习题3-3

1. (1) $y'=2-\frac{8}{x^2}$. 由$y'>0$得 $x<-2$ 或 $x>2$, 由$y'<0$得 $-2<x<0$, $0<x<2$

则y在$(-2,0)$, $(0,2)$单调减少, 在$(-\infty,-2)$, $(2,+\infty)$单调增加.

(2) $y'=4x-\frac{1}{x}$. 由$y'>0$得 $x>\frac{1}{2}$, 由$y'<0$得 $0<x<\frac{1}{2}$

则y在$(0,\frac{1}{2})$单调减少, 在$(\frac{1}{2},+\infty)$单调增加

(3) $y'=\frac{-10(12x^2-18x+6)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}$, 由$y'>0$得 $\frac{1}{2}<x<1$, 由$y'<0$得 $x<0$, $0<x<\frac{1}{2}$, $x>1$

则y在$(-\infty,0)$. $(0,\frac{1}{2})$ $(1,+\infty)$单调减少, 在$(\frac{1}{2},1)$单调增加

(4) $y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{x\sqrt{1+x^2}+1+x^2}$

我们考虑中间的式子, 因 $x+\sqrt{1+x^2}$ 恒大于0, $1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 恒大于0

则y'在$(-\infty,+\infty)$上恒大于0, 则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上递增.

2. 证明:(1)设$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$, 则$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, 当$x>0$时, $f'(x)<0$.

则$f(x)$在$(0,+\infty)$上递减, 又$f(0)=0$,

则$f(x)$在$(0,+\infty)$小于$f(0)=0$

即 $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$

(2) 设$f(x)=\sin x+\tan x-2x$, 则$f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos x}-2$

因 $|\cos x|<1$ $|\frac{1}{\cos x}|<1$, 则$f'(x)\geq 0$, ~~则~~ 又$0<x<\frac{\pi}{2}$, 则等号成立不了,

则$f'(x)>0$, 即$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上递增, 又$f(0)=0$, 则$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$大于0

即 $\sin x+\tan x>2x$.

(3) 设$f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3$, 则$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1-x^2=\tan^2 x-x^2$

又$f''(x)=2\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-2x$, $f'''(x)=\frac{(6-4\cos^2 x)}{\cos^4 x}-2$,

令$a=\frac{1}{\cos^2 x}$; $f'''(x)=6a^2-4a-2$, 当$a<1$时. $f'''(x)<0$, $a>1$时$f'''(x)>0$

又$a=\frac{1}{\cos^2 x}>1$, 则$f'''(x)>0$, 则$f''(x)$递增, 又$f''(0)=0$, 则$f''(x)>0$,

所以$f(x)$递增. 又$f'(0)=0$. 所以$f'(x)>0$, 则$f(x)$是递增, 又$f(0)=0$, 则

$f(x)>0$, 即

$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$.

(4) 令 $f(x)=2^x-x^2$，$f'(x)=2^x\ln 2-2x$；$f''(x)=2^x\ln 2\ln 2-2$，

当 $x>4$ 时，$f''(x)>0$，则 $f'(x)$ 单增，又 $f'(4)=2^4\ln 2-8>0$，则 $f'(x)>0$

即 $f(x)$ 在 $(4,+\infty)$ 上递增，又 $f(4)=2^4-4^2=0$，则 $f(x)>f(4)=0$ 则

$2^x>x^2$.

(5). 要证 $\ln(1+x)\geq\frac{\arctan x}{1+x}$，即证 $(1+x)\ln(1+x)\geq\arctan x$，

令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$. 则 $f(0)=0$. $f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}$.

又 $\ln(1+x)\geq 0$. 则 $x>0$ 时，$f'(x)>0$.

故 $f(x)$ 单增，则 $f(x)\geq 0$. 则有

$\ln(1+x)\geq\frac{\arctan x}{1+x}$

(6) 令 $f(x)=(1+x^2)e^{-x^2}-1$，则 $f'(x)=2xe^{-x^2}+(1+x^2)e^{-x^2}(-2x)=-2x^3e^{-x^2}$.

