习题4-7 （建议使用matlab作图更直观）

1.(1) $\begin{cases} y=\frac{x^2}{4} \\ y=\frac{3x-4}{2} \end{cases} \Rightarrow$ 交点为 $(2,1)$ 和 $(4,4)$.

取x为积分变量，则.

面积 $A=\int_2^4\left(\frac{x^2}{4}-\frac{3x-4}{2}\right)dx=\left(\frac{1}{12}x^3-\frac{3}{4}x^2+2x\right)\Big|_2^4=\frac{1}{3}$

(2) $\begin{cases} y^2=-4(x-1) \\ y^2=-2(x-2) \end{cases} \Rightarrow$ 交点为 $(0,2)$ 和 $(0,-2)$

取y为积分变量 则

面积 $A=\left|\int_{-2}^{2}\left(\frac{y^2}{-4}+1-\frac{y^2}{-2}-2\right)dx\right|=\left|\int_{-2}^{2}\left(\frac{y^2}{4}-1\right)dx\right|=\left|\left(\frac{1}{12}y^3-y\right)\Big|_{-2}^{2}\right|=\frac{8}{3}$

(3) $y=\frac{1}{x}$ 与 $y=x$ 交于 $(1,1)$. 又 $x=2$ 与两直线交于 $(2,\frac{1}{2})$, $(2,2)$

取x为积分变量，则

面积 $A=\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\ln x\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}-\ln 2$

(4) 考虑图像可知.

面积 $A=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-2\cos x\Big|_0^{\pi}=4$

(5) $y=e^x$ 与 $y=e^{-x}$ 交于 $(0,1)$, $x=1$ 与两直线交于 $(1,e)$ $(1,e^{-1})$

以x为积分变量，则

面积 $A=\int_0^1(e^x-e^{-x})dx=(e^x+e^{-x})\Big|_0^1=e+e^{-1}-2$

(6) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 与两坐标轴交于 $(0,1)$ $(1,0)$

以x为积分变量，则

$A=\int_0^1(1-\sqrt{x})^2dx=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)dx=\left[x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]\Big|_0^1=\frac{1}{6}$

(7) $\begin{cases} y=\frac{x^2}{2} \\ y=\sqrt{8-x^2} \end{cases} \Rightarrow$ 交点为 $(-2,2)$. $(2,2)$

$$A=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\left(\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2}+\frac{8}{2}\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{6}x^3\right)\Big|_{-2}^{2}$$
$$=2+4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{3}+2+4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{-4}{3}$$
$$=2\pi+\frac{4}{3}$$

(8) $\begin{cases} y=x \\ y=x+\sin^2 x \end{cases} \Rightarrow$ 交点为 $(0,0)$ (π,π)

以 x 为积分变量，则

面积 $A=\int_0^{\pi}(x+\sin^2 x-x)dx=\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=2\times\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

(9) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}=0$. 则 $y=0$ 是其水平渐近线，即 x 轴.

$y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ 连续，无水平渐近线

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x}=0$. 则无斜渐近线.

故只有 x 轴与其所夹.

则令 $t=-\frac{x^2}{2}$ 则 $dt=-x\,dx$，又 $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ 为奇函数

则 $A=2\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}\cdot dx=-2\int_0^{\infty}e^t dt=2\int_{-\infty}^0 e^t dt=2e^t\Big|_{-\infty}^0=2e^0=2$

2 (1) 设切线斜率为 k，切线为 kx，代入 $y=x^2-x+2$. 得 $x^2-(k+1)x+2=0$

由判别式：$(k+1)^2-8=0$ 得 $k=-1\pm2\sqrt{2}$

$k=-1-2\sqrt{2}$ 时：$x^2+2\sqrt{2}x+2=0$. $\Rightarrow x=-\sqrt{2}$

$k=-1+2\sqrt{2}$ 时：$x^2-2\sqrt{2}x+2=0$ $\Rightarrow x=\sqrt{2}$

则 $S=\int_{-\sqrt{2}}^0[x^2-x+2-(-1-2\sqrt{2})x]dx+\int_0^{\sqrt{2}}[x^2-x+2-(-1+2\sqrt{2})x]dx$

