¡ 3.5　线性子空间

一、 子空间的定义与判别

二、 生成子空间的性质

三、 子空间的交与和

四、子空间的维数

一、线性子空间的定义与判别

定义3.5.1 设V是数域 F 上的线性空间，W是 V 的一个非空子集。若 W 对 V 的两种线性运算也构成 F 上的线性空间，则称 W 是 V 的**线性子空间**，简称**子空间**。

定理3.5.1 设 V 是数域 F 上的线性空间，W 是 V 的一个非空子集。若 W 满足

(1) 对任意$\alpha,\beta\in W$, 均有 $\alpha+\beta\in W$;

(2) 对任意 $\alpha\in W$ 以及任意 $k\in F$，均有$k\alpha\in W$,

则 W 是 V 的子空间。

如何证明W是V的子空间:

(1) W是V的非空子集;

(2) W对加法与数乘运算封闭.

例3.1.3　设V是线性空间，则V一定包含零向量θ。同时, V本身及$\{\theta\}$都是V的子空间, 称它们为V的**平凡子空间**。V 的其它子空间，如果还有的话，均称为**非平凡子空间**。

例3.1.4　$\mathbf{R}^3$的下列子集是否构成 $\mathbf{R}^3$的子空间？为什么？

(1) $W_1=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_1+x_2+x_3=0\}$;

(2) $W_2=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_1+x_2+x_3=1\}$.

解　(1) 构成子空间.（2）不构成子空间。

例　n阶数量矩阵可看成是$F^{n\times n}$的子空间。

$F[x]_n$是$F[x]$的子空间.

二、生成子空间

定理3.1.1　设 V 是数域 F 上的线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,$¡ $,\alpha_m$是 V 中 m 个向量，则 V 的子集合

$$\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_m\alpha_m \mid k_1,k_2,\ldots,k_m\in F\}$$

构成V的子空间，称为**由 $\alpha_1,\alpha_2,$¡ $,\alpha_m$ 生成的子空间**，记为 $L(\alpha_1,\alpha_2,$¡ $,\alpha_m)$。

证　显然 V 是非空的。

任取数$c\in F$ 以及 $L(\alpha_1,\alpha_2,$¡ $,\alpha_m)$ 中的两个向量 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+$¡ $+k_m\alpha_m$, $\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+$¡ $+l_m\alpha_m$, 有

$$\alpha+\beta=(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)+(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m)$$
$$=(k_1+l_1)\alpha_1+(k_2+l_2)\alpha_2+\cdots+(k_m+l_m)\alpha_m$$
$$\in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$$

$$c\alpha = c(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m)$$
$$=(ck_1)\alpha_1 + (ck_2)\alpha_2 + \cdots + (ck_m)\alpha_m$$
$$\in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$$

故由定理3.5.1，$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 构成线性空间，亦即为V的子空间。

例：$F[x]_n = L(1, x, x^2, \cdots x^{n-1})$.

$C[-\pi,\pi]$有无穷多个子空间 $L(\cos nx, \sin nx)$ $(n = 1,2,\cdots)$

例3.1.5 设 $X_1, X_2, \dots, X_t$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，则

$$N(A) = L(X_1, X_2, \dots, X_t)$$

例3.1.6 设 $A \in F^{m\times n}$，把 A按列分块

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$$

则 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$是 F^m 的子空间，称之为矩阵A的列空间，记为 $R(A) = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

结论：线性方程组 $AX = b$ 有解 $\Leftrightarrow b \in R(A)$。

此外，$R(A^T)$是由 A 的行向量组生成的子空间，也称为矩阵 A 的行空间。

注：理解$N(A), R(A), R(A^T)$这几个记号的含义.

例3.5.2 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\cdots,\beta_t$是线性空间V的两组向量，则 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) = L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$ 的充分必要性是

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\} \cong \{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}.$$

证　充分性　设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\} \cong \{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$. 任取 $\gamma \in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，则 γ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出。又 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出，故 γ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出。所以 $\gamma \in L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$

由此得

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) \subseteq L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$$

同理可证 $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t) \subseteq L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

于是　$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) = L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.

必要性　设 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) = L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s \in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s) = L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表出。同理$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 也可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出。所以

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\} \cong \{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}.$$

例3.2.3（向量组生成的向量空间的基和维数）

(1) 设$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的极大无关组，

则　$L(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}) = L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$.

（2）向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关组都是生成子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)$ 的基；

(3) $\dim(L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)) = r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\} = r$.

