课程编号：A073122　　北京理工大学 2015-2016 学年第一学期

线性代数 A 试题 A 卷

一、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $\frac{1}{3}A^{*}XA=2A+XA$，求 X.

解： 由 $\frac{1}{3}A^{*}XA=2A+XA$ 有

$$\frac{1}{3}|A|X=2A+AX,$$

进而有 $X=2A+AX\Rightarrow(I-A)X=2A$，即

$$X=2(I-A)^{-1}$$

又因为

$$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ - & 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix},$$

所以

$$X=2\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} - & 6 & 10 \\ - & 2 & 4 \\ - & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

二、（10 分）已知平面上三条直线的方程

$$x-y+a=0,\ 2x+3y-1=0,\ x-ay-\frac{1}{2}=0$$

讨论参数 a 的取值与这三条直线相互位置之间的关系.

解： 写出方程组的增广矩阵并化为阶梯形

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -a & 1/2 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 0 & 5 & 1+2a \\ 0 & 1-a & 1/2+a \end{pmatrix}=\bar{B}$$

（1）若 $a=1$，上述矩阵已化为阶梯形，此时，方程组无解，三条直线中第一条与第三条平行但不重合，与第二条相交.

（2）若 $a\neq 1$，继续进行初等行变换，有

$$\bar{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 0 & 5 & 1+2a \\ 0 & 1-a & 1/2+a \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 0 & 5 & 1+2a \\ 0 & 0 & (2a+1)(2a+3) \end{pmatrix}$$

① 当 $a\neq 1$，$a\neq -\frac{1}{2}$ 且 $a\neq -\frac{3}{2}$ 时，方程组无解. 此时，三条直线不交于一点，但任意两条直线都相交.

② 当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，方程组有唯一解 $x=\frac{1}{2}, y=0$，此时，三条直线交于点（$\frac{1}{2},0$），且任意两条直线不重合.

③ 当 $a=-\frac{3}{2}$ 时，方程组有唯一解 $x=\frac{11}{10}, y=-\frac{2}{5}$，此时，三条直线交于（$\frac{11}{10},-\frac{2}{5}$），且其中后两条直线重合.

三、（10 分）已知向量组

$$\alpha_1=(1,1,1,a)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,1,a,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,a,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$$

（1） 讨论 a 的取值与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩之间的关系;

（2） 对 a 的不同取值，确定向量空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数与基.

解：（1）

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&a\\1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&0&a-1&1-a\\0&a-1&0&1-a\\0&1-a&1-a&1-a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&a-1&0&1-a\\0&0&a-1&1-a\\0&0&0&3-2a-a^2\end{pmatrix}$$

①当 $a=1$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 1;

②当 $a=-3$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3;

③当 $a\neq 1,-3$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 4.

（2）

①当 $a=1$ 时，向量空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数为 1，α_1 是一个基;

②当 $a=-3$ 时，向量空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个基;

③当 $a\neq 1,-3$ 时，向量空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数为 4，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是一个基.

四、（10 分）在实数域上的二阶矩阵构成的线性空间中，

（1）求基底 $I_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},I_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},I_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},I_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 到基底

$E_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix},E_4=\begin{pmatrix}6&6\\1&3\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵.

（2）求非零矩阵 A, 使 A 在这两组基下的坐标相等.

解：（1）

$$E_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}=2I_1+I_2-I_3+I_4,$$
$$E_2=\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix}=3I_2+I_3,$$
$$E_3=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix}=5I_1+3I_2+2I_3+I_4,$$
$$E_4=\begin{pmatrix}6&6\\1&3\end{pmatrix}=6I_1+6I_2+I_3+3I_4.$$

所以过渡矩阵为 $P=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$.

（2）设 A 在两组基下的坐标分别为 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$， $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)^T$，则由坐标变换公式，有 $Y=P^{-1}X$，两组坐标相同 $X=P^{-1}X$，即 $(P-I)X=0$，

$$P-I=\begin{pmatrix}1&0&5&6\\1&2&3&6\\-1&1&1&1\\1&0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

其解为 $X=k(-1,-1,-1,1)^T$，所以所求矩阵为 $A=k\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$.

五、（10 分）在多项式空间 $R[x]_4$ 中定义变换 σ:

$$\sigma(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=a_3+a_1+a_2x+(a_0-a_2)x^3$$

1．证明：σ 是 $R[x]_4$ 上的线性变换;

2．求 σ 在 $R[x]_4$ 的自然基 $1,x,x^2,x^3$ 下的矩阵，并判断 σ 是否可逆.

