一、对称矩阵与反对称矩阵

定义1.6.1 设A是n阶方阵。若$A^T=A$, 则称A是对称矩阵；若$A^T=-A$, 则称A是反对称矩阵。

对称矩阵: $a_{ij}=a_{ji}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$

反对称矩阵: $a_{ij}=-a_{ji}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)\Rightarrow a_{ii}=0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

对称矩阵　　　　反对称矩阵

例1.6.1 设A是任一n阶方阵，则 $A+A^T$ 是对称矩阵，$A-A^T$是反对称矩阵。

证　因 $(A+A^T)^T=A^T+(A^T)^T=A^T+A$

$$=A+A^T$$

故，$A+A^T$ 是对称矩阵。

又

$$(A-A^T)^T=A^T-(A^T)^T=A^T-A$$
$$=-(A-A^T)$$

故，$A-A^T$ 是反对称矩阵。

例1.6.2 设A是任一方阵，则A可表示成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

$$A=\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$$

对称矩阵　　反对称矩阵

$$=A(I+B^TA^T)^{-1}=(A^{-1})^{-1}(I+BA)^{-1}$$
$$=\left[(I+BA)A^{-1}\right]^{-1}=\left(A^{-1}+B\right)^{-1}=(A^{-1}+A^{-1}AB)^{-1}$$
$$=\left[A^{-1}(I+AB)\right]^{-1}=(I+AB)^{-1}(A^{-1})^{-1}$$
$$=(I+AB)^{-1}A$$
$$\left[(I+AB)^{-1}A\right]^T=A^T\left[(I+AB)^{-1}\right]^T$$
$$=A\left[(I+AB)^T\right]^{-1}=A\left[I^T+(AB)^T\right]^{-1}$$

练习：设A,B都是n阶对称矩阵，证明：当且仅当A与B可交换时，AB是对称的.

结论

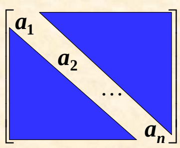
① A,B 为对称矩阵, 则 $A\pm B,\ kA,\ A^k,\ A^{-1}$ 都是对称矩阵。

② A,B 为反对称矩阵, 则 $A\pm B,\ kA,\ A^{-1}$ 都是反对称矩阵，且

$$A^k\text{为}\begin{cases}\text{对称} & k\text{为偶数}\\ \text{反对称} & k\text{为奇数}\end{cases}$$

二、对角矩阵

定义1.6.2 下列主对角线以外的元素全为零的n阶方阵



称为对角矩阵。

对角矩阵通常简记为

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$$

或 $diag(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = k$ 时

$$\begin{bmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{bmatrix} = kI$$

称之为数量矩阵。若 k =1，则数量矩阵即是单位矩阵。

结论

① 对角矩阵的秩等于其非零主对角元的个数。

② A, B 为对角阵,则

$A \pm B, kA, AB, A^k, A^{-1}, A^T$ 都是对角阵。

③ 对角矩阵$A = diag(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 可逆 $\Leftrightarrow$

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全不为零，当A可逆时，

$$A^{-1} = diag(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \cdots, a_n^{-1})$$

定义1.6.3 设A 是分块矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & A_t \end{bmatrix}$$

若子块$A_1, A_2, \cdots, A_t$全是方阵，则称A是准对角矩阵，可简写为

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_t \end{bmatrix}$$

注 在可运算的条件下，准对角矩阵的和、差、积、幂以及数量乘积仍是准对角矩阵。

例1.6.6 设A是准对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_t \end{bmatrix}$$

则A可逆的充分必要条件是子块 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 均可逆

当A可逆时，

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_t^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

三对角线矩阵

一般简记为

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

三、三角矩阵

定义1.6.4. 设A与B是两个n 阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{11} & & & & \\ b_{21} & b_{22} & & & \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & & \\ \cdots & \cdots & & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

则称A是上三角矩阵，B是下三角矩阵。

主对角元全为1的上（下）三角矩阵称为单位上（下）三角矩阵

注 上（下）三角矩阵的和、差、积、幂以及数量乘积仍是上（下）三角矩阵。 转置呢？

例1.6.7 三角矩阵可逆的充分必要条件是其主对角元全不为零。

证明：充分性 设A是上三角阵且主对角元全不为零，

则A是阶梯型矩阵且主元即是主对角元.

此时，主元个数等于A的阶数，即A是满秩矩阵，

所以A可逆.

若A是下三角阵且主对角元全不为零，

则由上述讨论知A^T是可逆的，从而A可逆.

必要性 设A是可逆的上三角阵.

对A的阶数做数学归纳法.

1）设A为1阶可逆上三角阵.

此时A的主对角元只有一个，显然不为零.

2）假设任一n-1阶可逆上三角矩阵的主对角元全不为零.

