§5.4 Jordan标准形

一、Jordan标准形

二、不变因子与初等因子

三、求方阵的Jordan标准形

四、求相似变换矩阵

五、线性变换的特征值与特征向量

一、Jordan标准形

定义 称m阶上三角矩阵

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}$$

为一个m阶Jordan块。

称准对角矩阵

$$\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

为一个Jordan形矩阵，其中$J_1, J_2, \cdots, J_s$均为Jordan块。

例如

$$[5] \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

分别是1阶、2阶、3阶Jordan块。

$$\begin{bmatrix} 5 & & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

是6阶Jordan形矩阵。

注 对角矩阵是由一些1阶Jordan块构成的特殊的Jordan形矩阵。

主要结论：

定理5.4.1 设$A \in C^{n\times n}$，则A相似于一个Jordan形矩阵

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

并且除了Jordan块$J_1, J_2, \cdots, J_s$的排列次序外，J由A唯一确定。称J为A的Jordan标准形。

二、不变因子与初等因子

设A是n阶方阵，令$A(\lambda) = \lambda I - A$，则称下列三种变换为$A$的特征矩阵$A(\lambda)$的初等变换：

(1)互换$A(\lambda)$的两行（列）；

(2)用一个非零数乘$A(\lambda)$的某一行（列）；

(3)用一个λ的多项式$\varphi(\lambda)$乘$A(\lambda)$的某一行（列）加到$A(\lambda)$的另一行（列）上。

注：同数字矩阵一样，可以利用初等变换将上述特征矩阵化为对角矩阵.

定理5.4.2 设A为n阶方阵，则$A(\lambda)=\lambda I-A$可经过有限次初等变换化成下列形式：

$$\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda) \end{bmatrix} \qquad (5.4.1)$$

其中$d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$均为最高次项系数为1的多项式，并且$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)[d_i(\lambda)$能整除$d_{i+1}(\lambda)],i=1,2,\cdots,n$.矩阵(5.4.1)被$A(\lambda)$唯一确定，称之为$A(\lambda)$的$Smith$标准形.

定义5.4.2 设式(5.4.1)为n阶方阵A的特征矩阵$A(\lambda)$的$Smith$标准形，则称其中的$d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$是$A(\lambda)$的不变因子，也称之为方阵$A$的不变因子.

例5.4.1 已知

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

求A的不变因子。

解

因 $$A(\lambda)=\lambda I-A=\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1+(\lambda+1)C_2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+(\lambda-3)R_1}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3+(\lambda-2)C_1}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ (\lambda-1)^2 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-2) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+(\lambda-1)R_3}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-2) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-2) \end{bmatrix}$$

故A的不变因子为：

$$1,\quad 1,\quad (\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

例 求三阶Jordan块

$$J=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

的不变因子。

解 因

$$J(\lambda)=\lambda I-J=\begin{bmatrix} \lambda-a & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-a & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1+(\lambda-a)C_2}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ (\lambda-a)^2 & (\lambda-a) & -1\\ 0 & 0 & (\lambda-a)\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+(\lambda-a)R_1}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ (\lambda-a)^2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & (\lambda-a)\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+(\lambda-a)R_2}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ (\lambda-a)^2 & 0 & -1\\ (\lambda-a)^3 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1+(\lambda-a)^2C_3}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ (\lambda-a)^3 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-a)^3\end{bmatrix}$$

所以J的不变因子为：$1,\ \ 1,\ \ (\lambda-a)^3$.

例　m 阶Jordan块

$$\begin{bmatrix}a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & 1\\ & & & & a\end{bmatrix}$$

的不变因子为：　$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{m-1个},\ (\lambda-a)^m$.

设n阶方阵A的不变因子为$d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$.

对它们进行素因式分解：

$$\begin{aligned}d_1(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)^{e_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{12}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_{1t}}\\ d_2(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)^{e_{21}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{22}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_{2t}}\\ \cdots&\quad\cdots\\ d_n(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)^{e_{n1}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{n2}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_{nt}}\end{aligned}\qquad(5.4.2)$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$是互不相同的复数，$e_{ij}$为非负整数 $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,t)$.

