《高等数学教程》毛京中.（上）.

第一章

习题1.1

1.（1）不一样，$y=x$定义域为$(-\infty,+\infty)$，而$y=\sin(\arcsin x)$定义域为$[-1,1]$

（2）不相同，前者定义域为$\{x|x\neq\pm1\}$，后者为$\{x|x\neq-1\}$

（3）不相同，前者定义域为R，后者为$\{x|x\geq0\}$

（4）相同，定义域、值域相同，且$\sin^2x+\cos^2x\equiv1$.

（5）不相同，前者定义域为$\{x|x\geq1\}$，后者为$\{x|x\leq-1$或$x\geq1\}$.

2.（1）解：$\begin{cases}2-x\geq0\\4-x^2\geq0\end{cases}\Rightarrow x\in[-2,2]$

（2）解：$-1\leq\frac{2x}{1+x}\leq1\Rightarrow x\in[-\frac{1}{3},1]$

（3）解：$\begin{cases}\ln(x+1)\neq0\\x+1>0\end{cases}\Rightarrow x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$

（4）解：$\begin{cases}\frac{x+2}{x-1}>0\\x-1\neq0\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

（5）解：$\begin{cases}-1\leq\lg\frac{x}{10}\leq1\\\frac{x}{10}>0\end{cases}\Rightarrow \cancel{x\in(\frac{3}{2},2)\cup(2,+\infty)}\ x\in[1,100]$

（6）解：$\begin{cases}x-2\neq0\\2x-3>0\end{cases}\Rightarrow x\in(\frac{3}{2},2)\cup(2,+\infty)$

（7）解：$\begin{cases}4-x\geq0\\x-1>0\\x-1\neq1\end{cases}\Rightarrow x\in(1,2)\cup(2,4]$

（8）解：$\begin{cases}3-x\geq0\\x\neq0\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(0,3]$

3.解：（1）$x^2\in D\Rightarrow \cancel{1\leq x\leq x}\ 0\leq x^2\leq1\Rightarrow -1\leq x\leq1$

即$x\in[-1,1]$

（2）$\sin x\in D\Rightarrow 0\leq\sin x\leq1\Rightarrow x\in\bigcup[2n\pi,(2n+1)\pi]\ n\in Z$

（3）$x+a\in D, a>0\Rightarrow 0\leq x+a\leq1, a>0\Rightarrow -a\leq x\leq1-a$.

即$x\in[-a,1-a]$. $a>0$.

(4) $\begin{cases} x+a\in D \\ x-a\in D \end{cases}$ $a>0$. $\Rightarrow \begin{cases} 0\le x+a\le 1 \\ 0\le x-a\le 1 \end{cases} \Rightarrow$

当 $0\le a\le\frac{1}{2}$ 时，$x\in[a,1-a]$

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$x\in\phi$.

(5). $\lg x\in D \Rightarrow 0\le \lg x\le 1 \Rightarrow 1\le x\le 10$.

即 $x\in[1,10]$

4. (1) 解：由于 $\forall x$ 有 $f(-x)=-x-x\cos(-x)=-x-x\cos x=-(x+x\cos x)=-f(x)$

则 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 解：由于 $\forall x$ 有 $f(-x)=-x+\sin(-x)+e^{-x}$ 不等于 $-f(x)$，也不等于 $f(x)$

则 $f(x)$ 非奇非偶.

(3) 解：由于 $\forall x$，有 $f(-x)=-x\sin\frac{1}{-x}=x\sin\frac{1}{x}=f(x)$

则 $f(x)$ 是偶函数.

(4) 解：由于 $\forall x$，有 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$.

则 $f(x)$ 是奇函数.

5. (1) 证明：由于对 $\forall x\in(-l,l)$，有 $\varphi(-x)=f(-x)+f(x)=f(x)+f(-x)=\varphi(x)$.

则 $\varphi(x)$ 是偶函数.

对 $\forall x\in(-l,l)$，有 $\psi(x)=f(-x)-f(x)=-(f(x)-f(-x))=-\psi(x)$.

则 $\psi(x)$ 是奇函数.

(2) 证明：由(1)可得 $2f(x)=f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)=\varphi(x)+\psi(x)$.

则 $f(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2}\psi(x)$.

由于放缩变换不会改变奇偶性.

则 $\frac{1}{2}\varphi(x)$ 为偶函数，$\frac{1}{2}\psi(x)$ 为奇函数.

则 $f(x)$ 可由一个奇函数与一个偶函数之和表示.

