## ¡ 3.6 线性变换及其矩阵表示

一、映射

二、线性变换的概念

三、线性变换的矩阵表示

四、线性变换的特征值(自看)

### 一、映射

定义3.6.1 设$A$、$B$是两个集合，若有一个确定的法则，使对$A$中每个元素$x$，都有$B$中唯一确定的元素$y$与之对应，则称这个法则是$A$到$B$的一个映射。

如果 $\sigma$是$A$到$B$的映射，则记为 $\sigma: A \to B$

如果 $x \in A$通过 $\sigma$对应$y \in B$，则记为

$$\sigma: x \to y \text{ 或 } \sigma(x) = y$$

此时称$y$为$x$在 $\sigma$下的象，称$x$为$y$在$\sigma$下的原象。

例3.6.1 设$A = B = R, \sigma(x) = x^2$，则$\sigma$ 是$A$到$B$的映射。

例3.6.2 在解析几何中，设$A$表示空间中所有点的集合，$B = R^3$，则在建立空间直角坐标系后，存在$A$到$B$的一个映射。

例3.6.3 设 $A = R^{m\times n}, B = N$，取$M \in A$，定义

$$\sigma(M) = r(M),$$

则$\sigma$是$R^{m\times n}$到$N$的一个映射

由上面三个例子可知：

（1）$A$与$B$可以是相同的集合，也可以是不同的集合；

（2）对$A$中每个元素$x$，需要$B$中一个唯一确定的元素与它对应；

（3）一般来说，$B$的元素不一定都是$A$中元素的象。

设$\sigma: A \to B$，记 $\sigma(A) = \{\sigma(x), x \in A\}$，称之为$A$在映射 $\sigma$下的象集合。显然 $\sigma(A) \subseteq B$。

定义3.6.2 设 $\sigma$是$A$到$B$的映射，若$\sigma(A) = B$则称$\sigma$为满射；若 $\forall a, b \in A, a \neq b$，均有$\sigma(a) \neq \sigma(b)$则称$\sigma$为单射；若$\sigma$既是单射又是满射，则称$\sigma$为双射，也称为一一对应。

定义3.6.3 设 $\sigma, \tau$是$A$到$B$的两个映射，若$\forall a \in A$都有$\sigma(a) = \tau(a)$，则称$\sigma$与 $\tau$相等，记为 $\sigma = \tau$.

定理3.6.1 设$\sigma$ 是集合$A$到$B$的映射，$\tau$是集合$B$到$C$的映射，则

$$\tau(\sigma(a)), \forall a \in A \qquad \text{复合运算}$$

确定集合$A$到$C$的一个映射，称之为 $\tau$与 $\sigma$的乘积，记为 $\tau\sigma$，即 $\tau\sigma(a) = \tau(\sigma(a)), a \in A$

注意： $\tau\sigma \neq \sigma\tau$

$$(\tau\sigma)\rho = \tau(\sigma\rho)$$

一个集合 $S$ 到自身的映射称为 $S$ 的变换。

变换 $\sigma: S \to S$

## 二、线性变换的概念

在解析几何中，常需要把空间中的点向某一固定平面作投影，例如向$xoy$面投影。在线性代数中，这实际上是实数域R上的3维向量空间$R^3$到自身的一个映射$\rho$：

$$\rho(x,y,z)=(x,y,0),\ (x,y,z)\in R^3$$

易见：$\forall\ (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in R^3,\quad \forall k\in R$

$$\rho[(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)]=\rho(x_1,y_1,z_1)+\rho(x_2,y_2,z_2)$$

$$\rho[k(x_1,y_1,z_1)]=k\rho(x_1,y_1,z_1)$$

ρ保持了$R^3$中线性运算的线性性不变。称ρ是线性的．

所以，$\rho$ 是向量空间 $R^3$ 的一个线性变换。

$$\sigma:V\to V$$

**定义3.6.4** 设$\sigma$是数域$F$上的线性空间$V$的一个变换。如果对任意的 $\alpha,\beta\in V,k\in F$，均有

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\ \sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)\quad (3.6.1)$$

