课程编号：A073122 北京理工大学 2015-2016 学年第一学期

线性代数 A 试题 A 卷

班级 ________ 学号 ________ 姓名 _________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $\frac{1}{3}A^{*}XA=2A+XA$，求 X.

二、（10 分）已知平面上三条直线的方程

$$x-y+a=0,\ 2x+3y-1=0,\ x-ay-\frac{1}{2}=0$$

讨论参数 a 的取值与这三条直线相互位置之间的关系.

三、（10 分）已知向量组

$$\alpha_1=(1,1,1,a)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,1,a,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,a,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$$

（1） 讨论 a 的取值与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩之间的关系;

（2） 对 a 的不同取值，确定向量空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数与基.

四、（10 分）在实数域上的二阶矩阵构成的线性空间中，

（1）求基底 $I_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},I_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},I_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},I_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 到基底

$E_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix},E_4=\begin{pmatrix}6&6\\1&3\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵.

（2）求非零矩阵 A，使 A 在这两组基下的坐标相等.

五、（10 分）在多项式空间 $R[x]_4$ 中定义变换 σ:

$$\sigma(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=a_3+a_1+a_2x+(a_0-a_2)x^3$$

1．证明：σ 是 $R[x]_4$ 上的线性变换;

2．求 σ 在 $R[x]_4$ 的自然基 $1,x,x^2,x^3$ 下的矩阵，并判断 σ 是否可逆.

六、（10 分）设 A 是 5 阶方阵，且已知存在 5 阶可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ & -2 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试写出 A 的初等因子;
(2) 判断 $\boldsymbol{P}$ 的哪几列是 A 的特征向量.

七、（10 分）已知 A 是 $m\times n$ 矩阵，$n>m$，$\mathrm{r}(A)=m$；B 是 $n\times(n-m)$ 矩阵，$\mathrm{r}(B)=n-m$，且 $AB=0$. 证明：B 的列向量组为线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系.

八、（10 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求一正交变换 $X=QY$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(2) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定.

九、（10 分） 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & a-2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量.

（1）求 a;

（2）求 A^n.

十、（10 分）已知 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$,

（1） 求矩阵 A 与 B 的特征值;

（2） 证明 A 与 B 是相似的.