习题4-10

1、由 $f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$ 知：$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 单调减且呈凹函数。

由单调性有 $f(b)<f(x)<f(a)$，$x\in(a,b)$。

由凹函数定义有：$f(x)<g(x)=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

显然：$g(x)=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ 为过 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 的直线方程。

因此有：$f(b)<g(x)<f(a)$，$x\in(a,b)$。

综上有：$f(b)<f(x)<f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)<f(a)$。

根据积分保号性有：$(f(x)>0)$

$$\int_a^b f(b)\,dx<\int_a^b f(x)dx<\int_a^b\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]dx$$

又 $\int_a^b f(b)dx=f(b)(b-a)=S_2$。

$\int_a^b f(x)dx=S_1$。

$$\int_a^b\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]dx=f(a)(b-a)+\frac{b^2-a^2}{2}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-a(b-a)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)=S_3$$

则有：$S_2<S_1<S_3$

2、由已知可得：$f(g(y))=y$，令 $f(a)=m$，则 $g(m)=a$，又 $f(x)\geq 0$，$g(y)\geq 0$

则 $\int_0^a f(x)dx+\int_0^b g(y)dy$ （令 $x=g(y)$，则 $x=0$ 时 $y=0$，$x=a$ 时，$y=m$）

$=\int_0^m f(g(y))\,d(g(y))+\int_0^b g(y)dy$

$=\int_0^m y\,d(g(y))+\int_0^b g(y)dy=yg(y)\Big|_0^m-\int_0^m g(y)dy+\int_0^b g(y)dy$

$=mg(y)-\int_b^m g(y)dy=ma-\int_b^m g(y)dy$ $(*)$。

若 $m\geq b$，$y\in[b,m]$，$g(y)\leq g(m)=a$，$(*)\geq ma-\int_b^m a\,dy=ab$。

若 $m<b$，$(*)=ma+\int_m^b g(y)dy\geq ma+\int_m^b g(m)dy=ma+\int_m^b a\,dy=ab$。

综上：$\int_0^a f(x)+\int_0^b g(y)\,dy\geq ab$，当且仅当 $g(y)=g(m)=a$ 时等号成立。

广义地、$a=b=0$ 时等号也成立

3. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^p\cdot\dfrac{1}{n}$ (令 $f(x)=x^p$).

$$=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{1}{n^{n\times\frac{1}{n}}}(n!)^{\frac{1}{n}}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\ln\frac{3}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\ln x\,dx=(x\ln x-1)\Big|_0^1=-1-\lim_{x\to0^+}(x\ln x)$$

$$=-1+\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{-x}}=-1+\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=-1+0=-1$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}}+\sqrt{\dfrac{2}{n}}+\sqrt{\dfrac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{\dfrac{n}{n}}\right)\dfrac{1}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$

$$=\frac{2}{3}$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\dfrac{1}{(n^2+1)^2}+\cdots+\dfrac{n}{(2n^2)^2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^4}\left[\dfrac{1}{(1+(\frac{1}{n})^2)^2}+\dfrac{2}{(1+(\frac{2}{n})^2)^2}+\cdots+\dfrac{n}{(1+(\frac{n}{n})^2)^2}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{\frac{1}{n}}{(1+(\frac{1}{n})^2)^2}+\frac{\frac{2}{n}}{(1+(\frac{2}{n})^2)^2}+\cdots+\frac{\frac{n}{n}}{(1+(\frac{n}{n})^2)^2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{(1+(\frac{i}{n})^2)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}d(1+x^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{4}$$

4. (1) 令 $x=\frac{\pi}{4}-u$. 则 $dx=-du$. $x=0$ 时 $u=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$ 时, $u=0$

则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1+\tan u}du$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\, du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan u)du = \frac{\pi\ln 2}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan u)du$

$= \frac{\pi\ln 2}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$

$\Rightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = \frac{\pi\ln 2}{4}$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = \frac{\pi\ln 2}{8}$

(2) $\int e^{\sin x}\cdot\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx = \int e^{\sin x}x\cos x\,dx - \int\frac{e^{\sin x}\sin x}{\cos^2 x}dx$

$= \int x e^{\sin x}d(\sin x) - \int e^{\sin x}\sec x\tan x\,dx$

$= \int x\,d(e^{\sin x}) - \int e^{\sin x}d(\sec x)$

$= xe^{\sin x} - \int e^{\sin x}dx - \left[e^{\sin x}\sec x - \int \sec x\,d(e^{\sin x})\right]$

$= xe^{\sin x} - \int e^{\sin x}dx - e^{\sin x}\sec x + \int e^{\sin x}\cos x\sec x\,dx$

$= xe^{\sin x} - e^{\sin x}\sec x + C$

$= e^{\sin x}(x-\sec x)+C$

(3) 由于被积函数 $\sqrt{1-\sin 2x}$ 为周期为 π 的函数. 则我们考虑:

$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}\,dx = \int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx$

$= (\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$

$= (\sqrt{2}-1)+(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

则原式 $= 2\sqrt{2}n$.

