2019-2020学年第一学期期末考试A卷参考答案

一、填空题

1、【正解】$\dfrac{1}{e^{\lambda}-1}$

【学解】 由$C\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!}=C(e^{\lambda}-1)=1\Rightarrow C=\dfrac{1}{e^{\lambda}-1}$

【考点延伸】《考试宝典》第二章【知识清单】2.2、离散型随机变量及分布

2、【正解】0.8413

【学解】 $X-Y\sim N(1,9)\Rightarrow P(X\leqslant Y+4)=P\left(\dfrac{X-Y-1}{3}\leqslant 1\right)=\Phi(1)=0.8413$

【考点延伸】《考试宝典》第二章【知识清单】2.3、连续型随机变量及分布

3、【正解】$\dfrac{\theta}{3}$

【学解】 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta},\ 0<x<\theta\\ 0,\ 其它\end{cases}$

$P(\min(X,Y)>z)=P(X>z,Y>z)=P(X>z)P(Y>z)=P^2(X>z)=[1-F_X(z)]^2$

故$P(\min(X,Y)\leqslant z)=1-[1-F_X(z)]^2=\begin{cases}0,\ z\leqslant 0\\ 1-\left(1-\dfrac{z}{\theta}\right)^2,\ 0<z<\theta\\ 1,\ z\geqslant\theta\end{cases}$

$\Rightarrow\min(X,Y)$的密度函数为$g(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta}-\dfrac{2z}{\theta^2},\ 0<z<\theta\\ 0,\qquad 其它\end{cases}$

$\Rightarrow E[\min(X,Y)]=2\int_0^{\theta}\left(\dfrac{1}{\theta}-\dfrac{z}{\theta^2}\right)zdz=\dfrac{\theta}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》第三章【知识清单】3.6、二维随机变量函数的分布

4、【正解】4

【学解】由题可得，$EX=\dfrac{1}{\lambda}=2\Rightarrow E\left[\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]=D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}=4$

【考点延伸】《考试宝典》第四章【知识清单】4.3、常见随机变量的数学期望及方差

5、【正解】$1-\alpha$

【学解】由 $\dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{S}\sim t(n-1)$

得 $P\left(\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\leqslant\mu\leqslant\bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}\leqslant\dfrac{\sqrt{n}\left(\bar{X}-\mu\right)}{S}\leqslant t_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$

【考点延伸】《考试宝典》第八章【知识清单】8.2、置信区间

二、【学解】设 $A_1=\{发送信号0\}$，$A_2=\{发送信号1\}$，$B_1=\{收到信号0\}$，$B_2=\{收到信号1\}$

则 $P(A_1)=P(A_2)=0.5$，$P(B_2|A_1)=0.2$，$P(B_1|A_2)=0.1$

1. $P(A_1B_1)=P(A_1)-P(A_1B_2)=0.5-P(B_2|A_1)P(A_1)=0.5-0.2\times0.5=0.4$

2. $P(B_1)=P(B_1A_1)+P(B_1A_2)=0.4+P(B_1|A_2)P(A_2)=0.4+0.1\times0.5=0.45$

3. $P(A_1|B_1)=\dfrac{P(A_1B_1)}{P(B_1)}=\dfrac{0.4}{0.45}=\dfrac{8}{9}$

【考点延伸】《考试宝典》第一章【重要题型】题型 4：全概率公式与贝叶斯公式

三、【学解】1. “A 为不可能事件”⇒“A 概率为 0”，反之不成立.

例如：X 服从 $U(0,1)$，$A=\left\{X=\dfrac{1}{2}\right\}$，则 A 概率为 0，但非不可能事件.

2. 当 $y\leqslant0$，$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=0$. 当 $y>0$，

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(-2\theta\ln X\leqslant y)=P\left(X\geqslant e^{-\frac{y}{2\theta}}\right)=1-\int_0^{e^{-\frac{y}{2\theta}}}\theta x^{\theta-1}dx=1-x^{\theta}\Big|_0^{e^{-\frac{y}{2\theta}}}=1-e^{-\frac{y}{2}}$$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\leqslant0\end{cases}$

【考点延伸】《考试宝典》第二章【知识清单】2.5、一维随机变量的函数的分布

四、【学解】1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^{x}Ce^{-2x}dy\,dx=C\int_0^{+\infty}xe^{-2x}dx=\frac{1}{4}C=1$，得 $C=4$

2. $f_X(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{x}4e^{-2x}dy=4xe^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant0\end{cases}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^{+\infty}4e^{-2x}dx=2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

由于$f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$，故X,Y不独立.

