第五章　特征值与特征向量

注：本章讨论的矩阵均为方阵

例1 解微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -2qx_1 + qx_2 \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = qx_1 - 2qx_2 \end{cases} \qquad (1)$$

解　先将微分方程组改写。若令

$$A = \begin{pmatrix} -2q & q \\ q & -2q \end{pmatrix},\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\quad \frac{d^2x}{dt^2} = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} \end{pmatrix}$$

则方程组（1）变成

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Ax$$

为解此矩阵微分方程，我们引入新的函数 $y_1(t)$ 与 $y_2(t)$ 做函数替换：若令 $y=[y_1\ y_2]^T$，则存在 $P=[p_{ij}]_{2\times 2}$，使

$$x = Py \qquad (2)$$

当 P 可逆时，把（2）代入（1）得

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (P^{-1}AP)y \qquad (3)$$

若新函数选择恰当，即 P 选取合适，则（3）的解很很容易得出。

例如，取

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则 P 可逆且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -q & 0 \\ 0 & -3q \end{pmatrix}$$

对角矩阵

此时，方程组（3）为

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -qy_1$$
$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = -3qy_2$$

其一般解为

$$y_1 = a\sin(\sqrt{q}t + \alpha),\quad y_2 = b\sin(\sqrt{3q}t + \beta)$$

其中，a, b, α, β 为常数。

于是，方程组（1）的一般解为

$$x_1(t) = a\sin(\sqrt{q}t + \alpha) - b\sin(\sqrt{3q}t + \beta)$$
$$x_2(t) = a\sin(\sqrt{q}t + \alpha) + b\sin(\sqrt{3q}t + \beta)$$

例2： 设 A 是 n 阶方阵，计算 A^m（m 为正整数）.

解：　若存在 n 阶可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda\text{(对角矩阵)}$$

$$(P^{-1}AP)^m = \Lambda^m \Rightarrow P^{-1}A^mP = \Lambda^m$$

从而有 $A^m = P\Lambda^m P^{-1}$.　---简化了方阵的幂运算

¡ 5.1 特征值与特征向量

一、矩阵的相似

二、特征值与特征向量的定义和求法

三、特征值与特征向量的性质

一、矩阵的相似

定义 设A、B是两个n阶方阵。若存在n阶可逆矩阵P，使得

$$P^{-1}AP = B$$

则称A相似于B，记作$A \sim B$；称P为由A到B的相似变换矩阵。

性质1 矩阵的相似满足

（1）自反性：$A \sim A$

（2）对称性：$A \sim B \Rightarrow B \sim A$

（3）传递性：$A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

相似矩阵具有以下性质：

性质2（1）$A \sim B \Rightarrow r(A) = r(B)$

（2）$A \sim B \Rightarrow |A| = |B|$

（3）$A \sim B \Rightarrow A^T \sim B^T$

（4）$P^{-1}(A_1A_2\cdots A_m)P = (P^{-1}A_1P)(P^{-1}A_2P)\cdots(P^{-1}A_mP)$

其中 A_1, A_2, ¡ , A_m 均为 n 阶矩阵，P 为 n 阶可逆矩阵。特别地，当 $A_1 = A_2 =$ ¡ $= A_m = A$ 时，上式成为

$$P^{-1}A^mP = (P^{-1}AP)^m$$

于是 $A \sim B \Rightarrow A^m \sim B^m$

（5）
$$P^{-1}(A_1 + A_2 + \cdots + A_m)P = P^{-1}A_1P + P^{-1}A_2P + \cdots + P^{-1}A_mP.$$

（6）$P^{-1}(kA)P = kP^{-1}AP$，其中k为任意常数.

