习题1-8

1.(1)解：$x=\pm1$为间断点

因为$\lim\limits_{x\to\pm1}\frac{1}{x^2-1}$不存在，所以$x=\pm1$为第二类间断点.

(2)解：$x=2$为间断点.

因$\lim\limits_{x\to2^+}e^{\frac{1}{x-2}}=\infty$. 所以$x=2$为第二类间断点.

(3)解：$x=0$是间断点

因$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$，~~所以$x=0$是~~

因$\lim\limits_{x\to0^+}f=\lim\limits_{x\to0^-}f$. 所以$x=0$是第一类中的可去间断点.

(4)解：$x=0$是间断点.

因$\lim\limits_{x\to0^+}x\cos^2\frac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to0^-}$，所以$x=0$是第一类的可去间断点.

(5)解：$x=0$、$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$是间断点.

因$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ 或x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}}\frac{\tan x}{x^2}=\infty$，所以$x=0$或$k\pi+\frac{\pi}{2}$是第二类间断点.

(6)解：$x=1$是间断点.

因$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=0$，所$x=1$是第一类间断点.（ps：$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1$）

(7)解：$x=0$是间断点.

因$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}{1-\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}=1$，所以$x=0$是第一类间断点.

$\lim\limits_{x\to0^-}f=-1$

(8)解：$x=0$, $x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1,\pm2\cdots)$是间断点.

因$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x}\right]$不存在. 则$x=0$是第二类间断点.

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{k}^+}\left[\frac{1}{x}\right]=k$.

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{k}^-}\left[\frac{1}{x}\right]=k-1$. 所以$x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1,\pm2\cdots)$是第一类间断点.

(9)解：$x=0$是间断点.

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{-x}=-1$

所以$x=0$是第一类间断点.

(10)解：$x=-1$. $x=1,3,5,\cdots,2k-1,\cdots$ 是间断点.

因 $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\sin\frac{\pi}{x^2-1}$ 不存在，则 $x=-1$ 是第二类间断点.

又 $\lim\limits_{\substack{x\to 2k-1^+\\ k=1,2\cdots}} f(x)=\lim\limits_{x\to(2k-1)^+}\frac{x^2-1}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to(2k-1)^+}\frac{x^2-1}{1-\frac{\pi^2}{8}x^2}=\frac{(2k-1)^2-1}{1-\frac{\pi}{8}(2k-1)^2}=\lim\limits_{x\to(2k-1)^-} f(x)$

则 $x=2k-1$，$k=1,2\cdots$ 是第一类的可去间断点.

2. (1)解：当 $|x|<1$ 时. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+0}=1$

当 $|x|=1$ 时. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+1}=1$

当 $|x|>1$ 时. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^{2n}}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}}+1}=x^2$

又 $\lim\limits_{|x|\to1^+} f(x)=\lim\limits_{|x|\to1^+}x^2=1=\lim\limits_{|x|\to1^-}f(x)=f(\pm1)=1$.

则 $f(x)$ 是处处连续的.

(2)解：当 $|x|<1$ 时. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=1$

当 $|x|=1$ 时. $f(x)=0$

当 $|x|>1$ 时. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n}}-1}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=-1$

则显然，$x=\pm1$ 是其第一类间断点.

(3)解：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}}{\sqrt[n]{x^{2n}+2^{2n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt[n]{1+(\frac{2}{x})^{2n}}}$，$(x\geq0)$

则当 $\frac{2}{x}<1$，即 $x>2$ 时，$f(x)=x^2$

当 $\frac{2}{x}=1$，即 $x=2$ 时. $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2=2\sqrt{2}$

当 $\frac{2}{x}>1$ 即 $0<x<2$ 时 $f(x)=0$

~~则 $x=2$ 是~~

又 $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=4$ $\quad\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=0$

则 $x=2$ 是第一类间断点.

(4)解：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+x)(1-x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n})}{1-x}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{4n}}{1-x}$

当 $|x|<1$ 即 $-1<x<1$ 时. $f(x)=\frac{1}{1-x}$ 为初等函数在 $(-1,1)$ 上连续.

当 $x=1$ 时. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}2^{n+1}=\infty$

当 $x=-1$ 时. $f(x)=0$，则 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上连续，$x=\pm1$ 为其第二类间断点.

