习题 5-5

1. (1) 特征方程为：$r^2+8r+15=0$

其根为：$r_1=-5 \quad r_2=-3$

则通解为 $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{-3x}$

(2) 特征方程为：$r^2+6r+9=0$

其根为：$r_1=r_2=-3$

则通解为：$y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$

(3) 特征方程为：$r^2+4r+5=0$

其根为：$r_1=-2+i \quad r_2=-2-i$，$\alpha=-2$，$\beta=1$.

则通解为：$y=C_1e^{-2x}\cos x+C_2e^{-2x}\sin x$

(4) 特征方程为：$r^2-2r=0$

其根为：$r_1=0 \quad r_2=2$

则通解为 $s=C_1+C_2e^{2t}$

(5) 特征方程为：$4r^2-20r+25=0$

其根为：$r_1=r_2=\frac{5}{2}$

则通解为：$x=C_1e^{\frac{5}{2}t}+C_2te^{\frac{5}{2}t}$

(6) 特征方程为：$r^2+1=0$

其根为：$r_1=i \quad r_2=-i$. $\alpha=0 \quad \beta=1$

通解为：$y=C_1\cos x+C_2\sin x$

2. (1) 特征方程为：$r^2+4r+4=0$

其根为：$r_1=r_2=-2$.

通解为：$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$，则 $y'=C_2e^{-2x}+(C_1+C_2x)e^{-2x}\times(-2)$

又 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=1$

则：$\begin{cases} C_1=1 \\ C_2-2(C_1+0)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=3 \end{cases}$

则 $y=(1+3x)\cdot e^{-2x}$

(2) 特征方程为：$4r^2+9=0$

其根为：$r_1=\frac{3}{2}i \quad r_2=-\frac{3}{2}i$

通解为：$y=C_1\cos\frac{3}{2}x+C_2\sin\frac{3}{2}x$

则 $y'=-\frac{3}{2}C_1\sin\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}C_2\cos\frac{3}{2}x$

又 $y(0)=2 \quad y'(0)=-1$

则 $C_1=2 \quad C_2=-\frac{2}{3}$

则 $y=2\cos\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}x$

(3) 特征方程为：$r^2-4r+3=0$

其根为：$r_1=1 \quad r_2=3$

通解为，$y=C_1e^x+C_2e^{3x}$，则 $y'=C_1e^x+3C_2e^{3x}$

又 $y|_{x=0}=6 \quad y'|_{x=0}=10$

则 $C_1=4 \quad C_2=2$

则 $y=4e^x+2e^{3x}$

(4) 特征方程为：$r^2-3r-4=0$

其根为：$r_1=-1 \quad r_2=4$

通解为：$y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$

则：$y'=-C_1e^{-x}+4C_2e^{4x}$

又 $y|_{x=0}=0 \quad y'|_{x=0}=-5$

则：$C_1=1 \quad C_2=-1$

则：$y=e^{-x}-e^{4x}$

(5) 特征方程为：$r^2-4r+13=0$

其根为：$r_1=2+3i \quad r_2=2-3i$

则通解为：$y=C_1e^{2x}\cos 3x+C_2e^{2x}\sin 3x$

则：$y'=2C_1e^{2x}\cos 3x-3C_1e^{2x}\sin 3x+2C_2e^{2x}\sin 3x+3C_2e^{2x}\cos 3x$

又 $y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=3$

又 $C_1=0 \quad C_2=1$

则：$y=e^{2x}\sin 3x$

3. (1) 特征方程为：$r^3-1=0 \Rightarrow (r-1)(r^2+r+1)=0$

其根为：$r_1=1 \quad r_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad r_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

则通解为：$y=C_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}[C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x]$

(2) 特征方程为：$r^3-2r+1=0$

其根为：$r_1=1 \quad r_2=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \quad r_3=-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$

则通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)x}+C_3e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)x}$

(3) 特征方程为：$r^3+3r^2+3r+1=0$

其根为：$r_1=r_2=r_3=-1$

则通解为：$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-x}$

(4) 特征方程为：$r^4-1=0$

其根为：$r_1=1 \quad r_2=-1 \quad r_3=i \quad r_4=-i$

则通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$

(5) 特征方程为：$r^4+2r^2+1=0$

其根为：$r_1=r_2=i \quad r_3=r_4=-i$

则通解为：$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$

4. 相应的齐次方程为：$y''+y=0$

其特征方程为：$r^2+1=0$

其特征根为：$r_1=i \quad r_2=-i$

则齐次方程通解：$\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$

设原方程特解为：$y^*=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$

又 $W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1$

则 $C_1(x)=-\int\frac{\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}}{1^2}dx=\ln|\cos x|$

$C_2(x)=\int\frac{\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}}{1^2}dx=x$

$\therefore y^*=\cos x\ln|\cos x|+x\sin x$

$\therefore$ 通解为：$y=\overline{y}+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x$