（7）若 $A \sim B$，则 $f(A) \sim f(B)$，这里 $f(x)$ 为任一多项式函数。$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

这可由
$$\begin{aligned} P^{-1}f(A)P &= P^{-1}(a_mA^m + \cdots + a_1A + a_0I)P \\ &= a_m(P^{-1}AP)^m + \cdots + a_1(P^{-1}AP) + a_0I \\ &= f(P^{-1}AP) = f(B) \end{aligned}$$
得到。

例 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & a \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$，求 a。

解 因为 $A \sim B$，所以 $|A| = |B|$，即

$$a - 4 = -3$$

由此得 $a = 1$。

定义 设 A 是 n 阶方阵，若

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda$$

则称 A 可相似对角化，简称对角化；称 Λ 为 A 的相似标准形。

引例1中的2阶方阵 $A = \begin{pmatrix} -2q & q \\ q & -2q \end{pmatrix}$ 就可对角化，

且其相似标准形为 $\begin{pmatrix} -q & 0 \\ 0 & -3q \end{pmatrix}$ 。

问题　　矩阵可对角化的条件！

①如何判断矩阵是否可对角化？

②如何求矩阵的相似标准形(如何对角化)？

二、特征值与特征向量的定义和求法

设 A 是3阶可对角化矩阵，则存在3阶可逆矩阵 P，使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \Rightarrow AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

把 P 按列分块 $P = [X_1, X_2, X_3]$，则

$$AP = [A][X_1 \quad X_2 \quad X_3] = [AX_1 \quad AX_2 \quad AX_3]$$

而

$$P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = [X_1 \quad X_2 \quad X_3]\begin{pmatrix} [\lambda_1] & [0] & [0] \\ [0] & [\lambda_2] & [0] \\ [0] & [0] & [\lambda_3] \end{pmatrix}$$

$$= [X_1[\lambda_1] \quad X_2[\lambda_2] \quad X_3[\lambda_3]]$$

$$= [\lambda_1 X_1 \quad \lambda_2 X_2 \quad \lambda_3 X_3]$$

因

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

故有 $[AX_1 \quad AX_2 \quad AX_3] = [\lambda_1 X_1 \quad \lambda_2 X_2 \quad \lambda_3 X_3]$，

由此得

$$AX_1 = \lambda_1 X_1, \; AX_2 = \lambda_2 X_2, \; AX_3 = \lambda_3 X_3$$

共同特点　$AX = \lambda X$　且 X 为非零列向量！

$A = [a_{ij}] \in C^{n \times n}$　　$\lambda \in C$

定义 设 A 是 n 阶方阵。若存在数 λ 及 n 元非零列向量 X，使得

$$AX = \lambda X \text{ 或 } (\lambda I - A)X = 0$$

则称 λ 为矩阵 A 的特征值，X 为矩阵 A 的属于(或对应于)特征值 λ 的特征向量。

$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in C^n$

注意：（1）只有方阵才有特征值与特征向量；

（2）特征向量必须是非零向量，特征值不一定非零.

此外，特征向量还具有如下性质：

(3) 若X_0是A的属于λ_0的特征向量，则对$\forall k \in C$,且$k \neq 0$,有kX_0也是A的属于λ_0的特征向量.

(4) 若X_1, X_2是A的属于同一个特征值λ_0的特征向量，且$X_1 + X_2 \neq 0$,则$X_1 + X_2$也是A的属于λ_0的特征向量.

可得：特征向量不唯一

若X_1, X_2是A的属于同一个特征值λ_0的特征向量，则对$k_1, k_2 \in C$, $k_1X_1 + k_2X_2 (\neq 0)$也是A的属于λ_0的特征向量.

(5) A的特征向量只能属于一个特征值.

(6) 若X_1, X_2是A的分别属于不同特征值λ_1, λ_2的特征向量，则$X_1 + X_2$不再是A的特征向量.

