

习题 3-8

1. 证: 令 $f(x) = \tan x + x - 1$, 则 $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 1$, 则 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上大于 0 恒成立.

则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内递增, 又 $f(0) = -1 < 0$ $f(1) = \tan 1 > 0$

则 $f(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个根.

且 $\tan x = 1 - x$ 在 $(0, 1)$ 内有根.

2. 证: 令 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$, $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c)$.

又 $f(0) = 0$ $f(1) = a+b+c - (a+b+c) = 0$

由罗尔定理, 在 $(0, 1)$ 区间, 必有 $f'(x) = 0$ 必有解.

而 $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c)$

则 $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a+b+c$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一实根

3. 证: 因为 $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$, 则对任意给定的 y .

$$\text{则 } 0 \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq |x-y|$$

$$\lim_{x \rightarrow y} 0 \leq \lim_{x \rightarrow y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq \lim_{x \rightarrow y} |x-y|$$

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow y} 0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow y} |x-y| = 0$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} = 0 \quad \text{则 } \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = 0, \text{ 即 } f'(y) = 0$$

因 y 在 $(-\infty, +\infty)$ 是任意的, 则对 $\forall x$ 有 $f'(x) = 0$ 即 $f(x)$ 为常数.

4. 证: 令 $F(x) = f(x)e^{-\lambda x}$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 上可导,

$$\text{又 } F'(x) = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = [f'(x) - \lambda f(x)]e^{-\lambda x},$$

由于 $f(a) = f(b) = 0$, 则 $F(a) = F(b) = 0$, 由罗尔定理, 必 $\exists \xi \in (a, b)$, 使:

$$F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} = 0. \quad \text{则 } [f'(\xi) - \lambda f(\xi)]e^{-\lambda \xi} = 0, \text{ 即:}$$

$$f'(\xi) = \lambda f(\xi) \text{ 成立}$$

证毕

5. 证: 令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 其中 $g(x) = -x^2 + Bx + C$. 则 $h(a) = f(a) - g(a) = 0$ $h(b) = f(b) - g(b) = 0$

又因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a, b) 内有一个交点, 设为 $x = t$, 则 $h(t) = 0$. 由罗尔定理, 因 $h(x)$ 在

$[a, t]$ 内连续, (a, t) 内可导, 则必 $\exists m \in (a, t)$, 使 $h'(m) = 0$, 同理, $\exists n \in (t, b)$, 使

$h'(n) = 0$. 又 $h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) + 2x - B$. $h''(x) = f''(x) + 2$. 又 $h'(x)$ 在 $[m, n]$

内连续, (m, n) 内可导, 则由罗尔定理, $\exists \xi \in (m, n) \subset (a, b)$, 使 $h''(\xi) = 0$. 即

$$f''(\xi) = -2. \text{ 证毕}$$

6. 证: 因 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上满足拉格朗日中值定理条件, 故有: $\exists \xi_1 \in (0, a)$ 使

$$f(a) - f(0) = (a - 0) f'(\xi_1), \text{ 而 } f(0) = 0. \text{ 则 } f(a) = a f'(\xi_1)$$

同理 $f(x)$ 在 $[b, a+b]$ 上满足拉格朗日中值定理条件, 则 $\exists \xi_2 \in (b, a+b)$ 使

$$f(a+b) - f(b) = a \cdot f'(\xi_2)$$

$$\text{于是: } f(a+b) - f(b) - f(a) = a (f'(\xi_2) - f'(\xi_1))$$

又 $0 < \xi_1 < a \leq b < \xi_2 < a+b < +\infty$ 而 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调减少,

$$\text{故 } f'(\xi_2) - f'(\xi_1) \leq 0, \text{ 故 } a (f'(\xi_2) - f'(\xi_1)) \leq 0.$$

$$\text{则 } f(a+b) \leq f(a) + f(b)$$

证毕

7. 证: 要证原等式, 即证:

$$[f(a) - f(c)] g'(c) = [g(c) - g(b)] f'(c)$$

$$\text{令 } \varphi(x) = [f(a) - f(x)] g'(x) - [g(x) - g(b)] f'(x)$$

$$= f(a)g'(x) - f(x)g'(x) - g(x)f'(x) + g(b)f'(x) \quad (*)$$

$$\text{令 } F(x) = f(a)g(x) - f(x)g(x) + g(b)f(x)$$

$$\text{则 } \varphi(x) = F'(x)$$

$$\text{又因为 } F(a) = f(a)g(b) \quad F(b) = f(a)g(b)$$

即 $F(a) = F(b)$, 由罗尔定理, $\exists c \in (a, b)$, 使 $F'(c) = 0$, 即 $\varphi(c) = 0$

则 $(*)$ 式 $= 0$ 成立.