则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 大于0，在 $(0,+\infty)$ 上小于0，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 递增，在 $(0,+\infty)$ 递减.

又 $f(0)=0$，则 $f(x)<0$ 恒成立. $(1+x^2)e^{-x^2}-1<0$，变形为：

$e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}$.

(7). 令 $f(x)=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}x^2-1$，则 $f'(x)=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}-x$；$f''(x)=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}-1>0\ (x\neq 0)$

则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 上递增，又 $f'(0)=0$，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上小于0，在 $(0,+\infty)$ 大于0

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上递减，在 $(0,+\infty)$ 上递增. 又 $f(0)=0$，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上，$(0,+\infty)$ 上都大于0，即 $\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}x^2-1>0$，变形为：

$\frac{e^x+e^{-x}}{2}>1+\frac{x^2}{2}$.

(8). 令 $f(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3$，则 $f'(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$，$f''(x)=-\sin x+x$，$f'''(x)=-\cos x+1$

因 $x>0$，则 $f'''(x)>0$. 则 $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，又 $f''(0)=0$. 则 $f''(x)>0$. 则

$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，又 $f'(0)=0$. 则 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，又

$f(0)=0$. 则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上大于0，即 $\sin x-x+\frac{1}{6}x^3>0$，则：

$\sin x>x-\frac{x^3}{6}$.

(9). 令 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{\frac{1}{\cos^2x}x-\tan x}{x^2}=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2}$，令 $g(x)=x-\sin x\cos x$，

$g'(x)=1-\cos x\cos x+\sin^2x=1-\cos 2x$，因 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. 则 $g'(x)=1-\cos 2x>0$. 则

$f'(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上大于0，则 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上递增，又 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$，则：

$f(x_2)>f(x_1)$ 即 $\frac{\tan x_2}{x_2}>\frac{\tan x_1}{x_1}$，即 $\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1}$

3. (1) $y'=3x^2-4x^3$　$y''=6x-12x^2$.

令 $y'\geq 0$ 得：$x<\frac{3}{4}$，$y'\leq 0$ 得 $x>\frac{3}{4}$，$y'=0$ 得 $x=0$ 或 $\frac{3}{4}$

则 y 在 $(-\infty,\frac{3}{4})$ 单增，在 $(\frac{3}{4},+\infty)$ 单减，

又 $y''|_{x=0}=0$　$y''|_{x=\frac{3}{4}}=-\frac{9}{4}<0$，又因为在 $x=0$ 的左右两侧邻域内都有 $f'(x)>0$

则只有极大值 $y|_{x=\frac{3}{4}}=\frac{27}{256}$.

(2) $y'=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$　$y''=\frac{-2x(1+x^2)^2-2(1+x^2)2x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

令 $y'>0$ 得 $-1<x<1$，令 $y'<0$ 得 $x<-1$ 或 $x>1$，$y'=0$ 得 $x=-1$ 或 $x=1$

则 y 在 $(-1,1)$ 上单增，在 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 上单减.

又 $y''|_{x=-1}=\frac{1}{2}>0$　$y''|_{x=1}=-\frac{1}{2}<0$

则 y 在 $x=-1$ 处取极小值为 $-\frac{1}{2}$，在 $x=1$ 处取极值为 $\frac{1}{2}$.

(3) $y'=\frac{2\ln x-\frac{1}{x}2x}{(\ln x)^2}=\frac{2\ln x-2}{(\ln x)^2}$，$y''=\frac{\frac{2}{x}(\ln x)^2-2\ln x\cdot\frac{1}{x}(2\ln x-2)}{(\ln x)^4}=\frac{4-2\ln x}{x(\ln x)^3}$

令 $y'>0$，得 $x>e$. 令 $y'<0$ 得 $0<x<e$. 令 $y'=0$，得 $x=e$.

则 y 在 $(e,+\infty)$ 上单增，在 $(0,e)$ 上单减.

