¡ 4.5 行列式的应用

一.求解线性方程组（Cramer 法则）

二.方阵的行列式

三.矩阵可逆的条件(伴随矩阵)

四.行列式与矩阵的秩

一、求解线性方程组($Cramer$法则)

定理4．5．1（$Cramer$法则）如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式不为零，即

方程个数与未知数个数相同！

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么该方程组有唯一解：$x_j = \dfrac{D_j}{D}, \ j = 1,2,\cdots,n$

其中 D_j 是把 D 的第 j 列换为常数项后得到的行列式，即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

重要结论

结论1 如果线性方程组(1)的系数行列式$D \neq 0$，则(1)一定有解，且解是唯一的.

结论2 如果线性方程组 (1)无解或有两个不同的解，则它的系数行列式 必为零.

齐次线性方程组的相关定理

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

定理 齐次线性方程组（2）的系数行列式 $D = 0$ 当且仅当齐次线性方程组（2）有非零解。

即：若线性方程组(2)的系数行列式$D \neq 0$，则(2)只有零解.

$$= \begin{vmatrix} -3+\lambda & 4 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3+\lambda \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-3) - 4(1-\lambda) + (1-\lambda)^3 - 2(1-\lambda)(-3+\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda$$

$$= -\lambda(\lambda-2)(-3)$$

齐次方程组有非零解，则 $D = 0$

所以 $\lambda = 0, \lambda = 2$ 或 $\lambda = 3$时齐次方程组有非零解。

注意

1. 用Cramer法则解方程组的两个条件：

(1)方程个数等于未知量个数**;**

(2)系数行列式不等于零。

此两条不满足时：**Gauss**消元法

2. Cramer法则建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系，它主要适用于理论推导。

例4.5.2　对于方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

试讨论当 a 取何值时，它有唯一解？无穷多解？无解？并在有解时求出解。

方程个数 = 未知数个数

解　方法一 ¡ Gauss消元法¡ ，略。

方法二　方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a & 1-a^2 \\ a-1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1+a \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+2)$$

于是由Cramer法则可知：

（ i ）当 $a \neq 1, -2$ 时，$D \neq 0,$ 方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{a+1}{a+2}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{a+2}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{(a+1)^2}{a+2}$$

(ii)当 $a = 1$ 时，$r(A) = r(\bar{A}) = 1 < n = 3$

方程组有无穷多解，用**Gauss**消元法得一般解**:**

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中 k_1, k_2 为任意常数。

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

（ **iii** ）当 $a = -2$ 时，

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2 < r(\bar{A}) = 3,$　故方程组无解。

二、方阵的行列式(汇总)

定理4.5.2 初等矩阵的行列式非零 且有

$$\det E_{ij}=-1;\quad \det E_i(c)=c\neq 0;\quad \det E_{ij}(k)=1.$$

定理4.5.3 若P为初等矩阵，则

$$\det(PA)=\det P\det A.$$

进而有结论:

若$B=P_sP_{s-1}\cdots P_2P_1A$,其中$P_i(i=1,2,\cdots,s)$为初等矩阵，则

$$\begin{aligned}\det B&=\det(P_sP_{s-1}\cdots P_2P_1A)\\&=\det P_s\det(P_{s-1}\cdots P_2P_1A)\\&=\det P_s\det P_{s-1}\cdots\det P_2\det P_1\det A.\end{aligned}$$

定理4.5.4 设A、B是n阶方阵，则

$$|AB|=|A||B|$$

推论 若 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为n阶方阵，则有

$$\det(A_1A_2\cdots A_s)=\det A_1\det A_2\cdots\det A_s$$

对n阶方阵的行列式还有如下结论:

(1) $|kA|=k^n|A|$,其中k为任意常数;

(2) $|A^T|=|A|$;

(3) $|A^{-1}|=|A|^{-1}=\dfrac{1}{|A|}$ (当A可逆时);

(4) 若A为正交矩阵，则 $|A|=\pm 1$;

(5) 若$A\xrightarrow{kR_i}B$，则$|B|=k|A|$;

(6) 若$A\xrightarrow{R_j+kR_i}B$，则$|B|=|A|$;

(7) 若$A\xrightarrow{R_{ij}}B$，则$|B|=-|A|$.

例 设A是n阶方阵，$A^TA=I$且$|A|=-1$，求$|A+I|$。

解 $$\begin{aligned}|A+I|&=|A+A^TA|=|(I+A^T)A|\\&=|I+A^T||A|=-|I^T+A^T|\\&=-|(I+A)^T|=-|I+A|\end{aligned}$$

由此得 $2|A+I|=0$。于是，$|A+I|=0$。

三、矩阵可逆的条件（用行列式判别）

设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，A_{ij}是$|A|$中元素a_{ij}的代数余子式。将这n^2个数$A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$按如下方式排成一个n阶方阵，记作A^*，即

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$$

转置

称A^*为矩阵A的伴随矩阵。 难点，把握伴随矩阵的性质

是与A同阶的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{a_{ij}\to A_{ij}}A'=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A'\to(A')^T}A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\vdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&&A_{nn}\end{pmatrix}$$