3. $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx\qquad \begin{cases}x>0\\ 0<z-x<x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ \frac{z}{2}<x<z\end{cases}$

故当$z\leqslant 0$时，$f_Z(z)=0$

当$z>0$时，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{z}4e^{-2x}dx=-2e^{-2x}\Big|_{\frac{z}{2}}^{z}=2(e^{-z}-e^{-2z})$

即$f_Z(z)=\begin{cases}2(e^{-z}-e^{-2z}), & z>0\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$

4. $P(X\leqslant Y+2)=\int_0^{+\infty}dy\int_y^{y+2}4e^{-2x}dx=\int_0^{+\infty}2(e^{-2y}-e^{-2(y+2)})dy=1-e^{-4}$

【考点延伸】《考试宝典》第三章【知识清单】3.3、二维连续型随机变量及分布

五、【学解】1. ρ_{XY}表示X,Y之间的线性关系紧密程度.

2. $S_G=1$，故$f(x,y)=\begin{cases}1, & 2x+y<2,\ x>0,\ y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$EX=\int_0^1 x\int_0^{2-2x}dy\,dx=\int_0^1 x(2-2x)dx=\frac{1}{3}$$

$$EX^2=\int_0^1 x^2\int_0^{2-2x}dy\,dx=\int_0^1 x^2(2-2x)dx=\frac{1}{6}$$

故$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$

$$EY=\int_0^2 y\,dy\int_0^{1-\frac{y}{2}}dx=\int_0^2 y\left(1-\frac{y}{2}\right)dy=\frac{2}{3}$$

$$EY^2=\int_0^2 y^2dy\int_0^{1-\frac{y}{2}}dx=\int_0^2 y^2\left(1-\frac{y}{2}\right)dy=\frac{2}{3}$$

$$DY=EY^2-(EY)^2=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$

$$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x} xy\,dy=2\int_0^1 x(1-x)^2dx=\frac{1}{6}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{1}{18}$$

$$\text{故}\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{-\frac{1}{18}}{\sqrt{\frac{1}{18}\times\frac{2}{9}}}=-\frac{1}{2}$$

【考点延伸】《考试宝典》第四章【知识清单】4.4、协方差与相关系数

六、【学解】$P(Y<e^{-80})=P(\ln Y<-80)=P\left(\sum_{i=1}^{100}\ln X_i<-80\right)$

$$E(\ln X_i)=\int_0^1\ln x\,dx=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 dx=-1,\ i=1,2,\cdots,100$$

$$E[(\ln X_i)^2]=\int_0^1(\ln x)^2dx=x(\ln x)^2\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=-2\int_0^1\ln x\,dx=2,\ i=1,2,\cdots,100$$

故$D(\ln X_i)=1,\ i=1,2,\cdots,100$

由中心极限定理

$$P\left(\sum_{i=1}^{100}\ln X_i<-80\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100}\ln X_i-(-100)}{\sqrt{100}}<\frac{-80-(-100)}{\sqrt{100}}\right)\approx\Phi(2)=0.9772$$

【考点延伸】《考试宝典》第五章【知识清单】5.3、中心极限定理

七、【学解】1. $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,\ k=1,2,\cdots\qquad EX=\frac{1}{p}$

故p的矩估计量为$\frac{1}{\overline{X}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}X_i}$，矩估计值为$\frac{1}{\overline{x}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$

2. 似然函数$L(p)=\prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i-1}p=p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}$

$$\ln L(p)=n\ln p+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\right)\ln(1-p)$$

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{n}{p}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}{1-p}=0\Rightarrow p=\frac{1}{\overline{x}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

故p的极大似然估计量为$\frac{1}{\overline{X}}=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}$，极大似然估计值为$\frac{1}{\overline{x}}=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$

【考点延伸】《考试宝典》第七章【知识清单】7.1、点估计

八、【学解】1.(1) 检验可能犯第二类错误

(2) 检验可能犯第一类错误.

2. 考虑假设检验 $H_0: \sigma\leqslant 0.9 \leftrightarrow H_1: \sigma>0.9$

检验统计量为 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$，$\sigma_0=0.9$，$n=10$

拒绝域$W=\{\chi^2>\chi^2_{0.05}(9)\}=\{\chi^2>16.919\}$

代入样本值$s=1.2$，得$\chi^2=\frac{9\times 1.2^2}{0.9^2}=16$，没有落入拒绝域中，故接受原假设

即在显著性水平$\alpha=0.05$下，可以认为厂方说明书上所写的标准差是可信的.

【考点延伸】《考试宝典》第九章【知识清单】9.3、常用的假设检验