¡3.3 带度量的向量空间

一、向量的内积

二、向量的度量

三、标准正交基(schmidt正交化方法)

四、正交矩阵

五、最小二乘法(简介)

在解析几何中，对平面上的有向线段 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 可做点乘运算

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$$

其中，$<\vec{a},\vec{b}>$ 表示有向线段 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，$|\vec{a}|$ 和 $|\vec{b}|$ 分别有向线段 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的长度。利用点乘可得

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} \qquad \cos<\vec{a},\vec{b}> = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

取定平面直角坐标系 $\{O;\vec{i},\vec{j}\}$ 后，设

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}, \quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$$

则易得

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

在几何中，$|\vec{a}|$与$<\vec{a},\vec{b}>$均有直观的几何意义。但对一般的n元实向量

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \ \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$$

则无法直接讨论它们的长度与夹角。我们仿照点乘的坐标运算法，把

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

当作向量 α 与 β 的¡点乘¡，就可反向引入向量的长度与夹角的概念。

一、向量的内积

定义3.3.1 设α，$\beta \in R^n$(n维实向量空间)，且

$$\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n), \quad \beta = (b_1, b_2, ... b_n)$$

则α与β的内积 (α,β)规定为：

$$(\alpha,\beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \qquad (3.3.4)$$

若α,β均为列向量，即

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T, \ \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T,$$

则内积用矩阵记号表示为

$$(\alpha,\beta) = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha;$$

若α,β均为行向量，即

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \ \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n),$$

则内积用矩阵记号表示为

$$(\alpha,\beta) = \alpha\beta^T = \beta\alpha^T.$$

注 内积是两个向量间的一种运算，结果是一个数，它是有向线段点乘运算的推广。

向量的内积具有以下性质：

性质3.3.1 设$\alpha,\beta,\gamma \in R^n, k \in R$,则有

(1) $(\alpha,\beta) = (\beta,\alpha)$; (对称性)

(2) $(\alpha+\beta,\gamma) = (\alpha,\gamma) + (\beta,\gamma)$; (线性性质之一)

(3) $(k\alpha,\beta) = k(\alpha,\beta)$; (线性性质之二)

(4) $(\alpha,\alpha) \geq 0$,当且仅当$\alpha = \theta$时等号成立.

(非负性)

定义3.3.2 定义了内积运算的实向量空间称为**Euclid空间**，简称为**欧氏空间**。

在实向量空间中有多种方式定义内积运算，本章节只讨论按式（**3.3.4**）定义的内积，我们称之为标准内积 。

二、向量的度量

定义3.3.3 欧式空间中的实向量α的长度（模）$|\alpha|$规定为：

$$|\alpha| = \sqrt{(\alpha,\alpha)}$$

当$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$时，我们有 $|\alpha| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$.

向量的长度具有下述性质：

1. 非负性 当$\alpha \neq \theta$时，$|\alpha| > 0$；当$\alpha = \theta$时，$|\alpha| = 0$;
2. 齐次性 $|k\alpha| = |k||\alpha|$ $(k \in R)$.

若$|\alpha| = 1$，则称 α为单位向量。

若$\alpha \neq \theta$，则$|\alpha| > 0$. 此时$\frac{1}{|\alpha|}\alpha$一定是单位向量，称之为$\boxed{\text{将向量}\alpha\text{单位化.}}$

例 $\alpha = (1,1,1)$, 则$|\alpha| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$\frac{1}{|\alpha|}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$即为单位向量.

定理3.3.1 设V是欧氏空间，则对任意$\alpha, \beta \in V$ 均有

$$|(\alpha,\beta)| \le |\alpha||\beta| \qquad (3.3.8)$$

上式称为**Cauchy-Schwarz不等式**。

证明：当$\beta = \theta$时，$(\alpha,\beta) = 0, |\beta| = 0$, (3.3.8)成立.