在引例中，对矩阵 A、P 以及数 $-q$, $-3q$，因有

$$A = \begin{pmatrix} -2q & q \\ q & -2q \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -q & 0 \\ 0 & -3q \end{pmatrix}$$

故若取 $\lambda_1 = -q$, $\lambda_2 = -3q$ 以及

$$X_1 = (1,\ 1)^T,\quad X_2 = (-1,\ 1)^T$$

则有

$$AX_1 = \lambda_1 X_1,\quad AX_2 = \lambda_2 X_2$$

即 λ_1 与 λ_2 是 A的特征值，X_1 与 X_2 分别是 A属于 λ_1 与 λ_2 的特征向量。

特征值与特征向量的计算：

A: 方阵； λ_0 : 特征值； X_0 : 特征向量。

$$AX_0 = \lambda_0 X_0 \implies (\lambda_0 I - A)X_0 = 0$$

$\implies$ X_0 是齐次线性方程组 $(\lambda_0 I - A)X = 0$ ① 的非零解。

$\implies$ 方程组①有非零解

$\implies$ ①的系数行列式 $|\lambda_0 I - A| = 0$

$\implies$ λ_0是以λ为变量的方程 $|\lambda I - A| = 0$ ② 的根。

结论：特征值 $\longrightarrow$ 方程②的根

特征向量 $\longrightarrow$ 方程组①的非零解

定义 设 A为n阶方阵，则称 $\lambda I - A$ 为A的**特征矩阵**；称 $|\lambda I - A|$ 为A的**特征多项式**，记为 $f_A(\lambda)$；称 $|\lambda I - A| = 0$ 为矩阵A的**特征方程**，称 $(\lambda I - A)X = 0$ 为矩阵A的**特征方程组**。对A的特征值λ_0，称零空间 $N(\lambda_0 I - A)$ 为特征值 λ_0的**特征子空间**，记为 V_{λ_0} (与特征值 λ 的特征向量集合只差一个零向量)。

$$V_{\lambda_0} = N(\lambda_0 I - A) = \{\lambda_0\text{的所有特征向量}\} \cup \{\theta\}$$

此特征子空间的维数 $= n - r(\lambda_0 I - A)$

称为特征值 λ_0的几何重数 .

矩阵A的特征值与特征向量的求法：

1. 写出矩阵A的特征多项式$|\lambda I - A|$，特征方程的全部根就是矩阵A的全部特征值； 在复数域内求根

2. 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$是矩阵$A$的全部互异的特征值。将$A$的每个互异的特征值 $\lambda_i (i=1, 2, \cdots, s)$分别代入特征方程组 $(\lambda I - A)X = 0$，得：

$$(\lambda_i I - A)X = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

分别求出它们的基础解系：$X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{il_i}$。这就是特征值$\lambda_i$所对应的一组线性无关的特征向量。其非零线性组合

$$k_{i1}X_{i1} + k_{i2}X_{i2} + \cdots + k_{il_i}X_{il_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

是A的属于特征值 λ_i的全部特征向量$(i=1, 2, \cdots, s)$, 其中k_{ij}为不全为零的任意常数。

例 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

解 $\because$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = 0$$

$\therefore$ A的特征值为2和1（二重）。代数重数！

对 $\lambda=2$，解 $(2I-A)X=0$：

$$2I-A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\4&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases},\quad x_3\text{任意}.$$

令 $x_3=1\Rightarrow X_1=(0,\ 0,\ 1)^T$，故 A属于2的全部特征向量为 $k_1X_1(k_1\neq0)$。

$N(2I-A)=\{kX_1\mid k\in C\}=V_{\lambda=2}$

1维特征子空间　此维数称为 $\lambda=2$ 的几何重数

对 $\lambda=1$，解 $(I-A)X=0$：

$$I-A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\4&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2+2x_3=0\end{cases},\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=-2x_3\end{cases}$$

令 $x_3=1\Rightarrow X_2=(-1\ \ -2\ \ 1)^T$，故 A属于1的全部特征向量为 $k_2X_2(k_2\neq0)$。

$N(I-A)=\{kX_2\mid k\in C\}=V_{\lambda=1}$

1维特征子空间　所以 $\lambda=1$ 的几何重数为**1.**

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$，求 A的特征值与特征向量。

解 $\because\ |\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda+2&-2\\1&-1&\lambda+1\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{R_3+R_1}\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda+2&-2\\\lambda&0&\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{C_1+(-1)C_3}\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\0&\lambda+2&-2\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+2)=0$$

