课程编号：A073122　　　　　北京理工大学 2013-2014 学年第一学期

线性代数 A 试题 B 卷

一、（10 分）已知 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，且 $A^{-1}XA^* = A^{-1} - A^*XB$，其中

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & 2 & 2 & \\ 8 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ -2 & -1 & 0 & \\ -4 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

求 X 。

解：

$$A^{-1}XA^* = A^{-1} - A^*XB,$$

$$XA^* = I - AA^*XB$$

$$X(A^* + |A|B) = I$$

$$|A^*| = |A|^{n-1}, \quad |A^*| = 8 \Rightarrow |A| = 2$$

$$X = (A^* + 2B)^{-1}$$

$$X = (A^* + 2B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 3 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & & \\ & \frac{1}{3} & & \\ & & \frac{1}{2} & \\ & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

二、（10 分）问 a,b 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,} \\ \boldsymbol{x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1,} \\ \boldsymbol{-x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b,} \\ \boldsymbol{3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1} \end{cases}$$

有唯一解,无解,有无穷多组解?并求出有无穷多组解时的通解(用导出组的基础解系表示通解)。

解　方法一: $B=\left[A\vdots b\right]\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & \vdots & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$

(1)当 $r(A)=4 \Leftrightarrow a\neq 1$ 时,方程组有唯一解;

(2)当 $a=1$ 时,方程组无解或无穷多解,此时

$$B=\left[A\vdots b\right]\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

①当 $b=-1$ 时, $r(A)=r(B)=2<4$,方程组有无穷多解;此时

$$B=\left[A\vdots b\right]\xrightarrow{r}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

方程组的通解为 $X=k_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, k_1,k_2 为任意常数;

②当 $b\neq -1$ 时, $r(A)=2, r(B)=3$,方程组无解

综上可得:

(1)当 $a\neq 1$ 时,方程组有惟一解;

(2)当 $a=1, b=-1$ 时,方程组有无穷多解;

(3)当 $a=1, b\neq -1$ 时,方程组无解

方法二:方程组的系数行列式 $|A|=(a-1)^2$.　　(1)当 $|A|=(a-1)^2\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 1$ 时,方程

组有唯一解;　　(2)以下同方法一.

三、（10 分）已知线性空间 $F[x]_4$ 的自然基为 $1, x, x^2, x^3$ 。

(1) 证明：$1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2!}, 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 为 $F[x]_4$ 的一个基；

(2) 求自然基 $1, x, x^2, x^3$ 到基 $1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2!}, 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 的过渡矩阵;

(3) 求 $h(x)=1+3x^2+6x^3$ 在后一个基下的坐标。

解：

（1）$k_1 1+k_2(1+x)+k_3(1+x+\frac{x^2}{2!})+k_4(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})=0$

$$\left(k_1+k_2+k_3+k_4\right)1+\left(k_2+k_3+k_4\right)x+\left(\frac{k_3}{2!}+\frac{k_4}{2!}\right)x^2+\frac{k_4}{3!}x^3=0$$

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3+k_4=0 \\ k_2+k_3+k_4=0 \\ k_3+k_4=0 \\ k_4=0 \end{cases}$$，　所以　$k_1=k_2=k_3=k_4=0$

故 $1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2!}, 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 为 $F[x]_4$ 的一个基

（2）$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -30 \\ 36 \end{pmatrix}$

四、（10 分）已知向量组

$\alpha_1=(1,0,2,1)^T,\alpha_2=(1,2,0,1)^T,\alpha_3=(2,1,3,0)^T,\alpha_4=(2,5,-1,4)^T,\alpha_5=(1,-1,3,-1)^T$

（1）求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的秩和一个极大无关组;

（2）将其余向量用极大无关组表示出来。

解：

$$\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以向量组秩为 3， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一个极大无关组，

$\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3,\alpha_5=-\alpha_2+\alpha_3$

