第四章 分解方法及单口网络

§4-1 分解的基本步骤

§4-2 单口网络的电压电流关系

§4-3 单口网络的置换 — 置换定理

§4-4 单口网络的等效电路

§4-5 一些简单的等效规律和公式

§4-6 戴维南定理

§4-7 诺顿定理

§4-8 最大功率传递定理

× §4-9 T 形网络和 Π 形网络的等效变换

本章内容概述

1、采用分解方法的目的

将结构复杂电路的求解问题化为结构简单电路的求解问题。

2、分解方法的适用范围

既适用于线性电路也适用于非线性电路。

3、单口网络的等效变换

最简单的子网络为二端网络，或称单口网络。

介绍无源和含源单口网络的等效变换。

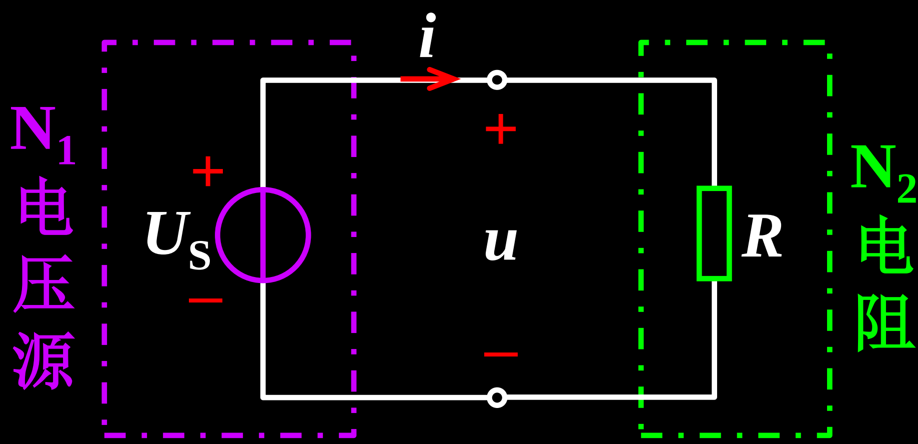
4、置换定理

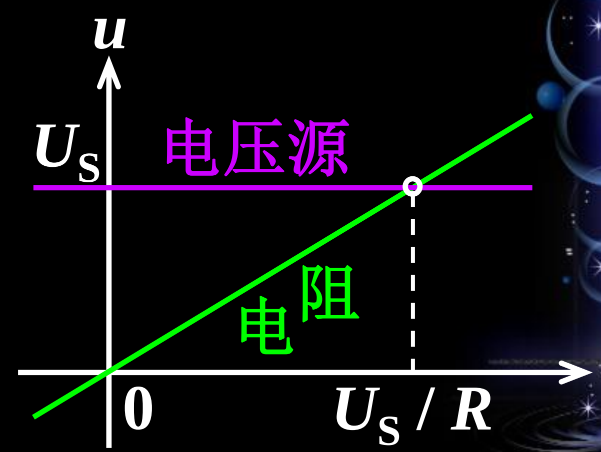
5、等效电源定理：戴维南定理、诺顿定理

将线性含源单口网络化简为最简单的电压源或电流源。

§4-1 分解的基本步骤

1. 分解方法的简单实例





由元件的 VCR，有　N_1：$u = U_S$　N_2：$u = R \cdot i$

端钮上的电压 u 和电流 i 应同时满足网络 N_1 和 N_2

将二者联立，有：$u = U_S$

$i = U_S / R$

用曲线相交法（图解法）可得相同的分析结果。

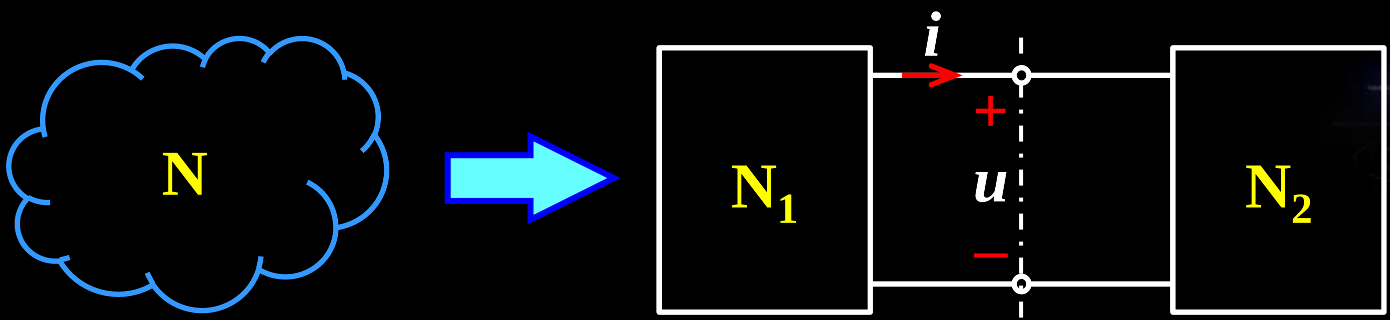
2. 分解方法的基本步骤

（1） 将给定的网络 N 分解为两个单口网络 N_1 和 N_2;

（2） 分别求单口网络 N_1、N_2 的 VCR（ § 4–2 ）；

（3） 联立 VCR，求单口网络端钮上的电压 u 和电流 i;

（4） 分别求单口网络 N_1、N_2 中的电压和电流（ § 4–4 ）。



$$\begin{cases} N_1: & u = k_1 i + A_1 \\ N_2: & u = k_2 i + A_2 \end{cases}$$

3. 采用分解方法的目的

将复杂电路化为简单电路进行求解。

§4-2 单口网络的电压电流关系

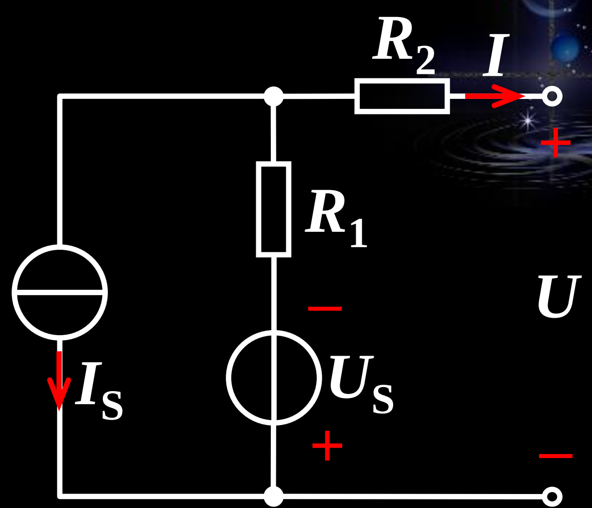
列写单口网络伏安关系的方法：

1、列电路的方程，求 u、i 关系；

2、端钮上外加电流源，求输入端电压，得到 u、i 关系；

3、端钮上外加电压源，求输入端电流，得到 u、i 关系。

例：求图示电路的 VCR。



解：1、列 KVL 方程

$$U = -R_2 I - R_1(I + I_S) - U_S$$

叠加原理

$$U = U' + U''$$

$$= [-(R_1 + R_2)I' - U_S] + [-R_2 I'' - R_1(I'' + I_S)]$$

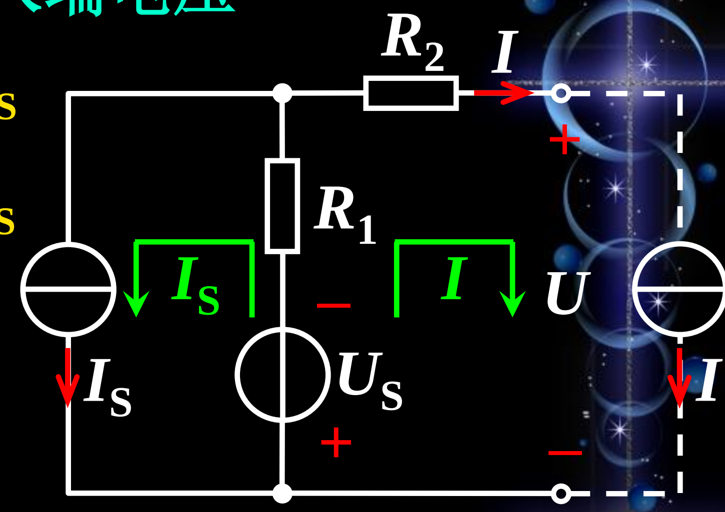
$$= -(R_1 + R_2)(I' + I'') - R_1 I_S - U_S$$

$$= -(R_1 + R_2)I - R_1 I_S - U_S$$

2、外加电流源（I），求输入端电压

$$(R_1+R_2)I+R_1I_S=-U-U_S$$

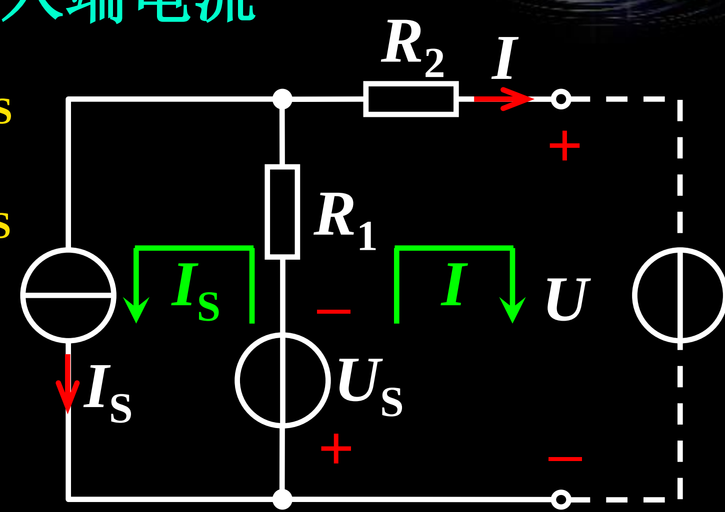
$$U=-(R_1+R_2)I-R_1I_S-U_S$$



3、外加电压源（U），求输入端电流

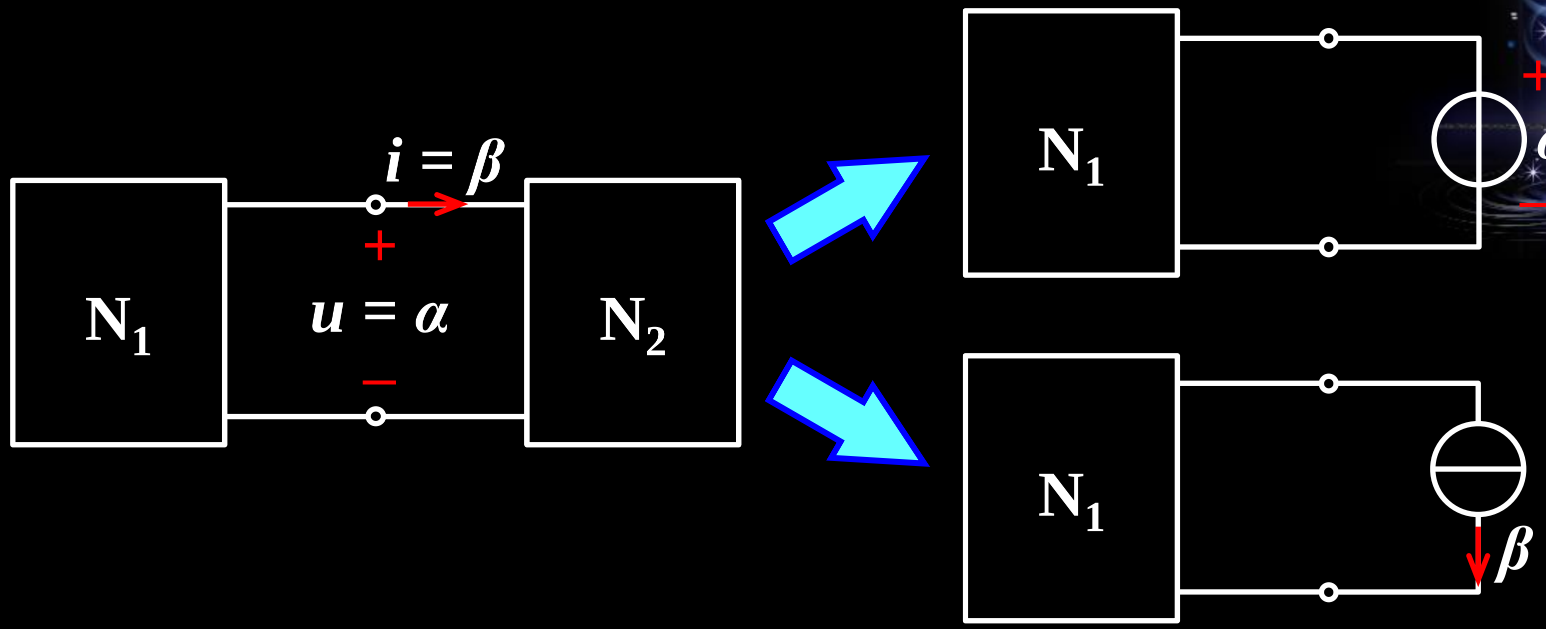
$$(R_1+R_2)I+R_1I_S=-U-U_S$$

$$U=-(R_1+R_2)I-R_1I_S-U_S$$



§4-3 单口网络的置换 — 置换定理

如果一个网络 N 由两个子网络 N_1 和 N_2 组成，且已求得：$u=\alpha$ 或 $i=\beta$，则可用一个电压值为 α 的电压源或一个电流值为 β 的电流源置换 N_2 或 N_1，置换后对 N_1 或 N_2 没有影响。



例1：求图示电路中的各支路电流。

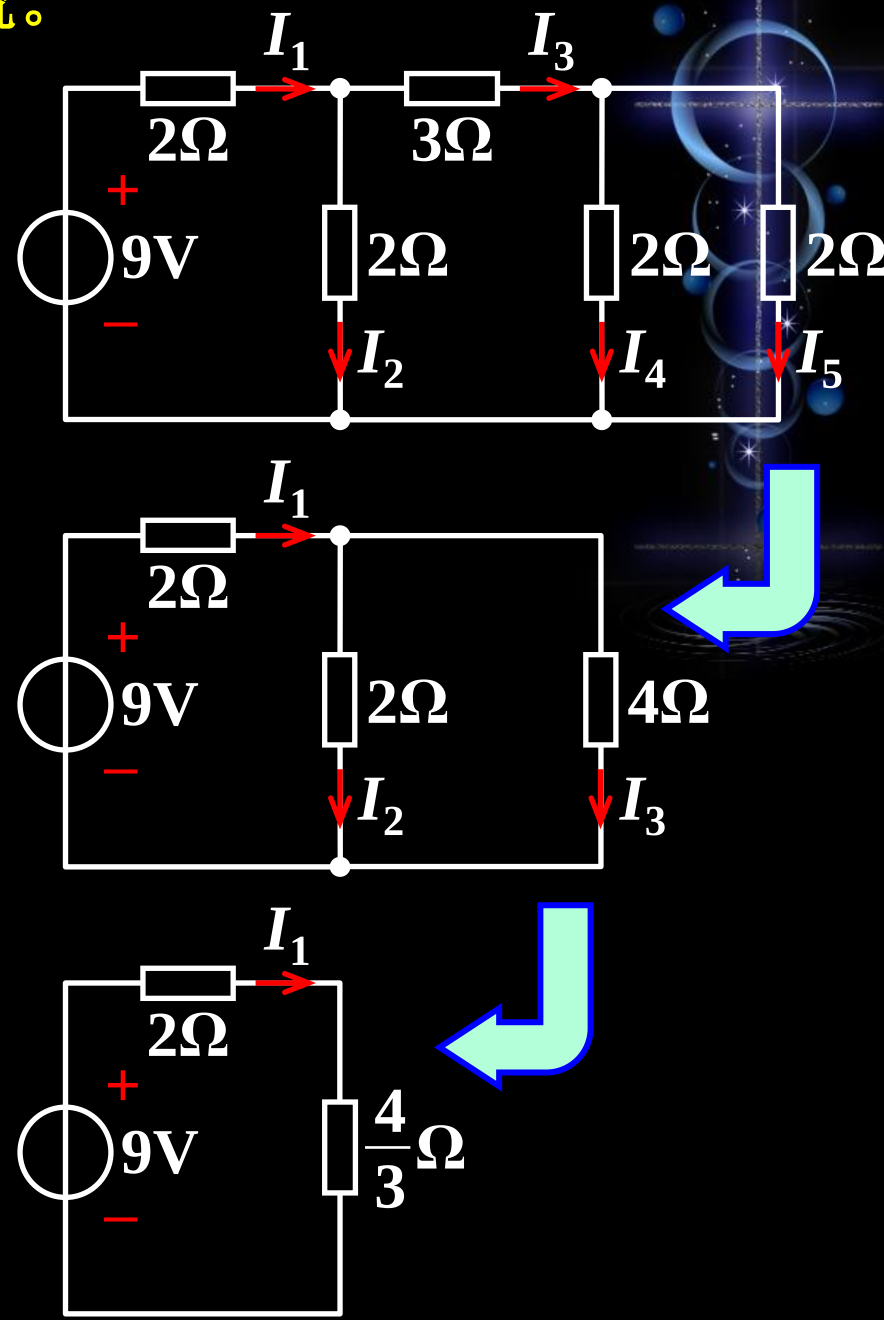
解：从右至左合并电阻；
从左至右分流。

$$I_1 = \frac{9}{2+\frac{4}{3}} = 2.7\text{A}$$

$$I_2 = \frac{4}{2+4} \times I_1 = 1.8\text{A}$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = 0.9\text{A}$$

