2009-2010 学年第一学期概率统计标准答案及评分标准

一、（12 分）

解： 设 A={选中的为甲盒}， B={选中的为乙盒}，
C={选中的为丙盒}， D={取出一球为白球}，
已知

$$P(A)=\frac{3}{6},\quad P(B)=\frac{1}{6},\quad P(C)=\frac{2}{6}$$ ……… (3 分)

$$P(D\mid A)=\frac{1}{3},\quad P(D\mid B)=\frac{2}{3},\quad P(D\mid C)=\frac{3}{6}$$ ……… (3 分)

（1）由全概率公式

$$P(D)=\frac{3}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{4}{9}$$ ……… (3 分)

（2）由 Bayes 公式

$$P(A\mid D)=\frac{\frac{3}{6}\times\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}}=\frac{3}{8}$$ ……… (3 分)

二、（14 分）

解：1、由已知

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-x}, & x>0\\ \frac{1}{2}e^{x}, & x\le 0\end{cases}$$ ………(1 分)

当 $x\le 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{x}$

当 $x>0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-t}dt=1-\frac{1}{2}e^{-x}$

………(4 分)

故

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x\le 0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x>0\end{cases}$$ ………(1 分)

2、 解一：

$Y=e^{-X}$ 的可取值范围是 $\left(e^{-1},1\right)$

由 $y=e^{-x}$ 得 $y'=-e^{-x}<0$

故 $y=e^{-x}$ 在 $\left(e^{-1},1\right)$ 上严格单减，

其反函数 $x=h(y)=-\ln y$ ，且 $h'(y)=-\dfrac{1}{y}$ ………(4 分)

所以 $Y=e^{-X}$ 的密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(-\ln y)\left|-\dfrac{1}{y}\right| , & e^{-1}<y<1 \\ 0 , & \text{其他} \end{cases}$$ ………(2 分)

$$=\begin{cases} 2(-\ln y)\dfrac{1}{y} , & e^{-1}<y<1 \\ 0 , & \text{其他} \end{cases}$$ ………(2 分)

$$=\begin{cases} -\dfrac{2}{y}\ln y , & e^{-1}<y<1 \\ 0 , & \text{其他} \end{cases}$$

解二：

先求 $Y=e^{-X}$ 的分布函数 $F_Y(y)$

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(e^{-X}\le y\right)$

$$=P(X\ge -\ln y)=1-P(X<-\ln y)$$

$$=1-F_X(-\ln y)$$ ………(4 分)

故

$$F_Y(y)=\begin{cases} 1-F_X(-\ln y) , & y>0 \\ 0 , & y\le 0 \end{cases}$$ ………(1 分)

因此，$Y=e^{-X}$ 的密度函数

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y}f_X(-\ln y) , & 0<-\ln y<1 \\ 0 , & \text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -\dfrac{2}{y}\ln y , & e^{-1}<y<1 \\ 0 , & \text{其他} \end{cases}$$

………(3 分)

三、（18 分）

解：1、

（1）$f_X(x)=\begin{cases}1,\ 0<x<1\\0,\qquad 其他.\end{cases}$　　$f_Y(y)=\begin{cases}1,\ 0<y<1\\0,\qquad 其他.\end{cases}$

因为 ***X*，*Y*** 相互独立，所以 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，几乎处处成立.

$$f(x,y)=\begin{cases}1,\ 0<x<1,0<y<1,\\0,\qquad\qquad 其他.\end{cases}$$

…………………………………（+3）

（2）方程 $t^2+Xt+Y=0$ 有实根，则判别式 $\triangle=X^2-4Y\geq 0.$

$$P(X^2-4Y\geq 0)=P\left(Y\leq\frac{1}{4}X^2\right)=\int_0^1dx\int_0^{\frac{1}{4}x^2}1dy=\int_0^1\frac{1}{4}x^2dx=\frac{1}{12}.$$

…………………………………（+4）

（3）由X,Y相互独立，$P\left(\max(X,Y)\leq\frac{1}{2}\right)=P\left(X\leq\frac{1}{2}\right)P\left(Y\leq\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$

…………………………………（+3）

2、

（1）

$$P(X=n)=\sum_{m=0}^{n}P(X=n,Y=m)=\sum_{m=0}^{n}\frac{0.5^ne^{-1}}{m!(n-m)!}$$

$$=\frac{0.5^ne^{-1}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{0.5^ne^{-1}}{n!}\sum_{m=0}^{n}C_n^m=\frac{0.5^ne^{-1}}{n!}2^n=\frac{e^{-1}}{n!},n=0,1,2,\cdots.$$

