07 数学分析 B 第一学期期末试题(B)解答(2008.1)

一. 1. $-\dfrac{f'(\frac{1}{x})}{x^2 f(\frac{1}{x})}dx$ (没有 dx 扣 1 分)

2. 2

3. $y = 3ex - 2e^2$

4. -16

5. 4

6. $y'' + 2y' + y = 0$

7. $\dfrac{3\pi}{8}$

8. $1,\ -2,\ 4$ (1 分, 1 分, 1 分)

9. $\dfrac{128}{5}\pi$

10. $y = Ce^{-2x^2} + \dfrac{1}{2}$ (没写 y 扣 1 分) (只写出通解公式没算出积分给 1 分)

二. $$\int_0^{\pi}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\frac{\pi}{2})\sin x\,dx \quad ……….(2 分)$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)d\cos x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\frac{\pi}{2})d\cos x \quad ………….(3 分)$$

$$= -(\frac{\pi}{2}-x)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx - (x-\frac{\pi}{2})\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx \quad ………..(6 分)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2} - 1 = \pi - 2 \quad …….……………(8 分)$$

三. $$f'(x) = \frac{2(2x-2)}{3(x^2-2x)^{\frac{1}{3}}} = \frac{4(x-1)}{3(x^2-2x)^{\frac{1}{3}}} \quad …………………………(2 分)$$

令 $f'(x)=0$， 得 $x=1$

当 $x=0$，$x=2$ 时，$f'(x)$ 不存在 …………………………….(5 分)

$f(0)=0$ $f(2)=0$ $f(1)=1$

$f(3)=\sqrt[3]{9}$ $f(-2)=4$

$M=4$ $m=0$ …………………………….(8 分)

四. $f'(x)=ax^2-4x$ .. …………………………(1 分)

$f''(x)=2ax-4$ …………………………..(2 分)

$f''(-1)=-2a-4=0 \quad a=-2$ …………………………..(.4 分)

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x^2-4x)dx=-\frac{2}{3}x^3-2x^2+C$ ……………(6 分)

由 $f(-1)=\frac{2}{3}-2+C=\frac{8}{3}$ 得 $C=4$

$f(x)=-\frac{2}{3}x^3-2x^2+4$ ……………………………(8 分)

五. 设 t 时刻物体表面温度为 $T=T(t)$，则

$\frac{dT}{dt}=-k(T-20)$ ……………………………(2 分)

$\frac{dT}{T-20}=-k\ d$ …………………………….(3 分)

$\ln|T-20|=-kt+C_1$

$T=20+Ce^{-kt}$ ……………………………(4 分)

由 $T(0)=100$ 得 $C=80$

$T=20+80e^{-kt}$ ……………………………(6 分)

由 $T(20)=60$ 得 $e^{-k}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{20}}$

$T=20+\frac{80}{2^{\frac{t}{20}}}$ ….…………………………(8 分)

六. $x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt = xe^x - f(x)$ …………………………(1 分)

$\int_0^x f(t)dt = e^x + xe^x - f'(x)$ …………………………..(2 分)

$f(x) = e^x + e^x + xe^x - f''(x)$

$f''(x) + f(x) = (2+x)e^x$ …………………………..(3 分)

$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1$ …………………………...(5 分)

$r^2 + 1 = 0 \qquad r = \pm i$ ……………………………..(7 分)

$\bar{f}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$ ……………………………..(8 分)

设 $f^*(x) = (Ax+B)e^x$ …………………………….(9 分)

代入微分方程得 $A = \frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{2}$

$f^*(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^x$ …..………………..(11 分)

通解为 $f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}(x+1)e^x$ ……………………(12 分)

由初始条件得 $C_1 = -\frac{1}{2} \quad C_2 = 0$

$f(x) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}(x+1)e^x$ ...……………………(14 分)

七. 对任意 $x \in (-\infty,+\infty)$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\Delta x) = f(0)$ …………………(2 分)

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)]$ …………………..(4 分)

$= f(x) + \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\Delta x) = f(x) + f(0)$ …….……………..(6 分)

$= f(x+0) = f(x)$ ……….……………(7 分)

故 $f(x)$ 在 x 处连续，因此在 $(-\infty,+\infty)$ 连续 ……………………….(8 分)

八. 由题设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ …………………………..(1 分)

又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{\ln(1+t^{2k})}{t}dt}{a(-\frac{1}{2}x^2)\cdot\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{\ln(1+t^{2k})}{t}dt}{-\frac{a}{4}x^4}$$ ……..………..……..(3 分)

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln(1+x^{4k})}{x^2}2x}{-ax^3}=\lim_{x\to0}\frac{2\ln(1+x^{4k})}{-ax^4}$$ ……………………(5 分)

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x^{4k}}{-ax^4}$$ ….…………………(6 分)

故 $2=-a$ $4k=4$

得 $a=-2$ $k=1$ ….……………………(8 分)

九. $\left|\int_0^a f(x)dx-af(a)\right|$

$$=\left|\int_0^a f(x)dx-\int_0^a f(a)dx\right|=\left|\int_0^a (f(x)-f(a))dx\right|$$ ……………….(2 分)

$$=\left|\int_0^a f'(\xi)(x-a)dx\right| \quad (\xi\in(0,a))$$ ……………………(4 分)

$$\le\int_0^a \left|f'(\xi)(x-a)\right|dx$$ ………………………..(5 分)

$$\le M\int_0^a |x-a|dx$$ ……..………………...(6 分)

$$=M\int_0^a (a-x)dx$$ ……..…………………(7 分)

$$=\frac{Ma^2}{2}$$ ……..……………………(8 分)