_p(B_i(0)) = (-1)^i B_i(0) \text{ für alle } i \in \{1, 2, ..., r\}.$$

Dann folgt:

$$\sigma \circ c(-t) = c(t) \text{ für alle } t \in I,$$

also überführt σ die Geodäte $c(-t)$ in die Kurve $c(t)$.

Beweis. Sei $\tilde{c}(t) := \sigma_p(c(-t))$, bleibt zu zeigen: $\tilde{c}(t) = c(t)$ für alle $t \in I$. Wir erhalten nun Vektorfelder $\tilde{B}_i$ entlang $\tilde{c}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_1(t) &= \frac{d}{dt}\,\tilde{c}(t) = (-1)d\sigma_p\left(\left(\frac{d}{dt}\,c\right)(-t)\right) = (-1)d\sigma_p(B_1(-t)),\\
\tilde{B}_2(t) &= \frac{d}{dt}\,\tilde{B}_1(t) = (-1)d\sigma_p\left(\left(\frac{d}{dt}\,B_1\right)(-t)\right) = (-1)^2 d\sigma_p(B_2(-t)),\\
\tilde{B}_3(t) &= \frac{d}{dt}\,\tilde{B}_2(t) = (-1)^2 d\sigma_p\left(\left(\frac{d}{dt}\,B_2\right)(-t)\right) = (-1)^3 d\sigma_p(B_3(-t)),\\
&\dots\\
\tilde{B}_{r+1}(t) &= \frac{d}{dt}\,\tilde{B}_r(t) = (-1)^r d\sigma_p\left(\left(\frac{d}{dt}\,B_r\right)(-t)\right) = (-1)^{r+1} d\sigma_p(B_{r+1}(-t)).
\end{aligned}$$

Sei r hier o.B.d.A. ungerade, dann erhalten wir durch Einsetzen der Gleichheit $B_{r+1}(-t) = \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \alpha_{2i} B_{2i}(-t)$ nach Satz 3.2.1 in $\tilde{B}_{r+1}(t)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{r+1}(t) &= (-1)^{r+1} d\sigma_p(B_{r+1}(-t)) = (-1)^{r+1} d\sigma_p \left(\sum_{i=1}^{(r-1)/2} \alpha_{2i} B_{2i}(-t) \right) \\
&= (-1)^{r+1} \sum_{i=1}^{(r-1)/2} d\sigma_p(\alpha_{2i} B_{2i}(-t)) = (-1)^{r+1} \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \alpha_{2i}\ d\sigma_p(B_{2i}(-t)) \\
&= (-1)^{r+1} \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \alpha_{2i}\ (-1)^{2i} \tilde{B}_{2i}(t) = \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \underbrace{(-1)^{r+1} \alpha_{2i}}_{=:\tilde{\alpha}_{2i}} \tilde{B}_{2i}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \tilde{\alpha}_{2i} \tilde{B}_{2i}(t).
\end{aligned}$$

Die Vektorfelder $\tilde{B}_2, \tilde{B}_4, ..., \tilde{B}_{r-1}$ sind linear unabhängig und parallel, da bereits $B_2, B_4, ..., B_{r-1}$ als linear unabhängig und parallel vorausgesetzt. Insbesondere ist $\tilde{B}_{r+1}$ also eine Linearkombination dieser Vektorfelder mit konstanten Koeffizienten. Setzen nun $t = 0$ und erhalten nach Voraussetzung an die Isometrie σ_p folgende Gleichheit:

$$\begin{aligned}
& & \tilde{B}_{r+1}(0) &= \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \tilde{\alpha}_{2i} \tilde{B}_{2i}(0) \\
&\Leftrightarrow & (-1)^{r+1} d\sigma_p(B_{r+1}(0)) &= \sum_{i=1}^{(r-1)/2} (-1)^{2i} \tilde{\alpha}_{2i}\ d\sigma_p(B_{2i}(0)) \\
&\Leftrightarrow & B_{r+1}(0) &= \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \tilde{\alpha}_{2i}\ B_{2i}(0) \\
&\Leftrightarrow & \tilde{\alpha}_{2i} &= \alpha_{2i} \text{ für } i \in \{1, 2, ..., r\}.
\end{aligned}$$

Also sind die Koeffizienten in der Darstellung der Vektorfelder B_{r+1} und $\tilde{B}_{r+1}$ als Linearkombination der übrigen Vektorfelder gleich. Folglich löst die Kurve $\tilde{c}$ genau wie die Geodäte c folgende gewöhnliche, lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (vgl. Folgerung 1 aus Abschnitt 3.3.):

$$\begin{aligned}
& \tilde{B}_{r+1}(t) = \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \alpha_{2i} \tilde{B}_{2i}(t) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}}\ \tilde{c}(t) = \alpha_2 \frac{d^2}{dt^2}\ \tilde{c}(t) + \alpha_4 \frac{d^4}{dt^4}\ \tilde{c}(t) + ... + \alpha_{r-1} \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}\ \tilde{c}(t) \text{ für alle } t \in I \\
\Leftrightarrow \quad & \tilde{c}^{(r+1)} = \alpha_2 \tilde{c}^{(2)} + \alpha_4 \tilde{c}^{(4)} + ... + \alpha_{r-1} \tilde{c}^{(r-1)}
\end{aligned}$$

