线性代数A期末试题样题参考答案

得分	

一、填空题（每小题4分，共20分）

1、 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix}0&0&2&-3\\0&0&-1&2\\1&-1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}}$；

2、 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&a&0\\0&0&a^2\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 a 满足条件 $\underline{\quad a>1\quad}$；

3、 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 均为 4 维列向量，已知 4 阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，又 $|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，则 4 阶行列式 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,2\beta_1+\beta_2|=n-2m$；

4、 在 $R[x]_3$ 中定义线性变换 σ： $\sigma[f(x)]=f'(x)$，则 σ 在基 $1,1+x,x^2$ 下的矩阵为

$$\underline{\begin{pmatrix}0&1&-2\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}};$$

5、 已知 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{12}\\a_{31}&a_{33}&a_{32}\\a_{21}&a_{23}&a_{22}\end{pmatrix}$, 若 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$, 则 $B^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}1&3&2\\0&6&0\\0&5&4\end{pmatrix}}$。

得分	

二（10分）、讨论 a,b 取何值时，下列线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2 &=1\\x_1-x_3&=1\\x_1+ax_2+x_3=b\end{cases}$

(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷解，并在有无穷多解时，用其导出方程组的基础解系表示方程组的通解。

解 将方程组的增广矩阵化为阶梯形：

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\1&0&-1&1\\1&a&1&b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&2-a&b-1\end{array}\right)\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

（1） 当 $a\neq 2$ 时，原方程组有唯一解。

（2） 当$a=2$，且$b\neq 1$时原方程组无解。

（3） 当$a=2,b=1$时，原方程组有无穷多解。………………(6 分)

方程组增广矩阵化为

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&0&1\\1&0&-1&1\\1&a&1&b\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&0&1\\1&0&-1&1\\1&2&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

该矩阵所对应的方程组为

$$\begin{cases}x_1 \quad\quad -x_3=1\\ 0 \quad +x_2+x_3=0\end{cases}$$

解得特解为$\gamma_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,导出方程组的基础解系$\xi=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$。

所以原方程的通解为是 $\gamma_0+k\xi$（k为任意常数）……………

得分	

三 （10 分）、设矩阵$A=diag(1,2,-1)$，且矩阵X满足$XA^*=3X+A^{-1}$。求矩阵X。

解: 由已知可得$|A|=-2$ …………

方程两边同时右乘A可得：$X|A|I=3XA+I$，

整理得： $X(|A|I-3A)=I$， …………

从而$X=(-2I-3A)^{-1}=\left(\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&6&0\\0&0&-3\end{pmatrix}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-8&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{-5}&0&0\\0&\frac{1}{-8}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。

得分	

四（10 分）、设 $\alpha_1=(2,1,3,1)^T,\alpha_2=(-1,1,-3,1)^T$, $\beta_1=(4,5,3,-1)^T$, $\beta_2=(1,5,-3,1)^T$。令 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$, $V_2=L(\beta_1,\beta_2)$, 求向量空间 V_1+V_2 的一组基, 并分别求出 β_1,β_2 在这组基下的坐标。

解：因为 $V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$，且由行变换得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\quad or \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

从而，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$（或 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_2$）为 V_1+V_2 的一组基。且有 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 在这组基下坐标分别为

$$\beta_1=(0,0,1)^T,\beta_2=(0,\frac{5}{3},\frac{2}{3})^T \text{（或者 } \beta_1=(0,-\frac{5}{2},\frac{3}{2})^T,\beta_2=(0,0,1)^T \text{）。}$$

得分	

五（10 分）、线性空间 $R^{2\times 2}$ 中，由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，若 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$。

试求（1）基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$；（2）矩阵 $\begin{pmatrix}0&1\\2&-3\end{pmatrix}$ 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标。

解：（1）由已知可得 $$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$\beta_1=1\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3+0\alpha_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，同理可得 $\beta_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$；

（2）由于 $\begin{pmatrix}0&1\\2&-3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-3\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}0&1\\2&-3\end{pmatrix}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的

坐标为 $\begin{pmatrix}0&1&2&-3\end{pmatrix}^T$，从而在 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标为

$$A^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&1&-1&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-5\\3\end{pmatrix}。$$

得分	

六（10 分）、设 A 为一个方阵，若 α 是齐次线性方程组 $A^m X=0$ 的解，但不是齐次线性方程组 $A^{m-1}X=0$ 解，证明向量组 $\alpha,A\alpha,\ldots A^{m-1}\alpha$ 线性无关。

证明：设 $$k_1\alpha+k_2A\alpha+\cdots+k_mA^{m-1}\alpha=0 \qquad (1)$$

（1）式两边同时左乘 A^{m-1} 可知，$k_1A^{m-1}\alpha+k_2A^m\alpha+\cdots+k_mA^{2m-2}\alpha=k_1A^{m-1}\alpha=0$

由已知可得 $A^{m-1}\alpha\neq 0$，故有 $k_1=0$；

（1）式两边同时左乘 A^{m-2} 可知，$0A^{m-2}\alpha+k_2A^{m-1}\alpha+\cdots+k_mA^{2m-3}\alpha=k_2A^{m-1}\alpha=0$

由已知可得 $A^{m-1}\alpha\neq 0$，故有 $k_2=0$；

依此类推，（1）式两边同时左乘 A^{m-i}，可得 $k_i=0$，其中 $i=1,2,\ldots m$。故向量组 $\alpha,A\alpha,\ldots A^{m-1}\alpha$ 线性无关。…………………………

得分	

七（15 分）、已知椭圆曲线方程 $f(x,y)=6x^2-6xy+6y^2-12x+9y+1=0$.

