2005-2016 工科数学分析（I）答案合集

(05数学分析B第一学期期末试题(A卷)) 参考答案 (2006.1)

一. 1. $f(0)=2$，得 $d=2$， --------------------------(1分)

$f'(0)=(3ax^2+2bx+c)\big|_{x=0}=0$，得 $c=0$， --------------------------(2分)

$f''(-1)=(6ax+2b)\big|_{x=-1}=-6a+2b=0$ --------------------------(3分)

$f(-1)=-a+b-c+d=-a+b+2=4$， --------------------------(4分)

解得 $a=1,\quad b=3$， --------------------------(5分)

因为 $f''(0)=2b=6>0$， 故 $f(0)$ 是极小值. ----------------------------(6分)

2. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2dt}{\int_0^{x^5}(e^x-1)dx}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\cos x^4\cdot 2x}{(e^{x^5}-1)5x^4}$ -----------------------(2分)

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x^4)}{x^5\cdot 5x^3}$ --(4分)

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot\frac{1}{2}x^8}{5x^8}=\frac{1}{5}$. --(6分)

3. 令 $u=\tan x$， $u\big|_{x=0}=0$，

$\displaystyle\frac{dy}{dx}=f'(u)\frac{du}{dx}=e^{u^2-2u+2}\frac{1}{\cos^2x}$， --------------------------------(5分)

$\displaystyle\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=e^2$. --(6分)

4. 令 $t=\sqrt{1-x^2}$， 即 $x^2=1-t^2$， -----------------------------------(1分)

$\displaystyle\int_0^1\frac{xdx}{(3+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\frac{dt}{4-t^2}$ ------------------------------------(3分)

$\displaystyle=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t-2}\right)dt$ --(4分)

$\displaystyle=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}\ln 3$ --(6分)

二. 1. $x=\theta\cos\theta$, $y=\theta\sin\theta$, ------------------------------(1 分)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$$ ------------------------------(3 分)

$\frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\pi}=\pi$, $x\big|_{\theta=\pi}=-\pi$, $y\big|_{\theta=\pi}=0$ ----------------------------(5 分)

法线方程为 $y=-\frac{1}{\pi}(x+\pi)=-\frac{1}{\pi}x-1$. ------------------------------(7 分)

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x-\sin x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$ ------------------(1 分)

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx$ -----------------------------(2 分)

$=x\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx$

$=\frac{\pi}{2}+4\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\ln 4$. --------------------------------(7 分)

3. $f(x)+\cos x=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$ -------- --(2 分)

由题设，得 $f(0)+1=0$, $f'(0)=0$, $\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{2}=1$, -----------------------(5 分)

解得 $f(0)=-1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=3$. -----------------------(7 分)

4. 方程变成 $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y}{x^3+y^3}=\frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^3}$, ---------------------------(1 分)

令 $\frac{y}{x}=u$, 即 $y=xu$, $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$, ---------------------------(3 分)

方程变成 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1+u^3}$, $\frac{1+u^3}{u^4}du=-\frac{dx}{x}$, ---------------------------(4 分)

积分得 $-\frac{1}{3u^3}+\ln|u|=-\ln|x|+C_1$, ---------------------------(6 分)

即 $\ln|y|=\frac{x^3}{3y^3}+C_1$, $y=Ce^{\frac{x^3}{3y^3}}$. ---------------------------(7 分)

三. $\int_0^{\pi}[f''(x)+f(x)]\sin xdx=\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx-\int_0^{\pi}f(x)d\cos x$ -------(2 分)

$=\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx-f(x)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}f'(x)\cos xdx$ ---------------------(4 分)

$=\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx+f(\pi)+f(0)+\int_0^{\pi}f'(x)d\sin x$

$=\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx+2+f(0)+f'(x)\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f''(x)\sin xdx$

$=2+f(0)=5$ ---------------------------------(7 分)

$\therefore f(0)=3.$ ---------------------------------(8 分)

四. (图 1)过 $M(x,y)$ 的切线 $Y-y=y'(X-x)$,

令 $X=0$, 得 $Y=y-xy'$, -------------------------------------(2 分)

梯形面积 $A=\frac{1}{2}(y+y-xy')x=\frac{1}{2}x(2y-xy')=3$,

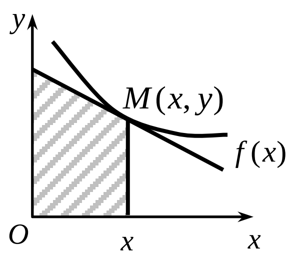
即 $y'-\frac{2}{x}y=-\frac{6}{x^2}$, $y(1)=1$, ------------------------------------(5 分)

解得 $y=e^{\int\frac{2}{x}dx}(C+\int-\frac{6}{x^2}e^{\int-\frac{2}{x}dx}dx)=Cx^2+\frac{2}{x}$, ---------------------------(7 分)

由初始条件, 得 $C+2=1$, $C=-1$,

所求曲线为 $y=-x^2+\frac{2}{x}$. ------------------------------------(8 分)

图1



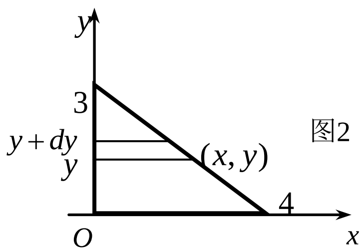


图2

五. (如图 2) $x=4-\frac{4}{3}y$, ------------------------------(1 分)

$\rho=\dfrac{500}{\frac{1}{2}\times 3\times 4}=\frac{250}{3}(kg/m^2)$, ------------------------------(2 分)

$dW=\rho g\cdot y\cdot xdy=\rho g\cdot y(4-\frac{4}{3}y)dy$, -----------------------------(5 分)

$W=\int_0^3\rho g(4y-\frac{4}{3}y^2)dy$ --(7 分)

$=6\rho g=500g(J)$. --(8 分)

六. 方程两边对 x 求导，得

$$y''+3y'+2y=2\sin x,$$

$$y(0)=-1,\quad y'(0)=1,$$ ------------------------------------(2 分)

$$r^2+3r+2=0,\quad r_1=-1,\quad r_2=-2,$$ ----------------------------(4 分)

$$\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x},$$ -----------------------------(5 分)

设 $$y^*=A\cos x+B\sin x,$$ -----------------------------(6 分)

代入方程解得 $$A=-\frac{3}{5},\quad B=\frac{1}{5},$$

$$y^*=-\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x,$$ ---------------------------(7 分)

通解为 $$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}-\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x,$$ ---------------------------(8 分)

由初始条件得 $$C_1=0,\quad C_2=-\frac{2}{5},$$

$$y=-\frac{2}{5}e^{-2x}-\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$$ ------------------------------(10 分)

七. 证 1 由题设，得 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$， ---------------------------(1 分)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1,$$ ---------------------------(2 分)

当 $x\neq 0$， $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2}x^2=x+\dfrac{f''(\xi)}{2}x^2>x$. --------------(7 分)

证 2 令 $$F(x)=f(x)-x,$$ ------------------------------------(1 分)

$$F'(x)=f'(x)-1,$$

由题设，得 $$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0,$$ ------------------------------------(3 分)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1,\qquad F'(0)=0,$$ ------------------------------(4 分)

$$F''(x)=f''(x)>0,$$

$F(0)=0$ 是极小值也是最小值，故当 $x\neq 0$，有 $F(x)>0$，即

$$f(x)>x.$$ -------------------------------------(7 分)

八. (1) 由 $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-f(\frac{1}{x})]=1$，得 $\lim_{x\to 0^+}[f(\frac{1}{x})-f(x)]=1$，

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{1}{2}[\lim_{x\to 0^+}[f(x)+f(\frac{1}{x})+f(x)-f(\frac{1}{x})]=-\frac{1}{2}<0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x})]=\frac{1}{2}>0,$$

故 $\exists\xi\in(0,+\infty)$， 使 $f(\xi)=0$； -------------------------------(4 分)

(2) 令 $F(x)=f(x)e^x$，

若 $\exists\xi_1,\xi_2\in(0,+\infty)$，$\xi_1<\xi_2$，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$，

则 $F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$，

因而 $\exists c\in(\xi_1,\xi_2)$， 使 $F'(c)=0$，

但由题设, $F'(x)=[f'(x)+f(x)]e^x>0$，

矛盾， 故 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个零点. -----------------------------(7 分)

06 数学分析第一学期期末试题(A)参考解答 (2007.1)

一. 1. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2a}{x-a})^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2ax}{x-a}}$ ……………………….(2 分)

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}=9$, ………………………..(5 分)

$2a=\ln 9$, $a=\ln 3$. ………………………..(6 分)

2. $t=\frac{\pi}{3}$时, $x=-\ln 2$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$, …………………………(1 分)

$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t-\cos t+t\sin t}{-\frac{\sin t}{\cos t}}=-t\cos t$, ……..……………(4 分)

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{6}$, …………………………(5 分)

切线方程 $y-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}(x+\ln 2)$. …………………………(6 分)

3. $\lim\limits_{x\to1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})=\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$ …………….…………(2 分)

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$. ………….……………(6 分)

4. 解 1 令 $t=\arcsin x$, 原式$=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}t\sin t dt$ ………………………..(2 分)

$=-2\int_0^{\frac{\pi}{6}}td\cos t=-2(t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos tdt)$ …………………..(5 分)

$=-2(\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}})=1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ …………………………(6 分)

解 2 原式$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-2\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin xd\sqrt{1-x^2}$ ………………(2 分)

$=-2(\arcsin x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}dx)$ …………………………(5 分)

$=-2(\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}-x\Big|_0^{\frac{1}{2}})=1-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$. …………………………(6 分)

二. 1. $y' = 2xe^y + x^2 e^y y'$, ……………………………….(2 分)

令 $y' = 0$，　得 $x = 0$，……………………………..(3 分)

代入已知方程得　$y = 1$，………………………………...(4 分)

$y'' = 2e^y + 2xe^y y' + 2xe^y y' + x^2 e^y (y')^2 + x^2 e^y y''$, ………………..(2 分)

$\because\ y''\big|_{x=0} = 2e > 0$，　故 $y\big|_{x=0} = 1$ 是极小值. ……….……………….…(7 分)

