¡ 2.3 齐次线性方程组解的结构

一、 齐次线性方程组有非零解的充要条件

二、 齐次线性方程组的解的性质

三、 齐次线性方程组的基础解系

四、 齐次线性方程组的解的结构

一、 齐次线性方程组有非零解的充要条件

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1+\boxed{a_{12}}x_2+\cdots+\boxed{a_{1n}}x_n=\boxed{0} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \quad (1)$$

令

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \theta=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

齐次线性方程组的矩阵表示式： $AX=\theta$ **(2)**

令 $\alpha_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\cdots,\alpha_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\theta=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

则方程组**(1)**可表为

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\theta \qquad (3)$$

称上式为线性方程组**(1)** 的向量表达式。

此时有： $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$

结论： 方程组**(1)** 有非零解 只有零解

$\Leftrightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关 线性无关

$\Leftrightarrow$ 秩(A) = 秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}<n$ 。

=

只有零解

定理 齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解的充要条件是

秩$(A)<A$的列数=未知数的个数

=

结论：

设$A_{m\times n}$,则当$m<n$时，齐次方程组$AX=0$一定有非零解.

例 设

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a+1 & 2a & 3a+1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

且存在 3阶非零方阵 B，使 $BA=0$。求 a。

解 因 $BA=0$，故 $A^TB^T=O$ 。令

$$B^T=[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3]$$

则 β_1，β_2，β_3 均为齐次线性方程组 $A^TX=0$ 的解。

因 $B\neq O$，故存在 $\beta_j\neq\theta$ $(1\leq j\leq 3)$ 。于是，齐次线性方程组 $A^TX=0$ 有非零解。由此得，

$$秩(A^T)<A^T的列数=3$$

即

$$秩(A)=秩(A^T)<3。$$

而

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a+1 & 2a & 3a+1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & 2a-2 & 3a-3 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 \end{pmatrix}$$

故得，$a=1$。

二、 齐次线性方程组的解的性质

定义 n元线性方程组的一个解看成是一个n元列向量，称为解向量.

性质 设 X_1, X_2是齐次线性方程组 $AX=0$的任意两个解向量，k_1是任意常数，则有

（1）X_1+X_2 是此方程组的解向量;

（2）k_1X_1是此方程组的解向量 .

证 (1)因$AX_1=0$, $AX_2=0$, 故$A(X_1+X_2)=AX_1+AX_2=0$,
所以 X_1+X_2 也是 $AX=0$ 的解。

(2)因$A(k_1X_1)=k_1(AX_1)=k_10=0$, 故$k_1X_1$也是$AX=0$的解。

注 齐次线性方程组的这两个性质可综合为：

若 X_1, X_2 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解向量，则 X_1, X_2 的任意线性组合 $k_1X_1+k_2X_2$ 也是 $AX=0$的解向量。

这个结论可推广到任意有限个解向量的情形。

即：如果$X_1, X_2, \cdots, X_t$均为齐次线性方程组$AX=0$的解，则它们的线性组合

$$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_tX_t \quad (k_1,k_2,\cdots,k_t\text{为任意常数})$$

也是该方程组的解.

这就启发我们考虑：当齐次线性方程组AX=0有非零解时，如果能确定其解向量组的秩，并求出该解向量组的一个极大无关组，就可以通过这个极大无关组表示出方程组的全部解，同时，也就掌握了该方程组解的结构。

三、齐次线性方程组的基础解系

定义 设 $X_1, X_2, ..., X_t$是齐次线性方程组$AX=0$的t个解向量。若它们满足

（1）$X_1, X_2, ..., X_t$ 线性无关;

（2）$X_1, X_2, ..., X_t$ 可线性表出 $AX=0$ 的任一解向量.

则称 $X_1, X_2, ..., X_t$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系。

注1 基础解系可视为齐次线性方程组解集合的极大无关组，因此基础解系不唯一，但包含的解向量的个数唯一确定。

注2 上述齐次线性方程组$AX=0$的一般解可表示为 $k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_tX_t$, 这里 $k_1, k_2, \cdots, k_t$是任意常数。

注3 设A是$m\times n$矩阵。若 秩$(A)=n$，则齐次线性方程组 $AX=0$只有零解，故没有基础解系(此时解空间只含一个零解)。

四、 齐次线性方程组的解的结构

定理 设A是$m\times n$矩阵。若 秩$(A)=r<n$，则齐次线性方程组 $AX=0$存在基础解系，且基础解系包含$n-r$个解向量。 自由未知数个数 $n-r(A)$

设此基础解系为：$X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}$.则方程组的任意解$X$可以表示为：

$$X=k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_{n-r}X_{n-r}$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$为任意常数。解集合可表示为

$$S=\{k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_{n-r}X_{n-r} \mid k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in R\}.$$