又 $y''|_{x=e}=\frac{2}{e}>0$，则：

y 在 $x=e$ 处取极小值 $2e$.

(4) $y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$，$y''=2e^{-x}-2xe^{-x}-2xe^{-x}+x^2e^{-x}=2e^{-x}-4xe^{-x}+x^2e^{-x}$

令 $y'>0$ 得 $0<x<2$，令 $y'<0$ 得 $x<0$ 或 $x>2$，令 $y'=0$，得 $x=0$ 或 2.

则 y 在 $(0,2)$ 单增，在 $(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$ 单减，

又 $y''|_{x=0}=2>0$　$y''|_{x=2}=-2e^{-2}<0$

则 y 在 $x=0$ 处取极小值 0　在 $x=2$ 处取极大值为 $4e^{-2}$

(5). $y'=\cos x+\cos^2x-\sin^2x=\cos x+\cos 2x$.　$y''=-\sin x-2\sin 2x$.

令 $y'>0$，得 $2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{3}$ 或 $2k\pi+\frac{5}{3}\pi<x<2k\pi+2\pi$.

令 $y'<0$ 得 $2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5}{3}\pi$.　令 $y'=0$，得 $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ 或 $x=2k\pi+\frac{5}{3}\pi$.

则 y' 在 $(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{3})$，$(2k\pi+\frac{5}{3}\pi,2k\pi+2\pi)$ 上单增，在 $(2k\pi+\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{5}{3}\pi)$ 上单减.

又 $y''|_{x=2k\pi+\frac{\pi}{3}}=\frac{-3\sqrt{3}}{2}<0$，$y''|_{x=2k\pi+\frac{5\pi}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}>0$.

则 y 在 $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ 处取极大值 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$，在 $x=2k\pi+\frac{5\pi}{3}$ 取极小值 $\frac{-3\sqrt{3}}{4}$

(6) ~~y~~ $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$ $f''(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

令$f'(x)>0$得$x>0$，令$f'(x)<0$得$-1<x<0$. 令$f'(x)=0$. 得$x=0$

则$f(x)$在$(0,+\infty)$上单增，在$(-1,0)$上单减，

又$f''(0)=1>0$

则$f(x)$在$x=0$处取极小值$f(0)=0$

(7) $f'(x)=\frac{\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}(x-1)-(x+1)^{\frac{2}{3}}}{(x-1)^2}$， $f''(x)=\frac{-\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{4}{3}}(x-1)^2-\frac{4}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}(x-1)+2(x+1)^{\frac{2}{3}}}{(x-1)^3}$

令$f'(x)>0$ 得$-5<x<-1$，令$f'(x)<0$得$x<-5$或$-1<x<1$或$x>1$，令$f'(x)=0$，得$x=-1$或-5

则$f(x)$在$(-5,-1)$上单增，在$(-\infty,-5)$, $(-1,1)$ $(1,+\infty)$上单增，

又$f''(-1)=0$ $f''(-5)>0$，且在$x=-1$左边邻域$f'(x)>0$ 在$x=-1$右边邻域$f'(x)<0$

则$f(x)$在$x=-1$处取极大值为0. 在$x=-5$时取极小值$\frac{-4^{\frac{2}{3}}}{6}$.

(8) $f'(x)=\begin{cases}3x^2 & x>0\\ 0 & x=0\\ -\sin x & -\pi<x<0\\ \text{不存在} & x=-\pi\\ -1 & x<-\pi\end{cases}$

令$f'(x)\geq 0$，得$x>-\pi$. 令$f'(x)\leq 0$ 得$x<-\pi$，~~令$f'(x)=0$，得$x=0$或~~

又在$x=0$的左右邻域$f'(x)>0$. 则$x=0$不是极值点.

在$x=-\pi$的左邻域$f'(x)<0$. 右邻域内$f'(x)>0$，则$f(x)$在$x=-\pi$处取极小值$f(-\pi)=-2$

4. 解：$f'(x)=a\cos x+\cos 3x$，因$f'(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}a-1$，$f'(\frac{\pi}{3})$存在 则$f'(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}a-1=0$.