2. $\int x\arctan x dx = \frac{1}{2}\int \arctan x d(x^2)$ ……………………………(1 分)

$= \frac{1}{2}(x^2\arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}dx)$ ……...……………………(4 分)

$= \frac{1}{2}(x^2\arctan x - \int (1 - \frac{1}{1+x^2})dx)$ ……………………….……(6 分)

$= \frac{1}{2}(x^2\arctan x - x + \arctan x) + C$. ………………….....………..(7 分)

3. $y_2 - y_1 = 3e^x - x$ 与 $y_3 - y_1 = -e^x + x$ ………..………………(2 分)

通解为　$y = C_1 e^x + C_2 x - x^2$. …………..……………(7 分)

4. 由于 $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - a}{x^2}\exists$，　得 $a = 1$，………………………(1 分)

故 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - a}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1$，

所以 $b = 1$，…………………………(2 分)

当 $x \neq 0$，　$f'(x) = (\frac{e^{x^2} - 1}{x^2})'$

$= \frac{2xe^{x^2}x^2 - (e^{x^2} - 1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^2 e^{x^2} - 2e^{x^2} + 2}{x^3}$, …………………(5 分)

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^3}$$

$= \lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2} - 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2} - 2}{3x} = 0$. ……………………...(7 分)

三. $y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$，……………………..(2 分)

当 $x \in (0,3)$，令 $y' = 0$， 得 $x = 2$， …………………..(3 分)

函数在 $(0,2)$ 与 $(2,3)$ 内单调, ……………………(4 分)

又 $y(0) = 10 > 0$，$y(2) = -22 < 0$，$y(3) = 37 > 0$ …………...……….(6 分)

函数在 $(0,2)$ 与 $(2,3)$ 内各有一个零点，故在 $(0,3)$ 内有两个零点…...…….(7 分)

四. $f''(x) = g'(x) = 2e^x - f(x)$,

$f''(x) + f(x) = 2e^x$, ………………………….(1 分)

$f(0) = 0$， $f'(0) = g(0) = 2$， …………………………..(2 分)

$r^2 + 1 = 0$， $r = \pm i$,

$\bar{f}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, …………………………..(4 分)

设 $f^*(x) = Ae^x$，代入方程得 $A = 1$，$f^*(x) = e^x$,…………………….(6 分)

通解 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x$， …………………………...…(7 分)

由初始条件得 $C_1 = -1$，$C_2 = 1$,

$f(x) = -\cos x + \sin x + e^x$. …………...……………….(8 分)

五. 令 $F(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$,

$F'(x) = \arcsin\sin x \cdot 2\sin x\cos x + \arccos\cos x \cdot (-2)\cos x\sin x$

$= 2x\sin x\cos x - 2x\cos x\sin x = 0$, …………………….(3 分)

故 $F(x) = C$, ……………………..(4分)

又 $F(0) = \int_0^1 \arccos\sqrt{t}\,dt$ （令 $\arccos\sqrt{t} = u$）………………...(5 分)

$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\,d\cos^2 u$

$= -u\cos^2 u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du = \frac{\pi}{4}$,

$\therefore C = \frac{\pi}{4}$. …………………….(7 分)

六. $\int_1^t \pi f^2(x)dx = \pi[t^2 f^2(t) - f^2(1)]$， ……………….………..(3 分)

对 t 求导得 $f^2(t) = 2tf^2(t) + 2t^2 f(t)f'(t)$， …………………………(5 分)

$f'(t) = \frac{1-2t}{2t^2} f(t)$， $\frac{df(t)}{f(t)} = (\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t})dt$， ………………………..(8 分)

$$\ln|f(t)| = -\frac{1}{2t} - \ln t + C_1,$$

$f(x) = Ce^{-\frac{1}{2x} - \ln x} = \frac{C}{x} e^{-\frac{1}{2x}}$. ……………….………..(10 分)

七. 设 t 时刻含盐量为 $m(t)$ 克，则

$dm = 4 \times 5dt - \frac{m}{100} \cdot 5dt$， ……………………………(3 分)

$\begin{cases} \frac{dm}{dt} + \frac{m}{20} = 20 \\ m(0) = 0 \end{cases}$， …………………………..(4 分)

通解为 $m(t) = Ce^{-\frac{t}{20}} + 400$， ………………………………(7 分)

由初始条件得 $C = -400$，

$\therefore m(t) = 400(1 - e^{-\frac{t}{20}})$. ………………………………(8 分)

八. (1) 由于 $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{f(x)}{x})}{\sin x} = 3$，所以 $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$， ……………………(1 分)

故 $f(0) = 0$， $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$； ……………………(3 分)

(2) 令 $F(x) = f'(x)e^x$， ………..…………...(4 分)

根据积分中值定理，$\exists c \in [1,2]$，使

$f(c) = \int_1^2 f(x)dx = 0$， …..……………………(5 分)

由洛尔定理，$\exists c_1 \in (0, c)$，使 $f'(c_1) = 0$， …………..…………(6 分)

$$\therefore F(0) = F(c_1),$$

由洛尔定理，$\exists \xi \in (0, c_1) \subset (0,2)$，使 $F'(\xi) = 0$，

即 $f''(\xi)e^{\xi} + f'(\xi)e^{\xi} = 0$，

$f'(\xi) + f''(\xi) = 0$. ………………..……..(8 分)

07 数学分析 B 第一学期期末试题(B)解答(2008.1)

一. 1. $-\dfrac{f'(\frac{1}{x})}{x^2 f(\frac{1}{x})}dx$ (没有 dx 扣 1 分)

2. 2

3. $y=3ex-2e^2$

4. -16

5. 4

6. $y''+2y'+y=0$

7. $\dfrac{3\pi}{8}$

8. $1, \ -2, 4$ (1 分, 1 分, 1 分)

9. $\dfrac{128}{5}\pi$

10. $y=Ce^{-2x^2}+\dfrac{1}{2}$ (没写 y 扣 1 分) (只写出通解公式没算出积分给 1 分)

二. $\int_0^{\pi}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\sin x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\frac{\pi}{2})\sin x\,dx$ ……….(2 分)

$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)d\cos x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\frac{\pi}{2})d\cos x$ ………….(3 分)

$=-(\frac{\pi}{2}-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-(x-\frac{\pi}{2})\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx$ ………..(6 分)

$=\frac{\pi}{2}-1+\frac{\pi}{2}-1=\pi-2$ ……..……………(8 分)

三. $f'(x)=\dfrac{2(2x-2)}{3(x^2-2x)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{4(x-1)}{3(x^2-2x)^{\frac{1}{3}}}$ …………………………(2 分)

令 $f'(x)=0$, 得 $x=1$

当 $x=0$, $x=2$ 时, $f'(x)$ 不存在 …………………………….(5 分)

$f(0)=0$ $f(2)=0$ $f(1)=1$

$f(3)=\sqrt[3]{9}$ $f(-2)=4$

$M=4$ $m=0$ …………………………….(8 分)

四. $f'(x)=ax^2-4x$ .. …………………………(1 分)

$f''(x)=2ax-4$ ……………………………..(2 分)

$f''(-1)=-2a-4=0 \qquad a=-2$ …………………………..(.4 分)

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x^2-4x)dx=-\frac{2}{3}x^3-2x^2+C$ ……………(6 分)

由 $f(-1)=\frac{2}{3}-2+C=\frac{8}{3}$ 得 $C=4$

$f(x)=-\frac{2}{3}x^3-2x^2+4$ ……………………………(8 分)

五. 设 t 时刻物体表面温度为 $T=T(t)$，则

$\frac{dT}{dt}=-k(T-20)$ ……………………………(2 分)

$\frac{dT}{T-20}=-k\ d$ …………………………….(3 分)

$\ln|T-20|=-kt+C_1$

$T=20+Ce^{-kt}$ ……………………………(4 分)

由 $T(0)=100$ 得 $C=80$

$T=20+80e^{-kt}$ ……………………………(6 分)

由 $T(20)=60$ 得 $e^{-k}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{20}}$

$T=20+\frac{80}{2^{\frac{t}{20}}}$ ….…………………………(8 分)

六. $x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=xe^x-f(x)$ …………………………(1 分)

$\int_0^x f(t)dt=e^x+xe^x-f'(x)$ …………………………..(2 分)

$f(x)=e^x+e^x+xe^x-f''(x)$

$f''(x)+f(x)=(2+x)e^x$ …………………………..(3 分)

$f(0)=0 \qquad f'(0)=1$ …………………………...(5 分)

$r^2+1=0 \qquad r=\pm i$ …………………………….(7 分)

$\bar{f}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$ ……………………………..(8 分)

设 $f^*(x)=(Ax+B)e^x$ …………………………….(9 分)

代入微分方程得 $A=\frac{1}{2} \qquad B=\frac{1}{2}$

$f^*(x)=\frac{1}{2}(x+1)e^x$ …..………………..(11 分)

通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}(x+1)e^x$ ……………………(12 分)

由初始条件得 $C_1=-\frac{1}{2} \qquad C_2=0$

$f(x)=-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}(x+1)e^x$ ...……………………(14 分)

七. 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)=f(0)$ …………………..(2 分)

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)]$ …………………..(4 分)

$=f(x)+\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)=f(x)+f(0)$ …….……………..(6 分)

$=f(x+0)=f(x)$ ……….……………(7 分)

故 $f(x)$ 在 x 处连续，因此在 $(-\infty,+\infty)$ 连续 ………………………(8 分)

八. 由题设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ …………………………..(1 分)

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{\ln(1+t^{2k})}{t}dt}{a(-\frac{1}{2}x^2)\cdot\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{\ln(1+t^{2k})}{t}dt}{-\frac{a}{4}x^4}$$ ……….………..……..(3 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x^{4k})}{x^2}2x}{-ax^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x^{4k})}{-ax^4}$$ ……………………(5 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^{4k}}{-ax^4}$$ ….…………………(6 分)

故 $2=-a$ $4k=4$

得 $a=-2$ $k=1$ ….……………………(8 分)

