

课程编号：A073122

北京理工大学 2013-2014 学年第一学期

线性代数 A 试题 B 卷

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、(10 分) 已知 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵, 且 $A^{-1}XA^* = A^{-1} - A^*XB$, 其中

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & 2 & 2 & \\ 8 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ -2 & -1 & 0 & \\ -4 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

求 X 。

二、(10 分) 问 a, b 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有唯一解, 无解, 有无穷多组解? 并求出有无穷多组解时的通解 (用导出组的基础解系表示通解)。

三、(10 分) 已知线性空间 $F[x]_4$ 的自然基为 $1, x, x^2, x^3$ 。

(1) 证明: $1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2!}, 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 为 $F[x]_4$ 的一个基;

(2) 求自然基 $1, x, x^2, x^3$ 到基 $1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2!}, 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 的过渡矩阵;

(3) 求 $h(x) = 1 + 3x^2 + 6x^3$ 在后一个基下的坐标。

四、(10 分) 已知向量组

$$\alpha_1 = (1, 0, 2, 1)^T, \alpha_2 = (1, 2, 0, 1)^T, \alpha_3 = (2, 1, 3, 0)^T, \alpha_4 = (2, 5, -1, 4)^T, \alpha_5 = (1, -1, 3, -1)^T$$

- (1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的秩和一个极大无关组;
- (2) 将其余向量用极大无关组表示出来。

五、(10 分) 设 6 阶方阵 A 的初等因子为 $(\lambda + 1)^3, (\lambda - 1)^2, \lambda$ 。

- (1) 试写出 A 的 Jordan 标准形;
- (2) 求 A 的特征值。

六、(10 分) 在线性空间 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 中定义变换 σ : $\sigma(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) 证明: σ 是线性变换;

(2) 写出 σ 在基 $I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵。

七、(10 分) 求下列实系数齐次线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

的解空间的一组标准正交基。

八、(10 分) 已知二次型的矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ 。

(1) 判断 \mathbf{A} 是否可逆； (2) 求一正交变换 $\mathbf{X} = \mathbf{QY}$ ，化二次型为标准形。

九、(10 分) 如果 n 阶方阵 \mathbf{A} 满足

$$(\mathbf{A} - a\mathbf{I})(\mathbf{A} - b\mathbf{I}) = \mathbf{0}$$

其中 $a \neq b$ ，证明： \mathbf{A} 可以对角化。

十、（10 分）设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + 2(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$ ，记

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $3\alpha\alpha^T + 2\beta\beta^T$ ；

(2) α, β 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $3y_1^2 + 2y_2^2$ 。