则原命题得证

$$8. (1) \text{ 由洛比达法则, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - a - 2bx}{2x} = 2.$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{1+x} - a - 2bx) = 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{则原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 2b}{2} = \frac{-1 - 2b}{2} = 2 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}.$$

$$\text{综上所述: } a = 1, b = -\frac{5}{2}$$

(2) 用泰勒展开, 则 $\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4} + o(x^4)$

$$\cos 4x = 1 - \frac{(4x)^2}{2} + \frac{(4x)^4}{4} + o(x^4)$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+a\cos 2x+b\cos 4x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+a(1-2x^2+4x^4+o(x^4))+b(1-8x^2+64x^4+o(x^4))}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+a+b-(2a+8b)x^2+(4a+64b)x^4+o(x^4)}{x^4} \text{ 存在.}$$

则分子的常数项和 x^2 项系数为 0

$$\begin{cases} 1+a+b=0 \\ 2a+8b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{4}{3} \\ b=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{则原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} (4a+64b) = \frac{8}{3}$$

9. (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{1} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(a) = a$

$$\Rightarrow a=0$$

(2) $x \neq 0$ 时, $g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$, 因 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上连续.

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''(x)x + f'(x) - f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = 0$$

$$\text{同理 } \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = 0$$

则 $g'(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续.

且 $g(x)$ 具有一阶连续导数

10. (1) $\lim_{x \rightarrow \pi} (1 - \tan \frac{x}{4}) \sec \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \tan \frac{x}{4}}{\cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{4} \sec^2 \frac{x}{4}}{-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} - 1}{x} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x^2} \\ &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)} = -\frac{e}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{n} (a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x) \right]^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \frac{1}{n} (a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x)} \\ \text{其中 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{n} (a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i^x - 1) \right]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i^x - 1)}{x} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_i^x - 1}{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln a_i = \frac{1}{n} \ln (a_1 a_2 \dots a_n) \end{aligned}$$

代入原式可得, 原极限 $= (a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})) = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \ln(1+x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

$$(5) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad x \rightarrow 0$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \cos x^2 = 1 \quad x \rightarrow 0$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{\sqrt{1+x^2} - \cos x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 + \frac{1}{2}x^2 - 1 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} -1 = -1$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

$$(7) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} (\sqrt{1 + \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x}} - 1)}{x \ln(1+x) - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \frac{\tan x - \sin x}{1 + \sin x}} - 1}{x \ln(1+x) - x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - \sin x)}{2(x \ln(1+x) - x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{2 \cdot (x \ln(1+x) - x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \frac{x^2}{\ln(1+x) - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \frac{2x}{\frac{1}{1+x} - 1} = -\frac{1}{2}$$

$$(8) \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\pi x} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi - \pi x - \sin \pi x}{\sin \pi x \cdot \pi(1-x)} = \frac{1}{\pi} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi - \pi \cos \pi x}{\pi \cos \pi x \cdot \pi(1-x) + \sin \pi x (-\pi)}$$

$$= \frac{1}{\pi} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1 - \cos \pi x}{\pi \cos \pi x (1-x) - \sin \pi x} = \frac{1}{\pi} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{-\pi \sin \pi x \cdot (1-x) - 2 \cos \pi x}$$

$$= \frac{1}{\pi} + 0 = \frac{1}{\pi}.$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

由泰勒展开式: $\sin^2 x = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 = (x^2 + \frac{x^4}{36} - \frac{x^4}{3} + o(x^4))$ $\cos^2 x = (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 = (1 + \frac{x^4}{4} - x^2 + o(x^4))$

$$\text{则 } \sin^2 x \cos^2 x = x^2 + \frac{x^6}{4} - x^4 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\text{则 } \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4}$$

$$\text{则原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{4}{3}$$

$$11. (1) f'_n(x) = n(1-x)^{n-1}(1-x-nx)$$

因为 $n(1-x)^{n-1} > 0$. 所以在 $[0, \frac{1}{n+1}]$ 上 $f'_n(x) > 0$. 在 $[\frac{1}{n+1}, 1]$ 上 $f'_n(x) < 0$

则 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{n+1}]$ 上递增, 在 $[\frac{1}{n+1}, 1]$ 上递减.