例3.2.2（齐次线性方程组解空间的基和维数）

设 $A \in F^{m\times n}$，秩$(A) = r$ $(1 \le r < n)$，则 $N(A)$是 F^n的子空间。任取齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系 $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$，容易看出它们就是 $N(A)$ 的一个基，因此

$$维[N(A)] = n - r。$$

例 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

的解空间的一个基和维数。

解 已知该方程组有基础解系

$$X_1 = (-2,1,0,0,0)^T,\ X_2 = (-2,0,1,0,1)^T$$

因此，其解空间 $N(A)$ 的一个基为 X_1, X_2，且其维数是2。

易得矩阵A的零空间$N(A)$与行空间$R(A^T)$之间有下列重要关系：

定理3.2.1 设 $A \in F^{m\times n}$，则

$$维(N(A)) + 维(R(A^T)) = n$$

注 自由未知数的个数＋秩(A)＝未知数的个数

三、子空间的交与和

定理3.5.2 设W_1, W_2是线性空间V的两个子空间，则$W_1 \cap W_2$也是V的子空间。称之为W_1与W_2的交空间。

证明 因 W_1, W_2是 V子空间，故V的零向量同时属于 W_1, W_2，即 $\theta \in W_1 \cap W_2$。所以 $W_1 \cap W_2$是V的非空子集。

任取 $\alpha, \beta \in W_1 \cap W_2$，则 $\alpha, \beta \in W_1$。因 W_1 是子空间，故 $\alpha+\beta \in W_1$。同理 $\alpha+\beta \in W_2$，故 $\alpha+\beta \in W_1 \cap W_2$。

任取 $\alpha \in W_1 \cap W_2, k \in F$，则由$\alpha \in W_1$ 可得$k\alpha \in W_1$. 同理可证 $k\alpha \in W_2$。所以 $k\alpha \in W_1 \cap W_2$。

根据子空间的判别定理，可知 $W_1 \cap W_2$是子空间。

定理3.5.3 设 W_1, W_2 是线性空间V的两个子空间，则下列集合

$$\{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$$

也是V的子空间，称之为W_1与W_2的和空间，记为W_1+W_2.

（注：指所有能表示为 $\alpha_1+\alpha_2$，(而$\alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2$) 的向量组成的集合）

证 因 $\theta = \theta + \theta$，故 $\theta \in W_1+W_2$. 说明 W_1+W_2是V的非空子集。

任取$\alpha, \beta \in W_1+W_2$，则 $\alpha = \alpha_1+\alpha_2, \beta = \beta_1+\beta_2$，这里$\alpha_1, \beta_1 \in W_1$，$\alpha_2, \beta_2 \in W_2$。因 $\alpha_1+\beta_1 \in W_1, \alpha_2+\beta_2 \in W_2$，故

$$\alpha+\beta = (\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2) = (\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2) \in W_1+W_2$$

任取 $\alpha \in W_1+W_2, k \in F$，则 $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$，其中 $\alpha_1 \in W_1$，$\alpha_2 \in W_2$。又 $k\alpha_1 \in W_1$，$k\alpha_2 \in W_2$，故

$$k\alpha = k(\alpha_1+\alpha_2) = k\alpha_1 + k\alpha_2 \in W_1+W_2.$$

于是 W_1+W_2 是子空间。

注 一般 $W_1 \cup W_2$不再是子空间。

定义 设 W_1, W_2 是线性空间V的两个子空间，如果和 W_1+W_2中每个向量α的分解式

$$\alpha = \alpha_1+\alpha_2, \quad \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2$$

是唯一的，这个和就称为直和，记为$W_1 \oplus W_2$.

例3.5.4 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$与$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$是线性空间$V$中两组向量，则

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) + L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$$

证明：$\forall \gamma \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) + L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$，

则有$\gamma = \alpha + \beta$，其中

$\alpha \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s), \beta \in L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$，

这样α可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表出，

β可由$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$线性表出，

因此$\gamma = \alpha + \beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$线性表出，

即$\gamma \in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$,

所以有 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$
$\subseteq L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.

反之，任取$\gamma \in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$,则有

$$\gamma = k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_t\beta_t,$$

令 $\alpha = k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$, $\beta = l_1\beta_1+l_2\beta_2+\cdots+l_t\beta_t$,

则$\gamma=\alpha+\beta$，且

$$\alpha \in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s),\quad \beta \in L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t).$$

这样 $\gamma \in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$

从而有 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$
$\supseteq L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$. 结论得证.

