习题3-4.

1.(1). $y'=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $y''=\frac{-2x(1+x^2)^2-2(1+x^2)2x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}=\frac{-6x+2x^3}{(1+x^2)^3}$

令$y''=0$, 得$x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$, 列表讨论如下:

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\frown$	$\frac{-\sqrt{3}}{4}$	$\smile$	0	$\frown$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\smile$

则凸区间为$(-\infty,-\sqrt{3})$ $(0,\sqrt{3})$ 凹区间$(-\sqrt{3},0)$ $(\sqrt{3},+\infty)$, 拐点为$(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4})$ $(0,0)$ $(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4})$

(2) $y'=e^x+xe^x$ $y''=2e^x+xe^x$

令$y''>0$ 得$x>-2$ 令$y''<0$ 得$x<-2$ 令$y''=0$ 得$x=-2$

则凸区间为$(-\infty,-2)$. 凹区间为$(-2,+\infty)$, 拐点为$(-2, 1-2e^{-2})$

(3) $y'=\frac{2\ln x-2}{(\ln x)^2}$, $y''=\frac{-2\ln x+4}{x(\ln x)^3}$ $(x>0)$.

令$y''=0$ 得$x=e^2$, $x=1$时, y''不存在,

令$y''>0$ 得$1<x<e^2$ 令$y''<0$ 得 $0<x<1$, $x>e^2$

则凹区间$(1,e^2)$, 凸区间$(0,1)$ $(e^2,+\infty)$, 拐点为(e^2,e^2)

(4) $y'=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ $y''=\frac{2}{(x-1)^3}$

令$y''=0$ 得不到解, 又$x=1$时 y''不存在

令$y''>0$ 得 $x>1$. 令$y''<0$ 得$x<1$

则凹区间为$(1,+\infty)$, 凸区间为$(-\infty,-1)$, 无拐点

(5) $y'=1+\cos x$ $y''=-\sin x$

令$y''=0$, 得$x=2k\pi$ $x=2k\pi+\pi$ $k\in Z$.

令$y''>0$ 得 $2k\pi+\pi<x<2(k+1)\pi$ 令$y''<0$ 得 $2k\pi<x<2k\pi+\pi$

则凹区间为$(2k\pi+\pi, 2(k+1)\pi)$ 凸区间为$(2k\pi, 2k\pi+\pi)$

拐点为$(2k\pi,2k\pi)$ $(2k\pi+\pi, 2k\pi+\pi)$

(6) $y'=e^{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}$ $y''=\frac{1-2x}{(1+x^2)^2}e^{\arctan x}$

令$y''=0$ 得$x=\frac{1}{2}$. $y''>0$得$x<\frac{1}{2}$ $y''<0$得$x>\frac{1}{2}$

则凹区间为$(-\infty,\frac{1}{2})$, 凸区间为$(\frac{1}{2},+\infty)$. 拐点$(\frac{1}{2}, e^{\arctan\frac{1}{2}})$

2. (1) 令 $f(x)=x^n \quad (x>0,\ n>1)$

$f'(x)=nx^{n-1} \quad f''(x)=n(n-1)x^{n-2}\geq 0$

则 $f(x)=x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 为凹弧，$\forall x\neq y$.

则 $f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(x^n+y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$

(2) 令 $f(x)=e^x$

$f'(x)=e^x \quad f''(x)=e^x>0$

则 $f(x)=e^x$ 在 R 上为凹弧. 对 $\forall x\neq y$

则 $e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x+e^y}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x+e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$

(3) 令 $f(x)=\ln x^x \quad (x>0)$.

$f'(x)=\ln x+1 \quad f''(x)=\frac{1}{x}>0$

则 $f(x)=\ln x^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为凹弧，则对 $\forall x\neq y>0$

则 $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)^{\frac{x+y}{2}} < \frac{\ln x^x+\ln y^y}{2}$

$\Leftrightarrow x\ln x+y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2} \quad (x>0,\ y>0,\ x\neq y)$

3. $y'=\frac{(x^2+1)-(x+1)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$，$y''=\frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$

令 $y''=0$ 得 $x_1=-1$ $x_2=2+\sqrt{3}$ $x_3=2-\sqrt{3}$

同时得 $y_1=-1$ $y_2=\frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ $y_3=\frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}=\frac{-\sqrt{3}-1}{4}$

则曲线有三个拐点，

又 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\sqrt{3}+3}{4}/(3+\sqrt{3})=\frac{1}{4}$ $\quad \frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{-\sqrt{3}+3}{4}/(3-\sqrt{3})=\frac{1}{4}$

则三个拐点位于同一直线上.

4. $y'=3ax^2+2bx$. $\quad y''=6ax+2b$.

