习题1-9

1. (1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\cos x-1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$

(2) $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}+1}{\sqrt{x+a}} = \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{0+1}{\sqrt{2a}} = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 9\left(1+\frac{1}{3^x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 9\left(1+\frac{1}{3^x}\right)^{3^x\cdot\frac{1}{x\cdot 3^x}} = 9e^0 = 9$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3\sin x}{2x}+x\cos\frac{1}{x}\right) = \dfrac{3}{2}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right) \geq \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} = \dfrac{1}{2}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right) \leq \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \dfrac{1}{2}$

则原极限 $=\frac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{x}{3}} - \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

$= 3-1 = 2.$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{\tan x}\ \tan x}{2x} = \dfrac{1}{2}.$

(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\times\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x}$

$= \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos 0}\times\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{-2\sin 2x} = \dfrac{\cos 0}{2\sin\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{2}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}}{(1-2\sin^2 x)^{\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{-1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}}{(1-2\sin^2 x)^{\frac{-1}{2\sin^2 x}\cdot\frac{-2\sin^2 x}{x^2}}} = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-2}} = e^{\frac{3}{2}}$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\cot x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\cot x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\tan x)^{-\cot x(-1)}}{(1+\tan x)^{\cot x}} = \dfrac{e^{-1}}{e} = e^{-2}$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\frac{1}{n}\ln ab}{2}\right)^{\frac{2n}{\ln ab}\cdot\frac{\ln ab}{2}} = e^{\frac{\ln ab}{2}} = \sqrt{ab}.$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{e^{2x}}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{2x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2-1-2x}{x}=-2.$

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}-1}\cdot x\left(\frac{1}{x}+2^{\frac{1}{x}}-1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}e^{(1+x2^{\frac{1}{x}}-x)}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\left(1+\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)}$

$=\cancel{\lim\limits_{x\to\infty}}\, e^{\left(1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}2^{\frac{1}{x}}\ln 2}{-\frac{1}{x^2}}\right)}$

$=e^{1+\ln 2}=2e.$

(14) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sin x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin x-\sin x)=0$

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x\ln abc}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln abc}{3}}=\sqrt[3]{abc}.$

(16) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=1$

(17) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{x}(\sqrt{4x^2+x-1}+x+1)}{-\frac{1}{x}\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=\frac{2-1-0}{1}=1$

(18) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}=\frac{1}{2}.$

(19) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots 2\frac{\sin x}{2^n}\cdot\frac{\cos x}{2^n}}{2\frac{\sin x}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\frac{\sin x}{2^{n-1}}}{2\frac{\sin x}{2^n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{2^{n-1}\sin\frac{x}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x}{\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}}=\frac{\sin x}{x}.$

(20) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{1+2}{n^3}+\cdots+\frac{1+2+\cdots+n}{n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(1+2)+\cdots+\frac{n^2+n}{2}}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)}{2n^3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n^2+n}{2}}{2n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+2n}{6n^3}=\frac{1}{6}$

2. 证明：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使当 $n>N$ 时，有 $|y_n-x_n|<\varepsilon$

又因为 $x_n\le a\le y_n$，所以有 $|x_n-a|\le|y_n-x_n|<\varepsilon$，$|y_n-a|\le|y_n-x_n|<\varepsilon$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-a)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-a)=0$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$

证毕

3. 解：由于 $f(1)f(2)\cdots f(n)=a^1a^2\cdots a^n=a^{\frac{n(n+1)}{2}}$ $(0<a<1)$

$\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{n(n+1)}{2}}=0$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

则原极限等于0

4. 解：因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)-2x^3}{x^2}=1$

由洛比达法则：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P''(x)-12x}{2}=1$

则 $P''(x)=12x+2$

$P'(x)=6x^2+2x+C_1$

$P(x)=2x^3+x^2+C_1x+C_2$

又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{P(x)}{x}=3$，则 $P'(0)=3$，$C_1=3$ $P(0)=0$，$C_2=0$

则 $P(x)=2x^3+x^2+3x$.

5. 解：(1) 因 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，且 $x\to2$ 时，分母为无穷小，则 $x\to2$ 时，分子也为无穷小.

即 $\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$ 得 $b=-2a-4$. 又由：

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to2}\frac{x+2+a}{x+1}=\frac{4+a}{3}=2$$

得 $a=2$，则 $b=-8$.