$\therefore$ A的特征值为 0（二重）和 -2。

对 $\lambda=-2$，解 $(-2I-A)X=0$ 得基础解系

$$X_1=(-1,\ -2,\ 1)^T$$

故 A属于 -2 的特征向量为 $k_1X_1(k_1\neq0)$。

$\lambda=-2$ 代数重数为：**1**

几何重数为：**1**

对 $\lambda=0$，解 $(0I-A)X=0$ 得基础解系

$$X_2=(1,\ 1,\ 0)^T,\quad X_3=(-1,\ 0,\ 1)^T$$

故 A属于0的特征向量为 $k_2X_2+k_3X_3$ $(k_2,k_3$ 不全为零)。

$\lambda=0$　代数重数为：**2**　几何重数为：**2**

易见：单位矩阵的特征值全为**1**；

零矩阵的特征值全为**0**；

上（下）三角矩阵的特征值是它的全部主对角元。

矩阵**A**的全部特征值的集合称为**A**的谱。

三、特征值与特征向量的性质

性质 设 A与 B是n阶方阵，且 $A\sim B$，则

$$|\lambda I-A|=|\lambda I-B|$$

于是，**相似矩阵具有相同的特征值**。**谱相同**

问题 相似矩阵的特征向量间有什么关系？

解答：设 $B=P^{-1}AP$，X是矩阵A的属于特征值 λ_0 的特征向量，则 $P^{-1}X$是矩阵B的对应于特征值 λ_0 的一个特征向量。　$AX=\lambda_0X$

$$B=P^{-1}AP\Rightarrow BP^{-1}=P^{-1}A\Rightarrow BP^{-1}X=P^{-1}AX$$
$$=P^{-1}\lambda_0X$$
$$=\lambda_0P^{-1}X$$
$$\Rightarrow BP^{-1}X=\lambda_0P^{-1}X.$$

定理 设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 是n阶方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A的n个特征值，则

（1）$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=tr(A)$

（2）$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$

注 矩阵 A 的主对角线上的所有元素之和 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$ 称为**矩阵A的迹**，记作 $tr(A)$。

推论（1）$A\sim B\Rightarrow tr(A)=tr(B)$

（2）可逆矩阵没有零特征值。

即：矩阵A可逆当且仅当其所有特征值均不为零。

证明 设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，易见，它的特征多项式是关于λ 的 n 次多项式，不妨设之为

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=C_0\lambda^n+C_1\lambda^{n-1}+\cdots+C_{n-1}\lambda+C_n$$

即

$$\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=C_0\lambda^n+C_1\lambda^{n-1}+\cdots+C_{n-1}\lambda+C_n \qquad (5.1.5)$$

考虑上式左端行列式的展开式，它除了

$$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn}) \qquad (5.1.6)$$

这一项含有 n 个形如 $(\lambda-a_{ii})$ 的因式外，其余各项最多含有 $n-2$ 个这样的因式。于是 λ^n, λ^{n-1} 只能由 (5.1.6) 产生。比较 (5.1.5) 两端的系数，得

$$C_0=1$$

$$C_1=-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}) \qquad (5.1.7)$$

在 $|\lambda I-A|=C_0\lambda^n+C_1\lambda^{n-1}+\cdots+C_{n-1}\lambda+C_n$ 中令 $\lambda=0$ 得

$$C_n=(-1)^n|A| \qquad (5.1.8)$$

另外，根据多项式理论，n 次多项式

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|$$

在复数域上有n个根，不妨设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，又由于 $f(\lambda)$ 的首项系数 $C_0=1$，于是有

$$\begin{aligned}f(\lambda)&=|\lambda I-A|\\&=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)\\&=\lambda^n-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots\\&\quad+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\end{aligned} \qquad (5.1.9)$$

$$|\lambda I-A|=C_0\lambda^n+C_1\lambda^{n-1}+\cdots+C_{n-1}\lambda+C_n \qquad (5.1.5)$$

