习题 5-6

1. (1) 对应齐次方程的特征方程：$r^2-7r+12=0$

其根为：$r_1=3 \quad r_2=4$

故此齐次方程通解为：$\bar{y}=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$

原方程右端自由项为：$f(x)=x$，此处 $\lambda=0$ 不是上述齐次方程的特征值．

因此设特解 $y^*=(Ax+B)$

则 $y^{*\prime}=A \quad (y^*)''=0$ 代入所给方程 得

$0-7A+12(Ax+B)=x$

比较两端 x 的同次幂系数，得：

$12A=1 \quad -7A+12B=0$

解得：$A=\frac{1}{12} \quad B=\frac{7}{144}$

于是 $y^*=\frac{1}{12}x+\frac{7}{144}$

所求通解为：$y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+\frac{x}{12}+\frac{7}{144}$

(2) 对应齐次方程的特征方程为 $r^2-3r=0$

其根为：$r_1=0 \quad r_2=3$．

故此齐次方程通解为：$\bar{y}=C_1+C_2e^{3x}$

原方程右端自由项为：$f(x)=-6x+2$．此处 $\lambda=0$ 是上述方程一重特征值．

因此设特解 $y^*=(Ax+B)x=Ax^2+Bx$

则 $(y^*)'=2Ax+B$，$(y^*)''=2A$．代入所给方程，得：

$2A-3(2Ax+B)=2-6x$．

比较两端 x 同次幂系数，得

$-6A=-6$，$2A-3B=2$

解得：$A=1 \quad B=0$

则 $y^*=x^2$

所求通解为：$y=C_1+C_2e^{3x}+x^2$

(3) 对应齐次方程的特征方程为：$r^2+\frac{1}{2}r-1=0$

其根为：$r_1=-1$ $r_2=\frac{1}{2}$

则此齐次方程通解为：$\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}$

原方程标准型右端自由项为：$f(x)=e^x$，此处$\lambda=1$不是所述齐次方程特征值。

因此设特解为：$y^*=Ae^x$

则$(y^*)'=(y^*)''=Ae^x$，代入所给方程得：

$2Ae^x+Ae^x-Ae^x=2e^x$

$\Rightarrow A=1$

则$y^*=e^x$

则通解为 $y=\bar{y}+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}+e^x$

(4). 对应齐次方程特征方程：$r^2-3r+2=0$

其根为：$r_1=1$ $r_2=2$

则此齐次方程解为：$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$

原方程右端自由项为：$f(x)=3e^{2x}$，此处$\lambda=2$是上述方程一重特征值。

因此设特解：$y^*=xA\cdot e^{2x}$

则$(y^*)'=Ae^{2x}+2Axe^{2x}$ $(y^*)''=2Ae^{2x}+2Ae^{2x}+4Axe^{2x}=4Ae^{2x}+4Axe^{2x}$

代入所给方程得：

$4Ae^{2x}+4Axe^{2x}-3(Ae^{2x}+2Axe^{2x})+2xAe^{2x}=3e^{2x}$

$\Rightarrow A=3$

则$y^*=3xe^{2x}$

则通解为 $y=\bar{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}+3xe^{2x}$

(5) 对应齐次方程特征方程 $r^2+1=0$ 其根为$r_1=i$ $r_2=-i$. 则其通解为：$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

原方程右端自由项为 $f(x)=\cos 2x$，其中$\alpha=0$，$\beta=2$，由于$\alpha+i\beta=0+2i$不是特征值，

故设特解：$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$. 则$(y^*)''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$