(2) 因为 $\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\left[1+\frac{3a}{x-a}\right]^x=\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}\cdot\frac{3ax}{x-a}}$

~~两边~~取极限得 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=e^{3a}=8$

$\Rightarrow a=\ln 2$

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{n^b\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^b\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{n^b\left(-\left(-\frac{b}{n}\right)\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b}n^{a-b+1}=1992$

所以 $\frac{1}{b}=\cancel{1009}\,1992$，$a-b+1=0$

$\Rightarrow a=\dfrac{-1991}{1992}$，$b=\dfrac{1}{1992}$

(4) 因为 $x\to1$ 时，分子为无穷小，则 $x\to1$ 时，分母也为无穷小，即：

$\lim\limits_{x\to1}x^2+ax+b=1+a+b=0$ 得 $a=-b-1$，又由

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^2(x-1)}{x^2+ax+b}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2+(-b-1)x+b}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x-b}=1$

则 $b=1$，$a=-2$

(5). 因为 $x\to1$ 时，~~分母无穷小~~ 极值为0. 则 $x\to1$ 时，分子也为无穷小，即：

$\lim\limits_{x\to1}a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}=0$ 得 $c=2$，又

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+2-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2a(x-1)+b-\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{x-1}=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}2a(x-1)+b-\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}=b-\frac{1}{2}=0$ 得 $b=\frac{1}{2}$. 又

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2ax-2a+\frac{1}{2}-\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(2a-\dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}(x^2+3)}\right)=2a-\frac{3}{8}=0$

得 $a=\frac{3}{16}$.

则 $a=\frac{3}{16}$. $b=\frac{1}{2}$. $c=2$

6. 解：因分子为3次项，分母为1次多项式，则 $L\neq0$.

因 $x\to-1$ 时，分母为无穷小，则 $x\to1$ 时，分子也为无穷小.

$\lim\limits_{x\to-1}(x^3-ax^2-x+4)=-1-a+5=0$ 得 $a=4$

则 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-4x^2-x+4}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2-8x-1}{1}=10$

即 $L=10$

7. 解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x^5+7x^4+2)^c-x\right]$ 极限存在且为0，则：

$\lim\limits_{x\to\infty}(x^5+7x^4+2)^c=\lim\limits_{x\to\infty}(x+m)^{5c}=\lim\limits_{x\to\infty}(x+m)$ (m为常数)

此时 $5c=1$ 得 $c=\frac{1}{5}$. 则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x^5+7x^4+2)^c-x\right]=m$.

因 $(x+m)^5=x^5+5mx^4+\cdots+m^5$.

当 $x\to\infty$ 时，上式只取前两项，后面忽略

则 $5m=7$，得 $m=\frac{7}{5}$

8. 解：设 $f(x) \sim cx^k$. 由已知，有：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{\sin x}}-1}{x^2}=\frac{\frac{f(x)}{\sin x}}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{f(x)}{\sin x}}+1\right)}=\frac{f(x)}{x^3\left(\sqrt{1+\frac{f(x)}{\sin x}}+1\right)}=\frac{cx^{k-3}}{\sqrt{1+\frac{f(x)}{\sin x}}+1}=A\neq 0$$

~~由~~ 因 $x\to 0$ 时 分母绝逼不为0，则 $x^{k-3}=1$ 则 $k-3=0$ 则 $k=3$.

即 $f(x)=cx^3$

则原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{c}{\sqrt{1+\frac{cx^3}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{c}{\sqrt{1+cx^2}+1}=\frac{c}{2}=A$.

则 $c=2A$.

9. 解：因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

又 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}3x=3$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(e^{2ax}-e^{ax}+1)=e^{2a}-e^a+1$

则 $e^{2a}-e^a+1=3$

得 $a=\ln 2$

10. 解：(1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+(a-1)x^n-1}{x^{2n}-ax^n-1}$

当 $|x|<1$ 时. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{-1}=1$

当 $|x|=1$ 时. $f(x)=\frac{1+(a-1)-1}{1-a-1}=\frac{1-a}{a}$.

