2015-2016 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、(12 分)

1、【学解】设任取一件零件，该零件是第一台车床生产为事件A_1，是第二台车床生产为事件A_2

该零件是不合格为事件B，那么由题意可知：

$$P(B|A_1)=0.03,P(B|A_2)=0.05,P(A_1)=0.7,P(A_2)=0.3$$

于是由全概率公式：

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)=0.03\times0.7+0.05\times0.3=0.036$$

【考点延伸】《考试宝典》第一章【重要题型】题型 4：全概率公式与贝叶斯公式

2、【学解】设系统 A 有效为事件A，系统 B 有效为事件B

那么由题意知：$P(A)=0.92,P(B)=0.93,P\left(B|\overline{A}\right)=0.85$，问题求$1-P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)$

首先有$P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$

因为$P\left(B|\overline{A}\right)=\dfrac{P\left(B\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\dfrac{0.93-P(AB)}{1-0.92}=0.85\Longrightarrow P(AB)=0.862$

所以$1-P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.92+0.93-0.862=0.988$

【考点延伸】《考试宝典》第一章【知识清单】1.2 事件的关系与运算

二、(12 分)

1.【学解】(1) 因为$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，从而$A+\dfrac{\pi}{2}B=1,A-\dfrac{\pi}{2}B=0$

由此可以解得$A=\dfrac{1}{2},B=\dfrac{1}{\pi}$

(2) 从$F(x)$的解析表达式知：X是连续型随机变量

所以$P(-1<X\leqslant1)=F(1)-F(-1)=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\right)-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》第二章【知识清单】2.3 连续型随机变量及分布

2. 【学解】$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(e^X\leqslant y)$

当$y\leqslant 0$时，$F_Y(y)=0$

当$y>0$时，$F_Y(y)=P(X\leqslant \ln y)=P\left(\frac{X}{\sigma}\leqslant\frac{\ln y}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{\ln y}{\sigma}\right)$

这里$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$为标准正态分布的概率分布函数

从而$y\leqslant 0$时，$f_Y(y)=0$

$y>0$时，$f_Y(y)=F_Y{}'(y)=\Phi'\left(\frac{\ln y}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma y}=\frac{1}{\sigma y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{e^{-\frac{(\ln y)^2}{2\sigma^2}}}{y}$

综上，$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{e^{-\frac{(\ln y)^2}{2\sigma^2}}}{y} & y>0\\ 0 & y\leqslant 0\end{cases}$

【考点延伸】《考试宝典》第二章【知识清单】2.5 一维随机变量的函数的分布

三、(16分)

1. 【学解】(1) 由于X与Y相互独立，从而X与Y的联合概率密度函数为：

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2y, 0<x<1, 0<y<1\\ 0 \quad ,其他\end{cases}$$

所以由卷积公式：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$

$\begin{cases}0<z-y<1\\ 0<y<1\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}z-1<y<z\\ 0<y<1\end{cases}$，当$z\leqslant 0$或$z\geqslant 2$时，左端联立结果为空集

这表明$f_Z(z)=0$

当$0<z\leqslant 1$时，上式联立结果为$0<y<z$，此时$f_Z(z)=\int_0^z 2ydy=z^2$

当$1<z<2$时，上式联立结果为$z-1<y<1$，此时$f_Z(z)=\int_{z-1}^{1}2ydy=1-(z-1)^2=-z^2+2z$

从而$f_Z(z)=\begin{cases} z^2,0<z<1 \\ -z^2+2z,1\leqslant z<2 \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$

(2) $F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{\max(X,Y)\leqslant u\}=P\{X\leqslant u,Y\leqslant u\}$

$=P\{X\leqslant u\}P\{Y\leqslant u\}=F_X(u)F_Y(u)$

因为$F_X(x)=\begin{cases} 0,x<0 \\ x,0\leqslant x<1 \\ 1,x\geqslant 1 \end{cases}$，$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}f_Y(x)dx=\begin{cases} 0,y<0 \\ y^2,0\leqslant y<1 \\ 1,\ y\geqslant 1 \end{cases}$

从而$F_U(u)=\begin{cases} 0,u<0 \\ u^3,0\leqslant u<1 \\ 1,u\geqslant 1 \end{cases}\Longrightarrow f_U(u)=F_U{}'(u)=\begin{cases} 3u^2,0<u<1 \\ 0 \quad ,其他 \end{cases}$

【考点延伸】《考试宝典》第三章【知识清单】3.6 二维随机变量函数的分布

2.【学解】$P(Z\leqslant 0.5|X=0)=\dfrac{P\{Z\leqslant 0.5,X=0\}}{P\{X=0\}}=\dfrac{P\{Y\leqslant 0.5,X=0\}}{P\{X=0\}}=P\{Y\leqslant 0.5\}=\dfrac{1}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》第三章【知识清单】3.4 随机变量的独立性

四、(16分)

