线性代数 B 期末试题样题

得分	

一、填空题(每小题 4 分，共 20 分）

1、 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^{-1}=$ ________________；.

2、 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&a&0\\0&0&a^2\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 a 满足条件________________；

3、 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ 的秩为 4，正惯性指数为 3，则其规范形为________________；

4、 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 均为 4 维列向量，已知 4 阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，又 $|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，则 4 阶行列式 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,2\beta_1+\beta_2|=$ ________________；

5、 已知 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{12}\\a_{31}&a_{33}&a_{32}\\a_{21}&a_{23}&a_{22}\end{pmatrix}$, 若 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$, 则 $B^{-1}=$ ____________。

得分	

二（10 分)、讨论 a,b 取何值时，下列线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1-x_3=1\\x_1+ax_2+x_3=b\end{cases}$$

(1) 有唯一解；(2)无解；(3)有无穷解，并在有无穷多解时，用其导出方程组的基础解系表示方程组的通解。

得分	

三 （10 分)、设矩阵 $A=diag(1,2,-1)$，且矩阵 X 满足 $XA^*=3X+A^{-1}$。求矩阵 X。

得分	

四（10 分)、设 $\alpha_1=(2,1,3,1)^T,\alpha_2=(-1,1,-3,1)^T,\beta_1=(4,5,3,-1)^T$，$\beta_2=(1,5,-3,1)^T$。令 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$, $V_2=L(\beta_1,\beta_2)$, 求向量空间 V_1+V_2 的一组基, 并分别求出 β_1,β_2 在这组基下的坐标。

得分	

五（10 分）、已知向量空间 R^3 的两组基，由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 $P=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-1&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$ 且 $\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,1,0)^T$，$\alpha_3=(1,1,1)^T$，试求(1) 基 β_1,β_2,β_3；(2) 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 下有相同坐标的全体向量。

得分	

六（10 分）、设 A 为一个方阵，若 α 是齐次线性方程组 $A^m X=0$ 的解，但不是齐次线性方程组 $A^{m-1}X=0$ 解，证明向量组 $\alpha,A\alpha,\ldots A^{m-1}\alpha$ 线性无关。

得分	

七(15 分)、已知椭圆曲线方程 $f(x,y)=6x^2-6xy+6y^2-12x+9y+1=0$。

(1) 求椭圆方程中二次型部分 $f_1(x,y)=6x^2-6xy+6y^2$ 的矩阵 A；

(2) 将二次型 $f_1(x,y)$ 化为标准形，并写出所用的线性替换；

(3) 将椭圆曲线 $f(x,y)=0$ 化为 $a(X-x_0)^2+b(Y-y_0)^2=c$ 形式的标准形，并求出该椭圆的长轴与短轴。

得分	

八（15 分）、设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2,$ 且 $\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 B 的属于 λ_1 的一个特征向量，记 $B=A^5-4A^3+I$，其中 I 为 3 阶单位矩阵。

(1) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量；(2) 求 B 的所有特征值和特征向量；(3) 求矩阵 B。