¡ 1.2 矩阵的基本运算

矩阵不仅可用于处理线性方程组，而且还广泛用于刻画许多实际问题。在处理实际问题的过程中，人们经常遇到一堆一堆的数。此时人们不仅要考虑如何表示这些数堆，而且还要考虑一堆数与另一堆数间的关系.

¡ 1.2 矩阵的基本运算

一、引例

二、矩阵的线性运算、运算性质

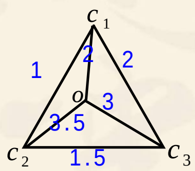
三、矩阵的乘积、运算性质

四、矩阵的转置、运算性质

要求：熟练掌握这些运算以及它们的运算性质

一、引例　　例1.2.1，1.2.2

例1.2.3 某县有三个乡镇,县里决定建立一个有线电视网.通过勘察测算,获得一组有关建设费用的预算数据.



$$p_{TV}=\begin{array}{c} \\ o \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} o & c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3.5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3.5 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1.5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

我们可以用矩阵的形式给出有关建设费用.

定义1.2.1 设 $A_{m\times n},B_{p\times q}$ 是两个矩阵，若它们满足

(1) $m=p$且 $n=q$，

(2) $a_{ij}=b_{ij}$ 其中 $i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$

则称 A与B 相等，记为 $A=B$。

满足条件(1)的矩阵称为同型矩阵. 但是,同型不一定相等.

例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} 与 \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$ 为同型矩阵.

几个特殊矩阵:

(1)行数与列数都等于n 的矩阵A，称为n 阶方阵. 也可记作A_n. 称 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 为A的主对角元.

定义：A的迹$tr(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

例如 $$\begin{bmatrix} 13 & 6 & 2i \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ 是一个3 阶方阵.

（2）主对角元全为1而其他元素全为零的n阶方阵称为n阶单位矩阵，记为I_n 或 I ,即

$$I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 只有一行的矩阵,此时 $m = 1$

$$A = [a_1, a_2, \cdots, a_n],$$

称为行矩阵(或行向量).　n元行向量

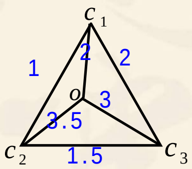
(4) 只有一列的矩阵此时 $n = 1$

$$B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix},$$ 称为列矩阵(或列向量).

m元列向量

二、矩阵的线性运算

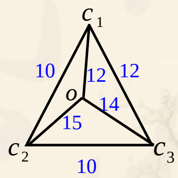
例1.2.3 某县有三个乡镇,县里决定建立一个有线电视网.通过勘察测算,获得一组有关建设费用的预算数据.



$$p_{TV} = \begin{array}{c} \\ o \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} o & c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3.5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3.5 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1.5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

我们也可以用矩阵的形式给出有关建设费用.

进一步假设，在架设有线电视网时，对原有供电线路进行增容改造。假设已知供电线路的增容费用如图.



问如何计算总的建设费用?

在本例中,我们把同型矩阵 P_{TV}与P_{TE} 相加得到矩阵P.

P_{TV}与P_{TE} 进行了加法运算,其和矩阵为P,记为

$$P = P_{TV} + P_{TE}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 14 & 18.5 & 17 \\ 14 & 0 & 11 & 14 \\ 18.5 & 11 & 0 & 11.5 \\ 17 & 14 & 11.5 & 0 \end{bmatrix}$$

P 即为总的建设预算数据矩阵

- 矩阵的加减法

定义1.2.2 设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 与 $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ 是两个 m ¡ n 矩阵，令

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

其中i =1, 2, ¡¡¡, m； j =1, 2, ¡¡¡, n。

称 m ¡ n矩阵$C = [c_{ij}]_{m\times n}$ 为A与B的和,记为C=A+B。

类似的，我们可以规定 A 与 B 的差 A-B 为

$$A-B=[a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$$

说明 只有当两个矩阵是同型矩阵时, 才能进行加减运算.

对应元素相加减

•数与矩阵的乘法运算---数乘

当 $A=B$ 时，$A+B=A+A$。习惯上把 $A+A$ 记为 $2A$，为此又引入：

定义1.2.3 设 $A=[a_{ij}]_{m¡n}$ 是 m¡ n 矩阵，k 是数，令 $b_{ij}=ka_{ij}$，其中 $i=1,2,¡¡¡,m$；$j=1,2,¡¡¡,n$.

