习题3-5

1、(1) $y'=\frac{-2x}{1-x^2}$，$ds=\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx=\frac{1+x^2}{1-x^2}dx$

(2) $y'=sh\frac{x}{a}$ $\quad ds=\sqrt{1+(sh\frac{x}{a})^2}\,dx=ch\frac{x}{a}\,dx$

(3) $y'=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3a\sin^2t\cos t}{3a\cos^2t(-\sin t)}=\frac{\sin t}{-\cos t}=-\tan t$

$ds=\sqrt{1+(\tan t)^2}\,dx=\sqrt{1+\tan^2t}\,|3a\cos t(-\sin t)|=3a|\sin t\cos t|\,dt$

(4) 令 $\begin{cases}x=a(1+\cos\theta)\cos\theta\\ y=a(1+\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$

$dy=(-a\sin^2\theta+a(1+\cos\theta)\cos\theta)\,d\theta$

$dx=(-a\sin\theta\cos\theta+a(1+\cos\theta)(-\sin\theta))\,d\theta$

则 $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=a\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta$.

2. (1) $y'=sh\frac{x}{a}$ $\quad y''=\frac{1}{a}ch\frac{x}{a}$，则 $x=a$ 时，$y'=sh1$ $\quad y''=\frac{1}{a}ch1$

则 $K=\frac{|\frac{1}{a}ch1|}{(1+(sh1)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{|a|ch^21}$

(2) $y'=2x-4$ $\quad y''=2$ $\quad$ 则 $x=0$ 时，$y'=-4$ $\quad y''=2$

则 $K=\frac{|2|}{(1+(-4)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{17\sqrt{17}}$

(3) 对 $4x^2+y^2=4$ 两边求导得：$8x+2yy'=0\Rightarrow y'=\frac{-8x}{2y}=\frac{-4x}{y}$，$y''=\frac{-4y+4xy'}{y^2}$

则在 $(0,2)$ 处，$y'=0$ $\quad y''=-2$

则 $K=\frac{|-2|}{(1+0^2)^{\frac{3}{2}}}=2$.

(4). 对 $x^2-xy+y^2=1$ 两边求导得：$2x-y-xy'+2yy'=0\Rightarrow y'=\frac{2x-y}{x-2y}$，$y''=\frac{-3y+3xy'}{(x-2y)^2}$

则在 $(1,1)$ 处，$y'=-1$. $\quad y''=-6$

则 $K=\frac{|-6|}{(1+(-1)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

(5) 对 $y^2=x^3$ 两边求导得：$y'=\frac{3x^2}{2y}$，$y''=\frac{12xy-6x^2y'}{4y^2}$

则在 $(4,8)$ 处，$y'=3$ $\quad y''=\frac{3}{8}$

则 $K=\frac{|\frac{3}{8}|}{(1+3^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3\sqrt{10}}{800}$

3. (1) $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$ $y''=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$，在$(\frac{\pi}{4},1)$处，$y'=2$ $y''=4$

则 $R=\frac{(1+2^2)^{\frac{3}{2}}}{|4|}=\frac{5\sqrt{5}}{4}$

曲率中心坐标为：

$\xi=\frac{\pi}{4}-\frac{2\cdot(1+2^2)}{4}=\frac{\pi-10}{4}$，$\eta=1+\frac{1+2^2}{4}=\frac{9}{4}$

则曲率圆为：$(x-\frac{\pi-10}{4})^2+(y-\frac{9}{4})^2=\frac{125}{16}$.

(2) $y'=-2xe^{-x^2}$ $y''=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}$ 在$(0,1)$处，$y'=0$ $y''=-2$

则 $R=\frac{(1+0^2)^{\frac{3}{2}}}{|-2|}=\frac{1}{2}$

$\xi=0-\frac{0(1+0^2)}{-2}=0$ $\eta=1+\frac{1+0^2}{-2}=\frac{1}{2}$

则曲率圆为 $x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

(3) $y'=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3-2t}{6t}$ $y''=\frac{\frac{d}{dt}\frac{3-2t}{6t}}{dx/dt}=\frac{\frac{-18}{36t^2}}{6t}=\frac{-1}{12t^3}$

在 $t=1$处．$y'=\frac{1}{6}$ $y''=-\frac{1}{12}$，$x=3$ $y=2$.

则 $R=\frac{(1+\frac{1}{6^2})^{\frac{3}{2}}}{|-\frac{1}{12}|}=\frac{1}{18}37^{\frac{3}{2}}$

$\xi=3-\frac{\frac{1}{6}(1+\frac{1}{36})}{-\frac{1}{12}}=\frac{91}{18}$ $\eta=2+\frac{1+\frac{1}{36}}{-\frac{1}{12}}=-\frac{31}{3}$

则曲率圆为 $(x-\frac{91}{18})^2+(y+\frac{31}{3})^2=\frac{37^3}{18^2}$

4. $y'=\frac{1}{x}$ $y''=-\frac{1}{x^2}$ $(x>0)$，曲率半径 $R=\frac{1}{K}$，则R越小，K越大.