Zudem erfüllen $\tilde{c}$ und c nach Voraussetzung die gleichen Anfangsbedingungen für $t = 0$:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}(0) &= \sigma_p(c(0)) = c(0), \\
\tilde{c}^{(2)}(0) &= \tilde{B}_2(0) = (-1)^2 d\sigma_p(B_2(0)) = B_2(0) = c^{(2)}(0), \\
\tilde{c}^{(4)}(0) &= \tilde{B}_4(0) = (-1)^4 d\sigma_p(B_4(0)) = B_4(0) = c^{(4)}(0), \\
&\dots \\
\tilde{c}^{(r-1)}(0) &= \tilde{B}_{r-1}(0) = (-1)^{r-1} d\sigma_p(B_{r-1}(0)) = B_{r-1}(0) = c^{(r-1)}(0).
\end{aligned}$$

Damit folgt aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung obiger Differentialgleichung:

$$\tilde{c}(t) = c(t) \Leftrightarrow \sigma(c(-t)) = c(t) \text{ für alle } t \in I.$$

Insbesondere ist $\tilde{c}$ damit eine Geodäte. □

Wir haben also die Behauptung aus dem Satz 4.2.1 über die charakteristische Differentialgleichung aus Folgerung 3.2.1 und deren Eindeutigkeit für Geodäten mit gleichen Anfangsbedingungen gezeigt. In Kapitel 5 verwenden wir dieses Ergebnis um globalere Aussagen bzgl. M zu treffen.

5 Parallele und symmetrische Untermannigfaltigkeiten im Zusammenhang

In diesem Kapitel befassen wir uns nun mit den zentralen Sätzen dieser Arbeit. Zunächst zeigen wir mithilfe der Erkenntnisse aus den vorherigen Abschnitten, dass zu jedem Punkt p auf einer parallelen Untermannigfaltigkeit M stets eine offene Umgebung existiert die durch die Isometrie σ_p aus Kapitel 4 in sich selbst abgebildet wird. Anschließend gelangen wir zum globalen Resultat und zeigen, dass eine vollständige, zusammenhängende und parallele Untermannigfaltigkeit M symmetrisch ist.

5.1 Satz über parallele Untermannigfaltigkeiten

Nun greifen wir auf die Definitionen und die Theoreme aus Abschnitt 2.4.2 bzgl. den Geodäten und der Exponentialabbildung zurück. Lemma 2.4.2 besagte gerade, dass stets eine Umgebung U_p der $0 \in T_pM$ existiert, sodass $\exp_p(U_p)$ eine offene Umgebung von p ist. Dies machen wir uns im folgendem Satz zunutze:

Satz 5.1.1 *Sei M eine m-dimensionale parallele Untermannigfaltigkeit sowie $p \in M$ ein fester Punkt und U_p wie in Lemma 2.4.2 bezeichnet. Wähle Teilmenge $B_\epsilon(0) \subseteq U_p \subseteq T_pM$.*
Sei dann U eine offene Umgebung von p mit $U := \exp(B_\epsilon(0)) \subseteq M$ und $\sigma_p : \mathbb{R}^{k,n} \to \mathbb{R}^{k,n}$ die Isometrie getreu Definition 4.1.4 . Dann gilt

$$\sigma_p \circ \exp_p(V) = \exp_p(-V) \text{ für alle } V \in B_\epsilon(0).$$

Insbesondere ist $\sigma_p(U) = U$.

Beweis. Sei $V \in B_\epsilon(0)$ beliebig und E der Einheitsvektor mit $\tau E = V$ für ein $\tau > 0$. Insgesamt folgt damit nach Satz 4.2.1 :

$$\begin{aligned}\sigma_p \circ \exp_p(V) &= \sigma_p \circ \exp_p(\tau E) = \sigma_p(c(\tau)) = c(-\tau) \\ &= \exp_p(-\tau E) = \exp_p(-V).\end{aligned}$$

□

Folgerung 5.1.1 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$ eine parallele Untermannigfaltigkeit. Dann existiert zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung U, die durch die Spiegelung am Normalenraum $(T_pM)^\perp$ auf sich selbst abgebildet wird.*

5.2 Satz über symmetrische Untermannigfaltigkeiten

Um die lokale Symmetrie einer Untermannigfaltigkeit M global auszuweiten, benötigen wir eine zusätzliche Forderung an M, nämlich die Vollständigkeit:

Definition 5.2.1 (Vollständige Untermannigfaltigkeit) Eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$ heißt (*geodätisch-*) vollständig, wenn für jedes $p \in M$ die zugehörige Exponentialabbildung $\exp_p$ für alle Vektoren $V \in T_pM$ definiert ist. D.h. der Definitionsbereich einer beliebigen Geodäte c mit $c(0) = p$ ist gerade ganz $\mathbb{R}$.