那么就称$\sigma$是$V$的一个线性变换。

结论：$\sigma$是线性变换的充要条件为

$$\sigma(k\alpha+l\beta)=k\sigma(\alpha)+l\sigma(\beta)\qquad(3.6.2)$$

**例3.6.4** 求导变换$D$:

$$D(f(x))=f'(x),f(x)\in R[x]$$

是 $R[x]$的一个线性变换。

**例3.6.5** 变换

$$\sigma(f(x))=\int_a^x f(t)dt,f(x)\in C[a,b]$$

是$C[a,b]$的一个线性变换。

**证明** 设 $f(x),g(x)\in C[a,b],\ k\in R$，则

$$\sigma[f(x)+g(x)]=\int_a^x[f(t)+g(t)]dt$$

$$=\int_a^x f(t)dt+\int_a^x g(t)dt$$

$$=\sigma[f(x)]+\sigma[g(x)]$$

$$\sigma[kf(x)]=\int_a^x kf(t)dt=k\int_a^x f(t)dt=k\sigma[f(x)]$$

故命题得证。

**例3.6.6** 取定 $k\in F$,定义$V$的变换

$$\sigma(\alpha)=k\alpha,\alpha\in V$$

易证 $\sigma$是$V$的一个线性变换，称之为数乘变换。

事实上，

$$\sigma(a\alpha+b\beta)=k(a\alpha+b\beta)=k(a\alpha)+k(b\beta)$$

$$=a(k\alpha)+b(k\beta)=a\sigma(\alpha)+b\sigma(\beta)$$

特别地，当 $k=0$ 时，称此变换为零变换，记为 $0^*$， 即 $0^*(\alpha)=\theta,\alpha\in V$

当$k=1$时，称此变换为恒等变换或单位变换，记为 $\varepsilon$ ,即 $\varepsilon(\alpha)=\alpha,\alpha\in V$

**例3.6.8** 设 $\sigma$是$V$上的线性变换，$\varepsilon$是$V$的恒等变换，则 $\sigma\varepsilon=\varepsilon\sigma=\sigma$ 。

**例3.6.7** 在 $F[x]$中，定义变换

$$\sigma(f(x))=[f(x)]^2,f(x)\in F[x]$$

因 $\sigma(af(x)+bg(x))=[af(x)+bg(x)]^2$

$$=a^2[f(x)]^2+b^2[g(x)]^2+2abf(x)g(x)$$

而 $a\sigma[f(x)]+b\sigma[g(x)]=a[f(x)]^2+b[g(x)]^2$

所以 $\sigma[af(x)+bg(x)]\neq a\sigma[f(x)]+b\sigma[g(x)]$

由此可知，该变换不是线性变换。

**例** 在$R^3$中定义变换

$$\sigma((x_1,x_2,x_3))=(x_1^2,x_2+x_3,0)$$

则 $\sigma$ 不是 $R^3$的一个线性变换.

因为，对

$$\forall\alpha=(a_1,a_2,a_3),\beta=(b_1,b_2,b_3)\in R^3,$$

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma((a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3))$$

$$=((a_1+b_1)^2,a_2+a_3+b_2+b_3,0)$$

$$(\text{当 } a_1b_1\neq 0 \text{ 时})\neq(a_1^2,a_2+a_3,0)+(b_1^2,b_2+b_3,0)$$

$$=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$$

所以，$\sigma$不是线性变换。

**性质3.6.1** 设 $\sigma$ 为V上的线性变换，则

（1） $\sigma(\theta)=\theta,\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$

（2）$\sigma$ 保持线性组合与线性关系式不变

（3）$\sigma$ 把线性相关的向量组变成线性相关的向量组。

**证** $(1)\sigma(\theta)=\sigma(0\alpha)=0\sigma(\alpha)=\theta$

$$\sigma(\alpha)+\sigma(-\alpha)=\sigma[\alpha+(-\alpha)]=\sigma(\theta)=\theta$$

故 $\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$

**注** $\sigma$ 也可能把非零向量变为零向量。

（2）设 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$，则

$$\sigma(\alpha)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_m\sigma(\alpha_m)$$

即线性组合的象等于象的线性组合且组合系数相同

（3）由（1）与（2）可证（3）.

