(2011-2012)工科数学分析第一学期期末试题(A卷)解答（2012.1）

一. 1. $-\dfrac{2}{\pi}$

2. $\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}+g'(\sqrt{x^2+1})\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

3. $-\dfrac{1}{1+\tan x}$

4. $\dfrac{dx}{dt}=kx(N-x)$

5. $\dfrac{e^4+1}{4}$

二.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{e^{x^3}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(6\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(-x^2)}{3x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{1}{6}\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(9\text{ 分})$$

三.

$$\frac{1}{\cos^2(x+y)}(1+\frac{dy}{dx})=y^2+2xy\frac{dy}{dx}\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(6\text{ 分})$$ (左右侧各 3 分)

解得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1-y^2\cos^2(x+y)}{2xy\cos^2(x+y)-1}\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(7\text{ 分})$$

在已知方程中令 $x=0$, 得 $\tan y=1$, $y=\dfrac{\pi}{4}$ ……………..(8 分)

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\frac{1-(\frac{\pi}{4})^2\cos^2\frac{\pi}{4}}{-1}=\frac{1}{32}\pi^2-1\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(9\text{ 分})$$

四. 令 $\frac{y}{x}=u$, 即 $y=xu$, $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ ……………………..(2 分)

原方程化成 $x\frac{du}{dx}=\tan u$ ……………………(4 分)

$\frac{\cos u}{\sin u}du=\frac{dx}{x}$ ……………………..(5 分)

$\ln|\sin u|=\ln|x|+C_1$ ……………………..(7 分)

$\sin u=Cx$ ……………………..(8 分)

原方程通解为 $\sin\frac{y}{x}=Cx$ ……………………..(9 分)

五. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & x>1\\ 0 & x=1\\ \frac{-2x+1}{x^2+1} & 0\le x<1\end{cases}$ ……………………(3 分)

$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1\frac{-2x+1}{x^2+1}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ ……………………(5 分)

$=(-\ln(x^2+1)+\arctan x)\Big|_0^1-\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty}$ ………………(8 分)

$=-\ln 2+\frac{\pi}{4}+1$ ……………………(9 分)

六. 设 $f(x)=\sin^3 x\cos x-a$ ……………………(1 分)

$f'(x)=3\sin^2 x\cos^2 x-\sin^4 x$ ……………………..(2 分)

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{\pi}{3}$ $x=\frac{2\pi}{3}$ ……………………(3 分)

$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$，$(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$，$(\frac{2\pi}{3},\pi)$ 内单调

$f(0)=-a<0$ $f(\pi)=-a<0$ $f(\frac{2\pi}{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{16}-a<0$

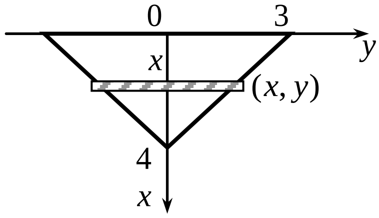
$f(\frac{\pi}{3})=\frac{3\sqrt{3}}{16}-a$ …………………..(6 分)

当 $a<\frac{3\sqrt{3}}{16}$, $f(\frac{\pi}{3})>0$，方程有两个不同实根.

当 $a=\frac{3\sqrt{3}}{16}$, $f(\frac{\pi}{3})=0$，方程有一个实根.

当 $a>\frac{3\sqrt{3}}{16}$, $f(\frac{\pi}{3})<0$，方程没有实根. ……………………(9 分)

七.



$$y = 3 - \frac{3}{4}x$$ ……………………….(1 分)

$$dW = x\mu g\pi y^2 dx = \pi\mu g x(3 - \frac{3}{4}x)^2 dx$$ ……………(4 分)

$$W = \int_0^4 \pi\mu g x(3 - \frac{3}{4}x)^2 dx$$ …………………...(6 分)

$$= \int_0^4 \frac{9}{16}\pi\mu g(16x - 8x^2 + x^3)dx$$

$$= 12\pi\mu g = 12000\pi g \text{ (J)}$$ …………………….(9 分)

八.

$$r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$$ ……………………(1 分)

$$r_1 = 1 \qquad r_2 = -\frac{1}{2}$$ ……………………….(2 分)

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}$$ ………………………..(4 分)

设 $$y^* = x(Ax + B)e^x$$ ……………………….(6 分)

代入方程得 $$A = \frac{2}{3} \qquad B = -\frac{8}{9}$$

$$y^* = (\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{9}x)e^x$$ ……………………(8 分)

通解 $$y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + (\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{9}x)e^x$$ …………………..(9 分)

九. 由二曲线相切得 $ax^2 = \ln x \quad 2ax = \frac{1}{x}$

解得 $$a = \frac{1}{2e}$$ ……………………(3 分)

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} (e^y - \sqrt{2ey})dy$$ ……………………(2 分)

$$= (e^y - \sqrt{2e}\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}})\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{e} - 1$$ ……………..(7 分)

$$V = \int_0^{\frac{1}{2}} 2\pi y(e^y - \sqrt{2ey})dy$$ …………………(9 分)

$$= 2\pi(ye^y - e^y - \sqrt{2e}\frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}})\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\pi(1 - \frac{3}{5}\sqrt{e})$$ ………………….(11 分)

十. 令 $x-t=u$ $\int_0^x g(x-t)dt=\int_0^x g(u)du$ ……………………….(2 分)

$$f(x)=-2x^2+\int_0^x g(u)du$$

$$f'(x)=-4x+g(x)$$ ………………………..(4 分)

由题设及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$，得 $g(0)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ …………………….(5 分)

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=0$$ ……………………..(6 分)

$f'(0)=0$ 故 $x=0$ 是驻点 ……………………..(7 分)

$$f''(x)=-4+g'(x)$$ ……………………(8 分)

$$f''(0)=-4<0$$

故 $x=0$ 是极值点，且 $f(0)$ 是极大值 ………………..(9 分)

十一. 令 $F(x)=f(x)\cos x$ ………………..(1 分)

$$F(\frac{\pi}{2})=0$$ ………………..(2 分)

由 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos^2 x dx=0$，及积分中值定理，$\exists c\in[0,\frac{\pi}{4}]$，使

$$f(c)\cos^2 c\cdot\frac{\pi}{4}=0$$ ………………….(4 分)

因为 $\cos c\cdot\frac{\pi}{4}\neq 0$， 故有 $F(c)=f(c)\cos c=0$ …………………(5 分)

根据罗尔中值定理，$\exists\xi\in(c,\frac{\pi}{2})\subset(0,\frac{\pi}{2})$，使

$$F'(\xi)=0$$

即 $f'(\xi)\cos\xi+f(\xi)(-\sin\xi)=0$

$$f'(\xi)=f(\xi)\tan\xi$$ …………………..(7 分)