Betrachten wir den umliegenden Raum als euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ (als Riemannsche Mannigfaltigkeit) und nehmen wir an, dass $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine vollständige sowie zusammenhängende Untermannigfaltigkeit ist. Für diesen riemannschen Fall folgt unmittelbar, dass M geodätisch zusammenhängend ist (siehe Satz von Hopf und Rinow gemäß [Pet98]). D.h. für je 2 nichtidentische Punkte $p, q \in M$ lässt sich eine Geodäte in M finden, die beide miteinander verbindet. Hieraus folgt dann mit Satz 5.1.1 sofort, dass M symmetrisch ist.
Im echt pseudo-euklidischen Fall gilt dies allerdings nicht mehr unmittelbar und daher kommen wir nun zu folgenden Konstruktionen:

Zunächst sei für alle weiteren Betrachtungen $M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$ eine m-dimensionale, zusammenhängende sowie parallele Untermannigfaltigkeit und $M' := \sigma_p(M)$ das Bild von M unter der Isometrie σ_p nach Definition 4.1.2 . Es ist leicht einzusehen, dass M' wieder eine m-dimensionale, zusammenhängende Untermannigfaltigkeit ist. Nun ist es unser Ziel $M = M'$ zu zeigen, wofür wir die folgenden Aussagen benötigen:

Lemma 5.2.1 *Sei $q \in (M \cap M')$ und $T_qM = T_qM'$ sowie $II = II'$ in q, wobei II' die 2. Fundamentalform auf M' bezeichne. Weiterhin sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ eine Geodäte in M mit $c(0) = q$. Dann existiert ein $\rho > 0$, sodass*

$$c\big|_{(-\rho,\rho)} \in M'.$$

Außerdem enthält $M \cap M'$ eine in M und M' offene Umgebung $\tilde{U}$ von q.

Beweis. Betrachte die eindeutige Geodäte $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$ mit $c(0) = q$ und $\dot{c}(0) = V$ für einen beliebigen Vektor $V \in T_qM = T_qM'$ und die eindeutige Geodäte $e : (-\epsilon', \epsilon') \to M' \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$ mit $e(0) = q$ und $\dot{e}(0) = V$. Da nach Voraussetzung $II = II'$ in q gilt, ist also auch

$$\ddot{e}(0) = II'(\dot{e}(0), \dot{e}(0)) = II(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) = \ddot{c}(0).$$

Dies lässt sich nun analog für die höheren Ableitungen von c sowie e in 0 zeigen und wir erhalten $c^{(r)}(0) = e^{(r)}(0)$ für beliebiges $r \in \mathbb{N}$.

Da die Vektorfelder $c^{(r)}(t)$ bzw. $e^{(r)}(t)$ nach Satz 3.2.1 parallel für entsprechend definiertes t sind, folgt dass c bzw. e die lineare, gewöhnliche Differentialgleichung aus Folgerung 3.2.1 mit gleichen Anfangsbedingungen erfüllen und daher auf dem Intervall $(-\rho, \rho)$ für $\rho := \min(\epsilon, \epsilon')$ identisch sind. Damit folgt die erste Behauptung aus dem Lemma.
Sei nun $B_\delta(0) \subseteq T_qM = T_qM'$ eine offene Umgebung der 0 im Tangentialraum, sodass $\exp(B_\delta(0))$ ein Diffeomorphismus auf M ist, dies ist möglich für hinreichend kleines $\delta > 0$ nach Lemma 5.1.1 . Analog hierzu wähle $B_{\delta'}(0) \subseteq T_qM = T_qM'$, sodass $\exp'(B_{\delta'}(0))$ ein Diffeomorphismus auf M' ist, wobei $\exp'$ die Exponentialabbildung auf M' bezeichne. Definiere $\xi := \min(\delta, \delta')$.
Dann gilt $\exp_q(B_\xi(0)) = \exp'(B_\xi(0)) =: \tilde{U}$ nach obiger Argumentation für entsprechendes c und e in alle tangentialen Richtungen. Also ist $\tilde{U} \subseteq M \cap M'$ die in M und M' offene Umgebung von q in $M \cap M'$. □

Ein Punkt der die Forderungen aus Lemma 3 erfüllt, ist p aus Satz 5.2.1 . Wobei eine entsprechende Umgebung von p gerade U aus demselben Satz ist.