九. $\left|\int_0^a f(x)dx-af(a)\right|$

$$=\left|\int_0^a f(x)dx-\int_0^a f(a)dx\right|=\left|\int_0^a (f(x)-f(a))dx\right|$$ ……………….(2 分)

$$=\left|\int_0^a f'(\xi)(x-a)dx\right| \quad (\xi\in(0,a))$$ ……………………(4 分)

$$\le\int_0^a\left|f'(\xi)(x-a)\right|dx$$ …………………………(5 分)

$$\le M\int_0^a\left|x-a\right|dx$$ ……….……………….....(6 分)

$$=M\int_0^a (a-x)dx$$ ……….………………….(7 分)

$$=\frac{Ma^2}{2}$$ ……..…………………….(8 分)

2008-2009 第一学期期末数学分析 B(A 卷)参考解答及评分标准(2009.1)

一. 1. $-\dfrac{1}{x}$

2. $\dfrac{x^3}{6}-\sin x+2x$

3. 1, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2 分, 2 分)

4. $y=Cx+\dfrac{x^3}{2}$ (没有 y 扣 1 分)

5. $-1-\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^4}{6}-\dfrac{x^5}{4}+o(x^5)$

6. ± 2, $-\dfrac{1}{4}$ (2 分(没有 $\pm$ 扣 1 分), 2 分)

7. e

二.
$$r^2+r-2=0 \quad \text{…………………………..(1 分)}$$

$$r_1=1 \quad r_2=-2 \quad \text{………………………(3 分)}$$

$$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-2x} \quad \text{…………………………(5 分)}$$

设 $y^*=Axe^x$ …………………………(6 分)

代入方程得 $A=\dfrac{1}{3}$ $y^*=\dfrac{1}{3}xe^x$ ………………………(8 分)

通解 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\dfrac{1}{3}xe^x$ ……………………..(9 分)

三.
$$\int x^2\arctan x\,dx=\frac{1}{3}\int \arctan x\,d(x^3) \quad \text{…………………….(2 分)}$$

$$=\frac{1}{3}\left(x^3\arctan x-\int x^3\cdot\frac{1}{1+x^2}dx\right) \quad \text{………………………(5 分)}$$

$$=\frac{1}{3}\left[x^3\arctan x-\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx\right] \quad \text{……………………….(7 分)}$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C \quad \text{…………………….(9 分)}$$

四.　　由题设，当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+x)-(ax+bx^2) \sim x^2$ ……………….(2 分)

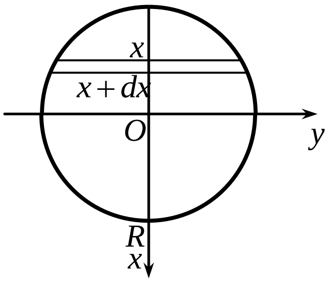
$$\ln(1+x)-(ax+bx^2)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(ax+bx^2)$$ ……………….(4 分)

$$=(1-a)x+(-\frac{1}{2}-b)x^2+o(x^2)$$ …………………….(5 分)

$$1-a=0 \qquad -\frac{1}{2}-b=1$$ …………………….(7 分)

$$a=1 \qquad b=-\frac{3}{2}$$ …………………….(9 分)

五.　如图建立坐标系



$$dP=\mu g(x+R)2y\,dx$$ …...............................(2 分)

$$=2\mu g(x+R)\sqrt{R^2-x^2}dx$$ ……………………...(3 分)

$$P=\int_{-R}^{R}2\mu g(x+R)\sqrt{R^2-x^2}dx$$ ……………………….(5 分)

$$=4\mu gR\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}dx$$ ……………………….(6 分)

$$=\pi\mu gR^3=800\pi gR^3(\mathrm{N})$$ ……………………….(9 分)

六.　　令 $t=\sqrt{x+1}$，即 $x=t^2-1$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{2}{t^2-1}dt \qquad \text{…………………………(3 分)}$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1})dt \qquad \text{…………………………….(5 分)}$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{+\infty} \qquad \text{…………………………….(7 分)}$$

$$=\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \qquad \text{…………………………….(9 分)}$$

七.　设曲线方程为 $y=y(x)$

$$\int_1^t\sqrt{1+(y')^2}dx=2\int_1^t y\,dx \qquad \text{……………………(2 分)}$$

两端对 t 求导

$$\sqrt{1+(y')^2}=2y \qquad \text{…………………….(4 分)}$$

$$y'=\sqrt{4y^2-1} \qquad \text{…………………….(5 分)}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^2-1}}=dx \qquad \text{……………………..(6 分)}$$

积分得　$\frac{1}{2}\ln(2y+\sqrt{(2y)^2-1})=x+C_1$ ……………………. (7 分)

由　$y|_{x=1}=\frac{1}{2}$，得　$C_1=-1$ ……………………..(8 分)

$$\ln(2y+\sqrt{(2y)^2-1})=2(x-1)$$

$$y=\frac{1}{2}ch2(x-1)=\frac{e^{2(x-1)}+e^{-2(x-1)}}{4} \qquad \text{………………..(9 分)}$$

八. (1) 在 $(0,\pi)$, $e^{\sin x}\sin x>0$，故 $I_1>0$，在 $(\pi,2\pi)$ ， $e^{\sin x}\sin x<0$，故 $I_2<0$

$I_1>I_2$ ……………………….(3 分)

(2) $F'(x)=e^{\sin(x+2\pi)}\sin(x+2\pi)-e^{\sin x}\sin x$

$=e^{\sin x}\sin x-e^{\sin x}\sin x=0$

所以 $F(x)$ 为常数 ……………………….(5 分)

令 $u=x-\pi$

$$I_2=\int_0^{\pi}e^{\sin(\pi+u)}\sin(\pi+u)du=-\int_0^{\pi}e^{-\sin u}\sin u\,du$$

$$F(0)=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt=I_1+I_2$$

$$=\int_0^{\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt-\int_0^{\pi}e^{-\sin u}\sin u\,du$$

$$=\int_0^{\pi}\sin t(e^{\sin t}-e^{-\sin t})dt$$

当 $t\in(0,\pi)$， $\sin t>0$， $e^{\sin t}>1$， $e^{-\sin t}<1$， $\sin t(e^{\sin t}-e^{-\sin t})>0$

故 $F(0)>0$，因此 $F(x)$ 为正的常数 …………………..(9 分)

九. (1) 由题设，得 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$， $f(1)=0$ ………………….(2 分)

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=0$$

故 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内存在驻点 ………………….(4 分)

(2) 根据拉格朗日中值定理，$\exists\xi_1\in(0,1)$，$\exists\xi_2\in(1,2)$，使

$f'(1)-f'(0)=f''(\xi_1)$ $f'(2)-f'(1)=f''(\xi_2)$ ……………...(6 分)

$|f'(0)|+|f'(2)|=|f'(1)-f'(0)|+|f'(2)-f'(1)|$ ……………..(8 分)

$=|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|\le1+1=2$ ………………….(9 分)

2010-2011-第一学期工科数学分析期末试题解答（2010.1）

一. **1.** $\frac{1}{3}$

2. $y''' + y'' - y' - y = 0$

3. $\frac{1}{2} f'(2)$

4. $\frac{\pi}{4}$

5. $-\frac{1+x}{x^3 e^{2x}}$

二. $a + b = 3$ …………………(1 分)

$y' = 3ax^2 + 2bx$ …………………(3 分)

$y'' = 6ax + 2b$ …………………(5 分)

$6a + 2b = 0$ …………………(6 分)

解得 $a = -\frac{3}{2}$ ， $b = \frac{9}{2}$ …………………(8 分)

三. 由题意 $\int f(x)dx = \frac{\sin x}{x} + C_1$ …………………..(2 分)

$f(x) = (\frac{\sin x}{x} + C_1)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ …………………..(4 分)

$\int xf'(x)dx = \int x\, df(x)$ …………………….(5 分)

$= xf(x) - \int f(x)dx$ …………………(7 分)

$= \frac{x\cos x - \sin x}{x} - \frac{\sin x}{x} + C = \cos x - \frac{2\sin x}{x} + C$ ………….(8 分)

四. $1 - \frac{dy}{dx} - \sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ …………………(3 分)

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\sin y}$ …………………..(4 分)

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\cos y \cdot \frac{dy}{dx}}{(1+\sin y)^2}$ ……………(6 分)

$= \frac{-\cos y \cdot \frac{1}{1+\sin y}}{(1+\sin y)^2} = \frac{-\cos y}{(1+\sin y)^3}$ ……………(8 分)

五. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\arctan x dx = -\int_1^{+\infty}\arctan x d\frac{1}{x}$ ……………….(1 分)

$=\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx$ ……………….(3 分)

$=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx$ ……………….(5 分)

$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Big|_1^{+\infty}$ ………………..(7 分)

$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ ………………..(9 分)

六. 方程化为 $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=1$ ……………….(1 分)

$y=e^{-\int-\frac{2}{x}dx}(C+\int e^{\int-\frac{2}{x}dx}dx)$ ……………….(3 分)

$=x^2(C+\int\frac{1}{x^2}dx)$

$=x^2(C-\frac{1}{x})=Cx^2-x$ ……………….(5 分)

$V(C)=\int_0^1\pi(Cx^2-x)^2dx$ ………………..(7 分)

$=\pi(\frac{1}{5}C^2-\frac{1}{2}C+\frac{1}{3})$ ………………..(8 分)

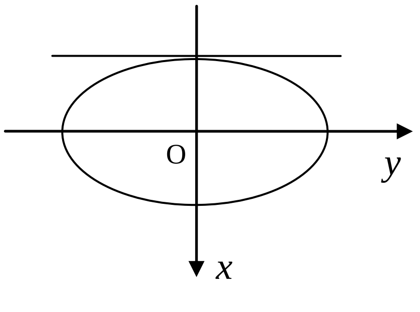
$V'(C)=\pi(\frac{2}{5}C-\frac{1}{2})$ ....……(9 分)

令 $V'(C)=0$， 得 $C=\frac{5}{4}$ ....……(10 分)

由于 $V''(C)=\frac{2}{5}\pi>0$，故 $C=\frac{5}{4}$ 是极小值点也是最小值点，

所求解为 $y=\frac{5}{4}x^2-x$ ....……(11 分)

七.