(4) $\int_{-2}^{2}(|x|+x)e^{-|x|}dx=\int_{-2}^{2}|x|\cdot e^{-|x|}dx+\int_{-2}^{2}xe^{-|x|}dx$ （第一个被积函数为偶，第二个为奇）

$$=\int_{-2}^{2}|x|e^{-|x|}dx+0$$

$$=2\int_{0}^{2}xe^{-x}dx=2\int_{0}^{2}(-x)e^{-x}d(-x)$$

$$=2\cdot(-xe^{-x}-e^{-x})\Big|_{0}^{2}$$

$$=-6e^{-2}+2$$

(5) 令 $e^{x}=t$，则 $x=\ln t$，$dx=\frac{1}{t}dt$

原式 $=\int\frac{\arctan t}{t^{3}}dt=\frac{1}{2}\int\arctan t\,d\left(\frac{1}{t^{2}}\right)=-\frac{1}{2}\left[\frac{\arctan t}{t^{2}}-\int\frac{1}{t^{2}}\cdot\frac{1}{1+t^{2}}dt\right.$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\arctan t}{t^{2}}-\int\left(\frac{1}{t^{2}}-\frac{1}{1+t^{2}}\right)dt\right]=-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\arctan t}{t^{2}}+\frac{1}{t}+\arctan t+C\right]$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-2x}\arctan e^{x}+e^{-x}+\arctan e^{x})+C$$

(6) 原式 $=\int\frac{dx}{2\sin x(1+2\cos x)}=\int\frac{dx}{8\sin\frac{x}{2}\cos^{3}\frac{x}{2}}=\int\frac{\sec^{2}\frac{x}{2}}{4\tan\frac{x}{2}}d\tan\frac{x}{2}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}+\tan\frac{x}{2}\right)d\tan\frac{x}{2}$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{2}\tan^{2}\frac{x}{2}\right)+C$$

(7) 令 $x=\tan z$，$dx=\sec^{2}z\,dz$

$$\int\frac{\arctan x}{x^{2}(1+x^{2})}dx=\int\frac{z}{\tan^{2}z\sec^{2}z}\cdot\sec^{2}z\,dz=\int z\cot^{2}z\,dz=\int z(\csc^{2}z-1)dz$$

$$=\int z(\csc^{2}z-1)dz=\int z\csc^{2}z\,dz-\int z\,dz=\int z\,d(-\cot z)-\int z\,dz$$

$$=-z\cot z+\int\cot z\,dz-\int z\,dz=-z\cot z+\ln|\sin x|-\frac{z^{2}}{2}+C$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\right|-\frac{1}{2}(\arctan x)^{2}+C$$

(8) 令 $\sqrt{e^x-2}=t$，$e^x=t^2+2$　$x=\ln(2+t^2)$．$dx=\frac{2t}{2+t^2}dt$

则 $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}dx=\int\frac{\ln(2+t^2)(t^2+2)}{t}\cdot\frac{2t}{2+t^2}dt=2\int\ln(2+t^2)dt$

$=2\left(t\ln(2+t^2)-2\int\frac{t^2}{2+t^2}dt\right)$

$=2t\ln(2+t^2)-4\int\frac{t^2+2-2}{t^2+2}dt$

$=2t\ln(2+t^2)-4t+4\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C$

$=2x\sqrt{e^x-2}-4\sqrt{e^x-2}+4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x-2}{2}}+C$

(9) 令 $x=\sin t$，$dx=\cos t\,dt$，$x=\frac{1}{2}$时，$t=\frac{\pi}{6}$．$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$t=\frac{\pi}{3}$．

则 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2t}{\cos t}\cos t\,dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2t\,dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos2t}{2}dt$

$=\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin2t}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{12}$．

(10) 令 $t=\sqrt{1-e^{-2x}}$．$dx=\frac{t}{1-t^2}dt$．$x=0$时．$t=0$　$x=\ln2$时．$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

则 $\int_0^{\ln2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}t\cdot\frac{t}{1-t^2}dt=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{1-t^2}-1\right)dt$

$=\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}-t\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(11) $\int e^{2x}(\tan x+1)^2dx=\int e^{2x}(\tan^2x+1)dx+\int e^{2x}2\tan x\,dx$

$=\int e^{2x}d\tan x+\int\tan x\,de^{2x}$

$=e^{2x}\tan x-\int\tan x\,de^{2x}+\int\tan x\,de^{2x}$

$=e^{2x}\tan x+C$

(12) 因为 $\int \frac{\arctan x}{x^2}dx = -\int \arctan x \, d\frac{1}{x} = \frac{-\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x} d\arctan x$

$= \frac{-\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{-\arctan x}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$

$= \frac{-\arctan x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{1+x^2} = \frac{-\arctan x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

则 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}dx = \left(-\frac{\arctan x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Big|_1^{+\infty}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-\arctan x}{x} + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|\right) - \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right)$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$

(13) 原式 $= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x-1}}{1+e^{2-2x}}dx = e^{-2}\int_1^{+\infty} \frac{e^{(1-x)}}{e^{2-2x}+1}dx = e^{-2}\int_1^{+\infty} \frac{-1}{e^{2-2x}+1}de^{(1-x)}$

$= -e^{-2}\arctan(e^{1-x})\Big|_1^{+\infty}$

$= -e^{-2}(\arctan 0 - \arctan 1)$

$= -e^{-2}\left(0 - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\pi}{4}e^{-2}$

(14) 先求不定积分:

$\int \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx = -\int \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}d(2-x) = \int \ln(1+x)\, d\left(\frac{1}{2-x}\right)$

$= \frac{\ln(1+x)}{2-x} - \int \frac{1}{2-x}d(\ln(1+x)) = \frac{\ln(1+x)}{2-x} - \int \frac{1}{(2-x)(1+x)}dx$

$= \frac{\ln(1+x)}{2-x} - \frac{1}{3}\int \frac{2-x+1+x}{(2-x)(1+x)}dx = \frac{\ln(1+x)}{2-x} - \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x}\right)dx$

$= \frac{\ln(1+x)}{2-x} - \frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+x}{2-x}\right| + C$

则原式 $= \left(\frac{\ln(1+x)}{2-x} - \frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+x}{2-x}\right|\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\ln 2$.

