¡ 2.2　向量组的秩

向量组线性相关性理论：

三个基本概念：

线性组合、线性表出、线性相关与线性无关

核心问题：

向量组线性相关性的判别

两个辅助概念：

向量组的秩、极大无关组

一、向量组的秩

例　考虑两组向量：

$\alpha_1 = (1, 1)$　　　$\beta_1 = (1, 1)$

$\alpha_2 = (2, 2)$,　　$\beta_2 = (1, 2)$

$\alpha_3 = (3, 3)$　　　$\beta_3 = (3, 3)$

这两组向量有不同的线性相关性：

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，且其中任意两个向量都线性相关。在平面上，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 相互共线。

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关，但其中存在两个向量线性无关，例如 β_1, β_2。在平面上，β_1, β_2 不共线。

上例似乎表明，这两个向量组线性相关程度是不同的：

对向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 而言，其线性无关的程度为1；

对向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 而言，其线性无关的程度为2。

两个辅助概念

定义　设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 m 个 n 元向量。若其中存在 r 个向量线性无关，但任意 $r+1$ 个向量都线性相关，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的秩为 r，记为

秩$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ 或 $r\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$

注　向量组的秩是衡量向量组线性相关¡程度¡强弱的一个数量指标。

例　4元基本向量组

$\varepsilon_1 = (1,0,0,0),\ \varepsilon_2 = (0,1,0,0),\ \varepsilon_3 = (0,0,1,0),\ \varepsilon_4 = (0,0,0,1)$

的秩为____。

例　向量组 α, β（$\alpha \neq \theta, \beta = \theta$）的秩为____。

定理　向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是：秩$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\} < m$。

定义　设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的秩为 r，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中任意 r 个线性无关的向量都称为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的极大线性无关部分组，简称为极大无关组。

性质　向量组与其任一极大无关组都等价；等价的向量组的极大无关组也等价。

注：　向量组的极大无关组的作用：可以用极大无关组取代向量组。　简化向量组的作用

证明　若向量组与其任一极大无关组都等价，则由等价关系的传递性知，等价的向量组的极大无关组也等价，故只需证明向量组与其任一极大无关组都等价。

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的秩为 r，任取其一个极大无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$，要证

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\} \cong \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}\}$$

因 α_{i_1}，α_{i_2}，$\cdots$，α_{i_r}是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的一个部分组，故显然 α_{i_1}，α_{i_2}，$\cdots$，α_{i_r}可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出。下面证明$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 也可由α_{i_1}，α_{i_2}，$\cdots$，α_{i_r}线性表出。

任取 α_j $(1\le j\le m)$, 若$\alpha_j \in \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}\}$则显然 α_j 可由α_{i_1}，α_{i_2}，$\cdots$，α_{i_r}线性表出；若$\alpha_j \notin \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}\}$，则由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的秩为 r 可得：α_j，α_{i_1}，α_{i_2}，$\cdots$，α_{i_r}线性相关。根据定理 **2.1.2**，α_j 可由 α_{i_1}，α_{i_2}，$\cdots$，α_{i_r}线性表出。于是，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 可由 α_{i_1}，α_{i_2}，$\cdots$，α_{i_r}线性表出。

综上，结论得证。

定理 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出，则

$$秩\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\}\le 秩\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t\}$$

证明 只需证明向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组包含的向量个数不大于向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的极大无关组包含的向量个数。

设 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}}$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组，则 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}}$可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出。设 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{r_2}}$ 是 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的极大无关组，则 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 可由 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{r_2}}$ 线性表出。

又 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可由 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性表出，故 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}}$ 可由 $\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{r_2}}$ 线性表出，而 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}}$ 线性无关，所以 $r_1\le r_2$。

定义 设 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 的一个部分组。若

（**1**）$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$ 线性无关；

（**2**）每个 α_j（$j=1, 2, \cdots, m$）均可由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$ 线性表出，

则 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 的一个极大无关组。

定义 设 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 的一个部分组。若

（**1**）$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$线性无关；

（**2**）对任意 α_j $(j=1, 2, \cdots, m)$, $\alpha_j,\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 均线性相关，

则 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 的一个极大无关组。

例 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_m$。假设每个 α_j（$j=s+1, s+2, \cdots, m$）均可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性表出，则

$$秩\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\}=秩\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_m\}$$

证明 设 秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}=r$，任取$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大无关组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表出。

已知 $\alpha_{s+1},\alpha_{s+2},\cdots,\alpha_m$可由 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 线性表出，故由传递性得 $\alpha_{s+1},\alpha_{s+2},\ldots,\alpha_m$ 亦可由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表出。于是，每个 α_j $(j=1, 2, \cdots, m)$ 均可由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_r}$ 线性表出。