则 $f(x)$ 的最大值为 $f(\frac{1}{n+1}) = (\frac{n}{n+1})^{n+1}$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} M(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n}{n+1})^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1})^{n+1} = e^{-1}$$

12. (1) 对方程两边求导:

$$2x + 2y + 2xy' + 2yy' - 4 + 2y' = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{4-2x-2y}{2x+2y+2} = \frac{2-x-y}{2+x+y}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{(1-y')(2+x+y) - (1+y')(2-x-y)}{(2+x+y)^2} = \frac{-4-4y'}{(2+x+y)^2}$$

令 $y' = 0$, 得 $x = 2 - y$ 代入原方程得 $x = 1, y = 1$

当 $x = 1$ 时, $y'' = \frac{-4}{4^2} = -\frac{1}{4} < 0$

则 $f(1) = 1$ 为极大值

(2) 对方程两边求导:

$$3x^2 + 3y^2y' - 3ay - 3axy' = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{(ay' - 2x)(y^2 - ax) - (ay - x^2)(2yy' - a)}{(y^2 - ax)^2} = \frac{-ay'y^2 + ax^2 - a^2xy' - 2xy^2 + a^2y + 2yy'y^2}{(y^2 - ax)^2}$$

令 $y' = 0$, 得 $y = \frac{x^2}{a}$ 代入原方程得: $x = a\sqrt[3]{2}, y = a\sqrt[3]{4}$

此时 $y'' < 0$

则 $f(a\sqrt[3]{2}) = a\sqrt[3]{4}$ 是极大值

$$(3) \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2-3}{3t^2+3} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \frac{3t^2-3}{3t^2+3}}{dx/dt} = \frac{\frac{4t}{(t^2+1)^2}}{3t^2+3} = \frac{4t}{3(t^2+1)^3}$$

令 $\frac{dy}{dx} = 0$, 得 $t = \pm 1$, $t = 1$ 时 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{6} > 0$ 则 $t = 1$ 时取极小值

$t = -1$ 时 $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{6} < 0$, 则 $t = -1$ 时取极大值.

$t = 1$ 时, $x = 5$. 极小值为 $y(5) = -1$

$t = -1$ 时, $x = -3$ 极大值为 $y(-3) = 3$

$$(4) \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{e^{-t} - te^{-t}}{e^t + te^t} = \frac{1-t}{e^{2t}(1+t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{1-t}{e^{2t}(1+t)})}{e^t + te^t} = \frac{2t^2-4}{(t+1)^2 e^{2t}}$$

$$\text{令 } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ 得 } t=1, \text{ 此时 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{2e^2} < 0, x=e, y=e^{-1}$$

$$\text{极大值为 } y(e) = e^{-1}$$

$$13. (1) \text{ 当 } x < 1 \text{ 时, 令 } F(x) = \frac{1}{e^x} + x - 1, \text{ 则 } F'(x) = -\frac{1}{e^x} + 1,$$

$$\text{令 } F'(x) > 0 \text{ 得 } 0 < x < 1, \text{ 令 } F'(x) < 0 \text{ 得 } x < 0$$

$$\text{则 } F(x) \text{ 在 } (-\infty, 0) \text{ 上单调减, 在 } (0, 1) \text{ 上单调增, 又 } F(0) = 0$$

$$\text{则 } F(x) \geq 0 \text{ 可得:}$$

$$e^x \leq \frac{1}{1-x}$$

$$(2) \text{ 设 } f(x) = 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0)$$

$$\text{则 } f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}})}{x + \sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > 0$$

$$\text{则 } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上递增, 又 } f(x) > f(0) = 0$$

$$\text{则 } 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$$

$$(3) \text{ 当 } x \geq 1 \text{ 时, 左边小于等于 } 0, \text{ 右边大于 } 0, \text{ 显然成立.}$$

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, 即证: } e^{-2x} + xe^{-2x} + x - 1 > 0.$$

