北京理工大学 2017-2018 学年第一学期

线性代数 A 试题 (B 卷)

座号____________班级_____________学号____________姓名____________

（试卷共 7 页, 八道大题. 解答题必须有解题过程, 试卷后面空白页撕下做稿纸, 试卷不得拆散）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
签名									

一、　填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$. 则有，

$a=$_________, $b=$____________

2. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+tx_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是_____________

3. 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 0，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 的通解为___________.

4. 矩阵乘积 $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}1&2&3\\1&5&4\\1&8&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^6=$_____________________

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 5 阶方阵，且已知存在 5 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

则 A 的所有初等因子为__________________________

二、（10 分）讨论 a,b 取何值时，下列线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + ax_2 + ax_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷解，并在有无穷多解时，用其导出方程组的基础解系表示方程组的通解。

三、（10 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，且有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{I}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 。

四（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随矩阵，试求行列式 $|(\frac{1}{2}\boldsymbol{A})^*+(4\boldsymbol{A})^{-1}|$。

五、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$，

（1） 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，并找出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组；
（2） 将把不属于这个极大无关组的列向量用（1）中的极大无关组表示。

六、（10 分）在 $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}]_4$ 中定义 σ ： $\boldsymbol{\sigma}[f(\boldsymbol{x})]=f'(\boldsymbol{x})$，

（1） 证明 $\boldsymbol{\sigma}$ 为 $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}]_4$ 的一个线性变换；

（2） 求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{x}^3$ 下的矩阵，并判断 $\boldsymbol{\sigma}$ 是否为可逆变换。

七、（15 分）设二次型 $f(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=\boldsymbol{x}_1^2+\boldsymbol{x}_2^2+\boldsymbol{x}_3^2+4\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2+4\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3+4\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3$，

(1) 写出二次型 $f(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 成对角矩阵；

(3) 求 $|\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|$。

八、（15 分）设在 $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 中所有实对称矩阵所组成的集合

$$\boldsymbol{W}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a,b,c\in \boldsymbol{R}\right\}$$

（1） 证明 $\boldsymbol{W}$ 构成 $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 的一个线性子空间；

（2） 证明 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{W}$ 的一组基；

（3） 求从基 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 到另一组基 $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的过渡矩阵；

（4） 求矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ 分别关于两组基 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 和 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3$ 的坐标。