当 $|x|>1$ 时. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x+(a-1)\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x^{2n}}}{1-a\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x^{2n}}}=x$

综上：$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ \frac{1-a}{a} & |x|=1\\ x & |x|>1\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1^+}x=1=\frac{1-a}{a}=\lim\limits_{x\to 1^-}=1$

则 $a=\frac{1}{2}$.

11. 解：因 $x>0$ 和 $x<0$ 时 $f(x)$ 表达式为初等函数且连续.所以只考虑 $x=0$ 处.

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}b\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}b$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^x(\sin x+\cos x)=1$

因 $f(x)$ 处处连续. 则 $-\frac{\pi}{2}b=a=1$

则 $a=1$　　$b=\frac{-2}{\pi}$.

12. 证：因为 $g(x)$ 在 $x=0$ 连续，则 $\forall \varepsilon>0$. $\exists \delta>0$. 当 $|x-0|<\delta$ 时，

$|g(x)-g(0)|<\varepsilon$.

因 $g(0)=0$.，$|f(x)|\leq|g(x)|$ 则 $f(x)=0$

则 $|f(x)-f(0)|=|f(x)|\leq|g(x)|=|g(x)-g(0)|<\varepsilon$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

13. 证：对 $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$. 令 $\Delta x=x-x_0$，有.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0)\cdot f(\Delta x)]=f(x_0)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)$.

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=f(0)$

因此. $\lim\limits_{\Delta x\to x_0}f(x)=f(x_0)f(0)=f(x_0+0)=f(x_0)$

故 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

由 x_0 的任意性，得 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续.

14. 证：令 $f(x)=\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}$

因 $f(\lambda_1^+)=+\infty>0$ $f(\lambda_2^-)=-\infty<0$ $f(\lambda_2^+)=+\infty>0$. $f(\lambda_3^-)=-\infty<0$

则由零值定理：$\exists\ \xi_1\in(\lambda_1,\lambda_2)$，$\xi_2\in(\lambda_2,\lambda_3)$，使.

$f(\xi_1)=0$ $f(\xi_2)=0$

又 $f'(x)=\frac{-a_1}{(x-\lambda_1)^2}-\frac{a_2}{(x-\lambda_2)^2}-\frac{a_3}{(x-\lambda_3)^2}$

则 $f'(x)$ 在 (λ_1,λ_2) 中小于0 在 (λ_2,λ_3) 中小于0

即 $f(x)$ 在 (λ_1,λ_2) 中单减，在 (λ_2,λ_3) 中单减

则在 (λ_1,λ_2)，(λ_2,λ_3) 中根分别唯一.

证毕

15. 证：设时间为 t. 地点为 x（x 为三维向量）. 温度为 T，设 $-x$ 为 x 的对称点，

那么 $T=f(x,t)$. 对 $\forall t$，$f(x,t)$ 是关于 x 的连续函数.

任取 x_0，有 $y=f(x_0,t)-f(-x_0,t)$.

若 $y=0$. 那么 x_0 即为所求.

若 $y\neq0$. 那么有 $z=f(-x_0,t)-f(x_0,t)=-y$，由于 f 是连续函数，

所以 $F(x)=f(x,t)-f(-x,t)$ 是连续函数，又 F 可以取大于0和小于0的值，

所以存在一点 x_1，使 $F(x_1)=0$，即两对称点温度相等.

16：证：设任意点原位置为x，时间为t，那道时间t变化后位置 $f(x,t)$.

显然 $f(x,t)$ 是连续的函数.

则 $F(x)=f(x,0)-f(x,t)$ 为t时间后x位置改变.

已知 $f(a,0)-f(a,t)=F(a)>0$

$f(b,0)-f(b,t)=F(b)<0$

由零值定理，$[a,b]$间必有一点ξ，使$F(\xi)=0$.

即 $f(\xi,0)-f(\xi,t)=0$

即ξ保持位置不变.

17、证明：(1) 因为 $a_n>0$，n为奇数，则 $f(0)=a_n>0$.

又 $\cancel{f(-\infty)}$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty<0$

则由零值定理，$f(x)=0$至少有一负根.

(2) 因 $a_n<0$. 则 $f(0)=a_n<0$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty>0$

则由零值定理，$f(x)=0$至少有一正根.

(3) 因 $a_n<0$. n为偶数.

则 $f(0)=a_n<0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty>0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty>0$

则 $f(x)=0$ 至少有一正根和一负根