称 m¡ n 矩阵 $B=[b_{ij}]_{m¡n}$ 为数 k 与矩阵 A 的数量积，记为 $B=kA$ 或 Ak。

用数k乘矩阵的每一个元素！

注：设 $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$，则 $(-1)A=\left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$。

称(－1)A 为 A 的负矩阵，记为 $-A$ 。

例如，

$$-\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-2\\-3&-4\end{bmatrix}$$

显然，$A-B=A+(-B)$，$(-k)A=-kA$,

设 A 是 m¡ n 矩阵，则 $0A$ 是全部元素均为0的 m¡ n 矩阵。称全部元素均为零的矩阵为零矩阵，记为 $0_{m¡n}$ 或 0。

注意 不同阶数的零矩阵是不相等的.

说明 矩阵加减法与数乘运算统称为矩阵的线性运算.

•矩阵的线性运算性质

性质1.2.1 设 A, B, C 是任意三个矩阵，k, l 是任意两个数，则有

(1) $\boxed{A+B=B+A}$ (2) $\boxed{(A+B)+C=A+(B+C)}$

交换 结合

(3) $A+0=A$ (4) $A+(-A)=0$

(5) $1A=A$ (6) $(kl)A=k(lA)$

(7) $\boxed{(k+l)A=kA+lA}$ (8) $\boxed{k(A+B)=kA+kB}$

分配

注：此处 A,B,C 均为同型矩阵

表明：可仿照数的运算来处理矩阵的加法与数乘。

例1.2.5 设

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&4&6\\8&-2&0\end{bmatrix}$$

计算 $2A-B$.

解 $$2A-B=2\begin{bmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{bmatrix}-B$$

$$=\begin{bmatrix}2\times1&2\times2&2\times3\\2\times4&2\times(-1)&2\times0\end{bmatrix}-B$$

$$=\begin{bmatrix}2&4&6\\8&-2&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&4&6\\8&-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=0$$

$$=\begin{bmatrix}-2&-4\\-4&2\\0&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-5\\-3&3\\-1&-2\end{bmatrix}$$

所以

$$B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2&-5\\-3&3\\-1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-\frac{5}{2}\\-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}&-1\end{bmatrix}$$

三、矩阵的乘法运算¡ 矩阵与矩阵

•矩阵乘法的定义

定义1.2.4 设 $A=(a_{ij})_{m\times p}$，$B=(b_{ij})_{p\times n}$，令

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}$$

$$i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n$$

称矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 A 与矩阵 B 的乘积，记为 $C=AB$ 。

方法如下：

$$\begin{bmatrix}\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{ip}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cdots&b_{1j}&\cdots\\ \cdots&b_{2j}&\cdots\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ \cdots&b_{pj}&\cdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cdots&\cdots&\cdots\\ \cdots&c_{ij}&\cdots\\ \cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}$$

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}$$

记为 $$A_{m\times p}B_{p\times n}=C_{m\times n}$$

A的列数=B的行数

注意　只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

此外，由于 A 的第 i 行与 B 的各列运算可得到 AB 的第 i 行，而A 有 m 行，故 AB 应有 m 行. 同理可知 AB 的列数应与 B 的列数相等.

$$A_{m\times p}B_{p\times n}=C_{m\times n}$$

例如 $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\5&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&6&8\\6&0&1\end{pmatrix}$ 不存在.

例1.2.7　计算

(1) $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\0&1\\-1&2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1\times2+2\times0+3\times(-1)&1\times(-1)+2\times1+3\times2\\0\times2+(-2)\times0+4\times(-1)&0\times(-1)+(-2)\times1+4\times2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1&7\\-4&6\end{bmatrix}$

(2) $[x_1,x_2]\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

$=[x_1+4x_2,2x_1+3x_2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

$=[(x_1+4x_2)x_1+(2x_1+3x_2)x_2]$

$=x_1^2+3x_2^2+6x_1x_2$

(3) $[a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$

(4) $\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix}[a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4]=\begin{bmatrix}b_1a_1&b_1a_2&b_1a_3&b_1a_4\\b_2a_1&b_2a_2&b_2a_3&b_2a_4\\b_3a_1&b_3a_2&b_3a_3&b_3a_4\\b_4a_1&b_4a_2&b_4a_3&b_4a_4\end{bmatrix}$