…………………………………（+3）

$$P(Y=m)=\sum_{n=m}^{\infty}P(X=n,Y=m)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{0.5^ne^{-1}}{m!(n-m)!}=\frac{e^{-1}}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{0.5^n}{(n-m)!}$$

$$\overset{令k=n-m}{=}\frac{e^{-1}0.5^m}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{0.5^k}{k!}=\frac{e^{-1}0.5^me^{0.5}}{m!}=\frac{0.5^me^{-0.5}}{m!},m=0,1,2,\cdots.$$

…………………………………（+3）

（2）***X*，*Y*** 不相互独立，因为

$P(X=n,Y=m)\neq P(X=n)P(Y=m), m=0,1,2,\cdots,n; n=1,2,\cdots.$

……………………………….（+2）

四、（18 分）

解：（1）可先求 X 的边际分布

$$p(x)=\int_0^1(2-x-y)dy=\frac{3}{2}-x, \qquad 0<x<1,$$

于是

$$E(X)=\int_0^1 x(\frac{3}{2}-x)dx=(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{3}x^3)|_0^1=\frac{5}{12} \qquad \text{..............3 分}$$

由对称性可得

$$E(Y)=E(X)=\frac{5}{12}. \qquad \text{..............3 分}$$

（2）
$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(2-x-y)dxdy$$
$$=\int_0^1 xdx\int_0^1 y(2-x-y)dy=(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{6}x^3)|_0^1=\frac{1}{6} \qquad \text{........3 分}$$

进而

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$
$$=\frac{1}{6}-\frac{25}{144}=-\frac{1}{144}. \qquad \text{..............3 分}$$

（3）
$$E(X^2)=\int_0^1 x^2(\frac{3}{2}-x)dx=(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^4)|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$
$$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{1}{4}-(\frac{5}{12})^2=\frac{11}{144}. \qquad \text{..............3 分}$$

由对称性，可得 $D(Y)=D(X)=\frac{11}{144}$，故

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{-\frac{1}{144}}{\frac{11}{144}}=\frac{-1}{11}。 \qquad \text{..............3 分}$$

五、（8 分）

解：（1）设以 X_k （k=1,2,…,400)记第 k 个学生来参加会议的家长数，

则 $EX_k=1.1, DX_k=0.19, k=1,2,\ldots,400$. $\boldsymbol{X}=\sum_{k=1}^{400}\boldsymbol{X}_k$,

由中心极限定理：

$$\boldsymbol{P(X>450)=P(\frac{X-400\times 1.1}{\sqrt{400\times 0.19}}>\frac{450-400\times 1.1}{\sqrt{400\times 0.19}})\approx 1-\Phi(1.147)=0.1357}$$

. . . . 5 分

（2）以 Y 记有一名家长来参加会议的学生数，则 $Y\sim B(400,0.8)$

则

$$\boldsymbol{P(Y\leq 340)=P(\frac{Y-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}}\leq\frac{340-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}})}$$
$$\boldsymbol{\approx\Phi(2.5)=0.9938}$$

. . . . 3 分

六、（18 分）

解：

1 (1)由于 $EX=\lambda$ …………3 分

以 $\bar{X}_n$ 代替 EX 得 λ 的矩估计为

$$\hat{\lambda}=\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$ …………3 分

(2)总体 X 的分布列为

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},x=0,1,2\cdots$$

似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}P(X=x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=e^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$ …………2 分

对数似然函数为

$$\ln L(\lambda)=-n\lambda+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\lambda-\ln\prod_{i=1}^{n}x_i!$$ …………2 分

对λ求导并令其为零，得

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=-n+\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$ …………2 分

解得λ的最大似然估计为

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}_n$$ …………2 分

由于$P(X=0)=e^{-\lambda}$ …………2 分

因此$P(X=0)$的最大似然估计为$e^{-\overline{x}_n}$. …………2 分

七、（12 分）

解一：假设 H$_0$：μ=800； H$_1$：$\mu\neq 800$。 ------2 分

选取检验统计量$t=\dfrac{\overline{X}-800}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$， ------3 分

构造拒绝域： $|t|\geq t_{0.025}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.3060.$ ------3 分

由样本计算得：$|t|=\left|\dfrac{780-800}{20/\sqrt{9}}\right|=3$，故拒绝 H$_0$，

可认为这批钢索的断裂强度与 800kg/cm^2 有显著性差异。

------4 分

解二：假设 H$_0$：μ=800； H$_1$：$\mu<800$。 ------2 分

选取检验统计量$t=\dfrac{\overline{X}-800}{S/\sqrt{n}}$， ------3 分

构造拒绝域： $t<-t_{0.05}(n-1)=-t_{0.05}(8)=-1.8595.$ ------3 分

由样本计算得：$t=\dfrac{780-800}{20/\sqrt{9}}=-3$，故拒绝 H$_0$，

可认为这批钢索的断裂强度与 800kg/cm^2 有显著性差异。

------4 分