考虑任一n阶可逆上三角矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

由于A可逆，所以A满秩，可得$a_{nn}\neq 0$,

否则$r(A)\leq n-1$,这与A满秩矛盾.

对A分块 $A=\begin{bmatrix} A_1 & \alpha \\ 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$

其中

$$A_1=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} \\ & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

对$A^{-1}=[b_{ij}]_{n\times n}$按相同方式分块，

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} B_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & b_{nn} \end{bmatrix}$$

其中B_1是$n-1$阶方阵.

因为

$$A^{-1}A=\begin{bmatrix} B_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & b_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & \alpha \\ 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} B_1A_1 & B_1\alpha+a_{nn}\beta_1 \\ \beta_2A_1 & \beta_2\alpha+a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}=I=\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

有 $B_1A_1=I_{n-1}$，可得A_1是$n-1$阶可逆上三角矩阵.

由归纳假设可知A_1的主对角元$a_{11},a_{22},\cdots a_{n-1,n-1}$全不为0,

从而A的主对角元$a_{11},a_{22},\cdots a_{n,n}$全不为0.

若A是可逆的下三角矩阵,则对A^T应用上述结论可得

A的主对角元$a_{11},a_{22},\cdots a_{n,n}$全不为0.

例1.6.8 可逆的上（下）三角矩阵的逆矩阵也是上（下）三角矩阵。

证明 对上三角矩阵的阶数作归纳法：

$n=2$：设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

可逆，则

$$A^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$$

故结论对2阶上三角矩阵成立。

$n-1$：设结论对 $n-1$阶上三角矩阵成立。

n：证明结论对 n阶上三角矩阵成立。

设

$$A=\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & & a_{n-1,n} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & & a_{nn} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

若A可逆，则$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$均不为零。而$A_1$也是上三角阵，故$A_1$可逆。又$A_1$是$n-1$阶的，故由归纳法假设可得：$A_1$的逆矩阵也是上三角矩阵。

根据 A，对 A的逆矩阵 A^{-1}分块

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} B_1 & \beta \\ \beta' & b_{nn} \end{pmatrix}$$

其中B_1是 $n-1$阶方阵。因

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix} B_1 & \beta \\ \beta' & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} B_1A_1 & B_1\alpha+a_{nn}\beta \\ \beta'A_1 & \beta'\alpha+a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=I=\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由此得

$$B_1A_1=I_{n-1},\quad B_1\alpha+a_{nn}\beta=0,$$
$$\beta'A_1=0,\quad \beta'\alpha+a_{nn}b_{nn}=1$$

因 A_1 可逆，故

$$\beta'=0,\quad b_{nn}=a_{nn}^{-1},\quad B_1=A_1^{-1}$$

所以，

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & \beta \\ 0 & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

因A_1^{-1}是上三角矩阵，故A^{-1}也是上三角矩阵。 ▮

三角矩阵在计算方法理论中的应用：

例1.6.9 设$A=[a_{ij}]_{n\times n}$是n阶方阵.若下列方阵

$$A_k=[a_{ij}]_{k\times k}\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

(称为A的顺序主子阵)均满秩，则A可以表示成

$$A=LU \qquad (1.6.1)$$

其中L为主对角元全为1的n阶下三角矩阵，U为n阶可逆上三角矩阵.称式(1.6.1)为A的三角分解.(*LU*分解)

证明：由例1.6.7知:L可逆，故(1.6.1)可以写为：

$$L^{-1}A=U$$

由例1.6.8知：L^{-1}也是下三角矩阵且主对 角元全为1。

所以只需证: 自证

存在主对角元全为1的下三角矩阵L',使得

$L'A=U$是上三角阵.

由于L'与A都可逆，故U也可逆.

对A的阶数n做数学归纳法.

1) 当$n=1$时，$A=[a_{11}]_{1\times1}$,取$L'=[1]_{1\times1}$,则

$L'A=[a_{11}]_{1\times1}=U$.

显然，L',U均满足条件.结论成立.

2) 假设当A为$n-1$阶方阵时，结论成立.

我们来证结论对n阶方阵A也成立.

对A做如下分块 $A=\begin{bmatrix} B_1 & \alpha \\ \beta & a_{nn} \end{bmatrix}$ 其中B_1是$n-1$阶方阵.

显然，A的顺序主子阵$A_1, A_2, \cdots A_{n-1}$也是B_1的全部主子阵.

已知它们都满秩，故由归纳假设知:

存在$n-1$阶主对角元全为 1的下三角矩阵 L_1',

使得$L_1'B_1=U_1$为上三角阵. 又B_1满秩，故B_1可逆.令

$$L'=\begin{bmatrix} L_1' & 0 \\ -\beta B_1^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$ 这里0表示$(n-1)\times1$零矩阵.

