数据结构与算法设计

教材:

[1][殷] 殷人昆, 数据结构, 清华大学.

[2][王] 王晓东,计算机算法设计与分析,电子工业.

[3][S] 唐常杰等译, Sipser著, 计算理论导引, 机械工业.

参考资料:

[4][严]严蔚敏等,数据结构, 清华大学.

[5][C] 潘金贵等译, Cormen等著, 算法导论, 机械工业.

[6][M] 黄林鹏等译, Manber著, 算法引论-一种创造性方法, 电子.

[7][刘] 刘汝佳等, 算法艺术与信息学竞赛, 清华大学.

第2章 分治

2-8 设n个不同的整数排好序后存于T[1:n]中. 若存在一个下标i，$1\le i\le n$, 使得T[i]=i. 设计一个有效算法找到这个下标. 要求算法在最坏情况下的计算时间O(log n).

解: 排好序的不同整数意味着T[1:n]要么严格递增, 要么严格递减.

若T[1:n]严格减, 则解存在知$T[i]<i$蕴含$\forall j>i(T[j]<j)$, $T[i]>i$蕴含$\forall j<i(T[j]>j)$.

若T[1:n]严格增, 由解存在知$T[i]>i$蕴含$\forall j>i(T[j]>j)$, $T[i]<i$蕴含$\forall j<i(T[j]<j)$.

满足二分法条件, 可用二分搜索, 时间O(log n):

```
left=1; right=n;
while(left<=right)
{  mid=(left+right)/2
   if(T[mid]=mid) return(mid)
   if( (T[2]-T[1])*(mid-T[mid])>0 ) left=mid+1
   else right=mid-1
}
```

各种错误:

1不分析递增还是递减

2对递增或递减, 比较中点T[i]和i后左右区间取错了

第2章 分治

2.9 设T[0:n-1]是n个元素的数组. 对任一元素x, 设S(x)={ i | T[i]=x}.当|S(x)|>n/2时, 称x为主元素. 设计一个线性时间算法, 确定T[0:n-1]是否有一个主元素.

算法1: 性质: 若数列有主元素, 则中位数必为主元素.

1. 使用线性时间选择找中位数p, 即第$\lfloor (n+1)/2 \rfloor$大的数,
2. 再计数p出现次数k.
3. 若k>n/2, 则a为主元素; 否则无主元素.

找中位数时间O(n), 计数a出现次数时间O(n).

算法2: 性质: 若数列有主元素, 则去掉两个不同数, 主元素不变.

1. p=T[0], ct=1, i=1, //p记可能主元素, ct为计数器,
2. 当i<n, 若T[i]==p, 则(ct++,i++);否则(ct- -,i++;若ct==0, p=T[i], i++, ct++)
3. 计数p出现次数k, 若k>n/2则p是主元素, 否则无主元素.

注1: map对应平衡二叉树每次插入删除搜索时间是O(logn)

注2: 有人用计数的方法, 当知道数组T的取值范围时是可行的.

注3: 使用分治算法，检测每段主元素是否合并后主元素，时间O(nlogn).

第2章 分治

2.25 在线性时间选择算法中, 输入元素被划分为5个一组, 如果将它们划分为7个一组, 该算法仍然是线性时间算法吗? 划分成3个一组又怎样?

解: 以T(n)记输入n个数序列时的算法的最坏时间复杂度.

(1)若划分为7个一组, 则存在常数 n_0, c, d > 0使得

$$T(n) \le T(n/7) + T(3n/4) + d\,n,\ n > n_0;\ T(n) \le c,\ n \le n_0.$$

以下归纳证明对任意 n > 0, T(n) ≤ s n, 其中 s = max {c, 28d/3}. 这里3/28=1-(1/7+3/4)

首先对于 $n \le n_0$, 有 T(n) ≤ c ≤ s n.

其次归纳假设对于 $k > n_0$, 任意 n < k 有 T(n) ≤ s n.