$$I_4 = I_5 = \frac{1}{2} I_3 = 0.45\text{A}$$



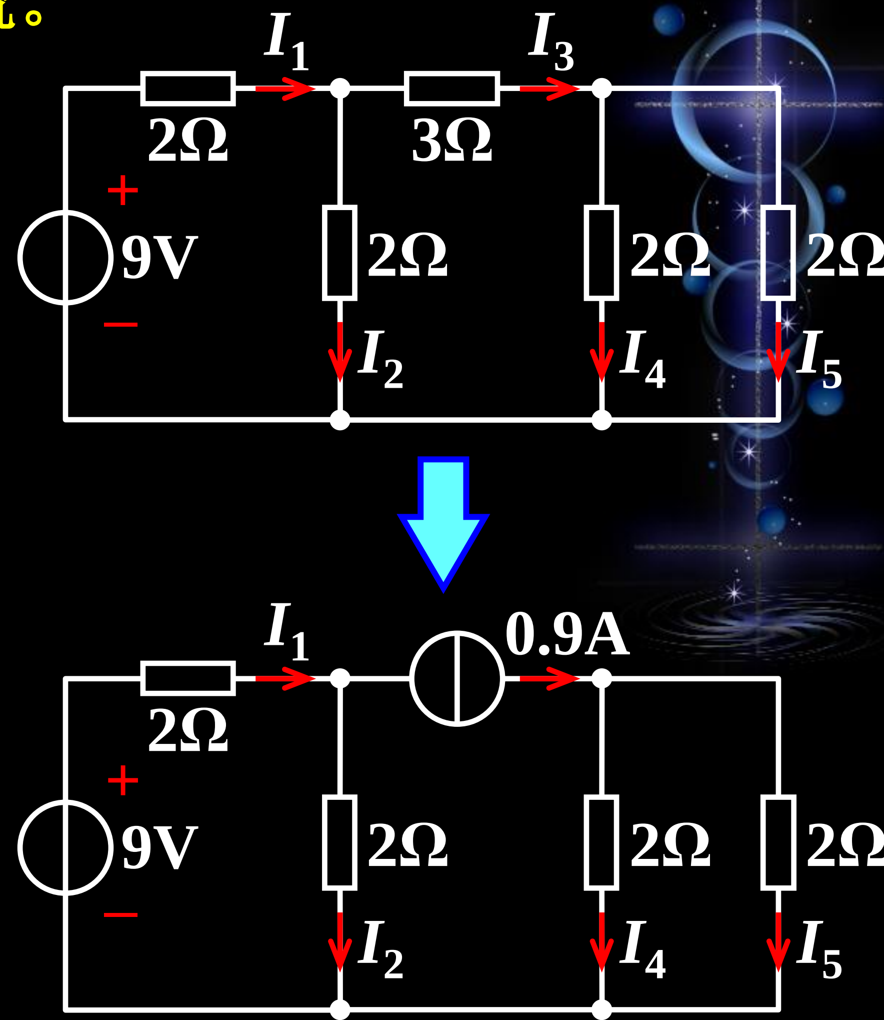
例1：求图示电路中的各支路电流。

解：将 3Ω 电阻用电流源置换

$$I_1=\frac{9}{4}+\frac{1}{2}\times 0.9=2.7\text{A}$$

$$I_2=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\times 0.9=1.8\text{A}$$

$$I_4=I_5=\frac{1}{2}I_3=0.45\text{A}$$



结论

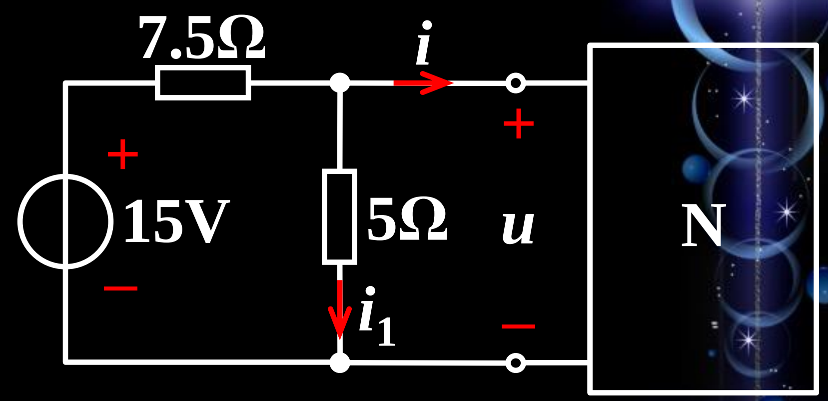
置换后对其它支路没有任何影响。

例2：已知 N 的 VCR 为 $u = i + 2$，用置换定理求 i_1。

解：求左边部分的 VCR

$$\begin{cases} u = -7.5\times(i+i_1)+15 \\ i_1 = \dfrac{u}{5} \end{cases}$$

$$u = -3i + 6$$



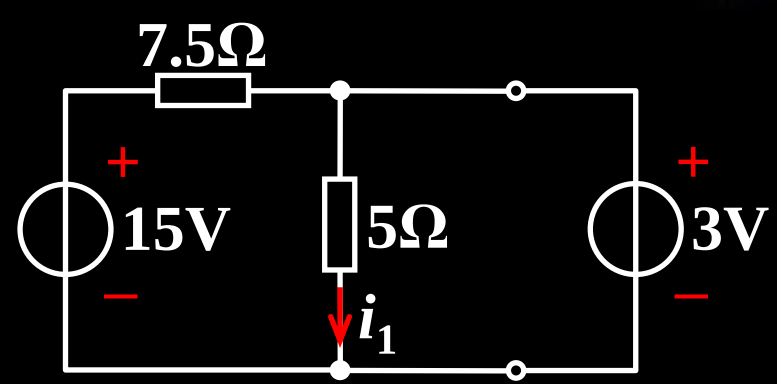
代入 $u = i + 2$

得：$u = 3\text{V}$

$i = 1\text{A}$

故：$i_1 = \dfrac{u}{5} = 0.6\text{A}$

将 N 用 3V 电压源置换

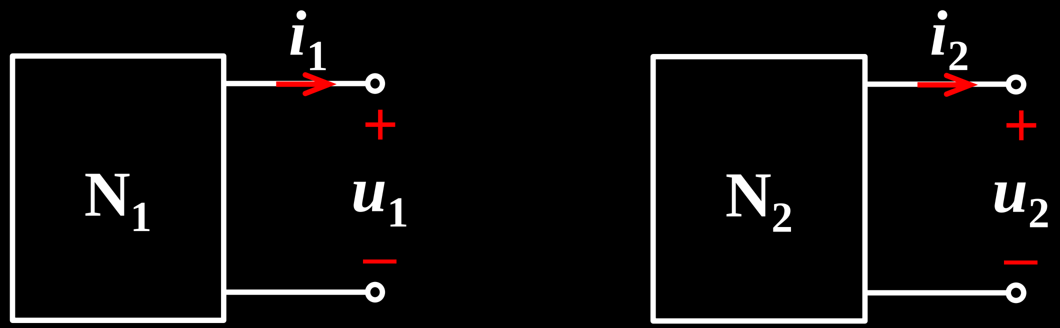


$i_1 = \dfrac{3}{5} = 0.6\text{A}$ 计算结果不变!

§4-4 单口网络的等效电路
§4-5 一些简单的等效规律和公式

1. 等效单口网络

如果两个单口网络 N_1 和 N_2 端口上的电压、电流关系完全相同，则 N_1 和 N_2 等效。



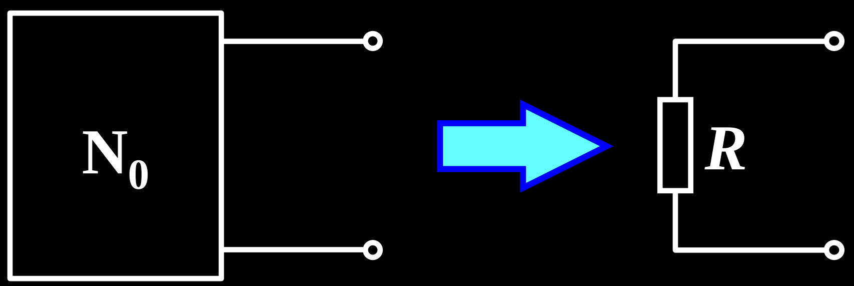
若 N_1 和 N_2 端口上满足：$u_1 = u_2$、$i_1 = i_2$，则这两个单口网络 N_1 和 N_2 等效。

2. 无独立源单口网络的等效电路

电阻串联 $R = \sum_{k=1}^{n} R_k$

电阻并联 $G = \sum_{k=1}^{n} G_k$ $\quad R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

电阻混联 利用电阻的串、并联公式化简

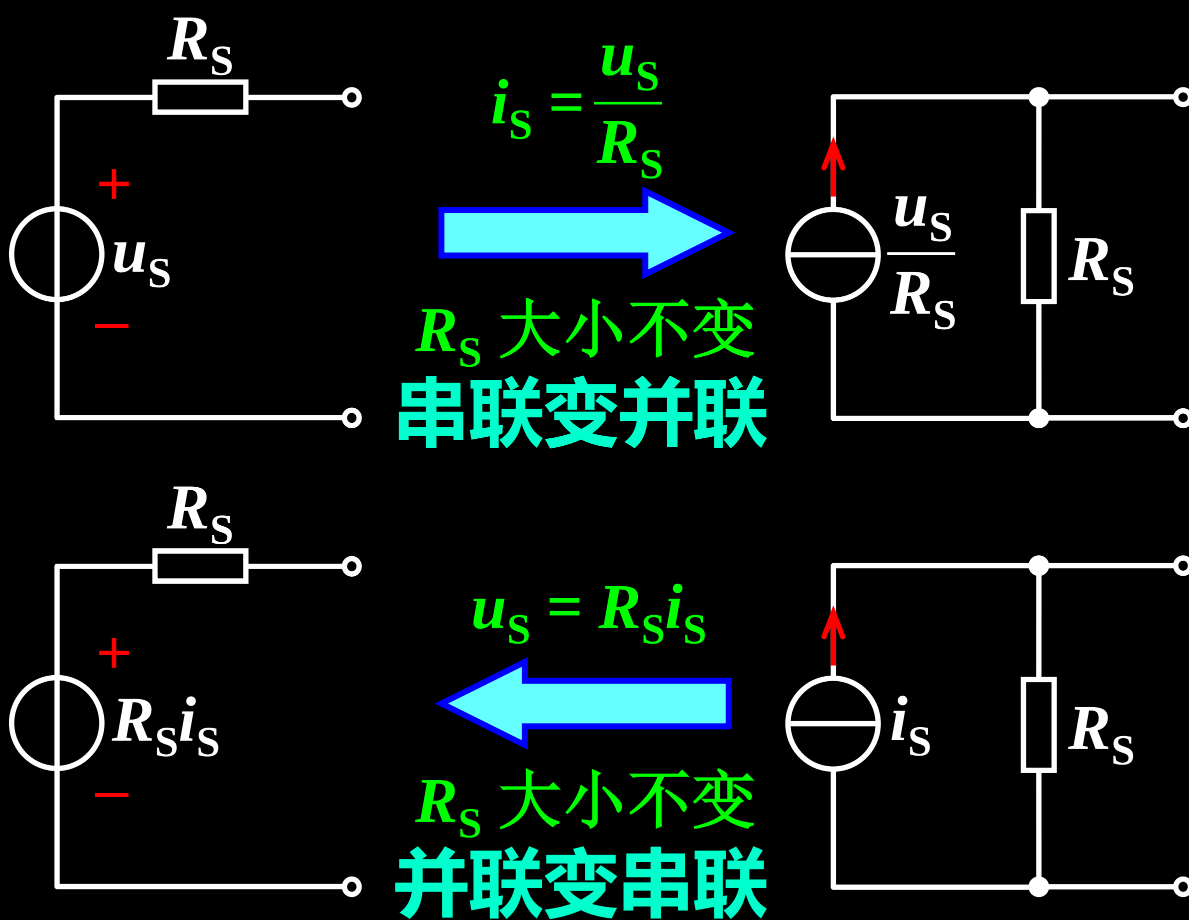


3. 含独立源单口网络的等效电路

（1）两种电源模型的等效变换

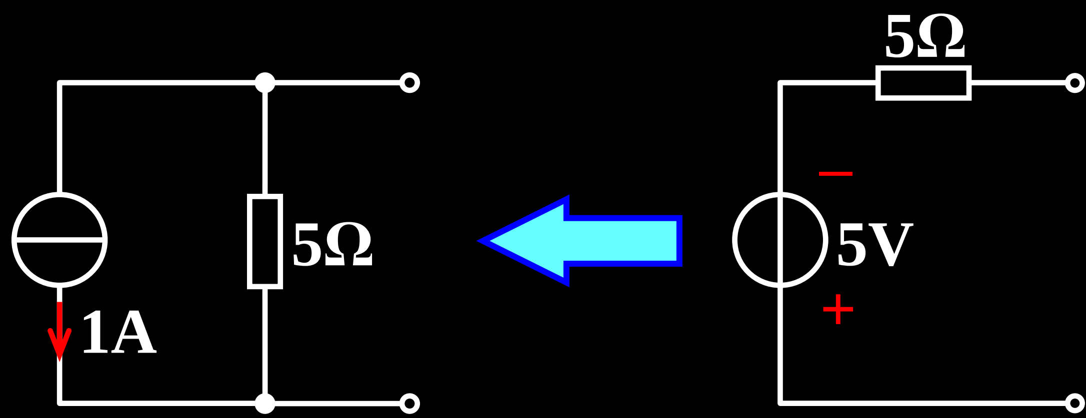
对外电路等效，对电源内部不等效。

通常电源可以用电压源或电流源表示，并且这两种电源模型之间可以进行等效变换。



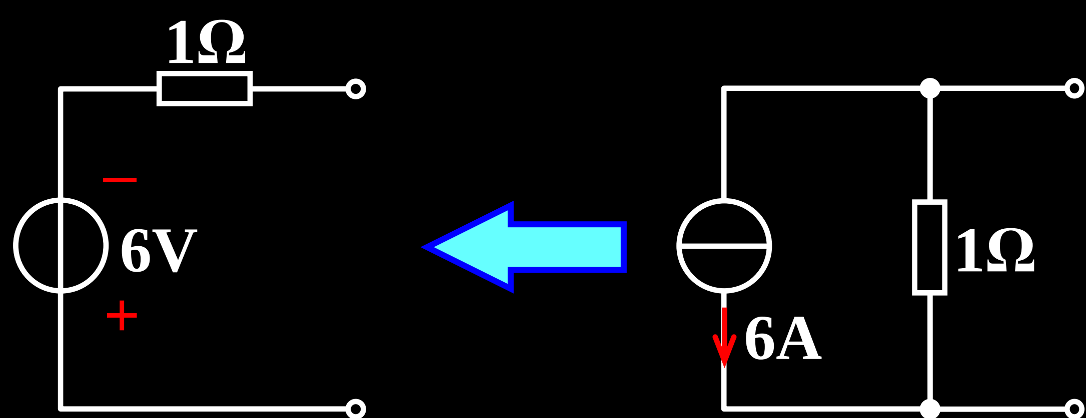
例1：把图示电路等效变换为恒流源与电阻并联的电路。

解：

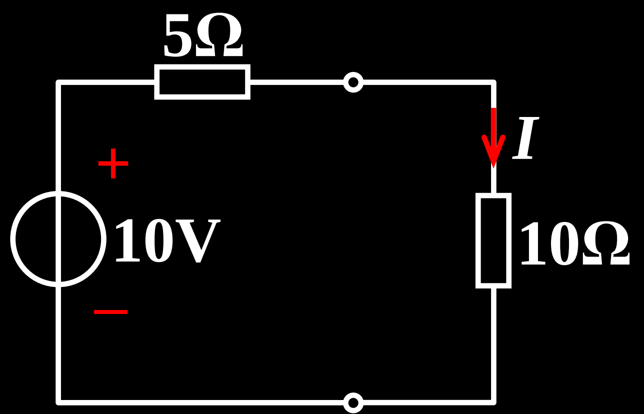


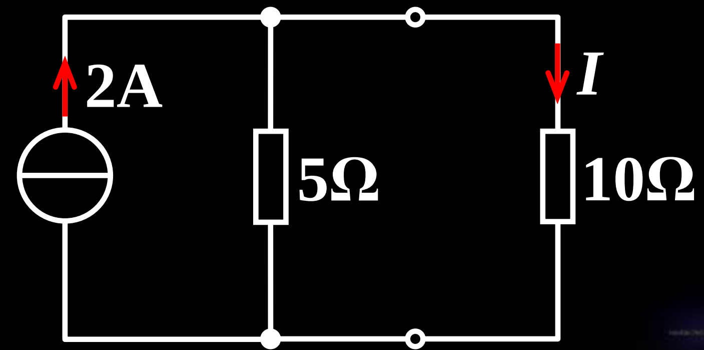
例2：把图示电路等效变换为恒压源与电阻串联的电路。

解：



例3：在两电源端钮上加相同的负载电阻 $R = 10\Omega$，求负载电流 I 和电源提供的功率 P。





解：

$$I = \frac{10}{5+10} = \frac{2}{3}\,\text{A} \qquad\qquad I = \frac{5}{5+10} \times 2 = \frac{2}{3}\,\text{A}$$

$$P = -10 \times I = -\frac{20}{3}\,\text{W} \qquad\qquad P = -10I \times 2 = -\frac{40}{3}\,\text{W}$$

