第二章

习题2-1

1\. (1) $\bar{w} = \dfrac{3(2+\Delta t)^2 - 3\times 2^2}{\Delta t} = 12+3\Delta t$

(2) $w(2) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{3(t+\Delta t)^2-3t^2}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{3(2+\Delta t)^2-3\times 4}{\Delta t} = 12$.

(3) $w(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{3(t+\Delta t)^2-3t^2}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{3\Delta t^2+6t\Delta t}{\Delta t} = 6t$.

2\. 解：设AM段质量为m，AM长度为x，

则$m=kx^2$，又$x=2cm$时，$m=8g$.

则$k=2$，则$m=2x^2$

(1) $\rho_1 = \dfrac{8g}{2cm} = 4g/cm$

(2) $\rho_2 = \dfrac{m}{x} = kx$，当$x=20$，则$\rho_2 = 40g/cm$.

(3) $\rho_M = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2(2+\Delta x)^2-2\times 2^2}{\Delta x} = 8g/cm$.

(4) $\rho = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2(x+\Delta x)^2-2x^2}{\Delta x} = 4x\ g/cm$.

3\. (1) 原式$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}(-1)\times\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x} = -f'(x_0)$

(2) 原式$= \lim\limits_{n\to\infty}3\times\dfrac{f(x_0+\frac{3}{n})-f(x_0)}{\frac{3}{n}} = 3f'(x_0)$

(3) 原式$= \lim\limits_{h\to 0}2\times\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = 2f'(x_0)$

4\. 解：由洛比达法则：（可用定义证，参考第7题答案）

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{1} = f'(0)$

5\. 解：$f'(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x} = 0$

6\. 解：(1) $f'_-(0) = (x^2)'|_{x=0^-} = 0$　$f'_+(0) = (x)'|_{x=0^+} = 1$，$f'(0)$不存在.

(2) $f'_-(0) = x'|_{x=0^-} = 1$　$f'_+(0) = (\ln(1+x))'|_{x=0^+} = 1$，$f'(0)=1$

(3) $f'_-(0) = (x^3)'|_{x=0^-} = 0$　$f'_+(0) = (\sin x)'|_{x=0^+} = 1$. $f'(0)$不存在.

7、证：原极限 $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2f(a)-a^2f(a)+a^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\left[(x+a)f(a)-\frac{a^2(f(x)-f(a))}{x-a}\right]$$

因为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，即 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

则上式 $=2af(a)-a^2f'(a)$

证毕

8. 解：对于 $f(x)$. 考虑：

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\varphi(x)-0}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$，且左右极限相等.

则 $f(x)$ ~~可导~~ 在 $x=a$ 处可导

对于 $g(x)$. 考虑：

$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{(a-x)\varphi(x)-0}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}-\varphi(x)=-\varphi(a)$

同理：$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}=\varphi(a)$

要使其在 $x=a$ 处可导. 则左右极限相等，即 $-\varphi(a)=\varphi(a)$，则 $\varphi(a)=0$

即当 $\varphi(a)=0$ 时，$g(x)$ 在 $x=a$ 处可导，否则，不可导

9. 解：(1) ~~lim~~ 设 $f(x)$ 在 $x_0=3$ 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处一定连续，因此.

$f'_-(3)=f'_+(3)$，~~即~~ $f(3-0)=f(3+0)$，

$f(3-0)=\lim\limits_{x\to 3^-}x^2=9\qquad f(3+0)=\lim\limits_{x\to 3^+}(ax+b)=3a+b$.

则 $3a+b=9$.

又 $f'_-(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$.

$f'_+(3)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{ax+b-9}{x-3}=a$.

则 $a=6$.

$\Rightarrow b=-9$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $x_0=1$ 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续，因此．

$f_-'(1)=f_+'(1)$． $f(1-0)=f(1+0)$

$$f_-'(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{2}{1+x^2}-1}{x-1}=-1$$

$$f_+'(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=a$$

$\Rightarrow a=-1$

$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2}{1+x^2}=1$ $\quad f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$

$\Rightarrow a+b=1$

$\Rightarrow b=2$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续，因此．

$f_-'(0)=f_+'(0)$ $\quad f(0-0)=f(0+0)$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1-0}{x-0}=1$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax+b-0}{x-0}=a$$

则 $a=1$

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^x-1)=0$， $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax+b)=b$

则 $b=0$.

10．解：令 $(x^2)'=(x^3)'$，得 $x=0$，$x=\frac{2}{3}$

11．解：$y'=e^x$， $y'|_{x=0}=e^0=1$

所求切线方程为 $y-1=1(x-0)$

即 $y=x+1$

12．解：$\begin{cases} y=\sin x \\ y=\cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=\frac{\pi}{4}+2k\pi, & k=0,\pm1,\pm2\cdots \\ y_0=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$y=\sin x$ 在 (x_0,y_0) 处斜率为 $\cos x|_{x=x_0}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y=\cos x$ 在 (x_0,y_0) 处斜率为 $-\sin x|_{x=x_0}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

则夹角为 $\theta=\arctan 2\sqrt{2}$.

13. 解：不能，如 $f(x)=x$. $g(x)=\frac{1}{x}$ $(a,b)=(0,1)$

在 $(0,1)$ 内. $f(x)=x<\frac{1}{x}<g(x)$

但 $f'(x)=1>-\frac{1}{x^2}=g(x)$.