第三章　线性空间与线性变换

¡ 3.4　线性空间、基、维数和坐标

线性空间是线性代数最基本的概念之一，也是一个抽象的概念，它是向量空间概念的推广.

线性空间是为了解决实际问题而引入的，它是某一类事物从量的方面的一个抽象，即把实际问题看作线性空间，进而通过研究线性空间来解决实际问题.

一、数域

二、线性空间的定义

三、 线性空间的基、维数与坐标

四、 基变换与坐标变换

一、数域

定义3.1.1 设 F 是数的集合，若其满足

（1） $0,1 \in F$

（2）对 F中任意两个 数a,b，总有

$$a+b, a-b, a ¡ b, a ¡ b (b \neq 0) \in F$$

则称 F 是一个数域。

条件（2）称为F对数的加、减、乘、除四种运算封闭。

易证：

（1）自然数集 N 与整数集 Z 不是数域。

（2）有理数集 Q，实数集 R，复数集 C 是数域，分别称为有理数域，实数域，复数域。

（3）Q 是最小的数域，任意数域包含 Q。

(4) 除 Q、R、C 以外，还有许多其它的数域。

$Q(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in Q\}$构成一个数域.

设 F 是数域，分量取自 F 的向量称为F上的向量，F上全部 n 元向量的集合记为F^n .同理，元素取自 F 的矩阵称为 F 上的矩阵，F上全部 $m \times n$矩阵的集合记为 $F^{m\times n}$.

$$F^n=\{(a_1,\cdots,a_n) \mid a_i \in F, i=1,\cdots,n\}$$

$$F^{m\times n}=\{[a_{ij}]_{m\times n} \mid a_{ij} \in F, i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\}$$

$$F[x]=\{\underbrace{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}_{x\text{的一元多项式}} \mid a_i \in F,\ i=0,1,\cdots,n;\ n=0,1,2,\cdots\}$$

$$F[x]_n=\{f(x) \mid f(x) \in F[x],\ f(x)\text{的次数小于}n,\text{或}f(x)\equiv 0\}$$

$$C[a,b]=\{f(x) \mid f(x)\text{是闭区间 }[a,b]\text{上的连续函数}\}$$

在数学研究的对象中,有很多类型的集合,可以在其中定义加法运算和由给定数域中的数与集合的元素之间定义数乘运算,使集合对两种运算封闭并且满足与向量的线性运算性质2.1.1相同的八条规则.(P83)

向量空间

例如：n维向量的集合及其线性运算;

矩阵空间 $m\times n$矩阵的集合及其线性运算(P23).

不关心具体的对象和两种运算的具体含义,将集合对两种运算的封闭性及运算满足的规则抽象出来,就形成了抽象的线性空间的概念.

二、线性空间的定义

非空集合V上的两种运算封闭!

定义3.4.1 设V是一个非空集合，F为一个数域．在V中定义了两种运算，一种运算称为**加法**：如果对于任意两个元素 $\alpha,\beta\in V$，总有唯一的一个元素$\gamma\in V$与之对应，称为元素α与β的**和**，记作

$$\gamma=\alpha+\beta$$

另一种运算称为**数量乘法**：若对于任一数$k\in F$与任一元素$\alpha\in V$，总有唯一的一个元素$\delta\in V$与之对应，称为k与α的**数量乘积**，记作

$$\delta=k\alpha$$

如果上述的两种运算满足以下八条运算规律，那么 V 就称为数域F上的线性空间：

对 $\alpha,\beta,\gamma\in V$，$\lambda,\mu\in F$，总有

加法满足下面四条规则：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) 在V中存在零元素θ，对任何$\alpha\in V$,都有
$$\alpha+\theta=\alpha;$$

(4) 对任何$\alpha\in V$,都存在α的负元素 $-\alpha\in V$,使
$$\alpha+(-\alpha)=\theta;$$

数量乘法满足下面两条规则：

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$;

数量乘法与加法满足下面两条规则：

(7) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$;