5. 因为 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}=\ln\frac{x^2-1+1}{x^2-1-1}$

则 $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$

又 $f(\varphi(x))=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$

则 $\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x \Rightarrow \varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

则 $\int\varphi(x)dx=\int\frac{x+1}{x-1}dx=\int(1-\frac{2}{x-1})dx=x+2\ln|x-1|+C$

6. 因为被积函数为周期$=2\pi$的函数.

则 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt$

则 $F'(x)=0$，即 $F(x)$为常数,与x无关.

则 $F(x)=\int_0^{2\pi}\sin t\,e^{\sin t}dt=\int_0^{\pi}\sin t\,e^{\sin t}dt+\int_\pi^{2\pi}\sin t\,e^{\sin t}dt$

又对于 $\int_0^{\pi}\sin t\,e^{\sin t}dt$，因为 $t\in[0,\pi]$ 时 $\sin t\,e^{\sin t}>0$. 则 $\int_0^{\pi}\sin t\,e^{\sin t}dt>0$

又对于 $\int_\pi^{2\pi}\sin t\,e^{\sin t}dt$. 令 $u=t-\pi$，故：

$\int_\pi^{2\pi}\sin t\,e^{\sin t}dt=\int_0^{\pi}\sin(u+\pi)\cdot e^{\sin(u+\pi)}du=\int_0^{\pi}-\sin u\cdot e^{-\sin u}du$

因定积分与积分变量名无关,

则 $F(x)=\int_0^{\pi}\sin t\,e^{\sin t}dt+\int_\pi^{2\pi}\sin t\,e^{\sin t}dt$

$=\int_0^{\pi}\sin t\,e^{\sin t}dt-\int_0^{\pi}\sin t\,e^{-\sin t}dt$

$=\int_0^{\pi}\sin t\,(e^{\sin t}-e^{-\sin t})dt$

又在 $t\in(0,\pi)$ 上，$\sin t>0>-\sin t$

即 $e^{\sin t}-e^{-\sin t}>0$.

则 $F(x)$一定为正数.

综上：$F(x)$为正常数

7. 令 $\int_0^1 f(x)dx=A$，对原式两边积分：

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx\cdot\int_0^1 f(x)dx$$

即 $A=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx+A\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$

$\Rightarrow A=\arctan\Big|_0^1+A\cdot\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow A=\frac{\pi}{4-\pi}$.

即 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{4-\pi}$.

则 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\,\frac{\pi}{4-\pi}$.

8. $\int_0^2 x^2 f''(x)dx=\int_0^1 (2x)^2 f''(2x)d(2x)=8\int_0^1 x^2 f''(2x)dx=4\int_0^1 x^2 d\,f'(2x)$

$=4\cdot[x^2 f'(2x)]\Big|_0^1-8\int_0^1 x f'(2x)dx$

$=4f'(2)-4\int_0^1 x\,df(2x)$

$=0-4[xf(2x)]\Big|_0^1+4\int_0^1 f(2x)dx$. 令 $u=2x$. $du=2dx$

$=-4f(2)+4\int_0^2 f(u)\frac{1}{2}du$

$=-4\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{2}\times 1$

$=0$

9. 令 $y=\frac{1}{t}$. $dt=-\frac{1}{y^2}dy$

$$\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln(\frac{1}{y})}{1+\frac{1}{y}}\cdot\frac{-1}{y^2}dy=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{-\ln y\cdot y}{1+y}\cdot\frac{-1}{y^2}dy=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln y}{y(1+y)}dy$$

$=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{t(1+t)}dt$.

则 $f(x)+f(\frac{1}{x})=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt+\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}dt=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t+t\ln t}{t(1+t)}dt$

$=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{(1+t)\ln t}{t(1+t)}dt=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{t}dt=\int_1^{\frac{1}{x}}\ln t\,d\ln t=\frac{1}{2}(\ln t)^2\Big|_1^{\frac{1}{x}}$

$=\frac{1}{2}\{(\ln\frac{1}{x})^2-(\ln 1)^2\}=\frac{1}{2}\cdot[-\ln(x)]^2=\frac{1}{2}(\ln x)^2$

10. 对 $\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx$ 用分部积分法：

$$\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx = x(1-x)f'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (1-2x)f'(x)dx \quad \text{（再分部积分）}$$

$$= 0 - (1-2x)f(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 f(x)dx$$

$$= f(1)+f(0)-2\int_0^1 f(x)dx$$

移项得：$\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx$

证毕.

11. 直接反常积分求解：

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{c}{x+2}\right)dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx - c\int_0^{+\infty}\frac{1}{x+2}dx$$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2+4})\Big|_0^{+\infty} - c\ln|x+2|\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \ln\left[\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{(x+2)^c}\right]\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\ln\left[\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{(x+2)^c}\right] - \ln 2^{1-c}$$

要使原反常积分收敛

则 $\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{(x+2)^c} = \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}}{c(x+2)^{c-1}} = \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+1}{c(x+2)^{c-1}}$ 存在

则 $c-1=0 \Rightarrow c=1$，此时：

原反常积分 $= \lim_{x\to+\infty}\ln 2 - \ln 2^0 = \ln 2$.

12. 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，当 $f(t)$ 为连续奇函数，则 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt$，令 $u=-t$，则

$F(-x)=\int_0^x f(-u)d(-u) = \int_0^x[-f(-u)]du = \int_0^x f(u)du$（因 $f(x)$ 为奇函数 有 $f(u)=-f(-u)$）

$=F(x)$，则 $F(x)$ 为偶函数.

当 $f(t)$ 为连续偶函数，则同上：$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt = \int_0^x f(-u)d(-u) = -\int_0^x f(u)du = -F(x)$

则 $F(x)$ 为奇函数.