定理的证明：

把A用初等行变换化为阶梯 形矩阵B，不失一般性，设

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

B的主元为$b_{11}, b_{22}, \cdots, b_{rr}$，$B$对应的阶梯型方程组为

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1r}x_r+\cdots+b_{1n}x_n=0 \\ b_{22}x_2+\cdots+b_{2r}x_r+\cdots+b_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ b_{rr}x_r+\cdots+b_{rn}x_n=0 \end{cases}$$

取$x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$为自由未知数，则有

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1r}x_r=-b_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{1n}x_n \\ b_{22}x_2+\cdots+b_{2r}x_r=-b_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ b_{rr}x_r=-b_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{rn}x_n \end{cases}$$

让自由未知数分别取下面的$n-r$组值，

$$x_{r+1}=1, x_{r+2}=0, \cdots, x_n=0 \Rightarrow X_1$$
$$x_{r+1}=0, x_{r+2}=1, \cdots, x_n=0 \Rightarrow X_2$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$x_{r+1}=0, \cdots, x_{n-1}=0, x_n=1 \Rightarrow X_{n-r}$$

相应地得方程组的 $n-r$个解向量，记为

$$X_1=(c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1r}, 1, 0, \cdots, 0)^T$$
$$X_2=(c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2r}, 0, 1, \cdots, 0)^T$$
$$\cdots\cdots$$
$$X_{n-r}=(c_{n-r,1}, c_{n-r,2}, \cdots, c_{n-r,r}, 0, 0, \cdots, 1)^T$$

下面证明 $X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}$就是一个基础解系．

(1)易证$X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}$线性无关；用定义或秩易得

(2)需证$AX=0$的任一解向量均可由$X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}$线性表出.

任取$AX=0$的一个解向量：

$$X_0=(d_1, d_2, \cdots, d_r, d_{r+1}, \cdots, d_n)^T$$

令 $X_0^*=X_0-d_{r+1}X_1-d_{r+2}X_2-\cdots-d_nX_{n-r}$

$$=(d_1^*, d_2^*, \cdots, d_r^*, 0, \cdots, 0)^T$$

由解的性质知：X_0^*也是$AX=0$的解向量，

将X_0^*代入同解方程组 $BX=0$中，得

$$\begin{cases} b_{11}d_1^*+b_{12}d_2^*+\cdots+b_{1r}d_r^*=0 \\ b_{22}d_2^*+\cdots+b_{2r}d_r^*=0 \\ \cdots\cdots \\ b_{rr}d_r^*=0 \end{cases}$$

回代得：$d_1^*=d_2^*=\cdots=d_r^*=0$，故

$$X_0^*=X_0-d_{r+1}X_1-d_{r+2}X_2-\cdots-d_nX_{n-r}=0$$

即 $X_0=d_{r+1}X_1+d_{r+2}X_2+\cdots+d_nX_{n-r}$

即 $AX=0$的任一解向量X_0均可由$X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}$线性表出.

这样，由定义知 $X_1, X_2, \cdots, X_{n-r}$是方程$AX=0$的一个基础解系．

基础解系的求法：

设有n元齐次线性方程组$AX=0$，且 秩$(A)=r<n$

（1）系数矩阵 $A\xrightarrow{\text{行}}$阶梯形矩阵 B；

（2）从阶梯形方程组 $BX=0$中确定自由未知数

$$x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$$

（3）求一组特解　　不唯一

$$x_{r+1}=1, x_{r+2}=0,\cdots,x_n=0 \Rightarrow X_1$$
$$x_{r+1}=0, x_{r+2}=1,\cdots,x_n=0 \Rightarrow X_2$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$x_{r+1}=0,\cdots,x_{n-1}=0, x_n=1 \Rightarrow X_{n-r}$$

（4）则 $X_1, X_2,\cdots,X_{n-r}$是基础解系，且方程组的一般解为

$$k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_{n-r}X_{n-r}$$

这里 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$是任意 n-r 个常数。

例 2.3.1 求下述方程组的一般解

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+4x_4+x_5=0 \\ -x_1-2x_2+x_3+3x_4-3x_5=0 \\ 2x_3+4x_4-2x_5=0 \end{cases}$$

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行简化阶梯型

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+\quad -x_4+2x_5=0 \\ x_3+2x_4-x_5=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_2+x_4-2x_5 \\ x_3=-2x_4+x_5 \end{cases}$$

$$x_2=1, x_4=x_5=0 \Rightarrow X_1=(-2,1,0,0,0)^T$$
$$x_2=0, x_4=1, x_5=0 \Rightarrow X_2=(1,0,-2,1,0)^T$$
$$x_2=0, x_4=0, x_5=1 \Rightarrow X_3=(-2,0,1,0,1)^T$$

故一般解为$k_1X_1+k_2X_2+k_3X_3$，其中k_1,k_2,k_3为任常。

例2.3.2 求下列齐次线性方程组的一般解

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1+5x_2+4x_3=0 \\ 3x_1+6x_2+5x_3=0 \end{cases}$$

解

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 3x_2+2x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-x_3 \\ 3x_2=-2x_3 \end{cases}$$

$$x_3=1 \Rightarrow X_1=(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1)^T$$

∴ 一般解为 k_1X_1（k_1是任意常数）　。

也可取　$x_3=3 \Rightarrow X_1=(-1, -2, 3)^T$

例2.3.3　设A是m¡ n矩阵,且 秩$(A)=r<n$，则齐次线性方程组AX=0的任意 n - r个线性无关的解向量均构成一个基础解系。

证明：设$X_1^*,X_2^*,\cdots,X_{n-r}^*$是$AX=0$的任意$n-r$个线性无关的解向量. X_0是$AX=0$的任意一个解向量　.

