

线性代数 A 试题 (B 卷)

座号_____ 班级_____ 学号_____ 姓名_____

(试卷共 7 页, 八道大题. 解答题必须有解题过程, 试卷后面空白页撕下做稿纸, 试卷不得拆散)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
签名									

一、 填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 设矩阵 A 与 B 相似, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. 则有,

$$a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + tx_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围是 _____

3. 设 4 阶矩阵 A 的各行元素之和均为 0, 且 A 的秩为 3, 则齐次线性方程组 $AX = 0$ 的通解为 _____.

4. 矩阵乘积 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^6 = \underline{\hspace{4cm}}$

5. 设 A 是 5 阶方阵, 且已知存在 5 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则 A 的所有初等因子为 _____

二、(10 分) 讨论 a, b 取何值时, 下列线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + ax_2 + ax_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

(1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有无穷解, 并在有无穷多解时, 用其导出方程组的基础解系表示方程组的通解。

三、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 且有 $A^*XA = 3XA - 6I$, 求矩阵 X 。

四（10 分）已知矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ， \mathbf{A}^* 是其伴随矩阵，试求行列式 $|(\frac{1}{2}\mathbf{A})^* + (4\mathbf{A})^{-1}|$ 。

五、（10 分）已知矩阵 $\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ ，

- （1）求矩阵 \mathbf{A} 的秩，并找出矩阵 \mathbf{A} 的列向量组的一个极大无关组；
- （2）将把不属于这个极大无关组的列向量用（1）中的极大无关组表示。

六、(10 分) 在 $F[x]_4$ 中定义 $\sigma: \sigma[f(x)] = f'(x)$,

(1) 证明 σ 为 $F[x]_4$ 的一个线性变换;

(2) 求 σ 在基 $1, x, x^2, x^3$ 下的矩阵, 并判断 σ 是否为可逆变换。

七、(15 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$,

(1) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$ 的矩阵 A ;

(2) 求一个正交矩阵 Q , 使 $Q^T A Q$ 成对角矩阵;

(3) 求 $|A^2 - 5A - 2I|$ 。

八、(15 分) 设在 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 中所有实对称矩阵所组成的集合

$$\mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

- (1) 证明 \mathbf{W} 构成 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的一个线性子空间;
- (2) 证明 $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为 \mathbf{W} 的一组基;
- (3) 求从基 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ 到另一组基 $\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的过渡矩阵;
- (4) 求矩阵 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ 分别关于两组基 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ 和 $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ 的坐标。

线性代数 A 试题 (B 卷)

座号_____ 班级_____ 学号_____ 姓名_____

(试卷共 7 页, 八道大题. 解答题必须有解题过程, 试卷后面空白页撕下做稿纸, 试卷不得拆散)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
签名									

一、 填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. 设矩阵 A 与 B 相似, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 则有,

$$a = \underline{-9}, b = \underline{11}$$

2. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + tx_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围是 $\underline{t > \frac{3}{2}}$

3. 设 4 阶矩阵 A 的各行元素之和均为 0, 且 A 的秩为 3, 则齐次线性方程组 $AX = 0$ 的通解为 $\underline{k(1, 1, 1, 1)^T, k \text{ 为任意常数 (或者 } k \in \mathbb{R}, \text{ 不标明 } k \text{ 的范围扣 1 分)}}$

4. 矩阵乘积 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^6 = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 8 & 11 \end{bmatrix}}$

5. 设 A 是 5 阶方阵, 且已知存在 5 阶可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则 A 的所有初等因子为 $\underline{(\lambda - 2), (\lambda - 2)^2, (\lambda - 1)^2}$ (缺一个, 得 0 分)

二、(10 分) 讨论 a, b 取何值时, 下列线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + ax_2 + ax_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

(1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有无穷解, 并在有无穷多解时, 用其导出方程组的基础解系表示方程组的通解。

解 将方程组的增广矩阵化为阶梯形:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & b \\ 1 & a & a & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & b-a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & b-a+1 \end{array} \right) \dots\dots (3 \text{ 分})$$

(1) 当 $1-a^2 \neq 0$ 时, 即 $a \neq 1, -1, b \in R$ 时, 原方程组有唯一解。..... (4 分)

(2) 当 $a=1, b \in R$ 时, 或者当 $a=-1, b \neq -2$ 时原方程组无解。..... (5 分)

(3) 当 $a=-1, b=-2$ 时, 原方程组有无穷多解。方程组增广矩阵化为..... (6 分)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & b \\ 1 & a & a & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{解得特解为 } \gamma_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 导出组的基础解系 } \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

所以原方程的通解为是 $\gamma_0 + k\xi$ (k 为任意常数) (10 分)

(注: 在 (1) (2) 中, 未注明 $b \in R$ 或者 b 为任意实数, 不扣分)

三、(10 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 且有 $A^*XA = 3XA - 6I$, 求矩阵 X 。

解: 由已知可得

$$|A| = 2 \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

由 $A^*XA = 3XA - 6I$ 整理得,

$$3XA - A^*XA = 6I$$

$(3I - A^*)XA = 6I$ 同时左乘 A , 右乘 A^{-1} 得,

$$A(3I - A^*)X = (3A - |A|I)X = 6I$$

$$X = 6(3A - |A|I)^{-1} = 6(3A - 2I)^{-1} \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

又因为

$$(3A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{所以 } X = 6(3A - 2I)^{-1} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

四 (10 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, A^* 是其伴随矩阵, 试求行列式 $|(\frac{1}{2}A)^* + (4A)^{-1}|$ 。