五、（10 分）设 6 阶方阵 A 的初等因子为 $(\lambda+1)^3$, $(\lambda-1)^2$, λ 。

(1) 试写出 A 的 Jordan 标准形；(2) 求 A 的特征值。

解：（1）

$$\begin{pmatrix}-1&1&0&0&0&0\\0&-1&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&2&1&0\\0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

（2）A 的特征值为-1（三重），1（二重），0

六、（10 分）在线性空间 $\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 中定义线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ ：

$$\boldsymbol{\sigma}(X)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

（1）证明：$\boldsymbol{\sigma}$是 $\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{R})$ 上的线性变换；

（2）写出$\boldsymbol{\sigma}$在基 $\boldsymbol{E}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$下的矩阵。

解 （1）易知 σ 是 $M_2(\mathbf{R})$ 的一个变换. 任取 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in M_2(\mathbf{R})$，$a,b\in\mathbf{R}$，由矩阵运算性质，得到

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}(a\boldsymbol{X}+b\boldsymbol{Y})\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{Y}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix},$$

即 $\sigma(a\boldsymbol{X}+b\boldsymbol{Y})=a\sigma(\boldsymbol{X})+b\sigma(\boldsymbol{Y})$，故 σ 是 $M_2(\mathbf{R})$ 的线性变换.

（2）显然 $M_2(\mathbf{R})$ 是实数域上四维线性空间，其标准基为

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

因 $\sigma(\boldsymbol{E}_1)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_1+2\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+2\boldsymbol{E}_4$，

$$\sigma(\boldsymbol{E}_2)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=-\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_4,$$

$$\sigma(\boldsymbol{E}_3)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_1+2\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+2\boldsymbol{E}_4,$$

$$\sigma(\boldsymbol{E}_4)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=-\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_4,$$

故 $$\sigma(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4)=[\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4]\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

σ 在标准基下的矩阵为上式最右边矩阵.

七、（10 分）求下列实系数齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3+x_5=0 \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4-2x_5=0 \end{cases}$

的解空间的一标准正交基。

解 解此方程组得基础解系：$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,-5,0,0,1)$.

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1,0,0)$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\left(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right)$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\left(\frac{7}{5},-\frac{6}{5},\frac{6}{5},\frac{13}{5},1\right)$$

再单位化得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0,0)$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(-2,1,-1,2,0)$$

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{35}}\left(\frac{7}{3},-2,2,\frac{13}{3},\frac{5}{3}\right)$$

八、（10 分　已知实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$，

(1)问 A 是否可逆;

(2)求一正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵。

解: (1) $\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix}=\mathbf{10}\neq\mathbf{0}$，故 A 可逆.

(2)

由方程

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 4-4\lambda & 4-(\lambda-2)(\lambda-5) \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1(二重)和 10.

对于 $\lambda=1$，特征方程组 $(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ 为

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

特征向量为

$$\boldsymbol{X}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$$

正交化

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{X}_2-\frac{(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{\xi}_1)}{(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_1)}\boldsymbol{\xi}_1$$

$$=(2,0,1)^{\mathrm{T}}+\frac{4}{5}(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$=\left(\frac{4}{5},\frac{4}{5},1\right)^{\mathrm{T}}$$

再单位化

$$\boldsymbol{\eta}_1=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=\left(\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}$$

对 $\lambda=10$,特征方程组

$$\begin{bmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

特征向量 $\boldsymbol{X}_3=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$

单位化 $\boldsymbol{\eta}_3=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$

令

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{1}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3\sqrt{5}}&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

九、（10 分）如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$$

其中 $a\neq b$, $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{I}_n$ 为单位矩阵，证明：$\boldsymbol{A}$ 可以对角化。

证 由 $(\mathbf{A}-a\mathbf{E})(\mathbf{A}-b\mathbf{E})=\mathbf{0}$，有

$$|\mathbf{A}-a\mathbf{E}|=0 \quad 或 \quad |\mathbf{A}-b\mathbf{E}|=0,$$

故 $\mathbf{A}$ 的特征值为 a 或 b.