$=(\frac{1}{3}x^3+\sqrt{2}x^2+2x)\Big|_{-\sqrt{2}}^0+(\frac{1}{3}x^3-\sqrt{2}x^2+2x)\Big|_0^{\sqrt{2}}$

$=0-(-\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{2}-2\sqrt{2})+(\frac{2\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2}+2\sqrt{2})-0=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

(2) 对 $y^2=2x$ 两边求导 $2yy'=2$，在 $(\frac{1}{2},1)$ 处 $y'=1$，所以法线斜率是 $k=-1$

所以法线方程为 $x+y-\frac{3}{2}=0$

与 $y^2=2x$ 联立得 $(\frac{1}{2},1)$ $(\frac{9}{2},-3)$

以 y 为积分变量，则：

面积 $A=\int_{-3}^1\left((\frac{3}{2}-y)-\frac{1}{2}y^2\right)dy=(\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6}y^3)\Big|_{-3}^1$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{9}{2}+\frac{9}{2}-\frac{9}{2}$

$=\frac{16}{3}$

3. (1) 其一拱代表 $0\le t\le 2\pi$ · 则 $0\le x\le 2\pi a$

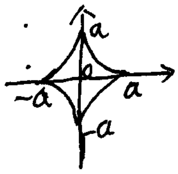
则 $S=\int_0^{2\pi a} y\,dx=\int_0^{2\pi a} a(1-\cos t)dx=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(dt-\cos t\cdot dt)$

$=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt$

$=a^2\left(t-2\sin t+\frac{\frac{1}{2}\sin 2t+t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$

$=a^2[2\pi+\pi-0]$

$=3\pi a^2$

(2) 补充说明：星形线图形：

其面积为 $S=4\int_0^a y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3\theta\, d\,a\cos^3\theta=-4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cdot 3\cos^2\theta(-\sin\theta)d\theta$

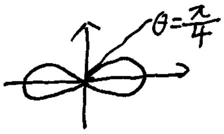
$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)d\theta=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4\theta-\sin^6\theta)d\theta$

$=12a^2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{3\pi}{8}a^2$

则其与圆 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$ 所夹面积为：

$\pi a^2-\frac{3\pi}{8}a^2=\frac{5\pi}{8}a^2$

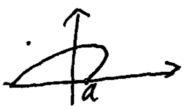
4 (1) 双纽线图像：

，由极坐标面积公式.

则 $S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\rho^2d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\times 4\cos 2\theta\,d\theta=8\times\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=4\sin\frac{\pi}{2}=4$

(2) 将 $\rho=2a\cos\theta$ 化为直角坐标形式：$x^2+y^2=2ax\Rightarrow(x-a)^2+y^2=a^2$. 即：圆.

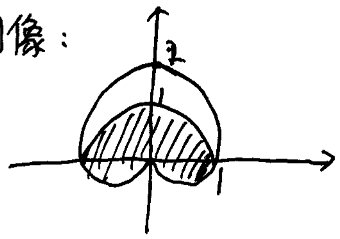
则面积为 πa^2.

(3). 对数螺线图像：

由极坐标面积公式：

$A=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(ae^\theta)^2d\theta=\frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2\theta}d\theta=\frac{a^2}{4}e^{2\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{a^2}{4}(e^{2\pi}-e^{-2\pi})$

5. 图像：



由图像可知，图像关于y轴对称，则只需计算右边部分乘以2即可。

右边面积 $S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{2}\cdot(1+\sin\theta)^2d\theta+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cdot 1\,d\theta$

$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1+\sin^2\theta+2\sin\theta)d\theta+\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{2}(\theta-2\cos\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2\theta d\theta+\frac{\pi}{4}$

$=-1+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

$=\frac{5\pi}{8}-1$

则阴影面积 $=2\times(\frac{5\pi}{8}-1)=\frac{5\pi}{4}-2$.