结论

等效电路对外电路等效，对电源内部不等效。

等效变换的条件

一般电压源和一般电流源之间可以进行变换；理想电压源和理想电流源之间不能进行变换。

等效变换的意义

对电源外部等效：若接上同一负载，伏安关系相同。

对电源内部不等效：
输出端开路时，电流源提供功率，电压源不提供功率；
输出端短路时，电流源不提供功率，电压源提供功率。

等效变换的目的

复杂电路 → 简单电路

变换时 R_S 的处理

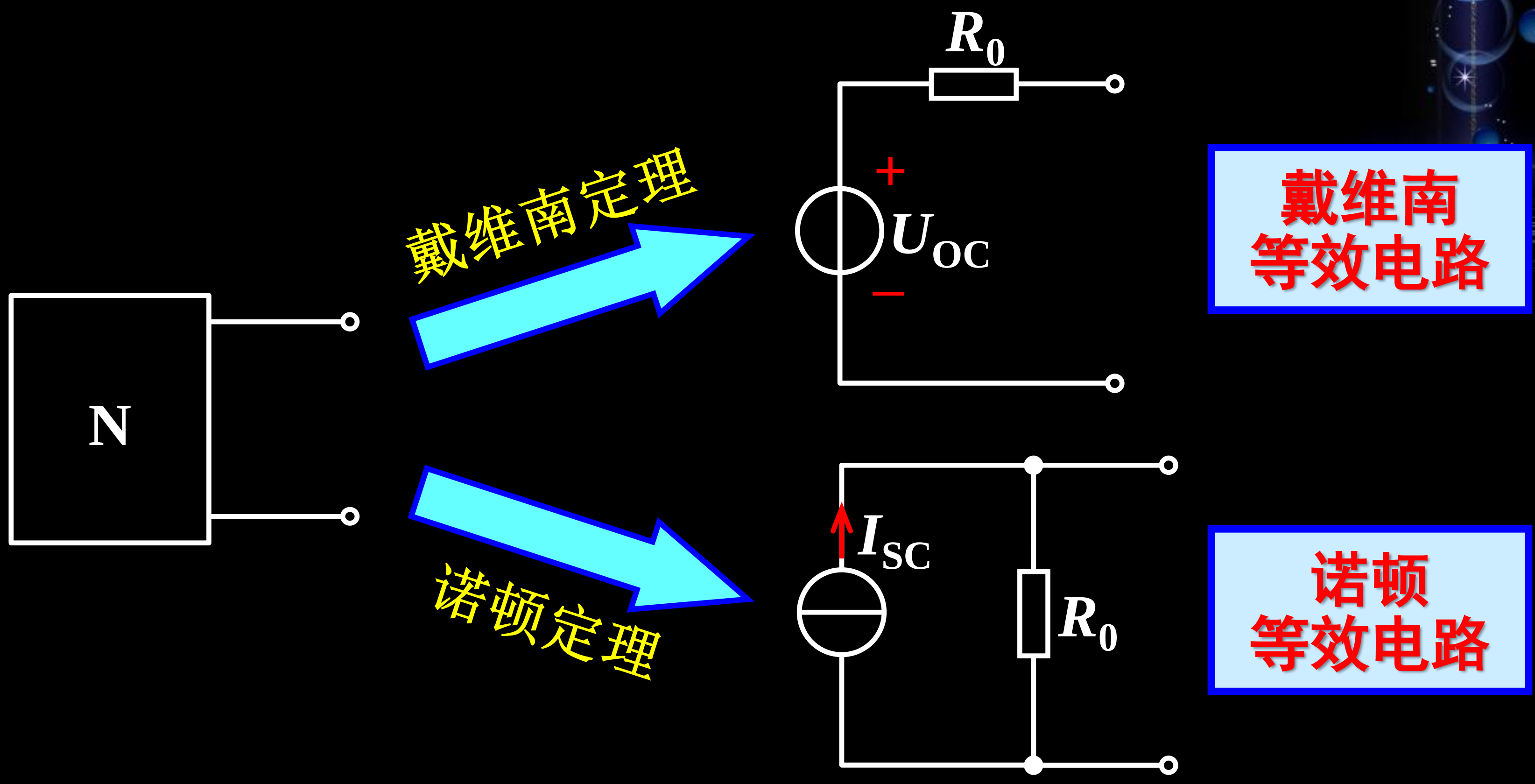
将欲求支路除外，凡与恒压源串联的电阻或与恒流源并联的电阻，均可作为 R_S 进行变换；

将欲求支路除外，凡与恒压源并联的电阻（或恒流源）以及与恒流源串联的电阻（或恒压源），变换时均可不予考虑。

3. 含独立源单口网络的等效电路

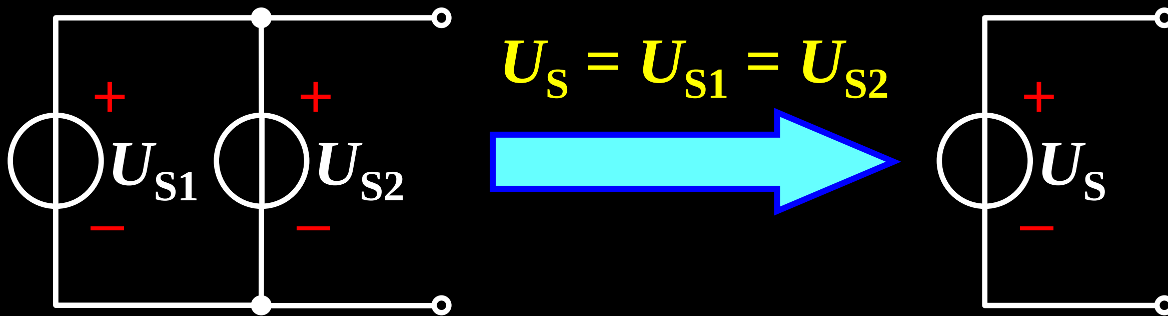
（2）含源支路的串、并、混联

对于含源支路的串、并、混联电路来说，总可以化简为一个电压源与电阻串联的组合，或者一个电流源与电阻并联的组合。



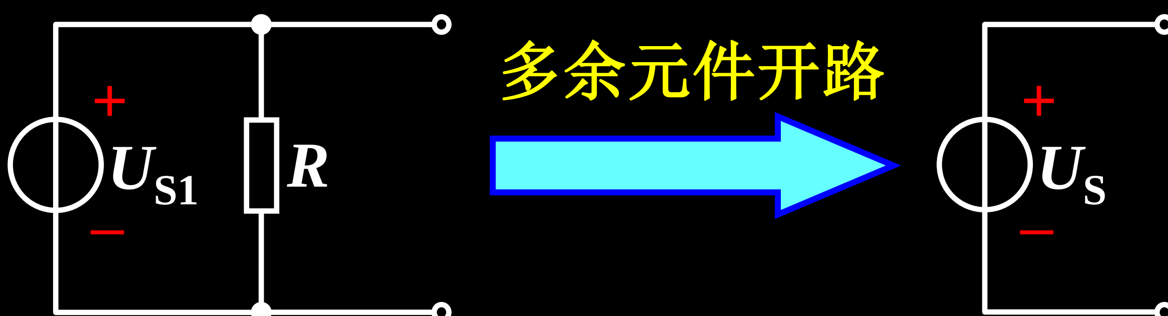
请注意以下四种情况

1、电压源与电压源并联



如果 $U_{S1} \neq U_{S2}$，违背 KVL 无解

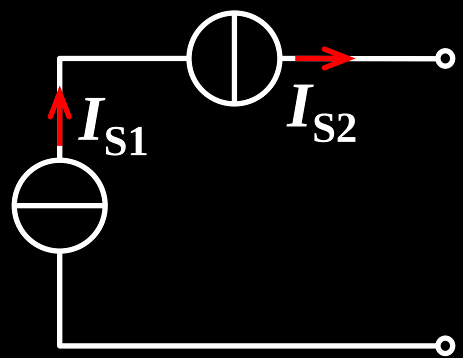
2、电压源与多余元件并联



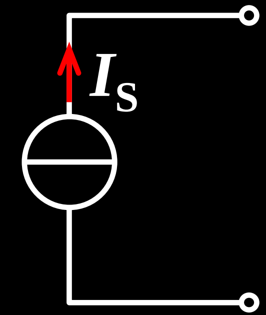
与电压源并联的元件称为多余元件，多余元件可开路。

请注意以下四种情况

3、电流源与电流源串联

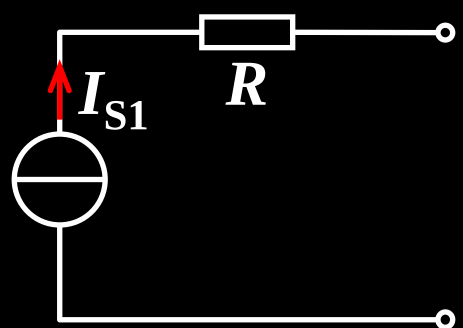


$I_S = I_{S1} = I_{S2}$

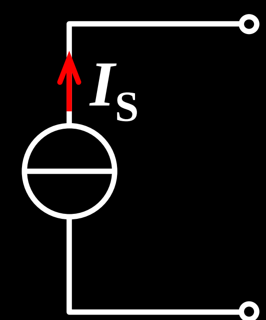


如果 $I_{S1} \neq I_{S2}$，违背 KCL 无解

4、电流源与多余元件串联



多余元件短路

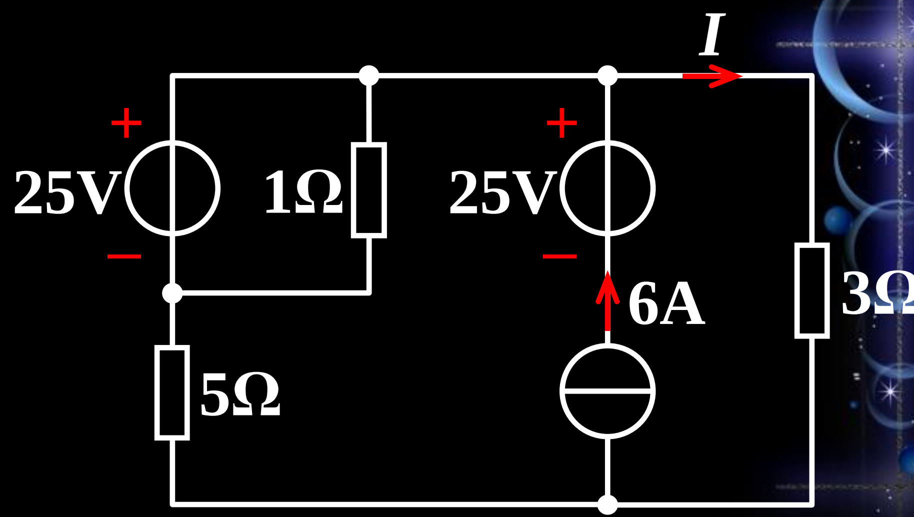


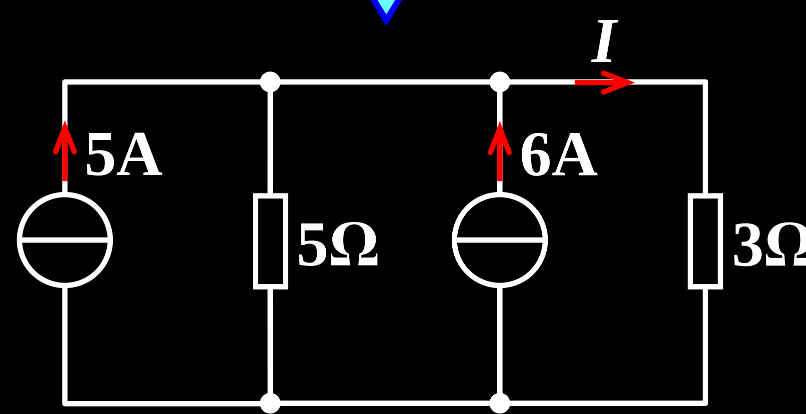
与电流源串联的元件称为多余元件，多余元件可短路。

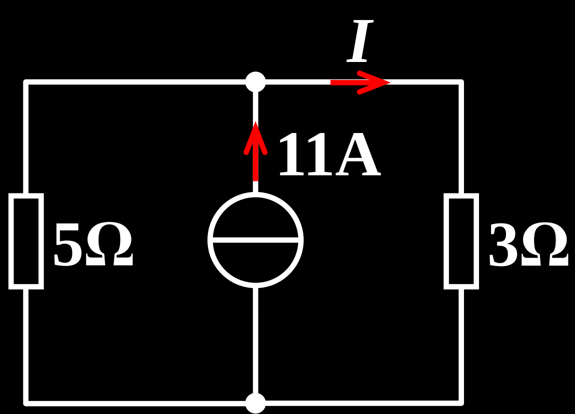
例4：用电源等效变换的方法求图示电路中的电流 I。

解：$I = \dfrac{5}{5+3} \times 11$

$= \dfrac{55}{8}\text{A} = 6.875\text{A}$



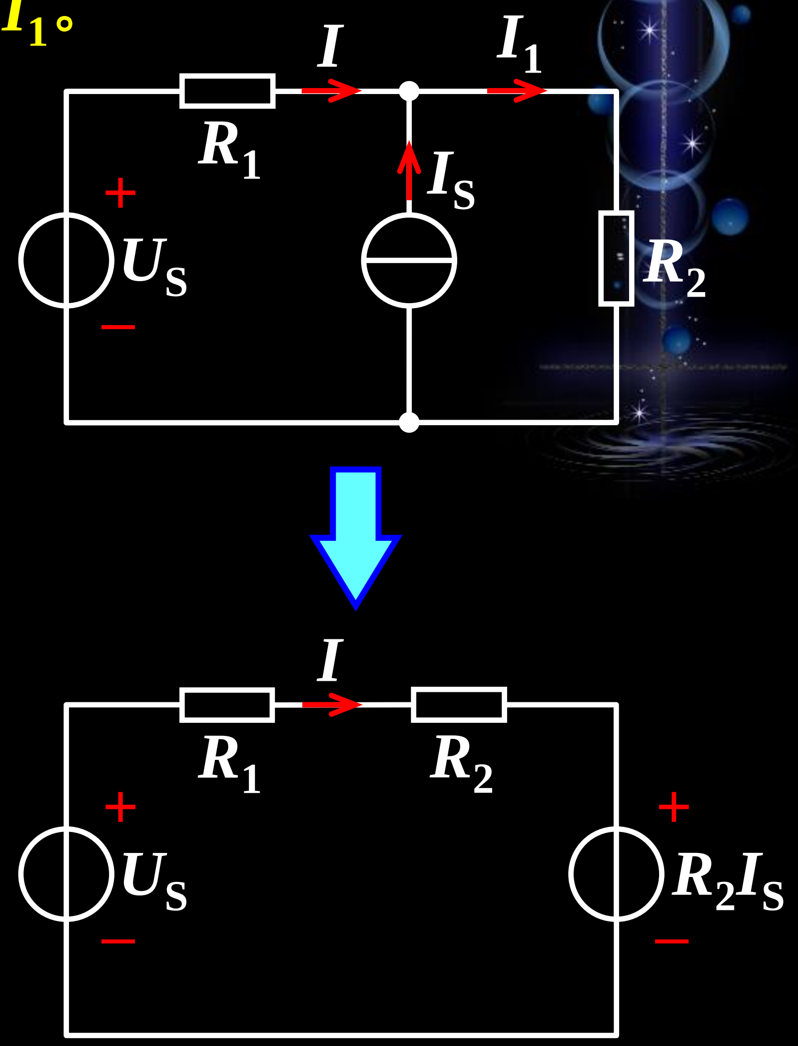




例5：图示电路中，已知 $U_S = 10\text{V}$，$I_S = 5\text{A}$，$R_1 = 6\Omega$，$R_2 = 4\Omega$，