由于$d_i(\lambda)\,|\,d_{i+1}(\lambda)(i=1,2,\cdots,n-1)$,所以有

$$0\le e_{1j}\le e_{2j}\le\cdots\le e_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,t)$$

定义5.4.3 在式(5.4.2)中，指数e_{ij}大于零的因式$(\lambda-\lambda_j)^{e_{ij}}$称为$A(\lambda)=\lambda I-A$的初等因子，也称之为 n阶方阵A的初等因子．

注：同样的一次因式的幂可以重复．

例如　若某7阶方阵A的不变因子为：

$$1,1,1,1,1,(\lambda+2)(\lambda-3)^2,(\lambda+2)^2(\lambda-3)^2$$

则A的初等因子为：$(\lambda+2),\ (\lambda-3)^2,(\lambda+2)^2,\ (\lambda-3)^2$

一般地，主对角元为 a的m阶$Jordan$ 块的初等因子为：　$(x-a)^m$

由定义，求初等因子必须先求不变因子，而求不变因子则要先求Smith标准形，较繁琐。

定理5.4.3 设A是n阶复方阵，用初等变换将

$$A(\lambda)=\lambda I-A$$

化为对角矩阵(其主对角元的最高次项系数均为1)。然后把主对角元分解成互不相同的λ的一次因式方幂的乘积，则其中所有指数大于零的一次因式的幂就是A的全部初等因子。

例 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{bmatrix}$$

的初等因子。

解

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-4&-6&0\\3&\lambda+5&0\\3&6&\lambda-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2+\frac{1}{6}(\lambda+5)R_1]{R_3+R_1}\begin{bmatrix}\lambda-4&-6&0\\\frac{1}{6}(\lambda-1)(\lambda+2)&0&0\\\lambda-1&0&\lambda-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1+\frac{1}{6}(\lambda-4)C_2}\begin{bmatrix}0&-6&0\\\frac{1}{6}(\lambda-1)(\lambda+2)&0&0\\\lambda-1&0&\lambda-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{6C_1}\begin{bmatrix}0&-6&0\\(\lambda-1)(\lambda+2)&0&0\\6(\lambda-1)&0&\lambda-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_1-6C_3]{(-\frac{1}{6})C_2}\begin{pmatrix}0&1&0\\(\lambda-1)(\lambda+2)&0&0\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{12}}\begin{pmatrix}(\lambda-1)(\lambda+2)&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}$$

故 A 的初等因子为 $\lambda-1,\lambda-1,\lambda+2$ 。

特别地，对角矩阵

$$\begin{bmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{bmatrix}$$

的初等因子为 $\lambda-a_1,\lambda-a_2,\cdots,\lambda-a_n$.

三、求方阵的Jordan标准形

定理 设n阶方阵A的初等因子为

$$(\lambda-a_1)^{m_1},(\lambda-a_2)^{m_2},\dots,(\lambda-a_s)^{m_s}$$

则A的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_s\end{bmatrix}$$

其中

$$J_i=\begin{bmatrix}a_i&1&&&\\&a_i&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&a_i\end{bmatrix}_{m_i\times m_i}\quad(i=1,2,\dots,s)$$

例 求方阵

$$A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$$

的Jordan标准形。

解　前面已求出A的初等因子为

$$(\lambda-1)^2,\ \lambda-2$$

令

$$J_1=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad J_2=[2]$$

则A的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix}J_1&\\&J_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