$dP=\mu g(1+x)2ydx$ ……..(2 分)

$=4\mu g(1+x)\sqrt{1-x^2}dx$ …..(3 分)

$P=\int_{-1}^{1}4\mu g(1+x)\sqrt{1-x^2}dx$ ..(5 分)

$=8\mu g\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ ……..(6 分)

$=2\mu g\pi=2000\pi g\,(N)$ ……(8 分)

八． $r^2+r-2=0$ ……………….(1 分)

$r_1=1$， $r_2=-2$ ……………….(3 分)

$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ ……………….(5 分)

设 $y^*=x(Ax+B)e^x$ ………………..(7 分)

$y^{*\prime}=(Ax^2+2Ax+Bx+B)e^x$

$y^{*\prime\prime}=(Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B)e^x$

代入方程得 $6A=1$， $2A+3B=-1$ ………………..(9 分)

解得 $A=\frac{1}{6}$， $B=-\frac{4}{9}$ ………………..(10 分)

$y^*=(\frac{x^2}{6}-\frac{4}{9}x)e^x$

通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+(\frac{x^2}{6}-\frac{4}{9}x)e^x$ ……………..(11 分)

九． $f=ma$ ……………………..(1 分)

$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$ ……………………..(3 分)

得 $v\frac{dv}{dx}=-\sin x$ …………………......(4 分)

$v|_{x=0}=2$ …………………......(5 分)

$vdv=-\sin xdx$ …………………......(6 分)

$\frac{1}{2}v^2=\cos x+C$ …………………..(7 分)

由初值得 $C=1$

$v^2=2(\cos x+1)$ …………………….(8 分)

十． 设 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+\int_0^1 e^{x^2}dx$ ……………………….(1 分)

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}$ ……………………….(2 分)

令 $f'(x)=0$， 得 $x=e$ ……………………….(3 分)

$f(x)$ 在 $(0,e)$ 和 $(e,+\infty)$ 单调 ……………………….(4 分)

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$， $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ ……………………….(6 分)

$f(e)=\int_0^1 e^{x^2}dx>0$ ……………………….(7 分)

故 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 和 $(e,+\infty)$ 内各有一不同实根，

所以方程在 $(0,+\infty)$ 内有两个不同实根。 ……………………….(9 分)

十一． 令 $x-t=u$， 得

$F(x)=\int_0^x (x-2u)f(u)du$ ……………………….(1 分)

$=x\int_0^x f(u)du-2\int_0^x uf(u)du$ ……………………….(2 分)

$F'(x)=\int_0^x f(u)du-xf(x)$ …………(4 分)

$=\int_0^x (f(u)-f(x))du$

因为 $f(x)$ 单调增加，故 $F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 单调减少 ……(6 分)

$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2u)f(u)du$ ……………………….(7 分)

令 $t=-u$，得

$F(-x)=-\int_0^x (-x+2t)f(-t)dt$ ……………………….(8 分)

$=-\int_0^x (x-2t)f(t)dt$

$=-\int_0^x (x-2u)f(u)du=-F(x)$

故 $F(x)$ 是奇函数 ……………….(10 分)

(2011-2012)工科数学分析第一学期期末试题(A 卷)解答（2012.1）

一. 1. $-\dfrac{2}{\pi}$

2. $\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}+g'(\sqrt{x^2+1})\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

3. $-\dfrac{1}{1+\tan x}$

4. $\dfrac{dx}{dt}=kx(N-x)$

5. $\dfrac{e^4+1}{4}$

二. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{e^{x^3}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}$ ……………………(3 分)

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$ ………………………(6 分)

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}(-x^2)}{3x^2\sqrt{1-x^2}}$

$=-\dfrac{1}{6}$ ………………………(9 分)

三. $\dfrac{1}{\cos^2(x+y)}(1+\dfrac{dy}{dx})=y^2+2xy\dfrac{dy}{dx}$ ………………..(6 分) (左右侧各 3 分)

解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-y^2\cos^2(x+y)}{2xy\cos^2(x+y)-1}$ ……………………(7 分)

在已知方程中令 $x=0$, 得 $\tan y=1$, $y=\dfrac{\pi}{4}$ ……………………..(8 分)

$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\dfrac{1-(\frac{\pi}{4})^2\cos^2\frac{\pi}{4}}{-1}=\dfrac{1}{32}\pi^2-1$ ……………………(9 分)

四．　令 $\frac{y}{x}=u$，　即 $y=xu$，　$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$　……………………..(2 分)

原方程化成　$x\frac{du}{dx}=\tan u$　……………………(4 分)

$$\frac{\cos u}{\sin u}du=\frac{dx}{x}$$　……………………..(5 分)

$$\ln|\sin u|=\ln|x|+C_1$$　……………………..(7 分)

$$\sin u=Cx$$　………………………(8 分)

原方程通解为　$\sin\frac{y}{x}=Cx$　……………………..(9 分)

五．
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & x>1\\ 0 & x=1\\ \frac{-2x+1}{x^2+1} & 0\le x<1\end{cases}$$　……………………(3 分)

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1\frac{-2x+1}{x^2+1}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$$　…………………(5 分)

$$=(-\ln(x^2+1)+\arctan x)\Big|_0^1-\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty}$$　………………(8 分)

$$=-\ln 2+\frac{\pi}{4}+1$$　……………………(9 分)

六．　设　$f(x)=\sin^3 x\cos x-a$　……………………(1 分)

$$f'(x)=3\sin^2 x\cos^2 x-\sin^4 x$$　……………………..(2 分)

令　$f'(x)=0$　得　$x=\frac{\pi}{3}$　　$x=\frac{2\pi}{3}$　……………………(3 分)

$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$，$(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$，$(\frac{2\pi}{3},\pi)$ 内单调

$f(0)=-a<0$　　$f(\pi)=-a<0$　　$f(\frac{2\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{16}-a<0$

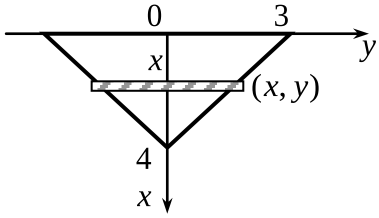
$$f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{16}-a$$　…………………..(6 分)

当 $a<\frac{3\sqrt{3}}{16}$，　$f(\frac{\pi}{3})>0$，方程有两个不同实根.

当 $a=\frac{3\sqrt{3}}{16}$，　$f(\frac{\pi}{3})=0$，方程有一个实根.

当 $a>\frac{3\sqrt{3}}{16}$，　$f(\frac{\pi}{3})<0$，方程没有实根.　…………………(9 分)

七.



$$y = 3 - \frac{3}{4}x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1\text{ 分})$$

$$dW = x\mu g\pi y^2 dx = \pi\mu g x(3 - \frac{3}{4}x)^2 dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4\text{ 分})$$

$$W = \int_0^4 \pi\mu g x(3 - \frac{3}{4}x)^2 dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6\text{ 分})$$

$$= \int_0^4 \frac{9}{16}\pi\mu g(16x - 8x^2 + x^3)dx$$

$$= 12\pi\mu g = 12000\pi g\ (\mathrm{J}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9\text{ 分})$$

八.

$$r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1\text{ 分})$$

$$r_1 = 1 \qquad r_2 = -\frac{1}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2\text{ 分})$$

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4\text{ 分})$$

设 $y^* = x(Ax + B)e^x$ ……………………….(6 分)

代入方程得 $A = \frac{2}{3} \qquad B = -\frac{8}{9}$

$$y^* = (\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{9}x)e^x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8\text{ 分})$$

通解 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + (\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{9}x)e^x$ …………………..(9 分)

九. 由二曲线相切得 $ax^2 = \ln x \qquad 2ax = \frac{1}{x}$

解得 $a = \frac{1}{2e}$ ……………………(3 分)

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} (e^y - \sqrt{2ey})dy \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2\text{ 分})$$

$$= (e^y - \sqrt{2e}\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}})\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{e} - 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7\text{ 分})$$

$$V = \int_0^{\frac{1}{2}} 2\pi y(e^y - \sqrt{2ey})dy \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9\text{ 分})$$

$$= 2\pi(ye^y - e^y - \sqrt{2e}\frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}})\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\pi(1 - \frac{3}{5}\sqrt{e}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11\text{ 分})$$

十.　令 $x-t=u$　$\int_0^x g(x-t)dt=\int_0^x g(u)du$ ……………………….(2 分)

$$f(x)=-2x^2+\int_0^x g(u)du$$

$$f'(x)=-4x+g(x)$$ ……………………..(4 分)

由题设及 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=0$，得 $g(0)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ …………………….(5 分)

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=0$$ …………………..(6 分)

$f'(0)=0$　故 $x=0$ 是驻点 ……………………..(7 分)

$$f''(x)=-4+g'(x)$$ ……………………….(8 分)

$$f''(0)=-4<0$$

故 $x=0$ 是极值点，且 $f(0)$ 是极大值 ………………..(9 分)

十一.　令　$F(x)=f(x)\cos x$ ………………..(1 分)

$$F(\frac{\pi}{2})=0$$ ………………..(2 分)

由 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\cos^2 x dx=0$，及积分中值定理，$\exists c\in[0,\frac{\pi}{4}]$，使

$$f(c)\cos^2 c\cdot\frac{\pi}{4}=0$$ …………………(4 分)

因为 $\cos c\cdot\frac{\pi}{4}\neq 0$，　故有 $F(c)=f(c)\cos c=0$ …………………(5 分)

根据罗尔中值定理，$\exists\xi\in(c,\frac{\pi}{2})\subset(0,\frac{\pi}{2})$，使

$$F'(\xi)=0$$

即　$f'(\xi)\cos\xi+f(\xi)(-\sin\xi)=0$

$$f'(\xi)=f(\xi)\tan\xi$$ …………………..(7 分)

(2011-2012)工科数学分析第一学期期末试题(A 卷)解答（2012.1）

一. **1.** $-\frac{\pi}{2}-1$

2. $y=x-2$

3. $-\frac{3}{2}$， $-\frac{11}{24}$

4. $Ce^{-\tan x}+1$

5. $m\frac{dv}{dt}=mg-kv$

二. 设 $y=(\cos x+x\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$ …………………(1 分)

$\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+x\sin x)}{x^2}$ …………………(3 分)

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x\cos x}{\cos x+x\sin x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2(\cos x+x\sin x)}$ ………………(6 分)

$=\frac{1}{2}$ ………………(8 分)

