(2014-2015-1)工科数学分析期末试题(A 卷)解答（2015.1）

一. **1.** $y-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{7}(x-\frac{\sqrt{3}}{4})$

2. $\frac{1}{2}$

3. $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)},\ \int_{0}^{+\infty}xe^{-x}dx,$

4. 1 **,** $-\frac{2}{3}$

5. $f(x)$

二.

$$I=2\int_0^1 x^{10}\sqrt{1-x^2}dx. \qquad \text{……………..(2 分)}$$

令 $x=\sin t$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}t\cos^2 tdt \qquad \text{……………..(4 分)}$$

$$=2(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{12}tdt) \qquad \text{……………..(6 分)}$$

$$=\frac{21}{1024}\pi \qquad \text{……………..(8 分)}$$

三.

$$y=e^{-\int\frac{1-x}{x}dx}(C+\int\frac{e^{3x}}{x}e^{\int\frac{1-x}{x}dx}dx) \qquad \text{……………..(4 分)}$$

$$=e^{x-\ln x}(C+\int\frac{e^{3x}}{x}e^{\ln x-x}dx) \qquad \text{……………..(6 分)}$$

$$=\frac{e^x}{x}(C+\int\frac{e^{3x}}{x}xe^{-x}dx)$$

$$=\frac{e^x}{x}(C+\int e^{2x}dx) \qquad \text{……………..(8 分)}$$

$$=\frac{e^x}{x}(C+\frac{1}{2}e^{2x}) \qquad \text{……………..(9 分)}$$

四.　(1)　$y(0)=1$　……………..(1 分)

$$y'=-e^y-xe^yy'$$ ……………..(分)

$$y'(0)=-e$$ ……………..(3 分)

$$y''=-e^yy'-e^yy'-xe^y(y')^2-xe^yy''$$ ………..(4 分)

$$y''(0)=2e^2$$ ……………..(5 分)

(2)由题设，应有 $f(0)=y(0)$　$f'(0)=y'(0)$　$f''(0)=y''(0)$ ………..(6 分)

$$c=f(0)=1$$ ……………..(7 分)

$$f'(x)=2ax+b \qquad b=f'(0)=-e$$ ……………..(8 分)

$$f''(x)=2a \qquad 2a=f''(0)=2e^2 \qquad a=e^2$$ ……………..(9 分)

五.　$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\ln\cos x d\tan x$ ……………..(2 分)

$$=\tan x\ln cosx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}\tan xdx$$ ……………..(5 分)

$$=\sqrt{3}\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\frac{1}{\cos^2 x}-1)dx$$ ……………..(6 分)

$$=-\sqrt{3}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2+(\tan x-x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$ ……………..(8 分)

$$=(\frac{1}{2}-\sqrt{3})\ln 2+\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$$ ……………..(9 分)

六.　设　$f(x)=\ln x-\frac{x^2}{2}-a \qquad x\in(0,+\infty)$ ……………..(1 分)

$$f'(x)=\frac{1}{x}-x$$ ……………..(2 分)

令　$f'(x)=0$　得 $x=1$ ……………..(3 分)

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$$ ……………..(4 分)

$$f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$ ……………..(5 分)

$$f(1)=-\frac{1}{2}-a$$ ……………..(6 分)

当 $a<-\frac{1}{2}$　$f(1)>0$　二曲线有两个交点 ……………..(7分)

当 $a=-\frac{1}{2}$ $f(1)=0$ 二曲线有一个交点 ……………..(8 分)

当 $a>-\frac{1}{2}$ $f(1)<0$ 二曲线有没有交点 ……………..(9 分)

七. 设 $\frac{2x^2-4x-1}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+D}{x^2+1}$ ……………..(2 分)

$$2x^2-4x-1=A(x^2+1)+(Bx+D)(x+2)$$

得 $A=3$ $B=-2$ $D=-1$ …（1+1+1）…..(5 分)

$$\int\frac{2x^2-4x-1}{(x+2)(x^2+1)}=\int(\frac{3}{x+2}-\frac{x+2}{x^2+1})dx$$

$=3\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\arctan x+C$ （每项 1 分）…..(9 分)

八. $f(0-0)=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}$ ……………..(1 分)

$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ ……………..(2 分)

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}-1}$$

$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2\sqrt{1-x^2}}{-\frac{1}{2}x^2}$ ……………..(3 分)

$=-6a$ ……………..(4 分)

$f(0+0)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{\frac{x^2}{4}}$ ……………..(5 分)

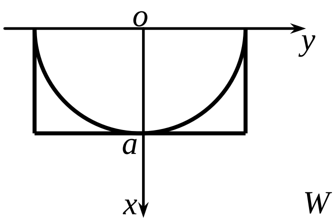
$=\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{\frac{x}{2}}$ ……………..(6 分)

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{a^2e^{ax}+2}{\frac{1}{2}}$$

$=2(a^2+2)$ ……………..(7 分)

由题设得 $-6a=2(a^2+2)\neq6$ $a=-2$ ……………..(9 分)

九.



$$dW = x\cdot 100\mu g\times 2(a-y)dx$$

$$= 200\mu gx(a-\sqrt{a^2-x^2})dx \quad \text{………(3 分)}$$

$$W=\int_0^a 200\mu gx(a-\sqrt{a^2-x^2})dx \quad \text{…..…..(4 分)}$$

$$=200\mu g(\int_0^a axdx-\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx) \quad \text{…..…..(5 分)}$$

$$=200\mu g(\frac{a^3}{2}-\frac{1}{3}a^3) \quad \text{…(1+2)..…..(8 分)}$$

$$=\frac{100}{3}\mu ga^3(\mathrm{J}) \quad \text{……………..(9 分)}$$

十.

$$r^2+r-2=0 \quad \text{……………..(1 分)}$$

$$r=1 \qquad r=-2 \quad \text{……………..(3 分)}$$

$$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-2x} \quad \text{……………..(4 分)}$$

设 $y^*=x(Ax+B)e^x$ ……………..(5 分)

代入方程得 $6Ax+2A+3B=3x$ ……………..(7 分)

解得 $A=\frac{1}{2} \qquad B=-\frac{1}{3}$ ……………..(9 分)

通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x)e^x$ ……………..(10 分)

十一.

$$V_1=\int_a^{\xi}\pi[f^2(x)-f^2(\xi)]dx \quad \text{……………..(2 分)}$$

$$V_2=\int_{\xi}^{b}2\pi x[f(\xi)-f(x)]dx \quad \text{……………..(4分)}$$

令 $F(t)=\int_a^t\pi[f^2(x)-f^2(t)]dx-\int_t^b 2\pi x[f(t)-f(x)]dx$ …………..(6分)

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

$$F(a)=-\int_a^b 2\pi x[f(a)-f(x)]dx<0 \quad \text{……………..(7 分)}$$

$$F(b)=\int_a^b\pi[f^2(x)-f^2(b)]dx>0 \quad \text{……………..(8 分)}$$

根据介值定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=0$，即

$$\int_a^{\xi}\pi[f^2(x)-f^2(\xi)]dx-\int_{\xi}^{b}2\pi x[f(\xi)-f(x)]dx=0$$

$$V_1=V_2 \quad \text{……………..(9 分)}$$