¡ 5.3 实对称矩阵的相似对角化

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$， $a_{ij}\in R$

且 $a_{ij}=a_{ji}$

$A^T=A$

一、实对称矩阵的特征值和特征向量

二、实对称矩阵的相似对角化

设 A 为 n 阶实对称矩阵，本节的目的：希望找到一个 n 阶正交矩阵 Q，使得

$$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Q的列向量是A的特征向量

Q的列向量组标准正交

关键：求 A 的 n 个标准正交的特征向量。

定义 元素为复数的矩阵和向量分别被称为复矩阵和复向量。

$\overline{a+ib}=a-ib$

定义 设 a_{ij} 为复数，$\overline{a}_{ij}$ 为 a_{ij} 的共轭复数，

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}，\quad \overline{A}=\left[\overline{a}_{ij}\right]_{m\times n}$$

则称 $\overline{A}$ 为 A 的共轭矩阵。若$\overline{a}_{ij}=a_{ij}$,则a_{ij}为实数.

例如：$A=\begin{bmatrix}3i & -2i\\ 5 & 2-7i\end{bmatrix}$ $\quad\overline{A}=\begin{bmatrix}-3i & 2i\\ 5 & 2+7i\end{bmatrix}$

$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2\geq 0\quad (a,b\in R)\quad i^2=-1$

共轭矩阵有以下性质：

(1) $\overline{\overline{A}}=A$;

(2) $\overline{A^T}=\overline{A}^T$;

(3) $\overline{kA}=\overline{k}\,\overline{A}$; ($k$为复数).

(4) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;

(5) $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$;

(6) $\overline{(AB)^T}=\overline{B}^T\,\overline{A}^T$;

(7) 若A可逆，则 $\overline{A^{-1}}=(\overline{A})^{-1}$;

(8) $\det\overline{A}=\overline{\det A}$;

(9) $r(A)=r(\overline{A})$.

另外对任意n元复向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，都有 $\overline{X}^TX\geq 0$，且仅当 $X=\theta$时，等号成立。

说明：本节所提到的对称矩阵，除非特别说明，均指实对称矩阵。

若A为实对称矩阵，则有 $\overline{A}^T=A^T=A$

一、实对称矩阵的特征值和特征向量

定理5.3.1 实对称矩阵的特征值都是实数。

证明：设λ为实对称矩阵 A的任一特征值，X为λ对应的特征向量，则有 $AX=\lambda X$， $\overline{A}^T=A$

$\Rightarrow\ \overline{(AX)}^T=\overline{(\lambda X)}^T$， $\quad\Rightarrow\ \overline{X}^T\overline{A}^T=\overline{\lambda}\,\overline{X}^T$

$\Rightarrow\ \overline{X}^TA=\overline{\lambda}\,\overline{X}^T$， $\quad\Rightarrow\ \overline{X}^TAX=\overline{\lambda}\,\overline{X}^TX$

$\Rightarrow\ \lambda\overline{X}^TX=\overline{\lambda}\,\overline{X}^TX$， $\quad\Rightarrow\ (\lambda-\overline{\lambda})\overline{X}^TX=0$

又 $X\neq\theta$， 且 $\overline{X}^TX>0$， 所以有 $\lambda=\overline{\lambda}$.

即 λ为实数.

注1 实矩阵的特征值未必是实数，例如

$$A=\begin{bmatrix}3 & 3\\ -6 & -5\end{bmatrix},$$

$$|\lambda I-A|=\lambda^2+2\lambda+3,$$

$$\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}i.$$

注2 实对称矩阵的特征向量都是实向量。

由于实对称矩阵A的特征值λ_i为实数，所以齐次线性方程组

$$(\lambda_i I-A)X=0$$

是实系数方程组，由$|\lambda_i I-A|=0$知必有实的基础解系，从而对应的特征向量可以取到实向量

定理5.3.2 实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量是正交的。**(当然线性无关)**

证明 设A实对阵矩阵；λ、μ 为A的两个不同的特征值；X、Y为 A的分别对应于λ、μ的特征向量。则

$$AX=\lambda X,\quad AY=\mu Y$$

于是 $(AX)^T=(\lambda X)^T,\quad \Rightarrow X^TA^T=\lambda X^T$

$$\Rightarrow X^TA=\lambda X^T,\quad \Rightarrow (X^TA)Y=(\lambda X^T)Y$$

$$\Rightarrow \mu X^TY=\lambda X^TY,\quad \Rightarrow (\lambda-\mu)X^TY=0$$

又 $\lambda-\mu\neq 0$，所以 $X^TY=0$ ，即 $(X,Y)=X^TY=0$

由此得 X与Y正交。

例 设4阶实对称矩阵A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$, $\lambda_4=-2$, $X_1=(1,-1,0,0)^T$, $X_2=(1,0,-1,0)^T$, $X_3=(1,0,0,-1)^T$ 是A的属于特征值$\lambda=2$的3个线性无关的特征向量

(1) 求A的属于特征值$\lambda_4=-2$的一个特征向量；

(2) 求矩阵A.

