线性代数 A 期末试题样题

得分	

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^{-1}=$ ________ ；

2、 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&a&0\\0&0&a^2\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 a 满足条件________；

3、 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 均为 4 维列向量，已知 4 阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，又 $|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，则 4 阶行列式 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,2\beta_1+\beta_2|=$ ________；

4、 在 $R[x]_3$ 中定义线性变换 σ： $\sigma[f(x)]=f'(x)$，则 σ 在基 $1,1+x,x^2$ 下的矩阵为

________；

5、 已知 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{12}\\a_{31}&a_{33}&a_{32}\\a_{21}&a_{23}&a_{22}\end{pmatrix}$, 若 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$, 则 $B^{-1}=$ ________。

得分	

二（10 分）、讨论 a,b 取何值时，下列线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1-x_3=1\\x_1+ax_2+x_3=b\end{cases}$$

(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷解，并在有无穷多解时，用其导出方程组的基础解系表示方程组的通解。

得分	

三 （10 分）、设矩阵 $A = diag(1,2,-1)$，且矩阵 X 满足 $XA^* = 3X + A^{-1}$。求矩阵 X。

得分	

四（10 分）、设 $\alpha_1 = (2,1,3,1)^T, \alpha_2 = (-1,1,-3,1)^T$, $\beta_1 = (4,5,3,-1)^T$, $\beta_2 = (1,5,-3,1)^T$。令 $V_1 = L(\alpha_1,\alpha_2)$, $V_2 = L(\beta_1,\beta_2)$, 求向量空间 V_1+V_2 的一组基, 并分别求出 β_1,β_2 在这组基下的坐标。

得分	

五（10 分）、线性空间 $R^{2\times2}$ 中，由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 若 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

试求（1）基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$；（2）矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标。

得分	

六（10 分）、设 A 为一个方阵，若 α 是齐次线性方程组 $A^m X = 0$ 的解，但不是齐次线性方程组 $A^{m-1}X = 0$ 解，证明向量组 $\alpha, A\alpha, \ldots A^{m-1}\alpha$ 线性无关。

得分	

七（15 分）、已知椭圆曲线方程 $f(x,y) = 6x^2 - 6xy + 6y^2 - 12x + 9y + 1 = 0$。

(1) 求椭圆方程中二次型部分 $f_1(x,y) = 6x^2 - 6xy + 6y^2$ 的矩阵 A；

(2) 将二次型 $f_1(x,y)$ 化为标准形，并写出所用的线性替换；

(3) 将椭圆曲线 $f(x,y) = 0$ 化为 $a(X-x_0)^2 + b(Y-y_0)^2 = c$ 形式的标准形，并求出该椭圆的长轴与短轴。

得分	

八（15 分）、设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = X^T AX$ 的矩阵 A 满足 $A^2 - 2A = 0$, 且 $\alpha_1 = (0,1,1)^T$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系。

（1） 求 A 的所有特征值；

（2） 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的表达式；

（3） 若二次型 $X^T(A+kI)X$ 的规范型是 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$，求 k 的取值范围。