2018-2019 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、选择题(12 分)

1.【正解】$1-p$

【学解】$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=P(AB)$，因此$P(A)+$

$P(B)=1$，则有$P(B)=1-P(A)=1-p$.

【考点延伸】《概率论宝典》第一章 随机事件与概率 1.2、事件的关系与运算 1.4、概率的基本公式

2.【正解】$\frac{2}{3}$

【学解】设此射手每次射击命中的概率为p，而至少命中一次的对立事件为射击四次全都没有命中，由题意可知一射手对同一目标独立地射击四次全都没有命中的概率为$1-\frac{80}{81}=\frac{1}{81}$，则$(1-p)^4=$

$\frac{1}{81}\Rightarrow p=\frac{2}{3}$.

【考点延伸】《概率论宝典》第一章 随机事件与概率 1.4、概率的基本公式

3.【正解】$\ln 2$

【学解】依题意概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\0, & x\leq 0\end{cases}$，显然$a>0$，因此$P(X>a)=P(X<a)$，

得$\int_a^{+\infty}e^{-x}dx=\int_0^a e^{-x}dx\Rightarrow e^{-a}=1-e^{-a}\Rightarrow a=\ln 2$.

【考点延伸】《概率论宝典》第二章 一维随机变量及分布 2.3、连续型随机变量及分布

4.【正解】3

【学解】$X\sim P(\lambda)\Rightarrow P(X=0)=\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}=e^{-\lambda}=e^{-3}\Rightarrow\lambda=3$

【考点延伸】《概率论宝典》第二章 一维随机变量及分布 2.2、离散型随机变量及分布

5.【正解】0.9772

【学解】由于X，Y相互独立，则有$X-Y\sim N(-1,4)$，则

$$P(X-Y\leqslant 3)=\Phi\left(\frac{3-(-1)}{2}\right)=\Phi(2)$$

利用附表数据得到$\Phi(2)=0.9772$.

【考点延伸】《概率论宝典》第三章 二维随机变量及分布 3.6、二维随机变量函数的分布

6.【正解】$1-e^{-3}$；$(1-e^{-1})(1-e^{-2})$

【学解】$P(\max(X,Y)\neq 0)=1-P(\max(X,Y)=0)$

而 $P(X=0)=\dfrac{1^0e^{-1}}{0!}=e^{-1}$，$P(Y=0)=\dfrac{2^0e^{-2}}{0!}=e^{-2}$，$P(\max(X,Y)=0)=P\{X=0\}P\{Y=0\}=$

$\dfrac{1^0e^{-1}}{0!}\cdot\dfrac{2^0e^{-2}}{0!}=e^{-3}$，则$P(\max(X,Y)\neq 0)=1-e^{-3}$;

$P(\min(X,Y)\neq 0)=[1-P\{X=0\}][1-P\{Y=0\}]=(1-e^{-1})(1-e^{-2})$.

【考点延伸】《概率论宝典》第三章 二维随机变量及分布 3.6、二维随机变量函数的分布

7.【正解】4

【学解】令$Z=X-Y$，则$Z\sim N(0,4)$，$DZ=EZ^2-(EZ)^2$，而$DZ=4$，$EZ=0$，则

$$E[(X-Y)^2]=DZ=4.$$

【考点延伸】《概率论宝典》第四章 随机变量的数字特征 4.1、数学期望

8.【正解】0.0228

【学解】设第 i 次掷出的点数为X_i，则其分布列为

X_i	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

则有$EX_i=(1+2+3+4+5+6)\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{2}$，$DX_i=\dfrac{1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6}-\dfrac{49}{4}=\dfrac{35}{12}$，

$$P\left\{\sum_{i=1}^{420}X_i>1540\right\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{420}X_i-420\times\frac{7}{2}}{\sqrt{420\cdot\frac{35}{12}}}>\frac{1540-420\times\frac{7}{2}}{\sqrt{420\cdot\frac{35}{12}}}\right\}=1-P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{420}X_i-420\times\frac{7}{2}}{\sqrt{420\cdot\frac{35}{12}}}\right.$$

$$\approx 1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228.$$

【考点延伸】《概率论宝典》第五章 大数定律与中心极限定理 5.3、中心极限定理

9.【正解】$\left(S\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},S\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$