则L'是n阶主对角元全为 1的下三角矩阵 ,且有

$$L'A=\begin{bmatrix} L_1' & 0 \\ -\beta B_1^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & \alpha \\ \beta & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L'A=\begin{bmatrix} L_1' & 0 \\ -\beta B_1^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & \alpha \\ \beta & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} L_1'B_1 & L_1'\alpha \\ 0 & a_{nn}-\beta B_1^{-1}\alpha \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} U_1 & L_1'\alpha \\ 0 & a_{nn}-\beta B_1^{-1}\alpha \end{bmatrix}=U$$

显然，U是n阶上三角矩阵 .证毕

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & O \\ \vdots & \dots & & \\ l_{n1} & \dots & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ & \dots & \vdots \\ & O & \vdots \\ & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

例：$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

矩阵A的LU分解.

应用:

对线性方程组 $AX=b$

若系数矩阵A有三角分解$A=LU$，则上述方程组的求解可转化为解下述两个阶梯形方程组

$$LY=b,\quad UX=Y$$

对 $LY=b$ 只需前代、对 $UX=Y$ 只需回代即可求解。

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & \dots & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12}\cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{2n} \\ & \ddots & \\ & & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

本节小结

一、对称矩阵与反对称矩阵

二、对角矩阵

三、三角矩阵

理解这些特殊矩阵的概念和运算性质

作业　习题一(P80)：

49、50、52

(48¡ 52题均可作为练习)

写一篇关于本章的概念、性质、定理及计算方法的小结；及相关内容在本专业的应用举例.

复习本章内容并做学习指导上的自测练习！

习题课

? 一、内容小结

? 二、典型例题

一、内容小结

1 熟练掌握Gauss消元法

线性方程组的解的判别、求解

2 熟练掌握矩阵的基本运算与性质

加减法、数乘、乘法、幂、转置、矩阵的逆

3 熟练掌握初等行变换化阶梯形

初等行变换：Gauss消元法，求矩阵的秩，求逆矩阵

初等列变换只用在相抵标准型上。

4 熟练掌握方阵可逆的有关结论

可逆性的判别、逆矩阵的计算、解矩阵方程

5 矩阵的秩的相关性质和结论

6 特殊矩阵的定义及相关性质和结论

二、典型例题

例1 设 $\alpha=[1,2,3]$, $\beta=[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}]$, 且 $A=\alpha^T\beta$, 求 A^n.

解：

$$A^n=(\alpha^T\beta)^n=\alpha^T\beta\alpha^T\beta\cdots\alpha^T\beta$$

$$=\alpha^T(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\cdots(\beta\alpha^T)\beta$$

$$=(\beta\alpha^T)^{n-1}\alpha^T\beta$$

$$=3^{n-1}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})\quad=3^{n-1}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$$

思考1:

设 $P^{-1}AP=\Lambda$, 其中 $P=\begin{bmatrix}-1&-4\\1&1\end{bmatrix}$, $\Lambda=\begin{bmatrix}-1&0\\0&2\end{bmatrix}$,

求 A^{11}.

$A=P\Lambda P^{-1}$, $A^{11}=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^{11}P^{-1}$

思考2：计算 $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}1&2&3\\1&5&4\\1&8&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^6$.

$$=\begin{bmatrix}1&5&10\\1&2&9\\1&8&11\end{bmatrix};$$

例2 解矩阵方程的初等变换法：

（1）已知矩阵方程 $AX=B$，其中A可逆。

$$[A, B] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [I, A^{-1}B]=[I, X]$$

（2）已知矩阵方程 $XA=B$，其中A可逆。

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{初等列变换}]{} \begin{pmatrix} I \\ BA^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix}$$

例 3 已知矩阵 A 与矩阵 B

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

满足 $AX=B$，求 X。

解 （法一）

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

故

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

（法二）

$$(A, B)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3+(-7)R_1]{R_2+(-4)R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -12 & 3 \\ 0 & -6 & -11 & -20 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+(-2)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -12 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

由此得

$$X=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-\frac{1}{3})R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

例4 已知结论¡若方阵 A 满足 $A^2=A$ 且 $A\neq I$，则 A不可逆¡的下述两种证明，请指出哪个方法正确。对不正确的方法，请举例说明其问题所在。

（法一） 因为 $A^2=A$，故

$$A(A-I)=O \qquad \text{¡ ¡ ¡ ¡ ¡ ¡ .①}$$

因为 $A\neq I$，故 $A-I\neq O$。于是由 ① 得，$A=0$。因此 A不可逆。

（法二） 反证：若 $\boldsymbol{A}$可逆，则由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$$

即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，与已知条件矛盾。因此 $\boldsymbol{A}$不可逆。

例5. 举反例说明下列命题是错误的：

（1）若 $\boldsymbol{A}^2=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$；

（2）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$.

解答：(1) 选取 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\neq 0$, 但

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

(2)选取 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}$,

但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}.$