于是 $T(k) \le T(k/7) + T(3k/4) + d\,k$, //迭代1次

$\le s\,k / 7 + 3\,s\,k / 4 + d\,k$, //归纳假设

$\le s\,k + (d - 3\,s / 28)\,k$

$\le s\,k$

综上所述, 对任意 n > 0, T(n) ≤ s n, 即 T(n) = O(n), 所以仍然是线性时间算法.

第2章 分治

2.25 在线性时间选择算法中, 输入元素被划分为5个一组, 如果将它们划分为7个一组, 该算法仍然是线性时间算法吗? 划分成3个一组又怎样?

解:(2)若分成3个一组, 则由于1/3+3/4=13/12>1而得不到T(n) = O(n).

事实上可以用数学归纳证明 $T(n) = O(n^t)$, 其中t是满足$(1/3)^t+(3/4)^t=1$ 的实数(t≈1.152).

若划分为3个一组, 则存在常数 n_0, c, d > 0使得

$$T(n) \le T(n/3) + T(3n/4) + d\,n,\ n > n_0;\ T(n) \le c,\ n \le n_0.$$

以下归纳证明存在s > 0, 对任意 n > 0, $T(n) \le s\,n^t - w\,n$, 其中 w = 12d.

首先存在s>0, 对于 $n \le n_0$, 有 $T(n) \le c \le s\,n^t - w\,n$.

其次归纳假设对于 $k > n_0$, 任意 n < k 有 $T(n) \le s\,n^t - w\,n$.

于是 $T(k) \le T(k/3) + T(3k/4) + d\,k$, **//迭代1次**

$\le s\,(k/3)^t - w(k/3) + s\,(3k/4)^t - w(3k/4) + d\,k$, **//归纳假设**

$\le s\,k^t - w\,k - (w/12 + d)\,k$

$= s\,k^t - w\,k$

综上所述, 对任意 n > 0, $T(n) \le s\,n$, 即 $T(n) \le s\,k^t - w\,k = O(n^t)$. 最坏情况超过线性时间

第2章 分治

2.25 在线性时间选择算法中, 输入元素被划分为5个一组, 如果将它们划分为7个一组, 该算法仍然是线性时间算法吗? 划分成3个一组又怎样?

注: 参考递推关系存在常数 n_0, c, d > 0使得

$T(n) \le T(n/3) + T(2n/3) + d\,n,\ n > n_0;\ T(n) \le c,\ n \le n_0.$

以下归纳证明存在s > 0, 对任意 n > 0, $T(n) \le s\,n\log_2 n$, 其中 s>max{c,3d}.

首先存在s>0, 对于 $1< n \le n_0$, 有 $T(n) \le c \le s\,n\log_2 n$.

其次归纳假设对于 $k > n_0$, 任意 $1< n < k$ 有 $T(n) \le s\,n\log_2 n$.

于是 $T(k) \le T(k/3) + T(2k/3) + d\,k$, //迭代1次

$\le s\,(k/3)\log_2 k/3 + s\,(2k/3)\log_2(2k/3) + d\,k$, //归纳假设

$\le s\,k\log_2 k - k(\,s(\log_2 27/4)/3 - d\,)$

$< s\,k\log_2 k$

综上所述, 对任意 n > 0, $T(n) \le s\,n\log_2 n$, 最坏情况超过线性时间.

第2章 分治

2.25 在线性时间选择算法中, 输入元素被划分为5个一组, 如果将它们划分为7个一组, 该算法仍然是线性时间算法吗? 划分成3个一组又怎样?

注1:有同学得到更精确的递推公式:

$$T(n) \le T(n/7) + T(5n/7+8) + d\,n,$$

$$T(n) \le T(n/3) + T(2n/3+4) + d\,n$$

注2: 有同学对于$T(n) = T(n/7) + T(3n/4) + d\,n$ 给出了下面的计算方法

$$T(n) \approx dn + dn(1/7+3/4) + dn(1/7+3/4)^2 + dn(1/7+3/4)^3 + \dots$$

$$= dn\ 1/\ (1-1/7-3/4) = 28dn/3$$

第3章 动态规划

1. 考虑下面的整数线性规划问题 .