例 已知

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

则 A 的伴随矩阵为

$$A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

性质 设A是方阵，则

$$AA^*=A^*A=|A|I$$

伴随矩阵的性质。记住！

证明

$$A^*A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

由行列式的性质可知，A^*A的第i行，第j列的元素为

$$a_{1j}A_{1i}+a_{2j}A_{2i}+\cdots+a_{nj}A_{ni}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{ki}$$

$$=\begin{cases} |A| & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}$$

于是

$$A^*A=\begin{bmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{bmatrix}=|A|I$$

类似地，有 $AA^*=|A|I$，因此

$$\boxed{A^*A=AA^*=|A|I} \qquad (4.5.8)$$

伴随矩阵的重要性质！！

A^*与A^{-1}之间的关系为比例关系！一般研究A^*都转化为A^{-1}。 **定理4．5．5** 方阵A可逆的充分必要条件是 $|A|\neq 0$，且当A可逆时，

熟记！

$$A^*=|A|A^{-1} \Leftarrow \boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*}$$

$A^*A=AA^*=|A|I$

$A^*A=AA^*=|A|I$

其中A^*为A的伴随矩阵。

证 充分性：若 $|A|\neq 0$，则式 (4.5.8) 可变成

$$\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)A=A\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=I$$

于是由矩阵可逆的定义知，矩阵A可逆，且其逆矩阵

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

必要性： 若A可逆，则$AA^{-1}=I$。对上式两边取行列式，有

$$|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|=|I|=1$$

故

$$|A|\neq 0$$

注 定理4.5.5给出了求方阵逆的一种方法¡¡伴随矩阵法。该方法对2阶、3阶，特别是对2阶方阵求逆较方便，3阶以上的方阵求逆一般不用该方法，而用初等变换法。

例 已知

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

且 $ad\neq bc$，则A可逆，且

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\frac{A^*}{|A|}$$

例4.5.7 设 $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 可逆，A^*是A的伴随矩阵。试证：A^* 可逆，且 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$。

证 由定理4.5.5可知 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$

由此得 $A^*=|A|A^{-1}$

$$(A^{-1})^*=|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}=|A^{-1}|A$$

于是

$$A^*\left(A^{-1}\right)^*=|A|A^{-1}\left(|A^{-1}|A\right)=|A||A|^{-1}A^{-1}A=I$$

所以 A^* 可逆，且

$$\left(A^*\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^*$$

设A为$n(n\geq 2)$阶方阵，与 A^*相关的结论还有：

(1) $|A^*|=|A|^{n-1}$; $A^*A=|A|I$

(2) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$ (当A可逆时);

(3) $(kA)^*=k^{n-1}A^*$ (其中k是任意数);

(4) $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=\dfrac{1}{|A|}A$ (当A可逆时);

例 设3阶矩阵A和B满足 $A^*BA=2BA-8I$，且

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ \text{求}B.$$

解：$|A|=-2\neq 0$，所以A可逆.

等式$A^*BA=2BA-8I$两边左乘A，得：

$$AA^*BA=2ABA-8A$$

上式两边右乘A^{-1}，得 $AA^*B=2AB-8I$

由于$AA^*=|A|I$，所以 $|A|B=2AB-8I$

$$(2A-|A|I)B=8I$$

$$(2A-|A|I)B=8I$$

即 $diag(4,-2,4)B=8I$

$\therefore$ $B=8(diag(4,-2,4))^{-1}=diag(2,-4,2).$

例 已知矩阵方程 $AXA^{-1}=XA^{-1}+2I$，其中$|A|>0$，A的伴随矩阵$A^*=diag(2,-2,-4)$，求矩阵X.

解：在$AXA^{-1}=XA^{-1}+2I$两端同时右乘A，得

$$AX=X+2A$$

从而有 $(A-I)X=2A$

故 $X=2(A-I)^{-1}A=2[A^{-1}(A-I)]^{-1}=2(I-A^{-1})^{-1}$

又由 $AA^*=|A|I$，两边取行列式得

$$|A||A^*|=|A|^3$$

得 $|A|^2=16$，又$|A|>0$，得$|A|=4$，

所以 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=diag(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1)$

所以 $X=2(I-A^{-1})^{-1}$

$$=2diag(2,\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{2})=diag(4,\tfrac{4}{3},1).$$

四、行列式与矩阵的秩

定理 设A为n阶方阵，则A满秩的充分必要条件是

$$|A|\neq 0$$

注 设A为n阶方阵，则下面三个条件等价：

(1) A 为满秩矩阵；

(2) A 为可逆矩阵；

(3) $|A|\neq 0$。

定义 任取矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的k个行(第$i_1,i_2,\cdots i_k$行)和 k个列(第$j_1,j_2,\cdots j_k$ 列)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_1 1} & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & a_{i_1 n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i_2 1} & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & a_{i_2 n} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_k 1} & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & a_{i_k n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj_1} & \cdots & a_{mj_2} & \cdots & a_{mj_k} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