**注** （3）的逆不成立，$\sigma$ 也可能把线性无关的向量组变成线性相关的向量组。

**定义3.6.5** 设 $\sigma$ 是线性空间$V$的一个变换。若存在$V$的另一个变换 $\tau$，使

$$\sigma\tau=\tau\sigma=\varepsilon \qquad \sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=\varepsilon$$

则称 $\sigma$ 是可逆变换，称 $\tau$ 是 $\sigma$ 的逆变换，记为$\tau=\sigma^{-1}$

若 $\sigma(\alpha)=\beta$，则有 $\sigma^{-1}(\beta)=\alpha$. 类似反函数！

**注** 变换 $\sigma$ 可逆当且仅当 $\sigma$ 是双射，并且当 $\sigma$ 可逆时，$\sigma^{-1}$ 唯一。

**定理3.6.2** 可逆线性变换的逆变换也是线性变换。

**证** 设 $\sigma$ 是可逆线性变换，$\sigma^{-1}$是它的逆变换。任取 $\alpha_1,\alpha_2\in V,k\in F$，令

$$\sigma^{-1}(\alpha_1)=\beta_1,\qquad \sigma^{-1}(\alpha_2)=\beta_2$$

则由逆变换的定义可得

$$\sigma(\beta_1)=\alpha_1,\qquad \sigma(\beta_2)=\alpha_2$$

已知$\sigma$ 是线性的，故

$$\sigma(\beta_1+\beta_2)=\alpha_1+\alpha_2$$

由此得

$$\sigma^{-1}(\alpha_1+\alpha_2)=\beta_1+\beta_2=\sigma^{-1}(\alpha_1)+\sigma^{-1}(\alpha_2)$$

同理，由$k\alpha_1=k\sigma(\beta_1)=\sigma(k\beta_1)$，又得

$$\sigma^{-1}(k\alpha_1)=k\beta_1=k\sigma^{-1}(\alpha_1)$$

所以，$\sigma^{-1}$也是线性的。

**注：** 当$\sigma$可逆时，$\sigma$把线性无关向量组变为线性无关向量组.

**小结**

要证一个变换 $\sigma$ 是线性变换，必须证 $\sigma$ 保持加法和数量乘法，即

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\ \sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha).$$

若证一个变换 $\sigma$ 不是线性变换，只须证 $\sigma$ 不保持加法或数量乘法，并且只须举出一个反例即可。

## 三、线性变换的矩阵表示

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $n$ 维线性空间 $V$ 的一个基。若 $\sigma$ 是 $V$ 的一个线性变换，则 $\sigma$ 唯一确定仍在 $V$ 中的基的像

$$\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n).$$

以 $\sigma(\alpha_j)$ 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的坐标为第 $j$ 列构造一个 $n$ 阶方阵 $A$，则 $A$ 由 $\sigma$ 唯一确定。

**定义3.6.6** 设 $\sigma$ 是线性空间 $V_n$ 中的线性变换，在 $V_n$ 中取定一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，如果这个基在变换 $\sigma$ 下的象为

$$\begin{cases}\sigma(\alpha_1)=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\cdots+a_{n1}\alpha_n,\\ \sigma(\alpha_2)=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{n2}\alpha_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma(\alpha_n)=a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\cdots+a_{nn}\alpha_n,\end{cases}$$

记

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

$\sigma(\alpha_1)\ \sigma(\alpha_2)\cdots\ \sigma(\alpha_n)$

$A$ 的第 $j$ 列为 $\sigma(\alpha_j)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标.