则$a=2$，又$f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$. 则$f''(\frac{\pi}{3})=-\sqrt{3}<0$

则$x=\frac{\pi}{3}$是其极大值点，即$f(x)$在$x=\frac{\pi}{3}$处取极大值.

5. (1). $y'=1+\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在$[0,4]$上大于0 则y在$[0,4]$上递增.

又$y|_{x=0}=0$ $y|_{x=4}=8$.

则最大值为8 最小值为0

(2) $y'=e^{-\frac{x^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)=(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$，$y'$在$(-1,1)$上大于0，在$(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$上大于0

则y在$(-1,1)$上递增，在$(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$上递减. $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}x}=0<e^{-\frac{1}{2}}$

又$f(-1)=-e^{-\frac{1}{2}}$ $f(1)=e^{-\frac{1}{2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}=0>-e^{-\frac{1}{2}}$，则最大值为$e^{-\frac{1}{2}}$ 最小值为$-e^{-\frac{1}{2}}$

(3) $y'=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$ 在 $[0,4]$ 大于零，则 y 在 $[0,4]$ 上递增。

又 $y|_{x=0}=-1$ $y|_{x=4}=\frac{3}{5}$.

则最小值为 -1. 最大值为 $\frac{3}{5}$.

(4) $y'=3\sin^2x\cos x-3\cos^2x\sin x$，令 $y'>0$ 得 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$，令 $y'<0$ 得 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}$

又 $f(\frac{\pi}{6})=\frac{3\sqrt{3}+1}{8}$ $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $f(\frac{\pi}{2})=1$ $f(\frac{3\pi}{4})=0$

则最大值为1，最小值为0.

(5). $y=\begin{cases}(1-x)^2 & x\in[0,\frac{1}{2}]\\ x^2 & x\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$.

在 $x\in[0,\frac{1}{2}]$ 时，$y'=2x-2<0$，$x\in[\frac{1}{2},1]$ 时 $y'=2x>0$.

则 y 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 递减. 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上递增.

又 $y|_{x=0}=1$ $y_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$ $y_{x=1}=1$

则最大值为1 最小值为 $\frac{1}{4}$.

(6). $y'=1-\sin x\geq 0$ 在 $[0,2\pi]$ 恒成立. 则 y 在 $[0,2\pi]$ 递增.

又 $y|_{x=0}=1$ $y|_{x=2\pi}=2\pi+1$

则最大值为 $2\pi+1$. 最小值为1

(7). $y'=\frac{1}{1+(\frac{1-x}{1+x})^2}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=\frac{-2}{(1+x)^2+(1-x)^2}$ 在 $[0,1)$ 上小于0，则 y 在 $(0,1)$ 上递减.

又 $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$ $y|_{x=1}=0$

则最大值为 $\frac{\pi}{4}$ 最小值为 0.

(8). $y'=-\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{(1-x)^2}=\frac{b^2x^2-a^2(1-x)^2}{x^2(1-x)^2}$，令 $y'>0$ 得 $1>x>\frac{a}{a+b}$，令 $y'<0$ 得 $0<x<\frac{a}{a+b}$

则 y 在 $(0,\frac{a}{a+b})$ 递减，在 $(\frac{a}{a+b},1)$ 递增.

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}=+\infty$

则 y 在 $x=\frac{a}{a+b}$ 处取最小值 $(a+b)^2$，而无最大值

(9) $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & x\in[-10,1]\cup[2,10] \\ -x^2+3x-2 & x\in(1,2) \end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & x\in(-10,1)\cup(2,10) \\ -2x+3 & x\in(1,2) \end{cases}$

$f'(x)$在$(-10,1)$ $(\frac{3}{2},2)$上小于0 在$(1,\frac{3}{2})$, $(2,10)$上大于0

则$f(x)$在$(-10,1)$ $(\frac{3}{2},2)$上 递减，在$(1,\frac{3}{2})$ $(2,10)$上递增.

