§ 2.4 非齐次线性方程组解的结构

一、 非齐次线性方程组有非零解的充要条件

二、 非齐次线性方程组的解的性质

三、非齐次线性方程组的解的结构

一、 非齐次线性方程组有非零解的充要条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (2.4.1)$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta$$

非齐次线性方程组的矩阵表示式

$$AX = b \qquad (*)$$

其中

$$A = [a_{ij}]_{m\times n},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

令

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \cdots,\ \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则方程组（*）可表为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta \qquad (*)'$$

----非齐次方程组的向量表示式

结论：

非齐次方程组（*）有解

$\Leftrightarrow$ β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出

$\Leftrightarrow$ $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\} \cong \{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta\}$

$\Leftrightarrow$ 秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ = 秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta\}$

$\Leftrightarrow$ 秩(A) = 秩$(\tilde{A})$，这里 $\tilde{A}=[A, b]$

定理 非齐次线性方程组 $AX = b$ 有解的充要条件是

秩(A) = 秩$(\tilde{A})$ 　　无解 $\Leftrightarrow$ $r(A) \neq r(\tilde{A})$

定理 非齐次线性方程组 $AX = b$ 有唯一解的充要条件是

秩(A)＝秩$(\tilde{A})$＝A的列数＝未知数个数

推论 非齐次线性方程组 $AX = b$ 有无穷多解的充要条件是

秩(A)＝秩$(\tilde{A})$ < A的列数＝未知数个数

二、 非齐次线性方程组的解的性质

非齐次方程组（*）： $AX = b$

齐次方程组（**）： $AX = 0$

称（**）为（*）的导出方程组。 对应齐次方程组

性质：(1) 设 X_1, X_2是非齐次线性方程组 $AX = b$的任意两个解向量，则 $X_1 - X_2$是其导出方程$AX=0$的解向量； $X_1 + X_2$； $\frac{X_1 + X_2}{2}$； $k_1X_1 + k_2X_2$，$(k_1 + k_2 = 1)$

(2) 设 X_0是非齐次线性方程组 $AX = b$的任一个解向量，$\overline{X}$是其导出方程组 $AX = 0$的任一个解向量，则 $X_0 + \overline{X}$ 是 $AX = b$的解向量。

注 非齐次线性方程组解向量的线性组合一般不再是非齐次线性方程组的解向量。

除非组合系数之和为1

三、非齐次线性方程组的解的结构

定理 设非齐次线性方程组 $AX=b$ 有无穷多个解，则其一般解为

$$X_0+k_1X_1+k_2X_2+\ldots+k_tX_t$$

其中 X_0 是 $AX=b$ 的一个特解，$X_1,X_2,\ldots,X_t$ 是导出方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，$k_1,k_2,\ldots k_t$ 是 t 个任意常数。

例2.4.1 求下列方程组的一般解

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 0 \\ x_1+x_2-x_3-x_4-2x_5=1 \\ 2x_1+2x_2-x_4-2x_5=1 \\ 5x_1+5x_2+3x_3-4x_4-8x_5=4 \end{cases}$$

解 $\tilde{A}=[A,\ b]$

$$=\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&-1&-1&-2&1 \\ 2&2&0&-1&-2&1 \\ 5&5&3&-4&-8&4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&2&1&2&-1 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 0 \\ 2x_3+x_4+2x_5=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_3 = -x_2 \\ 2x_3=-1-x_4-2x_5 \end{cases}$$

$$x_2=x_4=x_5=0 \ \Rightarrow\ X_0=(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0,0)^T$$

考虑其导出组

$$\begin{cases} x_1+x_3 = -x_2 \\ 2x_3=-x_4-2x_5 \end{cases}$$

$$x_2=1,x_4=x_5=0 \ \Rightarrow\ X_1=(-1,1,0,0,0)^T$$

$$x_2=0,x_4=1,x_5=0 \ \Rightarrow\ X_2=(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},1,0)^T$$

$$x_2=0,x_4=0,x_5=1 \ \Rightarrow\ X_3=(1,0,-1,0,1)^T$$

∴ 一般解为

$$X_0+k_1X_1+k_2X_2+k_3X_3$$

其中k_1,k_2,k_3为任意常数.