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+x\sin x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}$ …………………(9 分)

三. 原式 $=\int x\arctan x dx+\int\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ ……………………(1 分)

$=\frac{1}{2}\int\arctan x dx^2-\int e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}$ ……………………(3 分)

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx-e^{\frac{1}{x}}$ …………………..(6 分)

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx-e^{\frac{1}{x}}$ ………………(7 分)

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x-e^{\frac{1}{x}}+C$ ………………..(9 分)

四. $$f'(x)=\frac{2(2x-2)}{3\sqrt[3]{x^2-2x}}$$ ……………………….(2 分)

令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 当 $x=2$ $f'(x)$ 不存在 …………….(4 分)

$f(1)=1$ $f(0)=0$ $f(-1)=\sqrt[3]{9}$ $f(3)=\sqrt[3]{9}$ ……………(8 分)

$M=\sqrt[3]{9}$ $m=0$ ……………………..(9 分)

五. $$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$ …………(5 分)

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{2(1-x^2)}{1+x^2}$$ …………………(6 分)

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(x^2-1)}\cdot\frac{2(1-x^2)}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2}{1+x^2}=-\frac{1}{1+x^2}\neq 0$$ ………………….(7 分)

故 $f(x)$ 不恒为常数 …………………….(8 分)

六. $$\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{\frac{dy}{dx}x-y}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2y\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}$$ ……………….(3 分)

解得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$ ………………….(4 分)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(1+\frac{dy}{dx})(x-y)-(x+y)(1-\frac{dy}{dx})}{(x-y)^2}$$ ……………….(7 分)

$$=\frac{-2y+2x\frac{dy}{dx}}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{-2y+2x\frac{x+y}{x-y}}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$$ ………………………..(9 分)

七. (1) $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2(x^2+1)}=\int_{-\infty}^{-1}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1})dx$ ……………………….(2 分)

$=(-\frac{1}{x}-\arctan x)\Big|_{-\infty}^{-1}$ ……………………..(4 分)

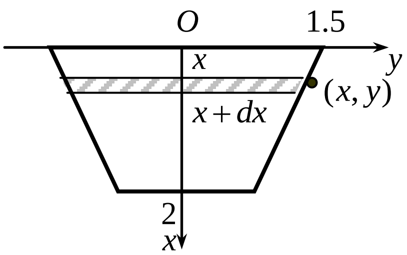
$=1-\frac{\pi}{4}$ …………………….(5 分)

(2) 令 $\sqrt{1-x}=t$ 即 $x=1-t^2$ …………………..(6 分)

$\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}.$ …………………..(8 分)

$=2\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$ …………………..(10 分)

八. $dP=\mu gx\cdot 2y\,dx$ ……………………(2 分)



$=2\mu gx(\frac{3}{2}-\frac{x}{4})dx=\frac{1}{2}\mu g(6x-x^2)dx$ …………..(4 分)

$P=\int_0^2\frac{1}{2}\mu g(6x-x^2)dx.$ ……………………(6 分)

$=\frac{1}{2}\mu g(3x^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2$

$=\frac{14}{3}\mu g=\frac{14000}{3}g$ (N) …………………..(8 分)

九. $r^2-6r+9=0$ ……………………(1 分)

$r_1=r_2=3$ …………………..(3 分)

$\bar{y}=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$ …………………..(5 分)

设特解 $y^*=x^2(Ax+B)e^{3x}$ ……………………(6 分)

代入方程得 $6Ax+2B=x+1$

$6A=1$ $2B=1$

$A=\frac{1}{6}$ $B=\frac{1}{2}$

$y^*=(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2)e^{3x}$ …………………..(9 分)

所求通解 $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2)e^{3x}$ ………………..(10 分)

十.　方程两端对 x 求导得

$$f'(x^2+x)+f(x)(2x+1)=f(x)$$

$$(x+1)f'(x)=-2f(x)$$ ……………………….(2 分)

$$\frac{df(x)}{f(x)}=-\frac{2}{x+1}dx$$ ……………………….(3 分)

$$\ln|f(x)|=-2\ln|x+1|+C_1$$ ………………………..(4 分)

通解　$$f(x)=\frac{C}{(x+1)^2}$$ ..……………………..(5 分)

在已知方程中令 $x=a$，得 $f(a)=\dfrac{1}{a+1}$ ……………………..(6 分)

代入通解得　$C=a+1$

故　$$f(x)=\frac{a+1}{(x+1)^2}$$ ……………………..(7 分)

$$V=\int_0^1 \pi f^2(x)dx=\int_0^1 \pi\frac{(a+1)^2}{(x+1)^4}dx$$ …………………….(8 分)

$$=-\frac{1}{3}\pi\frac{(a+1)^2}{(x+1)^3}\Big|_0^1=\frac{7}{24}\pi(a+1)^2$$ ……………………(9 分)

由　$\dfrac{7}{24}\pi(a+1)^2=\dfrac{7}{6}\pi$　得　$a=1$ …………………..(10 分)

十一.　令　$F(x)=f(x)-x$ ……………………..(1 分)

由积分中值定理，存在 $c\in[\frac{1}{2},1]$，使

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\sin x dx=f(c)\sin c\cdot\frac{1}{2}=1 \qquad f(c)=\frac{2}{\sin c}$$ ………………….(3 分)

$$F(c)=f(c)-c>0 \qquad F(2)=f(2)-2=-2<0$$

根据零值定理，存在 $\xi_1\in(c,2)$，使 $F(\xi_1)=0$ …………………(6 分)

又　$F(0)=f(0)=0$

故由罗尔定理，$\exists\xi\in(0,\xi_1)\subset(0,2)$，使

$F(\xi)=0$，即　$f'(\xi)-1=0$　$f'(\xi)=1$ ……………………(8 分)

09 级第一学期工科数学分析期末试题(A 卷)解答(2010.1)

一. 1. $\frac{y}{e^y - x}$, $\frac{1}{e^2}$ (2 分, 2 分)

2. I_2, $\frac{1}{2}$ (2 分, 2 分)

3. $\frac{3\pi}{2}$, 0 (2 分, 2 分)

4. $u = \frac{y}{x}$, $x\frac{du}{dx} = \frac{-4u^2}{1+3u}$ (2 分, 2 分)

5. $\frac{\pi a}{2}$, $2\pi a^2$ (2 分, 2 分)

6. $-1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$ (多项式 3 分，余项 1 分)

7. $-\frac{1}{x}$, $Cx + \frac{x^3}{2}$ (2 分, 2 分)

二.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)e^x + x + 2}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-2)e^x + x + 2}{x^3}$$ ……………………..(2 分)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + (x-2)e^x + 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-1)e^x + 1}{3x^2}$$ ……………………….(5 分)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + (x-1)e^x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{6}$$ ……………………….(8 分)

$$= \frac{1}{6}$$ ……………………..(9 分)

三.

$$\int x\ln(1+x)dx = \frac{1}{2}\int \ln(1+x)dx^2$$ ……………………….(1 分)

$$= \frac{1}{2}(x^2\ln(1+x) - \int\frac{x^2}{1+x}dx)$$ ………………………..(5 分)

$$= \frac{1}{2}(x^2\ln(1+x) - \int(x - 1 + \frac{1}{1+x})dx)$$ ……………………….(6 分)

$$= \frac{1}{2}(x^2\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x - \ln(1+x)) + C$$ ……………………….(9 分)

四. $ma=F \qquad a=\frac{dv}{dt} \qquad F=-kv$

$$m\frac{dv}{dt}=-kv$$ ………………………(3 分)

$$\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dt \qquad \ln v=-\frac{k}{m}t+C_1$$

$$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}$$ ………………………..(6 分)

由 $v(0)=6$ 得 $C=6$ ……………………….(8 分)

由 $v(5)=3$ 得 $\frac{k}{m}=\frac{\ln 2}{5}$

故 $v=6e^{-\frac{\ln 2}{5}t}$ …………………….(9 分)

五. 当 $x>0$ $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ ……………….(3 分)

当 $x<0$ $f'(x)=\frac{\sin x^2\cdot 2x^2-1+\cos x^2}{x^2}=2\sin x^2+\frac{\cos x^2-1}{x^2}$ ……………….(6 分)

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1-\cos x^2}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x^4}{2}}{x^2}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$$

$$f'(0)=0$$ ……………………..(8 分)

六. $f(x)=e^{-x}+\int_0^x tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt$ ……………………..(1 分)

$$f'(x)=-e^{-x}-\int_0^x f(t)dt$$ ……………………….(2 分)

$$f''(x)=e^{-x}-f(x) \qquad f''(x)+f(x)=e^{-x}$$ ……………………….(3 分)

$$f(0)=1 \qquad f'(0)=-1$$ ……………………….(5 分)

$$r^2+1=0 \qquad r=\pm i$$ ……………………….(7 分)

$$\bar{f}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$$ ……………………….(8 分)

设 $f^*(x)=Ae^{-x}$ ……………………….(9 分)

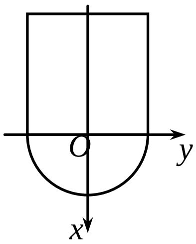
带入方程得 $A=\frac{1}{2}$ $f^*(x)=\frac{1}{2}e^{-x}$ ……………………….(10 分)

通解为　　$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^{-x}$ ……………………….(11 分)

由初始条件得　$C_1=\frac{1}{2}$　　$C_2=-\frac{1}{2}$

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x+e^{-x})$$ ……………………..(13 分)

七.