(8) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$。

说明

1．凡满足以上八条规律的加法及数乘运算，称为线性运算．

涵义更广泛

2．线性空间中的元素概称为向量．

3．线性空间中的向量不一定是有序数组．

4．判别线性空间的方法：一个非空集合，对于定义的加法和数乘运算不封闭，或者运算不满足八条规则的任一条，则此集合就不能构成线性空间．

线性空间的判定方法

（1）一个非空集合，如果定义的加法和数乘运算是通常的实数间的加、乘运算，则只需检验对运算的封闭性．(此时八条自然成立）

例3.4.1 F^n对向量的加法及数与向量的数量乘法，构成数域F上的线性空间，称为向量空间。例如实向量空间 $\mathbf{R}^n$，复向量空间$\mathbf{C}^n$，零空间$\{\theta\}$。

平面空间就是R2，立体空间就是R3。

例3.4.2 $F^{m\times n}$对矩阵的加法及数与矩阵的数量乘法，构成数域F上的线性空间，称为矩阵空间。例如实矩阵空间$R^{m\times n}$。

$\because A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}, \qquad \lambda A_{m\times n}=D_{m\times n},$

$\therefore F^{m\times n}$是一个线性空间.

例3.1.2 设 $A\in F^{m\times n}$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 的全部解向量的集合构成 F 上的向量空间，称之为齐次线性方程组 $AX=0$ 的解空间，也可称之为矩阵 A 的零空间，记为 $N(A)$. 显然 $N(A)\subseteq F^n$.

而非齐次线性方程组 $AX=b$ 的所有解向量在上述运算下，不能构成F上的线性空间.

例3.4.3 $F[x]$对多项式的加法及数与多项式的乘法，构成数域F上的线性空间，称为多项式空间。特别地，$F[x]_n$对多项式的加法及数与多项式的乘法，也构成数域F上的线性空间，也称为多项式空间。

通常的多项式加法、数与多项式的乘法两种运算满足线性运算规律.

$$(a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)+(b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0)$$
$$=(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\in F[x]_n$$
$$\lambda(a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)$$
$$=(\lambda a_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(\lambda a_1)x+(\lambda a_0)\in F[x]_n$$

$F[x]_n$ 对运算封闭.

例 n次多项式的全体

$$Q[x]_n=\{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0 \mid a_n,\cdots,a_0\in R \text{且} a_n\neq 0\}$$

对于通常的多项式加法和乘数运算不构成线性空间.

$$0(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)=0x^n+\cdots+0x+0\notin Q[x]_n$$

$Q[x]_n$ 对运算不封闭.

例3.4.4 $C[a,b]$ 对函数的加法及实数与函数的乘法，构成实数域 R 上的线性空间，称为函数空间。

例 全体实函数：按函数的加法和函数的数量乘法也构成一个实数域上的线性空间.

例 令

$$V=\{(a_1,\cdots,a_n)\in R^n \mid a_1+\cdots+a_n=1\}$$

则 V 不构成向量空间。

(2) 一个集合，如果定义的加法和数乘运算不是通常的实数间的加、乘运算，则必需检验是否满足八条线性运算规律.

例3.4.5 正实数的全体，记作R^+，在其中定义加法及乘数运算为

$$a\oplus b=ab,\quad \lambda\circ a=a^\lambda,(\lambda\in R,a,b\in R^+)$$

验证 R^+ 对上述加法与乘数运算构成线性空间.

证明 $\forall a,b\in R^+,\Rightarrow a\oplus b=ab\in R^+;$

$\forall \lambda\in R,a\in R^+,\Rightarrow \lambda\circ a=a^\lambda\in R^+.$

所以对定义的加法与数乘运算封闭.

