

练习题

1. 设 A 是 5 阶方阵, 且 $r(A) = 3$, 则线性空间 $W = \{x \mid Ax = 0\}$ 的维数为 ____.

2. 设 R^4 的一组基为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 令 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_4$, $\beta_4 = \alpha_4 + \alpha_1$, 则子空间 $W = \{k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 + k_4\beta_4 \mid k_i \in F, i = 1, 2, 3, 4\}$ 的维数为____, 它的一组基为_____.

3. 从 R^2 的基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 过渡矩阵为_____.

4. 在 R^4 中, 求下述齐次线性方程组的解空间的维数和基.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

5. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 R^3 的一组基, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 满足 $\beta_1 + \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_1 + \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_2 + \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_3$,

(1) 证明: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是一组基;

(2) 求由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵;

(3) 求向量 $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$ 关于基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的坐标.

6. 已知 3 阶矩阵 A 有 3 维向量 x 满足 $A^3x = 3Ax - A^2x$, 且向量组 x, Ax, A^2x 线性无关. 记 $P = (x, Ax, A^2x)$, 求 3 阶矩阵 B , 使 $AP = PB$.

7. 设 $k_1\alpha + k_2\beta + k_3\gamma = 0$, 且 $k_1k_3 \neq 0$,

证明: $L(\alpha, \beta) = L(\beta, \gamma)$.