解(1) 设$X_4=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$是A的属于特征值$\lambda_4=-2$的特征向量,由定理5.2.2知，X_4与X_1,X_2,X_3都是正交的，从而X_4是齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2=0\\ x_1-x_3=0\\ x_1-x_4=0\end{cases}$ 的非零解，

因此我们可以取$X_4=(1,1,1,1)^T$.

(2) 令

$$P=(X_1,X_2,X_3,X_4)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

则有 $P^{-1}AP=diag(2,2,2,-2)$

因此 $A=Pdiag(2,2,2,-2)P^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

小结：

1 实对称矩阵的特征值都是实数；

2 实对称矩阵的不同特征值所对应的特征向量不仅线性无关，而且还是正交的。

二、实对称矩阵的相似对角化

定理5.3.3 设 λ_0 是n阶实对称矩阵A的任一特征值，p、q 分别为 λ_0 的代数重数和几何重数，则 $p=q$。

推论 实对称矩阵可相似对角化。

定理5.3.4 对任一n阶实对称矩阵A，存在n阶正交矩阵Q，使得 $Q^{-1}AQ=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为矩阵A的全部特征值。

实对称矩阵 A 正交相似对角化的方法，步骤如下：

(1) 求A的特征值.

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{p_1}(\lambda-\lambda_2)^{p_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{p_m}$$

其中$\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$, p_i为λ_i的代数重数，$i=1,\cdots,m$.

(2) 对每个特征值λ_i,求特征方程组$(\lambda_i I-A)X=0$的一个基础解系：$X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{ip_i}$

然后用施密特正交化方法将向量组正交化、单位化，得 $\eta_{i1},\eta_{i2},\cdots,\eta_{ip_i}$ $(i=1,2,\cdots,m)$

(3) $Q=[\eta_{11},\eta_{12},\cdots,\eta_{1p_1},\eta_{21},\cdots,\eta_{2p_2},\cdots,\eta_{m1},\cdots,\eta_{mp_m}]$

于是，Q为正交矩阵，且有

$$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_2,\cdots,\lambda_m,\cdots,\lambda_m)$$

其中λ_i有p_i个$(i=1,2,\cdots,m)$

$$\overbrace{\overbrace{X_{11},\ \cdots,\ X_{1p_1}}^{\lambda_1}\ \overbrace{X_{21},\ \cdots,\ X_{2p_2}}^{\lambda_2},\cdots,\overbrace{X_{m1},\ \cdots,\ X_{mp_m}}^{\lambda_m}}^{A}$$

$$\downarrow\ \text{正交化}$$

$$\beta_{11},\cdots,\beta_{1p_1},\quad \beta_{21},\cdots,\beta_{2p_2},\quad ,\cdots,\quad \beta_{m1},\cdots,\beta_{mp_m},$$

$$\downarrow\ \text{单位化}$$

$$\eta_{11},\cdots,\eta_{1p_1},\quad \eta_{21},\cdots,\eta_{2p_2},\quad ,\cdots,\quad \eta_{m1},\cdots,\eta_{mp_m},$$

其中，

$X_{11},\cdots,X_{1p_1},X_{21},\cdots,X_{2p_2},\cdots,X_{m1},\cdots,X_{mp_m}$ 是n个线性无关的特征向量

$\beta_{11},\cdots,\beta_{1p_1},\beta_{21},\cdots,\beta_{2p_2},\cdots,\beta_{m1},\cdots,\beta_{mp_m}$ 是n个两两正交的特征向量

$\eta_{11},\cdots,\eta_{1p_1},\eta_{21},\cdots,\eta_{2p_2},\cdots,\eta_{m1},\cdots,\eta_{mp_m}$ 是n个标准正交的特征向量

令

$Q=[\eta_{11},\cdots,\eta_{1p_1},\eta_{21},\cdots,\eta_{2p_2},\cdots,\eta_{m1},\cdots,\eta_{mp_m}]$

---正交相似变换矩阵

思考：

对普通可对角化的n阶方阵，能否通过施密特正交化方法将其n个线性无关特征向量变为n个标准正交特征向量？

结论：不可以。为什么？

例 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ 实对称矩阵

求正交矩阵Q,使$Q^{-1}AQ$为对角矩阵.

解：(1) 求A的特征值

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-2&-1\\0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+3)=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

有特征值 1(二重)和 3. $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=3$

对特征值1(二重)，有：

$$I-A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

对应的特征向量为：$X_1=(1,0,0)^T$，$X_2=(0,1,-1)^T$

对特征值 3，有：$3I-A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

对应的特征向量为 $X_3=(0,1,1)^T$

容易验证，X_1，X_2，X_3 是正交向量组。令

$$\eta_1=\frac{1}{|X_1|}X_1,\ \eta_2=\frac{1}{|X_2|}X_2,\ \eta_3=\frac{1}{|X_3|}X_3$$

则 η_1，η_2，η_3 是标准正交的特征向量。

令

$$Q=[\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3]=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

则 Q是正交矩阵且

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$$

例 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$ 实对称矩阵

求正交矩阵Q,使$Q^{-1}AQ$为对角矩阵.