代入原方程得：$-3A\cos 2x-3B\sin 2x=\cos 2x$

$\Rightarrow A=-\frac{1}{3}$，$B=0$. 则$y^*=-\frac{1}{3}\cos 2x$

则通解为$y=\bar{y}+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}\cos 2x$

(6) 对应齐次方程特征方程：$r^2+1=0$，其根为 $r_1=i$ $r_2=-i$，

其通解为：$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$

原方程右端自由项为：$f(x)=\sin x$，其中 $\alpha=0$，$\beta=1$

由于 $\alpha+i\beta=i$ 是一重特征值

故设特解：$y^*=x[A\cos x+B\sin x]$，$(y^*)''=-2A\sin x-Ax\cos x-Bx\sin x$

代入原方程并比较左右两端 $\cos x$ 与 $\sin x$ 系数，得：

$A=-\frac{1}{2}$ $B=0$

则 $y^*=-\frac{1}{2}x\cos x$

则通解为 $y=\bar{y}+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

(7) 对应齐次方程特征方程 $r^2+4=0$，其根为 $r_1=-2i$ $r_2=2i$

其通解为：$\bar{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

原方程右端自由项为：$f(x)=x\cos x$．其中 $\alpha=0$．$\beta=1$

由于 $\alpha+i\beta=i$ 不是特征值．

故设特解：$y^*=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$

则 $(y^*)''=(-2A+C)\sin x+[(C-A)x+D-B+C]\cos x$

代入原方程 解得：$A=\frac{1}{3}$ $B=0$ $C=0$，$D=\frac{2}{9}$

则：$y^*=\frac{x}{3}\cos x+\frac{2}{9}\sin x$

则通解为：$y=\bar{y}+y^*=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{x}{3}\cos x+\frac{2}{9}\sin x$．

(8) 对应齐次方程特征方程：$r^2-6r+9=0$ 其根为 $r_1=r_2=3$

其通解为：$\bar{y}=(C_1+C_2x)e^{3x}$

原方程右端自由项为 $f(x)=(x+1)e^{3x}$，此处 $\lambda=3$ 是齐次方程二重特征值

因此设特解：$y^*=x^2(Ax+B)e^{3x}=(Ax^3+Bx^2)e^{3x}$

则 $(y^*)'=(3Ax^2+Bx)e^{3x}+(3Ax^3+3Bx^2)e^{3x}=(3Ax^3+3(A+B)x^2+Bx)e^{3x}$

$(y^*)''=(9Ax^3+(18A+9B)x^2+(6A+9B)x+B)e^{3x}$

代入原方程得：$A=\frac{1}{6}$．$B=\frac{1}{2}$

则 $y^*=\frac{1}{6}x^2(x+3)e^{3x}$

则 $y=\bar{y}+y^*=(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{1}{6}x^2(x+3)e^{3x}$

(9) 对应齐次方程特征方程：$r^2-2r+5=0$ 其根为 $r_1=1+2i$，$r_2=1-2i$

其通解为：$\bar{y}=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^x$

原方程右端项为：$f(x)=e^x\sin 2x$，其 $\alpha=1$，$\beta=2$

由于 $\alpha+i\beta=1+2i$ 是一重特征值：

故设特解：$y^*=x\cdot e^x[A\cos 2x+B\sin 2x]$

将 y^* 代入原方程并比较 $\cos 2x$，$\sin 2x$ 的系数

得 $A=-\frac{1}{4}$，$B=0$

则 $y^*=-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x$

则 $y=\bar{y}+y^*=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^x-\frac{x}{4}e^x\cos 2x$.

(10) 对应齐次方程特征方程：$r^2-1=0$ 其根为 $r_1=1$　$r_2=-1$

其通解为：$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}$

又 $y''-y=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

下面分别求 $y''-y=\frac{1}{2}$ 和 $y''-y=-\frac{1}{2}\cos 2x$ 的特解

分别设为 $y_2^*=A$　$y_3^*=B\cos 2x+C\sin 2x$（由于 $\pm 2i$ 不是特征值）

分别代入上面两个方程，解得：

$A=-\frac{1}{2}$　$B=\frac{1}{10}$　$C=0$

则原方程通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x$

(11) 对应齐次方程特征方程：$r^2+1=0$，其根为 $r_1=-i$　$r_2=i$

其通解为：$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$

原方程右端项为：$f(x)=e^x+\cos x$

下面分别求 $y''+y=e^x$ 与 $y''+y=\cos x$ 的特解.

因为 $\lambda_1=1$ 不是特征值　$\lambda_2=i$ 是一重特征值

则分别设特解 $y_2^*=Ae^x$　　$y_3^*=x(B\cos x+C\sin x)$

代入原方程可解得.