若 a 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，b 不是 $\mathbf{A}$ 的特征值，则 $|\mathbf{A}-b\mathbf{E}|\neq 0$，即 $\mathbf{A}-b\mathbf{E}$ 是可逆阵，于是有

$$\mathbf{A}-a\mathbf{E}=\mathbf{0}, \quad 即\ \mathbf{A}=a\mathbf{E},$$

可见 $\mathbf{A}$ 可对角化.

若 b 是 $\mathbf{A}$ 的特征值，a 不是 $\mathbf{A}$ 的特征值，同理可证 $\mathbf{A}=b\mathbf{E}$，故此时 $\mathbf{A}$ 可对角化.

若 a,b 都是 $\mathbf{A}$ 的特征值，只需证

$$[n-r(a\mathbf{E}-\mathbf{A})]+[n-r(b\mathbf{E}-\mathbf{A})]=n \quad 或 \quad r(a\mathbf{E}-\mathbf{A})+r(b\mathbf{E}-\mathbf{A})=n,$$

即可得 $\mathbf{A}$ 可对角化.

因为 $(\mathbf{A}-a\mathbf{E})(\mathbf{A}-b\mathbf{E})=(a\mathbf{E}-\mathbf{A})(b\mathbf{E}-\mathbf{A})=\mathbf{0}$，所以 $r(a\mathbf{E}-\mathbf{A})+r(b\mathbf{E}-\mathbf{A})\leqslant n$.

又因为

$$\begin{aligned} r(a\mathbf{E}-\mathbf{A})+r(b\mathbf{E}-\mathbf{A}) &= r(a\mathbf{E}-\mathbf{A})+r(\mathbf{A}-b\mathbf{E}) \\ &\geqslant r(a\mathbf{E}-\mathbf{A}+\mathbf{A}-b\mathbf{E})=r((a-b)\mathbf{E})=n \quad (a\neq b), \end{aligned}$$

所以

$$r(a\mathbf{E}-\mathbf{A})+r(b\mathbf{E}-\mathbf{A})=n.$$

综上所述，$\mathbf{A}$ 可对角化.

十、（10 分）设二次型 $\boldsymbol{f(x_1,x_2,x_3)=3(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+2(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2}$，记

$$\boldsymbol{\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}}$$

(1) 证明二次型 $\boldsymbol{f}$ 对应的矩阵为 $\boldsymbol{3\alpha\alpha^T+2\beta\beta^T}$；

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ 正交且均为单位向量，证明 $\boldsymbol{f}$ 在正交变换下的标准形为 $\boldsymbol{3y_1^2+2y_2^2}$。

证明：（1）$f(x_1,x_2,x_3)=3(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+2(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$

$$=3(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\left(3\alpha\alpha^T+2\beta\beta^T\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

所以二次型 f 对应的矩阵为 $3\alpha\alpha^T+2\beta\beta^T$

（2） α 与 β 正交，故 $\alpha^T\beta=0$， α，β 为单位向量，故 $\alpha^T\alpha=1$，同样 $\beta^T\beta=1$.

$A\alpha=(3\alpha\alpha^T+2\beta\beta^T)\alpha=3\alpha\alpha^T\alpha+2\beta\beta^T\alpha=3\alpha$，由于 $\alpha\neq0$，故 A 有特征值 $\lambda_1=3$.

$A\beta=(3\alpha\alpha^T+2\beta\beta^T)\beta=2\beta$，由于 $\beta\neq0$，故 A 有特征值 $\lambda_2=2$.

又由于 $r(A)=r(3\alpha\alpha^T+2\beta\beta^T)\leq r(3\alpha\alpha^T)+r(2\beta\beta^T)=r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)\leq1+1=2<3$.

所以 $|A|=0$，故 $\lambda_3=0$，

因此，f 在正交变换下的标准型为 $3{y_1}^2+2{y_2}^2$