若 $(1,3)$ 为拐点，则 $6a+2b=0$ 且 $a+b=3$

$\Rightarrow a=-\frac{3}{2} \quad b=\frac{9}{2}$

5. $y'=3ax^2+2bx+c \qquad y''=6ax+2b$

因 $x=-2$ 时有水平切线：则 $12a-4b+c=0$

$(1,-10)$ 为拐点：则 $6a+2b=0 \quad a+b+c+d=-10$

又 $(-2,44)$ 在曲线上：$-8a+4b-2c+d=44$

$\Rightarrow a=1 \quad b=-3 \quad c=-24 \quad d=16$

6. $y'=4kx(x^2-3) \qquad y''=12k\cdot(x^2-1)$

令 $y''=0$，得 $x=1$ 或 -1，此时 $y'=-8kx$

$x=1$ 时，$y'=-8k$，法线为 $y=\frac{1}{8k}(x-1)+4k$ 过原点，则 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$

$x=-1$ 时，$y'=8k$，法线为 $y=\frac{1}{8k}(x+1)+4k$ 过原点，则 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$

综上：$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}$

7. (1) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{\frac{1}{x}}-1)=0$ 则 $y=0$ 是其水平渐近线．$\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{\frac{1}{x}}-1)=+\infty$ 则不考虑．

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}(e^{\frac{1}{x}}-1)=\infty$ 则 $x=0$ 是其垂直渐近线．

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{x}=0$ 则无斜渐近线

(2) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(x+1)^2}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6(x+1)}{2}=\infty$，则无水平渐近线

由于 $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=\infty$ 则 $x=1$ 是其垂直渐近线

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3(x+1)^2}{(x-1)^2+2x(x-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6(x+1)}{2(x-1)+4x-2}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-1\cdot x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{(x+1)^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(x+1)^2-(x-1)^2-2x(x-1)}{2(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+6-2x+2-4x+2}{2}=5$

则 $y=x+5$ 是斜渐近线

(3) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-2}\right)^{\frac{1}{3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{2}\cdot\frac{2}{3(x-2)}}=e^0=1$，则 $y=1$ 是水平渐近线

由于 $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x}{x-2}\right)^{\frac{1}{3}}=\infty$，则 $x=2$ 是其垂直渐近线．

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x(x-2)^{\frac{1}{3}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}=0$，则无斜渐近线．

(4) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}=\lim\limits_{x\to\infty}2\sqrt{x^2-1}=+\infty$ 则无水平渐近线

由于 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$，则 $x=\pm1$ 是垂直渐近线

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-1\cdot x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}(y-(-1)\cdot x)=0$

则 $y=x$，$y=-x$ 是其斜渐近线

(5) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\arctan x)=\infty$，则无水平渐近线

由于 y 在R上连续，则无垂直渐近线

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\arctan x}{x}\right)=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\arctan x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(y-1\cdot x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}(y-1\cdot x)=-1$.

则 $y=x+\frac{\pi}{2}$，$y=x-\frac{\pi}{2}$ 是斜渐近线.

(6) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)} = e^0\arctan\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{2x+1}\right)=\frac{\pi}{4}$ 则 $y=\frac{\pi}{4}$ 是水平渐近线

由于 $\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=\infty$ 则 $x=0$ 是垂直渐近线.

又 $\lim\limits_{x\to1^+} e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{\pi}{2}e$ $\lim\limits_{x\to1^-}y=-\frac{\pi}{2}e$ $\lim\limits_{x\to-2^+}y=-\frac{\pi}{2}e$ $\lim\limits_{x\to-2^-}y=\frac{\pi}{2}e$

则 $x=1$ 和 $x=-2$ 不是渐近线.

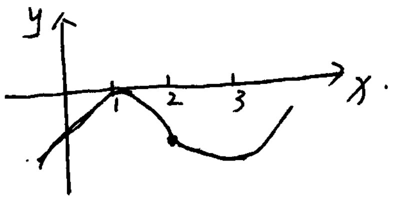
由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}}{x}=\frac{\pi}{4}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x}=0$ 则无斜渐近线

8. (1) 由图像得 $y'=0$ 的点有 $x=1$，$x=3$. 又左 $x=1$ 左邻域 $y'>0$ 右邻域 $y'<0$，

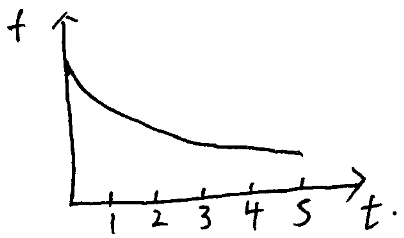
则 $x=1$ 是极大点，同理，$x=3$ 是极小点

使 $y''=0$ 的点有 $(2,f(2))$，则 $(2,f(2))$ 是唯一拐点.