假设$\beta \neq \theta$，任取实数x，则$\alpha + x\beta \in V$， 由性质3.3.1,

$$(\alpha + x\beta, \alpha + x\beta) \ge 0$$

于是有 $(\beta,\beta)x^2 + 2(\alpha,\beta)x + (\alpha,\alpha) \ge 0$

因上式对任何实数x均成立，且$(\beta,\beta) > 0$，故有

$$[2(\alpha,\beta)]^2 - 4(\beta,\beta)(\alpha,\alpha) \le 0$$

整理得

$$|(\alpha,\beta)|^2 = (\alpha,\beta)^2 \le (\alpha,\alpha)(\beta,\beta) = |\alpha|^2|\beta|^2$$

两边同时开平方得 $|(\alpha,\beta)| \le |\alpha||\beta|$

注：上式等号成立$\Leftrightarrow \alpha$，β线性相关.

定义3.3.4 设 V 是欧氏空间，$\alpha, \beta \in V$，且α, β均不是零向量，则 α 与 β 的夹角 $<\alpha, \beta>$ 规定为

$$\cos<\alpha,\beta> = \frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|} \quad \Rightarrow (\alpha,\beta) = |\alpha||\beta|\cos<\alpha,\beta>$$

这里 $0 \le <\alpha,\beta> \le \pi$ 。

例 求向量$\alpha = (1,2,2,3)$与$\beta = (3,1,5,1)$ 的夹角.

解 $\cos<\alpha,\beta> = \frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|} = \frac{18}{3\sqrt{2}\cdot 6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore <\alpha,\beta> = \frac{\pi}{4}$.

由夹角定义易得：

$$<\alpha,\beta> = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos<\alpha,\beta> = 0 \Leftrightarrow (\alpha,\beta) = 0.$$

定义3.3.5 当$(\alpha,\beta) = 0$时， 则称α与β正交(垂直).记为 $\alpha \perp \beta$ 。

由定义知：若$\alpha = \theta$， 则α与任何向量都正交.

例3.3.1 设 $A \in R^{m \times n}$，则对任意 $\alpha \in R(A^T)$ 与任意 $\beta \in N(A)$， 均有 $\alpha \perp \beta$ 。

性质3.3.2 设 V 是欧氏空间，α 与 β 是 V 中任意两个向量，则有

（1）三角不等式：$|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|$

（2）勾股定理：若 $\alpha \perp \beta$ ，则

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

证明：(1)

$$|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)$$
$$\le|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2$$
$$=(|\alpha|+|\beta|)^2$$

故有 $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$

(2) 由$\alpha\perp\beta$得，$(\alpha,\beta)=0.$

$$|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)$$
$$=\alpha|^2+|\beta|^2$$

三、 标准正交基

定义3.3.6 设V是欧氏空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是V中m个非零向量。若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 两两正交，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是正交向量组。由单位向量构成的正交向量组称为标准正交向量组。

正交单位向量组

例 在欧式空间 R^n中，自然基是标准正交向量组。

定理3.3.2 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是欧氏空间 V 的一个正交向量组，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关。

证明 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是正交向量组，令

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=\theta$$

两边同时与α_1 做内积，得

$$(k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m,\alpha_1)=(\theta,\alpha_1)$$

$$\Rightarrow\ k_1(\alpha_1,\alpha_1)+k_2(\alpha_2,\alpha_1)+\cdots+k_m(\alpha_m,\alpha_1)=0$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 两两正交，故

$$(\alpha_2,\alpha_1)=0,\ \cdots,\ (\alpha_m,\alpha_1)=0$$

于是

$$k_1(\alpha_1,\alpha_1)=0$$

又 $\alpha_1\ne\theta$，故$(\alpha_1,\alpha_1)>0$，由此得 $k_1=0$ 。

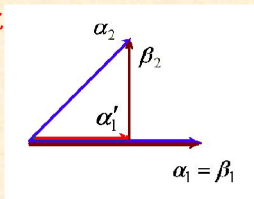
同理可证 $k_2=\cdots=k_m=0$。所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关。

