(2011-2012)工科数学分析第一学期期末试题(A 卷)解答（2012.1）

一． **1.** $-\frac{\pi}{2}-1$

2. $y=x-2$

3. $-\frac{3}{2}$， $-\frac{11}{24}$

4. $Ce^{-\tan x}+1$

5. $m\frac{dv}{dt}=mg-kv$

二． 设 $y=(\cos x+x\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$ …………………(1 分)

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+x\sin x)}{x^2}$$ …………………(3 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cos x}{\cos x+x\sin x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2(\cos x+x\sin x)}$$ ………………(6 分)

$$=\frac{1}{2}$$ ……………….(8 分)

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+x\sin x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}$$ …………………(9 分)

三． $$\text{原式}=\int x\arctan x dx+\int\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$$ ……………………..(1 分)

$$=\frac{1}{2}\int\arctan x dx^2-\int e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}$$ ……………………(3 分)

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx-e^{\frac{1}{x}}$$ …………………..(6 分)

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx-e^{\frac{1}{x}}$$ ………………(7 分)

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x-e^{\frac{1}{x}}+C$$ ………………..(9 分)

四. $$f'(x)=\frac{2(2x-2)}{3\sqrt[3]{x^2-2x}}$$ ……………………….(2 分)

令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 当 $x=2$ $f'(x)$ 不存在 …………….(4 分)

$f(1)=1$ $f(0)=0$ $f(-1)=\sqrt[3]{9}$ $f(3)=\sqrt[3]{9}$ ……………(8 分)

$M=\sqrt[3]{9}$ $m=0$ ……………………..(9 分)

五. $$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$ ………….(5 分)

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{2(1-x^2)}{1+x^2}$$ …………………(6 分)

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(x^2-1)}\cdot\frac{2(1-x^2)}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2}{1+x^2}=-\frac{1}{1+x^2}\neq 0$$ ………………….(7 分)

故 $f(x)$ 不恒为常数 …………………….(8 分)

六. $$\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{\frac{dy}{dx}x-y}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2y\frac{dy}{dx}}{x^2+y^2}$$ ………………(3 分)

解得 $$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$ ………………….(4 分)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(1+\frac{dy}{dx})(x-y)-(x+y)(1-\frac{dy}{dx})}{(x-y)^2}$$ ………………(7 分)

$$=\frac{-2y+2x\frac{dy}{dx}}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{-2y+2x\frac{x+y}{x-y}}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$$ ………………………..(9 分)

七. (1) $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2(x^2+1)}=\int_{-\infty}^{-1}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1})dx$ ……………………….(2 分)

$=(-\frac{1}{x}-\arctan x)\Big|_{-\infty}^{-1}$ ……………………..(4 分)

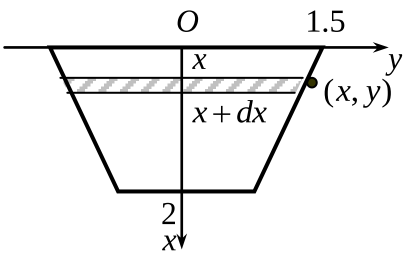
$=1-\frac{\pi}{4}$ ……………………..(5 分)

(2) 令 $\sqrt{1-x}=t$ 即 $x=1-t^2$ …………………..(6 分)

$\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}.$ …………………..(8 分)

$=2\arctan t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$ …………………..(10 分)

八. $dP=\mu gx\cdot 2y\,dx$ ……………………(2 分)



$=2\mu gx(\frac{3}{2}-\frac{x}{4})dx=\frac{1}{2}\mu g(6x-x^2)dx$ …………..(4 分)

$P=\int_0^2\frac{1}{2}\mu g(6x-x^2)dx.$ ……………………(6 分)

$=\frac{1}{2}\mu g(3x^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2$

$=\frac{14}{3}\mu g=\frac{14000}{3}g$ (N) …………………..(8 分)

九. $r^2-6r+9=0$ ……………………(1 分)

$r_1=r_2=3$ …………………..(3 分)

$\bar{y}=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$ …………………..(5 分)

设特解 $y^*=x^2(Ax+B)e^{3x}$ ……………………(6 分)

代入方程得 $6Ax+2B=x+1$

$6A=1 \qquad 2B=1$

$A=\frac{1}{6} \qquad B=\frac{1}{2}$

$y^*=(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2)e^{3x}$ …………………..(9 分)

所求通解 $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2)e^{3x}$ ………………..(10 分)

十.　方程两端对 x 求导得

$$f'(x^2+x)+f(x)(2x+1)=f(x)$$

$$(x+1)f'(x)=-2f(x) \qquad \text{…………………………(2 分)}$$

$$\frac{df(x)}{f(x)}=-\frac{2}{x+1}dx \qquad \text{…………………………(3 分)}$$

$$\ln|f(x)|=-2\ln|x+1|+C_1 \qquad \text{…………………………..(4 分)}$$

通解　$f(x)=\dfrac{C}{(x+1)^2}$ ..………………………..(5 分)

在已知方程中令 $x=a$，　得 $f(a)=\dfrac{1}{a+1}$ ……………………..(6 分)

代入通解得　$C=a+1$

故　$f(x)=\dfrac{a+1}{(x+1)^2}$ ……………………..(7 分)

$$V=\int_0^1 \pi f^2(x)dx=\int_0^1 \pi\frac{(a+1)^2}{(x+1)^4}dx \qquad \text{……………………….(8 分)}$$

$$=-\frac{1}{3}\pi\frac{(a+1)^2}{(x+1)^3}\Big|_0^1=\frac{7}{24}\pi(a+1)^2 \qquad \text{……………………(9 分)}$$

由　$\dfrac{7}{24}\pi(a+1)^2=\dfrac{7}{6}\pi$　得　$a=1$ …………………..(10 分)

十一.　令　$F(x)=f(x)-x$ ……………………..(1 分)

由积分中值定理，存在 $c\in[\frac{1}{2},1]$，使

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\sin x dx=f(c)\sin c\cdot\frac{1}{2}=1 \qquad f(c)=\frac{2}{\sin c} \qquad \text{………………….(3 分)}$$

$$F(c)=f(c)-c>0 \qquad F(2)=f(2)-2=-2<0$$

根据零值定理，存在 $\xi_1\in(c,2)$，使 $F(\xi_1)=0$ …………………(6 分)

又　$F(0)=f(0)=0$

故由罗尔定理，$\exists\xi\in(0,\xi_1)\subset(0,2)$，使

$F(\xi)=0$，即　$f'(\xi)-1=0$　$f'(\xi)=1$ ……………………(8 分)