$$\text{令 } f(x) = e^{-2x} + xe^{-2x} + x - 1, \quad x \in (0, 1)$$

$$f'(x) = 1 - (2x+1)e^{-2x},$$

$$\text{又 } f''(x) = -2e^{-2x} + (4x+2)e^{-2x} = 4xe^{-2x} > 0, \text{ 则 } f'(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上递增,}$$

$$\text{则 } f'(x) \geq f'(0) = 0 \text{ 即 } x \in (0, 1) \text{ 时, } f(x) \text{ 为增函数,}$$

$$\text{则 } f(x) \geq f(0) = 0 \text{ 即: } e^{-2x} + xe^{-2x} + x - 1 > 0, \text{ 则:}$$

$$\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立.}$$

$$(4) \text{ 设 } f(x) = \ln x, \text{ 则 } f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续, 在 } (a, b) \text{ 上可导, 则由拉格朗日中值定理,}$$

$$\text{必存在一点 } c \in (a, b) \text{ 使得 } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad f'(x) = \frac{1}{x}. \text{ 原式中, } \frac{2a}{a^2+b^2} < \frac{2a}{2ab} = \frac{1}{b} = f'(b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} > \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a} = f'(a), \text{ 中间部分} = f'(c), \text{ 则要比较 } f'(a), f'(b), f'(c) \text{ 的大小.}$$

$$\text{又 } f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \text{ 当 } x > 0 \text{ 时 } f''(x) < 0, \text{ 则 } f'(x) \text{ 单调递减, 因为 } a < c < b, \text{ 则 } f'(b) < f'(c) < f'(a)$$

$$\text{从而原不等式成立}$$

14. 构造 $f(x) = \ln x - ax$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - a$ 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{a}$, 且在邻域大于0, 右邻域 $f'(x)$ 小于0.

则 $x = \frac{1}{a}$ 为 $f(x)$ 的一个极值点, 且 $f'(x) = 0$ 只有一个根, 所以只有一个极值点.

显然, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单增, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单减, 则 $f(x) = f(\frac{1}{a})$ 为极大值

函数只有一个极值点, 且易证极大值即最大值点, 则 $f(x)$ 的最大值为 $f(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a} - 1$

若 $f(\frac{1}{a}) < 0$, 则 $f(x) = 0$ 无实根

若 $f(\frac{1}{a}) = 0$ 则 $f(x) = 0$ 只有一个实根

若 $f(\frac{1}{a}) > 0$, 因 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) < 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0$, 则有两个实根.

令 $f(\frac{1}{a}) = 0$ 得 $a = \frac{1}{e}$.

综上: 当 $a > \frac{1}{e}$ 时, $f(\frac{1}{a}) < 0$. $f(x) = 0$ 无实根, 即 $\ln x = ax$ 无实根.

当 $a = \frac{1}{e}$ 时, $f(\frac{1}{a}) = 0$ $f(x) = 0$ 只有一个实根, 即 $\ln x = ax$ 只有一个实根.

当 $a < \frac{1}{e}$ 时, $f(\frac{1}{a}) > 0$ $f(x) = 0$ 有两个实根, 即 $\ln x = ax$ 有两个实根.

15. 构造 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{100+x}$, 则 $f'(x) = \frac{100-x}{(100+x)^2 \cdot 2\sqrt{x}}$

则 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 100$ $f'(x) < 0$ 得 $x > 100$ $f'(x) = 0$ 得 $x = 100$

则 $f(x)$ 在 $(0, 100)$ 上单增, 在 $(100, +\infty)$ 上单减,

则 $f(x)$ 在 $x = 100$ 处取最大值.

即 $a_n = \frac{\sqrt{n}}{100+n}$ 在 $n = 100$ 时取最大项 $a_{100} = \frac{1}{20}$

16. 对 $x^2y + \alpha x + \beta y = 0$ 两边对 x 求导:

$$2xy + x^2y' + \alpha + \beta y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-2xy - \alpha}{x^2 + \beta} \quad y'' = \frac{2x^2y - 2\beta y - 2x^3y' - 2\beta xy' + 2\alpha x}{(x^2 + \beta)^2}$$

