习题1-2.

1.(1) 证明：对$\forall \varepsilon>0$. 要$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\left|\frac{1}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$成立，取$N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]+1$

则对$\forall \varepsilon>0$. $\exists N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]+1$当$n>N$时，$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$成立

则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

(2) 证明：对$\forall \varepsilon>0$，要$\left|\frac{3n+2}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{1}{4n+2}\right|<\varepsilon$成立. 取$N=\left[\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right]+1$

~~则当$n>N$时~~ 对$\forall \varepsilon>0$. $\exists N=\left[\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right]+1$，当$n>N$时

$\left|\frac{3n+2}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$成立. 则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

2.(1) 由于$0\le\left|\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right|\le\frac{1}{n}$.

则当$n\to\infty$时 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=0$

(2) 极限不存在.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}y_{2n}=4-1=3$

$\lim\limits_{n\to\infty}y_{2n+1}=4+1=5\ne\lim\limits_{n\to\infty}y_{2n}$

因此y_n极限不存在

3. (1) 证明：$\forall \varepsilon>0$，取 $N=\frac{1}{\varepsilon^2}$. 则当 $x>N$ 时，有：

$$\left|\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}-0\right|=\frac{|\sin x^2|}{|\sqrt{x}|}\le\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$$

则 $\left|\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$ 成立.

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}=0$

(2) 证明：$\forall \varepsilon>0$. 取 $X=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$，则当 $|x|>X$ 时有：

$$\left|\frac{x^2+1}{2x^2}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{2x^2}\right|<\varepsilon \text{ 成立.}$$

则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2}=\frac{1}{2}$ 成立

(3) 证明：$\forall \varepsilon>0$. 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$. 则当 $|x-2|<\delta$ 时，有，

$$|3x-2-4|=3|x-2|<\varepsilon \text{ 成立}$$

则 $\lim\limits_{x\to2}(3x-2)=4$

(4) 证明：$\forall \varepsilon>0$. 取 $\delta=\varepsilon$. 则当 $|x-1|<\delta$ 时，有，

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=\left|\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right|=|x-1|<\varepsilon \text{ 成立.}$$

则 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-1}{x-1}=2$ 成立.

4. 解：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$　　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$.

由于 $\lim\limits_{x\to0^-}f\ne\lim\limits_{x\to0^+}f$.

则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在

5. 证明：因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 则 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta$；当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立；又 $\big||f(x)|-|A|\big|\le|f(x)-A|<\varepsilon$.

所以对 $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta$. 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$\big||f(x)|-|A|\big|<\varepsilon$ 成立

则 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$ 成立

反例：取 $f(x)=-x$. $A=1$. 则 $\lim\limits_{x\to1}|f(x)|=1=|A|$.

但 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=-1\ne A$.