Folgerung 5.2.1 *Ist die Untermannigfaltigkeit M zusätzlich vollständig, so ist M' vollständig und es gilt die globale Aussage für ein $q \in M \cap M'$ mit $T_qM = T_qM'$ sowie $II = II'$ in q:*

$$c \text{ Geodäte in } M \text{ durch } q \Rightarrow c \text{ Geodäte in } M' \text{ durch } q.$$

Insbesondere ist $c(t) \in M \cap M'$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Nach Voraussetzung an M ist M' ebenso vollständig und zusammenhängend, da es das Bild von M unter der Isometrie σ_p ist. Die Exponentialabbildung $\exp_q$ ist damit in M und M' auf ganz T_qM definiert und identisch, somit folgt unmittelbar die Behauptung (siehe Beweis von Lemma 5.2.1). □

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir nun den zentralen Satz dieser Arbeit, zu dessen Beweis wir alle vorherigen Konstruktionen verwenden:

Satz 5.2.1 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{k,n}$ eine parallele, vollständige und zusammenhängende m-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann ist $\sigma_p(M) = M$ für beliebiges $p \in M$, d.h. M ist eine symmetrische Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{k,n}$.*

Beweis. Sei wie zuvor $M' := \sigma_p(M)$, bleibt also zu zeigen: $M' = M$. Insbesondere ist M' nach Lemma 2 und Folgerung 3 parallel und zusammenhängend. Sei $U \subseteq \operatorname{int}(M \cap M')$ die offene Umgebung aus Satz 5.1.1 mit $\sigma_p(U) = U$.
Sei $W := \overline{\operatorname{int}(M \cap M')} \subseteq M$ der Abschluss des Inneren von $M \cap M'$ als Teilmenge von M aufgefasst. Insbesondere ist W nicht leer, da $U \subseteq W$ und U nach Satz 5.1.1 nicht leer ist. Nun ist unser Ziel zu zeigen, dass W offen in M ist, denn dann gilt $W = M$.

Sei $\tilde{p} \in W$ beliebig, dann existiert eine Folge von Punkten $(p_j)_{j=0}^{\infty} \subseteq \mathrm{int}(M \cap M')$ mit $p_j \xrightarrow{j \to \infty} \tilde{p}$ in M. Für diese p_j gilt gerade:

$$T_{p_j} M = T_{p_j} M' \text{ und } II = II' \text{ in } p_j,$$

wobei II' die 2. Fundamentalform auf M' bezeichne.
Zeigen nun, dass $\tilde{p} \in M'$:
Da $\tilde{p}$ im Abschluss von W liegt, schneidet eine offene Umgebung $\bar{U} := \exp_{\tilde{p}}(B_\epsilon(0))$ von $\tilde{p}$ für ein hinreichend klein gewähltes $\epsilon > 0$ gerade das Innere von W. Dies ist gleichbedeutend damit, dass eine Geodäte c mit $c(0) = \tilde{p}$ in M existiert, die einen Punkt $q \in \mathrm{int}(M \cap M') \cap \bar{U}$ mit $\tilde{p}$ verbindet. Zudem ist M und folgerichtig M' vollständig, also liegt c nach Folgerung 5.2.1 komplett in M'. Damit gilt ebenso $c(0) = \tilde{p} \in M'$.
Da die Folge $(p_j)_{j=0}^{\infty}$ $\tilde{p}$ entgegenstrebt und $\tilde{p}$ wie die einzelnen p_j im Durchschnitt von M und M' liegt, folgt somit:

$$T_{\tilde{p}} M = T_{\tilde{p}} M' \text{ und } II = II' \text{ in } \tilde{p}.$$

Nach Lemma 5.2.1 existiert dann eine offene Umgebung von $\tilde{p}$ in $M \cap M'$. Da $\tilde{p} \in W$ beliebig gewählt war, ist W folgerichtig offen und damit gilt gerade $W = M$.
Analog lässt sich dies für W als Teilmenge von M' mit dem Ergebnis $W = M'$ durchführen.
In Konklusion folgt damit

$$M = W = M' = \sigma_p(M) \Leftrightarrow M = \sigma_p(M).$$

M ist also eine symmetrische Untermannigfaltigkeit. □

6 Beispiele

Zum Abschluss dieser Arbeit wollen wir die theoretischen Betrachtungen aus den vorherigen Kapiteln anhand zweier zutreffender Beispiele veranschaulichen. Als Erstes befassen wir uns mit der Sphäre S^1 auf dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$ und als Zweites betrachten wir eine Untermannigfaltigkeit M im echt pseudo-euklidischen Raum $\mathbb{R}^{1,3}$. Das Vorgehen wird bei beiden Beispielen dasselbe sein, zunächst definieren wir die jeweilige Untermannigfaltigkeit anhand seiner lokalen Koordinatensysteme, bestimmen Tangential- und Normalenraum, prüfen ob die Untermannigfaltigkeit ausgeartet ist und zeigen dass die 2. Fundamentalform parallel ist. Weiterhin wird eine Geodäte entsprechend Satz 2.4.1 und die dazugehörige Differentialgleichung aus Folgerung 3.2.1 angegeben bzw. berechnet. Abschließend betrachten wir die Isometrie σ_p auf der jeweiligen Untermannigfaltigkeit und führen eine Probe durch, ob die in den Hauptergebnissen aus Abschnitt 5 postulierten Aussagen für diese Beispiele zutreffen.