又 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关，所以 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 也是 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_m$ 的一个极大无关组。于是

$$秩\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\ldots,\alpha_m\}=r。$$

例 向量组的任意一个线性无关部分组都可扩充为整个向量组的一个极大无关组。

二、向量组的秩与矩阵的秩的关系

例 考虑阶梯形矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{11},\ a_{22},\cdots,\ a_{rr}\neq 0$$

其行向量组为

$$\alpha_1=(a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1n})$$
$$\alpha_2=(0,\ a_{22},\ \cdots,\ a_{2n})$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$\alpha_r=(0,\ \cdots,\ 0,\ a_{rr},\ \cdots,\ a_{rn})$$
$$\alpha_{r+1}=\cdots=\alpha_m=\theta$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是行向量组的极大无关组，故得

A的行向量组的秩$=r=$秩(A)

结论1 阶梯形矩阵的秩等于其行向量组的秩。

例 设A是3×4矩阵。对A按行分块，

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$$

对A作一次初等行变换得到矩阵A'

$$A\xrightarrow{R_2+3R_1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2+3\alpha_1\\ \alpha_3\end{pmatrix}=A'=\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \alpha_2'\\ \alpha_3'\end{pmatrix}$$

因为$\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3'$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，故

$$秩\{\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3'\}\le 秩\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$$

即

A'的行向量组的秩$\le$ A的行向量组的秩

又

$$A'\xrightarrow{R_2+(-3)R_1}\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \alpha_2'-3\alpha_1'\\ \alpha_3'\end{pmatrix}=A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$$

故 A的行向量组的秩 $\le$ A'的行向量组的秩

结论2 矩阵的初等行变换不改变行向量组的秩。

定理 矩阵的秩等于其行向量组的秩，也等于其列向量组的秩。

$$A\xrightarrow{初等行变换}B$$

结论 矩阵A的行向量组等价于矩阵B行向量组。

例 判断向量组

$$\alpha_1=(-1,-4,5,0),\alpha_2=(3,1,7,11),\alpha_3=(2,3,0,5)$$

的线性相关性。

解 分别以向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为行构造矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 5 & 0\\ 3 & 1 & 7 & 11\\ 2 & 3 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{行}\begin{bmatrix}1 & 4 & -5 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以，秩$(A)=2$，即向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2。由此得$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关。

定理 设A是方阵，则A是可逆矩阵的充分必要条件是：A的行（列）向量组线性无关。

例 已知向量组

$$\alpha_1=(1,1,1),\ \alpha_2(1,2,4),\ \alpha_3=(1,3,9)$$

证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

证明 令

$$A=[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T]=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$$

经验证A满秩，即A可逆，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关。

P111:16. 设$m\times n$矩阵A被初等行变换化为矩阵B，A和B的列向量组分别为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$。证明：对任意$n$个数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，下式

自证！

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_n\alpha_n=0$$

成立的充要条件是：

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots k_n\beta_n=0$$

成立.

简言之：矩阵的初等行变换不改变矩阵的列向量组的线性相关性，且表示的系数都是不变的.

例 （求极大无关组的方法）

已知向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，求它的秩及一个极大无关组。 列向量

解 令$A=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$，设

$$A\xrightarrow{\text{行}}A' \quad \text{（阶梯形）}$$

(1) 设A'有r个非零行，则 秩$\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}=r$；

(2) 设A'的主元在第$j_1,j_2,\cdots,j_r$列，则

$$\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_r}$$

是一个极大无关组。

例 已知向量组$\beta_1=(1,1,3,1)$，$\beta_2=(5,-2,8,-9)$，$\beta_3=(-1,1,-1,3)$，$\beta_4=(-1,3,-5,7)$，$\beta_5=(-1,3,-2,7)$

求向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_5$的秩及其一个极大无关组。

解 分别以向量$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_5$为列构造矩阵

$$A=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_5]=\begin{pmatrix}1&5&-1&-1&-1\\1&-2&1&3&3\\3&8&-1&-5&-2\\1&-9&3&7&7\end{pmatrix}$$

因为

$$A\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&5&-1&-1&-1\\0&-7&2&4&4\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以，向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_5$的秩为3，且$\beta_1,\beta_2,\beta_4$是一个极大无关组。

进一步讨论：将其他向 量用极大无关组线性表 出.

$$A\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&5&-1&-1&-1\\0&-7&2&4&4\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{7}&0&\frac{39}{14}\\0&1&-\frac{2}{7}&0&-\frac{6}{7}\\0&0&0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行简化阶梯形

$$\beta_3=\frac{3}{7}\beta_1-\frac{2}{7}\beta_2,\quad \beta_5=\frac{39}{14}\beta_1-\frac{6}{7}\beta_2-\frac{1}{2}\beta_4.$$

注：求用极大无关组表示其他向量时，可利用初等行变换将列向量组构成的矩阵化为行简化阶梯形矩阵，依其列向量间的关系推定原向量组向量间的关系.