下面证明：奇函数一切原函数为偶函数，偶函数的原函数中有一个是奇函数.

设$F(x)$为$f(x)$的原函数.

$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt+F(0)$. 设$u=-t$.

$F(-x)=\int_0^{x}-f(-u)du+F(0)$

若$f(x)$为奇函数, 则$F(-x)=\int_0^{x}f(u)du+F(0)=F(x)$

即$F(x)$为偶函数.

若$f(x)$为偶函数. 则$F(-x)=-\int_0^{x}f(u)du+F(0)=-F(x)+2F(0)$

当$F(0)=0$时 $F(x)$为奇函数, 即在原函数$F(x)+C$中取$C=-F(0)$.

因此偶函数的原函数中只有一个是奇函数.

证毕

13. (1) 因为$\int_0^{x}(x-2t)f(t)dt=x\int_0^{x}f(t)dt-\int_0^{x}2tf(t)dt$

则$F(-x)=-x\int_0^{-x}f(t)dt-\int_0^{-x}2tf(t)dt$, (令$u=-t$)

$=-x\int_0^{x}f(-u)d(-u)-\int_0^{x}-2uf(-u)d(-u)$ (因$f(x)$为偶函数. $f(x)=f(-x)$)

$=x\int_0^{x}f(u)du-\int_0^{x}2uf(u)du$

$=F(x)$

则$F(x)$为偶函数

(2) $F(x)=x\int_0^{x}f(t)dt-\int_0^{x}2tf(t)dt$

则$F'(x)=\int_0^{x}f(t)dt+xf(x)-2xf(x)=\int_0^{x}f(t)dt-xf(x)$

由积分中值定理, $\exists\xi\in(0,x)$, 使:

$F'(x)=x[f(\xi)-f(x)]$

由于$f(x)$单调减少, 则

当$x>0$时, $f(\xi)-f(x)>0$. 故$F'(x)>0$

故$F(x)$是单调增加函数.

14. $\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x xf(x)dx}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+xf'(x)}{6x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)+f'(x)+xf''(x)}{6}$

$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

则当$c=\frac{1}{3}$时，$F(x)$处处连续.

15. (1) $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$. 又$f(x)>0$.

则$F'(x)\geq 2\sqrt{f(x)\frac{1}{f(x)}}=2$. 当且仅当$f(x)=\frac{1}{f(x)}$时 即$f(x)=1$时取等号.

(2) 因为$F'(x)\geq2$. 则$F(x)$在$[a,b)$内单增.

又$F(a)=0+\int_b^a\frac{1}{f(t)}dt=0-\int_a^b\frac{1}{f(t)}dt$.

因$f(x)>0$, 则$\frac{1}{f(t)}>0$. 则$\int_a^b\frac{1}{f(t)}dt>0$. 则$F(a)<0$

$F(b)=\int_a^b f(t)dt+0=\int_a^b f(t)dt>0$.

则由零值定理. $F(x)=0$在(a,b)内有且仅有一个实根.

16. $x=0$, $x=2$是瑕点，积分为反常积分

$$\int_{-1}^3\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx=\int_{-1}^0\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx+\int_0^2\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx+\int_2^3\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$$

$$=\arctan f(x)\Big|_{-1}^0+\arctan f(x)\Big|_0^2+\arctan f(x)\Big|_2^3$$

$$=\lim_{x\to0^-}\arctan f(x)-\arctan f(-1)+\lim_{x\to2^-}\arctan f(x)-\lim_{x\to0^+}\arctan f(x)$$

$$+\arctan f(3)-\lim_{x\to2^+}\arctan f(x)$$

$$=-\frac{\pi}{2}-0+\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{32}{27}-\frac{\pi}{2}$$

$$=\arctan\frac{32}{27}-2\pi.$$

17. 对$\int_c^x tf(t)dt=\sin x-x\cos x-\frac{1}{2}x^2$两边求导：得：

$xf(x)=\cos x-\cos x+x\sin x-x$

$\Rightarrow f(x)=\sin x-1$

$\int_c^x tf(t)dt=\int_c^x(t\sin t-t)dt=\left(-t\cos t+\sin t-\frac{1}{2}t^2\right)\Big|_c^x$

$=-x\cos x+\sin x-\frac{1}{2}x^2-\left(-c\cos c+\sin c-\frac{1}{2}c^2\right)\equiv\sin x-x\cos x-\frac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow c=0$.

18. 因为 $\int_0^\pi f''(x)\cdot\sin x dx=\int_0^\pi \sin x d(f'(x))=\sin x f'(x)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\cos x dx$

$=-\int_0^\pi \cos x d(f(x))=-\cos x f(x)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f(x)\sin x dx$

$\Rightarrow \int_0^\pi f''(x)\sin x dx+\int_0^\pi f(x)\sin x dx=\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\sin x dx=-\cos x f(x)\Big|_0^\pi=f(\pi)+f(0)=5$

$\Rightarrow f(0)=5-f(\pi)=5-2=3$

19. 若 $f(x)$ 以 π 为周期,

则 $f(x)=f(x+\pi)$

即 $\int_0^x|\sin t|dt-cx=\int_0^{x+\pi}|\sin t|dt-c(x+\pi)=\int_0^x|\sin t|dt+\int_x^{x+\pi}|\sin t|dt-cx-c\pi$

$\Rightarrow \int_x^{x+\pi}|\sin t|dt=c\pi$.

又 ∵ $|\sin t|$ 是以 π 为周期的.

