标准答案与评分标准

一　（12 分）

解：假设 A={接收端收到“点”},

B_1={发射端发送“点”}，B_2={发射端发送“划”}

(1) 由全概率公式，可得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(B_i)P(A|B_i)$$ ……………..2 分

由题意可知，

$$P(B_1)=0.6,\quad P(B_2)=0.4,$$

$$P(A\mid B_1)=0.7,\quad P(A\mid B_2)=0,$$ ……………..2 分

将这些代入上面的全概率公式知所求的概率为

$$P(A)=0.42.$$ ……………..2 分

(2) 假设 C={接受结果为“不清”},则由 Bayes 公式可得所求概率

$$P(B_1\mid C)=\frac{P(C\mid B_1)P(B_1)}{P(C\mid B_1)P(B_1)+P(C\mid B_2)P(B_2)}$$ …………..3 分

$$=\frac{0.2\times 0.6}{0.2\times 0.6+0.1\times 0.4}=0.75$$

……………3 分

二、(14 分)

解：（1）X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$ ………（4 分）

（2）解一：$y=-2\ln x$ 的可取值范围是 $(0,+\infty)$

由 $y=-2\ln x$ 得 $y'=-\dfrac{2}{x}<0$

故 $y=-2\ln x$ 在 $(0,1)$ 上严格单减 ……（2 分）

其反函数 $x=h(y)=e^{-\frac{1}{2}y}$ ，

且 $h'(y)=-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}$ ………（4 分）

所以 $y=-2\ln x$ 的密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left(e^{-\frac{1}{2}y}\right)\left|-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}\right| & ,\quad y>0 \\ 0 & ,\quad \text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & ,\quad y>0 \\ 0 & ,\quad y\le 0 \end{cases}$$ ………（4 分）

解二：

先求 $y=-2\ln x$ 的分布函数 $F_Y(y)$

当 $y\le 0$ 时， $F_Y(y)=0$；

当 $y>0$ 时， $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-2\ln X\le y)$

$$=P\left(X\ge e^{-\frac{y}{2}}\right)$$ ……（4 分）

$$=1-P\left(X\le e^{-\frac{y}{2}}\right)$$

$$=1-F\left(e^{-\frac{y}{2}}\right)$$ ……（2 分）

因此，$y=-2\ln x$ 的密度函数

$$f_Y(y)=F_Y{}'(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

……（4 分）

三（18 分）

解：（1）

$$\iint_{R^2} f(x,y)dxdy=1.$$

$$\int_0^1\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A}{\pi(1+y^2)}dxdy=\frac{A}{\pi}\int_0^1 dx\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{A}{\pi}\pi=1\Rightarrow A=1.$$

………………………………（+4）

（2）

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$$

当$0<x<1$时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi(1+y^2)}dy=1.$

当$x\le 0$或$x\ge 1$时，$f_X(x)=0.$

$$f_X(x)=\begin{cases}1, 0<x<1,\\ 0, \text{其他}.\end{cases}$$

………………………………（+4）

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$$

$$f_Y(y)=\int_0^1\frac{1}{\pi(1+y^2)}dx=\frac{1}{\pi(1+y^2)}, -\infty<y<+\infty.$$

………………………………（+4）

因为$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y), a.e.$，所以 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 相互独立.

………………………………（+2）

（3） 因为 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 相互独立，

$$P\left(\min(X,Y)>\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=P\left(X>\frac{\sqrt{3}}{3},Y>\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=P\left(X>\frac{\sqrt{3}}{3}\right)P\left(Y>\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}dx\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{+\infty}\frac{1}{\pi(1+y^2)}dy=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3-\sqrt{3}}{9}.$$

……………………………（+4）

四 （18 分）

解：（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^2dx\int_x^{2x}x\cdot\frac{1}{4}ydy=\int_0^2\frac{3}{8}x^3dx=\frac{3}{2}$；

……………………………（+3）

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x,y)dxdy=\int_0^2dx\int_x^{2x}x^2\cdot\frac{1}{4}ydy=\int_0^2\frac{3}{8}x^4dx=\frac{12}{5}$$

$$Var(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{12}{5}-(\frac{3}{2})^2=\frac{3}{20}\text{；}$$

……………………………（+3）

（2） $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^2dx\int_x^{2x}y\cdot\frac{1}{4}ydy=\int_0^2\frac{7}{12}x^3dx=\frac{7}{3}$；

……………………………（+3）

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y^2f(x,y)dxdy=\int_0^2dx\int_x^{2x}y^2\cdot\frac{1}{4}ydy=\int_0^2\frac{15}{16}x^4dx=6$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-(EY)^2=6-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{5}{9}\text{。}$$

……………………………（+3）

（3） $E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^2dx\int_x^{2x}xy\cdot\frac{1}{4}ydy=\int_0^2\frac{7}{12}x^4dx=\frac{56}{15}$；

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{56}{15}-\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{3}=\frac{7}{30}$$

……………………………（+3）

故 $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}}=\dfrac{7/30}{\sqrt{(3/20)(5/9)}}=\dfrac{7}{5\sqrt{3}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{15}.$

……………………………（+3）

五 （8 分）

解：设 X_i 表示第 i 段的测量误差，$i=1,2,...,1200$，则 $X_1,...,X_{1200}$ 独立同分布，且 X_i~$\mathrm{U}(-0.5,0.5)$，则

$$E(X_i)=\frac{-0.5+0.5}{2}=0,$$ ……… 2 分

$$D(X_i)=\frac{(-0.5-0.5)^2}{12}=\frac{1}{12},$$ ……… 2 分

显然，测量总误差为 $X=\sum_{i=1}^{1200}X_i$，由中心极限定理，所求概率为

$$P(|X|\le 20)=P(\left|\sum_{i=1}^{1200}X_i\right|\le 20)$$

$$\begin{aligned}&=P(-20\le\sum_{i=1}^{1200}X_i\le 20)\\&\approx\Phi[\frac{20-1200\times 0}{\sqrt{1200\times\frac{1}{12}}}]-\Phi[\frac{-20-1200\times 0}{\sqrt{1200\times\frac{1}{12}}}]\\&=2\Phi(2)-1\\&=0.9544\end{aligned}$$

……… 4 分

六 （18 分）

解：(1)由于 $EX=\frac{1}{p}$ ……………3 分

令 $EX=\bar{X}_n$ ……………3 分

解得 p 的矩估计为 $\hat{p}=\frac{1}{\bar{X}_n}$ ……………3 分

(2) 似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}p(1-p)^{x_i-1}=p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 2 \text{ 分}$$

对数似然函数为

$$\ln L(p)=n\ln p+(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)\ln(1-p) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2 \text{ 分}$$

对 p 求导并令其为零，得

$$\frac{d\ln L}{dp}=\frac{n}{p}-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}{1-p}=0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \text{ 分}$$

解得 p 的最大似然估计为 $\hat{p}=\frac{1}{\overline{x}_n}$ ……………2 分

由于 $EX=\frac{1}{p}$，因此 EX 的最大似然估计为 $\frac{1}{\hat{p}}=\overline{x}_n$ ……2 分

七 （12 分）

解：假设 H_0： $\mu\le 15$； H_1： $\mu>15$ 。

选取检验统计量 $Z=\frac{\overline{X}-15}{\sigma/\sqrt{n}}$，

构造拒绝域： $Z\ge Z_{0.05}=1.645.$ ------8 分

计算得： $Z=\frac{15.025-15}{0.05/4}=2.$

故拒绝 H_0，可以认为这一批滚珠的平均直径大于 15㎜。

----4 分