即给定 序列$a_1, a_2,\ldots,a_n$, 求

$$\max\ c_1x_1+ c_2x_2+\ldots+ c_nx_n,$$

满足 $a_1x_1+ a_2x_2+\ldots+ a_nx_n \leq b$, x_i为非负整数

解: 动态规划, 子结构[1:i], OSP

设f[i][k]为用X[1:i]组合出重量k的最大价值

则 f[i][k]=max{f[i-1][k],f[i][k-x[i]]+c[i]}

去掉第1维坐标,

修改拆分方案数2即可得到算法.

时间复杂度O(nb)

注意递推关系二维, 编程可以一维.

1. 初始f[1:n]=0, f[0]=0
2. 对i=1:n, 对s=X[i]:b,
3. 若 c[i]+f[s-X[i]]>f[s],
4. 则f[s]+=f[s-X[i]]+c[i]
5. 输出f[b]

第3章 动态规划

2. 石子合并问题

问题描述: 在一个圆形操场的四周摆放着n堆石子. 现在要将石子有次序地合并成一堆. 规定每次只能选相邻的2堆石子合并成一堆, 并将新的一堆石子数记为该次合并的得分. 试设计一个算法, 计算出将n堆石子合并成一堆的最小得分和最大得分.

算法设计: 对于给定n堆石子, 计算合并成一堆的最小得分和最大得分.

数据输入: 由文件input.txt提供输入数据. 文件的第1行是正整数n, 1≤n≤100, 表示有n堆石子. 第2行有n个数, 分别表示n堆石子的个数.

结果输出: 将计算结果输出到文件output.txt, 文件第1行是最小得分, 第2行是最大得分.

输入文件示例

input.txt

4

4 4 5 9

输出文件示例

output.txt

43

54

第3章 动态规划

解: 圆周上石子合并, 子结构[i:j], 当j>n时指跨过第n堆到第j%n堆.

- 定义m[i][len]为合并第i堆到第i+len-1堆石子能得到的最少分数

  x[i][len]为合并第i堆到第i+len-1堆石子能得到的最多分数

- $m[i][len] = \min\{ m[i][k]+m[i+k][len-k]+ sum[i:i+len-1] \mid 0 \le k < len\}$
- $x[i][len] = \max\{ x[i][k]+x[i+k][len-k]+ sum[i:i+len-1] \mid 0 \le k < len\}$

1. 对 i = 1 到 n, m[i][1]=0, x[i][1]=0
2. 对 len = 2 到 n, 对i = 1 到 n
3.   j=i+len-1; m[i][len] = m[i][1]+m[i+1][len-1]+ sum[i:j];
4.   x[i][len] = x[i][1]+x[i+1][len-1]+ sum[i:j];
5.   对 k = 2 到 len-1
6.   t=m[i][k]+m[i+k][len-k]+ sum[i:j],
7.   若m[i][len]>t, 则m[i][len]=t;
8.   t=x[i][k]+x[i+k][len-k]+ sum[i:j],
9.   若x[i][len]<t, 则x[i][len]=t;
10. 输出min{m[i][n]}
11. 输出max{x[i][n]}

sum[i:j]是第i堆到第j堆石子总数

时间复杂度$O(n^3)$

此外还可以

- 打印合并次序
- 加速

第3章 动态规划

参考分析: 讨论直线上石子合并问题的算法

- 动规, 子结构[i:j], OSP, 类似于矩阵连乘问题
- 定义m[i,j]为从第i堆到第j堆的石子合并能得到的最少分数, 那么

  $$m[i,j] = \min \{ m[i,k]+m[k+1,j]+ sum[i:j] \quad | \, i \le k < j\}$$

  其中sum[i:j]是第i堆到第j堆石子总数
- 修改矩阵连乘公式可以得到下面的算法(其中s[i,j]是最佳分断点)

```
1. 对 i = 1 到 n,  m[i,i]=0,
2. 对 r = 1 到 n-1
3.     对i = 1 到 n-r
4.         j = i + r; s[i,j] = i;
5.         m[i,j] = m[i,i]+m[i+1,j]+ sum[i:j];
6.         对 k = i + 1 到 j-1
7.             t =m[i,k]+m[k+1,j]+ sum[i:j],
8.             若m[i,j]>t, 则m[i,j]=t; s[i,j]=k;
```

