2010-2011-第一学期工科数学分析期末试题解答（2010.1）

一. **1.** $\frac{1}{3}$

2. $y''' + y'' - y' - y = 0$

3. $\frac{1}{2} f'(2)$

4. $\frac{\pi}{4}$

5. $-\frac{1+x}{x^3 e^{2x}}$

二. $a + b = 3$ …………………(1 分)

$y' = 3ax^2 + 2bx$ …………………(3 分)

$y'' = 6ax + 2b$ …………………(5 分)

$6a + 2b = 0$ …………………(6 分)

解得 $a = -\frac{3}{2}$ ， $b = \frac{9}{2}$ …………………(8 分)

三. 由题意 $\int f(x)dx = \frac{\sin x}{x} + C_1$ …………………..(2 分)

$f(x) = (\frac{\sin x}{x} + C_1)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ …………………..(4 分)

$\int xf'(x)dx = \int x\, d f(x)$ …………………(5 分)

$= xf(x) - \int f(x)dx$ …………………(7 分)

$= \frac{x\cos x - \sin x}{x} - \frac{\sin x}{x} + C = \cos x - \frac{2\sin x}{x} + C$ ………….(8 分)

四. $1 - \frac{dy}{dx} - \sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ …………………(3 分)

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\sin y}$ …………………..(4 分)

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-\cos y \cdot \frac{dy}{dx}}{(1+\sin y)^2}$ ……………(6 分)

$= \frac{-\cos y \cdot \frac{1}{1+\sin y}}{(1+\sin y)^2} = \frac{-\cos y}{(1+\sin y)^3}$ ……………(8 分)

五. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\arctan x dx=-\int_1^{+\infty}\arctan x d\frac{1}{x}$ ……………….(1 分)

$=\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx$ ……………….(3 分)

$=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx$ ……………….(5 分)

$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\Big|_1^{+\infty}$ ………………..(7 分)

$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ ………………..(9 分)

六. 方程化为 $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=1$ ……………….(1 分)

$y=e^{-\int-\frac{2}{x}dx}(C+\int e^{\int-\frac{2}{x}dx}dx)$ ……………….(3 分)

$=x^2(C+\int\frac{1}{x^2}dx)$

$=x^2(C-\frac{1}{x})=Cx^2-x$ ……………….(5 分)

$V(C)=\int_0^1\pi(Cx^2-x)^2dx$ ………………..(7 分)

$=\pi(\frac{1}{5}C^2-\frac{1}{2}C+\frac{1}{3})$ ………………..(8 分)

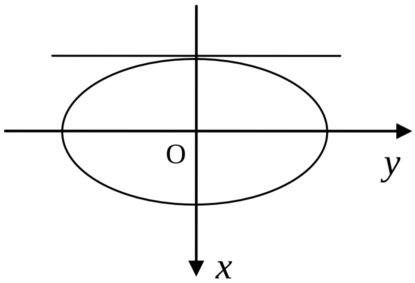
$V'(C)=\pi(\frac{2}{5}C-\frac{1}{2})$ ....……(9 分)

令 $V'(C)=0$， 得 $C=\frac{5}{4}$ ....……(10 分)

由于 $V''(C)=\frac{2}{5}\pi>0$，故 $C=\frac{5}{4}$ 是极小值点也是最小值点，

所求解为 $y=\frac{5}{4}x^2-x$ ....……(11 分)

七.



$dP=\mu g(1+x)2ydx$ ……..(2 分)

$=4\mu g(1+x)\sqrt{1-x^2}dx$ …..(3 分)

$P=\int_{-1}^1 4\mu g(1+x)\sqrt{1-x^2}dx$ ..(5 分)

$=8\mu g\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}dx$ ……..(6 分)

$=2\mu g\pi=2000\pi g\,(N)$……(8 分)

八． $r^2+r-2=0$ ……………….(1 分)

$r_1=1$， $r_2=-2$ ……………….(3 分)

$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ ……………….(5 分)

设 $y^*=x(Ax+B)e^x$ ………………..(7 分)

$y^{*\prime}=(Ax^2+2Ax+Bx+B)e^x$

$y^{*\prime\prime}=(Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B)e^x$

代入方程得 $6A=1$， $2A+3B=-1$ ………………..(9 分)

解得 $A=\frac{1}{6}$， $B=-\frac{4}{9}$ ………………..(10 分)

$y^*=(\frac{x^2}{6}-\frac{4}{9}x)e^x$

通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+(\frac{x^2}{6}-\frac{4}{9}x)e^x$ ……………..(11 分)

九． $f=ma$ ……………………..(1 分)

$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$ ……………………..(3 分)

得 $v\frac{dv}{dx}=-\sin x$ …………………....(4 分)

$v|_{x=0}=2$ …………………....(5 分)

$vdv=-\sin xdx$ …………………....(6 分)

$\frac{1}{2}v^2=\cos x+C$ …………………..(7 分)

由初值得 $C=1$

$v^2=2(\cos x+1)$ …………………….(8 分)

十． 设 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+\int_0^1 e^{x^2}dx$ ……………………(1 分)

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$ ……………………(2 分)

令 $f'(x)=0$， 得 $x=e$ ……………………(3 分)

$f(x)$ 在 $(0,e)$ 和 $(e,+\infty)$ 单调 ……………………(4 分)

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$， $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ……………………(6 分)

$f(e)=\int_0^1 e^{x^2}dx>0$ ……………………(7 分)

故 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 和 $(e,+\infty)$ 内各有一不同实根，

所以方程在 $(0,+\infty)$ 内有两个不同实根。 ……………………(9 分)

十一． 令 $x-t=u$， 得

$F(x)=\int_0^x (x-2u)f(u)du$ ……………………(1 分)

$=x\int_0^x f(u)du-2\int_0^x uf(u)du$ ……………………(2 分)

$F'(x)=\int_0^x f(u)du-xf(x)$ …………(4 分)

$=\int_0^x (f(u)-f(x))du$

因为 $f(x)$ 单调增加，故 $F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 单调减少 ……(6 分)

$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2u)f(u)du$ ……………………(7 分)

令 $t=-u$，得

$F(-x)=-\int_0^x(-x+2t)f(-t)dt$ ……………………(8 分)

$=-\int_0^x(x-2t)f(t)dt$

$=-\int_0^x(x-2u)f(u)du=-F(x)$

故 $F(x)$ 是奇函数 ………………(10 分)