6.1 Die Sphäre $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$

Die Sphäre $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ ist eine 1-dimensionale C^∞ Untermannigfaltigkeit im euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$ und Bild folgender Immersionen für $i = 1, 2$:

$$\varphi_i : T_i \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \varphi_i(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix};$$

wobei $T_i \subseteq \mathbb{R}$ offen mit $T_1 = (0, 2\pi)$ und $T_2 = (-\pi, \pi)$ sind (vgl. Bsp. 2.2.1). Zur Vereinfachung schreiben wir im Folgenden φ und meinen dann das jeweils zutreffende (oder eines der zutreffenden) φ_i, je nach Urbild von $\varphi(x)$.
Bestimmen nun den Tangential- und Normalenraum an S^1 in einem beliebigen Punkt $\varphi(x) =: p \in S^1$:

$$\begin{aligned} \text{Der Tangentialraum:} \qquad & T_pS^1 = \operatorname{span}\left(\{p\} \times \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\right\}\right) \\ & = \operatorname{span}\left(\{p\} \times \left\{\begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}\right\}\right) \\ \text{Der Normalenraum:} \qquad & (T_pS^1)^\perp = \operatorname{span}\left(\{p\} \times \left\{\begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}\right\}\right) \end{aligned}$$

Dies lässt sich leicht einsehen, denn

$$\left\langle \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Insbesondere ist S^1 eine nichtausgeartete Untermannigfaltigkeit, was unmittelbar aus der positiven Definitheit des Standardskalarprodukts folgt.
Als Nächstes zeigen wir, dass S^1 zusätzlich eine parallele Untermannigfaltigkeit ist. Wählen hierzu zunächst eine Basis des Tangentialraums T_pS^1 , hier besteht diese lediglich aus

$$Y(p) = Y(\varphi(x)) := \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}.$$

$II\big(Y(p), Y(p)\big)$ bildet dann eine Basis von $N(x)$. Zeigen damit nun, dass die 2. Fundamentalform II $\nabla^\perp$-parallel ist:

$$\begin{aligned}
&(\nabla^\perp_{\dot\varphi(x)} II)\big(Y(p), Y(p)\big) \\
&= \nabla^\perp_{\dot\varphi(x)} II\big(Y(p), Y(p)\big) - II\big(\nabla_{\dot\varphi(x)} Y(p), Y(p)\big) - II\big(Y(p), \nabla_{\dot\varphi(x)} Y(p)\big) \\
&= \nabla^\perp_{\dot\varphi(x)} \begin{pmatrix} -\cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix} - 2II\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -\cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix}^T}_{=0}, Y(p)\right) \\
&= \begin{pmatrix} \sin(x) \\ -\cos(x) \end{pmatrix}^\perp = 0.
\end{aligned}$$

Also ist $\nabla^\perp II = 0$, d.h. S^1 ist eine parallele Untermannigfaltigkeit. Damit können wir nun die Sätze aus den vorherigen Kapiteln anwenden und an der S^1 nachprüfen.
Sei p wie oben ein beliebiger Punkt auf S^1 und $V \in T_pS^1$ ein beliebiger Tangentialvektor in p mit

$$V = a \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} \text{ für } a \in \mathbb{R}.$$

Dann hat die nach Satz 2.4.1 eindeutig bestimmte Geodäte $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S^1$ durch p in Richtung V folgende Gestalt:

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos(at + x) \\ \sin(at + x) \end{pmatrix}, \text{ denn } c(0) = p \text{ und } \dot c(0) = \begin{pmatrix} -a\sin(at + x) \\ a\cos(at + x) \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = V.$$

Also stellen sich die linear unabhängigen Vektorfelder entlang c nach Satz 1 aus Abschnitt 3.2. so dar:

$$B_1(t) = \dot{c}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin(at+x) \\ a\cos(at+x) \end{pmatrix},$$

$$B_2(t) = \frac{d}{dt}\, B_1(t) = \begin{pmatrix} -a^2\cos(at+x) \\ -a^2\sin(at+x) \end{pmatrix},$$

$$B_3(t) = \frac{d}{dt}\, B_2(t) = \begin{pmatrix} a^3\sin(at+x) \\ -a^3\cos(at+x) \end{pmatrix} = -a^2 \cdot B_1(t) + 0 \cdot B_2(t).$$