输出m[1,n], 合并次序

```
Traceback(i, j, s)
1.  若i = = j, 打印 a[i]
2.  否则   打印 "("
3.      Traceback(i, s[i,j], s)
4.      打印 "+"
4.      Traceback(s[i,j]+1,j,s)
5.      打印 ")"
```

第3章 动态规划

参考分析加速:

- 上面的程序计算耗费$O(n^3)$时间
- 由于本问题满足动态规划加速原理, 最佳分断点满足

$$s[i,j-1] \le s[i,j] \le s[i+1,j]$$

所以程序可以修改如下

1. 对 i = 1 到 n, m[i,i]=0, s[i,i]=0
2. 对 r = 1 到 n-1
3. 对i = 1 到 n-r
4. j = i + r; div=s[i,j-1]; m[i,j] = m[i,div]+m[div+1,j]+ sum[i:j];
5. 对 k = div + 1 到 s[i+1,j]
6. t =m[i,k]+m[k+1,j]+ sum[i:j],
7. 若m[i,j]>t, 则 m[i,j]=t; s[i,j]=k;

输出m[1,n]

第3章 动态规划

3. 数字三角形问题

问题描述: 给定一个有n行数字组成的数字三角形, 如下图所示. 试设计一个算法, 计算出从三角形的顶至底的一条路径, 使该路径经过的数字和最大.

算法设计: 对于给定的n行数字组成的三角形, 计算从三角形顶至底的路径经过的数字和的最大值.

数据输入: 由文件input.txt提供输入数据. 文件的第1行数字三角形的行数n, 1≤n≤100. 接下来n行是数字三角形各行中的数字. 所有数字在0~99之间.

结果输出: 将计算结果输出到文件output.txt, 文件第1行中的数是计算出的最大值.

```
    7
   3 8
  8 1 0
 2 7 4 4
4 5 2 6 5
```

数字三角形

输入文件示例

input.txt

```
5
7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5
```

输出文件示例

output.txt

```
30
```

第3章 动态规划

动规, 两种方式, 自顶向下, 自底向上

- 自顶向下, 子结构1:i(行)

定义m[i,j]为从第1行到第i行第j列能得到的最大分数, 那么

m[i,j] = a[i,j] + max { m[i-1,j], m[i-1,j-1]}, 当j≤i; =0, 当j>i或j=0.

注: 递推关系不能去掉第1维, 编程可去掉第1维

根据递推公式编程

1. m[1,1]=a[1,1], m[1,0]=0,
2. 对 i = 2 : n
3. 　　对j = 1 : i
4. 　　　　m[i,j]=a[i,j];
5. 　　　　若m[i-1,j-1]>m[i-1,j]
6. 　　　　则m[i,j]+=m[i-1,j-1]
7. 　　　　否则 m[i,j]+=m[i-1,j]
8. 输出 max { m[n,j] | 1≤j≤n }

去掉第1维坐标编程

1. m[1]=a[1,1], m[0]=0, m[2:n]=0
2. 对 i = 2 : n
3. 　　对j = i : 1
4. 　　　　若m[j-1]>m[j], 则m[j]=m[j-1]
5. 　　　　m[j]+=a[i,j]
6. 输出 max { m[j] | 1≤j≤n }

第3章 动态规划

动规, 两种方式, 自顶向下, 自底向上

- 自底向上 , 子结构1:i(行)