6. 设 $y=b\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的交点的横座标是 B. 则由 $b\sin B=\cos B$ 得 $\tan B=\frac{1}{b}$,

进而 $\sin B=\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$，$\cos B=\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$

又 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1$

则 $y=b\sin x$，$y=\cos x$，x轴所围成的面积为 $\frac{1}{3}$.

有 $\frac{1}{3}=\int_{0}^{B}b\sin x\,dx+\int_{B}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=b-b\cos B+1-\sin B=\frac{1}{3}$，代入 $\cos B=\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$

$\sin B=\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$ 解得 $b=\frac{5}{12}$，同样地，可得 $a=\frac{4}{3}$

又因为 b 与 a 是可互换的. 则 $b=\frac{4}{3}$. $a=\frac{5}{12}$ 同样满足题设.

综上. $a=\frac{4}{3}$. $b=\frac{5}{12}$ 或 $a=\frac{5}{12}$, $b=\frac{4}{3}$.

7. $V=\int_{0}^{80}\frac{1}{400}(x+40)^2dx=\frac{1}{400}\int_{0}^{80}(x^2+80x+1600)dx$

$=\frac{1}{400}(\frac{1}{3}x^3+40x^2+1600x)\Big|_{0}^{80}$

$=\frac{1}{400}(\frac{1}{3}\times 80^3+40\times 80^2+1600\times 80)$

$=30976m^3$

8. 以半径为R的圆的圆心为原点，建立直角坐标系.

$$V=2\int_0^R \sqrt{3}(R^2-x^2)dx=2(\sqrt{3}R^2x-\frac{\sqrt{3}}{3}x^3)\Big|_0^R=\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3=\frac{500\sqrt{3}}{3}$$

9. (1) 利用柱壳法，取x为积分变量，故

$dV=2\pi x(10-x-\frac{9}{x})dx$，又 $xy=9$ 与 $x+y=10$ 交于 $(1,9)$ $(9,1)$.

则 $V=\int_1^9 2\pi x(10-x-\frac{9}{x})dx$

$=(10\pi x^2-\frac{2}{3}\pi x^3-18\pi x)\Big|_1^9$

$=\frac{512}{3}\pi$

(2) 由图像知图像关于x轴对称，则须考虑第一象限.

又 $\begin{cases} y^2=4x \\ y^2=8x-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$. 即两交点为 $(1,2)$，$(1,-2)$

用柱壳法，取y为积分变量.

$dV=2\pi y(\frac{y^2+4}{8}-\frac{y^2}{4})dy=\frac{\pi}{4}(\frac{-y^3+4y}{1})\cdot dy$

则 $V=\int_0^2 \frac{\pi}{4}(-y^3+4y)dy=\frac{\pi}{4}\int_0^2(-y^3+4y)dy$

$=\frac{\pi}{4}(-\frac{1}{4}y^4+2y^2)\Big|_0^2$

$=\pi$

(3) 由图像关于x轴对称，则only考虑第一象限.

又 $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 16x=3y^2 \end{cases}$ 可得两交点为 $(3,4)$ $(3,-4)$.

用柱壳法，取y为积分变量.

$dV=2\pi y(\sqrt{25-y^2}-\frac{3}{16}y^2)dy$.