（1）用叠加原理和电源的等效变换求电流 I；

（2）用电源的等效变换求电流 I_1。



解：叠加原理求 I

$$I = \frac{U_S}{R_1 + R_2} + \left(-\frac{R_2}{R_1 + R_2} \times I_S\right)$$

$$= \frac{10}{6+4} + \left(-\frac{4}{6+4} \times 5\right) = -1\text{A}$$

电源的等效变换求 I

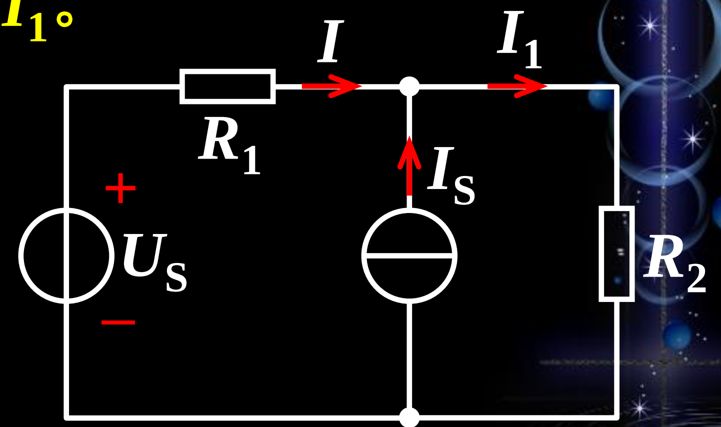
$$I = \frac{U_S - R_2 I_S}{R_1 + R_2}$$

$$= \frac{10 - 4 \times 5}{6+4} = -1\text{A}$$

例5：图示电路中，已知 $U_S = 10\text{V}$，$I_S = 5\text{A}$，$R_1 = 6\Omega$，$R_2 = 4\Omega$，

（1）用叠加原理和电源的等效变换求电流 I；

（2）用电源的等效变换求电流 I_1。

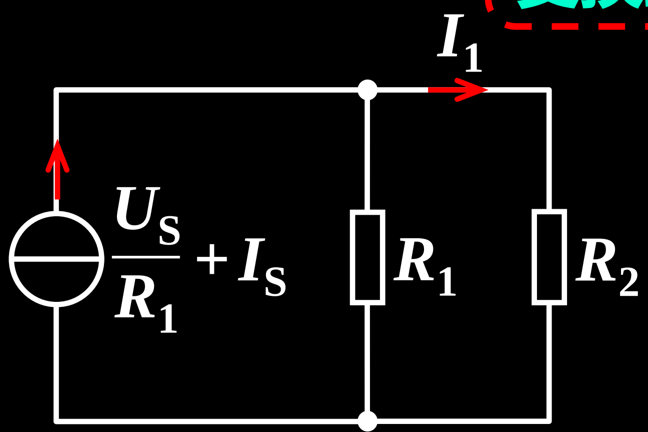


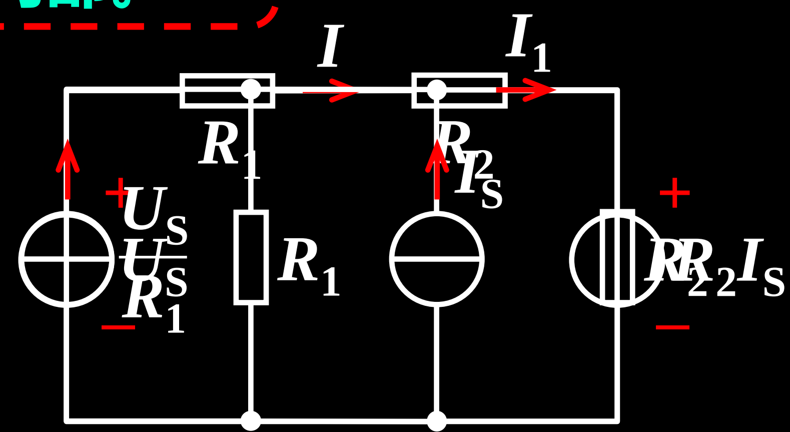
解：电源的等效变换求 I_1

$$I_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times \left(\frac{U_S}{R_1} + I_S\right)$$

$$= \frac{6}{6+4} \times \left(\frac{10}{6} + 5\right) = 4\text{A}$$

注意：欲求支路不能变换到电源内部。

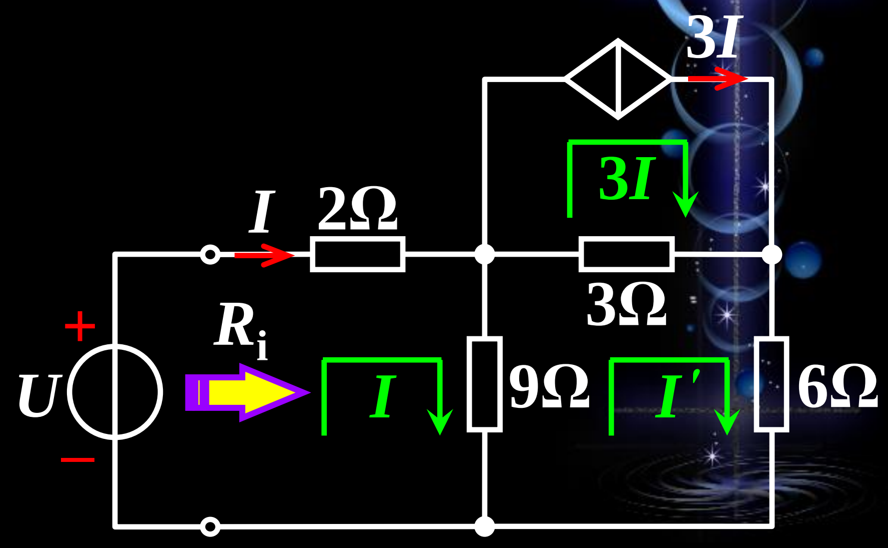




4. 含受控源单口网络的等效电路

（1）不含独立源的单口网络

例6：求图示电路的输入电阻 R_i。



解：外加电压源 U 求端钮电流 I

$$\begin{cases}(2+9)I-9I'=U\\(3+6+9)I'-9I-3\times 3I=0\end{cases}$$

$$I'=\frac{11I-U}{9}=\frac{18I}{18}$$

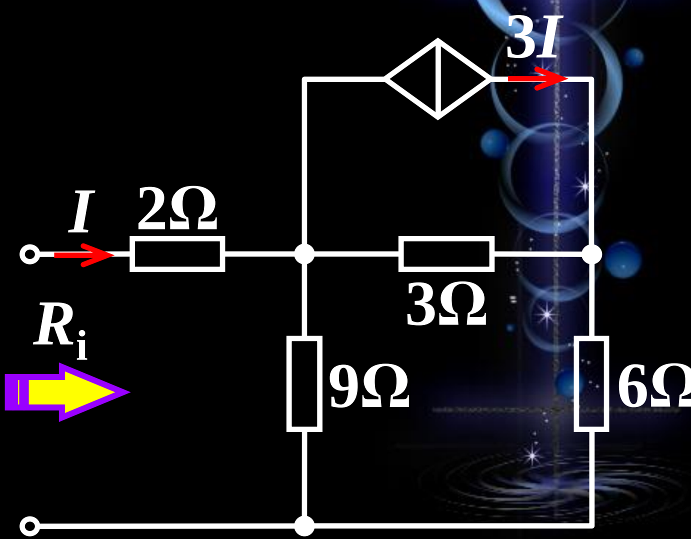
$$R_i=\frac{U}{I}=2\Omega$$

含受控源电路不能用电阻串、并联公式化简。

4. 含受控源单口网络的等效电路

（1）不含独立源的单口网络

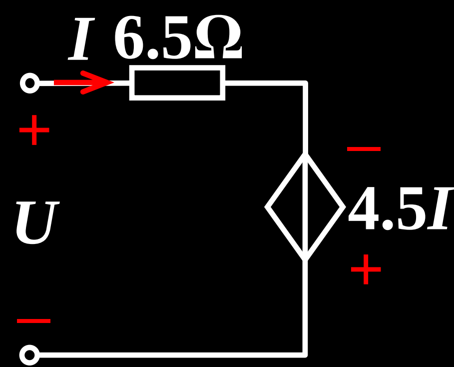
例6：求图示电路的输入电阻 R_i。

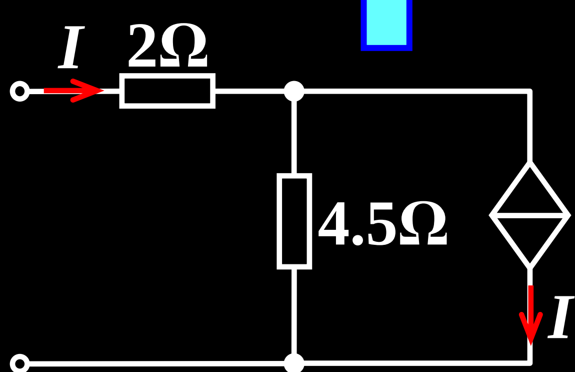


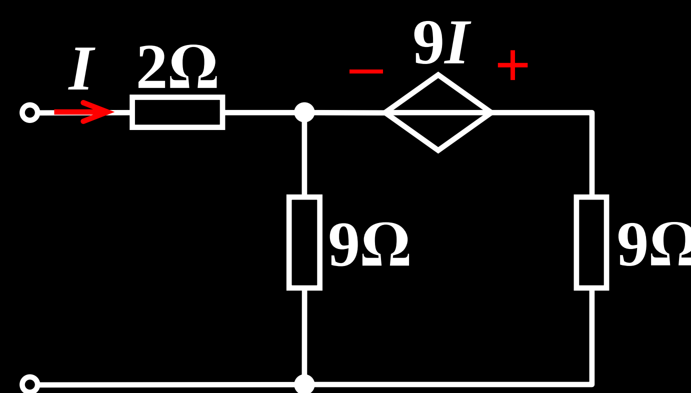
解：电源的等效变换求 R_i

$$U = 6.5I - 4.5I$$

$$R_i = \frac{U}{I} = 2\Omega$$



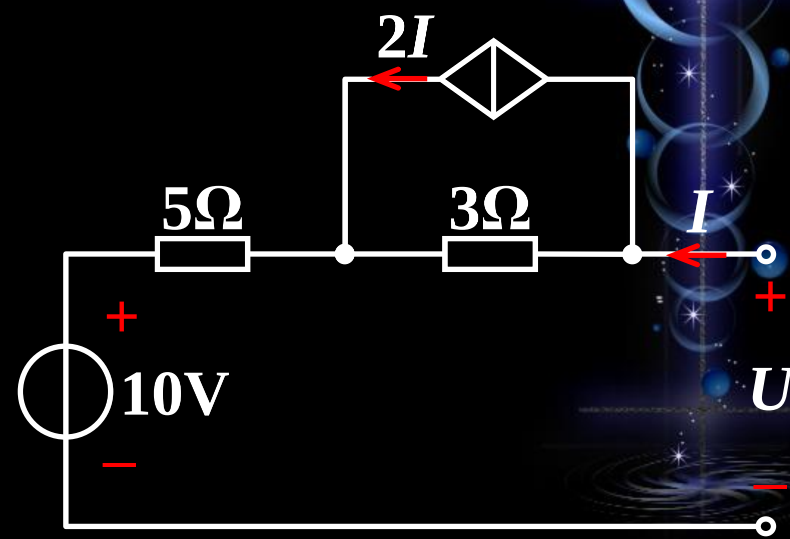




4. 含受控源单口网络的等效电路

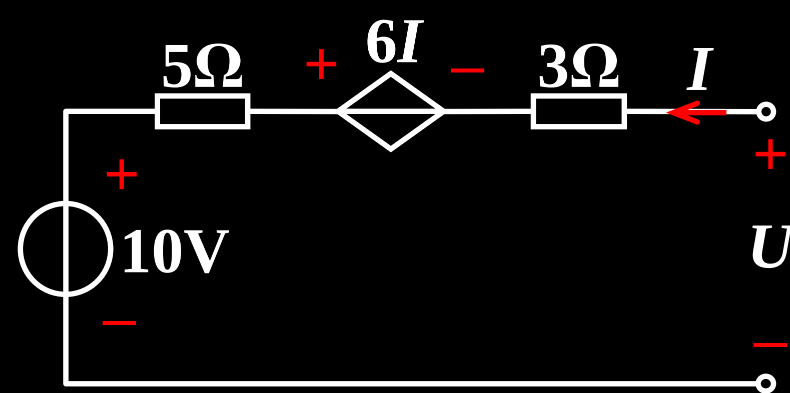
（2）含独立源的单口网络

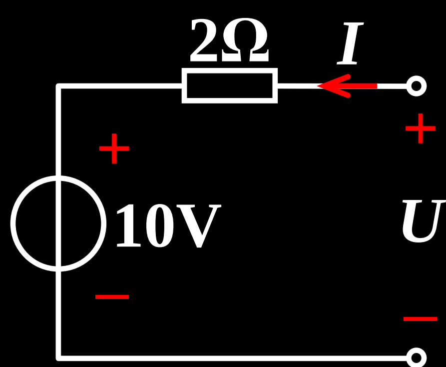
例7：化简图示电路。



解：$U = 3I - 6I + 5I + 10$

$= 2I + 10$

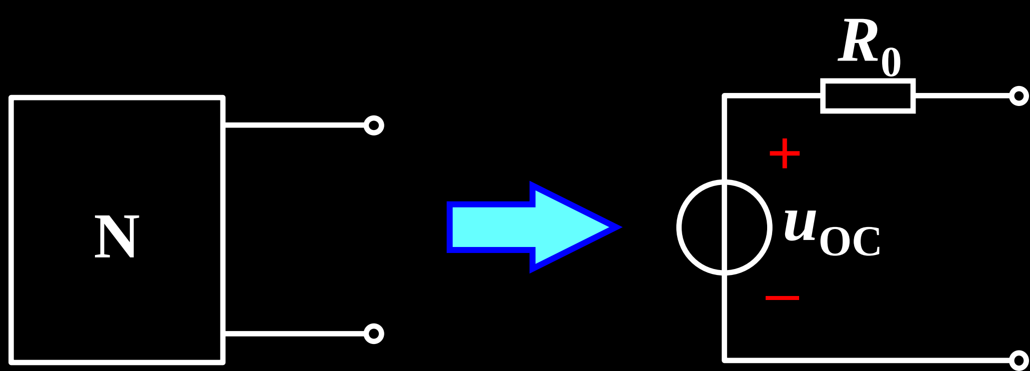




§4-6 戴维南定理

1. 戴维南定理的内容

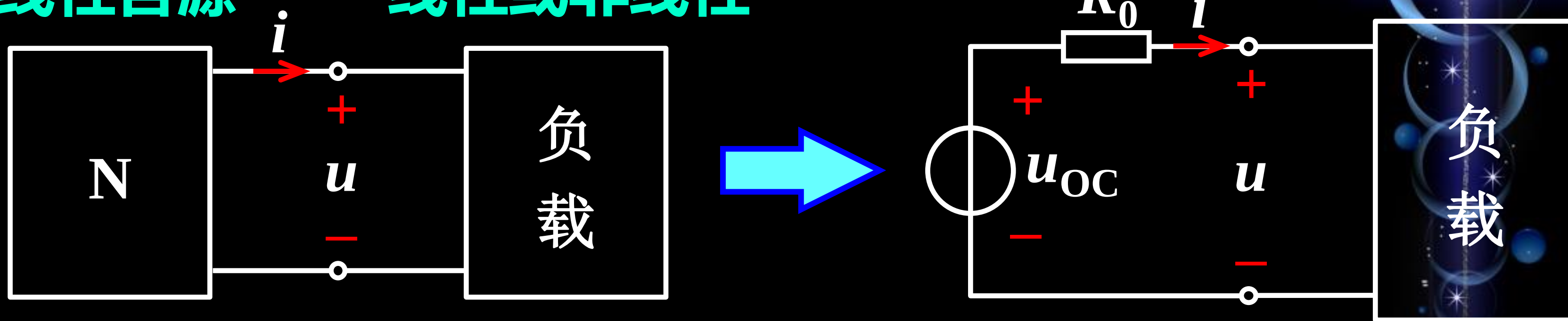
由线性电阻，线性受控源和独立源组成的线性单口网络 N，就其端口来看，可以等效为一个电压源与电阻串联的组合。电压源的电压等于该网络的开路电压 u_{OC}；其串联电阻为该网络中所有独立源为零值时的入端等效电阻 R_0。