又$f(-10)=132$　$f(1)=0$　$f(\frac{3}{2})=\frac{1}{4}$　$f(2)=0$　$f(10)=72$

则最小值为0　最大值为132

(10) $y'=\frac{2}{3}(x^2-2x)^{-\frac{1}{3}}(2x-2)$，令$y'>0$. 得$2<x<3$或$0<x<1$，令$y'<0$，得$1<x<2$.

则y在$(0,1)$ $(2,3)$上递增，在$(1,2)$上递减.

又$y|_{x=0}=0$　$y|_{x=1}=1$　$y|_{x=3}=\sqrt[3]{9}$　$y|_{x=2}=0$

则y的最大值为$\sqrt[3]{9}$，最小值为0

6. (1) 令$f(x)=\sin x-x$　$f(0)=0$.

又$f'(x)=\cos x-1\leq 0$. 则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递减，又$f(0)=0$.

则方程$\sin x=x$只有唯一实根$x=0$

(2) 令$f(x)=e^x-x-1$，$f(0)=0$

又$f'(x)=e^x-1$，令$f'(x)>0$，得$x>0$，令$f'(x)<0$ 得$x<0$. 则

$f(x)$在$(-\infty,0)$上单减，在$(0,+\infty)$上单增，又$f(0)=0$

则方程$e^x-x-1=0$只有一个实根$x=0$.

7、解：建筑用料最少即图形的周长最短，设周长为l，矩形另一边长为y，则：

$l=x+2y+\frac{\pi x}{2}$，由已知截面积为a，则有$xy+\frac{\pi}{2}(\frac{x}{2})^2=a$.

$\Rightarrow y=\frac{a}{x}-\frac{\pi x}{8}$. 带入$l$的表达式，对x求导，即$l=x+\frac{2a}{x}-\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}x=x+\frac{2a}{x}+\frac{\pi}{4}x$

$l'=1-\frac{2a}{x^2}+\frac{\pi}{4}$，令$l'=0$，得$x=\sqrt{\frac{8a}{4+\pi}}$. 又$l$在$x=\sqrt{\frac{8a}{4+\pi}}$的左邻域$f'(x)<0$

右邻域$f'(x)>0$. 则$x=\sqrt{\frac{8a}{4+\pi}}$为其最小值点.

即$x=\sqrt{\frac{8a}{4+\pi}}$时，所用材料最省

8. 解：设 $AC=x$. 则C到甲的距离是 $\sqrt{x^2+1}$，C到乙的距离是 $\sqrt{1.5^2+(3-x)^2}$

则电线总长为：$L=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1.5^2+(3-x)^2}$　$(0\leqslant x\leqslant 3)$

则 $L'=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{2x-6}{2\sqrt{1.5^2+(3-x)^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{x-3}{\sqrt{1.5^2+(3-x)^2}}$

令 $L'=0$. 得 $x=1.5km$. 又L在 $(0,1.5)$ 上单减，在 $(1.5,3)$ 上单增.

则L在 $x=1.5$ 时取得最短

9. 解：(此题出的很烂！"租出去的公寓每月要交100元的物业费"，难道不出租就不交物业费？

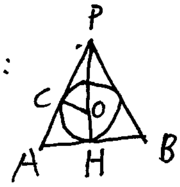
出题人缺乏生活常识!!!，算了，我不讽刺，按出题者意思走。!!!)

设总收入为W. 则 $W=(1000+50N)(50-N)-100(50-N)$.　(N代表增加的50元数)

$W'=-100N+1600$. 则 $N=16$ 时，$W'=0$. 又 $N<16$ 时 $W'>0$. $N>16$ 时. $W'<0$

则 $N=16$ 时，即房租为 $1000+50\times16=1800$ 元时. 收益最大 .

10. 解：作图如下：



设外切部面图为 $\triangle PAB$，PA PB为圆锥母线，AB是底圆直径，C是球在母线PA上的切点，

O为球心，AH是圆锥的高，AH是底圆半径R .

