习题 3-1

1. 验证：$f(x)=\ln\sin x$ 作为初等函数的复合函数在 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 内连续，

且在 $(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$ 上可导，且 $f(\frac{\pi}{6})=-\ln 2=f(\frac{5\pi}{6})$

$y'=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$y'=0$

则罗尔定理成立

2. 证明：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续 在 $(1,+\infty)$ 也连续，$f(x)$ 只能在 1 处可能不连续.

又 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续.

且 $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\frac{3-x^2}{2}-1}{x-1}=-1=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$

则 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导. $f'(x)=-x,\ 0\le x\le 1$. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\quad 1<x\le 2$

设 $f'(x)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2}=-\frac{1}{2}$.

若 $x\in[0,1]$. 则 $-x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$.

若 $x\in(1,2]$ 则 $-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\sqrt{2}$

则中值线为 $\frac{1}{2}$ 或 2.

3. 解：设行驶路程是时间的函数 $S=f(t)$，则 $f(t)$ 在 $[10,10.3]$ 上连续，

在 $(10,10.3)$ 可导，导数为速度，

则由 Lagrange 中值定理，必有一点 ξ 使：

$$f'(\xi)=\frac{f(10.3)-f(10)}{10.3-10}=\frac{20km}{0.3h}=66.7km/h>60km/h.$$

则必有超速行为

4. 解：$f(x)=0$ 有 $x=2$，$x=4$，$x=5$，$x=8$ 4个实根. 且 $f(x)$ 连续，由罗尔定理，必有

三个 ξ 使 $f'(x)=0$. 即 $f'(x)=0$ 有三个实根.

再由罗尔定理：$f''(x)=0$ 有两个实根，

$f'''(x)=0$ 有1个实根.

5. 证：考虑函数 $f(x)=a_0x+\frac{1}{2}a_1x^2+\frac{1}{3}a_2x^3+\cdots+\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$.

则 $f(1)=a_0+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}a_2+\cdots+\frac{1}{n+1}a_n=0$

又 $f(0)=0$，由拉格朗日中值定理：必存在 $\xi\in(0,1)$，使

$f'(\xi)=a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\cdots+a_n\xi^n=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=0$.

则原命题得证.

6. 证：设 $f(x)=x^5+x+1$，则：

$f'(x)=5x^4+1$，则 $f(x)$ 在 R 上为单调递增函数，且 $f(x)$ 为连续函数。

又 $f(0)=-1$. $f(1)=1$

则 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 有且仅有一个实根使 $f(x)=x^5+x+1=0$

7. (1) 证：设 $f(x)=\arctan x+\operatorname{arccot} x$.

则 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-1}{1+x^2}\equiv 0$

则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为常数.

令 $x=1$，则 $f(x)=f(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

则 $f(x)=\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立

(2) 证：设 $f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}$

则 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\times\frac{1+x^2}{x^2-1}\cdot\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$

$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$

则 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为常数.

$f(1)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$.

则 $f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$ 在 $[1,+\infty)$ 恒成立

(3) 证、设 $f(x)=\arctan\frac{\sqrt{3}+x}{1-\sqrt{3}x}-\arctan x$

则 $f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}+x}{1-\sqrt{3}x}\right)^2}\cdot\frac{(1-\sqrt{3}x)-(-\sqrt{3})(\sqrt{3}+x)}{(1-\sqrt{3}x)^2}-\frac{1}{1+x^2}$

$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$

则 $f(x)$ 在 $\{x\mid x\neq\frac{\sqrt{3}}{3}\}$ 上为常数.

则 $f(1)=\arctan\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}-\arctan 1=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$ 成立.

8. (1) 令 $f(x)=\sin x$，由拉格朗日中值定理：对 $\forall x,\forall y$，$\exists\xi$ 在 x 与 y 之间使：

$f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y)\iff\sin x-\sin y=\cos\xi\,(x-y)$

则 $|\sin x-\sin y|=|\cos\xi|\,|x-y|\le|x-y|$.