上式可形式地表示为

$$\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=[\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)],$$
$$=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]A$$

即 $\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]A$

其中

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

$n$ 阶方阵

那么，$A$ 就称为线性变换 $\sigma$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵。

**例3.6.9** 零变换 $\underline{0}$*在任一组基下的矩阵都是零矩阵，恒等变换 $\underline{I}$*在任一组基下的矩阵都是单位矩阵。

**注** 取定数域 $F$ 上的 $n$ 维线性空间 $V$ 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则 $V$ 的线性变换 $\sigma$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵是数域 $F$ 上的 $n$ 阶方阵且唯一确定。

反之，对数域 $F$ 上的任一 $n$ 阶方阵 $A$，将 $A$ 的每一列作为关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的坐标，则可以得到 $n$ 个向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的像，可唯一确定 $V$ 的一个线性变换 $\sigma$，使其在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵是 $A$。

令 $\sigma(\alpha_j)=\beta_j=a_{1j}\alpha_1+a_{2j}\alpha_2+\cdots+a_{nj}\alpha_n$ 方阵的本质是

$\sigma\leftrightarrow A$（矩阵 $A$ 完全刻画了线性变换 $\sigma$）一个线性变换!

对 $\forall\alpha\in V$，有

$$\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n$$

$$\sigma(\alpha_1)=\beta_1,\sigma(\alpha_2)=\beta_2,\cdots,\sigma(\alpha_n)=\beta_n.$$

$$\sigma(\alpha)=\sigma(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n)$$
$$=a_1\sigma(\alpha_1)+a_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+a_n\sigma(\alpha_n)$$

规定

$$\sigma(\alpha)=a_1\beta_1+a_2\beta_2+\cdots+a_n\beta_n,\ \alpha\in V$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $\alpha$ 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的坐标，则 $\sigma$ 就是所求的线性变换，同时，$\sigma$ 是唯一的。

即，在取定基后，线性变换与其矩阵表示一一对应。

**例** 在3维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 中，构造变换 $\sigma$：

$$\sigma[(x_1,x_2,x_3)]=(x_3,0,x_2-2x_1),\quad (x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$$

（1）证明 $\sigma$ 是线性变换；

（2）求 $\sigma$ 在 $\mathbf{R}^3$ 的自然基下的矩阵。

**解** （1）任取 $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\in\mathrm{R}^3, k\in\mathrm{R}$，

因 $\sigma[(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)]$
$$=\sigma[(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)]$$
$$=(x_3+y_3,0,(x_2+y_2)-2(x_1+y_1))$$
$$=(x_3,0,x_2-2x_1)+(y_3,0,y_2-2y_1)$$
$$=\sigma[(x_1,x_2,x_3)]+\sigma[(y_1,y_2,y_3)]$$

$$\sigma[k(x_1,x_2,x_3)] = \sigma[(kx_1,kx_2,kx_3)]$$
$$= (kx_3,0,kx_2-2(kx_1)) = k(x_3,0,x_2-2x_1)$$
$$= k\sigma[(x_1,x_2,x_3)]$$

所以，$\sigma$ 是线性变换。

（2）取$\mathbf{R}^3$的自然基

$$\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$$
$$\sigma(\varepsilon_1)=\sigma[(1,0,0)]=(0,0,-2)=-2\varepsilon_3$$
$$\sigma(\varepsilon_2)=\sigma[(0,1,0)]=(0,0,1)=\varepsilon_3$$
$$\sigma(\varepsilon_3)=\sigma[(0,0,1)]=(1,0,0)=\varepsilon_1$$

故

$$\sigma[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=\left[\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\sigma(\varepsilon_3)\right]$$
$$=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-2&1&0\end{pmatrix}$$

即，$\sigma$ 在$\mathbf{R}^3$的自然基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-2&1&0\end{pmatrix}$$

例　求$F[x]_n$的求导变换在自然基$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$下的矩阵.