例 2.4.2 已知非齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 1 \\ 3x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+ax_2+2bx_3=5 \end{cases}$$

的两个解 $(1,1,-1)^T$，$(-5,-3,9)^T$，求其一般解。

解 因为方程组有两个解，解不唯一，故其系数矩阵 A 的秩小于等于2。又A的前两行线性无关，说明 A 的秩大于等于2。由此得 秩$(A)=2$。于是，原方程组的导出方程组 $AX=0$ 的基础解系含 3-2=1个解。

可取

$$X_1=(1,1,-1)^T-(-5,-3,9)^T=(6,4,-10)^T$$

作为导出方程组的基础解系，取 $X_0=(1,1,-1)^T$ 作为原方程组的特解，则原方程组的一般解为

$$X_0+k_1X_1,\text{其中}k_1\text{为任意常数.}$$

思考题 设 $AX=0$是非齐次线性方程组 $AX=b$的导出方程组，问

（1）$AX=0$有非零解 $\Longrightarrow$ $AX=b$有无穷多解？

（2）$AX=b$有唯一解 $\Longrightarrow$ $AX=0$只有零解？

例2.4.3 设 X_0 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的一个特解，$X_1,X_2,\cdots,X_t$ 是导出方程组 $AX=0$ 的一组基础解系。令

$$Y_0=X_0, Y_1=X_0+X_1, Y_2=X_0+X_2, \cdots, Y_t=X_0+X_t$$

证明：$Y_0,Y_1,Y_2,\cdots,Y_t$ 线性无关，并且 $AX=b$ 的任意一个解均可表示为

$$k_0Y_0+k_1Y_1+k_2Y_2+\cdots+k_tY_t$$

其中 $k_0+k_1+k_2+\cdots+k_t=1$。

证明 令

$$k_0Y_0+k_1Y_1+k_2Y_2+\cdots+k_tY_t=\theta$$

则

$$(k_0+k_1+\cdots+k_t)X_0+k_1X_1+\cdots+k_tX_t=\theta \quad （1）$$

由此得

$$A[(k_0+k_1+\cdots+k_t)X_0+k_1X_1+\cdots+k_tX_t]=A\theta$$

$$\Rightarrow \quad (k_0+k_1+\cdots+k_t)AX_0+k_1AX_1+\cdots+k_tAX_t=\theta$$

$$\Rightarrow \quad (k_0+k_1+\cdots+k_t)b=\theta$$

因为 $b\neq\theta$ ，故

$$k_0+k_1+\cdots+k_t=0 \quad （2）$$

于是由式(1) 得

$$k_1X_1+\cdots+k_tX_t=\theta$$

已知 $X_1,X_2,\cdots,X_t$ 是基础解系，它们线性无关，故

$$k_1=0,\cdots,k_t=0$$

再由式(2)得 $k_0=0$。所以，$Y_0,Y_1,Y_2,\cdots,Y_t$ 线性无关。

任取 $AX=b$ 的一个解X，则由非齐次线性方程组解的结构定理得

$$X=X_0+k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_tX_t$$

$$=(1-\sum_{i=1}^{t}k_i)X_0+k_1(X_0+X_1)+\cdots+k_t(X_0+X_t)$$

$$=(1-\sum_{i=1}^{t}k_i)Y_0+k_1Y_1+\cdots+k_tY_t$$

令 $k_0=1-k_1-\cdots-k_t$，则 $k_0+k_1+\cdots+k_t=1$。

则 $X=k_0Y_0+k_1Y_1+\cdots+k_tY_t$

线性方程组的三个问题：

1 解的判别

2 求解

3 解的结构

下章会继续讨论不相容方程组的问题

作业 习题二(P112):
26, 32(1)(3), 33, 40, 41, 44, 46
(32-33,40-41,44-46均可作为练习)

本章知识点总结
(概念、性质、定理、基本计算、应用)

