习题 5-3

1.(1) 因 $xy''=y'$，则 $\frac{x\,dy'}{dx}=y'$

$\Rightarrow \frac{dy'}{y'}=\frac{dx}{x}$. 两边积分

$\ln|y'|=\ln|x|+\ln|C_1|$

$\Rightarrow y'=C_1x$

$\Rightarrow y=\int C_1x\,dx=Cx^2+C_2$

(2) 令 $y'=P(y)$. 则 $y''=P\frac{dP}{dy}$ 代入方程

$2y\cdot P\frac{dP}{dy}=1+P^2$

即 $\frac{P}{1+P^2}dP=\frac{1}{2y}dy$ 两边积分

$\frac{1}{2}\ln(1+P^2)=\frac{1}{2}\ln|y|+C_1$

$\Rightarrow 1+P^2=C_2y$

即 $1+(y')^2=C_2y$

$\Rightarrow y'=\sqrt{C_2y-1}$,

即 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{C_2y-1}$

$\frac{dy}{\sqrt{C_2y-1}}=dx$ 两边积分

$\frac{2\sqrt{C_2y-1}}{C_2}=x+C$

即 $4(C_2y-1)=C_2^2\cdot(x+C)^2$

(3) 由 $y''=x+\sin x$

则 $y'=\frac{1}{2}x^2-\cos x+C_1$

则 $y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2$

(4) 令 $y'=p$ 则 $y''=p'$. 则

$p'=p+x$，则:

$\frac{dp}{dx}-p=x$ 为一阶线性微分方程

由通解公式得:

$$p=e^{-\int -1dx}\left[C_1+\int xe^{\int -1dx}dx\right]$$

$$=e^x\left[C_1+\frac{-1}{e^x}-\frac{x}{e^x}\right]=C_1e^x-1-x$$

即 $y'=C_1e^x-1-x$

则 $y=C_1e^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2$

(5) 令 $y'=p$ 则 $y''=p'$. 则:

$p'=1+p^2$，即:

$\frac{dp}{1+p^2}=dx$ 两边积分得:

$\arctan p=x+C_1$

即 $p=\tan(x+C_1)$

即 $y'=\tan(x+C_1)$

则 $y=-\ln|\cos(x+C_1)|+C_2$

(6) 令 $y'=p$，$y''=p\frac{dp}{dy}$

则: $y^3p\frac{dp}{dy}-1=0$

分离变量得: $pdp=\frac{1}{y^3}dy$

两边积分得: $\frac{1}{2}p^2=-\frac{1}{2}y^{-2}+\frac{1}{2}C_1$

即: $p^2=-\frac{1}{y^2}+C_1$

则 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-\frac{1}{y^2}+C_1$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{C_1-\frac{1}{y^2}}$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{C_1y^2-1}}=dx$$

两边积分得: $\frac{\sqrt{C_1y^2-1}}{C_1}=x+C_2$

即: $C_1y^2-1=(C_1x+C_3)^2$

(7) 因 $xy''+y'=0$，

则 $x\frac{dy'}{dx}=-y'$

$\Rightarrow \frac{dy'}{y'}=-\frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow \ln|y'|=-\ln|x|+\ln|C_1|$