线性无关向量组的标准正交化

线性无关的向量组不一定是正交向量组。

问题：能否在线性无关向量组的基础上，构造出一个正交向量组呢？

把两个线性无关的向量化为两个正交的向量：



设$\alpha_1,\ \alpha_2$ 线性无关，令

$$\beta_1=\alpha_1,\ \alpha_1'+\beta_2=\alpha_2$$

则

$$\alpha_1'\,//\,\alpha_1\ \Rightarrow\ \alpha_1'=k_1\alpha_1$$

$$\Rightarrow\ \beta_2=\alpha_2-k_1\alpha_1=\alpha_2-k_1\beta_1$$

因要求 $\beta_2\perp\beta_1$，故

$$0=(\beta_2,\beta_1)=(\alpha_2-k_1\beta_1,\beta_1)=(\alpha_2,\beta_1)-k_1(\beta_1,\beta_1)$$

又 $\beta_1=\alpha_1\neq\theta$，故 $(\beta_1,\beta_1)>0$ 。从上式解得

$$k_1=\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}$$

$$\Rightarrow\ \beta_2=\alpha_2-k_1\alpha_1=\alpha_2-k_1\beta_1=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

已知 α_1,α_2线性无关，故 $\beta_2\neq\theta$。于是 β_1,β_2是正交向量组。

令 $\eta_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1$，$\eta_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2$，则 η_1,η_2 是标准正交向量组。此外，

$$\{\alpha_1\}\cong\{\eta_1\},\ \{\alpha_1,\alpha_2\}\cong\{\eta_1,\eta_2\}$$

定理3.3.3 设 V是欧氏空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 V 中m个线性无关的向量，则 V 中存在m个标准正交的向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$，并且

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_i\}\cong\{\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_i\}\quad i=1,2,\cdots,m$$

证明：对i做数学归纳法：

(1) 令$\beta_1=\alpha_1$，$\eta_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1$，

则$\{\alpha_1\}\cong\{\beta_1\}$，进而$\{\alpha_1\}\cong\{\eta_1\}$

说明结论对$i=1$成立.

(2) 设存在正交向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{i-1}(i\geq 2)$,满足

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\cong\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}\quad(s=1,2,\cdots,i-1)$$

令 $\eta_s=\frac{1}{|\beta_s|}\beta_s$，其中$s=1,2,\cdots,i-1$,

则η_1，$\eta_2,\cdots$，η_{i-1}是标准正交向量组，并且也满足

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s\}\cong\{\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_s\}\quad 其中s=1,2,\cdots,i-1$$

(3) 对$2\leq i\leq m$,在（2）的假设下，令

$$\beta_i=\alpha_i-\frac{(\alpha_i,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_i,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_i,\beta_{i-1})}{(\beta_{i-1},\beta_{i-1})}\beta_{i-1}\quad(3.3.10)$$

因$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{i-1}$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$线性表出，

故β_i可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_i$线性表出且$\alpha_i$的系数为1,

已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i$线性无关，所以$\beta_i\neq\theta$.

另外，易证β_i与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{i-1}$都正交，故$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_i$是正交向量组. 由式(3.3.10)知:

α_i可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_i$线性表出，所以

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\cong\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}\quad(s=1,2,\cdots,i)$$

令 $\eta_i=\frac{1}{|\beta_i|}\beta_i$，　(3.3.11)

则$\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_i$是标准正交组，并且也满足

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s\}\cong\{\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_s\}\quad s=1,2,\cdots,i$$

由归纳原理知，定理结论正确.

