习题 1-3

1、证明：当 $x_n=2k\pi$，$k\in N^*$时，当$k\to+\infty$，则$x_n\to+\infty$，此时$\cos x\to 1$

当 $x_n=2k\pi+\pi$，$k\in N^*$时，$k\to+\infty$，则$x_n\to+\infty$，此时 $\cos x=-1$

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在.

2、证明：当$x_n=n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in N^*$时，当$n\to\infty$，则$x_n\to\infty$ 此时 $\cot x\to 0$

当 $x_n=n\pi$ $n\in N^*$时，当$n\to\infty$，则$x_n\to\infty$，此时 $\cot x\to\infty$.

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\cot x$ 不存在.

3. 证明：当$x_n=(n\pi)^2$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$.

当$x_n=(2n\pi+\frac{\pi}{2})^2$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)=1$.

因此$\lim\limits_{x\to\infty}\sin\sqrt{x}$不存在.

4. 证明：当$x_n=\frac{1}{n\pi}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0$ ($n\to\infty$时，$x_n\to 0$)

当$x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ 则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=1$ ($n\to\infty$时，$x_n\to 0$)

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

习题 1-4.

1、不是. 如 $x\to 0$时 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

2. (1) $x\to 1$时为无穷小，$x\to+\infty$时为正无穷大，$x\to 0$，负无穷大

(2) $x\to 0^-$，无穷小　　$x\to 0^+$ 无穷大

(3) $x\to\infty$　无穷小.　　$x\to 1$ 无穷大

(4) $x\to -\frac{1}{2}$　无穷小　　$x\to+\infty$ 无穷大

(5) $x\to n\pi$　无穷小　　没有无穷大.

3、证明：因为 $|\sin x| \le 1$，即 $\sin x$ 为有界函数.

又 $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

则 $x \to 0$ 时，$x\sin x$ 为无穷小.

4、证明：因为 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$，则 $\frac{f(x)}{g(x)} = A + \alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是无穷小.

则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (Ag(x) + \alpha(x)g(x)) = 0$.

证毕.