戴维南等效电路

2. 应用戴维南定理的条件

线性含源　　线性或非线性

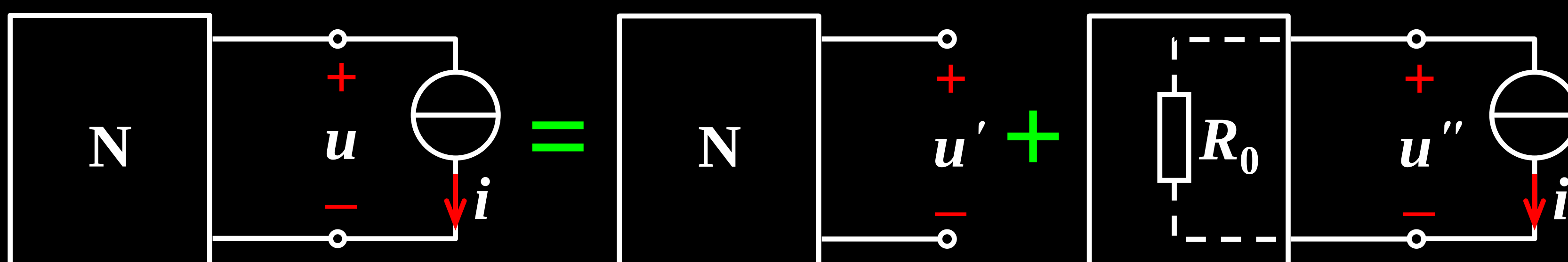


$$u = u_{OC} - R_0 i$$

3. 戴维南定理的证明

负载用电流源置换

N 中独立源作用　　电流源 i 作用



$u' = u_{OC}$　　$u'' = -R_0 i$

$u = u' + u'' = u_{OC} - R_0 i$ — 与戴维南等效电路的伏安关系相同

4. 应用戴维南定理分析电路

适用于求解线性网络中某一支路的电流或电压。

利用戴维南定理求解电路的步骤：

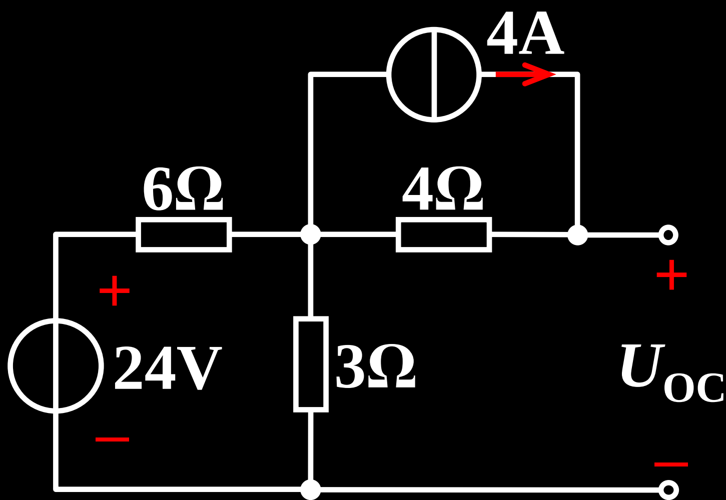
（1）将欲求支路的电路元件去掉，剩余部分作为含源单口网络 N；

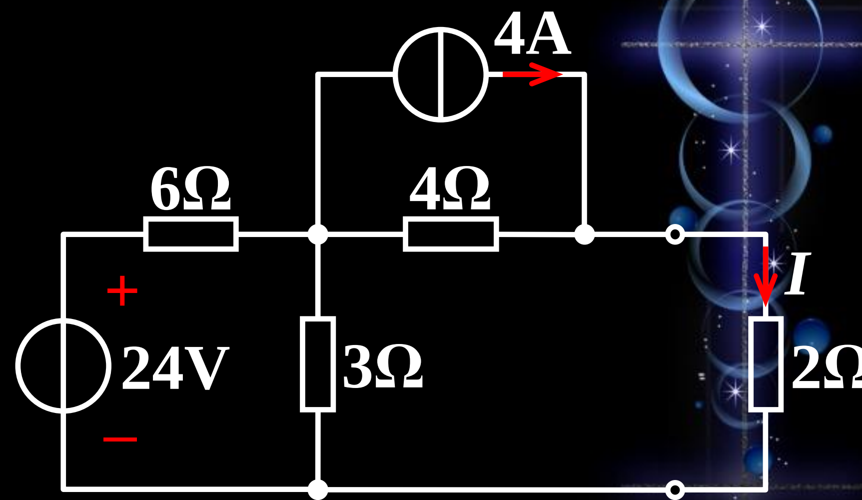
（2）求含源单口网络 N 的开路电压 u_{OC}；

（3）将含源单口网络 N 除源，使其成为无源单口网络 N_0，求等效电阻 R_0；

（4）将原支路接在戴维南等效电路上，求待求量。

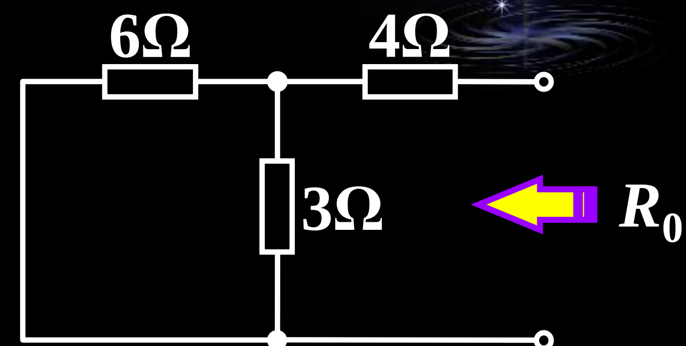
例1：用戴维南定理求图示电路中的电流 I。





解：求开路电压 U_{OC}

$$U_{OC} = 4 \times 4 + \frac{3}{6+3} \times 24 = 24\text{V}$$

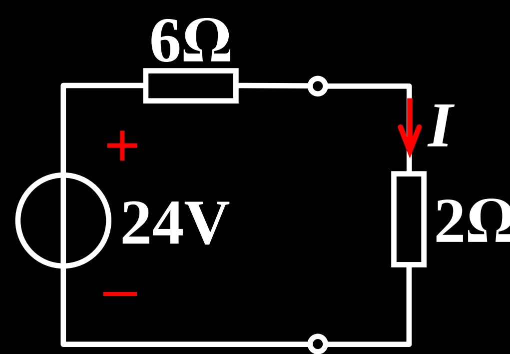


求等效电阻 R_0

$$R_0 = 6 // 3 + 4 = 6\Omega$$

求 I

$$I = \frac{24}{6+2} = 3\text{A}$$



戴维南
等效电路

例2：用戴维南定理求图示电路中的电流 I_3。

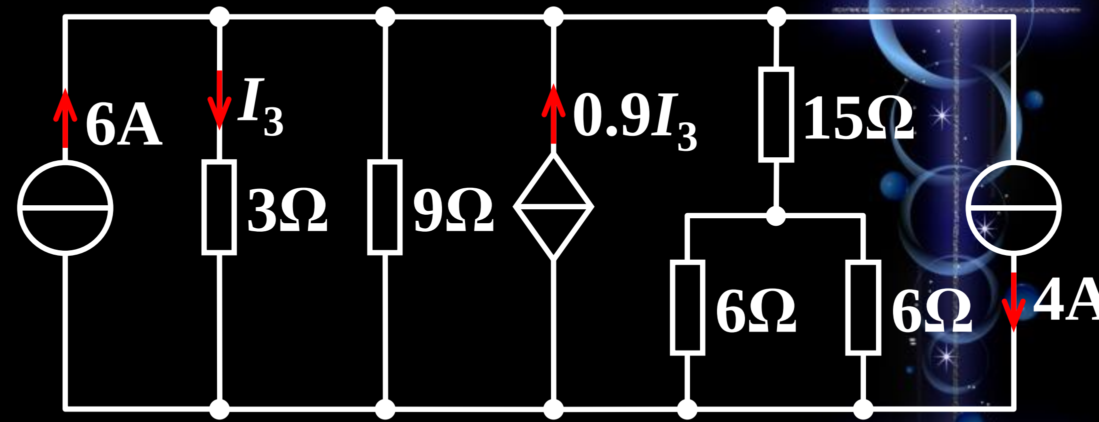
解：求开路电压 U_{OC}

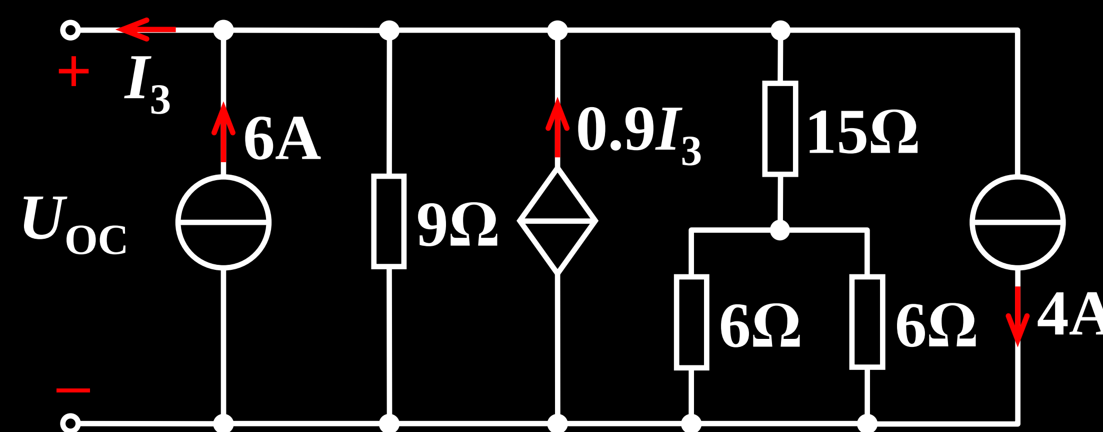
开路时，$I_3 = 0$

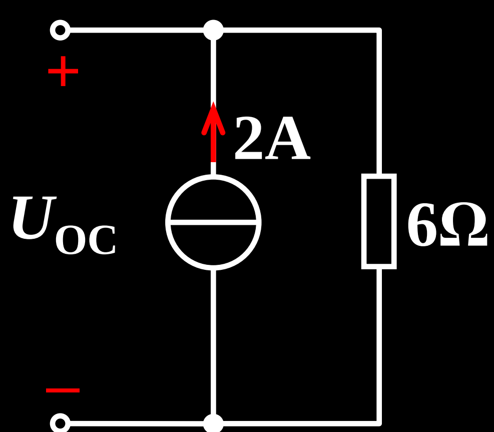
受控源电流为零

受控源开路

$U_{OC} = 6 \times 2 = 12\text{V}$







例2：用戴维南定理求图示电路中的电流 I_3。