$A=\frac{1}{2}$，$B=0$　$C=\frac{1}{2}$

则 $y_2^*=\frac{1}{2}e^x$　$y_3^*=\frac{1}{2}x\sin x$

则原方程通解为 $y=\bar{y}+y_2^*+y_3^*=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x+\frac{x}{2}\sin x$.

(12) 齐次方程特征方程：$r^4+3r^2-4=0$ 其根为：$r_1=-1$ $r_2=1$ $r_3=2i$ $r_4=-2i$

其通解为 $\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$

原方程右端常项为 $f(x)=e^{x}$，其 $\lambda=1$ 是一重特征值

设特解：$y=xA\cdot e^{x}$

代入原方程，解得 $A=\frac{1}{10}$，则 $y^*=\frac{1}{10}xe^{x}$

则通解为：$y=\bar{y}+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x+\frac{x}{10}e^{x}$

(13) 对应齐次方程特征方程：$r^2+1=0$ 其根为 $r_1=i$ $r_2=-i$

其通解为：$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$

原方程右端常项为 $f(x)=\cos x\cos 2x=\cos 3x+\cos x$

下面分别求 $y''+y=\cos 3x$ 与 $y''+y=\cos x$ 的特解.

因 $\lambda_1=3i$ 不是特征值. $\lambda_2=i$ 是一重特征值.

故分别设特解为 $y_2^*=A\cos 3x+B\sin 3x$ $y_3^*=Cx\cos x+Dx\sin x$

分别带入原方程. 解得：

$A=-\frac{1}{16}$ $B=0$ $C=0$，$D=\frac{1}{4}$

则 $y_2^*=-\frac{1}{16}\cos 3x$ $y_3^*=\frac{1}{4}x\sin x$

则原方程通解为 $y=\bar{y}+y_2^*+y_3^*=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{x}{4}\sin x-\frac{1}{16}\cos 3x$

2. (1) 对应齐次方程为 $y''-3y'+2y=0$，特征方程：$r^2-3r+2=0$，

其根为 $r_1=1$ $r_2=2$，则其通解为 $\bar{y}=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$

原方程右端项 $f(x)=5$. 对应 $\lambda=0$ 不是特征值

设特解 $y^*=A$. 代入原方程，

得 $A=\frac{5}{2}$ 则 $y^*=\frac{5}{2}$

则原方程通解为 $y=\bar{y}+y^*=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\frac{5}{2}$，则 $y'=C_1e^{x}+2C_2e^{2x}$

又 $\because y|_{x=0}=1$ $y'|_{x=0}=2$

即 $C_1+C_2+\frac{5}{2}=1$，$2=C_1+2C_2$

$\Rightarrow C_1=-5$ $C_2=\frac{7}{2}$

则初值问题解为 $y=-5e^{x}+\frac{7}{2}e^{2x}+\frac{5}{2}$

(2) 其齐次方程为 $y''+y'-2y=0$，特征方程为 $r^2+r-2=0$

其根为 $r_1=1$ $r_2=-2$. 则其通解 $\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-2x}$

原方程右端自由项 $f(x)=(x+1)e^x$. 其 $\lambda=1$ 是一重特征值

则设特解：$y^*=x(Ax+B)e^x$

代入原方程，得 $A=\frac{1}{6}$ $B=\frac{2}{9}$

则 $y^*=(\frac{x^2}{6}+\frac{2}{9}x)e^x$

则原方程通解：$y=\bar{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{-2x}+(\frac{x^2}{6}+\frac{2}{9}x)e^x$

则 $y'=C_1e^x-2C_2e^{-2x}+(\frac{x}{3}+\frac{2}{9})e^x+(\frac{x^2}{6}+\frac{2}{9}x)e^x$

又 $y(0)=1$. $y'(0)=2$

$C_1+C_2=1$, $C_1+\frac{2}{9}-2C_2=2$

$\Rightarrow C_1=\frac{34}{27}$ $C_2=\frac{-7}{27}$

则原初值问题解为 $y=\frac{34}{27}e^x-\frac{7}{27}e^{-2x}+(\frac{x^2}{6}+\frac{2}{9}x)e^x$