定义m[i,j]为从第n行到第i行第j列能得到的最大分数, 那么

$m[i,j] = a[i,j] + \max\{ m[i+1,j], m[i+1,j+1]\}$, 当$j \le i$

根据递推公式编程

1. m[n,i]=a[n,i],
2. 对 i = n-1 : 1
3. 　　对j = 1 : i
4. 　　　　m[i,j]=a[i,j];
5. 　　　　若m[i+1,j+1]>m[i+1,j]
6. 　　　　则m[i,j]+=m[i+1,j+1]
7. 　　　　否则 m[i,j]+=m[i+1,j]
8. 输出 m[1,1]

去掉第一维编程

1. 对j=1:n, m[j]=a[n,j],
2. 对 i = n-1 到 1
3. 　　对j = 1 到 i
4. 　　　　若m[j+1]>m[j], 则m[j]=m[j+1]
5. 　　　　m[j]+=a[i,j],
6. 输出m[1]

第3章 动态规划

算法实现题: 租用游艇问题
问题描述: 长江游艇俱乐部在长江上设置了n个游艇出租站1,2,…,n. 游客可在这些游艇出租站租用游艇, 并在下游的任何一个游艇出租站归还游艇. 游艇出租站i到出租站j之间的租金为r(i,j), $1\le i<j\le n$. 试设计一个算法, 计算出从游艇出租站1到游艇出租站n所需的最少租金, 并分析算法的计算复杂性.
算法设计: 对于给定的游艇出租站i到游艇出租站j的租金r(i,j), $1\le i<j\le n$. 计算出租站1到n所需的最少租金.
数据输入: 由文件input.txt提供输入数据. 文件的第1行有一个正整数n, $n\le 200$, 表示有n个游艇出租站. 接下来n-1行是r(i,j), $1\le i<j\le n$.
结果输出: 将计算出的游艇出租站1到n最少租金输出到文件output.txt.

输入文件示例
input.txt
3
5 15
7

输出文件示例
output.txt
12

第3章 动态规划

解法一: 子结构OSP分析
同全路径最短路
1. D[i,j] = r[i,j],
2. 对k=1:n
3. 对i=1:n, 对j=1:n
4. 若 D[i,k]+D[k,j] < D[i,j]
5. 则 D[i,j] = D[i,k]+D[k,j];
6. 输出D[1,n]
时间$O(n^3)$:
45两步常数时间
23三重循环$O(n^3)$

解法二: 子结构OSP分析同单源最短路
1. 初始d[1]=0, 其它点d[u]=INF, S空, Q=V
2. 当Q非空
3. 取出Q中u使得d[u]最小
4. 将u添加到S中
5. 对u的每个邻居v, 松弛(u,v).

松弛(u,v):
1. 若d[v]>d[u]+r(u,v),
2. 则d[v]=d[u]+r(u,v).

注意到边数$O(n^2)$.
Q用数组时间$O(n^2)$:
3时间$O(n)$, 23时间$O(n^2)$, 45总和时间$O(n^2)$
Q用最小堆$O(n^2\log n)$:
23时间$O(n\log n)$, 45总和时间$O(n^2\log n)$.

第3章 动态规划

解法三: 依题意r(i,j)只有i<j的值, 有下面的算法

取子结构1:j, 定义f[j]为从1到j的最少租金

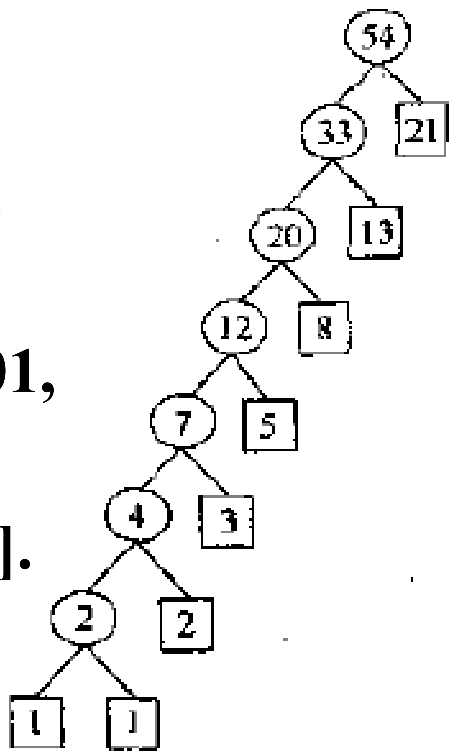
$f[j] = \min \{ f[i] + r[i,j] \mid 1 \le i < j \}$

