习题4-1

1. $\int_0^{20} kx\,dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\xi_i\cdot\Delta x_i$

3. $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\xi_i^2}\Delta x_i = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

4. (1) 即求 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 在$[0,a]$与x轴的面积，

则$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2$

(2) 即求 $y=x$ 在$[a,b]$与x轴所夹的梯形面积，

则$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(a+b)(b-a) = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$

(3) 即求 $y=\sin x$ 在$(0,\pi)$与x轴所夹面积与$(\pi,2\pi)$与x轴所夹面积之差.

则$\int_0^{2\pi}\sin x\,dx = 0$

(4) 即求 $y=5x^3$ 在$(-a,a)$与x轴所夹面积的代数和

则$\int_{-a}^{a} 5x^3\,dx = 0$

(5) 即求 $y=|x|$在$[-2,2]$与x轴所夹面积的代数和，

则$\int_{-2}^{2}|x|\,dx = 2\times\frac{1}{2}\times 2\times 2 = 4$

5. (1) $\int_0^1 x\,dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(1-0)i}{n}\cdot\frac{1-0}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}$

(2) $\int_0^1 e^x\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+e^{\frac{3}{n}}+\cdots+e^{\frac{k-1}{n}}+e^{\frac{k}{n}}+\cdots e^{\frac{n}{n}}}{n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}(e^{\frac{n}{n}}-1)}{e^{\frac{1}{n}}-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)} = (e-1)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}$

$= (e-1)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n[(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}+\cdots)-1]} = (e-1)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}+\cdots}$

$= (e-1)\times 1 = e-1$

6. (1) 在$(1,e)$上$0<\ln x<1$，则 $\ln x > \ln^2 x$

则$\int_1^e \ln x\,dx > \int_1^e \ln^2 x\,dx$

(2) $\int_1^{\frac{1}{e}} \ln x\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 -\ln x\,dx$， $\int_1^{\frac{1}{e}} \ln^2 x\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 -\ln^2 x\,dx$.

在 $(\frac{1}{e},1)$ 上 $-\ln x > -\ln^2 x$

则 $\int_1^{\frac{1}{e}} \ln x\,dx > \int_1^{\frac{1}{e}} \ln^2 x\,dx$

(3) 令 $f(x) = x - \sin x$，则 $f'(x) = 1 - \cos x > 0$ 在 $(1, \frac{\pi}{2})$ 上成立

则 $f(x)$ 在 $(1, \frac{\pi}{2})$ 上递增，又 $f(1) = 1 - \sin 1 > 0$. 则 $f(x) > 0$

即 $x > \sin x$

则 $\int_1^{\frac{\pi}{2}} x\,dx > \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

(4) 令 $f(x) = e^x - 1 - x$. 则 $f'(x) = e^x - 1$ 在 $(0,1)$ 上大于0

则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，又 $f(0) = 0$. 则 $f(x) > 0$ 在 $(0,1)$ 上成立

即 $e^x > 1 + x$

则 $\int_0^1 e^x\,dx > \int_0^1 (1+x)\,dx$

(5) 令 $f(x) = \ln(1+x) - x$. 则 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 < 0$ 在 $(2,4)$ 上成立，则 $f(x)$ 在 $(2,4)$ 单减.

又 $f(2) = \ln 3 - 3 < 0$. 则 $f(x) < f(2) < 0$.

即 $\ln(1+x) < x$

则 $\int_2^4 \ln(1+x)\,dx < \int_2^4 x\,dx$

(6) 令 $f(x) = 3 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x}$ 则 $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(1,2)$ 上小于0.

则 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单减，又 $f(1) = 0$. 则 $f(x) < f(1) = 0$

即 $3 - \frac{1}{x} < 2\sqrt{x}$

则 $\int_1^2 (3 - \frac{1}{x})\,dx < \int_1^2 2\sqrt{x}\,dx$

(7) 令 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{\arctan x}{1+x}$，则 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{\frac{1}{1+x^2}(1+x) - \arctan x}{(1+x)^2} = \frac{x^2 + x^3 + (1+x^2)\arctan x}{(1+x)^2}$

在 $(0,1)$ 上，$f'(x)$ 大于0. 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，又 $f(0) = 0$. 则 $f(x) > 0$

即 $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$

则 $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx > \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}\,dx$

(8). 由定积分的定义可知，单个点对积分无影响.

则 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1(x+1)dx+\int_1^2(x+1)dx=\int_0^2(x+1)dx$

7. (1) 对 $y=e^{x^2}$，则 $y'=2xe^{x^2}$ 在 $(1,2)$ 上大于零，则 y 在 $(1,2)$ 上递增.

则 y 的最小值为 $e^{1^2}=e$ 最大值为 $e^{2^2}=e^4$，又 $2-1=1$

则 $e\le\int_1^2 e^{x^2}dx\le e^4$

(2) 对 $y=1+\sin^2x$，则 $y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$. 令 $y'>0$. 得 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$，$\pi<x<\frac{5}{4}\pi$

则 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$，$[\pi,\frac{5}{4}\pi]$ 递增，在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 单减.

