习题5-4

1. 对于$y_1=e^{x^2}$，有：

$y_1'=2xe^{x^2}$，$y_1''=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}$

则$y_1''-4xy_1'+(4x^2-2)y_1=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-4x\cdot(2xe^{x^2})+(4x^2-2)e^{x^2}=0$.

对于$y_2=xe^{x^2}$，有：

$y_2'=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}$　$y_2''=2xe^{x^2}+4xe^{x^2}+2x^2\cdot 2xe^{x^2}=(6x+4x^3)e^{x^2}$

则$y_2''-4xy_2'+(4x^2-2)\cdot xe^{x^2}=(6x+4x^3)e^{x^2}-4x(e^{x^2}+2x^2)e^{x^2}+(4x^2-2)xe^{x^2}=0$

则$y_1=e^{x^2}$，$y_2=xe^{x^2}$都是原方程的解.

又原方程是二阶线性齐次方程，且令k_1 k_2，使

$k_1y_1+k_2y_2=k_1e^{x^2}+k_2\cdot xe^{x^2}\equiv 0$

当且仅当$k_1=k_2=0$. 则y_1, y_2线性无关.

则原方程通解为：$y=C_1e^{x^2}+C_2xe^{x^2}$

2. 根据二阶线性非齐次方程解的性质1.

$y_1-y_3=1-x^2$，$y_2-y_3=x-x^2$

都是对应的齐次方程的解，由$1-x^2$与$x-x^2$线性无关，

则相对应的齐次方程的通解为：

$\bar{y}=C_1-C_1x^2+C_2x-C_2x^2$

故已知方程通解为：$y=\bar{y}+y_3=C_1(1-x^2)+C_2(x-x^2)+x^2$

3. 由二阶线性非齐次方程解的性质1.

$y_1-y_3=-x+e^x$；$y_2-y_3=-2x+4e^x$

都是对应的齐次方程的解. 又$-x+e^x$与$-2x+4e^x$线性无关

则对应的齐次方程通解为：

$\bar{y}=C_1(-x+e^x)+C_2(-2x+4e^x)$

故已知方程通解为：$y=\bar{y}+y_3=C_1(-x+e^x)+C_2(-2x+4e^x)+2x-e^x-(x^2+1)$

则：$y'=-C_1+C_1e^x-2C_2+4C_2e^x+2-e^x-2x$

又$y(0)=0$　$y'(0)=0$ 代入得：

$C_1=4$　　$C_2=-\frac{1}{2}$

则特解为：$y=e^x-x^2-x-1$

4. (1) $y'' - \frac{2x+1}{2x-1}y' + \frac{2}{2x-1}y = 0$

$P(x) = -\frac{2x+1}{2x-1}$

$\int P(x)dx = -x - \ln|2x-1|$

由刘维尔公式,另一个与 $y_1 = x$ 线性无关的解为:

$$y_2 = e^x \int \frac{e^{x+\ln|2x-1|}}{e^{2x}}dx = e^x \int \frac{|2x-1|}{e^x}dx = |2x+1|$$

则通解为 $y = C_1 e^x + C_2 \cdot |2x+1| = C_1 e^x + C_2(2x+1)$

(2) $y'' - \frac{1}{x}y' = 0$

$P(x) = -\frac{1}{x}$, $\int P(x)dx = -\ln|x|$

由刘维尔公式,另一个与 $y_1 = 1$ 线性无关的解为:

$$y_2 = 1\int \frac{e^{\ln|x|}}{1}dx = \frac{1}{2}x^2$$

则通解为 $y = C_1 + C_2 x^2$

5. $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x}$ 为所求方程标准形式.

已知 $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ 的通解为:

$\bar{y} = C_1 x + C_2 x\ln|x| = C_1 y_1 + C_2 y_2$

设原方程特解为: $y^* = C_1(x)x + C_2(x)x\ln|x|$

由于 $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & x\ln|x| \\ 1 & \ln|x| + \frac{x}{|x|} \end{vmatrix} = x\ln|x| + \frac{x^2}{|x|} - x\ln|x| = |x|$

则 $C_1(x) = -\int \frac{x\ln|x| \cdot \frac{1}{x}}{|x|}dx = -\frac{1}{2}\ln^2|x|$

$C_2(x) = \int \frac{x \cdot \frac{1}{x}}{|x|}dx = \ln|x|$

于是 $y^* = -\frac{1}{2}\ln^2|x| \cdot x + \ln|x| \cdot x\ln|x| = \frac{x}{2}\ln^2|x|$

因此通解为: $y = \bar{y} + y^* = C_1 x + C_2 x\ln|x| + \frac{x}{2}\ln^2|x|$.

6. 将方程化为标准形式：$y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=2x$.

首先求 $y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=0$ 的通解. 已知 $y_1(x)=x$

由刘维尔公式，得

$$y_2=x\int\frac{e^{-\int\frac{-2}{x}dx}}{x^2}dx=x^2$$

故相对应的齐次方程的通解为：

$$\bar{y}=C_1x+C_2x^2$$

设原方程的特解为：$y^*=C_1(x)x+C_2(x)\cdot x^2$

由于 $W(y_1\ y_2)=\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=x^2$

则 $C_1(x)=-\int\frac{x^2\cdot 2x}{x^2}dx=-x^2$

$$C_2(x)=\int\frac{x\cdot 2x}{x^2}dx=2x$$

则 $y^*=-x^2\cdot x+2x\cdot x^2$

$=x^3$

则通解为 $y=\bar{y}+y^*=C_1x+C_2x^2+x^3$