习题3-7

1、令 $f(x)=x^3-3x^2+6x-1$，则 $f'(x)=3x^2-6x+6$ 在 $(0,1)$ 上大于0，则

$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，又 $f(0)=-1$ $f(1)=3$ 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有唯一实根

令 $x_1=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$ $f(\frac{1}{2})>0$，故令 $a_1=0$ $b_1=\frac{1}{2}$ $b_1-a_1=0.5>\varepsilon$.

令 $x_2=\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{1}{4}$ $f(x_2)>0$ 故令 $a_2=0$ $b_2=\frac{1}{4}$ $b_2-a_2=0.25>\varepsilon$

令 $x_3=\frac{a_2+b_2}{2}=\frac{1}{8}$ $f(x_3)<0$ 故令 $a_3=\frac{1}{8}$ $b_3=\frac{1}{4}$ $b_3-a_3=0.125>\varepsilon$

令 $x_4=\frac{a_3+b_3}{2}=\frac{3}{16}$ $f(x_4)>0$ 故令 $a_4=\frac{1}{8}$ $b_4=\frac{3}{16}$ $b_4-a_4=0.0625>\varepsilon$

令 $x_5=\frac{a_4+b_4}{2}=\frac{5}{32}$ $f(x_5)<0$ 故令 $a_5=\frac{5}{32}$ $b_5=\frac{3}{16}$ $b_5-a_5=0.0313>\varepsilon$

令 $x_6=\frac{a_5+b_5}{2}=\frac{11}{64}$ $f(x_6)<0$ 故令 $a_6=\frac{11}{64}$ $b_6=\frac{3}{16}$ $b_6-a_6=0.01719>\varepsilon$

令 $x_7=\frac{a_6+b_6}{2}=\frac{23}{128}$ $f(x_7)<0$ 故令 $a_7=\frac{23}{128}$ $b_7=\frac{3}{16}$ $b_7-a_7=0.0078<\varepsilon$

因此 $x_7=\frac{23}{128}\approx 0.18$ 可作为所求根近似值.

2. 令 $f(x)=x^5+5x+1$，$f'(x)=5x^4+5$ 在 $(-1,0)$ 内大于0，则 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内单调递增

又 $f(-1)=-5<0$ $f(0)=1>0$，则 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有唯一实根.

又 $f''(x)=20x^3$ 则在 $(-1,0)$ 上 $f'(x)f''(x)<0$，则取 $x_0=-1$. 又迭代公式：

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=-0.5 \qquad |x_1-x_0|=0.5>\varepsilon$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=-0.2118 \qquad |x_2-x_1|=0.2882>\varepsilon$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=-0.1999 \qquad |x_3-x_2|=0.0119>\varepsilon$$

$$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}=-0.1999 \qquad |x_4-x_3|<\varepsilon.$$

则 $x_4\approx -0.1999$ 可为近似根.

3. 令 $f(x)=x\lg x-1$. $f'(x)=\lg x+\frac{1}{\ln 10}$ $f''(x)=\frac{1}{x\ln 10}$ $(x>0)$.

$f'(x)$ 在 $(0,e^{-1})$ 小于0 在 $(e^{-1},+\infty)$ 大于0 则 $f(x)$ 在 $(0,e^{-1})$ 上递减，在 $(e^{-1},+\infty)$ 上递增.

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)<0$ $f(e^{-1})=-\frac{\lg e}{e}-1<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty>0$ $f(1)=-1<0$. $f(10)\geq 0$

$(1,10)$ 上有唯一实根，在 $(1,10)$ 上 $f'(x)f''(x)>0$. 则取 $x_0=10$，由迭代公式：

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=3.7251 \qquad |x_1-x_0|=6.2749>\varepsilon$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=2.6037 \qquad |x_2-x_1|=1.1214>\varepsilon$$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.5071$ $\quad |x_3 - x_2| = 0.0966 > \varepsilon$

$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2.5062$ $\quad |x_4 - x_3| < \varepsilon$

则 $x_4 = 2.5062$ 为 $x\lg x=1$ 的实根近似值.

4、令 $f(x) = xe^x - 2$. $\quad f'(x) = e^x + xe^x \quad f''(x) = 2e^x + xe^x$,

在 $[0,1]$ 上 $f'(x) > 0 \quad f''(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上递增，又 $f(0) = -2 < 0 \quad f(1) = e-2 > 0$

则 $f(x)=0$ 在 $[0,1]$ 上有唯一实根 且 $f'(x)f''(x) > 0$. 则取 $x_0 = 1$，由迭代公式：

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.8679$ $\quad |x_1 - x_0| > \varepsilon$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.8528$ $\quad |x_2 - x_1| > \varepsilon$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.8526$ $\quad |x_3 - x_1| < \varepsilon$

则 $x_3 = 0.8526$ 为近似值.

5. 令 $f(x) = x^3 + 3x - 5 \quad f'(x) = 3x^2 + 3 \quad f''(x) = 6x$

在 $[1,2]$ 上 $f'(x) > 0 \quad f''(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上递增，又 $f(1) = -1 < 0 \quad f(2) = 9 > 0$

则 $f(x)=0$ 在 $[1,2]$ 上有唯一实根 且 $f'(x)f''(x) > 0$. 则取 $x_0 = 2$. 由迭代公式：

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.6667$ $\quad |x_1 - x_0| > \varepsilon$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.3925$ $\quad |x_2 - x_1| > \varepsilon$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.2234$ $\quad |x_3 - x_2| > \varepsilon$

$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1.1644$ $\quad |x_4 - x_3| > \varepsilon$

$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 1.1551$ $\quad |x_5 - x_4| > \varepsilon$

$x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)} = 1.1542$ $\quad |x_6 - x_5| > \varepsilon$

则 $x_6 = 1.1542$ 为近似解：