$\Rightarrow y'=\frac{C_1}{x}$

$\Rightarrow y=C_1\ln|x|+C_2$

(8) 设 $p=y'$，则 $y''=\frac{pdp}{dy}$

则：$\frac{pdp}{dy}=p^3+p$

$\Rightarrow \frac{dp}{dy}=p^2+1$

$\Rightarrow \frac{1}{p^2+1}dp=dy$ 两边积分：

$\arctan p=y+C_1$

$p=\tan(y+C_1)$

即 $\frac{dy}{dx}=\tan(y+C_1)$

则 $\frac{1}{\tan(y+C_1)}dy=dx$

两边积分：$\ln|\sin(y+C_1)|=x+\ln|C_2|$

即：$y=\arcsin(C_2e^x)+C_1$

(9) 因 $y''(e^x+1)+y'=0$ 则 $(e^x+1)\frac{dy'}{dx}=-y'$

$\Rightarrow \frac{dy'}{y'}=\frac{-1}{e^x+1}dx$

两边积分：$\ln|y'|=\ln(1+e^{-x})+\ln|C_1|$

$\Rightarrow y'=C_1(1+e^{-x})$

$\Rightarrow y=C_1(x-e^{-x})+C_2$

(10) 因 $xy'''+y''=1$. 则 $x\frac{dy''}{dx}=1-y''$

则 $\frac{1}{1-y''}dy''=\frac{1}{x}dx$，两边积分得：

$-\ln|1-y''|=\ln|x|+\ln|C_1|$

则 $y''=1-\frac{1}{C_1x}$，则 $y'=x-\frac{\ln|x|}{C_1}+C_2$，$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{C_1}(x\ln x-x)+C_2x+C_3$

则 $y=\frac{1}{2}x^2+C_2'x+C_1'x\ln|x|+C_3$

(11) 因 $y''' = y''$，则：$\frac{dy''}{dx} = y''$，

则 $\frac{1}{y''}dy'' = dx$. 两边积分：

$$\ln|y''| = x + \ln|C_1|$$

$\Rightarrow y'' = C_1e^x$

则 $y' = C_1e^x + C_2$

则 $y = C_1e^x + C_2x + C_3$

2.(1) 令 $y' = P(y)$，则 $y'' = \frac{pdp}{dy}$

原方程化为：$y^3 \cdot \frac{pdp}{dy} = -1$

$\Rightarrow 2pdp = -2y^{-3}dy$

两边积分：$p^2 = \frac{1}{y^2} + C_1$

则 $p = \pm\frac{\sqrt{y^2+C_1}}{y}$

即 $y' = \pm\frac{\sqrt{y^2+C_1}}{y}$

即 $\frac{ydy}{\sqrt{y^2+C_1}} = \pm dx$，两边积分

则 $\sqrt{y^2+C_1} = \pm x + C_2$

因 $y(1)=1, y'(1)=0$

又对于 $\sqrt{y^2+C_1} = x + C_2$ 有 $\begin{cases}\sqrt{1+C_1} = 1+C_2 \\ 0 = \sqrt{1+C_1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_2 = -1 \\ C_1 = -1\end{cases}$

则 $\sqrt{y^2-1} = x-1$

又对于 $\sqrt{y^2+C_1} = -x + C_2$ 有 $\begin{cases}0 = \sqrt{1+C_1} \\ \sqrt{1+C_1} = -1+C_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1 = -1 \\ C_2 = 1\end{cases}$

则 $\sqrt{y^2-1} = -x+1$.

(2) 由 $y'' - a(y')^2 = 0$ 可得：

$\frac{dy'}{dx} = a(y')^2$，则当 $a=0$ 时. $\frac{dy'}{dx} = 0$，则 $y' = C_1$，则 $y = C_1x + C_2$

又 $y|_{x=0} = 0$，$y'|_{x=0} = -1$. 可得 $C_1 = -1$. $C_2 = 0$，则 $y = -x$.

当 $a \neq 0$ 时. 有 $\frac{1}{a(y')^2}dy' = dx$，两边积分 $\frac{-1}{ay'} = x + C_1$，则 $y' = \frac{-1}{a(x+C_1)}$.