下面一一验证八条线性运算规律：

(1) $a\oplus b=ab=ba=b\oplus a;$

(2) $(a\oplus b)\oplus c=(ab)\oplus c=(ab)c=a\oplus(b\oplus c);$

(3) R^+中存在$\boxed{\text{零元素 }1}$，对任何$a\in R^+$，有
$a\oplus 1=a\cdot 1=a;$

(4) $\forall a\in R^+$，有$\boxed{\text{负元素 }a^{-1}}\in R^+$，使
$a\oplus a^{-1}=a\cdot a^{-1}=1;$

(5) $1\circ a=a^1=a;$

(6) $\lambda\circ(\mu\circ a)=\lambda\circ a^\mu=(a^\mu)^\lambda=a^{\lambda\mu}=(\lambda\mu)\circ a;$

(7) $(\lambda+\mu)\circ a = a^{\lambda+\mu} = a^{\lambda}a^{\mu} = a^{\lambda}\oplus a^{\mu}$

$= \lambda\circ a\oplus\mu\circ a;$

(8) $\lambda\circ(a\oplus b) = \lambda\circ(ab) = (ab)^{\lambda} = a^{\lambda}b^{\lambda}$

$= a^{\lambda}\oplus b^{\lambda} = \lambda\circ a\oplus\lambda\circ b.$

所以 R^{+} 对所定义的运算构成线性空间.

注：线性空间的加法与数量乘法是表达向量之间基本关系的两种抽象的代数运算。其研究对象非常广泛，随着所考虑对象的不同，两种代数运算的定义一般也不同.

线性空间的一些简单性质

1. 零向量是唯一的.
2. 负向量是唯一的.
3. $0\alpha=\theta$; $(-1)\alpha=-\alpha$; $\lambda\theta=\theta$.
4. 如果$\lambda\alpha=\theta$,则$\lambda=0$或$\alpha=\theta$.

1. 零向量是唯一的

证明 假设 θ_1,θ_2 是线性空间V中的两个零元素，则对任何 $\alpha\in V$，有

$$\alpha+\theta_1=\alpha,\ \alpha+\theta_2=\alpha$$

由于 $\theta_1,\theta_2\in V$，所以

$$\theta_2+\theta_1=\theta_2,\quad \theta_1+\theta_2=\theta_1$$

$$\Rightarrow\ \theta_1=\theta_1+\theta_2=\theta_2+\theta_1=\theta_2$$

2. 负向量是唯一的

证明 假设 α 有两个负元素 β 与 γ，那么

$$\alpha+\beta=\theta,\quad \alpha+\gamma=\theta$$

则有

$$\beta=\beta+\theta=\beta+(\alpha+\gamma)$$
$$=(\beta+\alpha)+\gamma$$
$$=\theta+\gamma=\gamma$$

元素 α 的负元素记为 $-\alpha$。

3. $0\alpha=\theta$; $(-1)\alpha=-\alpha$; $\lambda\theta=\theta$.

证明 $\because\ \alpha+0\alpha=1\alpha+0\alpha=(1+0)\alpha=1\alpha=\alpha$

$\therefore\ 0\alpha=\theta$（零向量的唯一性）

$\because\ \alpha+(-1)\alpha=1\alpha+(-1)\alpha=[1+(-1)]\alpha=0\alpha=\theta$

$\therefore\ (-1)\alpha=-\alpha$（负向量的唯一性）

$$\lambda\theta=\lambda[\alpha+(-1)\alpha]=\lambda\alpha+(-\lambda)\alpha$$
$$=[\lambda+(-\lambda)]\alpha=0\alpha$$
$$=\theta$$

4. 如果$\lambda\alpha=\theta$,则$\lambda=0$或$\alpha=\theta$.

证明 若 $\lambda=0$，则有 $\lambda\alpha=0\alpha=\theta$。

若 $\lambda\neq0$，那么 $\frac{1}{\lambda}(\lambda\alpha)=\frac{1}{\lambda}\cdot\theta=\theta$。

又 $\frac{1}{\lambda}(\lambda\alpha)=\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda\cdot\alpha=\alpha$，故 $\alpha=\theta$。

三、 线性空间的基、维数与坐标

为了便于利用第二章关于向量组线性相关性的概念与结论，以后把线性空间的元素也称为向量。

已知在 $\mathbf{R}^n$ 中，线性无关的向量组最多由 n 个向量组成，而任意 $n+1$ 个向量都是线性相关的。并且 $\mathbf{R}^n$ 中任一个向量均可由（线性无关的）基本向量组$\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$线性表出，而表出的系数就是该向量的分量。