解：求等效电阻 R_0

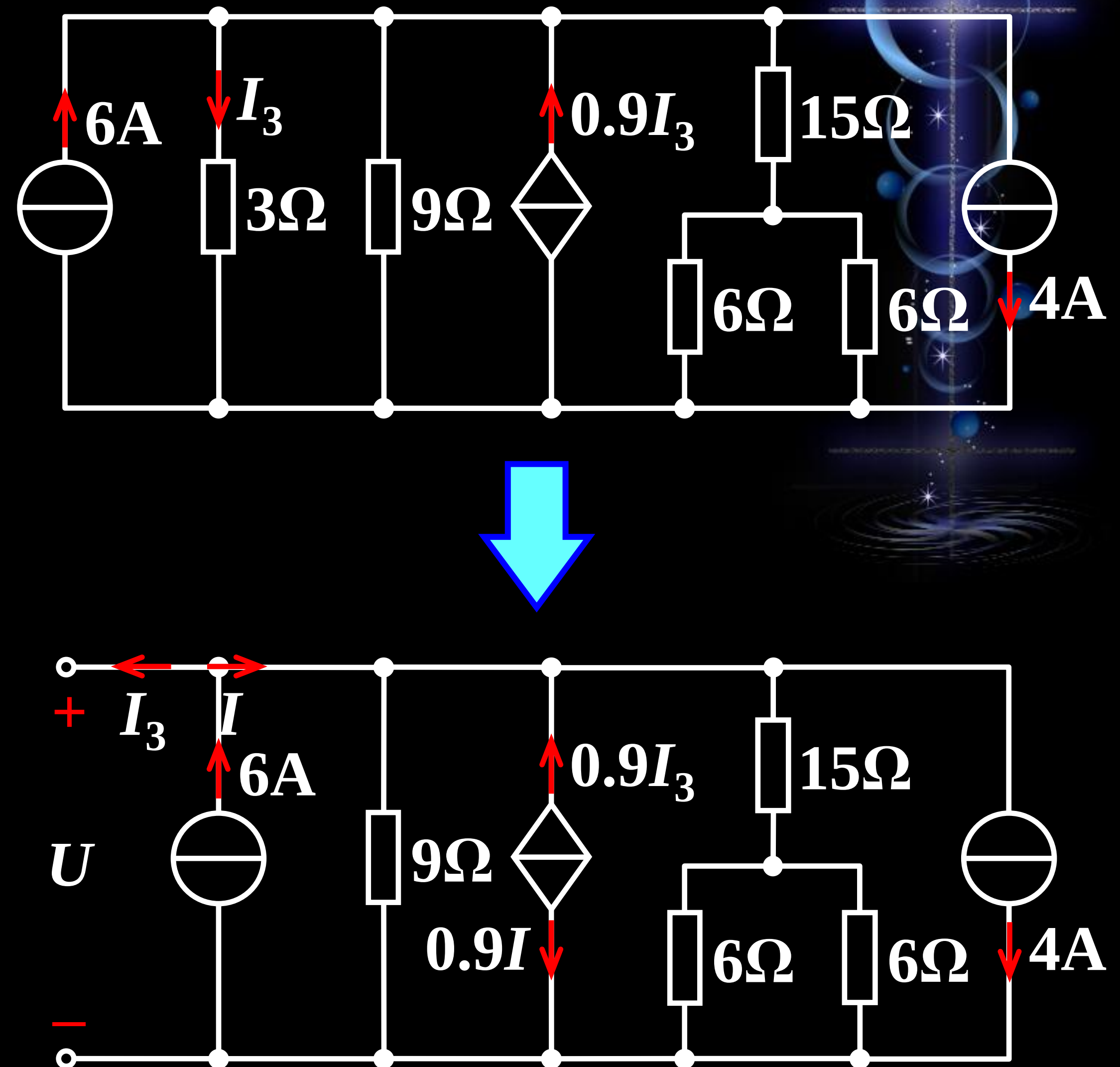
方法一：

$$I = \frac{U}{9} + 0.9I + \frac{U}{18}$$

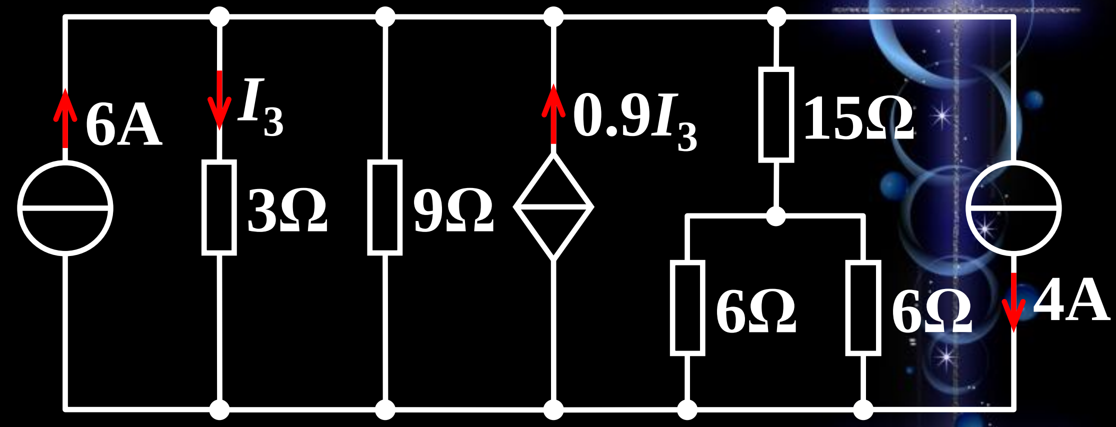
$$U = 0.6I$$

$$R_0 = \frac{U}{I} = 0.6\Omega$$

除源，端钮加电压 U 求电流 I。



例2：用戴维南定理求图示电路中的电流 I_3。



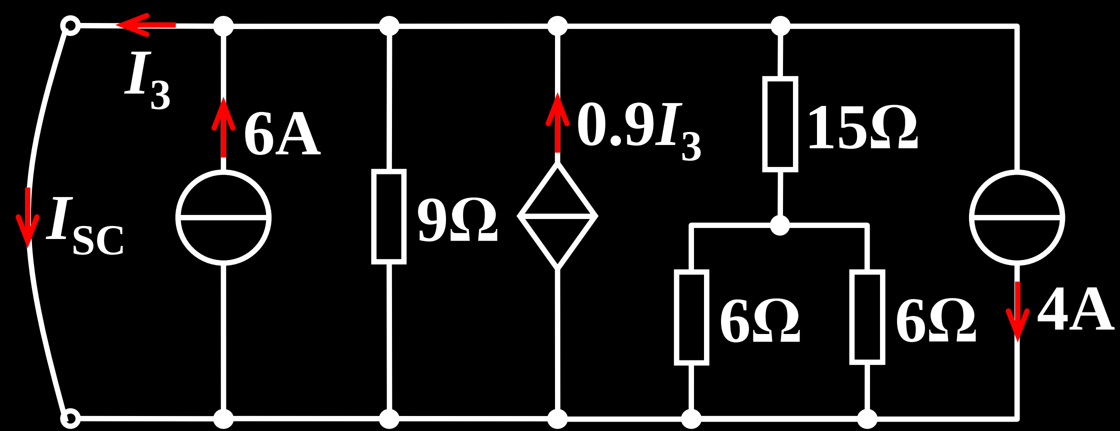
解：求等效电阻 R_0

方法二：

$$I_{SC}=0.9I_{SC}+6-4$$

$$I_{SC}=20\text{A}$$

$$R_0=\frac{U_{OC}}{I_{SC}}=\frac{12}{20}=0.6\Omega$$



$$R_0=\frac{\text{开路电压}}{\text{短路电流}}$$

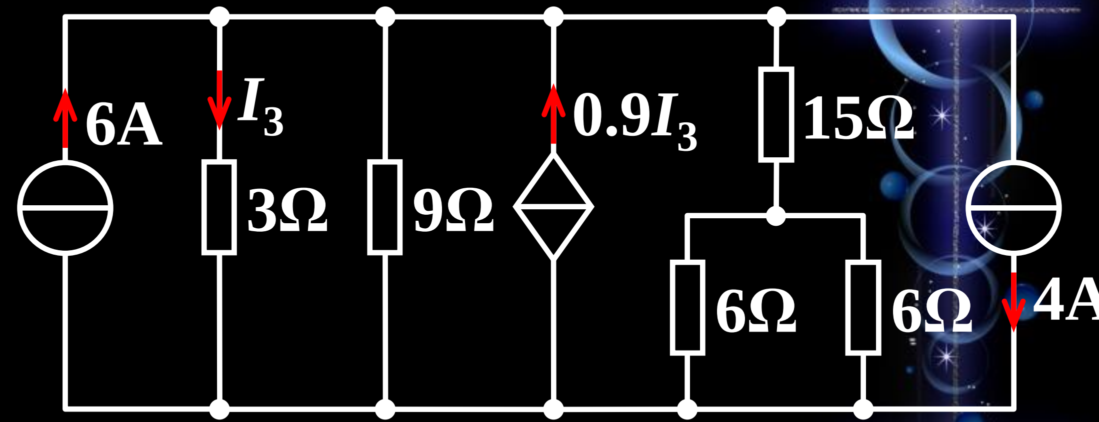
例2：用戴维南定理求图示电路中的电流 I_3。

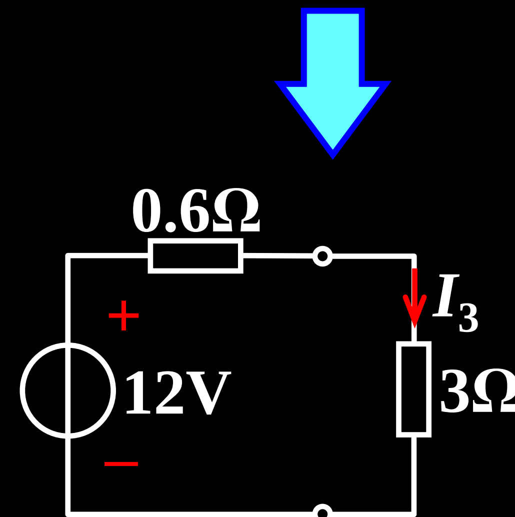
解：求 I_3

$$U_{OC} = 12\text{V}$$

$$R_0 = 0.6\Omega$$

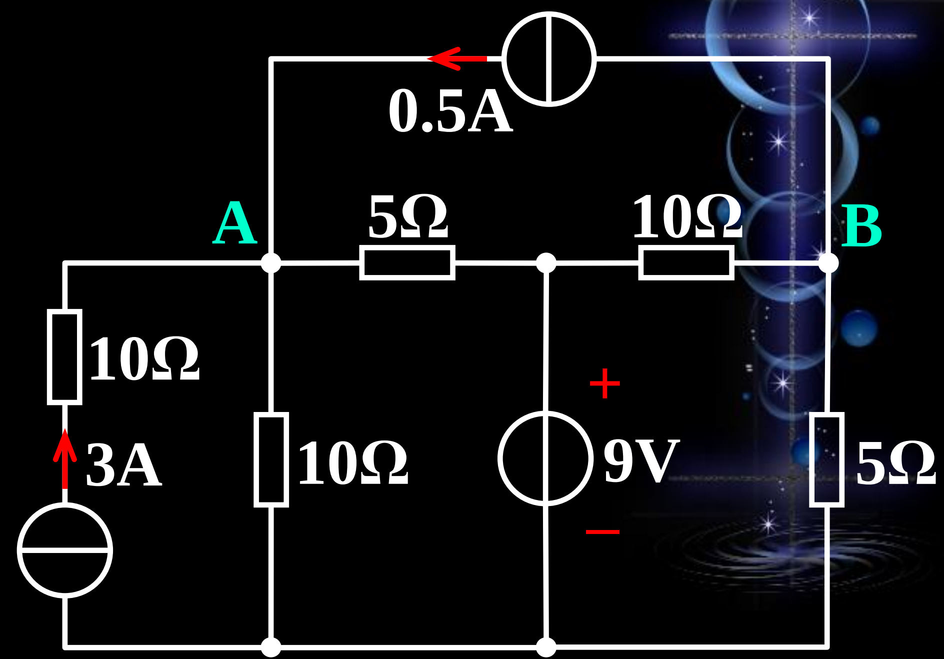
$$I_3 = \frac{12}{0.6+3} = \frac{10}{3}\text{A}$$





戴维南
等效电路

例3：用戴维南定理求图示电路中 A、B 两点间的电压 U_{AB}。

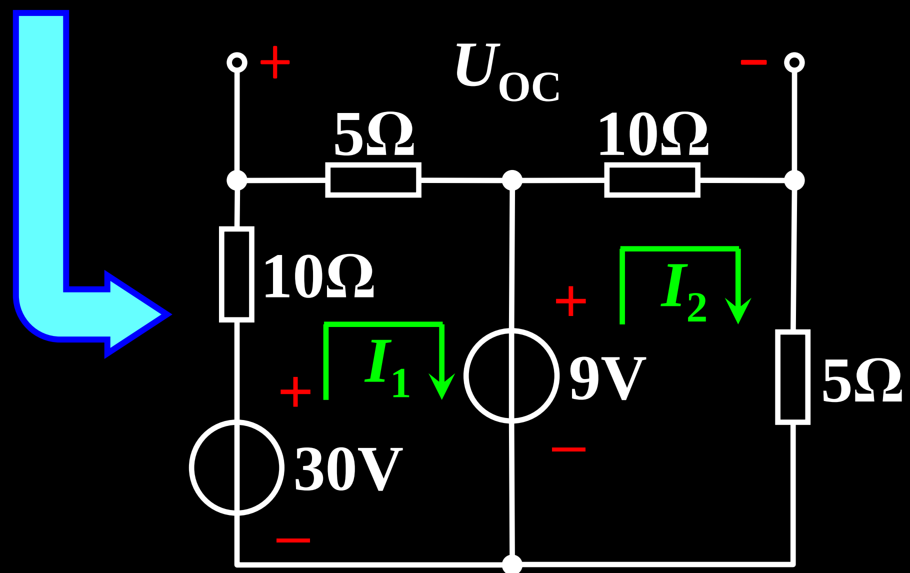


解：求开路电压 U_{OC}

$$\begin{cases}(10+5)I_1=-9+30\\(10+5)I_2=9\end{cases}$$

$$\begin{cases}I_1=1.4\text{A}\\I_2=0.6\text{A}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}U_{OC}&=5I_1+10I_2\\&=5\times1.4+10\times0.6\\&=13\text{V}\end{aligned}$$

