线性代数 B 期末试题样题参考答案

得分	

一、 填空题(每小题 4 分，共 20 分)

1、 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^{-1}=$ __ $\begin{pmatrix}0&0&2&-3\\0&0&-1&2\\1&-1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ ___ ；.

2、 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&a&0\\0&0&a^2\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 a 满足条件 ___ $a>1$ ___；

3、 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ 的秩为 4，正惯性指数为 3，则其规范形为 ___ $y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$ ___；

4、 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 均为 4 维列向量，已知 4 阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，又 $|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，则 4 阶行列式 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,2\beta_1+\beta_2|=$ ___ $n-2m$ ___；

5、 已知 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{12}\\a_{31}&a_{33}&a_{32}\\a_{21}&a_{23}&a_{22}\end{pmatrix}$，若 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$，则 $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&6&0\\0&5&4\end{pmatrix}$。

得分	

二（10 分）、讨论 a,b 取何值时，下列线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2 &=1\\ x_1-x_3&=1\\ x_1+ax_2+x_3&=b\end{cases}$

(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷解，并在有无穷多解时，用其导出方程组的基础解系表示方程组的通解。

解 将方程组的增广矩阵化为阶梯形：

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&0&1\\1&0&-1&1\\1&a&1&b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&2-a&b-1\end{array}\right)\cdots$$

（1） 当 $a\neq 2$ 时，原方程组有唯一解。

（2） 当 $a=2$，且 $b\neq 1$ 时原方程组无解。

（3） 当$a=2,b=1$时，原方程组有无穷多解。⋯

方程组增广矩阵化为

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&1\\1&0&-1&1\\1&a&1&b\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&1\\1&0&-1&1\\1&2&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

该矩阵所对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1 \quad -x_3=1\\0 \quad +x_2+x_3=0\end{cases}$$

解得特解为$\gamma_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，导出方程组的基础解系$\xi=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$。

所以原方程的通解为是 $\gamma_0+k\xi$（k 为任意常数）………………

得分	

三 （10 分）、设矩阵$A=diag\left(1,2,-1\right)$，且矩阵$X$满足$XA^*=3X+A^{-1}$。求矩阵$X$。

解: 由已知可得$\left|A\right|=-2$ …………

方程两边同时右乘A可得：$X\left|A\right|I=3XA+I$，

整理得： $X(\left|A\right|I-3A)=I$， …………

从而$X=(-2I-3A)^{-1}=\left(\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&6&0\\0&0&-3\end{pmatrix}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-8&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{-5}&0&0\\0&\frac{1}{-8}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

得分	

三（10 分）、设$\alpha_1=(2,1,3,1)^T,\alpha_2=(-1,1,-3,1)^T$，$\beta_1=(4,5,3,-1)^T$，$\beta_2=(1,5,-3,1)^T$。令$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$，$V_2=L(\beta_1,\beta_2)$，求向量空间$V_1+V_2$的一组基，并分别求出$\beta_1,\beta_2$在这组基下的坐标。

解：因为$V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$，且由行变换得

$$\begin{pmatrix}2&-1&4&1\\1&1&5&5\\3&-3&3&-3\\1&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&1\\0&0&3&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&\frac{5}{3}\\0&0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\left(\quad or\quad \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-\frac{5}{2}&0\\0&0&\frac{3}{2}&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right)$$

…………………

从而，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$（或$\alpha_1,\alpha_2,\beta_2$）为$V_1+V_2$的一组基。且有$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$在这组基下坐标分别为

$$\beta_1=(0,0,1)^T,\beta_2=(0,\frac{5}{3},\frac{2}{3})^T\text{（或者 }\beta_1=(0,-\frac{5}{2},\frac{3}{2})^T,\beta_2=(0,0,1)^T\text{）。}$$

得分	

五（10 分）、已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$为所有 3 维实向量构成的线性空间$R^3$的两组基，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为$P=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$

且$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,试求：(1) 基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$；(2) 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 下有相同坐标的全体向量。

解:(1). 由基变换公式知$\left(\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\right)=\left(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\right)P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$,

故基β_1,β_2,β_3为$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.　　…………

(2). 设向量γ为任一在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与 β_1,β_2,β_3下有相同坐标的向量,坐标均$X=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T$，

则坐标变换公式有$X=PX$，即$\left(P-I\right)X=0$，解方程组$\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-1&-1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

得通解$X=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$（$k$为任意常数），　则$\gamma=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.

得分	

六（10分）、设 A 为一个方阵，若 α 是齐次线性方程组 $A^m X=0$ 的解，但不是齐次线性方程组 $A^{m-1}X=0$ 解，证明向量组 $\alpha, A\alpha,\ldots A^{m-1}\alpha$ 线性无关。

证明：设
$$k_1\alpha+k_2A\alpha+\cdots+k_mA^{m-1}\alpha=0 \qquad (1)$$

（1）式两边同时左乘 A^{m-1} 可知，$k_1A^{m-1}\alpha+k_2A^m\alpha+\cdots+k_mA^{2m-2}\alpha=k_1A^{m-1}\alpha+0+\cdots+0=0$

由已知可得 $A^{m-1}\alpha\neq 0$，故有 $k_1=0$；

（1）式两边同时左乘 A^{m-2} 可知，$0A^{m-2}\alpha+k_2A^{m-1}\alpha+\cdots+k_mA^{2m-3}\alpha=k_2A^{m-1}\alpha+0+\cdots+0=0$

