¡ 4. 3 行列式的性质

性质1 将行列式的各行变成相应的各列，行列式的值不变，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

说明 行列式中行与列具有同等的地位,因此行列式

平等性 的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

$$\det A=\det A^T \quad (|A|=|A^T| \quad A\text{为方阵})$$

对应矩阵的初等变换之一

性质2 对调行列式的任意两行（列），其值反号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

推论 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

对应矩阵的初等变换之二

性质3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论1 行列式中某一行（列）的公因子可以提出来。

推论2 若行列式中某一行（列）的元素全为零，则该行列式等于零。

推论3 若行列式中某两行（列）成比例，则该行列式等于零。

问题 对方阵A，$|kA|$ 与 $|A|$ 有什么关系？

结论：设A是n阶方阵，则 $|kA|=k^n|A|$.

分拆性

性质4 若行列式中某行（列）的所有元素都可以表示为两项之和，则该行列式可表示为两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1}+c_{s1} & b_{s2}+c_{s2} & \cdots & b_{sn}+c_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

分拆性

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

问题　对同阶方阵 A, B, $|A+B|$ 与 $|A|, |B|$ 有关系吗?

结论：一般而言，$|A+B| \neq |A|+|B|$.

对应矩阵的初等变换之三

性质5　把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数k然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$k\times$

$$\overset{C_i+kC_j}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

应用举例

计算行列式常用方法：利用运算R_i+kR_j把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

例 1　$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1\\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5\\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1\\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6\\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2\end{vmatrix}$

$$=\!=\!=\,-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \times 4\\ \oplus\end{matrix}$$

$$=\!=\!=\,-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6\end{vmatrix}=-(-2)(-1)(-6)=12.$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b\\ 1 & a & b & \cdots & b\\ 1 & b & a & \cdots & b\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & b & b & \cdots & a\end{vmatrix}\times(-1)\oplus$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b\\ & a-b & & & \\ & & a-b & & \mathbf{0}\\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & a-b\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例3　证明：奇数阶反对称矩阵的行列式等于零。

证　由 $a_{ij}=-a_{ji}$ 可知 $a_{ii}=0$，于是

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{转置}}{=\!=\!=}\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n}\\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n}\\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D$$

当 n 为奇数时，有 $D=-D$，因此，$D=0$.

解二：利用反对称矩阵的定义，有 $A^T=-A$

$$\Rightarrow \underset{\displaystyle |A|}{\underset{\|}{|A^T|}} = |-A| = (-1)^n |A|$$

当 n 为奇数时，有 $|A| = -|A|$，因此 $|A|=0$.

例4 计算4阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} \qquad (\text{已知 } abcd=1)$$

解

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abcd \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abcd \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

$= 0.$

例 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1]$、$B=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2]$ 是4 阶方阵，且 $|A|=3, |B|=-1$。求 $|A+B|$。

解 因 $A+B=[2\alpha_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3, \beta_1+\beta_2]$

故 $|A+B| = |2\alpha_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3, \beta_1+\beta_2|$

$$= 2^3 |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1+\beta_2|$$

$$= 2^3(|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1| + |\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2|)$$

$$= 2^3(|A|+|B|) = 2^3(3-1) = 16$$

由此可见：$|A+B| \neq |A|+|B|$.

小结

行列式的**5**个性质与**4**个推论。

(行列式中行与列具有同等的地位**,**行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立**)**

计算行列式常用方法：

(1) 利用定义；

(2) 利用性质把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值。

注意：把握行列式的特点。

作业　习题四**(P209)**：
6 (5)(10), 7(2), 8(4)
(6-8题均可作为练习**)**