$dW=(h+x)\mu g\pi y^2dx=\mu g\pi(2+x)(1-x^2)dx$ ……………………(3 分)

$W=\int_0^1\mu g\pi(2+x)(1-x^2)dx$ …………………….(5 分)

$=\int_0^1\mu g\pi(2-2x^2+x-x^3)dx$

$=\frac{19}{12}\pi\mu g=\frac{19000}{12}\pi g$ (J) ……………………..(8 分)

八.　　令　$F(x)=xf(x)$ ……………………..(2 分)

$F(0)=0$　　$F(3)=3f(3)=-3<0$ ……………………..(4 分)

由积分中值定理，$\exists c\in[1,2]$，使 $f(c)=\int_1^2 f(x)dx=1$，

故　　$F(c)=cf(c)=c>0$ ……………………..(6 分)

根据介值定理，$\exists\eta\in(c,3)$，使 $F(\eta)=0$， ……………………..(7 分)

由罗尔定理，$\exists\xi\in(0,\eta)\subset(0,3)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$$ …………………….(8 分)

九.　　由题设，有　$\lim\limits_{x\to0}(f(x)+f'(x))=0$ ……………………...(1 分)

由于　$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$，　得　$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=0$ ……………………….(3 分)

因为 $f'(x)$ 连续，故 $f'(0)=0$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点. ……………………….(4 分)

由　$2=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f'(x)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f'(x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$

$=f'(0)+f''(0)=f''(0)>0$ ………………………….(7 分)

故 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值 ………………………….(8 分)

(2013-2014)工科数学分析第一学期期末试题(A 卷)解答（2014.1）

一. **1.** x^3+2x^2+3x

2. $\sqrt{2}+1$

3. $-\dfrac{3}{2}$， $\dfrac{9}{2}$

4. $\sqrt{1-x^2}+\dfrac{\pi}{4-\pi+2\ln 2}\arctan x$

5. $m\dfrac{d^2y}{dt^2}=mg-k\dfrac{dy}{dt}$

二. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(1-x)}{\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}$ ……………..(2 分)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\dfrac{-1}{1-x}}{2x}$ ……………..(6 分)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{2(1-x)}$ ……………..(7 分)

$=-\dfrac{1}{2}$ ……………..(8 分)

三. $e^y\dfrac{dy}{dx}-y-x\dfrac{dy}{dx}=0$ ……………..(3 分)

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{e^y-x}$ ……………..(4 分)

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dfrac{dy}{dx}\cdot(e^y-x)-y(e^y\dfrac{dy}{dx}-1)}{(e^y-x)^2}$ ……………..(6 分)

$=\dfrac{\dfrac{y}{e^y-x}\cdot(e^y-x)-y(e^y\dfrac{y}{e^y-x}-1)}{(e^y-x)^2}$ ……………..(7 分)

$=\dfrac{-2xy+2ye^y-y^2e^y}{(e^y-x)^3}$ ……………..(8 分)

四. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{3a}{x-a})^{\frac{x-a}{3a}}]^{\frac{3ax}{x-a}}$ ……………..(2 分)

$= e^{3a}$ ……………..(3 分)

$\int_0^{+\infty}\frac{8x}{e^x}dx = \int_0^{+\infty}8xe^{-x}dx = -\int_0^{+\infty}8xde^{-x}$ ……………..(4 分)

$= -8xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}8e^{-x}dx$ ……………..(6 分)

$= -8e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 8$ ……………..(8 分)

$e^{3a} = 8 \qquad a = \ln 2$ ……………..(9 分)

五. $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}x + y^3 \qquad \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y^3$ ……………..(2 分)

$x = e^{-\int -\frac{1}{y}dy}(C + \int y^3 e^{\int -\frac{1}{y}dy}dy)$ ……………..(4 分)

$= e^{\ln y}(C + \int y^3 e^{-\ln y}dy)$ ……………..(6 分)

$= y(C + \int y^3\frac{1}{y}dy)$ ……………..(8 分)

$= Cy + \frac{1}{3}y^4$ ……………..(9 分)

六. $f'(x) = -a\sin x - \cos 3x$ ……………..(3 分)

由 $f'(\frac{\pi}{3}) = -a\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0$ 得 $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ……………..(5 分)

$f''(x) = -a\cos x + 3\sin 3x$ ……………..(7 分)

因为 $f''(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$ 故 $f(\frac{\pi}{3})$ 是极大值 ……………..(9 分)

七. 抛物线与直线的交点为 $(1,-1),(4,2)$ ……………..(1 分)

$A = \int_{-1}^{2}[(y+2) - y^2]dy$ ……………..(3 分)

$= (\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3})\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$ ……………..(5 分)

$V = \int_{-1}^{2}[\pi(y+2)^2 - \pi y^4]dy$ ……………..(7 分)

$= \pi[\frac{1}{3}(y+2)^3 - \frac{1}{5}y^5]\Big|_{-1}^{2} = \frac{72}{5}\pi$ ……………..(9 分)

八. 令 $t=\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$ 即 $x=\dfrac{1}{t^2-1}$ ……………..(2 分)

$$I=\int\frac{-2t^2}{t^2-1}dt$$ ……………..(3 分)

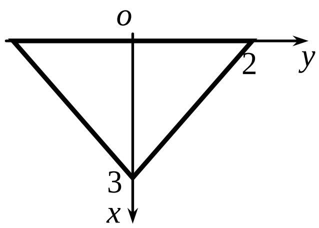
$$=-2\int(1+\frac{1}{t^2-1})dt$$ ……………..(4 分)

$$=-2\int(1+\frac{\frac{1}{2}}{t-1}-\frac{\frac{1}{2}}{t+1})dt$$ ……………..(6 分)

$$=-2t+\ln|t+1|-\ln|t-1|+C$$ ……………..(8 分)

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\ln\left|\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1\right|-\ln\left|\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right|+C$$ ……………..(9 分)

九. $dW=x\cdot\mu g\pi y^2dx=\pi\mu gx\cdot4(1-\frac{x}{3})^2dx=\frac{4}{9}\pi\mu gx(3-x)^2dx$ ……..(3 分)



$$w=\int_0^3\frac{4}{9}\pi\mu gx(3-x)^2dx$$ ……………..(5 分)

$$=\frac{4}{9}\pi\mu g\int_0^3(9x-6x^2+x^3)dx$$

$$=\frac{4}{9}\pi\mu g(\frac{9}{2}x^2-2x^3+\frac{1}{4}x^4)\Big|_0^3$$ ……………..(8 分)

$$=3\pi\mu g=3000\pi g\ (\mathrm{J})$$ ……………..(9 分)

十. $f(x)=-e^{-x}+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$ ……………..(1 分)

$$f'(x)=e^{-x}+\int_0^x f(t)dt$$ ……………..(2 分)

$f''(x)=-e^{-x}+f(x)$ $f''(x)-f(x)=-e^{-x}$ ……………..(3 分)

$f(0)=-1$ $f'(0)=1$ ……………..(5 分)

$r^2-1=0$ $r=\pm1$ ……………..(6 分)

$$\bar{f}(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$$ ……………..(7 分)

设 $f^*(x)=A\,x\,\bar{e}^{x}$ ……………..(8 分)

代入微分方程得 $A=\dfrac{1}{2}$ $f^*(x)=\dfrac{1}{2}xe^{-x}$ ……………..(9 分)

通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^{-x}$ ……………..(10 分)

由初值得 $C_1=-\frac{1}{4}$ $C_2=-\frac{3}{4}$

$$f(x)=-\frac{1}{4}e^x-\frac{3}{4}e^{-x}+\frac{1}{2}xe^{-x}$$ ……………..(12 分)

十一. 令 $F(t)=(t-1)\int_0^t f(x)dx$ ……………..(2 分)

则 $F(t)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，又

$$F(0)=F(1)=0$$

由罗尔定理，$\exists\xi\in(0,1)$， 使 $F'(\xi)=0$ ……………..(6 分)

$$\int_0^{\xi} f(x)dx+(\xi-1)f(\xi)=0$$ ……………..(7 分)

即 $(1-\xi)f(\xi)=\int_0^{\xi} f(x)dx$ 得证 ……………..(8 分)

(2014-2015-1)工科数学分析期末试题(A 卷)解答（2015.1）

一. **1.** $y-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{7}(x-\frac{\sqrt{3}}{4})$

2. $\frac{1}{2}$

3. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)},\ \int_0^{+\infty}xe^{-x}dx,$

4. 1 **,** $-\frac{2}{3}$

5. $f(x)$

二. $I=2\int_0^1 x^{10}\sqrt{1-x^2}dx.$ ……………..(2 分)

令 $x=\sin t$ $=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}t\cos^2 tdt$ ……………..(4 分)

$=2(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{12}tdt)$ ……………..(6 分)

$=\frac{21}{1024}\pi$ ……………..(8 分)

三. $y=e^{-\int\frac{1-x}{x}dx}(C+\int\frac{e^{3x}}{x}e^{\int\frac{1-x}{x}dx}dx)$ ……………..(4 分)

$=e^{x-\ln x}(C+\int\frac{e^{3x}}{x}e^{\ln x-x}dx)$ ……………..(6 分)

$=\frac{e^x}{x}(C+\int\frac{e^{3x}}{x}xe^{-x}dx)$

$=\frac{e^x}{x}(C+\int e^{2x}dx)$ ……………..(8 分)

$=\frac{e^x}{x}(C+\frac{1}{2}e^{2x})$ ……………..(9 分)

四. (1) $y(0)=1$ ……………..(1 分)

$y'=-e^y-xe^y y'$ ……………..(分)

$y'(0)=-e$ ……………..(3 分)

$y''=-e^y y'-e^y y'-xe^y(y')^2-xe^y y''$ ………..(4 分)

$y''(0)=2e^2$ ……………..(5 分)

(2)由题设，应有 $f(0)=y(0)$ $f'(0)=y'(0)$ $f''(0)=y''(0)$ ………..(6 分)

$c=f(0)=1$ ……………..(7 分)

$f'(x)=2ax+b$ $b=f'(0)=-e$ ……………..(8 分)

$f''(x)=2a$ $2a=f''(0)=2e^2$ $a=e^2$ ……………..(9 分)

五. $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\ln\cos x d\tan x$ ……………..(2 分)

$=\tan x\ln cosx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}\tan xdx$ ……………..(5 分)

$=\sqrt{3}\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{1}{\cos^2 x}-1)dx$ ……………..(6 分)

$=-\sqrt{3}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2+(\tan x-x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$ ……………..(8 分)

$=(\frac{1}{2}-\sqrt{3})\ln 2+\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$ ……………..(9 分)

六. 设 $f(x)=\ln x-\frac{x^2}{2}-a$ $x\in(0,+\infty)$ ……………..(1 分)

$f'(x)=\frac{1}{x}-x$ ……………..(2 分)

令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ ……………..(3 分)

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$ ……………..(4 分)

$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ……………..(5 分)

$f(1)=-\frac{1}{2}-a$ ……………..(6 分)