问题

1. 在线性空间 V 中，最多能有多少线性无关的向量？ --- 维数

2. 线性空间的向量可否由其中的一组线性无关的向量线性表示? --- 基

3. 向量由基表示的系数 ---- 坐标

注意 第二章第1,2节的概念与结论均可推广到线性空间中。

1. 线性空间的基、维数

定义3.4.2 如果能从线性空间 V 中找到有限个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，使 V 中任一向量均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出，则称 V 是有限维线性空间。否则，就称 V 是无限维线性空间。

即：当一个线性空间存在任意多个线性无关向量时，就为无限维线性空间.

结论 线性空间 V 是有限维的充要条件是 V 中线性无关向量的最大个数是有限的。

例3.4.6 向量空间 F^n，矩阵空间 $F^{m\times n}$，多项式空间 $F[x]_n$ 都是有限维的，而 $F[x]$ 与函数空间 $C[a,b]$ 都是无限维的。

证明 令

$$\varepsilon_1 = (1,0,\cdots,0), \varepsilon_2 = (0,1,\cdots,0), \cdots, \varepsilon_n = (0,\cdots,0,1)$$

则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n \in F^n$。对任意 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in F^n$ 有

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$$

所以 F^n 是有限维的。

令 I_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n)$ 表示 (i,j)-元为1、其余元素均为零的 $m\times n$ 矩阵，则这些矩阵均在 $F^{m\times n}$ 中。对任意 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 有 $A = \sum_{i,j} a_{ij} I_{ij}$，故 $F^{m\times n}$ 是有限维的。

令

$$f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2, \cdots, f_n = x^{n-1}$$

则对任意

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \in F[x]_n$$

均有

$$f(x) = a_0 f_1 + a_1 f_2 + \cdots + a_{n-1} f_n$$

所以 $F[x]_n$ 是有限维的。

对任一正整数 N，考虑 $F[x]$ 中的 N 个多项式 $1, x, x^2, \cdots, x^{N-1}$，显然对于任意 N 个不全为零的数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{N-1}$，多项式

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{N-1}x^{N-1}$$

不是零多项式，即 $a_0 + a_1x + \cdots + a_{N-1}x^{N-1} \neq 0$，所以 $1, x, x^2, \cdots, x^{N-1}$ 线性无关。于是 $F[x]$ 是无限维的。

同理可证，$C[a,b]$ 也是无限维的。

注：**无限维空间是一个专门研究对象，它与有限维空间有较大差别，我们这里只讨论有限维空间.**

定义3.4.3 设 V 是数域 F 上的线性空间，如果 V 中存在 m 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，满足：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关；

(2) V 中任一向量 α 均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，即存在 m 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_m \in F$，使

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m$$ 极大无关组

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是线性空间 V 的一个基。

结论 有限维线性空间一定存在基，并且每个基包含的向量个数相同。

定义3.4.4 有限维线性空间 V 的任一个基所包含的向量个数称为 V 的**维数**，记为 维(V)或 $\dim(V)$。

维数为 n 的线性空间称为 n 维线性空间，记作 V_n.

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V_n 的一个基，则 V_n 可表示为

$$V_n = \{\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \mid x_1,x_2,\cdots,x_n \in F\}$$

例3.2.1 设 F 是数域，在向量空间 F^n 中考虑 n 元基本向量组

$$\varepsilon_1 = (1,0,\cdots,0), \varepsilon_2 = (0,1,0,\cdots,0), \cdots, \varepsilon_n = (0,0,\cdots,1)$$

因为对任意 $\alpha = (a_1,a_2,\cdots,a_n) \in F^n$，均有

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$$

且 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关，故 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是向量空间 F^n 的一组基（称之为 F^n 的**自然基**），同时维$(F^n) = n$。

例 所有二阶实矩阵组成的集合 V，对于矩阵的加法和数量乘法，构成实数域 R 上的一个线性空间。对于 V 中的矩阵

$$I_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

有

$$k_1 I_{11} + k_2 I_{12} + k_3 I_{21} + k_4 I_{22} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix},$$

因此

$$k_1 I_{11} + k_2 I_{12} + k_3 I_{21} + k_4 I_{22} = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow \qquad k_1 = k_2 = k_3 = k_3 = 0,$$

即 $I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}$ 线性无关.