则 $\int_x^{x+\pi}|\sin t|dt=\int_0^\pi|\sin t|dt=\int_0^\pi \sin t dt=-\cos t\Big|_0^\pi=2=c\pi$

$\Rightarrow c=\frac{2}{\pi}$

20. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt}{h}\ \xlongequal{\text{洛比达法则}}\ \lim\limits_{h\to0}\dfrac{\left[\int_a^x f(t+h)dt\right]'-\left[\int_a^x f(t)dt\right]'}{1}$ (注意,这里是对h求导).

$=\lim\limits_{h\to0}\left[\int_a^x f(t+h)dt\right]'$

令 $\int_a^x f(t+h)dt=F(x+h)-F(a+h)$ (因为 $f(x)$ 是连续的)

则 $\lim\limits_{h\to0}\left[\int_a^x f(t+h)dt\right]'=\lim\limits_{h\to0}\left[F'(x+h)\cdot1-F'(a+h)\cdot1\right]$

$=\lim\limits_{h\to0}[f(x+h)-f(a+h)]$

$=f(x)-f(a)$.

(这里不能用 $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}[f(t+h)-f(t)]\overset{=f'(x)}{}$ 是因为题目没说 $f(x)$ 可导).

21：设 $f(x)=\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,dt+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,dt$

下证 $f(x)=\frac{\pi}{4}$，显然 $f(x)$ 是以 π 为周期的偶函数．

下面只考虑 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 即可．

$f'(x)=2\sin x\cos x\arcsin\sqrt{\sin^2 x}-2\cos x\sin x\arccos\sqrt{\cos^2 x}$

$=2\sin x\cos x\arcsin(\sin x)-2\cos x\sin x\arccos(\cos x)$

$=2\cdot x\sin x\cos x-2x\cos x\sin x=0$

因此 $f(x)=C$，也就是说 $f(x)$ 是一个常数．

又 $f(\frac{\pi}{2})=\int_0^1\arcsin\sqrt{t}\,dt$

令 $\arcsin\sqrt{t}=u$，则 $t=\sin^2 u$，$dt=2\sin u\cos u\,du$

$f(\frac{\pi}{2})=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\sin u\cos u\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\sin 2u\,du=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\,d(\cos 2u)$

分部积分

$f(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{2}u\cos 2u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2u\,du=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin 2u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

则 $f(x)=\frac{\pi}{4}$ 成立．

证毕．

22．(1) $F'(x)=e^{-x^4}\cdot 2x$ $\quad F''(x)=2e^{-x^4}+2xe^{-x^4}\cdot(-4x^3)=2e^{-x^4}-8x^4e^{-x^4}$

令 $F'(x)=0$，得 $x=0$．

又 $F''(0)=2>0$

则 $x=0$ 为极小值点，极小值为 $F(0)=0$

(2) 令 $F''(x)=0$，得 $(2-8x^4)e^{-x^4}=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

令 $F''(x)<0$ 得 $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$

令 $F''(x)>0$ 得 $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$

则 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 都为拐点．

(3) $\int_{-2}^{3}x^2e^{-x^4}2x\,dx=\frac{-1}{2}\int_{-2}^{3}e^{-x^4}d(-x^4)=-\frac{1}{2}e^{-x^4}\Big|_{-2}^{3}=\frac{1}{2}(e^{-16}-e^{-81})$

23. 对 $\int_0^y e^{t^2}dt+\int_0^{3\sqrt{x}}(1-t)^3dt=0$ 两边关于 x 求导，得：

$$e^{y^2}y'+(1-3\sqrt{x})^3\cdot 3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$$

$$\Rightarrow y'=\frac{3(3\sqrt{x}-1)^3}{2\sqrt{x}\,e^{y^2}}$$

令 $y'=0$，得 $x=\frac{1}{9}$.

令 $y'<0$　得 $0<x<\frac{1}{9}$

令 $y'>0$　得 $x>\frac{1}{9}$

则 $x=\frac{1}{9}$ 是其极小值点.

24. $f(x)=\int_{-c}^{c}|x-u|\varphi(u)du=\int_{-c}^{x}|x-u|\varphi(u)du+\int_{x}^{c}|x-u|\varphi(u)du$.

因为 $-c\le x\le c$ $(c>0)$，则：

$$f(x)=\int_{-c}^{x}(x-u)\varphi(u)du+\int_{x}^{c}(-1)(x-u)\varphi(u)du$$

$$=\int_{-c}^{x}(x-u)\varphi(u)du+\int_{c}^{x}(x-u)\varphi(u)du$$

$$=x\int_{-c}^{x}\varphi(u)du-\int_{-c}^{x}u\varphi(u)du+x\int_{c}^{x}\varphi(u)du-\int_{c}^{x}u\varphi(u)du$$

则 $f'(x)=\int_{-c}^{x}\varphi(u)du+x\varphi(x)-x\cdot\varphi(x)+\int_{c}^{x}\varphi(u)du+x\varphi(x)-x\cdot\varphi(x)$

$$=\int_{-c}^{x}\varphi(u)du+\int_{c}^{x}\varphi(u)du$$

$$f''(x)=\varphi(x)+\varphi(x)=2\varphi(x)$$

因为 $\varphi(x)$ 是正值函数

则 $f''(x)=2\varphi(x)>0$

则 $y=f(x)$ 是凹弧

25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2dt}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{kx^{k-1}}$ 存在，则 $k-1=0\Rightarrow k=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\tan x}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\tan x+\frac{2x}{\cos^2 x}}{k(k-1)x^{k-2}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2\cos^2 x+2\sin x\cos x\cdot 2x}{\cos^4 x}}{k(k-1)(k-2)x^{k-3}}$　$\Rightarrow k-3=0\Rightarrow k=3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x^{\frac{3}{2}}}{k\,x^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\sin x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}{k(k-1)x^{k-2}}$$ 存在.

