北京理工大学 2008- 2009 学年第一学期

2007 级概率与数理统计期末试题（A 卷）答案及评分标准

一、解: 设 $A_i = \{$先从第一盒子中任取 2只球中有i只白球$\}$， $i = 0, 1, 2;$

$B = \{$然后从第二个盒子中任取一只球是白球$\}$. 由题知

$$P(A_0) = \frac{C_4^0 C_5^2}{C_9^2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}, \quad P(A_1) = \frac{C_4^1 C_5^1}{C_9^2} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9},$$

$$P(A_2) = \frac{C_4^2 C_5^0}{C_9^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \qquad \cdots\cdots\cdots 3分$$

$$P(B \mid A_0) = \frac{C_5^1}{C_{11}^1} = \frac{5}{11}, \quad P(B \mid A_1) = \frac{C_6^1}{C_{11}^1} = \frac{6}{11},$$

$$P(B \mid A_2) = \frac{C_7^1}{C_{11}^1} = \frac{7}{11}. \qquad \cdots\cdots\cdots 3分$$

则由全概率公式得

$$P(B) = \sum_{i=0}^{2} P(A_i) P(B \mid A_i)$$

$$= \frac{5}{18} \times \frac{5}{11} + \frac{5}{9} \times \frac{6}{11} + \frac{1}{6} \times \frac{7}{11}$$

$$= \frac{53}{99} = 0.5354 \ . \qquad \cdots\cdots\cdots 6分$$

二、(14 分)

解:（1）X的概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

因为 $P(Y = -1) = P(X < 0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}$

$$P(Y = 1) = P(X \geq 0) = \frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots\cdots 4 分$$

所以，Y 的分布列为

Y	-1	1
P	$1/3$	$2/3$

………2 分

（2）Y 的可能取值区间为 $\left(-3,3\right)$

由 $y=3x$，且 $y'=3>0$ 可知，

y 在区间 $\left(-1,1\right)$ 上是严格单调增函数，

其反函数为 $x=h\left(y\right)=\dfrac{y}{3}$，且 $h'\left(y\right)=\dfrac{1}{3}$ ………4 分

故，Y 的概率密度

$$f_Y\left(y\right)=\begin{cases} f_X\left(\dfrac{y}{3}\right)\left|\dfrac{1}{3}\right| &, \quad -3<y<3 \\ 0 &, \quad \text{其它} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y}{3}\right)^2\dfrac{1}{3} &, \quad -3<y<3 \\ 0 &, \quad \text{其它} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{y^2}{18} &, \quad -3<y<3 \\ 0 &, \quad \text{其它} \end{cases}$$

………4 分

三、（18 分）

解：

1.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$$

当$x>0$时，$f_X(x)=\int_0^2 e^{-2x}\,dy=2e^{-2x}$

当$x\le 0$时，$f_X(x)=0$

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, x>0\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

当$0<y<2$时，$f_Y(y)=\int_0^{\infty} e^{-2x}\ dx=\frac{1}{2}$

当$y\le 0$或$y\ge 2$时，$f_Y(y)=0$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2},0<y<2\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

……………………..（+8）

2. X 与 Y 相互独立. 因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$几乎处处成立..

……………………..（+2）

3.
$$P(X+Y\le 2)=\iint\limits_{x+y\le 2} f(x,y)dxdy=\int_0^2 \int_0^{2-y} e^{-2x}dxdy=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-4}$$

……………………..（+4）

4.
$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-2x},x\ge 0\\ 0,\quad x\le 0\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0,y<0\\ \frac{y}{2},0\le y<2\\ 1,y\ge 2\end{cases}$$

X与Y相互独立

$$F_Z(z)=P(\max(X,Y)\le z)=P(X\le z,Y\le z)=P(X\le z)P(Y\le z)$$

$$=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ (1-e^{-2z})\frac{z}{2}, & 0\le z<2\\ (1-e^{-2z}), & z\ge 2\end{cases}$$