由此可见：矩阵乘法不满足交换律！

对线性方程组（1.1.1）

令

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$$

则上述方程组可表为 $AX=b$

--线性方程组的矩阵表示式

$\tilde{A}=[A\ \ b]$

•矩阵乘法的运算性质

性质1.2.2 设 A,B,C是任意三个矩阵, λ 是任意数,
满足所涉及的运算条件

则

(1) $(AB)C = A(BC)$; （结合律）

$$\left.\begin{aligned}&(2)\ A(B+C) = AB+AC,\\ &\quad (B+C)A = BA+CA;\end{aligned}\right\}\text{（左、右分配律）}$$

(3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ （其中 λ 为数）；

矩阵乘法还有一些类似于数与数间乘法的性质

性质1.2.3 对任一m¡ n矩阵 $A_{m\times n}$ ，均有

$$A_{m\times n}I_n = A_{m\times n},\quad I_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$$

$$A_{m\times n}0_{n\times q} = 0_{m\times q},\quad 0_{p\times m}A_{m\times n} = 0_{p\times n}.$$

定义1.2.5 设A是方阵，k是正整数，称k个A的连乘积为A的k次幂，记为A^k

$$A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k个}$$

补充规定： $A^0 = I, A^1 = A$

矩阵多项式：

设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$

称 $f(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I.$

为方阵A的多项式，这里 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 均为数。

矩阵的幂满足下列性质：

性质1.2.4 设A是方阵，k, l 是非负整数，$f(x)$ 是 x 的一元多项式，则有

（1） $A^k A^l = A^{k+l}, (A^k)^l = A^{kl}$ 指数律

（2） 若 $f(x) = g(x)\,h(x)$, 则

$$f(A) = g(A)\,h(A)$$

这里 $g(x), h(x)$ 也是 x 的一元多项式。

矩阵多项式也有类似数的因式分解.

例1.2.8 设 $A = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$ 求 A^k.

解 $$A^2 = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$ [redacted]

[redacted]

由此归纳出

[redacted]

用数学归纳法证明

当 $k=2$ 时，显然成立.

假设 $k=n$ 时成立，则 $k=n+1$ 时，

$$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix},$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n & \frac{(n+1)n}{2}\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n\\ 0 & 0 & \lambda^{n+1}\end{pmatrix},$$

所以对于任意的 k都有

$$A^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}.$$

方阵的幂的计算方法之一------试乘法

先计算方阵的2次幂，3次幂，甚至4次幂，找出规律后用数学归纳法进行证明。

例1.2.9　设 A 是方阵，证明

$$A^n-I=(A-I)(A^{n-1}+A^{n-2}+\cdots+A+I)$$

证 令 $f(x)=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$

$=h(x)g(x)$

这里 $h(x)=x-1,\quad g(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$

因为 $f(x)=x^n-1,$ 所以 $f(A)=A^n-I$

根据性质1.1.4(2)可得 $f(A)=h(A)g(A)$，即

$$A^n-I=(A-I)(A^{n-1}+A^{n-2}+\cdots+A+I)$$

例1.2.10　设$P=AB,Q=BA,$其中

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix},$试计算$P^n,Q^n.$

解：因为

$$P=AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}=-5$$

所以　$P^n=(-5)^n$

$$Q=BA=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ -1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & -6\end{bmatrix}$$

$Q^n=(BA)^n=(BA)(BA)\cdots(BA)$　　$AB=-5$

$=B(AB)\cdots(AB)A=B(-5)^{n-1}A$

$=(-5)^{n-1}BA$

$$=(-5)^{n-1}\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ -1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & -6\end{bmatrix}$$

