

课程编号: MTH17003 北京理工大学 2012-2013 学年第一学期

工科数学分析期末试题(A 卷)

班级_____ 学号_____ 姓名_____

(本试卷共 6 页, 十一个大题. 解答题必须有解题过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 十一 | 总分 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| 得分 | | | | | | | | | | | | |
| 签名 | | | | | | | | | | | | |

一. 填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 设 $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x+1} & x \geq 0 \\ \arctan \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$ 是连续函数, 则 $a =$ _____.

2. 曲线 $\rho = 2e^\theta$ 上 $\theta = 0$ 的点处的切线方程为_____.

3. 已知 $\cos x - e^{x^2} = ax^2 + bx^4 + o(x^4)$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

4. 微分方程 $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = 1$ 的通解为 $y =$ _____.

5. 质量为 m 的质点从液面由静止开始在液体中下降, 假定液体的阻力与速度 v 成正比, 则质点下降的速度 $v = v(t)$ 所满足的微分方程为_____.

二. (9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + x \sin x)^{\frac{1}{x^2}}$.

三. (9 分) 求不定积分 $\int (x \arctan x + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}) dx$.

四. (9 分) 求 $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的最大值和最小值.

五. (8 分) 判断 $f(x) = \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ ($x \geq 1$) 是否恒为常数.

六. (9 分) 设 $\arctan \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ 确定函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

七. (10 分) 求下列反常积分. (1) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$; (2) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

八. (8 分) 一垂直立于水中的等腰梯形闸门, 其上底为 3m, 下底为 2m, 高为 2m, 梯形的上底与水面齐平, 求此闸门所受到的水压力. (要求画出带有坐标系的图形)

九. (10 分) 求微分方程 $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{3x}$ 的通解.

十. (10 分) 设 $f(x)$ 可导, 且满足方程 $f(x)(x^2 + x) = \int_a^x f(t)dt + a$ ($a > 0$), 求 $f(x)$ 的表达式. 又若曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 0, x = 1, y = 0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $\frac{7}{6}\pi$, 求 a 的值.

十一. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导, 且 $f(0) = f(2) = 0$, $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) \sin x dx = 1$, 证明在 $(0,2)$ 内存在 ξ

使 $f'(\xi) = 1$.