设 $OP=x$. $PC=\sqrt{x^2-r^2}$　$(x>r)$

$Rt\triangle PCO\sim Rt\triangle PHA$，$CO=OH=r$. $PH=r+x$. $\dfrac{CO}{AH}=\dfrac{PC}{PH}$.

$\dfrac{r}{R}=\dfrac{\sqrt{x^2-r^2}}{r+x}$，$R=r(r+x)/\sqrt{x^2-r^2}$，则：

体积 $V=\pi R^2\cdot\dfrac{PH}{3}=\dfrac{\pi r^2(r+x)^2(r+x)}{(x^2-r^2)3}=\dfrac{\pi r^{\frac{2}{3}}(r+x)^2}{x-r}$

$V_x'=\dfrac{\pi r^{\frac{2}{3}}(x^2-2rx-3r^2)}{(x-r)^2}$，令 $V_x'=0$. 则 $x=3r$，$x=r$(舍去)

当 $x<3r$ 时 $V_x'<0$，V单减，$x>3r$ 时，$V'>0$，V单增.

故 $x=3r$ 最小值点，外切球有最小值，即圆锥的高 $h=4r$，

V最小为 $\dfrac{\pi r^{\frac{2}{3}}(r+3r)^2}{3r-r}=\dfrac{8\pi r^3}{3}$

11. 解：设吊臂倾角度数为 A. 则吊的高度 H 与倾角的函数为：

$$H=15\sin A-\frac{3}{2}\tan A+(2-1.5)=15\sin A-3\tan A+0.5\quad(0<A\le\frac{\pi}{2})$$

$H'=15\cos A-\frac{3}{\cos^2 A}$，令 $H'=0$ 得 $\cos A=5^{-\frac{1}{3}}$

当 $\cos A<5^{-\frac{1}{3}}$ 时 $H'<0$　$\cos A>5^{-\frac{1}{3}}$ 时，$H'>0$

则 H 在 $\cos A=5^{-\frac{1}{3}}$ 时，H 最大，

因 $A=\arccos 5^{-\frac{1}{3}}\approx 54°$，则 $H\approx 7.506m>6m$

则能吊上去

12. 解：设车速为 $x\,km/h$，则这次行车的总费用为：

$$y=\frac{130}{x}\times 14+\frac{130}{x}\cdot(2+\frac{x^2}{360})\times 2=\frac{130}{x}(18+\frac{x^2}{180})$$

令 $y'=\frac{13}{18x^2}\cdot(x^2-18\times 180)=0$，可得唯一驻点 $x=18\sqrt{10}\approx 57$，由实际问题性质知，

最经济的车速约为 $57km/h$，这次行车的总费用为：

$y(18\sqrt{10})=\frac{260}{\sqrt{10}}\approx 82.2$ 元

13. 解：(1) $S_A=\frac{1}{2}(a-x)y=\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{x^2-(a-x)^2}=\frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-a^2}\quad(0\le x\le a)$

$$S_A'=-\frac{1}{2}\sqrt{2ax-a^2}+\frac{1}{2}(a-x)\frac{2a}{2\sqrt{2ax-a^2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2ax-a^2}+\frac{a(a-x)}{2\sqrt{2ax-a^2}}=\frac{-3ax+\frac{3}{2}a^2}{2\sqrt{2ax-a^2}}$$

令 $S_A'=0$，得 $x=\frac{2}{3}a$；又 $x<\frac{2}{3}a$ 时 $S_A'>0$. $x>\frac{2}{3}a$ 时，$S_A'<0$

则 $x=\frac{2}{3}a$ 时 S_A 最大为 $\frac{\sqrt{2}}{9}a^2$

(2) B 的一直边为 x. 设另一边为 t. 则 $t^2-a^2=(t-y)^2=(t-\sqrt{2ax-a^2})^2$

$\Rightarrow t=\frac{ax}{\sqrt{2ax-a^2}}$　则 $S_B=\frac{1}{2}x\frac{ax}{\sqrt{2ax-a^2}}$，$S_B'=\frac{ax(3x-2a)}{(2x-a)\sqrt{2ax-a^2}}\quad(0<x<a)$

令 $S_B'=0$，得 $x=\frac{2}{3}a$，又 $x<\frac{2}{3}a$ 时，$S_B'<0$　$x>\frac{2}{3}a$ 时. $S_B'>0$

则 $x=\frac{2}{3}a$ 时 S_B 最小.