$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ $(x>0)$

则 $\frac{dK}{dx}=\frac{1-2x^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$，令$\frac{dK}{dx}=0$，得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，当$x>\frac{\sqrt{2}}{2}$时$\frac{dK}{dx}<0$，$x<\frac{\sqrt{2}}{2}$时 $\frac{dK}{dx}>0$

则K在 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$处取极大值为 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

则时的~~横~~点为$(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\ln 2)$

曲率半径为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

5. 解：对曲线 $y=x^3-3x^2+2$，有 $y'=3x^2-6x$　$y''=6x-6$.

则 $K=\dfrac{|6x-6|}{(1+(3x^2-6x)^2)^{\frac{3}{2}}}$，令 $K=0$. 得 $x=1$. 即曲线在点在 $(1,0)$ 处的曲率为零.

即切点为 $(1,0)$.

在 $(1,0)$ 处，$y'=-3$.

则对 $y=kx+b$ 有 $k=-3$. 又过 $(1,0)$，有

$0=-3+b \Rightarrow b=3$

则 $k=-3$，$b=3$

6 $y=e^x$ 有：$y'=e^x$，$y''=e^x$ 则在 $x=0$ 处，$y'=1$　$y''=1$

则 $R=\dfrac{(1+1^2)^{\frac{3}{2}}}{|1|}=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$.

$\xi=0-\dfrac{1(1+1^2)}{1}=-2$　$\eta=1+\dfrac{1+1^2}{1}=3$

对 $y=ax^2+bx+c$　$y'=2ax+b$　$y''=2a$

则 $x=0$ 处，$y'=b=1$　$y''=2a$.

$R=\dfrac{(1+1^2)^{\frac{3}{2}}}{|2a|}=2\sqrt{2} \Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}$

$\xi=0-\dfrac{1(1+1^2)}{2a}=-2$ 且 $\eta=c+\dfrac{1+1^2}{2a}=3$

$\Rightarrow c=1, a=\frac{1}{2}$

综上 $a=\pm\frac{1}{2}$　$b=1$　$c=1$.（有共同曲率圆不是指曲率圆相同）

7. 对 $x+y=ax^2+by^2+cx^3$ 两边对 x 求导.

$1+y'=2ax+2byy'+3cx^2 \Rightarrow y'=\dfrac{2ax+3cx^2-1}{1-2by}$，$y''=\dfrac{2a-4aby+6cx-12bcxy+4abxy'+6bc(x^2y'-2by')}{(1-2by)^2}$

则在 $(0,0)$ 处，$y'=-1$.　$y''=\dfrac{2a+2b}{1}=2a+2b$

则曲率半径为 $R=\dfrac{(1+(-1)^2)^{\frac{3}{2}}}{|2a+2b|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}|a+b|}$

曲率中心坐标为 $\xi=0-\dfrac{-1(1+(-1)^2)}{2a+2b}=\dfrac{1}{a+b}$，$\eta=0+\dfrac{1+(-1)^2}{2a+2b}=\dfrac{1}{a+b}$

则曲率圆为 $\left(x-\frac{1}{a+b}\right)^2+\left(y-\frac{1}{a+b}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}|a+b|}\right)^2$

$\Leftrightarrow (a+b)(x^2+y^2)=2(x+y)$

8. 先求 $y=\frac{1}{10000}x^3$ 在 $x=100$ 处的曲率半径：

$$y'=\frac{3}{10000}x^2 \qquad y''=\frac{3}{5000}x.$$

在 $x=100$ 处. $y'=3 \qquad y''=\frac{3}{50}$

则 $R=\dfrac{(1+3^2)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{3}{50}\right|}=\dfrac{500\sqrt{10}}{3}$

则向心力为 $F=\dfrac{5\times10^3\times\left(\frac{40}{3.6}\right)^2}{\frac{500\sqrt{10}}{3}}\approx 1171.2N$

9. 先求 $y=-0.01x^2+0.25$ 在 $x=0$ 时曲率半径：

$$y'=-0.02x \qquad y''=-0.02$$

在 $x=0$ 处，$y'=0 \qquad y''=-0.02$

则 $R=\dfrac{(1+0^2)^{\frac{3}{2}}}{|-0.02|}=50\ m.$

则压力 $F=mg-\dfrac{mv^2}{R}=10\times10^3\times9.8-\dfrac{10\times10^3\left(\frac{21.6}{3.6}\right)^2}{50}=90800N$