证毕

(2) 令 $f(x)=\arctan x$，由拉格朗日中值定理，对 $\forall x$，$\forall y$，都 $\exists\xi$ 在 x 与 y 之间使：

$$f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y) \Leftrightarrow \arctan x-\arctan y=\frac{1}{1+\xi^2}(x-y)$$

则 $|\arctan x-\arctan y|=\left|\frac{1}{1+\xi^2}\right||x-y|\le|x-y|$

证毕

(3) 令 $f(x)=\arcsin x$. 由拉格朗日中值定理，对 $\forall x$, $\forall y$，都 $\exists\xi$ 在 x 与 y 之间使：

$$f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y) \Leftrightarrow \arcsin x-\arcsin y=\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}(x-y)$$

则 $|\arcsin x-\arcsin y|=\left|\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\right||x-y|\ge|x-y|$

证毕

(4). 令 $f(x)=\ln x$，则由拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使：

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)=\frac{1}{\xi}(a-b).$$

则 ξ 取到 a 时，$f(a)-f(b)=\ln\frac{a}{b}>\frac{1}{a}(a-b)$

ξ 取到 b 时. $f(a)-f(b)=\ln\frac{a}{b}<\frac{1}{b}(a-b)$

则 $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$ $(0<b<a)$.

(5) 令 $f(x)=e^x$，则由拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in(1,x)$，使.

$$f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1) \Leftrightarrow e^x-e=e^{\xi}(x-1)>e(x-1)$$

$\Rightarrow e^x>ex$. $(x>1)$

9. 解：设路程 S 与时间的函数为 $S=f(t)$. 则 $f(t)$ 在 $[0,2.2]$ 内连续可导，导数为速度.

则由拉格朗日中值定理，必有一点 ξ，使：

$$f'(\xi)=\frac{f(2.2)-f(0)}{2.2-0}=\frac{42.16-0}{2.2-0}\approx19.16\,km/h>17.7\,km/h.$$

又 $f'(0)=0$ $\quad f'(2.2)=0$. 且 $f'(x)$ 为连续函数

则必存在两点 ξ_1, ξ_2，使 $f(\xi_1)=17.7$ $\quad f(\xi_2)=17.7$

证毕.

10. 证：因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续导数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，由拉格朗日中值定理，有：

$\exists\xi\in(x_1,x_2)$ 使 $|f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)||a-b|$.

因 $f'(x)$ 连续，则在 $[a,b]$ 必有最值，设为 $L>0$

则 $|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|$

11．证明：由$f'(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，则$\exists x_1\in[a,c)$，

$x_2\in(c,b)$．使：$f'(x_1)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$．$f'(x_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}<0$

又由拉格朗日中值定理，且$f'(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，$f''(x)$存在，

则$\exists\xi\in(x_1,x_2)$使得：$f''(\xi)=\dfrac{f'(x_1)-f'(x_2)}{x_1-x_2}<0$．

证毕。

12．证明：因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，则$\forall\varepsilon>0$．$\exists X\in(0,+\infty)$．当$x>X$时，有：

$|f'(x)-0|<\varepsilon$，即$|f'(x)|<\varepsilon$．

又因为$f(x)$在$(0,+\infty)$内可微，则必连续，由拉格朗日中值定理，有：$\forall x$．

$\exists\xi\in(x,x+1)$，使：

$f'(\xi)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)$．

又$|f'(\xi)|<\varepsilon$．，

则对上述ε，必$\exists X'>X$，使当$x>X'$时，有：

$|f(x+1)-f(x)|<\varepsilon$成立．

则$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0$ 成立

13．证明：构造函数$F(x)=\dfrac{(x-a)[f(a)g(b)-g(a)f(b)]}{b-a}-f(a)g(x)+g(a)f(x)$

又$F(a)=0$　　$F(b)=0$

由拉格朗日中值定理：$\exists\xi\in(a,b)$，使得：

$F'(\xi)=\dfrac{f(a)g(b)-g(a)f(b)}{b-a}-f(a)g'(\xi)+g(a)f'(\xi)=0$

即$f(a)g(b)-g(a)f(b)=(b-a)\cdot(f(a)g'(\xi)-f'(\xi)g(a))$

（本题由柯西中值定理也可以）

14．证明：(1) 令$g(x)=x^2$．则$f(x)$．$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，又$ab>0$，则a,b同号不为零

即$g'(x)\neq0$．则由柯西中值定理：

$\exists\xi\in(a,b)$．使$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\Leftrightarrow\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$

$\Leftrightarrow 2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$．

(2) 令 $g(x)=\ln|x|$. 则 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $g'(x)\neq 0$.

由柯西中值定理: $\exists \xi \in (a,b)$, 使:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{\ln|b|-\ln|a|} = \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$$

$$\Leftrightarrow f(b)-f(a) = \xi \ln\frac{b}{a} \cdot f'(\xi)$$

证毕.