方阵的幂的计算方法之二------展开法

当所给矩阵是若干矩阵的乘积时，可通过展开连乘使中间许多矩阵的乘积被消去或提出，从而达到化简得目的。

矩阵乘法应该注意的问题

1. 一般地，$AB \neq BA$,

   即矩阵的乘法不满足交换律；

   矩阵乘法有左乘和右乘之分。

2. 由 $AB = AC, A \neq 0$ 不能导出 $B=C$,

   即矩阵乘法不满足消去律。

理解由此带来的不同于实数间乘法的运算规则。

注1: 矩阵的乘法不可交换

① AB有意义，但不一定 BA 也有意义，如

$$A = [1,2,3], \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

AB有意义，BA无意义。

② 即使AB与BA都有意义，它们也不一定同型，如

$$A = [1,2,3], \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$BA_{3\times3} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}_{3\times3} \qquad AB = (32)_{1\times1}$$

③ 即使AB与BA同型，它们也不一定相等，如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

一般地，$AB \neq BA$, 但也有例外，比如设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

则有

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = BA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$$ 数量矩阵 kI

结论：与所有n级矩阵可交换的矩阵一定是数量矩阵

注：在一个矩阵等式两边同乘另一个矩阵时,应确保等号两侧的乘入方式一致,即

$A = B \Rightarrow CA = CB,$ 此时 $CA \neq BC$ 左乘

$\Rightarrow AD = BD,$ 此时 $AD \neq DB$ 右乘

在一般情况下,还有以下结论:

$(AB)^k \neq A^k B^k$

$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

$A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$

当$AB = BA$时，等式才成立。

注2: 两个非零矩阵相乘可能得到零矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由 AB=0 不能导出 A=0或B=0

由 $AB=AC$，$A\neq$0不能导出$B=C$

矩阵乘法不满足消去律

例1.2.11 设A、B是同阶方阵，则等式

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

成立的充分必要条件为 $AB=BA$。

例1.2.12 设A与B是同阶方阵。若$AB=BA$，则

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k} B^k$$

二项式定理

其中 C_n^k 是二项系数：

$$C_n^0 = 1, C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdots 2\cdot 1}, k=1,2,\cdots,n$$

方阵的幂的计算方法之三------二项式公式法

把所给矩阵分解成两个可交换的矩阵之和，再利用矩阵的二项式定理计算。

例1.2.13 求矩阵$\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^n$.

提示：$\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}^n = \left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)^n$.

四、矩阵的转置

定义 设A是 $m \times n$ 矩阵，

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

把A的行写成列,得到 $n \times m$ 矩阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{bmatrix}$

称之为A的转置矩阵，简称为A的转置，记为 A^T

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$;

$B = (18 \quad 6)$, $B^T = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$.

例1.2.14 设A是实矩阵（元素全为实数），若

$$AA^T = 0$$

则 $A=0$。

证明：令

$$AA^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & * & \cdots & * \\ * & c_{22} & \cdots & * \\ * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix} = C$$

$c_{11} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2$， $c_{22} = a_{21}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{2n}^2$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$ ， $c_{mm} = a_{m1}^2 + a_{m2}^2 + \cdots + a_{mn}^2$

因$C=0$，故

$$c_{ii} = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 0, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

已知 a_{ij} 均为实数，所以必有

$$a_{ij} = 0, \quad i = 1,2,\cdots,m; \ j = 1,2,\cdots,n$$

由此得 $A=0$ 。

性质 设A,B是任意两个矩阵,k是任意数,则有

$$(1)\ (A^T)^T = A;$$

$$(2)\ (A+B)^T = A^T + B^T;$$

$$(3)\ (kA)^T = kA^T;$$

$$(4)\ (AB)^T = B^T A^T. \qquad (AB)^T \neq A^T B^T$$

例1.2.15 设A与B是同阶方阵，则

$$(AB^T + BA^T)^T = AB^T + BA^T$$

证

$$\begin{aligned}(AB^T + BA^T)^T &= (AB^T)^T + (BA^T)^T \\ &= (B^T)^T A^T + (A^T)^T B^T \\ &= BA^T + AB^T \\ &= AB^T + BA^T\end{aligned}$$

总结

1、认识、熟悉矩阵；

2、熟练掌握矩阵的加法、数乘、乘法、转置的定义以及这些运算满足的运算律。

特别注意乘法不满足交换律，也不满足消去律：

1、 $AB \neq BA$；

2、由$AB=0$不能导出$A=0$或$B=0$。

作业： 习题一(Page 75):

8，9，10，13(2)(6)(7)，15.

（注：8-23均可做练习）