习题课

一、主要内容

二、典型例题

一、主要内容

1. 求线性表出
2. 判别线性相关性
3. 求向量组的秩与极大无关组
4. 求矩阵的秩
5. 齐次线性方程组的解的结构
6. 非齐次线性方程组解的结构

线性方程组解的情况

1. 齐次线性方程组：

$AX = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ $r(A) = n$

$AX = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ $r(A) < n$

（此时基础解系中含有 $n - r(A)$ 个解向量）

2. 非齐次线性方程组：

$AX = b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $r(A) = r(A, b) = n$

$AX = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow$ $r(A) = r(A, b) < n$

$AX = b$ 无解 $\Leftrightarrow$ $r(A) \neq r(A, b)$

二、典型例题

例1 证明：若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关，则向量组

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \cdots, \beta_{n-1} = \alpha_{n-1} + \alpha_n, \beta_n = \alpha_n + \alpha_1$$

也线性相关。

证明 因为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出，所以

$$秩\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\} \leqslant 秩\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$$

已知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关，故有

$$秩\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} < n$$

于是，

$$秩\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\} < n$$

由此可得 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$线性相关。

例2 证明：若向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，则向量组

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \cdots, \beta_{n-1} = \alpha_{n-1} + \alpha_n, \beta_n = \alpha_n + \alpha_1$$

当 n为奇数时线性无关，当 n为偶数时线性相关。

证明 令 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n = \theta$，则

$$(x_1 + x_n)\alpha_1 + (x_1 + x_2)\alpha_2 + (x_2 + x_3)\alpha_3 + \cdots + (x_{n-1} + x_n)\alpha_n = \theta$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，故

$$\begin{cases} x_1 + x_n = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ \cdots \quad \cdots \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

讨论此齐次方程组有无非零解：

取其系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\&\cdots&&\cdots&\cdots&\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{pmatrix}$$

对 A顺序做初等行变换

$$\underbrace{R_2+(-1)R_1,\ R_3+(-1)R_2,\ \cdots,\ R_n+(-1)R_{n-1}}$$

当 n为奇数时，A可化为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\0&1&0&\cdots&0&-1\\0&0&1&\cdots&0&1\\&\cdots&&\cdots&\cdots&\\0&0&0&\cdots&1&-1\\0&0&0&\cdots&0&2\end{pmatrix}$$

此时，齐次方程组（1）只有零解，故有

$$x_1=0,\ x_2=0,\ \cdots,\ x_n=0$$

于是，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关。

当 n为偶数时，A可化为

$$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&1\\0&1&\cdots&0&-1\\&\cdots&&\cdots&\\0&0&\cdots&1&1\\0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

此时，齐次方程组（1）有非零解，故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性相关。

例3 验证向量组$\alpha_1=(3,4,-2,5),\ \alpha_2=(2,-5,0,-3),$ $\alpha_3=(5,0,-1,2),\ \alpha_4=(3,3,-3,5)$的线性相关性，若线性相关，试求其中的一个向量由其余向量线性表出的表达式.

解1: 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\theta$

则有 $$\begin{cases}3x_1+2x_2+5x_3+3x_4=0\\4x_1-5x_2\qquad\quad+3x_4=0\\-2x_1\qquad\ -x_3-3x_4=0\\5x_1-3x_2+2x_3+5x_4=0\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}3&2&5&3\\4&-5&0&3\\-2&0&-1&-3\\5&-3&2&5\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&2&4&0\\4&-5&0&3\\-2&0&-1&-3\\5&-3&2&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&2&4&0\\0&1&-5&6\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因系数矩阵的秩 $=3<n=4=$未知数的个数，

故齐次方程有非零解，从而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关.

$\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$

$$\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$$

$$-2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=\theta$$

因此任一向量均可由其 余向量线性表式为

$$\alpha_1=-\frac{1}{2}\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_3+\frac{1}{2}\alpha_4;\qquad \alpha_2=-2\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4;$$

$$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4;\qquad \alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3.$$

解2 用行向量做初等行变换，并记录所做的变换

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}3 & 4 & -2 & 5\\ 2 & -5 & 0 & -3\\ 5 & 0 & -1 & 2\\ 3 & 3 & -3 & 5\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{array} \xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix}3 & 4 & -2 & 5\\ 2 & -5 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3-\alpha_1-\alpha_2\\ \alpha_4-\alpha_1\end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{行}} \begin{bmatrix}3 & 4 & -2 & 5\\ 2 & -5 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3-\alpha_1-\alpha_2\\ -2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\end{array} \qquad r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}=3<4$$

故由$-2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=\theta$,知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，且任一向量均可由其余向量线性表出，表出式同上.