(3) 齐次方程为 $y''+4y=0$ 特征方程为：$r^2+4=0$

其根为：$r_1=2i$ $r_2=-2i$

其通解为 $\bar{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

原方程右端自由项 $f(x)=12\cos^2 x=6+\cos 2x$

分别求 $y''+4y=6$ 与 $y''+4y=\cos 2x$ 的特解

因 $\lambda_1=0$ $\lambda_2=2i$，λ_1 不是特征值 λ_2 是一重特征值

则分别设特解为 $y_2^*=A$ $y_3^*=xB\cos 2x+x\cdot C\sin 2x$

带入原方程得：$A=\frac{3}{2}$ $B=0$ $C=\frac{3}{2}$

则原方程通解为：$y=\bar{y}+y_2^*+y_3^*=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{3}{2}x\sin 2x+\frac{3}{2}$

则 $y'=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x+\frac{3}{2}\sin 2x+3x\cos 2x$

又 $y(0)=2$ $y'(0)=1$

解得：$C_1=\frac{1}{2}$ $C_2=\frac{1}{2}$

则 $y=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{3}{2}x\sin 2x+\frac{3}{2}$

3. (1) 令 $t=\ln x$，则 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$

代入已知方程，得新方程：

$$-\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-y=0$$

即 $\frac{d^2y}{dt^2}-y=0$

特征方程为 $r^2-1=0$. 其根为 $r_1=1 \quad r_2=-1$

则通解为：$y=C_1e^{t}+C_2e^{-t}$

代入 $t=\ln x$. 则：$y=C_1x+\frac{C_2}{x}$

(2) 标准型为：$x^2y''-xy'+y=2x$

令 $t=\ln x$. 则 $x=e^t$，$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$

代入已知方程，得新方程：

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=2e^t$$

其齐次方程为：$y''_t-2y'_t+y=0$ 特征方程为 $r^2-2r+1=0$

其根为：$r_1=r_2=1$，则其通解为：$\bar{y}=(C_1+C_2t)e^t$

又 $f(t)=2e^t$. 其 $\lambda=1$ 是二重特征值

设新方程特解：$y^*=t^2Ae^t$，代入新方程中

得 $A=1$. 则 $y^*=t^2e^t$

则新方程通解为：$y=\bar{y}+y^*=(C_1+C_2t)e^t+t^2e^t$

将 $t=\ln|x|$ 代入，得：

$$y=x(C_1+C_2\ln|x|)+x\ln^2|x|$$

(3) 令 $t=\ln x$. 则 $x=e^t$. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$

代入已知方程，得新方程：$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=t^2-2t$.

其对应齐次方程：$y''_t-3y'_t+2y=0$，特征方程为：$r^2-3r+2=0$

得根为：$r_1=1 \quad r_2=2$. 其通解为 $\bar{y}=C_1e^{t}+C_2e^{2t}$

又 $f(t)=t^2-2t$，且 $\lambda=0$ 不是特征根，则设新方程一个特解：

$y^*=At^2+Bt+C$ 代入新方程得：$A=\frac{1}{2} \quad B=\frac{1}{2}$，$C=\frac{1}{4}$

则新方程通解为：$y=\bar{y}+y^*=C_1e^t+C_2e^{2t}+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}$

代入 $t=\ln x$. 有：$y=C_1x+C_2x^2+\frac{1}{2}\ln^2x+\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}$

(4) 标准型：$r^2\frac{d^2y}{dr^2}+2r\frac{dy}{dr}-n(n+1)y=0$

令 $t=\ln r$，则 $r=e^t$，得：$\frac{dy}{dr}=\frac{1}{r}\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dr^2}=-\frac{1}{r^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2y}{dt^2}$

代入已知方程：得新方程：$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-n(n+1)y=0$

其特征方程为：$m^2+m-n(n+1)=0$

其根为：$m_1=-n-1$ $\quad m_2=n$

则新方程通解为 $y=C_1e^{(-n-1)t}+C_2e^{nt}$

代入 $t=\ln r$. 有：$y=C_1r^{-n-1}+C_2 r^n$

(5) 令 $t=\ln x$. 则 $x=e^t$. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$

代入已知方程，得新方程：$\frac{d^2y}{dt^2}+y=2\sin t$

其对应齐次方程为：$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$，

特征方程为：$r^2+1=0$，其根为 $r_1=i$ $\quad r_2=-i$.

