线性代数A期末总复习

一、内容总结

二、往年试题

一、内容总结

线性方程组 ⟶ 矩阵 $AX=\beta$；向量 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$

⟶ 线性空间与线性变换

⟶ 行列式

⟶ 特征值与特征向量

⟶ 二次型

第一个模块 矩阵

1 矩阵的定义

2 矩阵的运算

1) 线性运算

2) 乘法运算（方阵的幂）

不满足交换律和消去律

左乘、右乘

3) 转置运算

4) 方阵的求逆运算 满秩

方阵可逆的判别：$AB=I$ 或 $BA=I$　$|A|\neq 0$

利用矩阵的初等行变换求矩阵的逆矩阵：

$(A\vdots I)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(I\vdots A^{-1})$　$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$

5) 方阵的伴随矩阵 $A^*=(A_{ij})^T$　(A_{ij}是a_{ij}的代数余子式)

$AA^*=A^*A=|A|I$　$A^*=|A|A^{-1}$　P202

6) 共轭运算　　解矩阵方程

3 矩阵的初等变换和初等矩阵

1) 初等行(列)变换；

2) 初等矩阵；E_{ij},　$E_i(k)$　$(k\neq 0)$,　$E_{ij}(k)$

定理：初等矩阵左乘（右乘）矩阵A, 相当于对A进行一次相应的初等行（列）变换；

矩阵 $\xrightarrow{\text{初等变换}}$ 阶梯形(行简化阶梯形，相抵标准形）

4 矩阵分块及分块矩阵的运算

分块矩阵的乘法及求逆

设 $A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$，则 $A^k=\begin{bmatrix} A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^k \end{bmatrix}$

且 $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$. 若其中 A_i 都可逆，则有

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}$$

若$A=\begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}$,其中$A_1,A_2$均可逆，则$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

5 特殊矩阵

行矩阵、列矩阵, 对角矩阵, 单位矩阵, 数量矩阵

零矩阵，三角矩阵，对称矩阵，反对称矩阵，

正交矩阵，正定矩阵等

6 矩阵的秩　矩阵的秩的若干性质，等式以及不等式

$r(A)=$ 阶梯形矩阵中非零行的数目

=A的行秩 =A的列秩

=A的所有非零子式的最高阶数 $=r(A^T)$

7 矩阵的关系

矩阵相抵：$A \cong B \Leftrightarrow \exists$可逆矩阵$P,Q,$使得 $B = PAQ.$

矩阵相似：$A \sim B \Leftrightarrow \exists$可逆矩阵$P,$使得 $B = P^{-1}AP.$

矩阵合同：$A \simeq B \Leftrightarrow \exists$可逆矩阵$P,$使得 $B = P^{T}AP.$

第二个模块　向量

1 向量的定义及线性运算

2 向量的线性相关性

线性组合，线性表出，线性相关及线性无关

线性相关及无关的若干结论

3 向量组的秩

向量组的秩，极大无关向量组，矩阵的秩

4 向量组等价

第三个模块　线性方程组

线性方程组的三大理论性问题：

1）存在性 $\begin{cases} \text{无解} \quad r(A) < r(\tilde{A}) \quad \text{最小二乘解} \\ \text{有解} \quad r(A) = r(\tilde{A}) \end{cases}$

2）数量性 $\begin{cases} \text{唯一解} \quad r(A) = r(\tilde{A}) = n \\ \text{无穷解} \quad r(A) = r(\tilde{A}) < n \ \text{基础解系} \end{cases}$

3）结构性　$\eta_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$

克莱姆法则：n个未知量，n个方程的线性方程组法则

利用初等行变换求解方程组¡ 高斯消元法

第四个模块　线性空间与线性变换

1 向量空间

基与维数；基变换与坐标变换；过渡矩阵

向量子空间与生成子空间

2 向量的内积

线性无关向量组的正交规范化

3 线性空间

1) 线性空间的定义

线性运算的封闭性，八条性质

向量空间；多项式空间；矩阵空间；函数空间

2) 线性子空间：

定义，充要条件　非空子集；对线性运算封闭

3) 基、坐标、维数

线性组合、线性表示；线性相关、线性无关

基、坐标、维数

线性空间由它的基生成　有无穷维线性空间

4) 过渡矩阵，基变换与坐标变换公式

$\underbrace{[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]}_{Y} = \underbrace{[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]}_{X}P \qquad Y = P^{-1}X$

4 线性变换

定义，在某一个基下的矩阵；

不同基下矩阵的关系；可逆性判别等

第五个模块　行列式

1 定义

2 性质及推论

3 行列式按行（列）展开

余子式，代数余子式的性质

4 行列式的计算 $\begin{cases} \text{基本方法} \begin{cases} \text{三角化法} \\ \text{展开降阶} \\ \text{递推公式} \end{cases} \\ \text{常用技巧} \begin{cases} \text{数学归纳} \\ \text{分拆技巧} \\ \text{加边升阶} \end{cases} \end{cases}$

5 行列式的应用

克莱姆法则**;** 刻画方阵可逆**;**

判断线性相关**;** 计算特征值

第六个模块　特征值与特征向量

1 定义　$AX = \lambda X \quad (X \neq \theta)$

2 如何计算？

特征值：$|\lambda I - A| = 0$

特征向量：$(\lambda I - A)X = 0$

3 性质

1) $|\lambda I - A| = \lambda^n - trA\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$

2) $\begin{cases} trA = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \\ \det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \end{cases}$

3) 不同特征值对应的特征向量线性无关

4) $\begin{matrix} A & A^m & kA^m + sI & f(A) & A^{-1} & A^* \\ \lambda & \lambda^m & k\lambda^m + s & f(\lambda) & \lambda^{-1} & |A|\lambda^{-1} \end{matrix}$

4 应用

1）相似对角化

相似对角化的定义

相似矩阵有相同的特征值，但不一定有相同的特征向量

n阶矩阵能相似对角化

$\Leftrightarrow$　有n个线性无关特征向量

能对角化的乘方：$A = P^{-1}\Lambda P \Rightarrow A^n = P^{-1}\Lambda^n P$

会求相似变换矩阵**P**

2）实对称矩阵

性质，正交相似对角化

特征值是实数；

不同特征值对应的特征向量是正交的**.**

3）**Jordan**标准形

不变因子，初等因子，**Jordan**块

第七个模块　　二次型

1 二次型的矩阵**¡** 对称矩阵

2 化二次型为标准形的方法

配方法；正交替换法；成对初等变换法

3 二次形的规范形

4 二次型的定性（正定二次型）

如何判别矩阵**A**正定？

充要条件