当 $a<-\frac{1}{2}$ $f(1)>0$ 二曲线有两个交点 ……………..(7 分)

当 $a=-\frac{1}{2}$　　$f(1)=0$　二曲线有一个交点　　……………..(8 分)

当 $a>-\frac{1}{2}$　　$f(1)<0$　二曲线有没有交点　　……………..(9 分)

七.　设　$\frac{2x^2-4x-1}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+D}{x^2+1}$　　……………..(2 分)

$$2x^2-4x-1=A(x^2+1)+(Bx+D)(x+2)$$

得　$A=3$　$B=-2$　$D=-1$　　…（1+1+1）…..(5 分)

$$\int\frac{2x^2-4x-1}{(x+2)(x^2+1)}=\int(\frac{3}{x+2}-\frac{x+2}{x^2+1})dx$$

$=3\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\arctan x+C$　　（每项 1 分）…..(9 分)

八.　$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}$　　……………..(1 分)

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$　　……………..(2 分)

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}-1}$$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{3ax^2\sqrt{1-x^2}}{-\frac{1}{2}x^2}$　　……………..(3 分)

$=-6a$　　……………..(4 分)

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{\frac{x^2}{4}}$　　……………..(5 分)

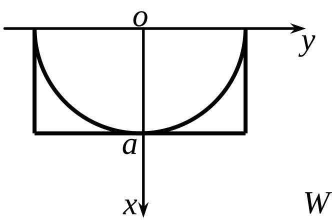
$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{\frac{x}{2}}$　　……………..(6 分)

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{a^2e^{ax}+2}{\frac{1}{2}}$$

$=2(a^2+2)$　　……………..(7 分)

由题设得　$-6a=2(a^2+2)\neq 6$　　$a=-2$　　……………..(9 分)

九.



$$dW = x \cdot 100\mu g \times 2(a-y)dx$$

$$= 200\mu g x(a-\sqrt{a^2-x^2})dx \qquad \text{.........(3 分)}$$

$$W = \int_0^a 200\mu g x(a-\sqrt{a^2-x^2})dx \qquad \text{.........(4 分)}$$

$$= 200\mu g(\int_0^a axdx - \int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx) \qquad \text{.........(5 分)}$$

$$= 200\mu g(\frac{a^3}{2} - \frac{1}{3}a^3) \qquad \text{...(1+2).......(8 分)}$$

$$= \frac{100}{3}\mu g a^3 \text{(J)} \qquad \text{................(9 分)}$$

十.

$$r^2 + r - 2 = 0 \qquad \text{................(1 分)}$$

$$r = 1 \qquad r = -2 \qquad \text{................(3 分)}$$

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} \qquad \text{................(4 分)}$$

设 $y^* = x(Ax+B)e^x$ ....(5 分)

代入方程得 $6Ax + 2A + 3B = 3x$ ....(7 分)

解得 $A = \frac{1}{2} \qquad B = -\frac{1}{3}$ ....(9 分)

通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x)e^x$ ....(10 分)

十一.

$$V_1 = \int_a^\xi \pi[f^2(x) - f^2(\xi)]dx \qquad \text{................(2 分)}$$

$$V_2 = \int_\xi^b 2\pi x[f(\xi) - f(x)]dx \qquad \text{................(4 分)}$$

令 $F(t) = \int_a^t \pi[f^2(x) - f^2(t)]dx - \int_t^b 2\pi x[f(t) - f(x)]dx$ ....(6 分)

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

$$F(a) = -\int_a^b 2\pi x[f(a) - f(x)]dx < 0 \qquad \text{................(7 分)}$$

$$F(b) = \int_a^b \pi[f^2(x) - f^2(b)]dx > 0 \qquad \text{................(8 分)}$$

根据介值定理，$\exists \xi \in (a,b)$，使 $F(\xi) = 0$，即

$$\int_a^\xi \pi[f^2(x) - f^2(\xi)]dx - \int_\xi^b 2\pi x[f(\xi) - f(x)]dx = 0$$

$$V_1 = V_2 \qquad \text{................(9 分)}$$

课程编号：MTH17003　　北京理工大学 2015-2016 学年第一学期

工科数学分析期末试题(A 卷)评分标准

一．填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、-1

2、2

3、$\dfrac{\pi^2}{4}$

4、$y = x - \dfrac{\pi}{2}$

5、$(x_1, f(x_1))$，$(0, f(0))$

二、

解：（1）当$x\neq 1$时，$f'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\cdot\dfrac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$

$$=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{|1-x^2|}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)}$$ ………………（2 分）

当$x>1$时，$f'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{1}{x^2-1}\cdot\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)}=0$， ………………（3 分）

当$0<x<1$时，$f'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{1}{1-x^2}\cdot\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)}=\dfrac{4}{1+x^2}$， ………………（4 分）

又 $f'_+(1)=0$，$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{4}{1+x^2}=2$，所以$f'(1)$不存在。 ………………（6 分）

（2）由（1）知，当$x\geq 1$时，$f'(x)=0$，所以$f(x)$恒等于常数， ………………（7 分）

又 $f(1)=2\arctan 1+\arcsin\dfrac{2}{1+1}=\pi$，

所以当$x\geq 1$时，$f(x)=2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi$。 ………………（8 分）

三.

解：当$-1\leq x<0$时，$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{x}(t+1)dt=\dfrac{1}{2}(x+1)^2$， ………………（2 分）

当$0\leq x\leq 1$时，$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{x}f(t)dt$

$$=\int_{-1}^{0}(t+1)dt+\int_{0}^{x}tdt=\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}$$ ………………（6 分）

即 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+1)^2 & -1\leq x<0\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{x^2}{2} & 0\leq x\leq 1\end{cases}$，

又$\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\dfrac{1}{2}$，故$F(x)$在$[-1,1]$上连续。 ………………（8 分）

四. 解：（1）令 $t=e^x$， $x=\ln t$， $dx=\frac{1}{t}dt$，则

$$\int\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx=\int\frac{\ln(1+t)}{t^2}dt=-\int\ln(1+t)d(\frac{1}{t})=-[\frac{\ln(1+t)}{t}-\int\frac{1}{t(1+t)}dt]$$

$$=-\frac{\ln(1+t)}{t}+\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t})dt=-\frac{\ln(1+t)}{t}+\ln\frac{t}{1+t}+C$$

$$=-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}+\ln\frac{e^x}{1+e^x}+C$$ ……………………………………（4 分）

（注：任意常数 C 没写扣一分）

（2）令 $t=\sqrt{x}$， $x=t^2$， $dx=2tdt$，则

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\int_1^{+\infty}\frac{2t}{(1+t^2)t}dt=2\arctan t\Big|_1^{+\infty}=2(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}$$ …………（8 分）

五、

解：（1）曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=(1+\cos\theta)\cos\theta\\ y=(1+\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$， ………………（1 分）

$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时， $x=0, y=1$ ………………（2 分）

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}=\frac{(1+\cos\theta)\cos\theta-\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)(-\sin\theta)-\cos\theta\sin\theta}=\frac{\cos\theta+\cos 2\theta}{-\sin\theta-\sin 2\theta},$$ ………（3 分）

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=1$$ ………………（4 分）

故所求切线方程为 $y=x+1$。 ………………（5 分）

（2） $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\theta}(\frac{dy}{dx})\Big/\frac{dx}{d\theta}$

$$=\frac{(-\sin\theta+2\sin 2\theta)(-\sin\theta-\sin 2\theta)-(\cos\theta-\cos 2\theta)(-\cos\theta-2\cos 2\theta)}{(-\sin\theta-\sin 2\theta)^3}$$ … …（6 分）

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=1$$ ………………（7 分）

则 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处的曲率 $K=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$。 ………………（8 分）

六.

解：原方程整理得 $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$ ………………（1 分）

令 $u=\dfrac{y}{x}$， $y=ux$， $y'=u+xu'$， ………………（2 分）

则原方程变为 $u+xu'=u\ln u$，

分离变量得 $\dfrac{1}{u\ln u-u}du=\dfrac{1}{x}dx$ ………………（4 分）

得方程通解 $y=xe^{cx+1}$ ………………（6 分）

又 $y(1)=e^3$，得 $C=2$， ………………（7 分）

故所求方程的解为 $y=xe^{2x+1}$。 ………………（8 分）

七.

解：设 $f(x)=4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$， ………………（1 分）

$f'(x)=\dfrac{4}{1+x^2}-1=\dfrac{3-x^2}{1+x^2}=0$，得驻点 $x=\pm\sqrt{3}$， ………………（2 分）

当 $x<-\sqrt{3}$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单减，

当 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单增，

当 $x>\sqrt{3}$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单减，

则 $x=-\sqrt{3}$ 是 $f(x)$ 的极小值点， $x=\sqrt{3}$ 是 $f(x)$ 的极大值点，………………（4 分）

而 $f(-\sqrt{3})=0$，则 $-\sqrt{3}$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,\sqrt{3})$ 内的唯一一个零点，……………（5 分）

因 $f(\sqrt{3})=\dfrac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}>0$， $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3})=-\infty$，

故 $f(x)$ 在 $(\sqrt{3},+\infty)$ 内只有唯一一个零点， ………………（7 分）

而 $f(x)$ 在 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 内没有零点，

所以 $f(x)$ 有两个零点，从而两曲线有两个交点。 ………………（8 分）

八.

解：设t时刻汽水的温度为$T(t)$，则 $\dfrac{dT}{dt}=-k(T-4)$，（其中$k>0$），……………（2 分）

分离变量 $\dfrac{1}{T-4}dT=-kdt$， ………………（3 分）

得方程通解为 $T=Ce^{-kt}+4$ ………………（5 分）

由题设，$T(0)=24$，得 $C=20$，故$T=20e^{-kt}+4$ ………………（6 分）

又由题设 $T(30)=14$，得 $k=\dfrac{\ln 2}{30}$，从而$T=20e^{-\frac{\ln 2}{30}t}+4$ ………………（7 分）

当$T=9$时，$t=60$，

即再经过$60-30=30$(分钟)，物体的温度可以降至9^0C。 ……………………（8 分）

九.