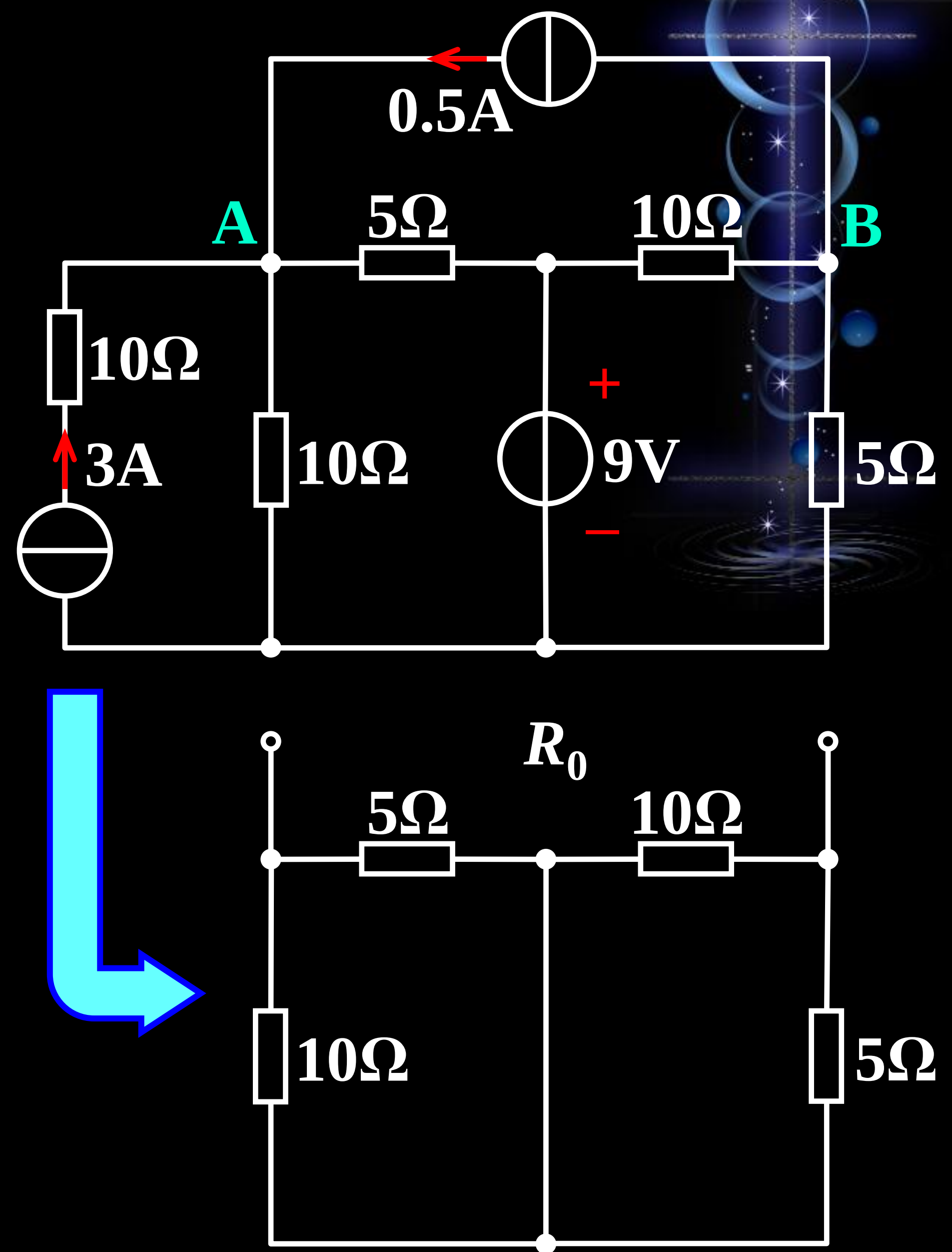


例3：用戴维南定理求图示电路中 A、B 两点间的电压 U_{AB}。

解：求等效电阻 R_0

$$R_0 = 10 // 5 + 10 // 5$$

$$= \frac{20}{3}\Omega$$



例3：用戴维南定理求图示电路中 A、B 两点间的电压 U_{AB}。

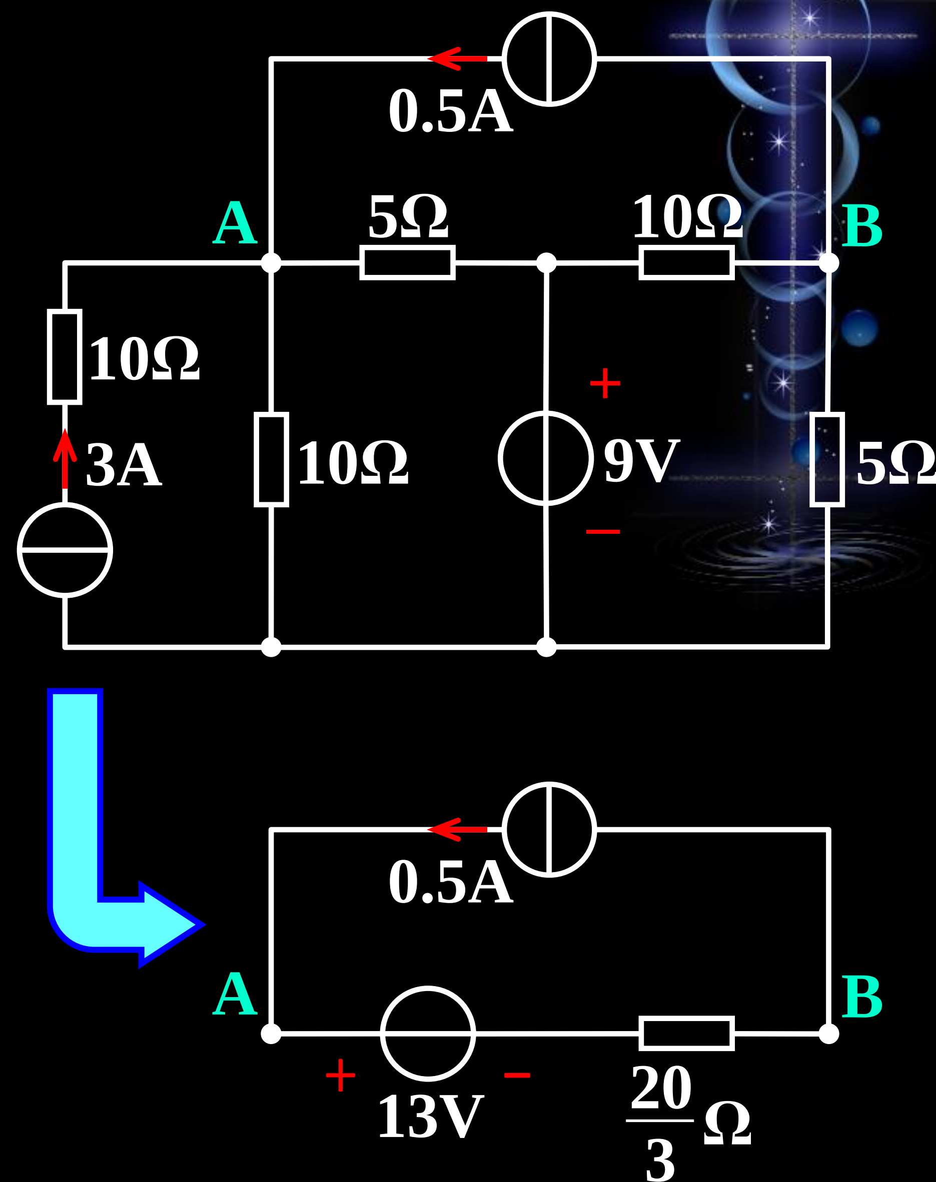
解：求 U_{AB}

$$U_{OC} = 13\text{V}$$

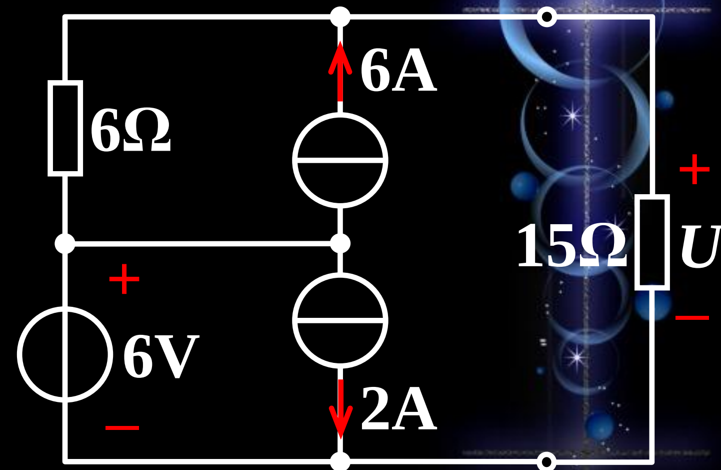
$$R_0 = \frac{20}{3}\Omega$$

$$U_{AB} = 13 + \frac{20}{3} \times 0.5$$

$$= 16.33\text{V}$$



例4：用戴维南定理求图示电路中的电压 U。



解：求开路电压 U_{OC}

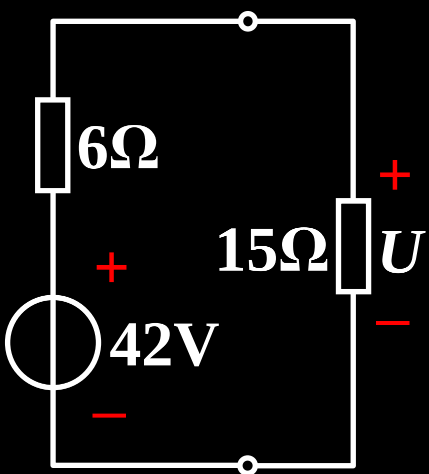
$$U_{OC} = 6 \times 6 + 6 = 42\text{V}$$

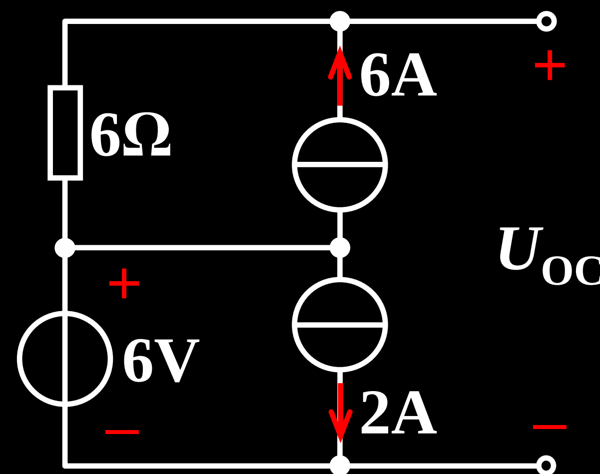
求等效电阻 R_0

$$R_0 = 6\Omega$$

求 U

$$U = \frac{15}{6+15} \times 42 = 30\text{V}$$





例5：求图示电路的戴维南等效电路。

解：求开路电压 U_{OC}

$$U_{OC}=U_{ab}=U_{ad}+U_{db}$$

$$=\frac{3}{6+3}\times U_{cd}+\frac{4}{2+4}\times U_{dc}$$

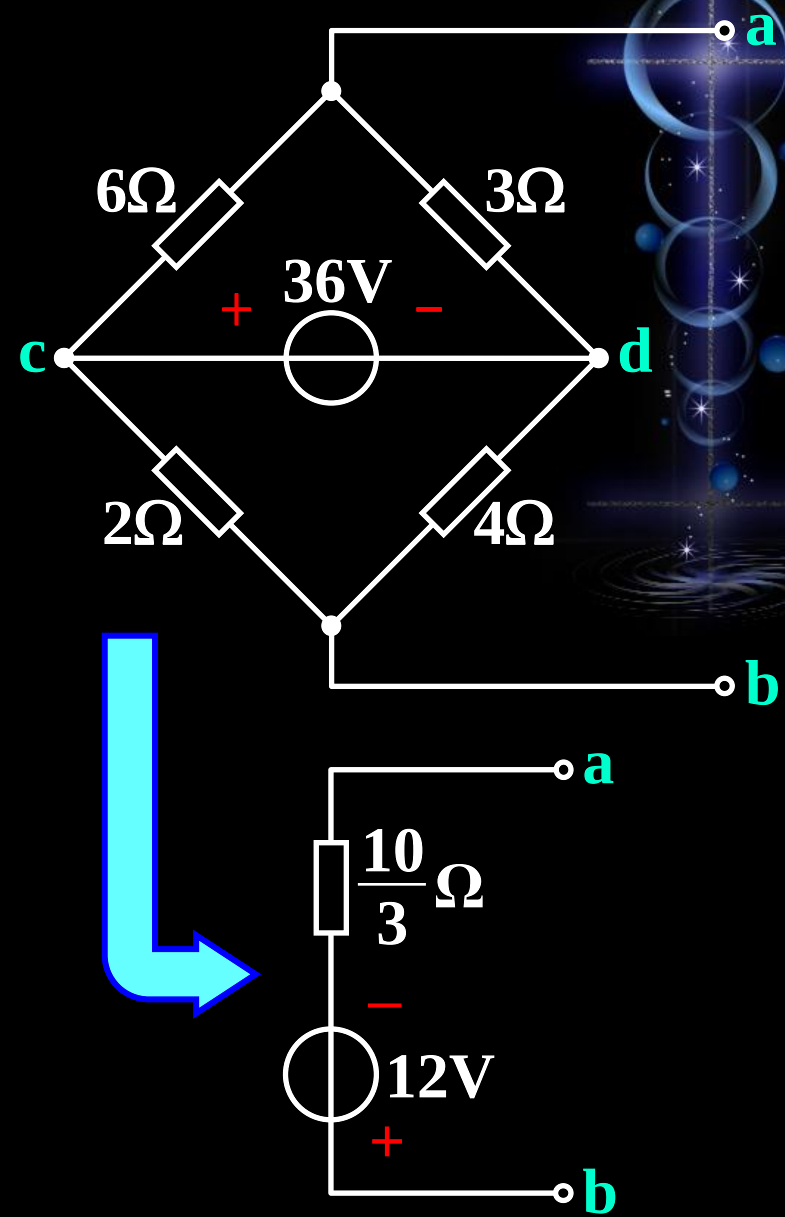
$$=\frac{1}{3}\times 36+\frac{2}{3}\times(-36)$$

$$=-12\text{V}$$

求等效电阻 R_0

$$R_0=6//3+2//4$$

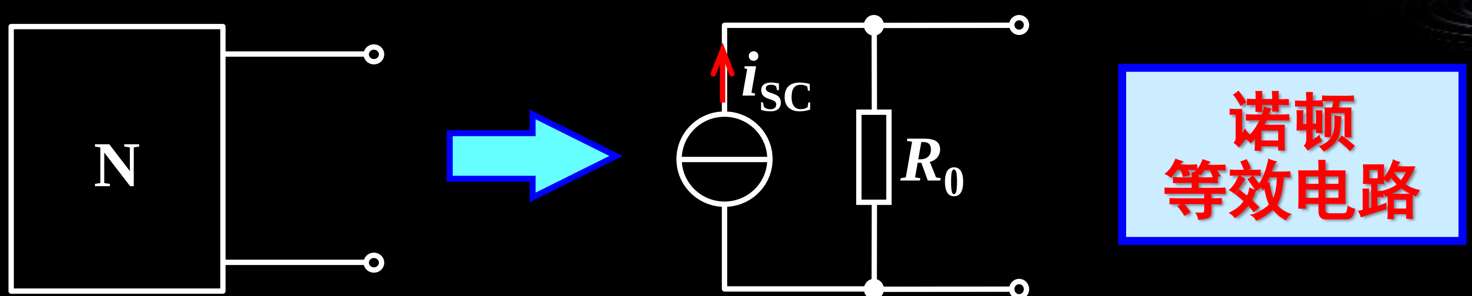
$$=\frac{10}{3}\Omega$$

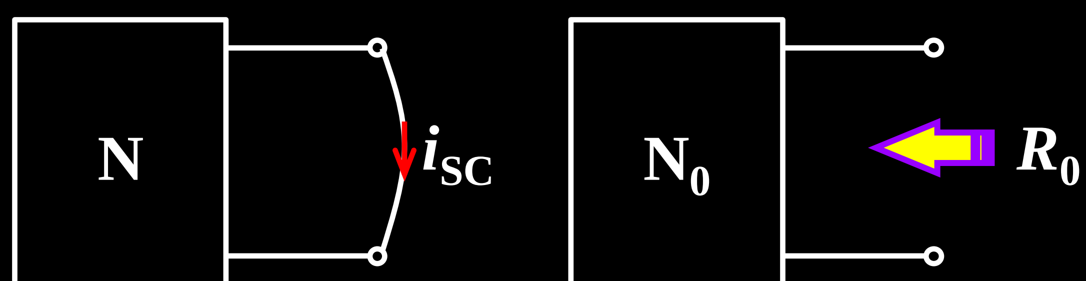


§4-7 诺顿定理

1. 诺顿定理的内容

由线性电阻，线性受控源和独立源组成的线性单口网络 N，就其端口来看，可以等效为一个电流源与电阻并联的组合。电流源的电流等于该网络的短路电流 i_{SC}；其并联电阻为该网络中所有独立源为零值时的入端等效电阻 R_0。





2. 应用诺顿定理的条件（同戴维南定理）

3. 诺顿定理的证明（自学）

4. 应用诺顿定理分析电路

适用于求解线性网络中某一支路的电流或电压。

利用诺顿定理求解电路的步骤：

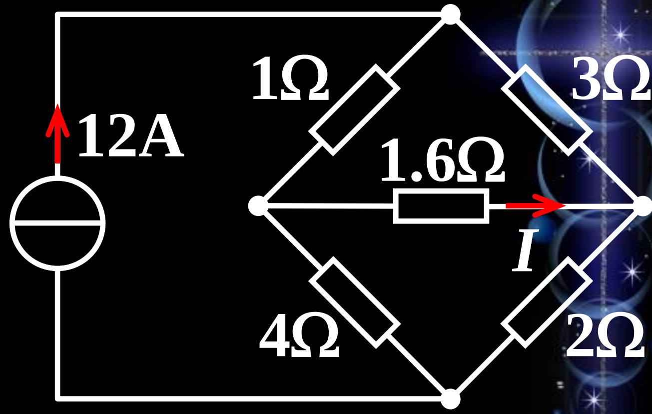
（1）将欲求支路的电路元件去掉，剩余部分作为含源单口网络 N；

（2）求含源单口网络 N 的短路电流 i_{SC}；

（3）将含源单口网络 N 除源，使其成为无源单口网络 N_0，求等效电阻 R_0；

（4）将原支路接在诺顿等效电路上，求待求量。

例1：用诺顿定理求图示电路中的电流 I。

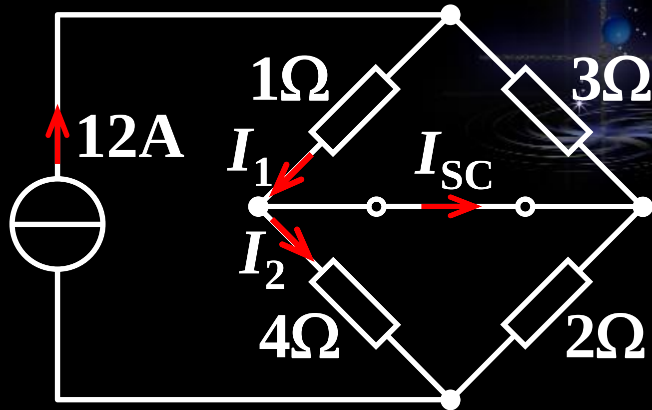


解：求短路电流 I_{SC}

$$I_1=\frac{3}{1+3}\times 12=9\text{A}$$

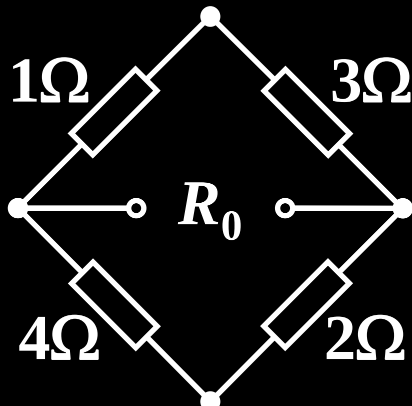
$$I_2=\frac{2}{4+2}\times 12=4\text{A}$$