又 $y(\frac{\pi}{4})=\frac{3}{2}$ $y(\frac{\pi}{2})=2$ $y(\pi)=1$ $y(\frac{5}{4}\pi)=\frac{3}{2}$

则 y 最大为 2 最小为 1. 又 $\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\pi$.

则 $\pi\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2x)dx\le 2\pi$.

(3) $\int_2^0 e^{x^2-x}dx=\int_0^2 -e^{x^2-x}dx$

对 $y=-e^{x^2-x}$，则 $y'=(1-2x)e^{x^2-x}$，令 $y'>0$ 得 $0<x<\frac{1}{2}$. 令 $y'<0$ 得 $\frac{1}{2}<x<2$.

则 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上递增，$[\frac{1}{2},2]$ 递减.

又 $f(0)=-1$ $f(\frac{1}{2})=-e^{-\frac{1}{4}}$ $f(2)=-e^2$

则 $f(x)$ 最小值为 $-e^2$. 最大值为 $-e^{-\frac{1}{4}}$ 又 $2-0=2$.

则 $-2e^2\le\int_2^0 e^{x^2-x}dx\le -2e^2$

(4) 对 $y=xe^x$，$y'=e^x+xe^x$，令 $y'<0$. 得 $-2<x<-1$. 令 $y'>0$ 得 $-1<x<0$

则 $f(x)$ 在 $(-2,-1)$ 上单减，在 $(-1,0)$ 上单加，

又 $f(-2)=-2e^{-2}$ $f(-1)=-e^{-1}$ $f(0)=0$

则 $f(x)$ 最小值为 $-e^{-1}$. 最大值为 0 又 $0-(-2)=2$

则 $-2e^{-1}\le\int_{-2}^0 xe^x dx\le 0$

(5) 对 $y=x\arctan x$. 有 $y'=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}$ 在 $(\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3})$ 上大于0

则 y 在 $(\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3})$ 上单增,

$y(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ $y(\sqrt{3})=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 又 $\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

则 $\frac{\pi}{9}\leq\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\,dx\leq\frac{2\pi}{3}$

(6). 对 $y=\frac{\sin x}{x}$, 有 $y'=\frac{\cos x\cdot x-\sin x}{x^2}$, 对 $g(x)=x\cos x-\sin x$. 有 $g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$

则 $g'(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 上小于0. $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 上递减, 又 $g(x)<g(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$

则 $y'<0$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 上成立. 即 y 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 上递减.

$y(\frac{\pi}{4})=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ $y(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$, 又 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

则 $\frac{1}{2}\leq\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. 即求: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}E\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}E_0\sin t\,dt$

上式 $=\frac{E_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin t\,dt=0$

即平均值为0.

9. 令 $h(x)=f(x)-g(x)$, 则 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $h(x)\geq0$, 且 $\int_a^b h(x)dx=0$

则我们要证的即在 $[a,b]$ 上 $h(x)\equiv0$.

用反证法, 若 $\exists x_0\in[a,b]$, 使 $h(x_0)>0$, 不妨设 $x_0\in(a,b)$, 则存在 x_0 的

某邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$ 使在这个邻域内 $h(x)>\frac{h(x_0)}{2}$, 于是有

$\int_a^b h(x)\,dx=\int_a^{x_0-\delta}h(x)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}h(x)dx+\int_{x_0+\delta}^b h(x)dx\geq0+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{h(x_0)}{2}dx+0$

与已知条件矛盾, 故在 $[a,b]$ 上 $h(x)\equiv0$, 即:

$f(x)\equiv g(x)$. 证毕

10. 因为 $f(x)\geq0$ 且不恒为零, 则取 $f(\xi_i)=0$, $i=k_1,k_2\cdots k_m$, $f(\xi_i)>0$, $i=k_{m+1}\cdots k_n$.

则由积分的定义: $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=k_1}^{k_n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=k_1}^{k_m}0\Delta x_i+\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=k_{m+1}}^{k_n}f(\xi_i)\Delta x_i>0$

证毕

11. 证明：因为$f(x)$在$[a,b]$内连续，则~~存在~~最大值M，最小值m。又由$g(x)$在$[a,b]$上不变号，不妨设$g(x)\geq 0$，则$mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x)$。且$\int_a^b g(x)dx\geq 0$，由$f(x)g(x)$在$[a,b]$上可积，因而$m\int_a^b g(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq M\int_a^b g(x)dx$

依次记上式中的三个值为m_1，I，M_1。考虑函数$F(x)=f(x)\int_a^b g(t)dt$。$F(x)$在$[a,b]$内连续，M_1和m_1分别是$F(x)$在$[a,b]$内的最大值和最小值，又$m_1\leq I\leq M_1$，故由连续函数的介值定理，$\exists\xi\in[a,b]$，使$F(\xi)=I$，即$\int_a^b g(x)f(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$成立

——此证明来自北理工数院史大维教授