1. f[1]=0, f[2:n]=INF
2. 对j=2:n,对i=1:j-1,
3. 若 f[j]>f[i]+r[i,j],
4. 则 f[j]=f[i]+r[i,j]
5. 输出f[n]

时间$O(n^2)$

第四章 贪心

1. 字符a~h出现的频率恰好是前8个Fibonacci数, 它们的Huffman编码是什么? 将结果推广到n个字符的频率恰好是前n个Fibonacci数的情形.



解:根据a~h的频率, 画出Huffman编码树如右图

所以各字符编码为: h:1, g:01, f:001, e:0001, d:00001, c:000001, b:0000001, a:0000000,

对n符号情形. 记第i符号为i, 则频率f[i]=f[i-1]+f[i-2].

- 记1:k为前k节点合并, 频率$f[1:k]=sum_{i=1}^{k} f[i]$.
- 由数学归纳法易证k≥2时$f[k+1]\le f[1:k]<f[k+2]$.
- 所以对所有k≥2, 都有1:k与k+1是兄弟.
- 继续该过程得类似右图的偏二叉树为其Huffman编码树
- 于是对i=2:n, i的编码为$0^{n-i}1$, 1的编码是0^{n-1}.

第四章 贪心

2. 若在0-1背包问题中, 各物品依重量递增排列时, 其价值恰好降序排列, 对这个特殊的0-1背包问题, 设计一个有效算法找出最优解, 并说明算法的正确性.

解: 设物品1:n按照重量w[1:n]依次递增, c为容量

贪心选择性质: 存在最优解包含物品1

证明: 反证法, 若不包含, 则可用物品1替换任一物品得到新最优解.

最优子结构性质:

从最优解中去掉物品1,

它仍是物品2:n和容量c-w[1]的最优解

证明: 反证法, 否则可以替换2:n的选择得到更优解.

算法: 按重量递增排序(O(nlogn)), 依次放入背包, 直到超重(O(n))

第四章 贪心

3. 将最优装载问题的贪心算法推广到2艘船的情形

贪心算法还能产生最优解吗?

说明：答案需要举反例.

解: 直接贪心是不行的.

最优装载要求装载件数最多.

其贪心算法是每次选择最轻的物品.

设有物品分别重1,2,3,4,5, 船1容量7, 船2容量8.

若按照最优装载的贪心算法,

船1装1,2,3, 船2装4, 只能装4件物品.

最优解是船1装1,2,4, 船2装3,5.

第四章 贪心

3. 将最优装载问题的贪心算法推广到2艘船的情形贪心算法还能产生最优解吗?

参考: 假设两艘船容量分别为c_1,c_2.

1. 先对一艘船容量c_1+c_2做最优装载.
   即优先放最轻, 设选出了物品1到k.
2. 对物品1到k, 第一艘船容量c_1,
   做背包问题, 装包重量最大.
3. 对1到k中剩余的物品, 按最优装载放入第二艘船.

第四章 贪心

4. 最优分解问题.

问题描述:设n是一个正整数,将n分解为若干互不相同的自然数之和,且使这些自然数的乘积最大.

算法设计:对于给定的正整数n,计算最优分解方案.

数据输入:由文件input.txt提供输入数据.

文件只有一行,是正整数n.

结果输出:将计算的最大乘积输出到文件output.txt

例如若n=10, 则最优分解为2+3+5, 最大乘积为30.

第四章 贪心

4. 最优分解问题.