(3). $z=\sqrt{x^2+(\frac{ax}{\sqrt{2ax-a^2}})^2}=\sqrt{\frac{2x^3}{2x-a}}$，令 $g(x)=\frac{2x^3}{2x-a}$. 则 z 与 $g(x)$ 同时取最小.

$g'(x)=\frac{8x^3-6ax^2}{(2x-a)^2}$，令 $g'(x)=0$. 得 $x=\frac{3}{4}a$. 又 $x<\frac{3}{4}a$ 时. $g'(x)<0$. $x>\frac{3}{4}a$ 时. $g'(x)>0$.

则 $g(x)$ 在 $x=\frac{3}{4}a$ 时取最小，

则 z 在 $x=\frac{3}{4}a$ 时取最小

14. 设底半径为r，高为h. 则体积 $V=\pi r^2h+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3$，设单侧面造价为$t$.

设总造价为W. 则 $W=\frac{1}{2}\times4\pi r^2\,2t+2\pi rh\cdot t=4\pi r^2t+\frac{2tV}{r}-\frac{4t}{3}\pi r^2=\frac{2tV}{r}-\frac{8}{3}\pi r^2t$

$W'_r=-\frac{2tV}{r^2}-\frac{16}{3}\pi rt$ 令$W'_r=0$，可得 $r=\frac{1}{2}(\frac{3V}{\pi})^{\frac{1}{3}}$，又$r<\frac{1}{2}(\frac{3V}{\pi})^{\frac{1}{3}}$时 $W'_r<0$.

$r>\frac{1}{2}\cdot(\frac{3V}{\pi})^{\frac{1}{3}}$时. $W'_r>0$. 则$r=\frac{1}{2}(\frac{3V}{\pi})^{\frac{1}{3}}$时. W最小，此时$h=(\frac{3V}{\pi})^{\frac{1}{3}}$

15. 解: $\beta=\arctan\frac{a+b}{h}-\arctan\frac{a}{h}$，则:

$$\beta'=\frac{1}{1+(\frac{a+b}{h})^2}\left(\frac{a+b}{-h^2}\right)-\frac{1}{1+\frac{a^2}{h^2}}\cdot\left(-\frac{a}{h^2}\right)=\frac{-a-b}{h^2+(a+b)^2}+\frac{a}{h^2+a^2}$$

令$\beta'=0$ 得 $h=\sqrt{ab+a^2}$. 由问题实际意义，β确有最大值.

当$h=\sqrt{ab+a^2}$时. β最大为$\arctan\frac{b}{2\sqrt{a(a+b)}}$

16. 此题须运用物理常识：载重量 $G=kxh^2$，(k为正常数，x为宽，h为厚).

又 $h^2=a^2-x^2$. 则 $G=kx(a^2-x^2)$. 则 $G'_x=ka^2-3kx^2$.

令$G'_x=0$ 得 $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$，又 $x>\frac{a}{\sqrt{3}}$时. $G'_x<0$ $x<\frac{a}{\sqrt{3}}$时. $G'_x>0$.

则$x=\frac{a}{\sqrt{3}}$，$h=\sqrt{\frac{2}{3}}a$ 时，此梁载重能最强.

17. 由图像：$f'(x)=0$的点有 $x=-3$, $x=-1$. $x=1$,

又在$x=-3$的左邻域内 $f'(x)>0$. 右邻域内 $f'(x)<0$，则$x=-3$为极大值点.

同理可得 $x=0$是极大值点.

$x=-1$, $x=1$是极小值点.