

课程编号: A071001

北京理工大学 2006-2007 学年第一学期

## 数学分析期末试题(A)

一. 解下列各题 (每小题 6 分)

1. 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^x = 9$ , 求常数  $a$ .

2. 设曲线的参数方程为  $\begin{cases} x = \ln \cos t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ , 求曲线在  $t = \frac{\pi}{3}$  对应点处的切线方程.

3. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ .

4. 计算定积分  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

二. 解下列各题 (每小题 7 分)

1. 求由方程  $y = 1 + x^2 e^y$  所确定的隐函数  $y = y(x)$  的极值, 并判断该极值是极大值还是极小值.

2. 求不定积分  $\int x \arctan x dx$ .

3. 已知  $y_1 = x - x^2$ ,  $y_2 = 3e^x - x^2$ ,  $y_3 = 2x - x^2 - e^x$  是某二阶线性非齐次微分方程的三个特解, 求此微分方程的通解.

4. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - a}{x^2} & x \neq 0 \\ b & x = 0 \end{cases}$  在  $(-\infty, +\infty)$  可导, 求  $a, b$  的值, 并求  $f'(x)$ .

三. (7 分) 试确定函数  $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 10$  在区间  $(0, 3)$  内零点的个数.

四. (8 分) 设函数  $f(x), g(x)$  满足  $f'(x) = g(x)$ ,  $g'(x) = 2e^x - f(x)$ , 且  $f(0) = 0$ ,  $g(0) = 2$ , 求  $f(x)$  的表达式.

五. (7 分) 设  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 证明  $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt = C$ , 并求常数  $C$  的值.

六. (10 分) 设函数  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上可导, 若由曲线  $y = f(x)$ , 直线  $x = 1$ ,  $x = t$  ( $t > 1$ ) 与  $x$  轴所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体的体积为

$v(t) = \pi[t^2 f^2(t) - f^2(1)]$ , 试求  $y = f(x)$  所满足的微分方程, 并求该微分方程的通解.

七. (8 分) 一容器内含有 100 升清水, 现将每升含盐量 4 克的盐水以每分钟 5 升的速率由 A 管注入容器, 假设瞬间即可混合均匀, 同时让混合液以同样的速率由 B 管流出容器(容器内的液体始终保持为 100 升), 问在任意时刻  $t$  容器内溶液的含盐量是多少?

八. (8 分) 设  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  内有二阶导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{f(x)}{x})}{\sin x} = 3$ ,  $\int_1^2 f(x) dx = 0$ , (1) 求  $f'(0)$ ; (2) 证明  $\exists \xi \in (0, 2)$ , 使  $f'(\xi) + f''(\xi) = 0$ .