2017-2018 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、（12 分）

1、【正解】事件 A 和 B 都不发生

【学解】$A\cup B$ 表示 A 发生或 B 发生，其对立事件为事件 A 和 B 都不发生

【考点延伸】《考试宝典》专题一 【知识清单】1.1 基本概念 1.2 事件的关系与运算

2、【正解】0.6

【学解】联立方程组 $\begin{cases} P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \\ P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)=1-\dfrac{P(AB)}{P(A)} \end{cases}$

带入数值 $\begin{cases} 0.84=0.6+P(B)-P(AB) \\ 0.4=1-\dfrac{P(AB)}{0.6} \end{cases}$，解得 $P(B)=0.6$

【考点延伸】《考试宝典》第一章 【重要题型】 题型 1：集合关系与概率计算

3、【正解】$\dfrac{9}{64}$

【学解】$P\left\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}2xdx=\dfrac{1}{4}$，随机变量 $Y\sim B\left(3,\dfrac{1}{4}\right)$ 则有

$$P(Y=2)=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{64}$$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 【重要题型】 题型 3:连续型随机变量及其性质

4、【正解】e^{-4}

【学解】由于 X 的取值为 0，1，2…Y 的取值为 0，1，2…，X,Y 相互独立，因此

$$P\{X+Y=0\}=P\{X=0\}\times P\{Y=0\}=\left(\frac{2^0}{0!}e^{-2}\right)^2=e^{-4},$$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 【知识清单】 2.4 常见的一维随机变量及分布

5、【正解】9

【学解】$D(1-3X)=9DX=9(EX^2-(EX)^2)=9\times(5-4)=9$

【考点延伸】《考试宝典》第四章 【知识清单】 4.1 数学期望 4.2 方差

6、【正解】$\dfrac{1}{9}$

【学解】$P\{|X-\mu|>3\sigma\}\leqslant\dfrac{DX}{9\sigma^2}=\dfrac{\sigma^2}{9\sigma^2}=\dfrac{1}{9}$

【考点延伸】《考试宝典》第五章 【知识清单】 5.1 切比雪夫不等式

7、【正解】0.0228

【学解】$EX_i=1,DX_i=1,i=1,2\ldots$，$n$充分大时，$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}$近似服从$N(0,1)$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(X_1+\cdots+X_n\geqslant n+2\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\geqslant 2\right)=1-\Phi(2)=0.0228$

【考点延伸】《考试宝典》第五章 【知识清单】 5.3 中心极限定理

8、【正解】$m+n$，$2(m+n)$

【学解】由于ξ和η相互独立，$E(\xi+\eta)=E\xi+E\eta=m+n,D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta=2(m+n)$

【考点延伸】《考试宝典》第六章 【重要题型】 题型 3：卡方分布

9、【正解】[39.51, 40.49]

【学解】μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为$\left[\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}U_{\frac{\alpha}{2}}\right]$，代入数值，得到$\mu$的置信度为95%的置信区间为[39.51, 40.49]

【考点延伸】《考试宝典》第八章 【重要题型】 题型 1：置信区间

10、【正解】0.05， 0.5845

【学解】犯第一类错误的概率$P\{拒绝H_0|H_0成立\}=\alpha=0.05$

犯第二类错误的概率$P\{接受H_0|H_1成立\}$， H_1成立时，$\sigma^2=1$，

$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),4s^2\sim\chi^2(4)$

$P\{接受H_0|H_1成立\}=P\{s^2>0.7107\}=P\{4s^2>2.8428\}=0.5845$

【考点延伸】《考试宝典》第九章 【知识清单】 1.1 基本概念

二、【学解】 （1）设 A 、 B 、 C 分别表示甲、乙、丙 3 台机床加工出的零件是一等品。

易知：$P\left(A\overline{B}\right)=\dfrac{1}{4},P\left(B\overline{C}\right)=\dfrac{1}{12},P(AC)=\dfrac{3}{20}$

有独立性可得

$$P(A)P(\overline{B})=\frac{1}{4},P(B)P(\overline{C})=\frac{1}{12},P(A)P(C)=\frac{3}{20}$$

解方程组得：

$$P(A)=\frac{3}{10},P(B)=\frac{1}{6},P(C)=\frac{1}{2}$$

（2）$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-\frac{7}{10}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{17}{24}$

【考点延伸】《考试宝典》第一章 【重要题型】 题型 1：集合关系与概率运算

三、1. 【学解】（1）由$\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+c=1$，得$c=\frac{17}{30}$