解：求导变换$\underline{D}:\underline{D}(f(x))=f'(x)$是一个线性变换

记自然基为：$f_1=1, f_2=x,\cdots,f_n=x^{n-1}$

$$\underline{D}(f_1)=0$$
$$\underline{D}(f_2)=1=f_1$$
$$\underline{D}(f_3)=2x=2f_2$$
……
$$\underline{D}(f_n)=(n-1)x^{n-2}=(n-1)f_{n-1}$$

则 $$\underline{D}[f_1,f_2,\cdots,f_n]=[f_1,f_2,\cdots,f_n]\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

所以，$\mathbf{D}$在$F[x]_n$的自然基$f_1,f_2,\cdots,f_n$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

例 在矩阵空间$\mathbf{R}^{2\times 2}$上构造线性变换$\sigma$：

$$\sigma(X)=AX,\quad X\in\mathbf{R}^{2\times 2}$$

这里

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$$

求$\sigma$在$\mathbf{R}^{2\times 2}$的自然基下的矩阵。

解 取$\mathbf{R}^{2\times 2}$的自然基

$$I_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},I_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},I_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},I_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

因为

$$\sigma(I_{11})=AI_{11}=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\4&0\end{pmatrix}$$
$$=I_{11}+4I_{21}$$
$$\sigma(I_{12})=AI_{12}=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&4\end{pmatrix}$$
$$=I_{12}+4I_{22}$$

$$\sigma(I_{21}) = AI_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 2I_{11} + 3I_{21}$$

$$\sigma(I_{22}) = AI_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= 2I_{12} + 3I_{22}$$

所以，

$$\sigma[I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}] = [\sigma(I_{11}), \sigma(I_{12}), \sigma(I_{21}), \sigma(I_{22})]$$

$$= [I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

由此得，$\sigma$ 在$\mathbf{R}^{2¡\ 2}$的自然基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**定理3.6.3**　设$\sigma$是$n$维线性空间$V$的线性变换，$\alpha_1, \alpha_2,¡\ ,\alpha_n$是$V$的一组基，$\sigma$在基$\alpha_1, \alpha_2,¡\ , \alpha_n$下的矩阵为$A$。任取$\alpha\in V$，若$\alpha$关于基 $\alpha_1, \alpha_2,¡\ ,\alpha_n$的坐标为

$$(x_1, x_2,¡\ , x_n)^T$$

$\sigma(\alpha)$关于基 $\alpha_1, \alpha_2,¡\ ,\alpha_n$的坐标为

$$(y_1, y_2,¡\ , y_n)^T$$

则

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

方阵的本质是一个线性变换！

证　因　$\sigma[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]A$,

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \sigma(\alpha) = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

而

$$\sigma(\alpha) = \sigma\left([\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \sigma[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= ([\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]A)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]\left(A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right),$$

所以

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

**定理3.6.4**　设线性变换$\sigma$在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$下的矩阵为$A$，则$\sigma$可逆的充要条件是矩阵$A$可逆。当$\sigma$可逆时，它的逆变换$\sigma^{-1}$在基$\alpha_1$，$\alpha_2, \cdots, \alpha_n$下的矩阵是$A^{-1}$.

## 线性变换在不同基下的矩阵的关系：

**定理3.6.5** 在线性空间$V_n$中取定两组基

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n;\quad \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,$$

由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为$P$。设 $V_n$ 中的线性变换 $\sigma$ 在这两个基下的矩阵依次为$A$ 和 $B$，那末

$$B=P^{-1}AP \qquad A\sim B$$

$V_n$中的线性变换$\sigma$在不同基下的矩阵彼此相似.

证明 $\because (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$

$$\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

$$\sigma(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)B$$

于是

$$\begin{aligned}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)B&=\sigma(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\\&=\sigma[(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P]\\&=\sigma\left[(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\right]P\\&=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)AP\\&=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)P^{-1}AP\end{aligned}$$

因为$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$线性无关，所以 $B=P^{-1}AP$。

例 设$V_2$中的线性变换$\sigma$在基$\alpha_1$，$\alpha_2$下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}.$$

注意：基$\alpha_1,\alpha_2$与基$\alpha_2,\alpha_1$是不同的！

求$\sigma$在基$\alpha_2$，$\alpha_1$下的矩阵.

