北京理工大学 2017-2018 学年第一学期

# 工科数学分析（上）期末试题(A 卷)

座号 _______ 班级_____________ 学号_____________ 姓名_____________

(试卷共 6 页,十个大题. 解答题必须有过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | | | |
| 签名 | | | | | | | | | | | |

一、填空（每小题4分，共20分）

1．若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-2}{x})^{kx}=\frac{1}{e}$ ，则 $k=$_____________.

2．已知 $y=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\arctan x$，则 $\frac{dy}{dx}=$__________________________.

3. $\int_0^1\frac{e^x(1+x)}{(1-xe^x)^2}dx=$__________________________.

4 . $\int x^2\sin x dx=$_________________________.

5. 设 $y'+y=\cos x$，则 $y=$________________________.

二、计算题（每小题5分，共20分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^3(\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{n})$.

2. 设 $y = x^{\sin x} + \sin^2 x$，求 $dy$.

3. 计算 $\int_{-1}^{1} \frac{2x^2 + x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}} dx$.

4. 求 $\frac{dy}{dx} = \cos(x+y)$ 的通解.

三、（8分）已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$，试确定常数$a$和$b$的值.

四、（6分）已知$b>0, b_1>0, b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(b_n+\dfrac{b}{b_n})(n=1,2,...)$. 证明: 数列$\{b_n\}$极限存在；并求此极限.

五、（8分）求函数 $y=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的单调区间和极值，凹凸区间和拐点，渐近线.

六、（8 分）设曲线 $y=x^2$ ， $y=\sqrt{x}$ 围成一平面图形 $D$.

(1) 求平面图形 $D$ 的面积;

(2) 求平面图形 $D$ 绕 $y$ 轴旋转所得旋转体的体积.

七、（8分）设一长为$l$的均匀细杆，线密度为$\mu$，在杆的一端的延长线上有一质量为$m$的质点，质点与该端的距离为$a$.

（1）求细杆与质点间的引力；

（2）分别求如果将质点由距离杆端$a$处移到$b$处($b>a$)与无穷远处时克服引力所做的功.

八、（8 分）设$f(x)$在$[-1,1]$上具有三阶连续导数，且$f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0,$

证明在开区间$(-1,1)$内至少存在一点$\xi$，使$f^{(3)}(\xi)=3$.

九、（8分）设 $f(x)=xe^{x}+\int_{0}^{x}(x-t)f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 连续，求 $f(x)$ 的表达式.

十、（6 分）已知 $f(x)$ 在闭区间 $[1,6]$ 上连续，在开区间 $(1,6)$ 内可导，且

$$f(1)=5,\qquad f(5)=1,\qquad f(6)=12.$$

证明：存在 $\xi\in(1,6)$，使 $f'(\xi)+f(\xi)-2\xi=2$ 成立.