若 $(2, 2.5)$ 为其拐点, 则有 $y' = \frac{-10 - \alpha}{4 + \beta}$

$$\begin{cases} 2^2 \cdot 2.5 + 2\alpha + 2.5\beta = 0 \\ y'' = \frac{2 \cdot 2^2 \cdot 2.5 - 2\beta \cdot 2.5 - 2 \cdot 2^3 y' - 2\beta \cdot 2 y' + 2\alpha \cdot 2}{(4 + \beta)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^2 \cdot 2.5 + 2\alpha + 2.5\beta = 0 \\ y'' = \frac{2 \cdot 2^2 \cdot 2.5 - 2\beta \cdot 2.5 - 2 \cdot 2^3 y' - 2\beta \cdot 2 y' + 2\alpha \cdot 2}{(4 + \beta)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-20}{3}$$

$$\beta = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned}
 17: & \text{考虑 } \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f''(a)}{h^2} - \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^4} \right| \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f''(a)h^2 - f(a+h) - f(a-h) + 2f(a)}{h^4} \right|, \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 形, 用洛比达法则} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{2f''(a)h - f'(a+h) + f'(a-h)}{4h^3} \right| \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{2f''(a) - f''(a+h) - f''(a-h)}{12h^2} \right| \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{12} \left| \frac{-f'''(a+h) + f'''(a-h)}{2h} \right| \\
 &= \frac{1}{12} |f^{(4)}(a)|
 \end{aligned}$$

因为 $|f^{(4)}(x)| \leq M$. 则, 对于 $0 < h < \delta$, 有:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{f''(a)}{h^2} - \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^4} \right| \leq \frac{1}{12} M \\
 \Rightarrow & \left| f''(a) - \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} \right| \leq \frac{Mh^2}{12}
 \end{aligned}$$

18. 我们只考虑 a, b 同号情况. $f(x)$ 与 $\frac{1}{x}$ 在 (a, b) 上满足柯西中值条件和拉格朗日中值条件.

则 $\exists \eta \in (a, b)$, 使 $\frac{f'(\eta)}{-\frac{1}{\eta^2}} = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$ (*) 又由拉格朗日中值定理,

$\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. 则 $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$. 代入(*)式得:

$$f'(\xi) = \frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab} \text{ 成立.}$$

19. (1) 记 $g(x) = f(x) + x - 1$, 则 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 内连续, 由 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 则 $g(0) = -1, g(1) = 1$.

由零值定理, 必有一点 $c \in (0, 1)$, 使 $g(c) = 0$, 即在 $(0, 1)$ 内必有一点 c , 使:

$$f(c) = 1 - c.$$

(2). $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 内连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且在 $(0, 1)$ 内存在一点 c 使 $f(c) = 1 - c$, 则由

拉格朗日中值定理, 存在一点 $\eta \in (0, c)$ 使 $\frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{1 - c}{c} = f'(\eta)$, 且

存在一点 $\xi \in (c, 1)$, 使 $\frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = \frac{1 - (1 - c)}{1 - c} = \frac{c}{1 - c} = f'(\xi)$. 则:

$$f'(\xi) f'(\eta) = \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{1 - c}{c} = 1$$

综上, 在 $(0, 1)$ 内存在不同的点 ξ, η , 使 $f'(\xi) f'(\eta) = 1$

20. 由泰勒公式展开: $x \rightarrow 0$ 时

$$\sqrt{1-2x} = 1 + \frac{1}{2}(-2x) + \frac{-\frac{1}{4}}{2!}(-2x)^2 + o(x^2) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\sqrt[3]{1-3x} = 1 + \frac{1}{3}(-3x) + \frac{-\frac{2}{9}}{2!}(-3x)^2 + o(x^2) = 1 - x - x^2 + o(x^2)$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{ax^n} = 1$$

$$\Rightarrow n=2 \quad a=\frac{1}{2}$$

21. 由泰勒公式展开, $x \rightarrow 0$ 时.

$$\begin{aligned} x - (a + b \cos x) \sin x &= x - \left(a + b \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) \right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right) \\ &= x - \left(ax - \frac{a}{6}x^3 + \frac{ax^5}{120} + bx - \frac{b}{6}x^3 + \frac{b}{120}x^5 - \frac{b}{2}x^3 + \frac{bx^5}{12} + \frac{bx^5}{24} + o(x^5) \right) \\ &= x - \left((a+b)x + \frac{a+4b}{6}x^3 - \frac{a+16b}{120}x^5 + o(x^5) \right) \\ &= (1-a-b)x + \frac{a+4b}{6}x^3 - \frac{a+16b}{120}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

$$c(\sqrt[3]{1+x^5} - 1) = c \left(1 + \frac{1}{3}x^5 + o(x^5) - 1 \right) = \frac{c}{3}x^5 + o(x^5)$$