定理 设A是$m\times p$矩阵，B是$p\times n$矩阵，则

$$\text{秩}(AB)\le\min\{\text{秩}(A),\ \text{秩}(B)\}$$

证　设矩阵$C=AB$,则C和A用其列向量表示为

$$C=(c_1,\cdots,c_n), A=(a_1,\cdots,a_p).$$

而　　$B=(b_{ij})$,

由　$$(c_1,\cdots,c_n)=(a_1,\cdots,a_p)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$c_i=b_{1i}a_1+b_{2i}a_2+\cdots b_{pi}a_p$$

知矩阵C的列向量组能由A的列向量组线性表示，因此$r(C)\le r(A)$.

因$C^T=B^TA^T$,由上段 证明知 $r(C^T)\le r(B^T)$,

即 $r(C)\le r(B)$.

这样：$r(C)=r(AB)\le r(A)$,

　　$r(C)=r(AB)\le r(B)$,

从而　$r(AB)\le \min\{r(A),r(B)\}$

注　矩阵运算与矩阵秩的关系：

(1) 设A与B是同型矩阵，则
　　秩($A+B$)≤秩(A)+秩(B)；

(2) 设A是s¡ n矩阵，B是n¡ t矩阵，则
　①秩(AB)≥秩(A)+秩(B) ¨ n；
　②秩(AB)≤min{秩(A)，秩(B)}；
　③若$AB=0$，则 秩(A)+秩(B) ≤ n；

(3) 设A是m¡ n矩阵，P是m阶满秩方阵，Q是n阶满秩方阵，则
　秩(A) = 秩(PA) = 秩(AQ) = 秩(PAQ) 。

向量组线性相关性判别方法的小结：

1. 利用齐次方程组有无非零解；

2. 利用矩阵的秩；

3. 利用线性表出；

4. 利用其他性质。

例　设

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix},$$

其中a_i，$b_i\ne 0$ ($i=1,2,\cdots,n$)。求 秩(A) 。

解　（法一）利用初等变换：

$$A\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

故 秩(A)=1；

（法二）利用行向量组秩的定义：

存在一个线性无关的行向量

$$\beta_1=(a_1b_1,a_1b_2,\cdots,a_1b_n)$$

但任意两个行向量

$$\beta_i=(a_ib_1,a_ib_2,\cdots,a_ib_n),\ \ \beta_j=(a_jb_1,a_jb_2,\cdots,a_jb_n)$$

均线性相关，这是因为 $a_j\beta_i-a_i\beta_j=\theta$，而 a_i，a_j 不全为零。故行向量组的秩为**1**，由此得 秩(A)=1；

（法三）利用行向量组的极大无关组：

存在一个线性无关的向量 β_1，使任意一个行向量 β_i 均可由 β_1 线性表出，因为

$$\beta_i=\frac{a_i}{a_1}\beta_1\ \ (i=2,3,\cdots,n)$$

由此得，β_1是行向量组的极大无关组。故行向量组的秩为**1**，所以，秩(A) =1。

（法四）利用矩阵秩的性质：

因为

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}[b_1,b_2,\cdots,b_n]$$

故得 秩$(A)\leqslant 1$。又 $A\neq 0$，故 秩$(A)\geqslant 1$。于是，

秩(A)=1。

例 设A是m¡ n矩阵，B是n¡ m矩阵，并且$AB=I$，则B的列向量组线性无关。

证明 （法一）因为 $AB=I$，所以

$$\text{秩}(B)\geq \text{秩}(AB)=\text{秩}(I)=m$$

又

$$\text{秩}(B_{n\times m})\leqslant \min\{n,\ m\}\leqslant m$$

故 秩$(B)=m$，即 B的列向量组的秩为 m，恰等于列向量的个数，于是 B的列向量组线性无关。

（法二）设 B的列向量组为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，即

$$B=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m]$$

令

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_m\beta_m=\theta$$

则上式可表为

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m]\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}=B\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}=0$$

于是

$$AB\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}=I\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}=A0=0$$

即

$$k_1=0,\ \ k_2=0,\ \cdots,\ k_m=0$$

由此得 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关。

小结

1．极大线性无关向量组的概念：
极大性、线性无关性．

2．矩阵的秩与向量组的秩的关系：
矩阵的秩＝矩阵列向量组的秩
＝矩阵行向量组的秩

3．关于向量组秩的一些结论

4．求向量组的秩以及极大无关组的方法：
将向量组中的向量作为列向量构成一个矩阵，然后进行初等行变换化为阶梯型．
进一步用初等行变换化为行简化阶梯型可以得出原向量组向量间的线性关系．

向量组线性相关性判别方法的小结：

1. 利用齐次方程组有无非零解；

2. 利用矩阵的秩；

3. 利用线性表出；

4. 利用其他性质。

1. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是：

秩{ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ } < m。

2. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 线性表出，则

秩 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\} \leq$ 秩 $\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t\}$

3. 初等行变换不改变向量组的秩

作业　习题二(P111)：
19，21，22(3)，23
(16-30题均可作为练习)