则 $k-2=0 \Rightarrow k=2$

26，因 $g(x)$ 是连续函数，则存在原函数 $G(x)$，使 $G'(x)=g(x)$.

则 $f(x)=\int_0^x t\,g(x^2-t^2)dt=-\frac{1}{2}\int_0^x g(x^2-t^2)d(x^2-t^2)=-\frac{1}{2}G(x^2-t^2)\Big|_0^x=-\frac{1}{2}(G(0)-G(x^2))$

则 $f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}G(x^2)-\frac{1}{2}G(0)\right)=\frac{d}{dx}\frac{1}{2}G(x^2)=x\,g(x^2)$

27. $\int_0^3(x^2+x)f'''(x)dx=\int_0^3(x^2+x)d(f''(x))=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3(2x+1)f''(x)dx$

$=12f''(3)-\int_0^3(2x+1)df'(x)=12f''(3)-(2x+1)f'(x)\Big|_0^3+2\int_0^3 f'(x)dx$

$=12f''(3)-7f'(3)+f'(0)+2[f(3)-f(0)]$

因 $(3,2)$ 是拐点，则 $f''(3)=0$ $f(3)=2$

因 l_1 l_2 分别为过 $(0,0)$ $(3,2)$ 的切线，则

$f'(0)=\frac{4-0}{2-0}=2$，$f'(3)=\frac{4-2}{2-3}=-2$，

于是 $\int_0^3(x^2+x)f'''(x)dx=0-7\times(-2)+2+2(2-0)=20$.

28. 因为 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}\cdot\frac{3ax}{x-a}}$

$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3ax}{x-a}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{3a}{1-\frac{a}{x}}}=e^{3a}$

又 $\int_0^{+\infty}\frac{8x}{e^x}dx=8\int_0^{+\infty}-x\,de^{-x}=8\left(-xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x}d(-x)\right)$

$=\frac{-8x}{e^x}\Big|_0^{+\infty}-8e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$

$=8$

则 $e^{3a}=8$

$\Rightarrow a=\ln 2$

29. (1) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\sec^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\,d\tan x-I_{n-2}$

$=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-I_{n-2}$

$=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$.

令 $n=5$. 则 $I_5=\frac{1}{4}-I_3=\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-I_1)=-\frac{1}{4}+I_1$

$=-\frac{1}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

$=-\frac{1}{4}+(-\ln\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}$

(2) 在 $x\in[0,\frac{\pi}{4})$ 时 $0<\tan x<1$，则对于 $n>1$ 的整数有：

$(\tan x)^{n+2}<(\tan x)^n<(\tan x)^{n-2}$

则 $I_{n+2}<I_n<I_{n-2}$.

则 $\frac{I_{n+2}}{2}<\frac{I_n}{2}<\frac{I_{n-2}}{2}$

则 $\frac{I_{n+2}}{2}+\frac{I_n}{2}<\frac{I_n}{2}+\frac{I_n}{2}<\frac{I_{n-2}}{2}+\frac{I_n}{2}$

则 $\frac{I_{n+2}+I_n}{2}<I_n<\frac{I_{n-2}+I_n}{2}$

由(1)可得：有 $\frac{I_{n+2}+I_n}{2}=\frac{1}{2(n+1)}$ 　$\frac{I_{n-2}+I_n}{2}=\frac{1}{2(n-1)}$

则 $\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)}$

30. 证明数列$\{a_n\}$收敛，即证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

首先证明单调：

因为 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx$ $(n=1,2,\cdots)$. 由积分基本定理，$\exists\xi\in(n,n+1)$ 使：

$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)dx=f(n+1)-f(\xi)\cdot[(n+1)-n]=f(n+1)-f(\xi)$

而 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单减且非负的连续函数. 则：

$f(n+1)<f(\xi)$. 则 $a_{n+1}-a_n<0$

所以 $\{a_n\}$ 是单调减少的.

其次证明有界.

这里由于 $\{a_n\}$ 是单调减少的，因此只要证明有下界即可.

由$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx$得

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\left[\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^{n}f(x)dx\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)dx+f(n)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}[f(k)-f(x)]dx+f(n)$$

又$f(x)$是是区间$[0,+\infty)$上单减且非负

则$f(k)-f(x)>0$，$x\in(k,k+1)$，$f(n)\geq 0$

$\therefore a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}[f(k)-f(x)]dx+f(n)>0$

$\therefore$数列$\{a_n\}$有下界.

因此$\{a_n\}$单减有下界.

则$\{a_n\}$收敛.

31. 证明：由微分中值定理：

$f(x)-f(0)=f'(x_0)(x-0)=f'(x_0)x$ 其中$x\in[0,a]$. $x_0\in[0,x]$.

即$f(x)=f'(x_0)x$

则$|f(x)|=|f'(x_0)|x\leq Mx$，其中$M=\max\limits_{0\leq x\leq a}|f'(x)|$.

则$\left|\int_0^a f(x)dx\right|\leq\int_0^a|f(x)|dx\leq\int_0^a Mxdx=\frac{Ma^2}{2}$.

32. $\because f(x)>0$

$\therefore\sqrt{f(x)}>0$，$\frac{1}{\sqrt{f(x)}}>0$

令t为任意常数.

$\because\int_a^b\left[t\sqrt{f(x)}+\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right]^2dx\geq 0$

$\therefore\int_a^b\left[t^2f(x)+\frac{1}{f(x)}+2t\right]dx\geq 0$，$\therefore t^2\int_a^b f(x)dx+2(b-a)t+\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\geq 0$（将其视为$t$的二次式）

$\therefore\Delta=[2(b-a)]^2-4\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\leq 0$

即$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\geq(b-a)^2$.