因 $x - (a + b \cos x) \sin x$ 与 $c(\sqrt[3]{1+x^5} - 1)$ 为等价无穷小.

$$\text{则 } \begin{cases} 1-a-b=0 \\ \frac{a+4b}{6}=0 \\ \frac{-a+16b}{120}=\frac{c}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{4}{3} \\ b=-\frac{1}{3} \\ c=\frac{1}{10} \end{cases}$$

22. 因为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 满足拉格朗日中值定理的条件, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \quad \text{又 } f''(x) > 0. \quad \text{则 } f'(x) \text{ 在 } (a, b) \text{ 上递增.}$$

$$\text{即 } f'(a) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(b). \quad \text{又 } b - a > 0$$

$$\text{则 } (b-a)f'(a) < f(b) - f(a) < f'(b)(b-a).$$

23. 因为 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 则在 $(0, +\infty)$ 内, $f''(x) > 0$, 又对于 $\frac{f(x)}{x}$ 有:

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}, \quad \text{令 } g(x) = f'(x)x - f(x), \quad \text{则 } g'(x) = f''(x)x + f'(x) - f'(x) = f''(x)x$$

则 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内大于 0. 又 $g(0) = 0$. 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内大于 0. 则 $\left(\frac{f(x)}{x} \right)'$ 在

$(0, +\infty)$ 内大于 0. 且 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加

24. 设 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, 则:

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d.$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c.$$

因为有两个拐点 $(2, 16)$ $(0, 0)$, 又在 $(2, 16)$ 处切线平行于 x 轴,

建立方程组:

$$\begin{cases} 12ax^2 + 6bx + 2c = 0 & \text{两个拐点} \\ 2c = 0 \\ 4ax^2^3 + 2bx^2^2 + 2cx^2 + d = 0 & \text{切线平行于} x \text{轴} \\ a2^4 + b2^3 + c2^2 + d2 + e = 16 & \text{过} (2, 16), (0, 0) \text{两点} \\ e = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 1 \quad b = -4 \quad c = 0 \quad d = 16 \quad e = 0$$

$$\text{则 } f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x$$

25. 对 $x_0 \in (0, 1)$ 是 $f(x)$ 的最小值点, 则它局部是极小值点, 故 $f'(x_0) = 0$, 且 $f(x_0) = -1$.

又 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处做泰勒展开, 得:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2} (x - x_0)^2 = -1 + \frac{f''(\xi)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

分别令 $x = 0$ 与 $x = 1$, 则有.

$$0 = f(0) = -1 + \frac{f''(\xi_1)}{2} x_0^2 \Rightarrow f''(\xi_1) = \frac{2}{x_0^2}, \text{ 其中 } \xi_1 \text{ 在 } (0, x_0) \text{ 之间,}$$

$$0 = f(1) = -1 + \frac{f''(\xi_2)}{2} (1 - x_0)^2 \Rightarrow f''(\xi_2) = \frac{2}{(1 - x_0)^2}, \text{ 其中 } \xi_2 \text{ 在 } (x_0, 1) \text{ 之间.}$$

记 $f''(\xi_0) = \max\{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\}$, 那么当 $0 < x_0 \leq \frac{1}{2}$ 时, $f''(\xi_0) = f''(\xi_1) = \frac{2}{x_0^2} \geq 8$.

当 $\frac{1}{2} \leq x_0 < 1$ 时, $f''(\xi_0) = f''(\xi_2) = \frac{2}{(1 - x_0)^2} \geq 8$.

综上所述: $f''(\xi_0) \geq 8$ 成立.

26. $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < e$, 令 $f'(x) < 0$ 得 $x > e$.

则 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上递增, 在 $(e, +\infty)$ 内递减.

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x - \frac{x}{e} + k) < 0 \quad f(e) = 1 + k > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty < 0$$

则 $f(x)$ 在 $(0, e)$, $(e, +\infty)$ 内各有一个实根, 共 2 个实根

27. 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 满足 Lagrange 中值定理,

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - f(x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = e$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2c}{x-c} \right)^{\frac{x-c}{2c} \cdot \frac{2cx}{x-c}} = e^{2c}$$

$$\text{则 } e^{2c} = e$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2}.$$

$$28. (1) f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ -x^2 + x & x \in [0, 1] \end{cases}, f(x) \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上连续.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ \text{不存在} & x=0 \text{ 或 } 1. \\ -2x+1 & x \in (0, 1) \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ -2 & x \in (0, 1) \end{cases}$$

因在 $x=0$ 的左边某邻域内 $f'(x) < 0$ 右边邻域 $f'(x) > 0$

则 $x=0$ 是极值点.

