

(2013-2014)工科数学分析第一学期期末试题(A 卷)解答 (2014.1)

一. 1. $x^3 + 2x^2 + 3x$

2. $\sqrt{2} + 1$

3. $-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}$

4. $\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{4-\pi+2\ln 2} \arctan x$

5. $m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - k \frac{dy}{dt}$

二. 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(1-x)}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{-1}{1-x}}{2x} \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1-x)} \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$

$= -\frac{1}{2} \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$

三. $e^y \frac{dy}{dx} - y - x \frac{dy}{dx} = 0 \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{e^y - x} \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{dy}{dx} \cdot (e^y - x) - y(e^y \frac{dy}{dx} - 1)}{(e^y - x)^2} \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$

$= \frac{\frac{y}{e^y - x} \cdot (e^y - x) - y(e^y \frac{y}{e^y - x} - 1)}{(e^y - x)^2} \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$

$= \frac{-2xy + 2ye^y - y^2 e^y}{(e^y - x)^3} \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$

四. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3a}{x-a} \right)^{\frac{x-a}{3a}} \right]^{\frac{3ax}{x-a}}$ (2 分)

$= e^{3a}$ (3 分)

$\int_0^{+\infty} \frac{8x}{e^x} dx = \int_0^{+\infty} 8xe^{-x} dx = -\int_0^{+\infty} 8x de^{-x}$ (4 分)

$= -8xe^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 8e^{-x} dx$ (6 分)

$= -8e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 8$ (8 分)

$e^{3a} = 8 \quad a = \ln 2$ (9 分)

五. $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}x + y^3 \quad \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y^3$ (2 分)

$x = e^{-\int \frac{1}{y} dy} (C + \int y^3 e^{\int \frac{1}{y} dy} dy)$ (4 分)

$= e^{\ln y} (C + \int y^3 e^{-\ln y} dy)$ (6 分)

$= y(C + \int y^3 \frac{1}{y} dy)$ (8 分)

$= Cy + \frac{1}{3}y^4$ (9 分)

六. $f'(x) = -a \sin x - \cos 3x$ (3 分)

由 $f'(\frac{\pi}{3}) = -a \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0$ 得 $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (5 分)

$f''(x) = -a \cos x + 3 \sin 3x$ (7 分)

因为 $f''(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$ 故 $f(\frac{\pi}{3})$ 是极大值(9 分)

七. 抛物线与直线的交点为(1,-1),(4,2)(1 分)

$A = \int_{-1}^2 [(y+2) - y^2] dy$ (3 分)

$= (\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}$ (5 分)

$V = \int_{-1}^2 [\pi(y+2)^2 - \pi y^4] dy$ (7 分)

$= \pi [\frac{1}{3}(y+2)^3 - \frac{1}{5}y^5] \Big|_{-1}^2 = \frac{72}{5}\pi$ (9 分)

八. 令 $t = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$ 即 $x = \frac{1}{t^2-1}$ (2 分)

$$I = \int \frac{-2t^2}{t^2-1} dt \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

$$= -2 \int (1 + \frac{1}{t^2-1}) dt \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

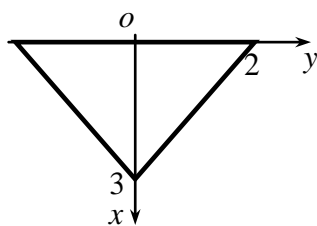
$$= -2 \int (1 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}) dt \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

$$= -2t + \ln|t+1| - \ln|t-1| + C \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

$$= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} + \ln\left|\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 1\right| - \ln\left|\sqrt{\frac{1+x}{x}} - 1\right| + C \quad \dots\dots\dots(9$$

分)

九. $dW = x \cdot \mu g \pi y^2 dx = \pi \mu g x \cdot 4(1 - \frac{x}{3})^2 dx = \frac{4}{9} \pi \mu g x (3-x)^2 dx \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$



$$W = \int_0^3 \frac{4}{9} \pi \mu g x (3-x)^2 dx \quad \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$$

$$= \frac{4}{9} \pi \mu g \int_0^3 (9x - 6x^2 + x^3) dx$$

$$= \frac{4}{9} \pi \mu g (\frac{9}{2} x^2 - 2x^3 + \frac{1}{4} x^4) \Big|_0^3 \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

$$= 3\pi \mu g = 3000\pi g \text{ (J)} \quad \dots\dots\dots(9 \text{ 分})$$

十. $f(x) = -e^{-x} + x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt \quad \dots\dots\dots(1 \text{ 分})$

$$f'(x) = e^{-x} + \int_0^x f(t) dt \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$f''(x) = -e^{-x} + f(x) \quad f''(x) - f(x) = -e^{-x} \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

$$f(0) = -1 \quad f'(0) = 1 \quad \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$$

$$r^2 - 1 = 0 \quad r = \pm 1 \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

$$\bar{f}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \quad \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

设 $f^*(x) = A x \bar{e}^x \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$

代入微分方程得 $A = \frac{1}{2} \quad f^*(x) = \frac{1}{2} x e^{-x} \quad \dots\dots\dots(9 \text{ 分})$

通解为 $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^{-x}$ (10 分)

由初值得 $C_1 = -\frac{1}{4}$ $C_2 = -\frac{3}{4}$
 $f(x) = -\frac{1}{4} e^x - \frac{3}{4} e^{-x} + \frac{1}{2} x e^{-x}$ (12 分)

十一. 令 $F(t) = (t-1) \int_0^t f(x) dx$ (2 分)

则 $F(t)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 可导, 又

$$F(0) = F(1) = 0$$

由罗尔定理, $\exists \xi \in (0,1)$, 使 $F'(\xi) = 0$ (6 分)

$$\int_0^\xi f(x) dx + (\xi-1)f(\xi) = 0$$
(7 分)

即 $(1-\xi)f(\xi) = \int_0^\xi f(x) dx$ 得证(8 分)