1、【学解】$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=E(X^3)-0=EX^3=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0$

$$E(X+Y)=EX+EX^2=0+\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$\xlongequal{u=\frac{x^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}2ue^{-u}\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{u}}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}u^{\frac{1}{2}}e^{-u}du=\frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}=\frac{2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}=1$$

$$E(X+Y)^2=EX^2+2E(XY)+EY^2=1+2E(X^3)+EX^4=1+\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=1+\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}x^4e^{-\frac{x^2}{2}}dx\xlongequal{u=\frac{x^2}{2}}1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}4u^2e^{-u}\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{u}}du=1+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}u^{\frac{3}{2}}e^{-u}du$$

$$=1+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=1+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}=4$$

从而$D(X+Y)=E(X+Y)^2-(E(X+Y))^2=4-1^2=3$

【考点延伸】《考试宝典》第四章【知识清单】4.2 方差 4.4 协方差与相关系数

2、【学解】参数为λ的指数分布的期望为$\frac{1}{\lambda}$，从而X,Y,Z都服从参数为$\frac{1}{6}$的指数分布

$$F_u(u)=P\{\min\{X,Y,Z\}\leqslant u\}=1-P\{\min\{X,Y,Z\}>u\}$$

$$=1-P\{X>u\}P\{Y>u\}P\{Z>u\}=1-[1-F_X(u)]^3=\begin{cases}1-e^{-\frac{u}{2}}, & u>0\\ 0, & u\leqslant 0\end{cases}$$

这里$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{6}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，从而$U\sim E\left(\frac{1}{2}\right)$，于是$EU=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2,DU=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=4$

【考点延伸】《考试宝典》第四章【知识清单】4.1 数学期望 4.2 方差

五、(8分)

【学解】$EX_i=0,DX_i=\frac{1}{12}(i=1,2,\dots,1200)$

由中心极限定理知：$\frac{\sum_{i=1}^{1200}X_i-E\sum_{i=1}^{1200}X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{1200}DX_i}}=\frac{\sum_{i=1}^{1200}X_i}{10}$近似服从标准正态分布

于是$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1200}X_i\right|<10\right\}=P\left\{-1<\frac{\sum_{i=1}^{1200}X_i}{10}<1\right\}\approx 2\Phi(1)-1=2\times 0.8413-1=0.6826$

【考点延伸】《考试宝典》第五章【知识清单】5.3 中心极限定理

六、(8分)

【学解】(1) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2=\frac{(10-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(10-1)=\chi^2(9)$

$(2)P\left\{0.2088\sigma^2 \leqslant \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \leqslant 2.1665\sigma^2\right\}=P\left\{2.088 \leqslant \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{10}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \leqslant 21.665\right\}$

$=0.99-0.01=0.98$

【考点延伸】《考试宝典》第六章【知识清单】6.4 正态分布下常用的抽样分布

七、(16 分)

1、【学解】$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{\lambda}\frac{2}{\lambda^2}x(\lambda-x)dx=\frac{2}{\lambda^2}\frac{\lambda^3}{6}=\frac{\lambda}{3}$

令$\overline{X}=EX\Longrightarrow\hat{\lambda}=3\overline{X}$

$E\left(\hat{\lambda}\right)=E\left(3\overline{X}\right)=3EX=3\times\frac{\lambda}{3}=\lambda$，所以是$\lambda$的无偏估计

【考点延伸】《考试宝典》第七章【知识清单】7.1 点估计

2.【学解】$L(\theta)=p_1p_2p_3=2\theta^3(1-\theta)^3,\ln L(\theta)=\ln 2+3\ln\theta+3\ln(1-\theta)$

令$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{3}{\theta}-\frac{3}{1-\theta}=0\Longrightarrow\theta=\frac{1}{2}$，经检验，此点是$L(\theta)$取得最大值的点

因此参数θ的最大似然估计值$\hat{\theta}=\frac{1}{2}$

【考点延伸】《考试宝典》第七章【知识清单】7.1 点估计

八、(12 分)

【学解】(1) 要检验的假设为：$H_0:\mu=5\leftrightarrow H_1:\mu\neq 5$

选用统计量$T=\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu_0\right)}{S}$，由题意知：$\bar{x}=5.9,\alpha=0.05,s=0.9,n=9,\mu_0=5$

$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.3060$，拒绝域为$W=\{|t|\geqslant 2.3060\}$

代入数据，得$t=\frac{\sqrt{9}(5.9-5)}{0.9}=3$落入拒绝域，故而拒绝原假设，不能认为该零件的平均长度为5mm

(2) 假设检验问题$H_0:\sigma^2=0.8,H_1:\sigma^2<0.8$

由于μ未知，选用统计量$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{(9-1)S^2}{0.8}=10S^2$

针对拒绝域$W=\{S^2\leqslant 0.349\}=\{10S^2\leqslant 3.49\}=\{10S^2\leqslant \chi^2_{0.90}(8)\}=\{10S^2\leqslant \chi^2_{1-\alpha}(8)\}$

可以知显著性水平$\alpha=0.1$，故而犯第一类错误的概率为 0.1

【考点延伸】《考试宝典》第九章 假设检验 2【知识清单】9.3 常用的假设检验