这些行、列的交叉点上的 k^2个元素按原来顺序排列成的k阶行列式

$$M=\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}$$

称为A 的一个k阶子式；特别地，当 $i_1=j_1,\cdots,i_k=j_k$ 时，称M 为 A的一个k阶主子式；其中，当

$$i_1=j_1=1, i_2=j_2=2,\cdots,i_k=j_k=k$$

时，称M 为 A的一个k阶顺序主子式。

例如，对矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

来说，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}, |7|, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, |1|$$

都是 A的子式，且其中

$$\underline{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \underline{|1|}$$

还是 A 的主子式。 顺序主子式

一般地，矩阵的秩与行列式有如下关系：

定理 设矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，则 秩$(A)=r$ 的充要条件是 A有一个 r 阶子式不等于零，且所有$r+1$阶子式（若有的话）全等于零。

注 矩阵的秩等于矩阵的非零子式的最高阶数。

由此定理可以判别矩阵及向量组的秩.

例 求向量组$\alpha_1=(a,1,0,0),\alpha_1=(b,0,1,0),\alpha_1=(c,0,0,1)$的秩.

解 将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$作为列构造矩阵$A$,即

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

易见，A有一个3阶子式不为零，无更高阶子式

$\therefore$ $r(A)=3$, 所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为3.

例 设四阶方阵A的秩为2，求伴随矩阵 A^* 的秩。

解 因为 A的秩为2，故A存在不等于零的2阶子式，但全部3阶和4阶子式均等于零。

又 A的每个3阶子式都是 A的某一元素的余子式，所以 A的所有元素的代数余子式均为零。于是，$A^*=0$

即 A^*的秩为零。

问题 设 n $(n\geqslant 2)$ 阶方阵 A 的秩小于 n-1，问伴随矩阵 A^*的秩为多少？

解答 $A^*=0$，从而 A^*的秩为零。

例 已知4阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

可逆，求下列齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=0 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=0 \\ a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=0 \end{cases}$$

的一般解。

解 设 A_{ij} 分别表示元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j=1,2,3,4)$ 。

令 $x_1=A_{11},x_2=A_{12},x_3=A_{13},x_4=A_{14}$，代入方程组。由代数余子式的性质得 $(A_{11},A_{12},A_{13},A_{14})$ 恰为方程组的一个解。

因 A 可逆，故

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}\neq 0$$

所以 $A_{11},A_{12},A_{13},A_{14}$ 不全为零，即 $(A_{11},A_{12},A_{13},A_{14})$ 是上述齐次方程组的一个非零解。

所给方程组的系数矩阵

$$B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

的每个3阶子式都是矩阵 A 的第一行某一元素的余子式，而已得 $A_{11},A_{12},A_{13},A_{14}$ 不全为零，故矩阵 B 至少有一个3阶子式不等于零，所以 B 的秩为3。由此得所给齐次方程组的基础解系只含一个解，于是，非零解 $(A_{11},A_{12},A_{13},A_{14})$ 就是一个基础解系。因此，所求一般解为 $k(A_{11},A_{12},A_{13},A_{14})$，这里 k 是任意常数。

例 设 A 为 n 阶方阵，且 秩$(A)=n-1$，则

$$秩(A^*)=1$$

证明 因 秩$(A)=n-1$，故 A 不满秩，所以 $|A|=0$。

由此得

$$AA^*=|A|I=0I=0$$

于是

$$秩(A)+秩(A^*)\leqslant n$$

所以

$$秩(A^*)\leqslant n-秩(A)=n-(n-1)=1$$

又因 秩$(A)=n-1$，故 A 至少有一个 $n-1$ 阶子式不等于零。而 A 的每个 $n-1$ 阶子式都是 A 的某一元素的余子式，所以 A 至少有一个元素的代数余子式不等于零，由此可知 $A^*\neq 0$ 。所以又有

$$秩(A^*)\geqslant 1$$

综上所述，即得 秩$(A^*)=1$。

结论： 如果 A 是 n 阶方阵 $(n\geq 2)$，则有

$$秩(A^*)=\begin{cases} n, & 当秩(A)=n \\ 1, & 当秩(A)=n-1. \\ 0 & 当秩(A)<n-1 \end{cases}$$

行列式的其他应用：

《高等数学》第六章 空间解析几何

两个向量的叉积(向量积)

设 $\alpha,\beta,\gamma\in R^3$，且

$$\alpha=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k},\beta=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k},\gamma=a_3\vec{i}+b_3\vec{j}+c_3\vec{k},$$

则向量 α 与 β 的叉积（向量积）$\alpha\times\beta$ 为：

$$\alpha\times\beta=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

为方便记忆

$$\alpha\times\beta=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$ 按第一行展开

三向量的混合积：

$$(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha\times\beta)\bullet\gamma=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

第五章求方阵的特征值等

小结

（1）熟练计算二阶、三阶行列式；

（2）会计算四阶行列式；

（3）会计算简单的n阶行列式；

（4）会使用**Cramer**法则；

（5）掌握行列式与矩阵的关系。

掌握伴随矩阵的性质！

作业　习题四(**P212**)：

12(2), 13, 14, 18(5), 20(1), 21(2)(3), 28

(**12-29**题均可作为练习)