33. 证明：

$$\left\{\left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$

$$=\left[\int_a^b f^2(x)dx\right]+\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]+2\left[\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

由柯西不等式：

$$\text{上式}\geq\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx+2\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^{\frac{1}{2}\times 2}$$

$$=\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx+2\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$=\int_a^b\left[f^2(x)+g^2(x)+2f(x)g(x)\right]dx$$

$$=\int_a^b\left[f(x)+g(x)\right]^2dx$$

则：$\left[\int_a^b(f(x)+g(x))^2dx\right]^{\frac{1}{2}}\leq\left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$

证毕.

34. $f'(x)=\int_1^{\sin x}\sqrt{1+u^4}\,du$

$f''(x)=\sqrt{1+(\sin x)^4}\cos x$.

35. $y'=\sqrt{3-x^2}$.

$ds=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+3-x^2}\,dx=\sqrt{4-x^2}\,dx$.

$s=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$. 令 $x=2\sin t$，$dx=2\cos t\,dt$

$$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}|2\cos t|\cdot 2\cos t\,dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}2\cos^2 t\,dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)dt$$

$$=4\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}$$

36. 椭球体体积为：

$V_1=2\int_0^2\pi(1-\frac{y^2}{4})dy=\frac{8}{3}\pi$.

设圆孔底面半径为 r，则所打圆孔体积为：

$V_2=2\iint_{x^2+z^2\le r^2} y\,dx\,dz=2\iint_{x^2+z^2\le r^2} 2\sqrt{1-x^2-z^2}\,dx\,dz$

在极坐标中，令 $x=\rho\cos\theta$，$z=\rho\sin\theta$，则 $0\le\theta\le 2\pi$，$0\le\rho\le r$，得

$V_2=2\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^r 2\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho=-\frac{8}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\pi$

由 $V_2=\frac{4}{3}\pi$. 得：$r=\sqrt{1-(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}}$.

则直径 $d=2r=2\sqrt{1-(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}}$

（此题超纲!!!）

37. 由抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 $(0,0)$，则 $c=0$

从而 $y=f(x)=ax^2+bx$.

又当 $x\in[0,1]$ 时 $y\ge 0$，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 $x=1$，$y=0$ 围成图形为 $\frac{4}{9}$，且使图形绕 x 轴旋转体体积最小，则：

$\frac{4}{9}=\int_0^1 f(x)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$ ①

$V=\pi\int_0^1 f(x)^2dx=\pi(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{3}+\frac{ab}{2})$ ②

由①得 $b=\frac{8-6a}{9}$ 代入②得：

$V=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{(8-6a)^2}{81\times 3}+\frac{8a-6a^2}{18}\right)$

当 $a=-\frac{5}{3}$ 时，V 最小，此时 $b=2$

综上：$a=-\frac{5}{3}$，$b=2$，$c=0$

38. 当$|x|<1$时. $y=3-(1-x^2)=x^2+2$

当$|x|\geq 1$时. $y=3-(x^2-1)=4-x^2$

令$y=0$, 则$x=\pm 2$. 曲线与x轴交于$A(2,0)$ $B(-2,0)$

令$y=3$, 则$x=\pm 1$. 曲线与$y=3$交于$C(1,3)$ $D(-1,3)$

曲线与x轴围成的封闭图形在A.B.C.D之间

显然旋转体关于y轴对称, 这里只考虑$0\leq x\leq 2$. 结果加倍即可.

(a) 取x. $0\leq x\leq 1$

旋转体的截面是以3为外径($y=3$与x轴的距离), 以$1-x^2$为内径($y=3$与$y=x^2+2$的距离)的圆环截面积$S=\pi(3^2-(1-x^2)^2]$

$$V_1=\int_0^1 S\,dx=\int_0^1\pi(3^2-(1-x^2)^2dx=\pi\int_0^1(8+2x^2-x^4)dx$$

$$=\pi(8x+2\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5})\Big|_0^1=\frac{127\pi}{5}$$

(b) 取x. $1\leq x\leq 2$

旋转体的截面是以3为外径($y=3$与x轴的距离), 以x^2-1为内径($y=3$与$y=4-x^2$的距离)的圆环截面积$S=\pi[3^2-(1-x)^2]$

$$V_2=\int_1^2 S\,dx=\int_1^2\pi\cdot[3^2-(x^2-1)^2]dx=\pi\int_1^2(8+2x^2-x^4)dx$$

$$=\pi(8x+2\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5})\Big|_1^2=\frac{9\pi}{5}$$

则$V=2(V_1+V_2)=\frac{448\pi}{15}$

39 由(1) $y'=-2bx$ 令$y'=1$ $\Rightarrow x=\frac{1}{-2b}$ 则切点为$(\frac{1}{-2b},\frac{1}{-2b}+1)$

则$\frac{-1}{2b}+1=a-b\cdot(\frac{-1}{2b})^2$

$\Rightarrow a=\frac{4b-1}{4b}$ ①

由(2). 旋转体体积为:

$$V=\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}}2\pi\cdot x\cdot(a-bx^2)dx=\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}}(2\pi ax-2\pi bx^3)dx$$

$$=(\pi ax^2-\frac{1}{2}\pi bx^4)\Big|_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}}=\frac{\pi a^2}{b}-\frac{\pi a^2}{2b}=\frac{\pi a^2}{2b}.\quad ②$$

将①代入②得 $V=\frac{\pi}{2b}\left(\frac{16b^2+1-8b}{16b^2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{16b^2-8b+1}{b^3}\right)$

令$g(b)=\frac{16b^2-8b+1}{b^3}$, $g'(b)=\frac{-16b^2+16b-3}{b^4}$. 令$g'(b)>0$ 得$b<\frac{3}{4}$ $g'(b)<0$ 得$b>\frac{3}{4}$

则$g(b)$在$b=\frac{3}{4}$处取极大 V在$b=\frac{3}{4}$处取最大.