由已知可得 $A^{m-1}\alpha\neq 0$，故有 $k_2=0$；

依此类推，（1）式两边同时左乘 A^{m-i},可得 $k_i=0$，其中 $i=1,2,\ldots m$。故向量组 $\alpha, A\alpha,\ldots A^{m-1}\alpha$ 线性无关。……………………………………………………………………

得分	

七（15分）、已知椭圆曲线方程 $f(x,y)=6x^2-6xy+6y^2-12x+9y+1=0.$

(1) 求椭圆方程中二次型部分 $f_1(x,y)=6x^2-6xy+6y^2$ 的矩阵 A；

(2) 将二次型 $f_1(x,y)$ 化为标准形，并写出所用的线性替换；

(3) 将椭圆曲线 $f(x,y)=0$ 化为 $a(X-x_0)^2+b(Y-y_0)^2=c$ 形式的标准形，并求出该椭圆的长轴与短轴值。

解: (1) $f_1(x,y)=6x^2-6xy+6y^2=(x,y)\begin{pmatrix}6&-3\\-3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}6&-3\\-3&6\end{pmatrix}$; ……………

(2)<u>**方法一**</u>: 正交变换法: $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6&3\\3&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda-9)$，$A$ 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=9.$

$\lambda_1=3$ 时，解 $\begin{pmatrix}-3&3\\3&-3\end{pmatrix}X=O$ 得属于 $\lambda_1=3$ 的特征向量为 $\alpha_1=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^T$（单位化后所得）。

$\lambda_1=9$ 时，解 $\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}X=O$ 得属于 $\lambda_1=3$ 的特征向量 $\alpha_1=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})^T$ (or $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})^T$)。做正交变换（正交替换）

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\quad\left(or\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)$$，则有 $f_1=3X^2+9Y^2$。………

<u>**方法二：**</u>配方法可得 $f_1(x,y)=6x^2-6xy+6y^2=6(x-\frac{1}{2}y)^2+\frac{9}{2}y^2$，做线性替换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$ 得 $f_1 = 6X^2 + \frac{9}{2}Y^2$…………

(3)利用正交变换（正交替换）法，可得

$f = 3X^2 + 9Y^2 - 12(\frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y) + 9(\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y) + 1 = 0$ 化简 $3(X - \frac{\sqrt{2}}{4})^2 + 9(Y \pm \frac{7\sqrt{2}}{12})^2 - \frac{11}{2} = 0$

$(or\ f = 3X^2 + 9Y^2 - 12(\frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y) + 9(\frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y) + 1 = 0)$

即：
$$\frac{(X - \frac{\sqrt{2}}{4})^2}{\frac{11}{6}} + \frac{(Y + \frac{7\sqrt{2}}{12})^2}{\frac{11}{18}} = 1 \quad \left(or \quad \frac{(X - \frac{\sqrt{2}}{4})^2}{\frac{11}{6}} + \frac{(Y - \frac{7\sqrt{2}}{12})^2}{\frac{11}{18}} = 1 \right)$$

该椭圆长轴为 $\sqrt{\frac{11}{6}}$ ，短轴为 $\sqrt{\frac{11}{18}}$ 。…………………………………………

得分	

八（15 分）、设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, 且 $\alpha_1 = (1, -1, 1)$ 是 B 的属于 λ_1 的一个特征向量，记 $B = A^5 - 4A^3 + I$,其中 I 为 3 阶单位矩阵。

(1) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量；(2) 求 B 的所有特征值和特征向量；(3) 求矩阵 B 。

解：（1）由 $A\alpha = \lambda\alpha$ 可知 $A^n\alpha = \lambda^n\alpha$,那么

$$B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + I)\alpha_1 = (\lambda^5 - 4\lambda^3 + 1)\alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以是矩阵属于特征值 $\mu_1 = -2$ 的特征向量。…………

（2）同理， $A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2, A\alpha_3 = \lambda_3\alpha_3$ ，有：

$$B\alpha_2 = (\lambda^5 - 4\lambda^3 + 1)\alpha_2 = \alpha_2 \quad B\alpha_3 = (\lambda^5 - 4\lambda^3 + 1)\alpha_3 = \alpha_3 。$$

因此，矩阵的特征值为 $\mu_1 = -2, \mu_2 = \mu_3 = 1$ 。

由矩阵 A 是对称矩阵知矩阵 $B = A^5 - 4A^3 + I$ 也是对称矩阵，设矩阵 B 关于特征值 $\mu_2 = \mu_3 = 1$ 的特征向量是 $\beta = (x_1, x_2, x_3)^T$ ，那么因为实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交，有

$$\alpha_1^T\beta = x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

所以矩阵关于特征值 $\mu_2 = \mu_3 = 1$ 的特征向量是 $\beta_2 = (1,1,0)^T, \beta_3 = (-1,0,1)^T$

因此，矩阵 B 属于特征值 $\mu_1 = -2$ 的特征向量是 $k\alpha_1$ ，其中 k 是不为 0 的任意常数。

矩阵 B 属于特征值 $\mu_2=\mu_3=1$ 的特征向量是 $k_2\beta_2+k_3\beta_3$，其中 k_2,k_3 是不全为 0 的任意常数。

……………

（2）由 $B\alpha_1=2\alpha_1, B\beta_2=\beta_2, B\beta_3=\beta_3$，有 $B(\alpha_1,\beta_2,\beta_3)=(-2\alpha_1,\beta_2,\beta_3)$

所以 $B=(-2\alpha_1,\beta_2,\beta_3)(\alpha_1,\beta_2,\beta_3)^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}=$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&-1\\2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$。…