则 $y = -\frac{1}{a}\ln|x+C_1| + C_2$　又 $y|_{x=0} = 0$　$y'|_{x=0} = -1$，则 $0 = -\frac{1}{a}\ln|C_1| + C_2$ ①

$-1 = \frac{-1}{aC_1}$ ②　由①② 得 $C_1 = a$　$C_2 = \frac{1}{a}\ln|a|$. 则 $y = -\frac{1}{a}\ln|ax+1|$

(3) 令 $y'=p$，则 $y''=\frac{pdp}{dy}$

则 $\frac{pdp}{dy}=e^{2y}$，分离变量：$pdp=e^{2y}dy$

两边积分 得：$p^2=e^{2y}+C_1$　由 $y(0)=y'(0)=0$ 得 $C_1=-1$

$\Rightarrow p=\pm\sqrt{e^{2y}-1}=\frac{dy}{dx}$

分离变量 $\frac{dy}{\sqrt{e^{2y}-1}}=\pm dx$

两边积分：$\arcsin e^{-y}=\pm x+C_2$

又 $y(0)=y'(0)=0$，得 $C_2=\frac{\pi}{2}$

则特解为：$\arcsin e^{-y}=\pm x+\frac{\pi}{2}$

即：$\cos x=e^{-y}$

即：$y=\ln|\sec x|$

(4) 令 $y'=p(y)$. 则 $y''=\frac{pdp}{dy}$，则：

$\frac{pdp}{dy}=3\sqrt{y}$　分离变量为：

$pdp=3\sqrt{y}\,dy$　两边积分：

$\frac{1}{2}p^2=2y^{\frac{3}{2}}+C_1$

即 $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{4y^{\frac{3}{2}}+2C_1}$

因 $y(0)=1$　$y'(0)=2$　则 $2=\pm\sqrt{4+2C_1}$

则 $C_1=0$. 且 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{4y^{\frac{3}{2}}+0}=2y^{\frac{3}{4}}$

$\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{4}}dy=dx$ 两边积分：

$2y^{\frac{1}{4}}=x+C_2$

又 $y(0)=1$　则 $2=0+C_2\Rightarrow C_2=2$

则 $2y^{\frac{1}{4}}=x+2$

即 $y=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4$

(5) 令 $y'=p$，则 $\frac{dp}{dx}=1-p^2$

则：$\frac{dp}{1-p^2}=dx$ 两边积分：

$\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+p}{1-p}\right|=x+C_1$

将 $y'(0)=0$ 代入得 $C_1=0$

则 $\frac{1+p}{1-p}=e^{2x}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

积分得：$y=\ln(e^x+e^{-x})+C_2$

将 $y(0)=0$ 代入得

$0=\ln 2+C_2 \Rightarrow C_2=-\ln 2$

则 $y=\ln(e^x+e^{-x})-\ln 2$

即 $y=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\ln \operatorname{ch}x$

(6) 因 $(1-x^2)\,y'''+2xy''=0$

则 $(1-x^2)\frac{dy''}{dx}+2xy''=0$

即 $\frac{dy''}{y''}=\frac{2x}{x^2-1}dx$

两边积分得：$\ln|y''|=\ln|x^2-1|+\ln|C_1|$

即 $y''=C_1(x^2-1)$

因 $y''(2)=3$，则 $3=C_1(4-1)\Rightarrow C_1=1$

则 $y''=x^2-1$

则 $y'=\frac{1}{3}x^3-x+C_2$

因 $y'(2)=\frac{2}{3}$，则 $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times 8-2+C_2\Rightarrow C_2=0$

则 $y'=\frac{1}{3}x^3-x$

则 $y=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^2+C_3$

又 $y(2)=0$，$0=\frac{1}{12}\times 16-\frac{1}{2}\times 4+C_3\Rightarrow C_3=\frac{2}{3}$

则 $y=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}$

3. 对于 $y=\frac{x}{2}+1$. 有 $y'=\frac{1}{2}$ 则 $y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$ $y|_{x=0}=1$

因 $y''=x$

则 $y'=\frac{1}{2}x^2+C_1$

又 $y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$. 则 $\frac{1}{2}=C_1$ $\Rightarrow C_1=\frac{1}{2}$

即 $y'=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$

则 $y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+C_2$

又 $y|_{x=0}=1$. 则 $1=C_2$ $\Rightarrow C_2=1$

则 $y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+1$