四、子空间的维数

(1) 有限维线性空间的子空间也是有限维的；

(2) 有限维线性空间V的子空间W的任一个基均可扩充为V的基；

例3.2.6 已知 R^4 中的三个向量

$$\alpha_1=(1,2,0,1),\alpha_2=(-1,1,1,1),\alpha_3=(4,14,2,8)$$

求 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的一个基及维数，并将这个基扩充为 R^4 的一个基。

解 令

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{pmatrix}1&-1&4\\2&1&14\\0&1&2\\1&1&8\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&-1&4\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

由此得向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，且 α_1,α_2 是一个极大无关组。于是，生成子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的维数是2，且 α_1,α_2 是它的一个基。

构造向量 $\alpha_4=(0,0,1,0),\alpha_5=(0,0,0,1)$ ，由于

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5]=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\2&1&0&0\\0&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}\quad \text{满秩}$$

$\therefore r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5)=4$,所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$线性无关.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ 即可作为 R^4 的一个基。

定理3.5.4 设W_1,W_2是线性空间V的两个有限维子空间，则

$$\dim(W_1)+\dim(W_2)=\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)$$

称上式为维数公式

证明：设 $\dim(W_1)=s,\dim(W_2)=t,\dim(W_1\cap W_2)=r$.

则只需证明：$\dim(W_1+W_2)=s+t-r$.

取$W_1\cap W_2$的一个基$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$, $\because W_1\cap W_1$是W_1和W_2的子空间,

故由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$可分别扩充为W_1和W_2的基，

设之为$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_s$和$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_t$.

则$W_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_s),W_2=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_t)$,

$$W_1+W_2=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_s,\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_t),$$

$$r+(s-r)+(t-r)=s+t-r.$$

下面只需证明：$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_s,\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_t$线性无关.

令

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta_{r+1}+\cdots+k_s\beta_s+k_{s+1}\gamma_{r+1}+\cdots+k_{s+t-r}\gamma_t=\theta \quad (1)$$

则

$$\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta_{r+1}+\cdots+k_s\beta_s$$
$$=-k_{s+1}\gamma_{r+1}-\cdots-k_{s+t-r}\gamma_t \quad (2)$$

则 α既属于W_1又属于W_2,从而$\alpha\in W_1\cap W_2$.

于是有：$\alpha=l_1\alpha_1+\cdots+l_r\alpha_r$，代入(2)式得

$$l_1\alpha_1+\cdots+l_r\alpha_r+k_{s+1}\gamma_{r+1}+\cdots+k_{s+t-r}\gamma_t=\theta \quad (3)$$

已知$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_t$是$W_2$的基，所以线性无关.由(3)式得

$$k_{s+1}=\cdots=k_{s+t-r}=0$$

代入(1)式，得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta_{r+1}+\cdots+k_s\beta_s=\theta \quad (4)$$

已知$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_s$是$W_1$的基，所以线性无关由(4)式得

$$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$$

于是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_s,\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_t$线性无关.

结论得证。

推论：如果n维线性空间V中两个子空间W_1,W_2的维数之和大于n,则W_1,W_2必含有非零的公共向量.

即 $W_1\cap W_2$有非零元.

例3.5.5 已知R^3中的两组向量：

$$\begin{cases}\alpha_1=(1,1,2)\\ \alpha_2=(2,1,1)\\ \alpha_3=(3,2,3)\end{cases},\quad \begin{cases}\beta_1=(1,2,1)\\ \beta_2=(1,1,1)\end{cases}$$

令$W_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),W_2=L(\beta_1,\beta_2)$,求$W_1+W_2$与$W_1\cap W_2$.

解：通过求生成向量组的秩及极大无关组，易得

$$\dim(W_1)=2,\quad \dim(W_2)=2,\quad \dim(W_1+W_2)=3$$

并且 $W_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$, $W_1+W_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1)$

由维数公式，得 $\dim(W_1\cap W_2)=1$.

设 $\gamma\in W_1\cap W_2$,

则有 $\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=k_3\beta_1+k_4\beta_2$.

即 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2-k_3\beta_1-k_4\beta_2=\theta$,

按分量写出，得

$$\begin{cases}k_1+2k_2-k_3-k_4=0\\ k_1+k_2-2k_3-k_4=0\\ 2k_1+k_2-k_3-k_4=0\end{cases}$$

由于此方程组系数矩阵的秩为3,所以该方程组的基础解系恰含一个解向量，求出一个基础解系为：

$$(k_1,k_2,k_3,k_4)=(1,1,-1,4),$$

于是 $\gamma=\alpha_1+\alpha_2=-\beta_1+4\beta_2=(3,2,3)$.

故 $W_1\cap W_2=L(\gamma)$.

本节小结

1 子空间的定义与判别

2 生成子空间的性质

3 子空间的交与和

4 子空间的维数

至此： ¡ 3.1, ¡ 3.2, ¡ 3.4, ¡ 3.5

作业 习题三(P163)：

12, 13, 41 ,48, 50

(1-16题, 33-50题均可做练习)