解：(1) 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3, g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$, 则

$$
\begin{aligned}
&\sigma(f(x)+g(x))=(a_3+b_3)+(a_1+b_1)+(a_2+b_2)x+(a_0-a_2+b_0-b_2)x^3\\
&=\left(a_3+a_1+a_2x+(a_0-a_2)x^3\right)+\left(b_3+b_1+b_2x+(b_0-b_2)x^3\right)\\
&=\sigma(f(x))+\sigma(g(x)),
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
&\sigma(kf(x))=ka_3+ka_1+ka_2x+(ka_0-ka_2)x^3\\
&=k\left(a_3+a_1+a_2x+(a_0-a_2)x^3\right)\\
&=k\sigma(f(x)),
\end{aligned}
$$

则σ是$R[x]_4$上的线性变换;

(2) $\sigma(1)=x^3$，$\sigma(x)=1$，$\sigma(x^2)=x-x^3$，$\sigma(x^3)=1$,

所以σ在$R[x]_4$的自然基$1,x,x^2,x^3$下的矩阵为

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & -1 & 0
\end{pmatrix}.
$$

由于$|A|=0$，故σ不可逆.

六、（10 分）设 A 是 5 阶方阵，且已知存在 5 阶可逆矩阵 P，使得

$$
P^{-1}AP=\begin{pmatrix}
-2 & 1 & & & \\
 & -2 & & & \\
 & & 1 & & \\
 & & & 0 & 1\\
 & & & & 0
\end{pmatrix}.
$$

(1) 试写出 A 的初等因子;
(2) 判断 $\boldsymbol{P}$ 的哪几列是 A 的特征向量.

解：A 的初等因子为$(\lambda+2)^2,\lambda-1,\lambda^2$

（2）P 的第一列是对应于-2的特征向量，第三列是对应于 1 的特征向量，第四列是对应于 0 的特征向量.

七、（10 分）已知 A 是 $m\times n$ 矩阵，$n>m$，$\mathrm{r}(A)=m$；B 是 $n\times(n-m)$ 矩阵，$\mathrm{r}(B)=n-m$，且 $AB=0$．证明：B 的列向量组为线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解

系.

证明： 将 B 按列分块：$B=(B_1,B_2,...,B_{n-m}),B_i\in\mathbf{R}^n$，由 $\mathrm{r}(B)=n-m$ 得：$r(B_1,B_2,...,B_{n-m})=n-m$，则 $B_1,B_2,...,B_{n-m}$ 线性无关.

由 $AB=0$ 得：$A(B_1,B_2,...,B_{n-m})=0$，即 $AB_i=0$，$B_1,B_2,...,B_{n-m}$ 是方程组 $AX=0$ 的解.

A 是 $m\times n$ 矩阵，$n>m$，$\mathrm{r}(A)=m$，则 $n-r(A)=n-m$

B 的列向量组为线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系.

八、（10 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$.

(1) 求一正交变换 $X=QY$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(2) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定.

解：（1） 因为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-5&\lambda-5&\lambda-5\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5),$$

所以 A 的全部特征值为 -1（二重），5.

对于特征值 -1，$-I-A=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，求出方程组 $(-I-A)X=0$ 的一个基础解系：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

正交化 $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$,

解：

单位化 $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

对于特征值 5，$5I-A=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$,求出方程组 $(5I-A)X=0$ 的

一个基础解系：$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得：$\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

取

$$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

则得标准形

$$f(y_1,y_2,y_3)=-{y_1}^2-{y_2}^2+5{y_3}^2.$$

（2）由（1）易知，$f(x_1,x_2,x_3)$ 不是正定的.

九、（10 分） 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\a&1&a-2\\-3&0&4\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量.

（1）求 a；

（2）求 A^n.

解： 由于 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-2\\-a&\lambda-1&2-a\\3&0&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$, 所以 $\lambda=1$(二重), $\lambda=2$.

当$\lambda=1$时，特征方程组的系数矩阵为$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -a & 0 & 2-a \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$由于 A 有三个线性无关的特征向量，所以A可以对角化，因此，$\mathrm{r}(\lambda I-A)=1$，故$a=1$.

（2）$\lambda=1$的特征向量为$\xi_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\lambda=2$的特征向量为$\xi_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

令$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 则$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,1,2)$，因此

$$A^n=P\mathrm{diag}(1,1,2^n)P^{-1}=\begin{pmatrix} 3-2^{n+1} & 0 & -1+2^{n+1} \\ -1+2^n & 1 & 1-2^n \\ 3-3\cdot 2^n & 0 & -1+3\cdot 2^n \end{pmatrix}.$$

十、（10 分）已知n阶矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$,

（1） 求矩阵A与B的特征值;

（2） 证明A与B是相似的.

解： 由于$|\lambda I-A|=(\lambda-n)\lambda^n$，则$A$的特征值为$n$，$0$（$n-1$重）.

同样 $|\lambda I-B|=(\lambda-n)\lambda^n$，则$B$的特征值为$n$，$0$（$n-1$重）.

（2）A属于$\lambda=n$的特征向量为$(1,1,\cdots,1)^T$；$r(A)=1$，故$Ax=0$基础解系有$n-1$个线性无关的解向量，即A属于$\lambda=0$有$n-1$个线性无关的特征向量，

故A相似于对角阵$\Lambda=\begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

B的特征值为n，0（$n-1$重），同理B属于$\lambda=0$有$n-1$个线性无关的特征向量，故B相似于对角阵Λ.

由相似关系的传递性，A相似于B.