又左 $(-\infty, 0)$ 内 $f''(x) > 0$, $f(x)$ 为凹了弧, 在 $(0, 1)$ 内 $f''(x) < 0$ 为凸了弧.

则 $(0, 0)$ 是拐点.

$$(2) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = -1, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = 0, \text{ 即 } f'(a) = 0.$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{1} = -1, \text{ 则 } f''(a) = -1 < 0$$

则 $f(a)$ 是极大值, $(a, f(a))$ 不是拐点.

29. 由已知 $h \rightarrow 0$ 时, $a f(h) + b f(2h) - f(0)$ 是 h 的高阶无穷小, 有:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a f(h) + b f(2h) - f(0)}{h} = 0, \text{ 则 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a f(h) - a f(0) + b f(2h) - b f(0) + (a+b) f(0) - f(0)}{h} = 0$$

$$\text{则 } \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{a(f(h) - f(0))}{h} + \frac{2b \cdot [f(2h) - f(0)]}{2h} + \frac{(a+b-1)f(0)}{h} \right] = 0$$

$$\text{则 } (a+2b)f'(0) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+b-1)f(0)}{h} = 0, \text{ 又 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 邻域连续可导, 因此 } f'(0) \text{ 有界.}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+b-1)f(0)}{h} \neq f(0) \neq 0. \text{ 因此 } a+b-1=0 \quad (1) \text{ 则 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+b-1)f(0)}{h} = 0 \Rightarrow (a+2b)f'(0) = 0$$

$$\text{又 } f'(0) \neq 0. \text{ 则 } a+2b=0 \quad (2) \text{ 由 } (1)(2) \text{ 得 } a=2, b=-1.$$

30. 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3}{x - \arcsin x} \xrightarrow{\text{洛比达}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}, \quad \text{令 } x = \sin t, t \rightarrow 0^-$$

$$\text{上述极限} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{3a(\sin t)^2}{1 - \frac{1}{\cos t}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{3a \cos t \cdot \sin^2 t}{\cos t - 1} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{3a \sin^2 t}{-\frac{1}{2}t^2} = -6a$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{\pi}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ae^{ax} + 2x - a}{(x \cdot \frac{\pi}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ae^{ax} + 2x - a}{\frac{1}{2}x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^2 e^{ax} + 2}{\frac{1}{2}} = 2(a^2 + 4). \end{aligned}$$

$$\text{则须 } \begin{cases} -6a = 6 \\ 2a^2 + 4 = 6 \end{cases} \Rightarrow a = -1, \text{ 此时 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续.}$$

$$\text{若 } \begin{cases} -6a = 2a^2 + 4 \\ -6a \neq 6 \end{cases} \Rightarrow a = -2 \text{ 则 } x=0 \text{ 是 } f(x) \text{ 的间断点.}$$

31. 问题等价于讨论方程 $\ln^4 x - 4\ln x + 4x - k = 0$ 的实根个数.

设 $\varphi(x) = \ln^4 x - 4\ln x + 4x - k$, 则有:

$$\varphi'(x) = \frac{4(\ln^3 x - 1 + x)}{x}. \Rightarrow x=1 \text{ 是 } \varphi(x) \text{ 的驻点.}$$

当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi'(x) < 0$. 即 $\varphi(x)$ 单调减.

当 $x > 1$ 时, $\varphi'(x) > 0$. 即 $\varphi(x)$ 单调增.

故 $\varphi(1) = 4 - k$ 为 $\varphi(x)$ 的最小值.

当 $k < 4$, 即 $4 - k > 0$ 时, $\varphi(x) = 0$ 无实根. 两曲线无交点.

当 $k = 4$, 即 $4 - k = 0$ 时, $\varphi(x) = 0$ 有唯一实根. 两曲线有一个交点.

当 $k > 4$, 即 $4 - k < 0$ 时, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k) = +\infty$$

故 $\varphi(x) = 0$ 有两个实根, 两曲线有两个交点.