要证$X_1^*,X_2^*,\cdots,X_{n-r}^*$是基础解系，

只需证X_0可由$X_1^*,X_2^*,\cdots,X_{n-r}^*$线性表出.

任取$AX=0$的一个基础解系 $X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$,

则由定义知：解向量 $X_0,X_1^*,X_2^*,\cdots,X_{n-r}^*$可由

$X_1,X_2,\cdots,X_{n-r}$线性表出.

则由定理2.1.3知：$X_0, X_1^*, X_2^*, \cdots, X_{n-r}^*$线性相关.

又$X_1^*, X_2^*, \cdots, X_{n-r}^*$线性无关，故由定理 2.1.2得：

X_0可由$X_1^*, X_2^*, \cdots, X_{n-r}^*$线性表出.

所以$X_1^*, X_2^*, \cdots, X_{n-r}^*$亦为方程组的基础解系.

例2.3.4 设X_1, X_2, X_3是齐次线性方程组 $AX=0$的一个基础解系，问下列三组向量中那一组也是基础解系？

(A) $X_1 - X_2, X_2 - X_3, X_3 - X_1$　线性相关

(B) $X_1 + X_2, X_2 - X_3$　个数不够

(C) $X_1 + X_2, X_2 + X_3, X_3 + X_1$　线性无关

基础解系所含向量的个数 $= n - r(A)$.

利用矩阵A的秩与齐次线性方程组AX=0的解的关系，可以通过研究基础解系来讨论矩阵的秩.

例2.3.5：设A是$m \times n$实矩阵，证明：

$$r(A^T A) = r(AA^T) = r(A).$$

证明：只需证明：$r(A^T A) = r(A)$.

考虑齐次线性方程组：$AX = 0$　　(1)

$A^T AX = 0$　　(2)

任取(1)的解X_1,则$AX_1 = 0$, 此式两边同时左乘A^T,得

$A^T AX_1 = A^T 0 = 0$. 故X_1也是方程(2)的解.

反之，任取(2)的解X_2,则$A^T AX_2 = 0$,

此式两边同时左乘$X_2{}^T$,得

$$X_2^T A^T AX_2 = (AX_2)^T (AX_2) = X_2^T 0 = 0.$$

由例1.2.16得：$AX_2 = 0$,　故X_2也是方程(1)的解.

综上所述，方程组（1）与（2）同解。

若方程组(1),(2)都只有零解，则显然$r(A) = r(A^T A) = n$.

否则两方程组有相同的基础解系.从而有

$$n - r(A) = n - r(A^T A).$$

于是有：$r(A) = r(A^T A)$.

利用齐次方程组同解来证矩阵等秩是一种常用技巧

例2.3.6：设$m \times n$矩阵A与$n \times s$矩阵B满足$AB = O$,并且$r(A) < n$.　证明：$r(A) + r(B) \le n$.

证明：设$r(A) < n$,故以A为系数矩阵的n元齐次线性方程组：$AX = O$　　(1)

存在基础解系，且基础解系由$n - r$个解组成。

即方程组(1)的解向量组的秩为$n - r$.

由条件$AB = O$,将B按列分为s块：$B = (\beta_1, \cdots, \beta_s)$

其中β_j为B的第j个列向量，$j = 1,2,\cdots,s$.

由分块矩阵的乘法，有

$$AB = A(\beta_1, \cdots, \beta_s) = (A\beta_1, \cdots, A\beta_s) = (0,0,\cdots,0)$$

即　$A\beta_j = 0$,　$(j = 1,2,\cdots,s)$

这表明矩阵B的每一个列向量都是方程组(1)的解。

作为方程组(1)的s个解，知

$$r(\beta_1, \cdots, \beta_s) \le n - r,$$

又$r(B) = r(\beta_1, \cdots, \beta_s)$,　$r = r(A)$

即　$r(B) \le n - r(A)$

即　$r(B) + r(A) \le n$.

本节小结

1. 齐次线性方程组有非零解的充要条件
2. 齐次线性方程组的解的性质
3. 齐次线性方程组的基础解系 $n-r = n-r(A)$.
4. 齐次线性方程组的解的结构

掌握如何求其基础解系及一般解

利用齐次方程组的解讨论矩阵的秩

作业 习题二(P112):

31(2), 36, 38, 43

(31, 34-39, 42-43, 46均可作为练习**)**