对于任意二阶实矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V,$$

有

$$A = a_{11} I_{11} + a_{12} I_{12} + a_{21} I_{21} + a_{22} I_{22}$$

因此 $I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}$ 为 V 的一组基 .

$\therefore \dim(V) = 4.$

例3.4.7

F^n 的维数是 n,	F^n 有基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$	自然基
$F^{m\times n}$ 的维数是 $m\times n$	$F^{m\times n}$ 有基 $I_{11}, I_{12}, \cdots, I_{mn}$,	
$F_n[x]$ 的维数是 n.	$F[x]_n$ 有基 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$,	

定理3.4.1 n 维线性空间 V 中任意 n 个线性无关的向量均构成 V 的基。 基不唯一

2. 向量关于给定基的坐标

定义3.2.2 (3.4.5) 设 $\alpha_1, \alpha_2,$ ¡ $, \alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一个基，则对于任一向量 $\alpha \in V$，总有且仅有一组有序数组 $x_1, x_2,$ ¡ $, x_n$，使

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$

称有序数组 $x_1, x_2,$ ¡ $, x_n$ 为向量 α 关于基 $\alpha_1, \alpha_2,$ ¡ $, \alpha_n$ 的坐标，记为

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 或 } (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

例3.2.7 已知 $\mathbf{R}^3$ 中的三个向量

$$\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,1,0), \alpha_3 = (1,0,0)$$

（1）证明：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基；

（2）求向量 $\alpha = (1,2,3)$ 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的坐标

解 （1） 只须证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关；

（2） 设

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$$

把 α，α_1，α_2，α_3 均表示为列向量，则有

$$[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

故 α 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的坐标为 （3, -1, -1）。

例3.4.8

线性空间 F^n 中任一向量 $\alpha = (a_1, a_2,$ ¡ $, a_n)$ 关于自然基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2,$ ¡ $, \varepsilon_n$ 的坐标为 $(a_1, a_2,$ ¡ $, a_n)^T$。

又 $e_1 = (1,1,\cdots,1), e_2 = (0,1,1,\cdots,1), \cdots, e_n = (0,0,\cdots 0,1)$

也 F^n 中的 n 个线性无关向量，从而也是 F^n 的一组基.

对于任意向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in F^n$，有

$$\alpha = a_1e_1 + (a_2 - a_1)e_2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})e_n$$

因此 α 在基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 下的坐标为

$$(a_1, a_2 - a_1, \cdots, a_n - a_{n-1})^T.$$

可见：坐标与给定基有 关!

线性空间 $F^{m¡n}$ 中任一矩阵 $A = [a_{ij}]_{m¡n}$ 关于自然基 $I_{11},$ ¡ $, I_{1n},$ ¡ $, I_{m1},$ ¡ $, I_{mn}$ 的坐标为 $(a_{11},$ ¡ $, a_{1n},$ ¡ $, a_{m1},$ ¡ $, a_{mn})^T$。

线性空间 $F[x]_n$ 中任一多项式 $f(x) = a_0 + a_1x +$ ¡ $+ a_{n-1}x^{n-1}$ 关于自然基 $1, x,$ ¡ $, x^{n-1}$ 的坐标为 $(a_0, a_1,$ ¡ $, a_{n-1})^T$。

如果在 $F[x]_n$ 中取另外一组基：

$$\varepsilon_1' = 1, \ \varepsilon_2' = (x-a), \cdots, \ \varepsilon_n' = (x-a)^{n-1}$$