例4：利用初等行变换求下列矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

的列向量组的一个极大无关组，并把其余列向量用极大组线性表示。

解：记列向量分别为：β_1，β_2，β_3，β_4，β_5.

利用初等行变换化为行简化阶梯型

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1\\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

由此知：$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$为极大无关组，且有

$$\beta_5=\beta_1+2\beta_2-\beta_4.$$

注：P111 第16题告诉我们：初等行变换不改变矩阵列向量组的线性相关性.

已知$\alpha_1=(1,-1,1,-1)$，$\alpha_2=(1,0,-1,0)$，$\alpha_3=(2,1,-2,-1)$，$\alpha_4=(-2,2,-1,1)$，

（1）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩和一个极大无关组；

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

例5 设

$$A=(a_{ij})_{m\times n},\ Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

（1）证明：若$AY=b$有解，则$A^TX=0$的任一组解也是$b^TX=0$的解；

（2）证明：$AY=b$有解 $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}A^T\\ b^T\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}O\\ 1\end{pmatrix}$无解，其中$O$是$n\times1$零矩阵。

证明（1）设$AY=b$有解，则存在一个Y_0，使$AY_0=b$。于是，$Y_0^TA^T=b^T$。

任取 $A^TX=0$ 的一个解 X_0，则 $A^TX_0=0$。因

$$b^TX_0=(Y_0^TA^T)X_0=Y_0^T(A^TX_0)=Y_0^T0=0$$

故 X_0 是 $b^TX=0$的解。

（2） $\Rightarrow$¡ 设$AY=b$ 有解，则有

$$秩(A)=秩([A,b])$$

因 $\text{秩}\begin{pmatrix} A^T & O \\ b^T & 1 \end{pmatrix} = \text{秩}\begin{pmatrix} A^T & O \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \text{秩}(A^T) + 1 = \text{秩}(A) + 1$$

$$= \text{秩}([A, b]) + 1 = \text{秩}([A, b]^T) + 1$$

$$= \text{秩}\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} + 1$$

故 $\text{秩}\begin{pmatrix} A^T & O \\ b^T & 1 \end{pmatrix} \neq \text{秩}\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix}$

由此得 方程组 $\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} O \\ 1 \end{pmatrix}$ 无解

$\Leftarrow$ ¡ 设 方程组 $\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} O \\ 1 \end{pmatrix}$ 无解 ， 则

$\text{秩}\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix} \neq \text{秩}\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix}$ 且 $\text{秩}\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix} = \text{秩}\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} + 1$

又 $\text{秩}\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix} = \text{秩}\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{秩}(A^T) + 1$

故 秩（A^T）$+1 = \text{秩}\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix} + 1$

由此得

$\text{秩}(A^T) = \text{秩}\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix}$， 即 $\text{秩}(A) = \text{秩}([A, b])$

所以，方程组 $AY = b$ 有解。

例6 已知四元齐次线性方程组

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

与四元齐次线性方程组（II）,且(II)的一般解

$$k_3(1,0,1,0) + k_4(0,1,0,1)$$

问方程组（I）与（II）有无非零公共解？求它们的全部公共解。

解 （法一）易得方程组（I）的一般解为

$$k_1(1,1,0,0) + k_2(0,0,1,1)$$

设 γ 是方程组（I）与（II）的公共解，则存在数 k_1，k_2，k_3，k_4 使

$$\gamma = k_1(1,1,0,0) + k_2(0,0,1,1)$$

$$= k_3(1,0,1,0) + k_4(0,1,0,1)$$

即

$$k_1(1,1,0,0) + k_2(0,0,1,1) - k_3(1,0,1,0) - k_4(0,1,0,1) = \theta$$

因向量组 $(1,1,0,0)$，$(0,0,1,1)$，$(1,0,1,0)$，$(0,1,0,1)$ 线性相关，故存在不全为零的 k_1，k_2，k_3，k_4，使上式成立。由此可知，方程组(I) 与 (II)有非零公共解 γ。