施密特(Schmidt)正交化方法：

已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

1. 正交化：

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

2. 单位化：

$$\eta_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1,\quad \eta_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2,\quad \eta_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3$$

则η_1,η_2,η_3就是标准正交向量组

对n个线性无关向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 正交化时，用

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$\beta_i=\alpha_i-\frac{(\alpha_i,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_i,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_i,\beta_{i-1})}{(\beta_{i-1},\beta_{i-1})}\beta_{i-1}$$

$$\beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}$$

例 已知 R^3 中的 $\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,1,0)$，$\alpha_3=(1,0,0)$，求三个标准正交的向量。

解 1. 正交化

$$\beta_1=\alpha_1=(1,1,1)$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,1,0)-\frac{2}{3}(1,1,1)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$=(1,0,0)-\frac{1}{3}(1,1,1)-\frac{1/3}{6/9}(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$$

2. 单位化

$$\eta_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\eta_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})$$

$$\eta_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$$

则 η_1,η_2,η_3 即为所求的一个标准正交向量组。

定义3.3.7 设 V 是欧氏空间，则 V 中由正交向量组构成的基称为正交基，V 中由标准正交向量组构成的基称为标准正交基。

例3.3.3 欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的自然基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ 即是标准正交基。

例如 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

为 R^4 的一个标准正交基。

例 $e_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix}$，$e_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix}$，$e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

由于 $\begin{cases}(e_i,e_j)=0,\ i\neq j\text{且}i,j=1,2,3,4.\\(e_i,e_j)=1,\ i=j\text{且}i,j=1,2,3,4\end{cases}$

所以 e_1,e_2,e_3,e_4 为 R^4 的一个标准正交基。

规定：只含一个向量的标准正交向量组就是一个单位向量.

存在基的欧式空间一定存在标准正交基.

定理3.3.4 设 V 是欧氏空间，$V\subseteq R^n$ 且 $V\neq\{\theta\}$，则 V 一定存在标准正交基。

例 已知欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中的两个标准正交向量

$$\eta_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}),\eta_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$$

把 η_1,η_2 扩充为 $\mathbf{R}^3$ 的标准正交基。

解 1. 把 η_1,η_2 扩充为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基：

取向量 $\alpha_3=(0,0,1)$，易证 η_1,η_2,α_3 线性无关，因此它们是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基。

2. 把 η_1,η_2,α_3 化为 $\mathbf{R}^3$ 的一个正交基：

令

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1-\frac{(\alpha_3,\eta_2)}{(\eta_2,\eta_2)}\eta_2$$

$$=(0,0,1)-\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$=(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$

则 η_1,η_2,β_3 两两正交，且都不是零向量，因此它们是 $\mathbf{R}^3$ 的一个正交基。

3. 把 η_1,η_2,β_3 化为 R^3 的一个标准正交基：

令

$$\eta_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3=(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$$

则 η_1,η_2,η_3 即为 $\mathbf{R}^3$ 的一个标准正交基。

四、正交矩阵

定义3.3.8 设 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$，若 $AA^{\mathrm{T}}=I$，则称 A 是正交矩阵。

显然，正交矩阵 A 可逆，且 $A^{-1}=A^T$ 。

定理3.3.6 设 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$，则 A 是正交矩阵的充分必要条件是 A 的列（行）向量组是标准正交的。

证明 由 $AA^T=I$，有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=I$$

即 $$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^T & \alpha_2^T & \cdots & \alpha_n^T \end{bmatrix}=I$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_1^T & \alpha_1\alpha_2^T & \cdots & \alpha_1\alpha_n^T \\ \alpha_2\alpha_1^T & \alpha_2\alpha_2^T & \cdots & \alpha_2\alpha_n^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n\alpha_1^T & \alpha_n\alpha_2^T & \cdots & \alpha_n\alpha_n^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

即 $$\alpha_i\alpha_j^T=d_{ij}=\begin{cases} 1, \text{当} i=j \text{时} \\ 0, \text{当} i\neq j \text{时} \end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

又 $\alpha_i\in R^n$（欧氏空间），且

$$\alpha_i\alpha_j^T=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{pmatrix}$$

$$=a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{in}a_{jn}$$

$$=(\alpha_i,\ \alpha_j)\quad （\alpha_i \text{与} \alpha_j \text{的内积}）$$

故有 $$(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 中的标准正交向量组。

小结：A 为正交矩阵的充要条件是下列条件之一成立：

(1) $AA^T=I$;

(2) $A^{-1}=A^T$;

(3) A 的列向量是两两正交的 单位向量;

(4) A 的行向量是两两正交的 单位向量.