（2）$Y=X^2$的分布律为

Y	1	4	9
P_k	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{17}{30}$

（3）Y 的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \frac{4}{15}, & 1\leqslant y<4\\ \frac{13}{30}, & 4\leqslant y<9\\ 1, & y\geqslant 9\end{cases}$$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 【重要题型】 题型 2：离散型随机变量及其分布律

2. 【学解】 （1）由$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 0+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0-}F(x)\end{cases}$ 得到$\begin{cases}A=1\\ B=-1\end{cases}$

（2）$P(X\leqslant 2)=F(2)=1-e^{-2}$

$P(X>3)=1-F(3)=1-(1-e^{-3})=e^{-3}$

（3）$f(x)=F'(x)=\begin{cases}e^{-x}, x\geqslant 0\\ 0, \quad x<0\end{cases}$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 【重要题型】 题型 3：连续型随机变量及其性质

四、【学解】(1) (X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x>0,y>0,2x+y\leqslant 2\\ 0, & else\end{cases}$$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{2-2x}1dy=2-2x, 0<x<1\\ 0, \quad else\end{cases}$

$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{\frac{2-y}{2}}1dx=\frac{2-y}{2}, 0<y<2\\ 0, \quad else\end{cases}$

在区域$D=\{(x,y)|x>0,y>0,2x+y\leqslant 2\}$上，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，X 和 Y 不相互独立.

(3) $Z=X+Y$ 概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\begin{cases}\int_0^z 1dx, & 0<z<1\\ \int_0^{2-z}1dx, & 1\leqslant z<2\\ 0, & else\end{cases}=\begin{cases}z, & 0<z<1\\ 2-z, & 1\leqslant z<2\\ 0, & else\end{cases}$$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 【重要题型】 题型 3：连续型随机变量及其性质 题型 4 随机变量函数的分布

五、【学解】 (1) $E(Z)=E(2X-3Y)=2EX-3EY=2$

$D(Z)=D(2X-3Y)=D(2X)+D(3Y)-2Cov(2X,3Y)$

$=4DX+9DY-12Cov(X,Y)$

$=16+9-12\sqrt{DX\times DY}\cdot\rho_{XY}=9$

(2) $Cov(X,Z)=2Cov(X,X)-3Cov(X,Y)=4$

$$\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}=\frac{2}{3}$$

(3) $\because \rho_{XZ}=\frac{2}{3}\neq 0$ $\therefore$不独立

【考点延伸】《考试宝典》第四章 【知识清单】 4.1 数学期望 4.2 方差

六、【学解】由于 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{10}\right)$,因此 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{10}}\sim N(0,1)$, $\frac{\left(\overline{X}-\mu\right)^2}{\sigma^2/10}\sim\chi^2(1)$

又由性质可知，$\frac{9S_X^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(9)$,且 $\overline{X}$ 和 S_X^2 相互独立

因此，$\frac{\left(\overline{X}-\mu\right)^2}{\sigma^2/10}+\frac{9S_X^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(10)$

由于 $\frac{Y_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1),i=1,\ldots,5$ 且相互独立，因此 $\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{Y_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(5)$

所以，$\frac{10\left(\overline{X}-\mu\right)^2+9S_X^2}{2\sum_{i=1}^{5}(Y_i-\mu)^2}\sim F(10,5)$

【考点延伸】《考试宝典》第六章 【重要题型】 题型 4：F 分布

七、【学解】：(1)由于 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\theta$

令 $EX=\overline{X}$,即 $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\theta=\overline{X}$

解得 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\bar{X}$

(2) 似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\theta^2}e^{-\frac{x_i^2}{2\theta^2}}=\frac{1}{\theta^{2n}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{2\theta^2}}$

对数似然函数为 $\ln L(\theta)=-2n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{2\theta^2}$

对 θ 求导并令其为零，得 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$

解得θ的最大似然估计为 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$

【考点延伸】《考试宝典》第七章 矩估计与极大似然估计

八、【学解】 提出假设$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2,H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$,

选取检验统计量$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\underset{\sim}{H_0\text{真}}\chi^2(n-1)$

拒绝域 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geqslant\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\leqslant\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$

已知$n=5,\sigma_0=0.048,\alpha=0.05,s^2=0.00778$

查表$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(4)=11.143,\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(4)=0.484$

计算 $\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=13.51>11.143$

拒绝H_0，即在显著性水平 α =0.05 下认为这天纤度的波动不正常。

【考点延伸】《考试宝典》第九章 【重要题型】题型 3：卡方检验