例　求方阵

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\4&-2&4\end{bmatrix}$$

的Jordan标准形。

解

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-1&1&-2\\-3&\lambda+3&-6\\-2&2&\lambda-4\end{bmatrix}\xrightarrow{C_{12}}\begin{bmatrix}1&\lambda-1&-2\\\lambda+3&-3&-6\\2&-2&\lambda-4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2-(\lambda+3)R_1]{R_3-2R_1}\begin{bmatrix}1&\lambda-1&-2\\0&-\lambda^2-2\lambda&2\lambda\\0&-2\lambda&\lambda\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_2-(\lambda-1)C_1]{C_3+2C_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\lambda^2-2\lambda&2\lambda\\0&-2\lambda&\lambda\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2+2C_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\lambda^2+2\lambda&2\lambda\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2-2R_3]{(-1)C_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda(\lambda-2)&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$$

故A的初等因子为$\lambda,\lambda,\lambda-2$

令

$$J_1=[0],\ J_2=[0],\ J_3=[2]$$

则A的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix}J_1&&\\&J_2&\\&&J_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{bmatrix}$$

四、求相似变换矩阵

设方阵A的$Jordan$标准形为J,则存在可逆矩阵P使$P^{-1}AP=J$,称P为 相似变换矩阵。

例　求方阵

$$A=\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{bmatrix}$$

的Jordan标准形，并求相似变换矩阵P。

解　（1）先求$Jordan$标准形：

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-3&0&-8\\-3&\lambda+1&-6\\2&0&\lambda+5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2}\begin{bmatrix}\lambda&-(\lambda+1)&-2\\-3&\lambda+1&-6\\2&0&\lambda+5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1+C_2}\begin{bmatrix}-1&-(\lambda+1)&-2\\\lambda-2&\lambda+1&-6\\2&0&\lambda+5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2+(\lambda-2)R_1]{R_3+2R_1}\begin{bmatrix}-1 & -(\lambda+1) & -2\\ 0 & -(\lambda+1)(\lambda-3) & -2(\lambda+1)\\ 0 & -2(\lambda+1) & \lambda+1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_2-(\lambda+1)C_1]{C_3-2C_1}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -(\lambda+1)(\lambda-3) & -2(\lambda+1)\\ 0 & -2(\lambda+1) & \lambda+1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2+2C_3}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -(\lambda+1)^2 & -2(\lambda+1)\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+2R_3}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -(\lambda+1)^2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_1,(-1)R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda+1)^2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{bmatrix}$$

故A的初等因子为 $\lambda+1,(\lambda+1)^2$。

令

$$J_1=[-1],J_2=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

则A的$Jordan$标准形为

$$J=\begin{bmatrix}J_1 & \\ & J_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

（2）再求相似变换矩阵：

设所求矩阵为P，则$P^{-1}AP=J$。对P按列分块$P=[X_1,X_2,X_3]$ 于是有

$$AP=A[X_1,X_2,X_3]=[AX_1,AX_2,AX_3]$$

$$PJ=[X_1,X_2,X_3]\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$
$$=[-X_1,-X_2,X_2-X_3]$$

由 $AP=PJ$ 可得

$$AX_1=-X_1,AX_2=-X_2,AX_3=X_2-X_3$$

整理后得到三个线性方程组

$$(I+A)X_1=0 \qquad ①$$
$$(I+A)X_2=0 \qquad ②$$
$$(I+A)X_3=X_2 \qquad ③$$

下面求X_1,X_2,X_3：

齐次线性方程组①与②是相同的，可得一个基础解系：

$$\alpha_1=(0,1,0)^T,\quad \alpha_2=(-2,0,1)^T$$

可取$X_1=\alpha_1$，但不能简单地取 $X_2=\alpha_2$，这是因为如果选取不当将会使非 齐次线性方程 ③无解。由于α_1,α_2的任意线性组合都是齐次方程组①与②的解，故应取$X_2=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$使非齐次线性方程组③有解，即方程组 ③ 的系数矩阵与增广矩阵有相同的秩。

容易看出方程组③的系数矩阵$I+A$的秩为1，故应使③的增广矩阵 $[I+A,X_2]$ 的秩也为1。

由

$$[I+A,X_2]=\begin{bmatrix}4 & 0 & 8 & -2k_2\\ 3 & 0 & 6 & k_1\\ -2 & 0 & -4 & k_2\end{bmatrix}$$

容易看出只需令 $k_1=3,k_2=-2$就会使上述矩阵秩为1，于是$X_2=3\alpha_1-2\alpha_2=(4,3,-2)^T$.