Damit erfüllt c die folgende Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen $c(0) = p$ und $c^{(1)}(0) = V$:

$$c^{(3)} = -a^2 \cdot c^{(1)}.$$

Wenden wir uns nun der Isometrie zu, die die leicht nachzurechnenden Forderungen aus Satz 4.2.1 (Symmetrie von Geodäten) in p erfüllt:

$$\sigma_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \sigma_p(q) = \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ \sin(2x) & -\cos(2x) \end{pmatrix} (q-p) + p =: A(q-p) + p.$$

Insbesondere erhält man nach genauerer Berechnung die (nach Satz 4.2.1 gültige) Gleichheit

$$\begin{aligned} \sigma_p(c(-t)) &= A\,(c(-t) - p) + p \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ \sin(2x) & -\cos(2x) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \cos(-at+x) \\ \sin(-at+x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} \\ &= c(t). \end{aligned}$$

In Konklusion ist S^1 also eine parallele, zusammenhängende und vollständige Untermannigfaltigkeit, da sich der Definitionsbereich jeder Geodäte c in S^1 auf $\mathbb{R}$ ausweiten lässt (vgl. c oben). Da hier der riemannsche Fall vorliegt, folgt nach Abschnitt 5.2., dass S^1 symmetrisch mit $\sigma_p(S^1) = S^1$ ist. Dies überprüfen wir nun für einen beliebigen Punkt $q := \varphi(\bar{x}) \in S^1$:

$$\begin{aligned}
\sigma_p(q) &= A(q-p)+p \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ \sin(2x) & -\cos(2x) \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \cos(\bar{x}) \\ \sin(\bar{x}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\cos(2x)\cos(\bar{x}) + \sin(2x)\sin(\bar{x})) - (\cos(2x)\cos(x) + \sin(2x)\sin(x)) \\ (\sin(2x)\cos(\bar{x}) - \cos(2x)\sin(\bar{x})) + (\cos(2x)\sin(x) - \sin(2x)\cos(x)) \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2x-\bar{x}) - \cos(2x-x) + \cos(x) \\ \sin(2x-\bar{x}) - \sin(2x-x) + \sin(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2x-\bar{x}) \\ \sin(2x-\bar{x}) \end{pmatrix} \in S^1.
\end{aligned}$$

Analog lässt sich zeigen, dass die Sphären $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ symmetrische Untermannigfaltigkeiten sind.

6.2 $M \subseteq \mathbb{R}^{1,3}$

Sei das pseudo-euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{1,3}$ definiert als

$$\langle x, x \rangle_1 = 2x_1x_3 - x_2^2 \text{ für } x \in \mathbb{R}^{1,3}.$$

Weiterhin sei die 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit M als Bild der Immersion

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to M, (r,s) \mapsto (r, s^2, s)$$

gegeben. Dann ist der Tangential- und Normalenraum für einen Punkt $p := \varphi(r,s) \in M$ wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned}
\text{Der Tangentialraum:} \qquad T_pM &= \operatorname{span}\left(\{p\} \times \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,s), \frac{\partial\varphi}{\partial s}(r,s) \right\} \right) \\
&= \operatorname{span}\left(\{p\} \times \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2s \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \\
\text{Der Normalenraum:} \qquad (T_pM)^\perp &= \operatorname{span}\left(\{p\} \times \left\{ \begin{pmatrix} 2s \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right).
\end{aligned}$$

Denn für alle $r, s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2s \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_1 = 0 \cdot 2s + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0,$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2s \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2s \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_1 = 2s \cdot 1 + 1 \cdot (-2s) = 0.$$

Prüfen nun ob M nicht ausgeartet ist, hierzu sei Y ein beliebiger und X ein fester Tangentialvektor in p mit

$$Y = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 2s \\ 1 \end{pmatrix}, X = \bar{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{b} \begin{pmatrix} 0 \\ 2s \\ 1 \end{pmatrix}$$

für entsprechende $a, b, \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}$. Setzen nun die 1. Fundamentalform (d.h. das Skalarprodukt) dieser Vektoren 0 und erhalten:

$$\begin{aligned}
& \langle X, Y \rangle_1 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \langle X, Y \rangle_1 = a\bar{a} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_1 + a\bar{b} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2s \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_1 \\
& \qquad + b\bar{a} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2s \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_1 + b\bar{b} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2s \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2s \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_1 \\
& \qquad = a\bar{a} \cdot 0 + a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{b} \cdot (-4s^2) \\
& \qquad = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -\bar{a}b = \bar{b}(a + b(-4s^2)) \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } \bar{a}, \bar{b}, s \in \mathbb{R} \text{ fest,} \\
\Leftrightarrow \quad & \bar{a} = 0, \bar{b} = 0.
\end{aligned}$$

