课程编号：A073122　　　　北京理工大学 2015-2016 学年第一学期

线性代数 A 试题 A 卷

班级 ________ 学号 ________ 姓名 _________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-5&1\\1&-1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $\frac{1}{3}A^*XA=2A+XA$，求 X

解：由 $\frac{1}{3}A^*XA=2A+XA$ 有

$$\frac{1}{3}\left|A\right|X=2A+AX,$$

进而有　$X=2A+AX\Rightarrow(I-A)X=2A$，即

$$X=2(I-A)^{-1}A$$

又因为

$$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}-2&5&-1\\-1&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&5&2\\-1&3&1\\-2&5&1\end{pmatrix},$$

所以

$$X=2\begin{pmatrix}-2&5&2\\-1&3&1\\-2&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5&1\\1&-1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&10&4\\-2&4&2\\-4&10&0\end{pmatrix}.$$

二、（10 分）已知平面上三条直线的方程

$$x-y+a=0,\ 2x+3y-1=0,\ x-ay-\frac{1}{2}=0$$

讨论参数 a 的取值与这三条直线相互位置之间的关系.

解：写出方程组的增广矩阵并化为阶梯形

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -a\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & -a & 1/2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & -a\\ 0 & 5 & 1+2a\\ 0 & 1-a & 1/2+a\end{pmatrix}=\overline{B}$$

（1）若 $a=1$，上述矩阵已化为阶梯形，此时，方程组无解，三条直线中第一条与第三条平行但不重合，与第二条相交.

（2）若 $a\neq 1$，继续进行初等行变换，有

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -a\\ 0 & 5 & 1+2a\\ 0 & 1-a & 1/2+a\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & -a\\ 0 & 5 & 1+2a\\ 0 & 0 & (2a+1)(2a+3)\end{pmatrix}$$

① 当 $a\neq 1$，$a\neq -\frac{1}{2}$ 且 $a\neq -\frac{3}{2}$ 时，方程组无解. 此时，三条直线不交于一点，但任意两条直线都相交.

② 当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，方程组有唯一解 $x=\frac{1}{2}, y=0$，此时，三条直线交于点（$\frac{1}{2},0$），且任意两条直线不重合.

③ 当 $a=-\frac{3}{2}$ 时，方程组有唯一解 $x=\frac{11}{10}, y=-\frac{2}{5}$，此时，三条直线交于（$\frac{11}{10},-\frac{2}{5}$），且其中后两条直线重合.

三、（10分）已知向量组

$$\alpha_1=(1,1,1,a)^T,\alpha_2=(1,1,a,1)^T,\alpha_3=(1,a,1,1)^T,\alpha_4=(a,1,1,1)^T$$

（1） 讨论 a 的取值与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩之间的关系;

（2） 对 a 的不同取值，确定向量空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数与基.

解：(1)

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ a & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & a-1 & 0 & 1-a\\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 0 & 1-a\\ 0 & 0 & a-1 & 1-a\\ 0 & 0 & 0 & 3-2a-a^2\end{pmatrix}$$

①当 $a=1$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 1;

②当 $a=-3$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3;

③当 $a\neq 1,-3$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 4.

（2）

①当 $a=1$ 时，向量空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数为 1，α_1 是一个基;

②当 $a=-3$ 时，向量空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个基;

③当 $a\neq 1,-3$ 时，向量空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数为 4，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是一个基.

四、（10 分）在实数域上的二阶矩阵构成的线性空间中，

（1）求基底 $I_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, I_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$到基底

$E_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix}, E_4=\begin{pmatrix}6&6\\1&3\end{pmatrix}$的过渡矩阵.

（2）求非零矩阵 A，使 A 在这两组基下的坐标相等.

解：(1)

$$E_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}=2I_1+I_2-I_3+I_4,$$

$$E_2=\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix}=3I_2+I_3,$$

$$E_3=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix}=5I_1+3I_2+2I_3+I_4,$$

$$E_4=\begin{pmatrix}6&6\\1&3\end{pmatrix}=6I_1+6I_2+I_3+3I_4.$$

所以过渡矩阵为 $P=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$.

（2）设 A 在两组基下的坐标分别为 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$，$Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T$，则由坐标变换公式，有 $Y=P^{-1}X$，两组坐标相同 $X=P^{-1}X$，即 $(P-I)X=0$，

$$P-I=\begin{pmatrix}1&0&5&6\\1&2&3&6\\-1&1&1&1\\1&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

其解为 $X=k(-1,-1,-1,1)^T$，所以所求矩阵为 $A=k\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$.

五、（10分）在多项式空间 $R[x]_4$ 中定义变换σ：

$$\sigma(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=a_3+a_1+a_2x+(a_0-a_2)x^3$$

1. 证明：σ是 $R[x]_4$ 上的线性变换;

2. 求σ在 $R[x]_4$ 的自然基$1,x,x^2,x^3$ 下的矩阵，并判断σ是否可逆.