【学解】枢轴变量$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，则$P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\chi^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$，

$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right\}=1-\alpha$，则$\sigma$的置信区间为$\left(S\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},S\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-\right.$

【考点延伸】《概率论宝典》第八章 区间估计 8.2、置信区间

10.【正解】0.025；0.1492

【学解】在H_0成立下，$X\sim N(0,1)$，则犯第一类错误的概率为

$$\alpha=P\left\{|\bar{X}|\geqslant\frac{1.96}{3}|H_0\right\}=P\left\{\frac{|\bar{X}|-0}{1}\sqrt{9}\geqslant\frac{\frac{1.96}{3}-0}{1}\sqrt{9}\right\}=1-\Phi(1.96)=1-0.975=0.025$$

在H_0不成立下，$X\sim N(1,1)$，则犯第二类错误的概率为

$$\beta=P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right|<U_{\alpha/2}|H_1\right\}=\Phi(-1.04)-\Phi(-4.96)=\Phi(4.96)-\Phi(1.04)=1-0.8508=0$$

【考点延伸】《概率论宝典》第九章 假设检验 9.1、基本概念

二、(10分)【学解】1.取第i次后，口袋中的黑球个数为$i+1$，袋中球的总数为$i+2$，设事件

"取到第n次，试验没有结束"，则有

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

2.设事件$B=$"取到第n次，试验恰好结束"，即前$n-1$次取到黑球，第n次取到白球，则

$$P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

【考点延伸】《概率论宝典》第一章 随机事件与概率 1.4、概率的基本公式

三、(10 分)【学解】1. $P\{X=0\}=C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，$P\{X=1\}=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$，

$P\{X=2\}=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$，$P\{X=3\}=C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$，因此

X	0	1	2	3
$Y=(X-1)^2$	1	0	1	4
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

则 Y 的分布律为

Y	0	1	4
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

2.(1)显然当 $x\leqslant 0$ 时，有 $F(x)=0$，当 $x>0$ 有，$F(x)=\int_0^x te^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}d\left(-\frac{t^2}{2}\right)=1-e^{-\frac{x^2}{2}}$，

则 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

(2) $P\{X>2\}=1-P\{X\leqslant 2\}=1-\int_{-\infty}^{2}f(x)dx=1-\int_0^2 xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-\left[1-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]\Big|_0^2=e^{-2}$.

【考点延伸】《概率论宝典》第二章 一维随机变量及分布 2.2、离散型随机变量及分布 2.3、连续型随机变量及分布

四、(16 分)【学解】1.(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 3xdy=3x^2, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$；

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 3xdx=\frac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1\\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}.$$

(2) $F(z)=P\{Z\leq z\}=P\{X+Y\leq z\}=\iint\limits_{x+y\leq z} f(x,y)dxdy$,

①当 $z\leq 0$ 时，$F(z)=0$；

②当 $0<z<1$ 时，有 $F(z)=\iint\limits_{x+y\leq z} f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{z}{2}}dy\int_y^{z-y}3xdx=\frac{3}{8}z^3$；

③当 $1\leq z<2$ 时，有 $F(z)=\iint\limits_{x+y\leq z} f(x,y)dxdy=1-\int_{\frac{z}{2}}^1 dx\int_{z-x}^{x}3xdy=-\frac{z^3}{8}+\frac{3}{2}z-1$；

④当 $z\geq 2$ 时，有 $F(z)=1$；因此 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{9}{8}z^2 & ,0<z<1\\ -\frac{3}{8}z^2+\frac{3}{2}, & 1\leq z<2\\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}$.

2.(1) $P\{X=0, Z=0\}=P\{X=0, Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}=p(1-p)$；

$P\{X=0, Z=1\}=P\{X=0, Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=(1-p)^2$；

$P\{X=1, Z=0\}=P\{X=1, Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\}=p(1-p)$；

$P\{X=1, Z=1\}=P\{X=1, Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=p^2$；则 (X, Z) 联合分布律为

X \ Z	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$p(1-p)$	$(1-p)^2$	$1-p$
1	$p(1-p)$	p^2	p
$p_{\cdot j}$	$2p-2p^2$	$2p^2-2p+1$	1

(2)先求 Z 的分布律：$P\{Z=1\}=2p^2-2p+1$；$P\{Z=0\}=2p-2p^2$，若 X 和 Z 相互独立，则有

$P\{X=0, Z=0\}=P\{X=0\}P\{Z=0\}$，则有 $p(1-p)=(1-p)(2p-2p^2) \Rightarrow p=\frac{1}{2}$，经检验，

当 $p=\frac{1}{2}$ 时，X 和 Z 相互独立.