Also ist der einzige Vektor, der zu allen Tangentialvektoren orthogonal ist, gerade der Nullvektor. D.h. M ist nichtausgeartet.
Zeigen nun, dass M parallel ist, wenden uns also der 2. Fundamentalform II in allen Punkten $p \in M$ zu. Da

$$\operatorname{span}\left(\left\{ II\big(X(p), Y(p)\big) \middle| X(p), Y(p) \in \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, s), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(r, s) \right\} \right\} \right) = N(r, s)$$

ist, reicht es also aus die kovariante Ableitung der 2. Fundamentalform auf dem Normalenbündel für alle Kombinationsmöglichkeiten der Basisvektoren des $T_{\varphi(r,s)}M$ in die beiden tangentialen Richtungen $\partial\varphi/\partial r$ und $\partial\varphi/\partial s$ zu berechnen:

$$(\nabla^{\perp}_{\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r,s)} II) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \nabla^{\perp}_{\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,s)} \underbrace{II\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)}_{=0} - 2II\left(\underbrace{\nabla^{\perp}_{\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,s)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{=0},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0,$$

$$(\nabla^{\perp}_{\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,s)}II)\left(\begin{pmatrix}0\\2s\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2s\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$= \nabla^{\perp}_{\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,s)}II\left(\begin{pmatrix}0\\2s\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2s\\1\end{pmatrix}\right) - 2II\left(\begin{pmatrix}0\\2s\\1\end{pmatrix},\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,s)}\begin{pmatrix}0\\2s\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$= \nabla^{\perp}_{\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,s)}\left(\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}0\\2s\\1\end{pmatrix}\right)^{\perp} - 2II\left(\begin{pmatrix}0\\2s\\1\end{pmatrix},\underbrace{\left(\frac{d}{dr}\begin{pmatrix}0\\2s\\1\end{pmatrix}\right)^{T}}_{=0}\right)$$
$$= \nabla^{\perp}_{\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,s)}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}^{\perp} = \nabla^{\perp}_{\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,s)}\left(2\begin{pmatrix}2s\\1\\0\end{pmatrix}+(-4s)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)^{\perp} = \nabla^{\perp}_{\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,s)}\begin{pmatrix}4s\\2\\0\end{pmatrix}$$
$$= \left(\frac{d}{dr}\begin{pmatrix}4s\\2\\0\end{pmatrix}\right)^{\perp} = 0,$$

$$(\nabla^{\perp}_{\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,s)}II)\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2s\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$= \nabla^{\perp}_{\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,s)} \underbrace{II\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2s\\1\end{pmatrix}\right)}_{=0} - II\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\underbrace{\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,s)}\begin{pmatrix}0\\2s\\1\end{pmatrix}}_{=0}\right)$$
$$- II\left(\underbrace{\nabla_{\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,s)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{=0},\begin{pmatrix}0\\2s\\1\end{pmatrix}\right) = 0,$$

$$(\nabla^{\perp}_{\frac{\partial\varphi}{\partial r}(r,s)}II)\left(\begin{pmatrix}0\\2s\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0 \text{ analog.}$$

Obige Berechnungen lassen sich dann analog mit gleichem Ergebnis für die tangentiale Richtung $\partial\varphi/\partial s$ durchführen. Also ist die kovariante Ableitung der 2. Fundamentalform auf dem Normalenbündel stets 0 und M damit eine parallele Untermannigfaltigkeit.
Betrachten nun einen beliebigen Tangentialvektor V in T_pM mit

$$V = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\2s\\1\end{pmatrix} \text{ für } a, b \in \mathbb{R}.$$

Dann ist die nach 2.4.1 eindeutige Geodäte $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ durch p in Richtung V gerade wie folgt bestimmt:

$$c(t) = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}b^3t^3 + 2b^2st^2 + at + r\\(bt+s)^2\\bt+s\end{pmatrix}, \text{ da } c(0) = p \text{ und } \dot{c}(0) = V.$$

Damit stellen sich die linear unabhängigen Vektorfelder entlang c nach Satz 1 aus Abschnitt 3.2 so dar:

$$B_1(t) = \dot{c}(t) = \begin{pmatrix}2b^3t^2 + 4b^2st + a\\2b^2t + 2bs\\b\end{pmatrix}$$

$$B_2(t) = \frac{d}{dt}\,B_1(t) = \begin{pmatrix}4b^3t + 4b^2s\\2b^2\\0\end{pmatrix}$$

$$B_3(t) = \frac{d}{dt}\,B_2(t) = \begin{pmatrix}4b^3\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$B_4(t) = \frac{d}{dt}\,B_3(t) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \cdot B_2(t) \text{ für alle } t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Damit erfüllt c also folgende Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen $c(0) = p$ und $c^{(2)}(0) = (4b^2s, 2b^2, 0)^T$:

$$c^{(4)} = 0 \cdot c^{(2)}.$$

Die Isometrie σ_p nach Satz 4.2.1 (Symmetrie von Geodäten) ist dann gerade:

$$\sigma_p : \mathbb{R}^{1,3} \to \mathbb{R}^{1,3}, \sigma_p(q) = \begin{pmatrix}-1 & 4s & -8s^2\\0 & 1 & -4s\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}(q-p) + p =: A(q-p) + p.$$