则按泰勒展开式，有

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

线性空间 $F[x]_n$ 中任一多项式 $f(x) = a_0 + a_1x +$ ¡ $+ a_{n-1}x^{n-1}$ 关于基 $\varepsilon_1' = 1, \ \varepsilon_2' = (x-a), \cdots, \ \varepsilon_n' = (x-a)^{n-1}$

的坐标为：

$$\left(f(a), f'(a), \cdots, \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\right)^T$$

注意 线性空间 V 的任一向量在不同的基下所对应的坐标一般不同；一个向量在同一个基下对应的坐标是唯一的。

对一般的线性空间V，取定一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 后，V 中向量 α 与其关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的坐标 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 一一对应。可表示为

$$\alpha \leftrightarrow (a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

在同一组基下，设 $\beta \leftrightarrow (b_1,b_2,\cdots,b_n)$

则有 $\alpha+\beta \leftrightarrow (a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$

$$k\alpha \leftrightarrow (ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

通过坐标，一般的线性空间中抽象元素之间的抽象运算就可转化为具体的n 元向量的线性运算。

因此一个n 维线性空间V 可看作是一个向量空间 F^n.

$V \leftrightarrow F^n$ 同构

四、基变换与坐标变换

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 n 维线性空间 V 的两个基。设

$$\begin{cases}\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\ \qquad\vdots \\ \beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n\end{cases}$$

令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

注：A的每一列元素分别是基$\beta_1,\cdots,\beta_n$在基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的坐标.

称 A 为由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵。

$$\begin{cases}\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\ \qquad\vdots \\ \beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n\end{cases} \qquad (1)$$

上式可形式地记为

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n] = [\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]A \qquad (2)$$

称式(1)或(2)为基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的基变换公式。 旧基 新基

注：一个基到自身的过渡矩阵是单位矩阵I.

例 已知 R^3的一组基

$$\beta_1 = (1,2,1), \beta_2 = (1,-1,0), \beta_3 = (1,0,-1)$$

求 R^3的自然基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$到基 β_1,β_2,β_3的过渡矩阵。

解 因为

$$\beta_1 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3$$
$$\beta_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$
$$\beta_3 = \varepsilon_1 \qquad - \varepsilon_3$$

故

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3] = [\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]A$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

是自然基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵。

过渡矩阵的性质：

（1）过渡矩阵**A**是唯一确定的；

因为过渡矩阵A的每一列都是新基中的向量关于旧基的坐标.

（2）过渡矩阵是可逆矩阵；

可以证明形式表达式(2)可以按普通矩阵那样运算。

若设 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n] = [\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]B$

代入 $[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n] = [\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]A \qquad (2)$

有 $[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n] = [\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]BA$

于是：$BA = I$

即A是可逆的，且$B = A^{-1}$.

（3）若A是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的过渡矩阵，则 A^{-1}是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 到 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的过渡矩阵；

（4）基变换公式可按普通矩阵那样进行计算。

对于线性空间V，任取 $\alpha\in V$，设 α 关于旧基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的坐标（对应地称之为旧坐标）为 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T$，α 关于新基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的新坐标为 $(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T$，并且旧基到新基的基变换公式为 $[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]A$，则有

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m$$

和

$$\alpha=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_m\beta_m$$

把上面两式形式地改写为

$$\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{bmatrix},\ \alpha=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix}$$

将基变换公式代入上面第二式得

$$\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]A\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix}$$

对比上面的式子，根据坐标的唯一性，可得

$$A\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{bmatrix}$$

上式表明，通过过渡矩阵，旧坐标和新坐标可互相转换。

定理3.4.2(3.2.3) 设 V 是 n 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 V 的两个基，A 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵。任取 $\gamma\in V$，设 γ 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的坐标分别为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$和$(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，则

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\quad(\text{或}\quad A\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix})$$