32. 对 $y = 1 - xe^y$ 两边关于 y 求导:

$$1 = -x'e^y - xe^y \Rightarrow x' = \frac{-xe^y - 1}{e^y}, \text{ 在 } y=1 \text{ 处, } x^0=0. \text{ 则 } x' = -\frac{1}{e}. \text{ 又 } x'' = \frac{(x-x')e^y + 1 - xe^y}{e^y}$$

$$\text{则 } x = x(1) + x'(y-1) + R_1(\xi) \quad \text{又}$$

$$= -\frac{1}{e}(y-1) + \frac{3e^{-\xi} - \xi e^{-\xi}}{2} (y-1)^2 \quad \xi \in (y, 1)$$

33. 令 $g(x) = f(x) - x$. 则 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且;

$$g(0) = f(0) - 0 = 0 \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad g(1) = f(1) - 1 = -1.$$

则由零值定理, $\exists c \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使 $g(c) = 0$,

又由罗尔中值定理, $\exists \xi \in (0, c)$, 使: $g'(\xi) = 0$. 即.

$$f'(\xi) = 1. \text{ 成立.}$$

34. 解: 用泰勒展开式:

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{1}{2}f''(a)(0-x)^2$$

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{1}{2}f''(b)(1-x)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{两式相减, 得 } |f'(x)| &= |f(1) - f(0) + \frac{1}{2}f''(a)x^2 - \frac{1}{2}f''(b)(1-x)^2| \\ &= \left| \frac{1}{2}f''(a)x^2 - \frac{1}{2}f''(b)(1-x)^2 \right| \leq \left| \frac{1}{2}f''(a)x^2 \right| + \left| \frac{1}{2}f''(b)(1-x)^2 \right| \\ &\leq \frac{A}{2} |x^2 + (1-x)^2| \end{aligned}$$

又 $x^2 + (1-x)^2$ 在 $[0, 1]$ 上最大值为 1.

$$\text{则 } |f'(x)| \leq \frac{A}{2}.$$

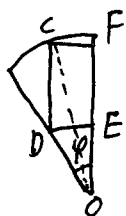
35. 易得矩形的边长为 $x - \frac{1}{x}$, 宽为 $\frac{x}{1+x^2}$. ($x > 0$), 由于 $y = \frac{x}{1+x^2}$ 为关于原点对称, 则考虑 $x > 0$ 处.

$$\text{则圆柱体体积为 } V = \pi \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^2 \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right) = \frac{\pi x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}.$$

$$\text{则 } V' = \frac{-\pi x^4 + 6\pi x^2 - \pi}{(x^2+1)^3}, \text{ 令 } V' = 0, \text{ 得 } x = \sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}, \text{ 又 } V' \text{ 在 } (0, \sqrt{3-2\sqrt{2}}) \text{ 小于 } 0, \text{ 在 } (\sqrt{3-2\sqrt{2}}, \sqrt{3+2\sqrt{2}}) \text{ 大于 } 0,$$

在 $(\sqrt{3+2\sqrt{2}}, +\infty)$ 小于 0. 则 V 在 $x = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 处取最大为 $\frac{\pi}{4}$.

36. 先考虑如下图形:



设 $\angle COF = x$, 则 $CF = R \sin x$

在 $\triangle CDO$ 中, $\frac{CD}{\sin(\varphi-x)} = \frac{R}{\sin(180^\circ-\varphi)}$

$$\therefore CD = \frac{R \sin(\varphi-x) \sin x}{\sin \varphi}$$

$$\therefore S_{CDEF} = \frac{R^2 \sin(\varphi-x) \sin x}{\sin \varphi} = \frac{R^2}{2 \sin \varphi} [2 \cos(2x-\varphi) - \cos(\varphi)] \leq \frac{R^2}{2 \sin \varphi} [1 - \cos \varphi] = \frac{1}{2} R^2 \tan \frac{\varphi}{2}$$

当且仅当 $x = \frac{\varphi}{2}$ 时, 取最大值. 故图中面积最大值为 $\frac{1}{2} R^2 \tan \frac{\varphi}{2}$

原题中图可拆分为两个上图, 则面积最大值为 $R^2 \tan \frac{\varphi}{2}$, 此时, $\theta = \frac{\varphi}{2}$. (即图中 $x = \frac{\varphi}{2}$).