Insbesondere folgt die nach Satz 4.2.1 gültige Gleichheit:

$$\begin{aligned}
\sigma_p(c(-t)) &= A(c(-t)-p)+p \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 4s & -8s^2 \\ 0 & 1 & -4s \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}b^3t^3 + 2b^2st^2 - at + r \\ (-bt+s)^2 \\ -bt+s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r \\ s^2 \\ s \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} r \\ s^2 \\ s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 4s & -8s^2 \\ 0 & 1 & -4s \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}b^3t^3 + 2b^2st^2 - at \\ b^2t^2 - 2bst \\ -bt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ s^2 \\ s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}b^3t^3 - 2b^2st^2 + 4b^2st^2 - 8bs^2t + 8bs^2t + at + r \\ b^2t^2 - 2bst + 4bst + s^2 \\ bt+s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}b^3t^3 + 2b^2st^2 + at + r \\ (bt+s)^2 \\ bt+s \end{pmatrix} = c(t).
\end{aligned}$$

Der Definitionsbereich einer beliebigen Geodäte c auf M lässt sich auf ganz $\mathbb{R}$ ausweiten (vgl. c oben), folglich ist M eine parallele, zusammenhängende und vollständige Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{1,3}$. Nach Satz 5.2.1 ist S^1 dann symmetrisch mit $\sigma_p(M) = M$. Sei hierzu $q := \varphi(\bar{r}, \bar{s}) \in M$ ein beliebiger Punkt, überprüfen nun ob $\sigma_p(q) \in M$:

$$\begin{aligned}
\sigma_p(q) = A(q-p)+p &= \begin{pmatrix} -1 & 4s & -8s^2 \\ 0 & 1 & -4s \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \bar{r} \\ \bar{s}^2 \\ \bar{s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r \\ s^2 \\ s \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} r \\ s^2 \\ s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\bar{r} + r + 4s\bar{s}^2 - 4s^3 - 8s^2\bar{s} + 8s^3 + r \\ \bar{s}^2 - s^2 - 4s\bar{s} + 4s^2 + s^2 \\ -\bar{s} + 2s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\bar{r} + 2r + 4s\bar{s}^2 - 8s^2\bar{s} + 4s^3 \\ (-\bar{s}+2s)^2 \\ -\bar{s}+2s \end{pmatrix} \in M.
\end{aligned}$$

7 Zusammenfassung

Abschließend wollen wir die Ergebnisse dieser Arbeit kurz zusammenfassen.

Als Ausgangssituation war eine parallele Untermannigfaltigkeit M im pseudo-euklidischen Raum gegeben. Nach bekannten Sätzen existierte für jeden Punkt p in M und jeden Tangentialvektor an M in p eine eindeutige Geodäte bzgl. eines entsprechenden Parameterintervalls. Durch Differenzieren dieser Geodäte mithilfe der 2. Fundamentalform und der Weingartenabbildung erhielten wir bis zu einem gewissen Grad linear unabhängige, parallele Vektorfelder, mit dessen Hilfe wir die gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten aus Kapitel 3 erhielten, die gerade diese Geodäte als Lösung besaß. Aufgrund der Eindeutigkeit einer solchen Lösung der Differentialgleichung gelang es uns zu zeigen, dass die Isometrie σ_p die Geodäte in sich selbst überführt. Die Exponentialabbildung in p lieferte uns dann gerade eine offene Umgebung dieses Punktes, die wiederum durch σ_p auf sich selbst abgebildet wurde. Stellte man nun zusätzlich die Forderung der Vollständigkeit an eine zusammenhängende, parallele Untermannigfaltigkeit M, so folgte durch den zentralen Satz 5.2.1 gerade die Hauptaussage dieser Arbeit: M ist eine symmetrische Untermannigfaltigkeit.

Ich danke Prof. Dr. I. Kath für die zahlreichen Gespräche und Anregungen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Literaturverzeichnis

[Car92] Carmo, M. do: *Riemannian Geometry.* 2. Auflage. Birkhäuser Boston, 1992

[For08] Forster, Otto: *Analysis 2.* 8. Auflage. Vieweg+Teubner Verlag, 2008. – 108–109 S.

[Küh10] Kühnel, Wolfgang: *Differentialgeometrie.* 5. Auflage. Vieweg+Teubner Verlag, 2010. – 158–159 S.

[O'N83] O'Neill, Barrett: *Semi-Riemannian geometry.* Academic Press, 1983

[Pet98] Petersen, Peter: *Riemannian Geometry.* Springer-Verlag New York, 1998. – 107–109,117–118,125–126 S.

[Str79] Strübing, Wolf: Symmetric Submanifolds of Riemannian Manifolds. In: *Mathematische Annalen 245, 37-44* (1979)