通解为：$\bar{y}=C_1\cos t+C_2\sin t$

又新方程右端自由项 $f(t)=2\sin t$，对应 $\lambda=i$ 是一重特征值

则令新方程一个特解 $y^*=At\cos t+Bt\sin t$

代入新方程，得：$A=-1$ $\quad B=B$.

则其通解为：$y=\bar{y}+y^*=C_1\cos t+C_2\sin t-t\cos t$

代入 $t=\ln x$：$y=C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x-\ln x\cdot\cos\ln x$

(6) 标准型：$x^2y''-xy'+y=x+\frac{1}{x}$

令 $t=\ln x$. 则 $x=e^t$，$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$

代入已知方程，得新方程：$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=e^t+e^{-t}$

其对应齐次方程为：$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0$.

特征方程为：$r^2-2r+1=0$ 得 $r_1=r_2=1$

其通解为：$\bar{y}=(C_1+C_2t)e^t$

下面分别求 $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=e^t$，$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=e^{-t}$ 的一个特解

又 $\lambda_1=1$ 是二重特征值 $\quad \lambda_2=-1$ 不是特征值

则分别设特解 $y_2^*=At^2e^t$ $\quad y_3^*=Be^{-t}$ 代入上述方程，得 $A=\frac{1}{2}$ $\quad B=\frac{1}{4}$

则新方程通解为 $y=\bar{y}+y_2^*+y_3^*=(C_1+C_2t)e^t+\frac{1}{2}t^2e^t+\frac{1}{4}e^{-t}$

代入 $t=\ln|x|$. 有：$y=(C_1+C_2\ln|x|)x+\frac{x}{2}\ln^2x+\frac{1}{4x}$

4. (1) 设法消去 x 及其导数，①×2−②×3 得：

$$\frac{2dx}{dt}+4y-\frac{3dy}{dt}-3y=2\cos t$$

则 $\frac{dx}{dt}=\frac{3}{2}\frac{dy}{dt}-\frac{y}{2}+\cos t$ ③

对②式两端关于 t 求导得：

$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=0$， 将③代入得：

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+y-2\cos t+\frac{dy}{dt}=0$$

即 $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=2\cos t$ ④

其齐次方程为：$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0$. 特征方程：$r^2-2r+1=0$

其根为 $r_1=r_2=1$. 又 $f(t)=2\cos t$. $\alpha=0, \beta=1$ 则 $\alpha+\beta i=i$ 不是特征值

则令④式方程一个特解为 $y^*=A\cos t+B\sin t$，代入④式

得 $A=0$ $B=-1$ 则 $y^*=-\sin t$

则④的通解为 $y=-\sin t+e^t(C_1+C_2t)$

则 $\frac{dy}{dt}=-\cos t+e^t(C_1+C_2t+C_2)$ ⑤

将⑤代入②有：$-\cos t+e^t(C_1+C_2t+C_2)-2x+y=0$

$$\Rightarrow x=-\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)+e^t(C_1+\frac{C_2}{2}+C_2t)$$

则原方程组通解为 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)+e^t(C_1+\frac{C_2}{2}+C_2t) \\ y=-\sin t+e^t(C_1+C_2t) \end{cases}$

(2) 消去 y 及 $\frac{dy}{dt}$，①+②得：

$2\frac{dx}{dt}=2y \Rightarrow \frac{dx}{dt}=y$， 则 $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}$. 代入①式：

$\frac{dx}{dt}+\frac{d^2x}{dt^2}=-x+\frac{dx}{dt}+3$，即 $\frac{d^2x}{dt^2}+x=3$ ③

③的齐次方程为 $\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$，特征值为：$r_1=i$ $r_2=-i$

则齐次方程通解为 $\bar{x}=C_1\cos t+C_2\sin t$.