证毕

6、解：当$0<t\le 1$时，B还没起飞．则$D(t)=400t$．

当$t>1$时，A飞行了：$400t$，B飞行了$300(t-1)$．

则$D(t)=\sqrt{(400t)^2+[300(t-1)]^2}=\sqrt{250000t^2-180000t+90000}$

则$D(t)=\begin{cases}400t & 0\le t\le 1\\ \sqrt{250000t^2-180000t+90000} & t>1.\end{cases}$

7、解：(1) $f(x+1)=x^2-3x+2=(x+1)^2-5(x+1)+6$

令$y=x+1$，则：$f(y)=y^2-5y+6$．

再令$x=y$．则：$f(x)=x^2-5x+6$

(2) $f(\sin\frac{x}{2})=\cos x+1=2-2\sin^2\frac{x}{2}$

用$\cos\frac{x}{2}$代替$\sin\frac{x}{2}$，则：

$f(\cos\frac{x}{2})=2-2\cos^2\frac{x}{2}=1-\cos x$

(3) $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$．

则$f(x)=x^2-2$．

则$f(x+2)=(x+2)^2-2=x^2+4x+2$

(4) 用$1-x$代替x，有：

$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2$．

又$2f(x)+f(1-x)=x^2$

得：$f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-1)$．

8、解：(1) 原函数定义域为$\{x|x\neq-1\}$．

$(1+x)y=1-x$

$\Rightarrow x=\frac{1-y}{1+y}$

即反函数为$y=\frac{1-x}{1+x}$．

定义域为$\{x|x\neq-1\}$．

(2) 原函数定义域为 $\{x \mid x>-2\}$.

由 $y=1+\ln(x+2)$ 得:

$x=e^{y-1}-2$.

即反函数为 $y=e^{x-1}-2$. 定义域为 R.

(3) 原函数定义域为 ~~$\{x|$~~ R.

由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 得:

$x=\log_2\frac{y}{1-y}$

即反函数为 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$, 定义域为 $\{x \mid 0<x<1\}$.

(4) 原函数定义域为 R.

由 $y=\operatorname{sh}\frac{x+1}{2}$ 得:

$x=2\ln(y+\sqrt{y^2+1})-1$

即反函数为 $y=2\ln(x+\sqrt{x^2+1})-1$.

定义域为 R.

9. 解: $(f\circ g)(x)=f(g(x))=(2^x)^2=4^x$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=2^{x^2}$

10. 解: $(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{x}$.

11. 解: 当 $x\le 0$. $g(x)=x\le 0$, 则 $(f\circ g)(x)=f(g(x))=0$

当 $x>0$. $g(x)=-x^2<0$ 则 $(f\circ g)(x)=0$

则 $(f\circ g)(x)=0$ 恒成立.

当 $x\le 0$. $f(x)=0\le 0$. 则 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=0$

当 $x>0$. $f(x)=x>0$ 则 $(f\circ f)(x)=f(x)=x$.

则 $(f\circ f)(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x & x>0\end{cases}$.

当 $x\le 0$. ~~$f(x)$~~ $g(x)=x\le 0$. 则 $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x)=x$.

当 $x>0$. $g(x)=-x^2\le 0$ 则 $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(-x^2)=-x^2$

则 $(g\circ g)(x)=\begin{cases}x & x\le 0\\ -x^2 & x>0\end{cases}$

12. 解：$f[g(x)] = 2^{g(x)}+3 = \sqrt{x}+4$

$\Rightarrow g(x) = \log_2(\sqrt{x}+1)$

13. 解：$\cancel{g(f(x)) = af(x)^2+bf(x)+c}$

因为 a,b,c 为任意值，则当 $a=b=0$，c 为任意时，有

$\cancel{f}\ g(x) \equiv c$．则 $f(g(x)) = f(c) = g(f(x)) = c$

即 $f(c)=c$

可得 $f(x)=x$．

检验：$f(g(x)) = g(x) = ax^2+bx+c \cancel{= g(f(x))} = g(x) = g(f(x))$．

则 $f(x)=x$ 成立．

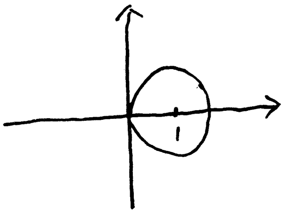
14. 解：(1) $y=u^2$．$u=\sin v$，$v=3x+1$

(2) $y=3^u$，$u=v^2$，$v=x+1$

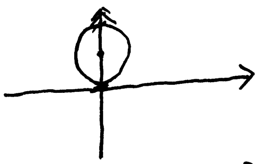
(3) $y=u^{\frac{1}{3}}$　$u=\ln v$　$v=t^2$，$t=\cos x$

15. 解：作变换 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$．则：

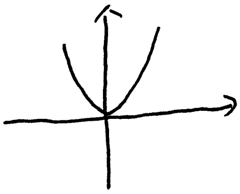
(1) $(x-1)^2+y^2=1 \Leftrightarrow (\rho\cos\theta-1)^2+(\rho\sin\theta)^2=1 \Leftrightarrow \rho=2\cos\theta$．



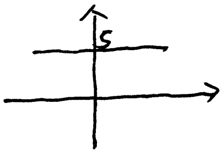
(2) $x^2+(y-3)^2=9 \Leftrightarrow \rho=6\sin\theta$．



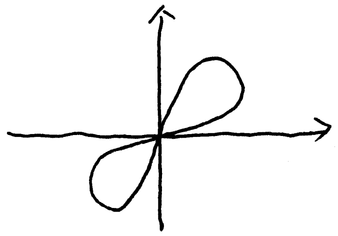
(3) $y=\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \rho=\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}$



(4) $y=5 \iff \rho = \frac{5}{\sin\theta}$



(5) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy \iff \rho^2 = a^2\sin 2\theta$



(6) $x^2+y^2+ax = a\sqrt{x^2+y^2} \iff \rho = a(1-\cos\theta)$