当 $|x|>1$ 时. $f(x)=\infty$，

3．证明：先证若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $|f(x)|$ 在 x_0 也连续：

由连续的定义．$f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $\forall\varepsilon>0$．$\exists\delta>0$．当 ~~f(x)~~ $|x-x_0|<\delta$ 时，

有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立．对上述 $\varepsilon>0$．则 $\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\le|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$．

则 $|f(x)|$ 在 x_0 处也是连续的．

又由连续函数性质．因 $f(x)$、$g(x)$ 都连续，则 $\frac{f(x)+g(x)}{2}$，$\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$ 也是连续的．

则 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)}{2}+\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$ 在 x_0 处连续．

$\psi(x)=\min\{f(x)\cdot g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)}{2}-\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$ 在 x_0 处连续．

证毕．

(这里需记住两个公式：

$\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$，

$\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$

4．解：$f(g(x))=\begin{cases}\sin(x-\pi) & x\le0\\ \sin(x+\pi) & x>0\end{cases}$

$\therefore f(g(x))=-\sin x$ 是初等函数，则在 $(-\infty,+\infty)$ 连续．

5．证明：$\because |f(x)-f(y)|\le L|x-y|$ 恒成立．

$\therefore$ 对 $\forall x_0\in[a,b]$，有 $|f(x)-f(x_0)|\le L|x-x_0|$． ~~(L>0,x_0≠x)~~ $(L>0)$

则对 $\forall\varepsilon>0$．取 $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时．有

$|f(x)-f(x_0)|<L\cdot\delta=\varepsilon$．

则 $f(x)$ 在 x_0 处连续．

又 $x_0\in[a,b]$ 是任意的

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处连续．

6．解：$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+x)=a$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^x=1$

则当 $a=1$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=1$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

7. 解：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}=-\sqrt{2}a$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}[\ln x-\ln(x^2+x)]$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}(-1)}=-1$

则要使 $f(x)$ 连续.

则须 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=b$

则 $\begin{cases}-\sqrt{2}a=b\\ -1=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ b=-1\end{cases}$.

8. 解：(1) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$ （只需取 $-\frac{\pi}{2}$ 即可）.

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}a+\sqrt{x+1}=a+1$

要使 $f(x)$ 连续.

则 $\begin{cases}-\frac{\pi}{2}=b\\ a+1=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1-\frac{\pi}{2}\\ b=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{bx}\ln(1-3x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-3x}{bx}=\frac{-3}{b}$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin ax}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{ax}{x}=a$

则 $\begin{cases}\frac{-3}{b}=2\\ a=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-\frac{3}{2}\end{cases}$

9. 证明：令 $f(x)=x^5-3x-1$，$f(x)$ 是处处连续初等函数. 因此在 $[1,2]$ 上连续.

由于 $f(1)=-3<0$　$f(2)=25>0$.

由零值定理，在 $(1,2)$ 上至少有一点 ξ 使 $f(\xi)=0$.

即方程 $x^5-3x=1$ 至少有一根介于1和2之间.

10. 证明：根据 $x=a\sin x+b$ 得 $x\le a+b$，原问题变为 $x=a\sin x+b$ 在 $[0,a+b]$ 上至少有一根，令 $f(x)=x-a\sin x-b$. 在 $(0,a+b]$ 上连续.

由于 $f(0)=-b<0$　$f(a+b)=a-a\sin(a+b)\ge0$.

由零值定理，在 $(1,a+b]$ 上至少有一点 ξ 使 $f(\xi)=0$

即方程 $x=a\sin x+b$ 至少有一根在 $(0,a+b]$ 上，为正根.

11. 证明：设 $g(x)=f(x)-x$. 由于 $0\leq f(x)\leq 1$.

所以 $g(0)=f(0)-0\geq 0$

$g(1)=f(1)-1\leq 0$.

所以 $g(x)=0$ 在 $[0,1]$ 至少有一个实根.

即存在 ξ, 使 $f(\xi)-\xi=0 \Leftrightarrow f(\xi)=\xi$.

12. 证明：令 $g(x)=f(x)-f(x+a)$. $x\in(0,a)$.

则 $g(0)=f(0)-f(a)$

$g(a)=f(a)-f(2a)$.

又 $f(0)=f(2a)$, $f(a)\neq f(0)$.

则 $g(0)g(a)=[f(0)-f(a)][f(a)-f(2a)]=-(f(a)-f(0))^2<0$

$\therefore g(x)=0$ 在 $(0,1)$ 上至少存在一个实根 ξ, 即：

$f(\xi)=f(\xi+a)$.

13. 证明：因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

设 $m=\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots f(x_n)\}$

$M=\max\{f(x_1),f(x_2)\cdots f(x_n)\}$

则 $m\leq\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]\leq M$

由介值定理, 必存在 ξ, 使

$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$