例 判别下列矩阵是否为正交矩阵：

$$(1)\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix},\quad (2)\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

解 (1) 考察矩阵的第一列和第二列，

由于 $$1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\neq 0,$$

所以它不是正交矩阵。

(2) $\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{bmatrix}$

由于

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以它是正交矩阵。

例 验证矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{是正交矩阵.}$$

解 P 的每个列向量都是单位向量,且两两正交,所以P 是正交矩阵。

例3.3.6 设 $A \in R^{n\times n}$，证明：若A可逆，则A可表示为

$$A = QR \qquad (3.3.2)$$

其中Q是n阶正交矩阵，R是n阶可逆上三角阵。式(3.3.2)称为实方阵的正交分解。

证明: 由于可逆上三角矩阵的逆仍然是上三角矩阵，所以(3.3.2)等价于 $AR' = Q$,其中R'为可逆上三角阵，Q为正交矩阵.

设A的列向量组为：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 则由$A$可逆，得$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是欧式空间$R^n$的一个基。

将$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$用Schmidt方法正交化、单位化:

令 $\beta_1 = \alpha_1,$ $\qquad\qquad$ $\beta_1 = \alpha_1,$

$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$ $\qquad$ $\beta_2 = k_{12}\alpha_1 + \alpha_2,$

$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2,$ $\qquad$ $\beta_3 = k_{13}\alpha_1 + k_{23}\alpha_2 + \alpha_3,$

……… $\qquad$ $\beta_n = k_{n1}\alpha_1 + k_{n2}\alpha_2 + \cdots + k_{(n-1)n}\alpha_{n-1} + \alpha_n,$

$\beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1},$

因$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_i$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i$线性表出，上式可表述为:

再令 $\eta_i = \frac{1}{|\beta_i|}\beta_i$,就有

$\eta_1 = r_{11}\alpha_1,$

$\eta_2 = r_{12}\alpha_1 + r_{22}\alpha_2,$ $\qquad$ $r_{ii} > 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$

$\eta_3 = r_{13}\alpha_1 + r_{23}\alpha_2 + r_{33}\alpha_3,$

………

$\eta_n = r_{n1}\alpha_1 + r_{n2}\alpha_2 + \cdots + r_{(n-1)n}\alpha_{n-1} + r_{nn}\alpha_n,$

将上式写成矩阵形式:

$$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n] = [\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

令 $Q = [\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$ $\qquad$ $R' = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$

则上式可写为: $AR' = Q$

因$r_{ii} > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$,故$r(R') = n$, R'是可逆的上三角矩阵.

又列向量组$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$标准正交，故$n$阶实方阵$Q$为正交矩阵.

应用: 实系数线性方程组 $AX = b,$ $\quad A = QR$

$QY = b, \quad RX = Y$

$Y = Q^{-1}b = Q^Tb.$

五、最小二乘法(简介)

人们在解决实际问题时经常需要建立线性方程组，而环境的微小变化、读取数据时的偏差、处理数据时的计算误差等等方面的原因都会引起所建立的线性方程组无解，但我们不能轻易断言问题本身无解，通常的做法是，求一组数使之最大限度地适合原方程组，进而把这组误差最小的数视为原方程组的解，实现这一目标的方法之一就是最小二乘法。

方法　当 $AX=b$ 无解时转化为求它的最小二乘解，即求 $A^TAX=A^Tb$ 的解。

正规方程

定理3.3.7　设 $AX=b$ 是不相容线性方程组，则其最小二乘解是线性方程组　$A^TAX=A^Tb$　的解.