上式称为由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的坐标变换公式。

例 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两组基

$\alpha_1=(1,1,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(0,0,1)^T$

$\beta_1=(1,0,1)^T$，$\beta_2=(0,1,-1)^T$，$\beta_3=(1,2,0)^T$

(1) 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵；

(2) 求 $\alpha=(1,0,0)^T$ 关于基 β_1,β_2,β_3 的坐标。

解（1）（法一）设 A为所求过渡矩阵，则

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]A$$

把 β_i，α_i 均写成列向量，则 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 是3阶可逆矩阵。于是

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}$$

（法二）取 $\boldsymbol{R}^3$ 的自然基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$，易得

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\boldsymbol{P}$$

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\boldsymbol{Q}$$

其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\because \qquad [\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\therefore \qquad [\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}$$

由此得所求过渡矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}$$

（2）设 $\alpha=y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_3\beta_3$

$$\because \qquad [\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\boldsymbol{Q}$$

$$\alpha=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\therefore \qquad \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

即 α 关于 β_1,β_2,β_3 的坐标为 $(2,2,-1)$。

例3.2.8 已知向量空间 $\mathbf{R}^3$ 的一个基

$$\beta_1=(0,1,1),\beta_2=(1,0,1),\beta_3=(1,1,0)$$

求向量 $\alpha=(2,-1,3)$ 关于基 β_1,β_2,β_3 的坐标。

解（法一）令 $\alpha=x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3$，则

$$\begin{cases}x_2+x_3=2\\x_1+x_3=-1\\x_1+x_2=3\end{cases}$$

解得 $x_1=0,x_2=3,x_3=-1$。所以，α 关于基 β_1,β_2,β_3 的坐标为 $(0,3,-1)$。

（法二）取 $\mathbf{R}^3$ 的自然基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$，容易得出

$$\beta_1=\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

$$\beta_2=\varepsilon_1+\varepsilon_3$$

$$\beta_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2$$

写成矩阵形式有

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

因此，从基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

已知 α 关于自然基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的坐标为 $(2,-1,3)$，所以，根据坐标变换公式，α 关于基 β_1,β_2,β_3 的坐标为

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$$

例3.4.9 在 $R^{2\times 2}$ 中证明矩阵

$$A_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix},A_3=\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix},A_4=\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

构成一个基，并求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$$

关于这个基的坐标。

解 已知矩阵空间 $R^{2\times 2}$ 的维数为4，根据定理3.4.1，只需证 A_1,A_2,A_3,A_4 线性无关。

令 $k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+k_4A_4=0$，则有

$$k_1\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix}k_1+k_2+k_3-k_4&k_1+k_2-k_3+k_4\\k_1-k_2+k_3+k_4&k_1-k_2-k_3-k_4\end{bmatrix}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3-k_4=0\\k_1+k_2-k_3+k_4=0\\k_1-k_2+k_3+k_4=0\\k_1-k_2-k_3-k_4=0\end{cases}\qquad(**)$$

方程组(**)只有零解，即

$$k_1=k_2=k_3=k_4=0$$

所以 A_1,A_2,A_3,A_4 线性无关。

令 $A=x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3+x_4A_4$，则有

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3-x_4=1\\x_1+x_2-x_3+x_4=2\\x_1-x_2+x_3+x_4=3\\x_1-x_2-x_3-x_4=4\end{cases}$$

其解为 $x_1=\dfrac{5}{2},\quad x_2=-1,\quad x_3=-\dfrac{1}{2},\quad x_4=0.$

所以 $A=\dfrac{5}{2}A_1-A_2-\dfrac{1}{2}A_3.\quad (\dfrac{5}{2},-1,-\dfrac{1}{2},0)^T.$

例3.4.10 在 $F[x]_4$ 中，求自然基到基

$g_0=1,g_1=1+x,g_2=1+x+x^2,g_3=1+x+x^2+x^3$

的过渡矩阵。已知多项式 $h(x)$ 关于基 g_0,g_1,g_2,g_3 的坐标为(7, 0, 8, -2)，求 $h(x)$ 关于自然基的坐标。

解 取 $F[x]_4$ 的自然基

$$f_0=1,\ f_1=x,\ f_2=x^2,\ f_3=x^3$$

则有

$$\begin{cases}g_0=f_0\\g_1=f_0+f_1\\g_2=f_0+f_1+f_2\\g_3=f_0+f_1+f_2+f_3\end{cases}$$