$$I_{SC}=I_1-I_2=9-4=5\text{A}$$



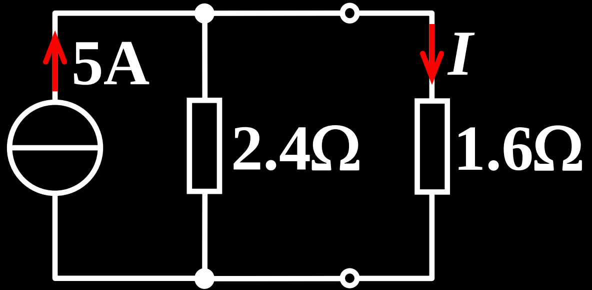
求等效电阻 R_0

$$R_0=(1+3)//(4+2)=2.4\Omega$$



求 I

$$I=\frac{2.4}{2.4+1.6}\times 5=3\text{A}$$

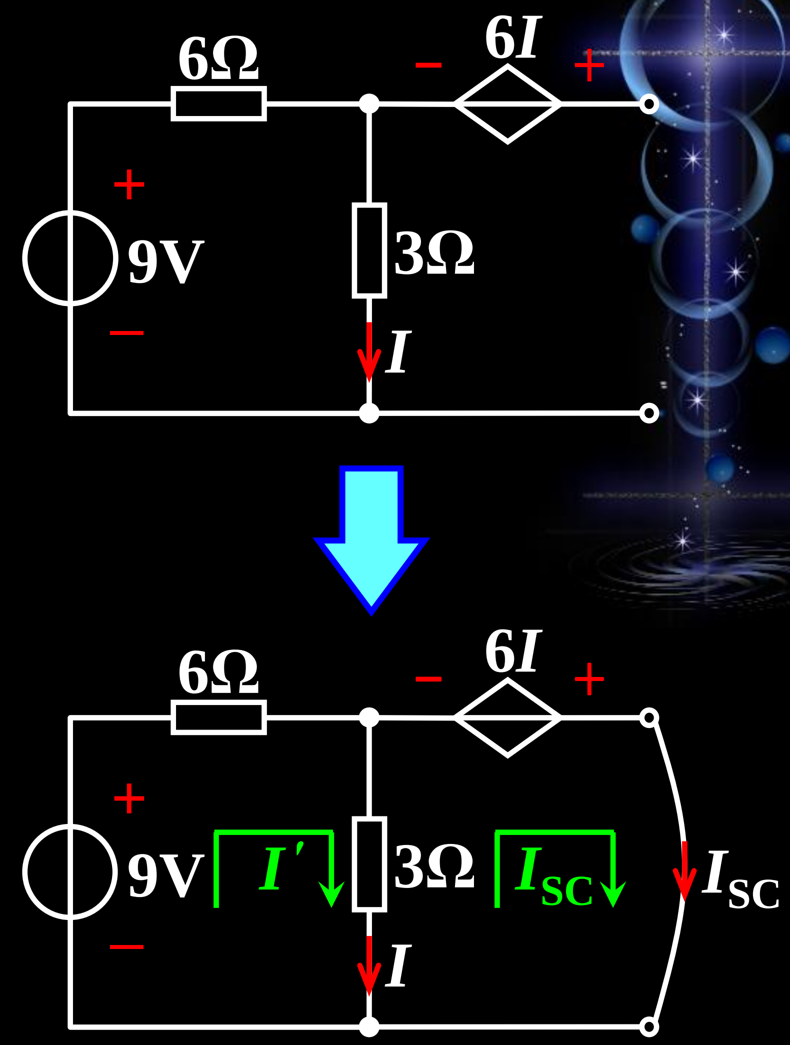


例2：求图示电路的诺顿等效电路。

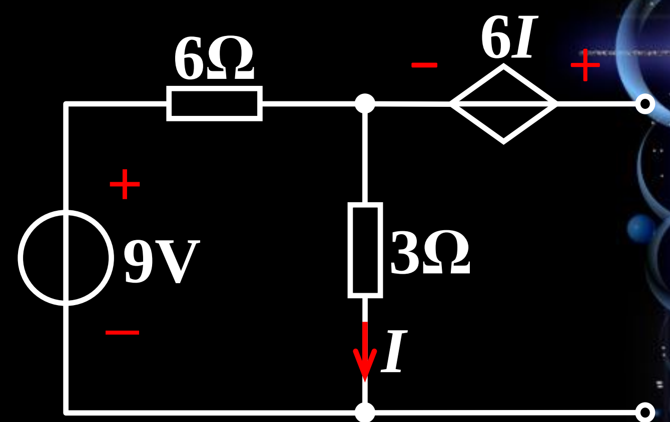
解：求短路电流 I_{SC}

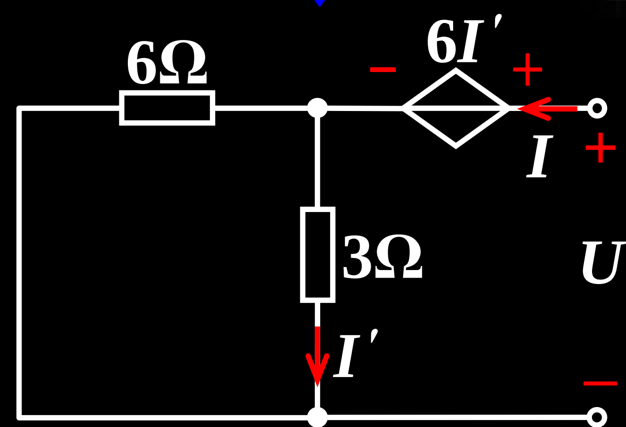
$$\begin{cases}(6+3)I'-3I_{SC}=9\\ 3I_{SC}-3I'=6I\\ I=I'-I_{SC}\end{cases}$$

$$I_{SC}=1.5\text{A}$$



例2：求图示电路的诺顿等效电路。





解：求等效电阻 R_0

方法一：

$$I' = \frac{6}{6+3} \times I = \frac{2}{3} I$$

$$U = 6I' + 3I' = 9I' = 6I$$

$$R_0 = \frac{U}{I} = 6\Omega$$

除源，端钮加电压 U 求电流 I。

例2：求图示电路的诺顿等效电路。

解：求等效电阻 R_0

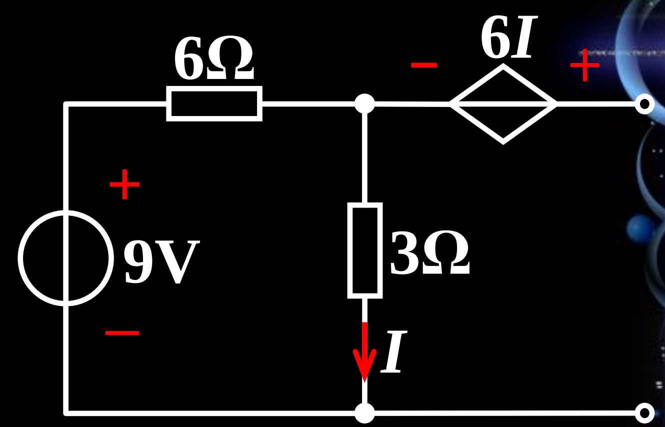
方法二：

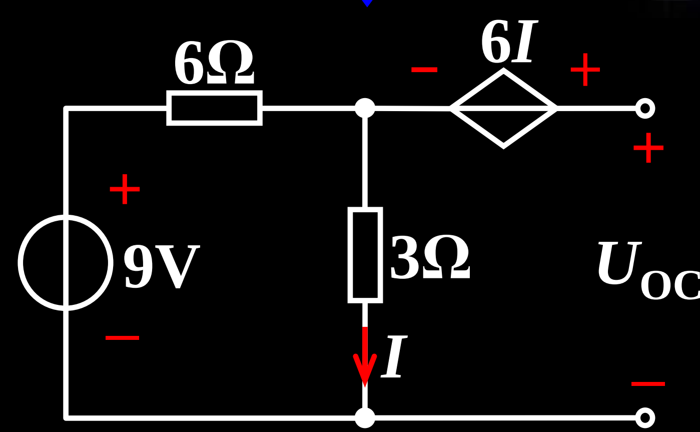
$$I=\frac{9}{6+3}=1\text{A}$$

$$U_{OC}=6I+3I=9I=9\text{V}$$

$$R_0=\frac{U_{OC}}{I_{SC}}=\frac{9}{1.5}=6\Omega$$

$$\boxed{R_0=\frac{\text{开路电压}}{\text{短路电流}}}$$



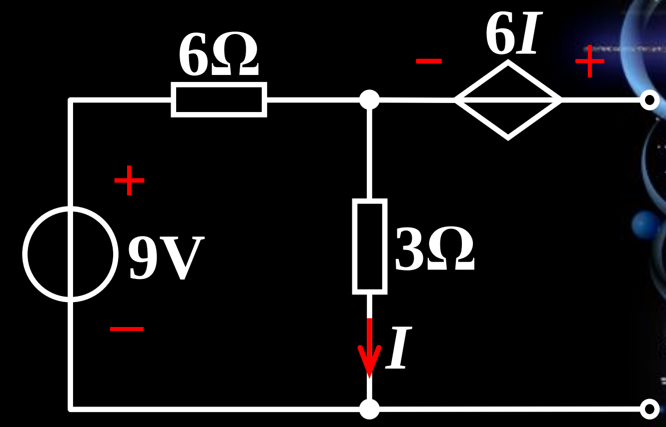


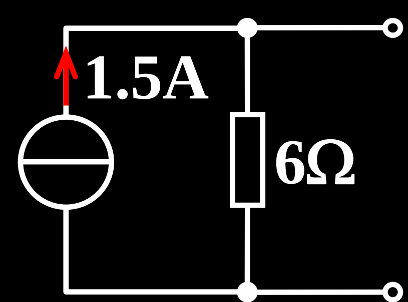
例2：求图示电路的诺顿等效电路。

解：求诺顿等效电路

$$I_{SC} = 1.5\text{A}$$

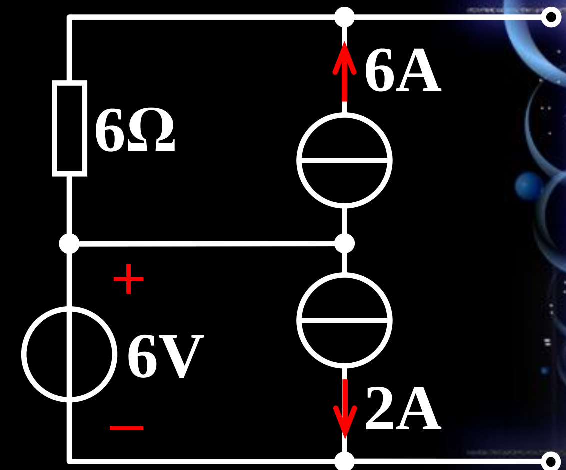
$$R_0 = 6\Omega$$





诺顿
等效电路

例3：求图示电路的诺顿等效电路。



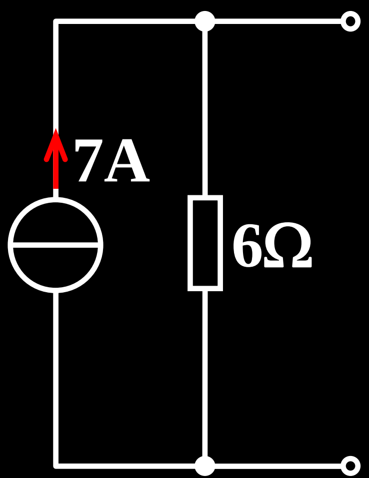
解：求短路电流 I_{SC}

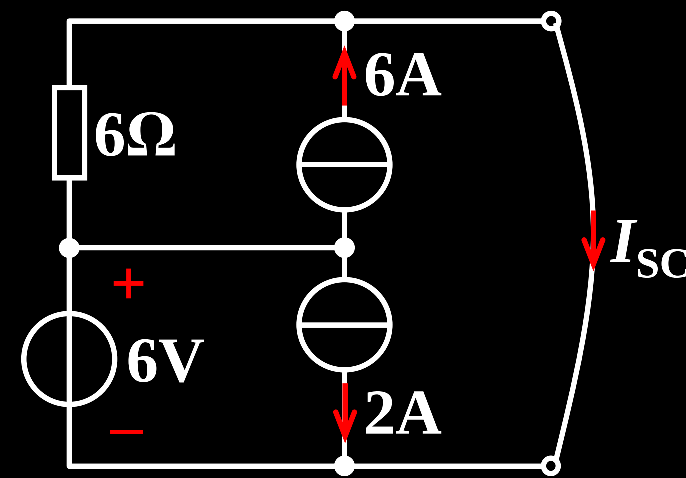
$$I_{SC}=\frac{6}{6}+6=7\text{A}$$

求等效电阻 R_0

$$R_0=6\Omega$$

诺顿
等效电路





等效电源定理小结

1. 戴维南定理

任意线性含源单口网络都可以等效为电压源与电阻的串联；

诺顿定理

任意线性含源单口网络都可以等效为电流源与电阻的并联。

2. 利用等效电源定理求解电路的步骤

（1）将欲求支路的电路元件去掉，剩余部分作为含源单口网络 N；

（2）求含源单口网络 N 的开路电压 u_{OC} 或短路电流 i_{SC}；

（3）将含源单口网络 N 除源，使其成为无源单口网络 N_0，求等效电阻 R_0；

（4）将原支路接在戴维南（诺顿）等效电路上，求待求量。

等效电源定理小结

3. 利用等效电源定理求解电路的方法

（1）求 u_{OC}、i_{SC} 的方法：支路电流法、网孔分析法、节点分析法、叠加原理、分压/分流公式等等。

（2）求 R_0 的方法：

★ 将含源单口网络除源，用电阻的串、并联公式化简；

★ 将含源单口网络除源，端钮上加电压源 u（或电流源 i），求入端电流 i（或端钮电压 u）；$R_0 = u/i$

★ 开路电压比短路电流。$R_0 = U_{OC}/I_{SC}$

（3）含受控源电路的分析方法：

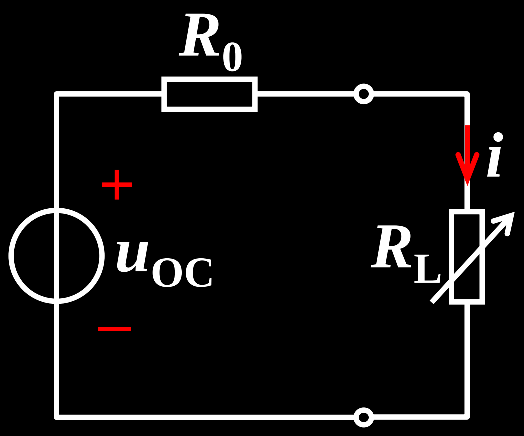
★ 控制量和被控制量要在同一电路中。

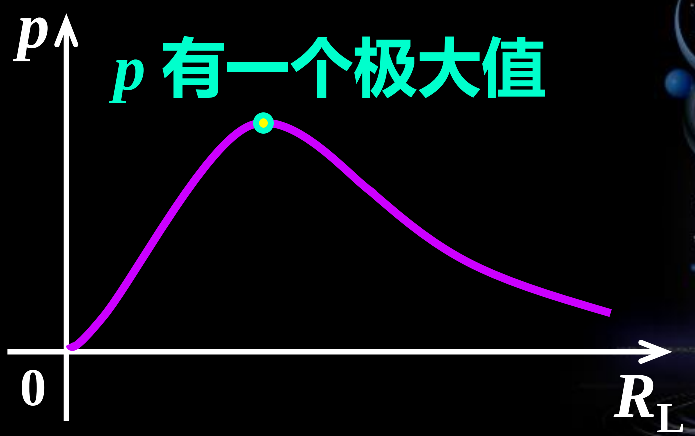
★ 求等效电阻时要计入受控源的作用，即独立源为零值时，受控源要保留。利用叠加原理时，受控源不能单独作用。

★ 求 R_0 时只能用外加电源法或开路电压 — 短路电流法。

§4-8 最大功率传递定理

一个含源单口网络总可以化简成戴维南或诺顿等效电路。





若 u_{OC}、R_0 不变，R_L 可变。

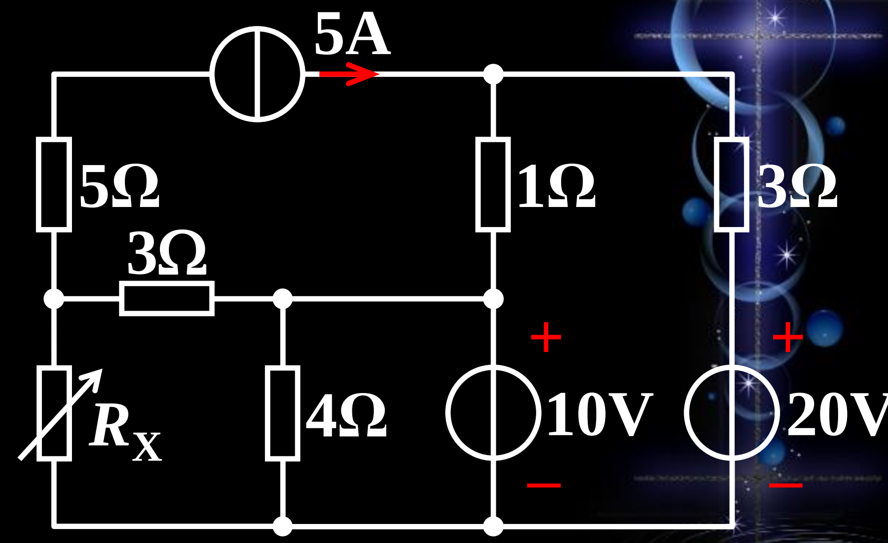
$$i = \frac{u_{OC}}{R_0 + R_L} \qquad p = i^2 R_L = u_{OC}^2 \times \frac{R_L}{(R_0 + R_L)^2}$$

$$\frac{dp}{dR_L} = u_{OC}^2 \times \frac{(R_0 + R_L)^2 - 2R_L(R_0 + R_L)}{(R_0 + R_L)^4} = 0 \Rightarrow R_L = R_0$$

故：$R_L = R_0$ 时获得最大功率。

$$\boxed{p_{max} = \frac{u_{OC}^2}{4R_0}}$$

例：电路如图所示，求 $R_X = ?$ 时获最大功率，$p_{max} = ?$



解：求开路电压 U_{OC}

$$U_{OC} = -3\times5+10 = -5\text{V}$$

求等效电阻 R_0

$$R_0 = 3\Omega$$

$R_X = R_0 = 3\Omega$ 时获最大功率

$$p_{max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_0} = \frac{(-5)^2}{4\times3} = 2.08\text{W}$$