解：(1) 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3, g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$, 则

$$\begin{aligned}\sigma(f(x)+g(x))&=(a_3+b_3)+(a_1+b_1)+(a_2+b_2)x+(a_0-a_2+b_0-b_2)x^3\\&=(a_3+a_1+a_2x+(a_0-a_2)x^3)+(b_3+b_1+b_2x+(b_0-b_2)x^3)\\&=\sigma(f(x))+\sigma(g(x)),\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\sigma(kf(x))&=ka_3+ka_1+ka_2x+(ka_0-ka_2)x^3\\&=k(a_3+a_1+a_2x+(a_0-a_2)x^3)\\&=k\sigma(f(x)),\end{aligned}$$

则σ是 $R[x]_4$ 上的线性变换;

(2) $\sigma(1)=x^3$， $\sigma(x)=1$， $\sigma(x^2)=x-x^3$， $\sigma(x^3)=1$,

所以σ在 $R[x]_4$ 的自然基$1,x,x^2,x^3$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&-1&0\end{pmatrix}.$$

由于$|A|=0$，故σ 不可逆.

六、（10分）设 A是 5阶方阵，且已知存在 5阶可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&1&&&\\&-2&&&\\&&1&&\\&&&0&1\\&&&&0\end{pmatrix}.$$

(1) 试写出 A 的初等因子;
(2) 判断 P 的哪几列是 A 的特征向量.

解：A 的初等因子为 $(\lambda+2)^2,\lambda-1,\lambda^2$

(2) P 的第一列是对应于 -2 的特征向量，第三列是对应于 1 的特征向量，第四列是对应于 0 的特征向量.

七、(10 分) 已知 A 是 $m\times n$ 矩阵，$n>m$，$r(A)=m$；B 是 $n\times(n-m)$ 矩阵，$r(B)=n-m$，且 $AB=0$. 证明：B 的列向量组为线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系.

证明：将 B 按列分块：$B=(B_1,B_2,\dots,B_{n-m}),B_j\in\mathrm{R}^n$，由 $r(B)=n-m$ 得：$r(B_1,B_2,\dots,B_{n-m})=n-m$，则 $B_1,B_2,\dots,B_{n-m}$ 线性无关.

由 $AB=0$ 得：$A(B_1,B_2,\dots,B_{n-m})=0$，即 $AB_j=0$，$B_1,B_2,\dots,B_{n-m}$ 是方程组 $AX=0$ 的解.

A 是 $m\times n$ 矩阵，$n>m$，$r(A)=m$，则 $n-r(A)=n-m$

B 的列向量组为线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系.

八、(10 分) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$.

(1) 求一正交变换 $X=QY$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(2) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定.

解：(1) 因为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-5&\lambda-5&\lambda-5\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5),$$

所以 A 的全部特征值为 -1（二重），5.

对于特征值-1，$-I-A=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，求出方程组$(-I-A)X=0$的一个基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

正交化 $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$,

单位化$\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

对于特征值 5，$5I-A=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，求出方程组$(5I-A)X=0$的一个基础解系：$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得：$\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

取

$$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

则得标准形

$$f(y_1,y_2,y_3)=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2.$$

（2）由（1）易知，$f(x_1,x_2,x_3)$不是正定的.

九、（10分） 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ a & 1 & a-2\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量.

（1）求 a；

（2）求A^n.

解：由于$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & -2\\ -a & \lambda-1 & 2-a\\ 3 & 0 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，所以$\lambda=1$（二重），$\lambda=2$.

当$\lambda=1$时，特征方程组的系数矩阵为$\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ -a & 0 & 2-a\\ 3 & 0 & -3\end{pmatrix}$由于 A有三个线性无关的特征向量，所以 A可以对角化，因此，$r(\lambda I-A)=1$，故$a=1$.

（2）$\lambda=1$的特征向量为$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. $\lambda=2$的特征向量为$\xi_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

令$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,1,2)$，因此

$$A^n=P\mathrm{diag}(1,1,2^n)P^{-1}=\begin{pmatrix}3-2^{n+1} & 0 & -1+2^{n+1}\\ -1+2^n & 1 & 1-2^n\\ 3-3\cdot 2^n & 0 & -1+3\cdot 2^n\end{pmatrix}.$$

十、（10分）已知n阶矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$,

（1） 求矩阵A与B的特征值;

（2） 证明A与B是相似的.

解：由于$|\lambda I-A|=(\lambda-n)\lambda^n$，则 A的特征值为n，0（$n-1$重).

同样 $|\lambda I-B|=(\lambda-n)\lambda^n$，则 B的特征值为n，0（$n-1$重).

（2） A属于$\lambda=n$的特征向量为$(1,1,\cdots,1)^T$；$r(A)=1$，故$Ax=0$基础解系有

$n-1$ 个线性无关的解向量，即 A 属于 $\lambda=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，

故 A 相似于对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

B 的特征值为 n，0 ($n-1$ 重)，同理 B 属于 $\lambda=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，故 B 相似于对角阵 Λ.

由相似关系的传递性，A 相似于 B.