例3.3.7　任取 $A\in R^{n\times n}, b\in R^n$, 则线性方程组

$A^TAX=A^Tb$　一定有解.

例：求拟合下列四个点:(0,1),(2,0),(3,1),(3,2) 的最小二乘直线

解：设直线方程为 $y=ax+c$, 代入数据得

$$\begin{cases}1= & c\\0=2a+c\\1=3a+c\\2=3a+c\end{cases}\qquad A=\begin{bmatrix}0&1\\2&1\\3&1\\3&1\end{bmatrix},\qquad b=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$A^TA=\begin{bmatrix}22&8\\8&4\end{bmatrix},\quad A^Tb=\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}$$

解正规方程：$A^TAX=A^Tb$, 即

$$\begin{bmatrix}22&8\\8&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\4\end{bmatrix}$$

得：$a=\frac{1}{6}, c=\frac{2}{3}.$

所以最小二乘直线为：$y=\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}.$

§3.7　欧氏空间(简介)

在向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中，我们引入了内积运算，建立了欧氏空间。若在一般的实数域 **R** 上的线性空间 V 中引入内积运算，则可以建立一般的欧氏空间。

定义3.7.1　设 V 是实数域 **R** 上的一个线性空间。如果对 V 中任意两个向量 α,β, 均有一个确定的、记作 (α,β) 的实数与之对应，并且下列条件被满足：

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

(2) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$

(3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

(4) $(\alpha,\alpha)\geqslant 0$, 当且仅当 $\alpha=\theta$ 时 $(\alpha,\alpha)=0$ 。

这里 α,β,γ 是 V 的任意向量，k 是任意实数，则称实数 (α,β) 为向量 α 与 β 的内积，而这样的线性空间称为Euclid 空间，简称欧氏空间。

例　对实向量空间 $\mathbf{R}^n$，任取 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}^n$,

$\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n), \beta=(b_1,b_2,\ldots b_n)$

规定 α 与 β 的内积 (α,β) 为

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$$

则 $\mathbf{R}^n$ 是欧氏空间。

例3.7.1　设 V 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的所有连续函数构成的函数空间 $C[a,b]$。对于 V 中任意二个函数 $f(x), g(x)$, 规定其内积为

$$(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

则 V 便是一个欧氏空间。

在欧氏空间 R^n 和 $C[a,b]$ 中，按上两例中的方法定义的内积都称为标准内积。一般情况下，欧氏空间 R^n 和 $C[a,b]$ 中的内积都是指标准内积。

例3.7.2 在全体 n 阶实方阵所构成的线性空间 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中，对任意两个 n 阶矩阵 A、B，规定其内积为

$$(A,B)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=tr(AB^T)$$

容易验证它满足内积定义中的四个条件，因此 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 对于所定义的内积构成一个欧氏空间。

如果把 $\mathbf{R}^n$ 中的元素换成一般集合 V 中的元素，则我们在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中所叙述的内容对于欧氏空间 V 也是对的。

六、小结

1. 将一组基规范正交化的方法：
   先用施密特正交化方法将基正交化，然后再将其单位化.
2. A 为正交矩阵的充要条件是下列条件之一成立：
   $(1)\ A^{-1}=A^T$;
   $(2)\ AA^T=I$;
   $(3)\ A$ 的列向量是两两正交的 单位向量;
   $(4)\ A$ 的行向量是两两正交的 单位向量.

七、前三节小结

1. 向量空间的基、维数、坐标
   (求过渡矩阵，求坐标)
2. 子空间
   (求齐次线性方程组解空间的基、维数，
   求向量组生成的向量空间的基、维数)
3. 正交运算
   (掌握内积及其性质，
   求向量的长度及两个向量间的夹角，
   判断两个向量是否正交，
   判断一个向量组是否为正交向量组，
   掌握正交矩阵及其性质)
4. 标准正交向量组（Schmidt正交化方法）

作业 习题三(P164):
17、20、22 (3)、24、28
(17-30题均可做练习)