再由方程组③解出 $X_3=(1,0,0)^T$，于是

$$P=[X_1,X_2,X_3]=\begin{bmatrix}0&4&1\\1&3&0\\0&-2&0\end{bmatrix}$$

此时，我们有：

$$P^{-1}AP=J=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

例 求解线性常系数齐次微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=3x_1+8x_3\\[2mm]\dfrac{dx_2}{dt}=3x_1-x_2+6x_3\\[2mm]\dfrac{dx_3}{dt}=-2x_1-5x_3\end{cases}\qquad ①$$

解 令

$$A=\begin{bmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&5\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad \frac{dX}{dt}=\begin{bmatrix}\dfrac{dx_1}{dt}\\[2mm]\dfrac{dx_1}{dt}\\[2mm]\dfrac{dx_1}{dt}\end{bmatrix}$$

则方程组①可表示成

$$\frac{dX}{dt}=AX\qquad ②$$

由上例可知

$$P^{-1}AP=J=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}0&4&1\\1&3&0\\0&-2&0\end{bmatrix}$$

作线性变换

$$X=PY$$

其中 $Y=(y_1,y_2,y_3)^T$，代入式②可得

$$\frac{dY}{dt}=P^{-1}APY=JY\qquad ③$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=-y_1 & ④\\[2mm]\dfrac{dy_2}{dt}=-y_2+y_3 & ⑤\\[2mm]\dfrac{dy_3}{dt}=-y_3 & ⑥\end{cases}$$

方程④与方程⑥的解显然是

$$y_1=k_1e^{-t},\quad y_3=k_3e^{-t}$$

这时方程⑤可表示成

$$\frac{dy_2}{dt}+y_2=k_3e^{-t}$$

其解为

$$y_2=e^{-t}(k_3t+k_2)$$

把 y_1,y_2,y_3,代入式

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&4&1\\1&3&0\\0&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4y_2+y_3\\y_1+3y_2\\-2y_2\end{bmatrix}$$

即得

$$x_1=(4k_3t+4k_2+k_3)e^{-t}$$
$$x_2=(3k_3t+3k_2+k_1)e^{-t}$$
$$x_1=(-2k_3t-2k_2)e^{-t}$$

这里 k_1,k_2,k_3 均为任意常数

五、线性变换的特征值与特征向量

定义3.6.7 设σ是数域F上的n维线性空间V的一个线性变换，若对F中的一个数λ，存在V中一个非零向量α，使得

$$\sigma(\alpha)=\lambda\alpha$$

则λ称为σ的特征值，α称为σ属于λ的一个特征向量.

取定V的一个基：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

设矩阵A为σ在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵，即有

$$\sigma[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=[\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]A$$

则我们有如下结论：

定理：设矩阵A为σ在基：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵，则矩阵$A$与线性变换$\sigma$有相同的特征值，且矩阵$A$属于特征值$\lambda$的特征向量$X$是线性变换$\sigma$属于特征值$\lambda$的特征向量$\alpha$在取定基下的坐标.

注：求线性变换的特征值和特征向量就可以转化为求矩阵的特征值和特征向量。

定理的证明：设α是σ属于λ的特征向量，即

$$\sigma(\alpha)=\lambda\alpha(\alpha\neq\theta).$$

设α在该基下的坐标为$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,即

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]X$$

则
$$\begin{aligned}\sigma(\alpha)&=\sigma(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n)\\&=x_1\sigma(\alpha_1)+x_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+x_n\sigma(\alpha_n)\\&=[\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)]X\\&=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]AX\end{aligned}$$

又
$$\begin{aligned}\sigma(\alpha)&=\lambda\alpha\\&=\lambda x_1\alpha_1+\lambda x_2\alpha_2+\cdots+\lambda x_n\alpha_n\\&=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\lambda X\end{aligned}$$

由坐标的唯一性知： $AX=\lambda X$

因为$\alpha\neq\theta$，所以$X\neq\theta$.