又 $f(t)=3$，其 $\lambda=0$ 不是特征值，令③的一个特解 $x^*=A$. 代入③

得 $A=3$. 则 $x^*=3$

则③的通解为 $x=\bar{x}+x^*=C_1\cos t+C_2\sin t+3$

则 $y=\frac{dx}{dt}=-C_1\sin t+C_2\cos t$

则原方程组通解为：$\begin{cases} x=C_1\cos t+C_2\sin t+3 \\ y=-C_1\sin t+C_2\cos t \end{cases}$

(3) 消去y及其导数. ②-①得:

$\frac{dx}{dt}-3x+2y=-e^{2t}$，则 $y=\frac{1}{2}\left(-\frac{dx}{dt}+3x-e^{2t}\right)$，两边对t求导.

则 $\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{3}{2}\frac{dx}{dt}-e^{2t}$，代入②得:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-7\frac{dx}{dt}+6x=-2e^{2t} \quad ③$$

③的齐次方程为: $\frac{d^2x}{dt^2}-7\frac{dx}{dt}+6x=0$，其特征值为: $r_1=1 \quad r_2=6$

则齐次方程通解为: $\bar{x}=C_1e^{t}+C_2e^{6t}$

又③的右端自由项为 $f(t)=-2e^{2t}$，其 $\lambda=2$ 不是特征值

则令③的一个特解为 $x^*=Ae^{2t}$. 代入③可得 $A=\frac{1}{2}$，则 $x^*=\frac{1}{2}e^{2t}$

则③的通解为: $x=\bar{x}+x^*=C_1e^{t}+C_2e^{6t}+\frac{1}{2}e^{2t}$

则 $\frac{dx}{dt}=C_1e^{t}+6C_2e^{6t}+e^{2t}$

则 $y=C_1e^{t}-\frac{3}{2}C_2e^{6t}-\frac{1}{4}e^{2t}$

则原方程组的通解: $\begin{cases} x=C_1e^{t}+C_2e^{6t}+\frac{1}{2}e^{2t} \\ y=C_1e^{t}-\frac{3}{2}C_2e^{6t}-\frac{1}{4}e^{2t} \end{cases}$

(4) 消去y及其导数. ①-②得:

$\frac{dx}{dt}+2y-t+x+2t=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\left(-\frac{dx}{dt}-x-t\right)$

则 $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-1\right)$. 代入②得:

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}-x-\frac{1}{2}\left(-\frac{dx}{dt}-x-t\right)-2t=0$$

即: $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+x=-3t$ ③

其对应齐次方程: $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+x=0$ 的特值为 $r_1=r_2=1$

则齐次方程通解为: $\bar{x}=C_1e^{t}+C_2te^{t}$

③的右端自由项 $f(t)=-3t$. 其 $\lambda=0$ 不是特征值. 则令③的特解为 $x^*=At+B$

代入③中 得 $A=-3$. $B=-7$. 则 $x^*=-3t-7$

则③的通解为: $x=\bar{x}+x^*=C_1e^{t}+C_2te^{t}-3t-7$

则 $\frac{dx}{dt}=C_1e^{t}+C_2e^{t}+C_2te^{t}-3$

则 $y=-C_1e^{t}-C_2\left(t+\frac{1}{2}\right)e^{t}+t+5$

则原方程通解为 $\begin{cases} x=C_1e^{t}+C_2te^{t}-3t-7 \\ y=-C_1e^{t}-C_2\left(t+\frac{1}{2}\right)e^{t}+t+5 \end{cases}$

5.(1) 消去x及x的导数. ①+②得：

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=2y+1 \Rightarrow \frac{dx}{dt}=-\frac{dy}{dt}+2y+1$$ 代入①：

$x=-\frac{dy}{dt}+y+1$，两边对t求导得：

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+2y=-1 \quad ③$$

其齐次方程：$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+2y=0$ 的特征值为 $r_1=1+i \quad r_2=1-i$.