(2) 图像：通过(1)中讨论可得：

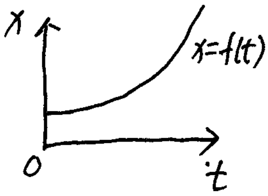


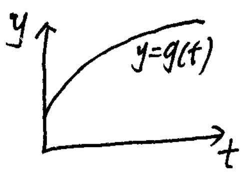
9. 解：每年逐年减少，则 $f'(x)<0$，即单调减小，又每年比上一年减少的慢，则 $f''(x)<0$



10. 设 $x=f(t)$ 表示失业人口，$y=g(t)$ 表示食品价格，有 $\frac{dx}{dt}>0$ $\frac{d^2x}{dt^2}>0$ $\frac{dy}{dt}>0$，$\frac{d^2y}{dt^2}<0$

图形分别如下：





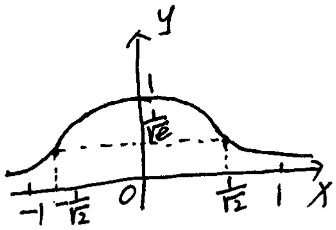
11. (1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}=0$. 则 $y=0$ 是水平渐近线. $y=e^{-x^2}$ 在R上连续，无垂直渐近线.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-x^2}}{x}=0$ 则无斜渐近线.

又 $y'=-2xe^{-x^2}$, 令 $y'>0$ 得 $x<0$ 令 $y'<0$ 得 $x>0$，令 $y'=0$ 得 $x=0$

则 y 在 $(-\infty,0)$ 上单增，在 $(0,+\infty)$ 上单减，$x=0$ 处取极大值 1.

又 $y''=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}$，令 $y''=0$ 得 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，则此时 $y=\frac{1}{\sqrt{e}}$. 则 $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{e}})$ 为拐点



(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-2}{1}=\infty$，则无水平渐近线.

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=-\infty$，则 $x=1$ 是垂直渐近线.

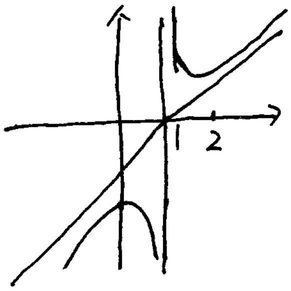
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+2}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-2}{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-1\cdot x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+2-x^2+x}{x-1}=-1$

则 $y=x-1$ 是斜渐近线.

又 $y'=\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$，令 $y'>0$，得 $x<0$, $x>2$ 令 $y'<0$ 得 $0<x<1$, $1<x<2$.

令 $y'=0$，$x=0$，$x=2$. 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 取极大值 -2 在 $x=2$ 取极小值 2.

又 $y''=\frac{2}{(x-1)^3}>0$，无拐点



(3). $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{6x^2-x^3}=\infty$ 无水平渐近线，~~其~~又 $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$ 连续，则无垂直渐近线.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{6x^2-x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{6}{x}-1}=-1$ $\lim\limits_{x\to\infty}(y-(-1)\cdot x)=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{6x^2-x^3}+x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\sqrt[3]{\frac{6}{x}-1}+1\right)\right)=2$

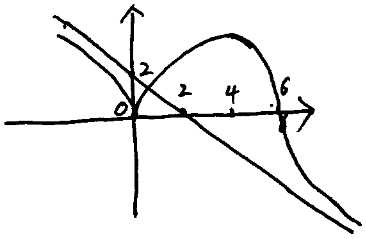
则 $y=-x+2$ 是其斜渐近线.

$y'=\frac{1}{3}(6x^2-x^3)^{-\frac{2}{3}}(12x-3x^2)$，令 $y'>0$，得 $0<x<4$. 令 $y'<0$ 得 $x<0$ 或 $x>4$,

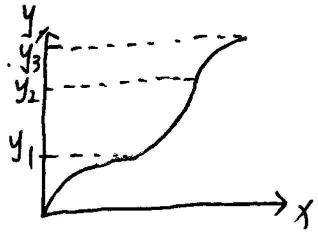
令 $y'=0$，取 $x=4$. 在 $x=0$ 左邻域 $y'<0$，右邻域 $y'>0$ 则 y 在 $x=0$ 取极小值 0.

在 $x=4$ 时取极大值 $2\sqrt[3]{4}$.

$y''=-\frac{2}{9}(6x^2-x^3)^{-\frac{5}{3}}(12x-3x^2)^2+\frac{1}{3}(6x^2-x^3)^{-\frac{2}{3}}(12-6x)$ 令 $y''=0$，得 $x=6$. 则拐点为 $(6,0)$



12.(1)



(2) 在y_2处增长最快，在y_1处增长最慢.

比值为$\frac{(3D)^2}{D^2}=\frac{9}{1}$