(1) 求椭圆方程中二次型部分 $f_1(x,y)=6x^2-6xy+6y^2$ 的矩阵 A；

(2) 将二次型 $f_1(x,y)$ 化为标准形，并写出所用的线性替换；

(3) 将椭圆曲线 $f(x,y)=0$ 化为 $a(X-x_0)^2+b(Y-y_0)^2=c$ 形式的标准形，并求出该椭圆的长轴与短轴。

解: (1) $f_1(x,y)=6x^2-6xy+6y^2=(x,y)\begin{pmatrix}6&-3\\-3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}6&-3\\-3&6\end{pmatrix}$; ………………

(2)**<u>方法一</u>**: 正交变换法: $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6&3\\3&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda-9)$，$A$ 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=9$.

$\lambda_1=3$ 时，解 $\begin{pmatrix}-3&3\\3&-3\end{pmatrix}X=O$ 得属于 $\lambda_1=3$ 的特征向量为 $\alpha_1=(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})^T$（单位化后所得）。

$\lambda_1=9$ 时，解 $\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}X=O$ 得属于 $\lambda_1=3$ 的特征向量 $\alpha_1=(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})^T$ (or $(\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2})^T$)。做正交变换（正交替换）

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\quad\left(or\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)$$，则有 $f_1=3X^2+9Y^2$。

<u>方法二：</u>配方法可得 $f_1(x,y)=6x^2-6xy+6y^2=6(x-\frac{1}{2}y)^2+\frac{9}{2}y^2$，做线性替换

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} \text{得 } f_1=6X^2+\frac{9}{2}Y^2$$

(3)利用正交变换（正交替换）法，可得

$$f=3X^2+9Y^2-12(\frac{\sqrt2}{2}X-\frac{\sqrt2}{2}Y)+9(\frac{\sqrt2}{2}X+\frac{\sqrt2}{2}Y)+1=0$$

$$(or\ f=3X^2+9Y^2-12(\frac{\sqrt2}{2}X+\frac{\sqrt2}{2}Y)+9(\frac{\sqrt2}{2}X-\frac{\sqrt2}{2}Y)+1=0)$$

化简 $3(X-\frac{\sqrt2}{4})^2+9(Y\pm\frac{7\sqrt2}{12})^2-\frac{11}{2}=0$

即：
$$\frac{(X-\frac{\sqrt2}{4})^2}{\frac{11}{6}}+\frac{(Y+\frac{7\sqrt2}{12})^2}{\frac{11}{18}}=1\quad\left(or\quad\frac{(X-\frac{\sqrt2}{4})^2}{\frac{11}{6}}+\frac{(Y-\frac{7\sqrt2}{12})^2}{\frac{11}{18}}=1\right)$$

该椭圆长轴为 $\sqrt{\frac{11}{6}}$ ，短轴为 $\sqrt{\frac{11}{18}}$。…

得分	

八（15分）、设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 的矩阵 A 满足 $A^2-2A=0$, 且 $\alpha_1=(0,1,1)^T$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系。

（1） 求 A 的所有特征值；

（2） 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的表达式；

（3） 若二次型 $X^T(A+kI)X$ 的规范型是 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$，求 k 的取值范围。

解：（1）设 A 的一个特征值为 λ， 则由已知可得：

$$\lambda^2-2\lambda=0\text{，}\qquad \text{故}\lambda\in\{0,2\}\ \ldots\ldots$$

由于 α_1 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，故 $r(A)=2$ 。且 $\alpha_1=(0,1,1)^T$ 为 A 的关于 $\lambda=0$ 的特征向量。又 A 为对称矩阵可知， A 的特征值为

$$\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2\ldots\ldots$$

（2）设 (x_1,x_2,x_3) 为属于 $\lambda=2$ 的一个特征向量，则

$$0x_1+x_2+x_3=0$$

从而解得 $\alpha_2=(1,0,0)^T,\alpha_3=(0,-1,1)^T$ 为属于 $\lambda=2$ 的两个线性无关的特征向量。

从而 $$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-2\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-2\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_2x_3\ \ldots$

（3）因为 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$，故 $A+kI$ 的特征值为

$$\mu_1=k,\mu_2=\mu_3=k+2$$

由二次型 $x^T(A+kI)x$ 的规范型是 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ 可知 $k<0,k+2>0$，从而 $-2<k<0$