由上式可得

$$\begin{cases} k_1 - k_3 = 0 \\ k_1 - k_4 = 0 \\ k_2 - k_3 = 0 \\ k_2 - k_4 = 0 \end{cases}$$

解得其一般解为

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$$

于是，方程组（I）与（II）的全部公共解为

$$\gamma = k(1,\ 1,\ 1,\ 1)$$

（法二） 因方程组（II）的一般解为

$$k_3(1,0,1,0)+k_4(0,1,0,1)=(k_3,k_4,k_3,k_4)$$

代入方程组（I）有

$$\begin{cases} k_3 - k_4 = 0 \\ k_3 - k_4 = 0 \end{cases}$$

由此得

$$k_3 = k_4 = k$$

所以，方程组（I）与（II）的全部公共解为

$$k_3(1,0,1,0)+k_4(0,1,0,1)=k(1,1,1,1)$$

例7

设A是$m\times 3$矩阵，且$r(A)=1$.如果非齐次线性方程组$Ax=b$的三个解向量η_1,η_2,η_3满足

$$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\ \eta_3+\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

求$Ax=b$的通解.

解　$\because A$是$m\times 3$矩阵，$r(A)=1$，

$\therefore Ax=0$的基础解系中含有$3-1=2$个线性无关的解向量.　令$\eta_1+\eta_2=a,\eta_2+\eta_3=b,\eta_3+\eta_1=c$，则

$$\eta_1=\frac{1}{2}(a+c-b)=\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix},\ \eta_2=\frac{1}{2}(a+b-c)=\begin{pmatrix}0\\1/2\\5/2\end{pmatrix},$$

$$\eta_3=\frac{1}{2}(b+c-a)=\begin{pmatrix}0\\-3/2\\-3/2\end{pmatrix},$$

$$\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \eta_1-\eta_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

为$Ax=0$的基础解系中的解向量.

故$Ax=b$的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix},$$

其中k_1,k_2为任意实数.

例8: 设n阶矩阵A的列向量组为：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$，前$n-1$个列向量：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性相关，后$n-1$个列向量$\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$线性无关.$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$.

(1)证明线性方程组$(I): x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$必有无穷多个解；

(2)求(I)的导出组$(II): x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\theta$的一个基础解系；

(3)若$(k_1,k_2,\cdots,k_n)^T$是线性方程组(I)的任一解，则必有$k_n=1$.

证明:(1)

因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性相关，所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关。

又因为$\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$线性无关，所以$\alpha_2,\cdots\alpha_{n-1},\alpha_n$是向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$的一个极大无关组，

从而　$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=n-1$，$\Rightarrow r(A)=n-1$.

又$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$. 即$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出，

从而$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\cong\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta\}$

$\Rightarrow r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}=r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta\}$

即　$r(A)=r(A,\beta)=n-1<n$，

因此线性方程组(I)有无穷多个解.

（2）因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性相关，所以由定义知存在不全为零的数：$l_1,l_2,\cdots,l_{n-1}$，使得

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_{n-1}\alpha_{n-1} = \theta,$$

令$\eta = (l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}, 0)^T$，则显然$\eta \neq \theta$,

且η为导出组(II)的非零解,

又因为$r(A) = n-1$,可知η就是(II)的一个基础解系.

(3) 由$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$知,

$X_0 = (1,1,\cdots,1)^T$为方程组(I)的一个特解;

从而方程组(I)的一般解为:

$$X_0 + k\eta = (1,1,\cdots,1)^T + k(l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}, 0)^T$$
$$= (1 + kl_1, 1 + kl_2, \cdots, 1 + kl_{n-1}, 1)^T$$

从而若$(k_1, k_1, \cdots, k_n)^T$为方程组$(I)$的解，则必有$k_n = 1$.