因此λ为A的一个特征值，X是A的属于λ的特征向量.

反之，若λ为矩阵A的特征值，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$是A的属于λ的特征向量.则由A可以唯一确定线性变换σ:

$$\sigma[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]A$$

以X为坐标唯一确定一个V中的向量α:

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]X$$

且$\alpha\neq\theta$,(否则$X\neq\theta$).

$$\begin{aligned}\lambda\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\lambda X&=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]AX\\&=\sigma[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]X=\sigma(\alpha)\end{aligned}$$

因此λ为σ的特征值，α是σ的属于λ的一个特征向量

由定理5.4.1知：任意$A\in C^{n\times n}$都相似于一个$Jordan$矩阵，即一定存在可逆矩阵P(相似变换矩阵)，使得

$$P^{-1}AP=J=\begin{bmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&\ddots&\\&&&J_s\end{bmatrix}$$

且除$J_1,J_2,\cdots,J_s$的排列次序外，J由A唯一确定.

特例：当$J_1,J_2,\cdots,J_s$的阶数均为1时，J为对角矩阵，即矩阵A可相似对角化.

又由定理3.6.5知：同一线性变换在不同基下的矩阵相似. 因而选取基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$,使得

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]P$$

则线性变换σ在基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的矩阵为$P^{-1}AP=J$.

其中A为σ在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵，$P$为相似变换矩阵.

这样，线性变换σ在基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的矩阵最简单.

例5.4.8 设σ是数域F上的3维线性空间V上的一个线性变换，它在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$$

求σ的特征值和特征向量，并选取一个适当的基，使σ在该基下的矩阵为*Jordan*形矩阵.

解：由 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$

得，线性变换σ的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=-1,\ \lambda_3=5$

特征值$\lambda_1=\lambda_2=-1$对应的特征方程组为：$(-I-A)X=0$

求得它的一个基础解系为：$X_{11}=(1,0,-1)^T, X_{12}=(0,1,-1)^T$.

于是σ属于-1的两个线性无关的特征向量为：

$$\beta_{11}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]X_{11}=\alpha_1-\alpha_3,$$
$$\beta_{12}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]X_{12}=\alpha_2-\alpha_3,$$

于是σ属于-1的全部特征向量为

$$k_{11}\beta_{11}+k_{12}\beta_{12}\quad(k_{11},k_{12}\in F,\text{且不全为零})$$

特征值$\lambda_3=5$对应的特征方程组为：$(5I-A)X=0$

求得它的一个基础解系为：$X_{31}=(1,1,1)^T$.

于是σ属于5的一个线性无关的特征向量为：

$$\beta_{31}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]X_{31}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$$

于是σ属于5的全部特征向量为

$$k_{31}\beta_{31}\quad(k_{31}\in F,\text{且不为零})$$

构造矩阵$P=[X_{11}\ \ X_{12}\ \ X_{31}]$,显然$P$可逆，且

$$P^{-1}AP=diag(-1,-1,5)$$

于是选取基β_1,β_2,β_3：

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]P=[\beta_{11},\beta_{12},\beta_{31}]$$

则线性变换σ在该基下的矩阵为$diag(-1,-1,5)$.