解：原方程变形为 $\int_0^x tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt=f(x)+\cos 2x$ （1）

方程两边关于x求导得 $-\int_0^x f(t)\,dt=f'(x)-2\sin 2x$ （2）

方程两边再关于x求导得 $-f(x)=f''(x)-4\cos 2x$，$f''(x)+f(x)=4\cos 2x$

由（1）（2）得 $f(0)=-1$，$f'(0)=0$，

得初值问题：$\begin{cases} f''(x)+f(x)=4\cos 2x \\ f(0)=-1,\quad f'(0)=0 \end{cases}$， ……………………（3 分）

特征方程为 $r^2+1=0$，特征根为$r=\pm i$，

则对应的齐次方程的通解为$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$ ………………（4 分）

因为$\pm 2i$不是特征根，故设此方程的特解为$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$……………（5 分）

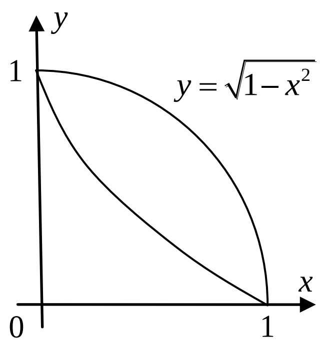
代入原方程解得 $A=-\dfrac{4}{3},B=0$，故 $y^*=-\dfrac{4}{3}\cos 2x$， ………………（6 分）

所求微分方程的通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{4}{3}\cos 2x$ ………………（7 分）

又由 $f(0)=-1$，$f'(0)=0$，得$C_1=\dfrac{1}{3}$，$C_2=0$，故 $f(x)=\dfrac{1}{3}\cos x-\dfrac{4}{3}\cos 2x$……（8 分）

十.

解：（1） D 的图形如右图所示，则 D 的面积



$$A=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^3 x d\cos^3 x$$ ………………（2 分）

$$=\frac{\pi}{4}-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x dx=\frac{\pi}{4}-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x(1-\sin^2 x)dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 x-\sin^6 x)dx$$ ………………（3 分）

$$=\frac{\pi}{4}-3\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5}{32}\pi$$ …………（4 分）

（2） D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V=\pi\int_0^1(1-x^2)dx-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^6 x d\cos^3 x$$ ………………（6 分）

$$=\frac{2\pi}{3}-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\cos^2 x dx=\frac{2\pi}{3}-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x(1-\sin^2 x)dx$$

$$=\frac{2\pi}{3}-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 x-\sin^9 x)dx$$ ………………（7 分）

$$=\frac{2\pi}{3}-3\pi\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{18}{35}\pi$$ ………………（8 分）

十一.

解：（1） $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2}x^2=f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2}x^2$，（其中 ξ 介于 $0,x$ 之间）。…（3 分）

（2）由题设， $f''(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续，

则在区间 $[-a,a]$ 存在最大值 M 和最小值 m， ………………（4 分）

而 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}(f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2)dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx$

又 $\frac{a^3}{3}m=\frac{m}{2}\int_{-a}^{a}x^2dx\le\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx\le\frac{M}{2}\int_{-a}^{a}x^2dx=\frac{a^3}{3}M$

故 $m\le\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)dx\le M$ ………………（6 分）

由介值定理，存在 $\eta\in[-a,a]$，使得 $f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)d$，

即 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx$。 ………………（8 分）

北京理工大学 2016 级《工科数学分析》第一学期期末试题解答及评分标准

2016 年 1 月 18 日

一、每小题 4 分，共 20 分

1. $\ln 3$ ；　　2. $\sqrt{x^2+1}$；　　3. $\frac{1}{9}(2e^3+1)$；

4. $\cos\frac{1}{x}+C$；　　5. $x(\frac{x^2}{2}+C)$.

二、1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}$ 　　**3 分**

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x(-\sin x)}{6x}=-\frac{1}{3}$ 　　**5 分**

2 方程两边同时对 x 求导，得：$e^y+xe^y\frac{dy}{dx}+e^x\frac{dy}{dx}+ye^x=0$ 　　**3 分**

解得：$dy=-\frac{e^y+ye^x}{e^x+xe^y}dx$ 　　**5 分**

3 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-\cos x\right|dx$ 　　**2 分**

$=2[\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})]\Big|$ 　　**3 分**

$=4(\sqrt{2}-1)$ 　　**5 分**

4 　令：$u=x+y$，则 $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$ 　　**2 分**

代入原方程，得：$\frac{du}{dx}=u^2+1$ 　解得：$\arctan u=x+c$ 　　**4 分**

代入，$\arctan(x+y)=x+c$ 　通解为：$y=\tan(x+c)-x$ 　　**5 分**

三、由条件知：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2x^2-x}{x+1}-ax-b}{x}=0$ 得

$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x}{(x+1)x}=2$　　**3 分**

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x}{x+1}-2x=-3$　　**6 分**

四、（1）设 $f(x)=x-\sin x$

则 $f(0)=0$， $f'(x)=1-\cos x\ge 0 \quad (x>0)$　　2 分

所以 $f(x)$ 是单调增加函数，则有 $f(x)>f(0)=0,$

即当 $x>0$ 时，有 $x>\sin x$　　3 分

（2）由（1）知，对自然数 n，有 $x_n>\sin x_n=x_{n+1}$

又 $0<x_{n+1}=\sin x_n<1$，所以 $\{x_n\}$ 单调有界必有极限，　　**5 分**

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 则有 $a=\sin a \quad a=0$　　**6 分**

五、定义域 $x\ne 0$

$y'=\dfrac{-4(x+2)}{x^3}$， $y'=0$ 得 $x_1=-2$； $y''=\dfrac{8(x+3)}{x^4}$ ， $y''=0$ 得 $x_2=-3$。　3 分

列表：

	$-\infty,-3$	-3	$-3,-2$	-2	$-2,0$	0	$0,+\infty$
f'	$-$		$-$	0	$+$	不存在	$-$
f''	$-$	0	$+$		$+$		$+$
f		拐点		极值点			
		（$-3,-\dfrac{26}{9}$)		-3			

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-2$　　渐近线：$y=-2$ 及 $x=0$　　**6 分**

六、由对称性可知：

心形线长

$$s=2\int_0^{\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta=4\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\theta}d\theta=8\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=16$$ **3 分**

心形线所围面积：

$$A=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\rho^2(\theta)d\theta=4\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta=6\pi$$ **6 分**

七、（1）由对称性可知：

$$V_{\pi}=2\int_0^1\pi y^2(x)dx$$ **2 分**

$$=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^6 t\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)dt=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cos^2 tdt=\frac{32}{105}\pi,$$ **4 分**

（2）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$ ， $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1$， **5 分**

$$\frac{d^{2y}}{dx^2}=\frac{-\sec^2 t}{3\cos^2 t(-\sin t)}=\frac{1}{3\cos^4 t\sin t},\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{4\sqrt{2}}{3},$$ **6 分**

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{3}$$ **8 分**

八、（1）设注水t秒后，液面的高度为$h=h(t)$，则容器内水的容积是

$$V=\int_0^h\pi x^2dy=\int_0^h\pi y^{\frac{2}{3}}dy$$ **2 分**

两边对t求导 $\dfrac{dV}{dt}=\pi h^{\frac{2}{3}}\dfrac{dh}{dt}$，

已知$\dfrac{dV}{dt}=3$，则 $\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{3}{\pi h^{\frac{2}{3}}}$ **4 分**

（2）选 y 为积分变量， $y\in[0,1]$，

$$dw=\pi x^2 dy\mu g(1-y)=\pi\mu g(1-y)y^{\frac{2}{3}}dy$$

（其中 μ 水的密度， g 重力加速度） **6 分**

$$w=\int_0^1\pi\mu g(1-y)y^{\frac{2}{3}}dy=\frac{9}{40}\pi\mu g$$ 。 **8 分**

九、（1）证明：作代换，令 $u=x-t,du=-dt$ **1 分**

$$\int_0^x tf(x-t)dt=\int_x^0(x-u)f(u)(-du)=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$$

$$=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$$ **2 分**

（2）将（1）代入已知等式，有

$f(x)+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt+\sin x=0$，两边对 x 求导，有

$f'(x)+\int_0^x f(t)dt+\cos x=0$，再求导，有

$f''(x)+f(x)-\sin x=0$，而 $f(0)=0,f'(0)=-1$，即 $f(x)$ 满足：

$$\begin{cases} y''+y=\sin x \\ y(0)=0,y'(0)=-1 \end{cases}$$ **4 分**

$y''+y=0$ 的特征根为 $r=\pm i$ ，通解为 $Y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$ **5 分**

作辅助方程： $y''+y=e^{xi}$， i 是特征方程的单根，设 $\tilde{y}=Axe^{xi}$， **6 分**

代入方程解出： $A=-\frac{1}{2}i$， $\tilde{y}=-\frac{1}{2}ixe^{xi}$，取虚部，得特解：

$\bar{y}=-\frac{1}{2}x\cos x$，通解为：$y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$ **7 分**

代入初始条件，解得： $c_1=0,c_2=-\frac{1}{2}$， 故

$$y=f(x)=-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$$ **8 分**

十、（1）由 $f(x)$ 连续，有

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)}(x-1)=5\cdot0=0$$ **1 分**

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)}=5$$ **3 分**

（2）$$\lim_{x\to0}\frac{f(\frac{\sin x}{x})}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{f(\frac{\sin x}{x})}{\frac{\sin x}{x}-1}\cdot\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}$$ **5 分**

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(\frac{\sin x}{x})}{\frac{\sin x}{x}-1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{\sin x-x}{x^3}=5\cdot(-\frac{1}{6})=-\frac{5}{6}$$ **6 分**

十一、构造辅助函数 $F(x)=x^3f(x)$ **2 分**

由 $f(x)$ 在 $[0.1]$ 上连续，且 $f(0)\cdot f(1)=-1$，则必有一点 $\eta\in(0,1)$，使得

$f(\eta)=0$ **3 分**

即：$F(0)=F(\eta)=0$，所以 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上满足罗尔定理条件，

则存在 $\xi\in(0,\ \eta)\subseteq(0,1)$，使得

$F'(\xi)=0$ 即 $\xi^3f'(\xi)+3\xi^2f(\xi)=0$

$\xi f'(\xi)+3f(\xi)=0$ **6 分**