则齐次方程通解：$\bar{y}=C_1e^t\cos t+C_2e^t\sin t$.

③的右边项为$f(t)=-1$，其$\lambda=0$不特征值，则令③的特解为：$y^*=A$

代入③得 $A=\frac{1}{2}$. 则 $y^*=\frac{1}{2}$

则③的通解为 $y=\bar{y}+y^*=C_1e^t\cos t+C_2e^t\sin t-\frac{1}{2}$

则 $\frac{dy}{dt}=C_1e^t\cos t-C_1e^t\sin t+C_2e^t\sin t+C_2e^t\cos t$

$\Rightarrow x=C_1e^t\sin t-C_2e^t\cos t+\frac{1}{2}$

又 $x(0)=0 \quad y(0)=0$

$\Rightarrow C_1=C_2=\frac{1}{2}$

则原方程特解为 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}e^t\sin t-\frac{1}{2}e^t\cos t+\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}e^t\sin t+\frac{1}{2}e^t\cos t-\frac{1}{2} \end{cases}$

(2) 由②得：$y=-\frac{dx}{dt}$ 则 $\frac{dy}{dt}=-\frac{d^2x}{dt^2}$ 代入①可得：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0 \quad ③$$

特征值为 $r_1=i \quad r_2=-i$.

则③的通解为 $x=C_1\cos t+C_2\sin t$

则：$y=-\frac{dx}{dt}=-(-C_1\sin t+C_2\cos t)=C_1\sin t-C_2\cos t$

又 $x(0)=1$，$y(0)=0$

$\Rightarrow C_1=1 \quad C_2=0$

则原方程组为 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$

(3) 消去y和y的导数，①+②得：

$$3\frac{dx}{dt}-x+\frac{dy}{dt}=e^t \Rightarrow \frac{dy}{dt}=-\frac{3dx}{dt}+x+e^t$$

对②两边对t求导：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{3dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+x=-e^t \quad ③$$

其对应齐次方程为：$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$，特征值为 $r_1=i$ $r_2=-i$

则齐次方程通解为：$\bar{x}=C_1\cos t+C_2\sin t$

又③的右端自由项 $f(t)=-e^t$，其 $\lambda=1$ 不是特征值.

则令③的特解为：$x^*=Ae^t$ 代入③

可得 $A=-\frac{1}{2}$

则③的通解为：$x=\bar{x}+x^*=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{2}e^t$

$$则 \frac{dx}{dt}=-C_1\sin t+C_2\cos t-\frac{1}{2}e^t$$

$$则\ y=-3x-\frac{dx}{dt}=-3C_1\cos t-3C_2\sin t+\frac{3}{2}e^t+C_1\sin t-C_2\cos t+\frac{1}{2}e^t$$

$$=(-3C_1-C_2)\cos t+(C_1-3C_2)\sin t+2e^t$$

又 $x(0)=\frac{3}{2}$ $y(0)=0$

$\Rightarrow C_1=2$ $C_2=-4$

则其方程组特解为 $\begin{cases} x=2\cos t-4\sin t-\frac{1}{2}e^t \\ y=14\sin t-2\cos t+2e^t \end{cases}$

(4) 消去y与y的导数，②-①得：

$$-\frac{dy}{dt}-y=3x+y \Rightarrow \frac{dy}{dt}=-3x-2y，又 y=-\frac{dx}{dt}.$$

对①两边求导. $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=0$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}-3x+\frac{2dx}{dt}=0 \quad 即 \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{2dx}{dt}-3x=0 \quad ③$$

③的特征值为 $r_1=1$ $r_2=-3$.

则通解为 $x=C_1e^t+C_2e^{-3t}$，则 $\frac{dx}{dt}=C_1e^t-3C_2e^{-3t}$

则 $y=-\frac{dx}{dt}=-C_1e^t+3C_2e^{-3t}$

又 $x(0)=1$ $y(0)=1$，则原方程组特解为：$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-3t}) \\ y=-\frac{1}{2}(e^t-3e^{-3t}) \end{cases}$