解: 由已知可得

$$|A| = 2 \dots \dots \dots (2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} |(\frac{1}{2}A)^* + (4A)^{-1}| &= |\frac{1}{4}A^* + \frac{1}{4}A^{-1}| \\ &= |\frac{1}{4}|A||A^{-1}| + \frac{1}{4}A^{-1}| = |\frac{1}{4} \times 2 \times A^{-1} + \frac{1}{4}A^{-1}| = |\frac{3}{4}A^{-1}| \dots \dots \dots (7 \text{ 分}) \\ &= (\frac{3}{4})^3 |A|^{-1} = (\frac{3}{4})^3 \times \frac{1}{2} = \frac{27}{128} \dots \dots \dots (10 \text{ 分}) \end{aligned}$$

五、(10 分) 已知矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$,

- (1) 求矩阵 A 的秩, 并找出矩阵 A 的列向量组的一个极大无关组;
- (2) 将把不属于这个极大无关组的列向量用 (1) 中的极大无关组表示。

解:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (3 \text{ 分})$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (5 \text{ 分})$$

(1) $r(A) = 3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为列向量组的一个极大无关组..... (6 分)

(2) $a_3 = -a_1 - a_2 \dots \dots \dots (8 \text{ 分})$

$a_5 = 4a_1 + 3a_2 - 3a_4 \dots \dots \dots (10 \text{ 分})$

六、(10 分) 在 $F[x]_4$ 中定义 $\sigma: \sigma[f(x)] = f'(x)$,

(1) 证明 σ 为 $F[x]_4$ 的一个线性变换;

(2) 求 σ 在基 $1, x, x^2, x^3$ 下的矩阵, 并判断 σ 是否为可逆变换。

(1) 证明 $\forall f(x), g(x) \in F[x]_4, k \in F$.

$$\sigma[f(x) + g(x)] = [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x) = \sigma[f(x)] + \sigma[g(x)];$$

$$\sigma[kf(x)] = [kf(x)]' = kf'(x) = k\sigma[f(x)]$$

σ 为 $F[x]_4$ 的一个线性变换.....(4 分)

(2) $\sigma(1) = 0, \sigma(x) = 1, \sigma(x^2) = 2x, \sigma(x^3) = 3x^2$, 所以

$$\sigma(1, x, x^2, x^3) = (1, x, x^2, x^3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求 σ 在基 $1, x, x^2, x^3$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (9 分);

因为 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, 所以 σ 不是可逆变换.....(10 分)

七、(15 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$,

(1) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T AX$ 的矩阵 A ;

(2) 求一个正交矩阵 Q , 使 $Q^T AQ$ 成对角矩阵;

(3) 求 $|A^2 - 5A - 2I|$ 。

解 (1) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

因为

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5),$$

所以矩阵的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

求 $(-I - A)X = 0$ 的一个基础解系. 用初等行变换将 $-I - A$ 化为简化阶梯形

$$-I - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到 $(-I - A)X = 0$ 的一个基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. (\text{or } \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}). \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

用施密特方法将 ξ_1, ξ_2 正交化, 得到

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = -\frac{(\xi_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 + \xi_2 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{Or} \\ (\beta_1 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = -\frac{(\xi_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 + \xi_2 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}). \end{aligned} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

将 β_1, β_2 规范化, 得到

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ Or } (\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix})$$

.....9 分

求 $(5I - A)X = 0$ 的一个基础解系. 用初等行变换将 $5I - A$ 化为简化阶梯形

$$5I - A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到 $(5I - A)X = 0$ 的一个基础解系

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{.....10 分}$$

将 ξ_3 规范化, 得到

$$\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{.....11 分}$$

令

$$Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, (\text{or } Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix})$$

那么 Q 为正交矩阵. 且有

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 5 \end{pmatrix} \text{.....12 分}$$

(3) 易知 $A^2 - 5A - 2I$ 的三个特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2$.

$$|A^2 - 5A - 2I| = -32.$$

八、(15 分) 设在 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 中所有实对称矩阵所组成的集合

$$\mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

- (1) 证明 \mathbf{W} 构成 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的一个线性子空间;
- (2) 证明 $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为 \mathbf{W} 的一组基;
- (3) 求从基 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ 到另一组基 $\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的过渡矩阵;
- (4) 求矩阵 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ 分别关于两组基 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ 和 $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ 的坐标。

(1) 证明: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{W}, \mathbf{W} \neq \emptyset$

对任意的 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{W}, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{W}$

对任意 $k \in \mathbf{R}, k \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kb_1 & kc_1 \end{pmatrix} \in \mathbf{W}$

所以 \mathbf{W} 构成 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的一个线性子空间.....(3 分)

(2) 证明: 设 $k_1 \mathbf{A}_1 + k_2 \mathbf{A}_2 + k_3 \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & k_2 \\ k_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$

则有 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, 从而 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ 线性无关.....(5 分)

又因为对任意的 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbf{W}$, 都有 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \mathbf{A}_1 + b \mathbf{A}_2 + c \mathbf{A}_3$

所以 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ 为 \mathbf{W} 的一组基.....6 分)

(3) 因为 $(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3) = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) \mathbf{P}$, 所以过渡矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(9 \text{ 分})$$

(4) 易知 $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = 2A_1 + 2A_2 - 5A_3 = (A_1, A_2, A_3) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, 所以

$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ 在基 A_1, A_2, A_3 的坐标为 $(2 \ 2 \ -5)^T$ (10 分)

因为

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(12 \text{ 分})$$

所以 $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ 在基 B_1, B_2, B_3 的坐标为

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 17 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(15 \text{ 分})$$