解：(1) 求A的特征值

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&-4&\lambda+2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

有特征值 2(二重)和 -7.

对特征值 2(二重)，对应的特征向量为

$$X_1=(-2,1,0)^T,\ X_2=(2,0,1)^T$$

对特征值 -7，对应的特征向量为

$$X_3=(-\frac{1}{2},-1,1)^T\quad \text{或取 } X_3=(-1,-2,2)^T$$

容易验证，$X_1\perp X_3$，$X_2\perp X_3$ 但X_1 与 X_2 不正交。

对 X_1与 X_2 进行Schmidt正交化：

$$\beta_1=X_1$$

$$\beta_2=X_2-\frac{(X_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(\frac{2}{5},\ \frac{4}{5},\ 1)^T$$

则 β_1与 β_2 也是A对应特征值2的特征向量。这样，β_1,β_2,β_3 ($=X_3$)是两两正交的特征向量。

再单位化，令

$$\eta_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=(-\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5},0)^T$$

$$\eta_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=(\frac{2}{3\sqrt5},\frac{3}{3\sqrt5},\frac{4}{3\sqrt5})^T$$

$$\eta_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})^T$$

则 η_1，η_2，η_3 是标准正交的特征向量。

令

$$Q=[\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3]=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则 Q是正交矩阵且

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -7 \end{pmatrix}$$

例 求正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ 实对称矩阵

解 $\because \ |\lambda I-A|=(\lambda-2)^3(\lambda+2)$

$\therefore$ A的特征值为 2 (三重)和 -2

对 $\lambda=2$，解 $(2I-A)X=0$ 得基础解系

$X_1=(1,-1,0,0)^T, X_2=(1,0,-1,0)^T, X_3=(1,0,0,-1)^T$

正交化：

$\beta_1=X_1$

$$\beta_2=X_2-\frac{(X_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -1,\ 0)^T$$

$$\beta_3=X_3-\frac{(X_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(X_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$=(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -1)^T$$

单位化：

$$\eta_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0)^T$$

$$\eta_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{2}{\sqrt{6}},\ 0)^T$$

$$\eta_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3=(\frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{1}{2\sqrt{3}},\ -\frac{3}{2\sqrt{3}})^T$$

对 $\lambda=-2$，解 $(-2I-A)X=0$ 得基础解系

$X_4=(1,\ 1,\ 1,\ 1)^T$

令

$$\eta_4=\frac{1}{|X_4|}X_4=(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2})^T$$

取

$$Q=[\eta_1\quad \eta_2\quad \eta_3\quad \eta_4]=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

则

$$Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}\,(2,\ 2,\ 2,\ -2)$$

例 设A是3阶实对称矩阵，特征值为1 (二重)和2，且已知 A属于2的一个特征向量$(1,\ 2,\ 4)^T$ 。求A。

解 设 $X=(x_1,\ x_2,\ x_3)^T$ 是A属于1的特征向量，则 $X\perp(1,\ 2,\ 4)^T$，即

$$x_1+2x_2+4x_3=0$$

解出它的一组基础解系为

$$X_1=(-2,\ 1,\ 0)^T,\quad X_2=(-4,\ 0,\ 1)^T$$

可证，X_1，X_2 恰为A属于1的两个线性无关的特征向量。令 $X_3=(1,\ 2,\ 4)^T$，则 X_1，X_2，X_3 线性无关。取

$$P=[X_1\quad X_2\quad X_3]=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

由此得

$$A=P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 22 & 2 & 4 \\ 2 & 25 & 8 \\ 4 & 8 & 37 \end{pmatrix}$$

（另法）把 X_1，X_2，X_3 正交化、单位化，得

$$\eta_1=(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ 0)^T$$

$$\eta_2=(-\frac{4}{\sqrt{105}},\ -\frac{8}{\sqrt{105}},\ \frac{5}{\sqrt{105}})^T$$

$$\eta_3=(\frac{1}{\sqrt{21}},\ \frac{2}{\sqrt{21}},\ \frac{4}{\sqrt{21}})^T$$

令

$$Q=[\eta_1\quad \eta_2\quad \eta_3]=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{105}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{8}{\sqrt{105}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{105}} & \frac{4}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$$

则 Q是正交矩阵且

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

由此得

$$A=Q\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}Q^{-1}=Q\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}Q^T$$

$$=\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 22 & 2 & 4 \\ 2 & 25 & 8 \\ 4 & 8 & 37 \end{pmatrix}$$

小结：

1 实对称矩阵的特征值和特征向量

实对称矩阵的特征值都是实数。

实对称矩阵的不同特征值所对应的特征向量

不仅线性无关，而且还是正交的。

2 实对称矩阵的相似对角化

实对称矩阵不仅可以相似对角化

而且存在正交相似变换矩阵使其相似对角化

作业　习题五(P262)：

29(1)(2)(6)，31

(29-39题均可作为练习)