……………………..（+4）

四、解：由已知：X∽N（0,1），Y∽E（1），且 X 与 Y 相互独立。

因此，EX＝0， EY＝1，D(X)＝1，D(Y)＝1，EX^2＝1，EY^2＝2。

（1）E（2X-Y）＝2E(X)－E(Y)＝－1,

D（2X-Y）＝4D(X)＋D(Y)＝5。（6 分）

（2）E（XY）＝EXEY＝0,

D(XY)＝$E(XY)^2-E^2(XY)=EX^2EY^2$＝2。（6 分）

（3）$\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{D(U)D(V)}}=\frac{Cov(X+Y,X-Y)}{\sqrt{D(X+Y)D(X-Y)}}=\frac{D(X)-D(Y)}{D(X)+D(Y)}=0.$ （6 分）

五、解：设 X_i 为第 i 只元件的寿命，i＝1,...16，$X_1 \cdots X_{16}$ 相互独立同分布 ，X＝$\sum_{i=1}^{16} X_i$ 为 16 只元件的寿命总和，已知 $\mu = 100, \sigma^2 = 100^2$. 那么由中心极限定理

$\frac{X - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ 近似服从 N（0,1）. 所以，（4 分）

P（X>1920）$\approx 1 - \Phi(\frac{1920 - 16 \times 100}{100\sqrt{16}}) = 1 - \Phi(0.8) = 0.2119$.（4 分）

六（18 分）

解：（1）$\boldsymbol{EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x\alpha(1-x)^{\alpha-1}dx}$

$$\overset{t=(1-x)}{=} \int_0^1 (1-t)\alpha t^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha+1}$$ ……………………..4 分

解得 $\boldsymbol{\alpha = \frac{1-E(X)}{E(X)}}$，用 $\bar{X}$ 代替 $\boldsymbol{EX}$ 即得 $\boldsymbol{\alpha}$ 的矩估计 为 $\boldsymbol{\alpha = \frac{1-\bar{X}}{\bar{X}}}$。…………3 分

（2）似然函数为

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \alpha(1-x_i)^{\alpha-1} = \alpha^n \prod_{i=1}^{n} (1-x_i)^{\alpha-1}$$ ……………………..2 分

两边取对数得对数似然函数为

$$\ln L(\alpha) = n\ln\alpha + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)$$ ……………………..2 分

关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 求导数并令其为 0 得：$\boldsymbol{\frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i) = 0}$ 。……………………..2 分

解方程得 $\boldsymbol{\alpha}$ 的最大似然估计为 $\boldsymbol{\hat{\alpha} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)}}$。 ……………………..1 分

（3）$\because$ $\boldsymbol{X_{2i} - X_{2i-1} \sim N(0, 2\sigma^2)}$，

$\therefore$ $\boldsymbol{E(X_{2i} - X_{2i-1})^2 = D(X_{2i} - X_{2i-1}) + [E(X_{2i} - X_{2i-1})]^2 = 2\sigma^2}$，$\boldsymbol{i = 1, \cdots, n}$

……………………..2 分

$$\boldsymbol{EY = E(c\sum_{i=1}^{n}(X_{2i} - X_{2i-1})^2) = c\sum_{i=1}^{n} E(X_{2i} - X_{2i-1})^2 = cn2\sigma^2 = \sigma^2}$$，…………..1 分

解得 $\boldsymbol{c}=\frac{1}{2\boldsymbol{n}}$ 。

即当 $\boldsymbol{c}=\frac{1}{2\boldsymbol{n}}$ 时。$\boldsymbol{Y}$ 是 $\boldsymbol{\sigma}^2$ 的无偏估计。 ……………………..1 分

七、（12 分）

解：设 $H_0:\sigma^2=0.048^2$ $H_1:\sigma^2\neq 0.048^2$ ……………………..3 分

检验统计量为 $\frac{(n-1)S^2}{0.048^2}$ ……………………..3 分

拒绝域为 $\frac{(n-1)s^2}{0.048^2}<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $\frac{(n-1)s^2}{0.048^2}>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ ……..3 分

查表得：$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.95}(4)=0.711$，$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.05}(4)=9.488$

计算得 $s^2=\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2)=0.03112$

$$\frac{(n-1)s^2}{0.048^2}=\frac{4\times 0.03112}{0.048^2}=1$$

不满足拒绝域的条件，认为这批纤维纤度的方差没有显著变化。

……………………..3 分