对任意自然数$n\geq 2$, 存在唯一k使得

$$2+3+\ldots+k \leq n < 2+3+\ldots+(k+1).$$

令$m=n-2-3-\ldots-k$, 则$0\leq m \leq k$.

若$m=0$, 则分解为$\{2,3,\ldots,k\}$;

若$1\leq m\leq k-1$, 则分解为$\{2,3,\ldots,k+1\}-\{k-m+1\}$;

若$m=k$, 则分解为$\{3,4,\ldots,k+2\backslash\}-\{k+1\}$.

贪心选择: 取最小不同数的和.

算法正确性证明: 见pdf文件. 教材答案证明不严格

第四章 贪心

最优分解算法 //a[1],…,a[k]是n的最优分解

1. k=1; a[1]=2; n-=2;
2. 当 n > a[k],
3. k++; a[k]=a[k-1]+1; n-=a[k]
4. 若 n == a[k],
5. a[k]++; n--
6. 对 i = 0:n-1,
7. a[k-i]++

或者若不要求a[i]递增改为

4. 若 n == a[k], //此时a[k]=k+1
5. 则 a[1] += n
6. 否则 a[k+1-n] +=n

第五章 回溯

运动员最佳配对问题

问题描述: 羽毛球队有男女运动员各n人. 给定2个n×n矩阵P和Q. P[i][j]是男运动员i与女运动员j配混合双打的男运动员竞赛优势; Q[i][j]是女运动员i与男运动员j配混合双打的女运动员竞赛优势. 由于技术配合和心理状态等各种因素影响, P[i][j]不一定等于Q[j][i]. 男运动员i和女运动员j配对的竞赛优势是P[i][j]*Q[j][i]. 设计一个算法, 计算男女运动员最佳配对法, 使得各组男女双方竞赛优势的总和达到最大.

数据输入: input.txt, 第1行有一个正整数n(1≤n≤20),接下来2n行是P和Q

结果输出: 最佳配对的各组男女双方竞赛优势总和

说明:回溯算法问题解答需要剪枝函数和伪代码.

输入:

```
3
10 2 3
2 3 4
3 4 5
2 2 2
3 5 3
4 5 1
```

输出
52

第五章 回溯

解: 男运动员位置不动, 女运动员全排列, 回溯搜索最优值

解空间是n的全排列, 所以选择排列树作为解空间结构.

变量设计: 当前得分cs, 最佳得分bests, x[1:n]女运动员的排列

定义函数 $f(i,m,x) = \max_{j=m+1}^{n} P[i][x[j]]*Q[x[j]][i]$, 其中i>m,

是在前m位男运动员已配对的情况下, 男运动员i配对其她女运动员的上界

定义函数 $Upb(m,x) = f(m+1,m,x)+f(m+2,m,x)+\ldots+f(n,m,x)$.

当前m位男运动员已配对的情况下, cs+Upb(m,x)是余下情况配对的上界,

由此可以设计剪枝(限制)条件 cs+Upb(m,x) > bests

注1: 有的同学没有设计剪枝条件, 这不能体现回溯的优势.

注2: 有同学使用 cs < bests作为剪枝条件, 这是错误的.

因为可能当前还有很多没有配对, 当所有配对完成后会有更优值.

注3: 也可以设计其它的剪枝条件.

注4: 函数f, Upb与排列x有关, 在每个节点都要重新计算, 不能统一计算

注5: 有同学先计算矩阵F[i][j]=P[i][j]*Q[j][i], 这是更好的方法.