由此得

$$[g_0,g_1,g_2,g_3]=[f_0,f_1,f_2,f_3]\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

所以，基 f_0,f_1,f_2,f_3 到基 g_0,g_1,g_2,g_3 的过渡矩阵为

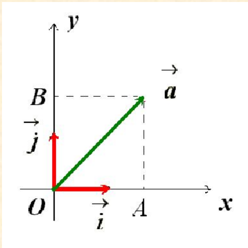
$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

设 $h(x)$ 关于基 f_0,f_1,f_2,f_3 的坐标为 (x_1,x_2,x_3,x_4)，则

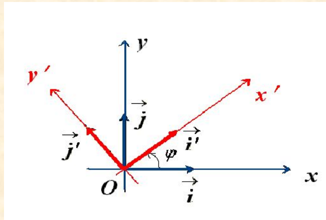
$$\begin{bmatrix}7\\0\\8\\-2\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

于是 $(x_1x_2x_3x_4)^T=(13,6,6,-2)^T$

例 把 $\mathbf{R}^2$视为建立了直角坐标系Oxy的平面上全体有向线段的集合，则 $\mathbf{R}^2$即为平面空间。此时，$\mathbf{R}^2$的自然基 (1,0)，(0,1) 分别对应 x 轴和 y轴上两条起点在原点O、方向指向坐标轴正向、长为1的有向线段 $\vec{i}$ 和 $\vec{j}$ 。由于 $\vec{i}$ 和 $\vec{j}$ 不共线，且平面上任一有向线段 $\vec{a}$ 均可由 $\vec{i}$ 和 $\vec{j}$ 线性表出，所以 $\vec{i}$ 、$\vec{j}$ 构成平面空间 $\mathbf{R}^2$的一个基。



把坐标系逆时针旋转角，得到新坐标系 $Ox'y'$。在新坐标轴上也取两条起点在原点O、方向指向新坐标轴正向、长为1的有向线段 $\vec{i}'$ 和 $\vec{j}'$，则 $\vec{i}'$、$\vec{j}'$也构成平面空间$\mathbf{R}^2$的一个基。



不难得到，平面空间$\mathbf{R}^2$的这两个基 $\vec{i}'$、$\vec{j}'$和 $\vec{i}$、$\vec{j}$之间具有下列关系：

$$\begin{cases} \vec{i}' = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi \\ \vec{j}' = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi \end{cases}$$

上式可改写为

$$[\vec{i}', \vec{j}'] = [\vec{i}, \vec{j}]\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

这就是从基 $\vec{i}$ 、$\vec{j}$ 到基 $\vec{i}'$ 、$\vec{j}'$ 的基变换公式，而

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

即为从基 $\vec{i}$ 、$\vec{j}$ 到基 $\vec{i}'$、$\vec{j}'$ 的过渡矩阵。

任取平面上的一条有向线段 $\vec{a}$ ，设

$$\vec{a} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = \vec{a} = x'\,\vec{i}' + y'\,\vec{j}'$$

则由坐标变换公式得

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

上式即为平面直角坐标系的转轴公式。

小结

线性空间是二维、三维几何空间及n维向量空间的推广，它在理论上具有高度的概括性.

线性空间的元素统称为¡向量¡，但它可以是通常的向量，也可以是矩阵、多项式、函数等.

线性空间 $\begin{cases} \text{是一个集合} \\ \text{对所定义的加法及数乘运算封闭} \\ \text{所定义的加法及数乘符合线性运算规则} \end{cases}$

1．线性空间的基与维数；

2．线性空间的元素在给定基下的坐标；

坐标：（1）把抽象的向量与具体的数组向量联系起来；

（2）把抽象的线性运算与数组向量的线性运算联系起来.

作业　　习题三(P162)：

1(3)(4), 5, 6, 7, 8, 38, 39, 49