比较 (5.1.5) 和 (5.1.9)，得

$$C_1=-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)$$
$$C_n=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \qquad (5.1.10)$$

$$C_1=-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}) \qquad (5.1.7)$$

$$C_n=(-1)^n|A| \qquad (5.1.8)$$

$$C_1=-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)$$
$$C_n=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \qquad (5.1.10)$$

特征值的重要性质：

(1) $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$ $\qquad$ (5.1.11)

例 已知

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&a&-2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&&\\&b&\\&&-7\end{pmatrix}$$

且 $A\sim B$。求 a, b。

解（法一）$\because\ A\sim B$

$\therefore\ tr(A)=tr(B)$

即 $1-2-2=2+b-7$，解得 $b=2$。

又 $A\sim B$，故 $|A|=|B|$，即 $4-8a=-28$，

解得 $a=4$。

（法二）$\because\ A\sim B$

$\therefore\ A$与B有相同的特征值

故 A的特征值为 $2, b, -7$。由

$$|(-7)I-A|=0$$

解得 $a=4$。

此时，$\quad |\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$

所以 $b=2$；或由 $|A|=|B|$ 解得 $b=2$。

例 已知 A的特征值为1，2，3。求 A^2-2I 的特征值。

解 设λ是A的特征值，X是其对应的特征向量，则

$$AX=\lambda X\Rightarrow A(AX)=A(\lambda X)$$

$$\Rightarrow A^2X=\lambda^2X$$

$$\Rightarrow A^2X-2X=\lambda^2X-2X$$

$$\Rightarrow (A^2-2I)X=(\lambda^2-2)X$$

$\because\quad X\neq\theta$

$\therefore\quad \lambda^2-2$ 是 A^2-2I 的特征值，对应的特征向量也是X。

于是，A^2-2I的特征值为$-1,2,7$。

一般地， 熟记！

若λ是矩阵A的特征值，X是A的属于特征值λ的特征向量，则有：

(1) $k\lambda$是矩阵kA的特征值(其中k为任意常数);

(2) λ^m是矩阵A^m的特征值(其中m为正整数);

(3) $f(\lambda)$是$f(A)$的特征值(这里$f(x)$是关于x的任一多项式函数);

(4) 当A可逆时，λ^{-1}是A^{-1}的特征值;

并且 X 仍是矩阵 $kA, A^m, f(A), A^{-1}$ 的分别对应于特征值 $k\lambda, \lambda^m, f(\lambda), \lambda^{-1}$ 的特征向量．

(5) 矩阵A和A^T有相同的谱．

例5.1.4 已知n阶可逆矩阵A的全部特征值为：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，求$I-A^*$的全部特征值及$|I-A^*|$.

解：由特征值的性质知：$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，

又已知A可逆，从而$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\neq 0$，且$A^{-1}$的全部特征值为：$\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$，由伴随矩阵的性质知，当$A$可逆时，有$A^*=|A|A^{-1}$，从而有

$$I-A^*=I-|A|A^{-1}\ \underline{\text{记作}}\ f(A^{-1})$$

于是，由上述性质知：$I-A^*$的全部特征值为：

$$f(\lambda_i^{-1})=1-|A|\lambda_i^{-1}$$

$$=1-\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\lambda_i^{-1}$$

$$=1-\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}\cdots\lambda_n,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

从而

$$|I-A^*|=f(\lambda_1^{-1})\cdots f(\lambda_n^{-1})$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}\cdots\lambda_n)$$

思考：若n阶可逆矩阵A的全部特征值为：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则$A^*$的全部特征值是什么？

作业　习题五(P260):

1(4), 3, 4, 9, 10, 17

(1-17题均可作为练习)