第五章 回溯

初始: 当前得分cs=0, 最佳得分bests=0,

对i=1:n, x[i]=i, 是女运动员的初始排列

backtrack(t)   //t是层号

1. 若 t > n, 返回
2. 对 j = t : n
3. | 交换x[t],x[j],
4. | cs+=P[t][x[t]]*Q[x[t]][t],
5. | 若 cs+Upb(m,x) > bests,
6. | | 若cs>bests, 则 bests=cs,
7. | | backtrace(t+1)
8. | cs-=P[t][x[t]]*Q[x[t]][t]
9. | 交换x[t],x[j],

主程序执行backtrack(1)即可

第八章 网络流

1. 飞行员配对

问题描述: 第二次世界大战时期, 英国皇家空军从沦陷国征募了大量外籍飞行员. 由皇家空军派出的每一架飞机都需要配备在航行技能和语言上能互相配合的2名飞行员, 其中一名是英国飞行员, 另一名是外籍飞行员, 在众多的飞行员中, 每一名外籍飞行员都可以与其他若干名英国飞行员很好地配合. 如何选择配对的飞行员才能使一次派出最多的飞机.

算法设计: 对于给定的外籍飞行员与英国飞行员的配合情况, 找出一个最佳飞行员配对方案, 使得皇家空军能派出最多的飞行员.

数据输入: 由文件input.txt提供输入数据. 文件第1行有2个正整数m和n. n是皇家空军的飞行员总数(n<100); m是外籍飞行员数. 外籍飞行员编号1~m, 英国飞行员编号m+1~n. 接下来每行2个整数i和j, 表示外籍飞行员i可以与英国飞行员j配合. 文件最后以2个-1结束.

第八章 网络流

结果输出: 将最佳飞行员配对方案输出到文件output.txt. 第1行是最佳飞行员配对方案一次能派出的最多飞机数M. 接下来M行是最佳飞行员配对方案. 每行有2个正整数i和j, 表示在最佳飞行员配对中, 飞行员i和飞行员j配对.

如果所求的最佳飞行员配对方案不存在, 则输出“No Solution!”

输入文件示例	输出文件示例
5 10	Output.txt
1 7	4
1 8	1 7
2 6	2 9
2 9	3 8
2 10	5 10
3 7	
3 8	
4 7	
4 8	
5 10	
-1 -1	

解: 构造二分图:

将1:m作为左顶点集, m+1:n作为右顶点集.

若左顶点i与右顶点j能配对, 则添一条边.

可以使用二分图匹配算法,

或改造成相应的流网络, 使用最大流算法.

第八章 网络流

2. 试题库问题

问题描述: 假设一个试题库中有n道试题. 每道试题都标明了所属类别. 同一道题可能有多个类别属性. 现要从题库中抽取m道题组成试卷. 并要求试卷包含指定类型的试题. 试设计一个满足要求的组卷算法.

算法设计: 对于给定的组卷要求, 计算满足要求的组卷方案.

数据输入: 由文件input.txt提供输入数据. 文件第1行有2个正整数k和n(2≤k≤20, k≤n≤1000), k表示题库中试题类型总数, n表示题库中试题总数. 第2行有k个正整数, 第i个正整数表示要选出的类型i的题数. 这k个数相加就是要选出的总题数. 接下来n行给出了题库中每个试题的类型信息. 每行的第1个正整数p标明该题可以属于p类, 接着的p个数是该题所属的类型号.

结果输出: 将组卷方案输出到文件output.txt. 文件第i行输出"i:"后接类型i的题号. 如果有多个满足要求的方案, 只要输出1个方案. 如果问题无解, 则输出"No Solution!".

第八章 网络流

输入文件示例	输出文件示例
3 15	Output.txt
3 3 4	1: 1 6 8
2 1 2	2: 7 9 10
1 3	3: 2 3 4 5
1 3	
1 3	
1 3	
3 1 2 3	
2 2 3	
2 1 3	
1 2	
1 2	
2 1 2	
2 1 3	
1 1	
3 1 2 3	

解: 构造流网络.

顶点构造:

构造题型号1:k对应的顶点x[1:k]

构造试题号1:n对应的顶点y[1:n]

添加源点s, 和汇点t.

边的构造:

从s各连1条边到k个顶点x[1:k], 容量为题型k需要的题数

若试题i属于题型j, 则添边(x[j],y[i]), 容量1

对每个试题i, 添加1条边(y[i],t), 容量1

使用最大流算法, 得到相应解.