此时$a=\frac{2}{3}$

40：设容器体积为V，即由抛物线 $y=\frac{x^2}{10}$ 在 $y\in[0,10]$ 上绕y轴旋转得到立体的体积；容器的容积，即由 $y=\frac{x^2}{10}+1$ 在 $y\in[1,10]$ 上绕y轴所得立体的体积V_1

则 $V=\int_0^{10}\pi x^2dy=\pi\int_0^{10}10y\,dy=500\pi$.

$V_1=\int_1^{10}\pi x^2dy=\pi\int_1^{10}10(y-1)dy=405\pi$

则容器重量为 $(V-V_1)\frac{25}{19}=\frac{2375}{19}\pi=125\pi$

设注入液体最大深度为h，则注入液体重量为 $3\pi\int_1^{h+1}10(y-1)dy=15\pi h^2$

若液体和容器所受重力与浮力相等，则可保持不沉没.

则 $500\pi\cdot\frac{25}{19}\cdot g=(125\pi+15\pi h^2)g$.

$\Rightarrow h^2=25$

$\Rightarrow h=5$.

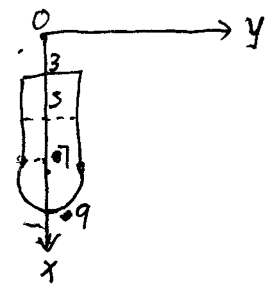
41. $dP=\rho g(103-x)\,2\sqrt{9-x^2}\,dx$ （以圆心为原点）

$P=\int_{-3}^{3}\rho g(103-x)2\sqrt{9-x^2}\,dx$

换算单位后：

$P=(\rho g103)\times4\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx=926\rho g\pi=0.0927\pi g\ (N)\approx28.54N$.

42.



如图建立坐标系.

$x\in(5,7)$时. $dV=\pi 2^2dx=4\pi dx$, $x\in(7,9)$时 $dV=\pi(4-(x-7)^2)dx=\pi(-x^2+14x-45)dx$

$W=\int_5^7\rho g\pi x\,4\,dx+\int_7^9\rho g\pi x(-x^2+14x-45)dx$

计算：$W=4\rho g\pi\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_5^7+\rho g\pi\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{14}{3}x^3-\frac{45}{2}x^2\right)\Big|_7^9$

$=\frac{268}{3}\pi\rho g\ (J)$

$\approx2748965.3\ J$.

43：设将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功 $W=W_1+W_2+W_3$.

W_1 是克服抓斗自重做的功，W_2 是克服缆绳自重做的功，

W_3 是提出污泥做的功.

则 $W_1=400\times30=12000J$

$W_2=\int_0^{30}50(30-x)\cdot dx=22500J$

在时间间隔 $[t, t+dt]$ 内提升污泥做功 $dW=3(2000-20t)dt$.

将污泥从井底提升至井口共需 $\frac{30}{3}=10s$.

则 $W_3=\int_0^{10}3(2000-20t)dt=57000J$

则 $W=12000+22500+57000=91500J$

44 (1) 以底部中点为原点，竖直方向为 y 轴建立坐标系.

则抛物线为 $y=\frac{x^2}{250}$.

则改造前河道截面积为 $A_1=2\int_0^{50}(10-\frac{x^2}{250})dx=\frac{2000}{3}$.

改造后河道截面积为 $A_2=\frac{1}{2}(100+80)\times10=900$.

因此水流量增加 $\frac{A_2}{A_1}=1.35$ 倍.

(2) 抛物线在 $(50,10)$ 处直线方程为 $y=x-40$，

则 $W=2\rho\int_0^{10}(y+40-5\sqrt{10y})(10-y)dy=7000\rho(J)$

45. (1) $u=1000kg/m^3$ 时，水中重力与浮力相等，在水中移时所做的功为零.

在水面外所做功如下计算：

体积微元为：

$dV=\pi R^2dx$.

则 $dW=(H-x)\cdot ug\pi R^2dx$

$W=\int_0^H(H-x)ug\pi R^2dx=\frac{1}{2}\pi\cdot ugR^2H^2\cdot(J)$.

(2) $u>1000kg/m^3$ 时，再(1)中加上克服部分重力做功：

$dW=x\cdot(ug\pi R^2dx-1000g\pi R^2dx)=(u-1000)xg\pi R^2dx$

$W=\int_0^H(u-1000)xg\pi R^2dx=\frac{1}{2}(u-1000)g\pi R^2H^2\ (J)$

则总功为 $\frac{1}{2}\pi ugR^2H^2+\frac{1}{2}(u-1000)g\pi R^2H^2=\frac{1}{2}\pi gR^2H^2(2u-1000)\ (J)$

46：取星形线上ds段线密度为$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$，则对应质量为$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}ds$

$$\therefore dF = \frac{G\cdot(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}ds}{x^2+y^2} = G(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}ds$$

$$dF_x = dF\cos\alpha = G(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}ds = Gxds$$

$$dF_y = dF\sin\alpha = G(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}ds = Gyds$$

$$\therefore F_x = G\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t\cdot\sqrt{[3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)]^2+[3a\sin^2 t\cdot\cos t]^2}\,dt$$

$$= 3a^2G\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\cdot\sin t\,dt$$

$$= -3a^2G\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,d\cos t$$

$$= -3a^2G\left(\frac{\cos^5 t}{5}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{5}a^2G$$

同理 $F_y = \frac{3}{5}a^2G$