课程编号：A073122　　北京理工大学 2013-2014 学年第一学期

线性代数 A 试题 B 卷

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，且 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}$，其中

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & 2 & 2 & \\ 8 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ -2 & -1 & 0 & \\ -4 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{X}$ 。

二、（10 分）问 a,b 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有唯一解,无解,有无穷多组解?并求出有无穷多组解时的通解（用导出组的基础解系表示通解）。

三、（10 分）已知线性空间 $F[x]_4$ 的自然基为 $1, x, x^2, x^3$ 。

(1) 证明：$1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2!}, 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 为 $F[x]_4$ 的一个基;

(2) 求自然基 $1, x, x^2, x^3$ 到基 $1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2!}, 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 的过渡矩阵;

(3) 求 $h(x) = 1+3x^2+6x^3$ 在后一个基下的坐标。

四、（10 分）已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,3,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(2,5,-1,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_5=(1,-1,3,-1)^T$$

（1）求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$的秩和一个极大无关组;

（2）将其余向量用极大无关组表示出来。

五、（10 分）设 6 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $(\lambda+1)^3$, $(\lambda-1)^2$, λ 。

(1) 试写出 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形；   (2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

六、（10 分）在线性空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中定义变换 $\boldsymbol{\sigma}$： $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

（1）证明：$\boldsymbol{\sigma}$是线性变换；

（2）写出$\boldsymbol{\sigma}$在基 $\boldsymbol{I}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{I}_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{I}_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{I}_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵。

七、（10 分）求下列实系数齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3+x_5=0 \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4-2x_5=0 \end{cases}$

的解空间的一标准正交基。

八、（10 分） 已知二次型的矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$。

（1）判断$\boldsymbol{A}$是否可逆； （2）求一正交变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，化二次型为标准形。

九、（10 分）如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-a\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{I})=\boldsymbol{0}$$

其中$a\neq b$，证明：$\boldsymbol{A}$ 可以对角化。

十、（10 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+2(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $3\alpha\alpha^T+2\beta\beta^T$；

(2) α,β 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $3y_1^2+2y_2^2$。

课程编号：A073003　　北京理工大学 2014-2015 学年第一学期

线性代数 A 试题 B 卷

一、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{AXA^{-1}=2XA^{-1}+BA^{*}}$，求 $\boldsymbol{X}$ 。

二、（10 分）已知

$$\boldsymbol{\alpha_1=(2,-2,4,6)^T},\quad \boldsymbol{\alpha_2=(-2,1,0,3)^T},\quad \boldsymbol{\alpha_3=(3,0,2,-1)^T},\quad \boldsymbol{\alpha_4=(1,-3,2,4)^T}$$

（1）求向量组 $\boldsymbol{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}$ 的秩和一个极大无关组;

（2）用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

三、（10 分）在 $\boldsymbol{F[x]_4}$ 中，求自然基 $\boldsymbol{1,x,x^2,x^3}$ 到基 $\boldsymbol{1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3}$ 的过渡矩阵，以及 $\boldsymbol{h(x)=1-x+x^2-x^3}$ 在后一个基下的坐标。

四、（10 分）设 V 是由实数域上的全体 2 阶矩阵构成的线性空间，在 V 上定义映射 $\boldsymbol{\sigma}$： $\boldsymbol{\sigma(X) = AX - XA}$，其中 X 为任意矩阵，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$为 V 中某一取定矩阵。

（1）证明：$\boldsymbol{\sigma}$ 为 V 上的而一个线性变换；

（2）证明：对任意的 $\boldsymbol{X, Y \in V}$ 都有 $\boldsymbol{\sigma(XY) = \sigma(X)Y + X\sigma(Y)}$；

（3）求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $\boldsymbol{I_{11}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{I_{12}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{I_{21}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{I_{22}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$下的矩阵。

五、（10 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

（1）求 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的值；（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P^{-1}AP = B}$。

六、（10 分）设 $\boldsymbol{A}$ 是 6 阶方阵，且已知存在 6 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} -a & 1 & & & & \\ & -a & & & & \\ & & b & & & \\ & & & c & 1 & \\ & & & & c & \\ & & & & & d \end{bmatrix}$$

(1) 试写出 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子；

(2) 判断 $\boldsymbol{P}$ 的哪几列是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。

七、（10 分）证明：若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，则 $\boldsymbol{A}$ 一定可以对角化。

八、（10 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ ，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

（1） 判断该二次型的定性；（2）用正交变换将其化为标准形并给出所用的正交变换。

九、（10 分）设方程组$\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3 \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3 \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3 \\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3 \end{cases}$

(1) 证明：若a_1,a_2,a_3,a_4两两不相等，则此方程组无解；

(2) 设 $a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq 0)$，且已知 β_1,β_2 是方程组的两个解，其中 $\beta_1=[-1,1,1]^T,\beta_2=[1,1,-1]^T$，写出此方程组的通解。

十（10 分）已知四阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2015 & 1 & 0 \\ 2015 & 0 & 2015 & 0 \\ 1 & 2015 & 0 & 2015 \\ 0 & 0 & 2015 & 0 \end{pmatrix}$

（1） 求$|A|$

（2） 有两个正特征值和两个负特征值。

课程编号：A073122　　北京理工大学 2015-2016 学年第一学期

线性代数 A 试题 A 卷

班级 ________ 学号 ________ 姓名 _________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $\frac{1}{3}A^{*}XA=2A+XA$，求 X.

二、（10 分）已知平面上三条直线的方程

$$x-y+a=0,\ 2x+3y-1=0,\ x-ay-\frac{1}{2}=0$$

讨论参数 a 的取值与这三条直线相互位置之间的关系.

三、（10 分）已知向量组

$$\alpha_1=(1,1,1,a)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,1,a,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,a,1,1)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$$

（1） 讨论 a 的取值与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩之间的关系;

（2） 对 a 的不同取值，确定向量空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数与基.

四、（10 分）在实数域上的二阶矩阵构成的线性空间中,

（1）求基底 $I_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},I_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},I_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},I_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 到基底

$E_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0&3\\1&0\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}5&3\\2&1\end{pmatrix},E_4=\begin{pmatrix}6&6\\1&3\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵.

（2）求非零矩阵 A**,** 使 A 在这两组基下的坐标相等.

五、（10 分）在多项式空间 $R[x]_4$ 中定义变换 σ:

$$\sigma(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=a_3+a_1+a_2x+(a_0-a_2)x^3$$

1．证明：σ是 $R[x]_4$ 上的线性变换;

2．求σ在 $R[x]_4$ 的自然基 $1,x,x^2,x^3$ 下的矩阵，并判断σ是否可逆.

六、（10 分）设 A 是 5 阶方阵，且已知存在 5 阶可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ & -2 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试写出 A 的初等因子;
(2) 判断 $\boldsymbol{P}$ 的哪几列是 A 的特征向量.

七、（10 分）已知 A 是 $m\times n$ 矩阵，$n>m$，$\mathrm{r}(A)=m$；B 是 $n\times(n-m)$ 矩阵，$\mathrm{r}(B)=n-m$，且 $AB=0$. 证明：B 的列向量组为线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系.

八、（10 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求一正交变换 $X=QY$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(2) 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是否正定.

九、（10 分） 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & a-2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量.

（1）求 a；

（2）求 A^n.

十、（10 分）已知 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$,

（1） 求矩阵 A 与 B 的特征值;

（2） 证明 A 与 B 是相似的.