【考点延伸】《概率论宝典》第三章 二维随机变量及分布 3.1、二维随机变量的联合分布与边缘分布 3.2、二维离散型随机变量及分布 3.3、二维连续型随机变量及分布

五、(16 分)【学解】1.先求 Y 的概率密度：由于 X 服从均匀分布 $U(0,2)$，则 $Y=|X-1|\sim U(0,1)$；

(1) $EY=\frac{1}{2}$，$DY=\frac{1}{12}$；(2) $E(XY)=\int_0^2 x|x-1|\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 x(1-x)dx+\int_1^2 x(x-1)dx\right)=\frac{1}{2}$；

(3)有 $EX=1$，$DX=\frac{1}{3}$，则 $Cov(X, Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$，

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=0$.

2.设进货量为 $n(10\leqslant n\leqslant 30)$，则商店所获得的的利润为

$$g(X)=\begin{cases}500X-100(n-X), & X\leqslant n\\ 500n+300(X-n), & X>n\end{cases}$$

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx=\frac{1}{20}\int_{10}^{30} g(x)dx$$

$$=\frac{1}{20}\left[\int_{10}^{n}(600x-100n)dx+\int_{n}^{30}(300x+200n)dx\right]=\frac{-150n^2+7000n+105000}{20}$$，当 $n=\frac{70}{3}$ 时，

取得最大值，因此每周的进货量为 $\frac{70}{3}$ 千克.

【考点延伸】《概率论宝典》第四章 随机变量的数字特征 4.1、数学期望 4.2、方差 4.4、协方差与相关系数

六、(8 分)【学解】显然 $\frac{X_{n+1}-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，又有 $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=(n-1)S^2$，则

$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，因此 $\frac{(X_{n+1}-\mu)^2}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$ 服从自由度为 n

的 χ^2 分布.

【考点延伸】《概率论宝典》第六章 样本及抽样分布 【重要题型】 题型 6：抽样分布统计量的判断

七、(12 分)【学解】(1)显然 $EX=\frac{3\theta}{2}$，按照矩估计法有 $\frac{3\theta}{2}=\bar{X}$，则 $\hat{\theta}=\frac{2}{3}\bar{X}$；

(2)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本观测值，则有 $f(x_i,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & \theta\leq x_i\leq 2\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$，$i=1,2,\cdots,n$

则似然函数 $L(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n}, & \theta\leq x_1,x_2,\cdots,x_n\leq 2\theta\\ 0, & 其它\end{cases}$，当 $\theta\leq x_1,x_2,\cdots,x_n\leq 2\theta$ 时，

$\ln L(\theta)=-n\ln\theta$，而 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}<0$，因此 $L(\theta)$ 随 θ 的增大而减小，所以 θ 的最大似然估计

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2}\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}.$$

【考点延伸】《概率论宝典》第七章 点估计 7.1、点估计

八、(14 分)【学解】1.设 $\chi^2(n)$ 服从自由度为 n 的卡方分布，若存在数 c 满足

$$P\{\chi^2(n)\geq c\}=\alpha.$$

则称 c 为 $\chi^2(n)$ 的上 α 分位点，并记 c 为 $\chi^2_\alpha(n)$

2.设 H_0：$\sigma^2\leq\sigma_0^2$，H_1：：$\sigma^2>\sigma_0^2$，选取统计量 $\chi^2=(n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}$，若 H_0 成立，$\chi^2\sim\chi^2(n-1)$，由于 $\alpha=0.05$，$\chi^2_\alpha(n-1)=\chi^2_{0.05}(24)=36.415$，则拒绝区域为 $\chi^2\geq\chi^2_{0.05}(24)=36.415$，又有

$\chi^2=(n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}=24\times\frac{0.025}{0.016}=37.5>36.415$，在拒绝域中，即拒绝 H_0，接受 H_1，即认为这批零件不合格.

【考点延伸】《概率论宝典》第九章 假设检验 【重要题型】 题型 3：卡方检验