解 $\because [\alpha_2,\alpha_1]=[\alpha_1,\alpha_2]\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2]P$

从而$\sigma$在基$\alpha_2,\alpha_1$下的矩阵为：

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{22}&a_{21}\\a_{12}&a_{11}\end{bmatrix}$$

例 设$V_2$中的线性变换$\sigma$在基$\alpha_1$，$\alpha_2$下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}.\qquad \sigma[\alpha_1,\alpha_2]=[\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2)]=[\alpha_1,\alpha_2]A$$

求$\sigma$在基$\alpha_2$，$\alpha_1$下的矩阵.

解2 由已知条件，有 $\sigma(\alpha_1)=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2$，

$\sigma(\alpha_2)=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2$，

即：$\sigma(\alpha_2)=a_{22}\alpha_2+a_{12}\alpha_1$，$\sigma[\alpha_2,\alpha_1]=[\sigma(\alpha_2),\sigma(\alpha_1)]$

$\sigma(\alpha_1)=a_{21}\alpha_2+a_{11}\alpha_1$，$=[\alpha_2,\alpha_1]B$

从而$\sigma$在基$\alpha_2,\alpha_1$下的矩阵为：

$$B=\begin{bmatrix}a_{22}&a_{21}\\a_{12}&a_{11}\end{bmatrix}$$

例3.6.12 设$R^3$的线性变换$\sigma$把基：

$\alpha_1=(1,0,1),\alpha_2=(0,1,0),\alpha_3=(0,0,1)$

变为基：

$\beta_1=(1,0,2),\beta_2=(-1,2,-1),\beta_3=(1,0,0)$

求$\sigma$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的矩阵.

解：由已知可得：$\sigma[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$ (1)

设从基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为$P$,则有

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]P$$

$$\therefore\ P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\2&-1&0\end{bmatrix}$$

$$=C_1^{-1}C_2,$$

于是 $[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]C_1^{-1}C_2$

代入(1)式，得 $\sigma[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$

$$=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]C_1^{-1}C_2$$

即$\sigma$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为$A=C_1^{-1}C_2$，

故$\sigma$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的矩阵为

$$B=P^{-1}AP=(C_1^{-1}C_2)^{-1}(C_1^{-1}C_2)(C_1^{-1}C_2)$$

$$=(C_2^{-1}C_1)(C_1^{-1}C_2)(C_1^{-1}C_2)=C_1^{-1}C_2$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\2&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

## 小结

给定了实数域$R$上的线性空间$V_n$的一组基后，$V_n$中的线性变换与$R^{n\times n}$中的矩阵形成一一对应.

因此，在线性代数中，可以用矩阵来研究变换，也可以用变换来研究矩阵.

要求

1. 会判断一个变换是否构成线性变换
2. 求线性变换在指定基下的矩阵
3. 知道线性变换在不同基下的矩阵之间的关系

作业　　习题三(P167)：

**51(1)(3)(6)(7)、53、59、61、62**

**(51-66题均可做练习)**

## 四、线性变换的特征值（自看）

设线性变换$\sigma$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵为对角矩阵

$$diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

则　$$\sigma[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

于是　$$\sigma[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=[\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots\lambda_n\alpha_n]$$

由此得　$\sigma(\alpha_i)=\lambda_i\alpha_i$，　$(i=1,2,\cdots,n)$

定义**3.6.7**　设$\sigma$是数域$F$上的线性空间$V$上的一个线性变换，若对$F$中的一个数$\lambda$，存在$V$中一个非零向量$\alpha$，使得

$$\sigma(\alpha)=\lambda\alpha \qquad (3.6.5)$$

则$\lambda$称为$\sigma$的特征值，$\alpha$称为$\sigma$属于$\lambda$的一个特征向量.

由定义知：

若线性变换$\sigma$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵为对角矩阵$diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，则$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$\sigma$的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是分别属于$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$的特征向量.

反之，若 $\sigma$有$n$个线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，设它们对应的特征值分 别为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则$\sigma$在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的矩阵为对角矩阵 $diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

定理**3.6.6**　设$\sigma$是$n$维线性空间$V$的一个线性变换，则$\sigma$的矩阵可以在某一个基下为对角矩阵的充要条件为$\sigma$有$n$个线性无关的特征向量.

线性变换的特征值与特　征向量的计算依赖于矩　阵的特征值与特征向量　.