本章内容小结

1. 特征值与特征向量

   特征值与特征向量的概念、性质，
   计算特征值与特征向量

2. 矩阵的对角化

   可对角化的判别，对角化的进行

3. 实对称矩阵用正交矩阵对角化

   实对称矩阵的特征值、特征向量的性质，
   正交相似对角化的进行

4. 矩阵的Jordan标准形

   Jordan标准形 J 及相似变换矩阵 P 的求法
   初等因子

例1 设n阶方阵A有特征值$2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 2n$。

(1) $A-I$ 可否对角化？

(2) 求 $|A-I|$。

解 (1) 设λ是A的特征值，则$\lambda-1$是$A-I$的特征值，由此知：$A-I$有特征值$1,3,5,\cdots,2n-1$。所以，$A-I$可对角化。

(2) 由(1)得

$$|A-I|=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=(2n-1)!!$$

例2 设A是n阶实对称矩阵且$A^2=A$，证明：存在n阶正交矩阵Q，使　　幂等矩阵

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}$$

证明 设λ是A的特征值，对应特征向量为X，则 $AX=\lambda X$。由此得

$$A(\lambda X)=A(AX)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 X = A^2 X = AX = \lambda X$$

$$\Rightarrow (\lambda^2-\lambda)X=\theta$$

因 $X\neq\theta$，故 $\lambda^2-\lambda=0$。由此得

$$\lambda=0 \quad 或 \quad \lambda=1$$

设 $\eta_1,\cdots,\eta_s$是A对应0的极大标准正交特征向量组，$\xi_1,\cdots,\xi_t$是A对应1的极大标准正交特征向量组。因A是实对称矩阵，可对角化，所以A应有n个标准正交的特征向量。于是，$s+t=n$。

令 $Q=[\xi_1,\cdots,\xi_t,\eta_1,\cdots,\eta_s]$，则$Q$是正交矩阵且

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}$$

例3 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$$

已知A有3个线性无关的特征向量，2是A的二重特征值。试求可逆矩阵P，使$P^{-1}AP$为对角矩阵。

解 因为A是3阶方阵，有3个线性无关的特征向量，故A可对角化。 这就要求A的特征值2的几何重数等于其代数重数2，亦即要求齐次方程组$(2I-A)X=0$的基础解系包含两个解向量。于是，只需使

$$秩(2I-A)=1$$

因为

$$2I-A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&x-2&-x-y\\0&0&0\end{pmatrix}$$

故解得 $x=2,\ y=-2$。

因 $|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$，故$A$的特征值为2（二重）和6。

对 $\lambda=2$，解 $(2I-A)X=0$ 得基础解系

$$X_1=(1,-1,0)^T,\quad X_2=(1,0,1)^T$$

对 $\lambda=6$，解 $(6I-A)X=0$ 得基础解系

$$X_3=(1,-2,3)^T$$

令

$$P=[X_1,X_2,X_3]=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}$$

例4 某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将 $\frac{1}{6}$ 的熟练工支援其它生产部门，产生的缺额由新招收的非熟练工补齐。假设新、老非熟练工经过培训与实践，到年底考核时有 $\frac{2}{5}$ 的人成为熟练工。设第n年一月份统计的熟练工与非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n，

（1）求矩阵 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 的关系；

（2）当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ 时，求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$。

解 （1）根据已知条件，

$$x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right) = \frac{9}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n$$

$$y_{n+1} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n + y_n\right) = \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n$$

由此得

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

（2）令 $A = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = A^n\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

下面求 A^n：

因为 $|\lambda I - A| = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{2})$，故 A的特征值为1和 $\frac{1}{2}$。

对 $\lambda = 1$，解 $(I - A)X = 0$ 得基础解系

$$X_1 = (4,\ 1)^T$$

对 $\lambda = \frac{1}{2}$，解 $(\frac{1}{2}I - A)X = 0$ 得基础解系

$$X_2 = (-1,\ 1)^T$$

令

$$P = [X_1 \quad X_2] = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

于是

$$A^n = P\begin{pmatrix} 1 & \\ & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & \\ & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+\left(\frac{1}{2}\right)^n & 4-4\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

由此得

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4+\left(\frac{1}{2}\right)^n & 4-4\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8-3\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

作业　习题五(P265):

40(1)(2)

(40-45题均可作为练习)