则 $V=\int_0^4 2\pi y(\sqrt{25-y^2}-\frac{3}{16}y^2)dy$

$=2\pi\int_0^4 y\sqrt{25-y^2}dy-2\pi\int_0^4\frac{3}{16}y^3dy$

$=2\pi\int_0^4 -\frac{1}{2}\sqrt{25-y^2}d(25-y^2)-2\pi\cdot\frac{3}{64}y^4\Big|_0^4$

$=-\pi\cdot\frac{2}{3}(25-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4-8\pi=-18\pi+\frac{250\pi}{3}-24\pi=\frac{124}{3}\pi$

(4) 绕x轴：

用薄片法，以x为积分变量，则：

$dV=\pi\cdot\sin^2x\,dx$

$V=\int_0^{\pi}\pi\sin^2x\,dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,dx=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}$

绕y轴

用柱壳法，取x为积分变量

$dV=2\pi x\sin x\,dx$

$V=\int_0^{\pi}2\pi x\sin x\,dx=-2\pi\int_0^{\pi}x\,d\cos x=-2\pi x\cos x\Big|_0^{\pi}+2\pi\int_0^{\pi}\cos x\,dx$

$=2\pi^2+2\pi\sin x\Big|_0^{\pi}$

$=2\pi^2$

(5) 由题可得 $y^2=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3\quad x\in[-a,a]$

用薄片法，取x为积分变量

$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}(a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2)dx$

$=\pi(a^2x-3a^{\frac{4}{3}}\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-a}^{a}$

$=\pi(2a^3-\frac{18}{5}a^3+\frac{18}{7}a^3-\frac{2}{3}a^3)$

$=\frac{32}{105}\pi a^3$

(6). 用薄片法，取x为积分变量，$x\in[-4,4]$

$V=\int_{-4}^{4}\pi(5+\sqrt{16-x^2})^2-\pi(5-\sqrt{16-x^2})^2dx$

$=20\pi\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx=20\pi(\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}+\frac{16}{2}\arcsin\frac{x}{4})\Big|_{-4}^{4}$

$=20\pi(4\pi+4\pi)$

$=160\pi^2$

10.(1) 题目应加条件"$t\in[0,2\pi]$".

用"摆线与$y=2a$, $x=0$, $x=2\pi a$围成的面积，用外围圆柱体减掉即可".

$$V=\pi(2a)^2\cdot 2\pi a-\int_0^{2\pi}\pi[a(1+\cos t)]^2dx$$

$$=8\pi^2a^3-\int_0^{2\pi}\pi\cdot[a(1+\cos t)]^2[a(1-\cos t)]dt.$$

对于$\int_0^{2\pi}\pi[a^2(1+\cos t)^2][a(1-\cos t)]dt$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 t)(1+\cos t)dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos t-\cos^2 t-\cos^3 t)dt$$

$$=\pi a^3\left\{[t+\sin t]\Big|_0^{2\pi}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt-0\right\}$$

$$=\pi a^3\left\{2\pi-4\times\frac{1!!}{2!!}\times\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$=\pi^2a^3$$

则原图形绕$y=2a$旋转后体积为：

$$V=8\pi^2a^3-\pi^2a^3=7\pi^2a^3$$

(2) 由$x^2+y^2\le 4$得 $x=\pm\sqrt{4-y^2}$

用薄片法，取y为积分变量

$$V=\pi\int_{-2}^{2}\left\{\left[\sqrt{4-y^2}+3\right]^2-\left[-\sqrt{4-y^2}+3\right]^2\right\}dy$$

$$=12\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}\,dy$$

$$=12\pi\left(\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2}+\frac{4}{2}\arcsin\frac{y}{2}\right)\Big|_{-2}^{2}$$

$$=12\pi(\pi+\pi)$$

$$=24\pi^2$$

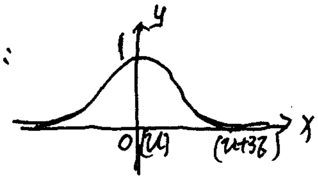
(3) "出这本书的老师真是以为我们是神，极轴是个啥JB，经作者翻阅百度，才得以解决"!

极轴是指：$\theta=0$的射线．显然心形线是关于极轴对称的，

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}64(1+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta=\frac{-128\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)^3d(\cos\theta+1)$$

$$=\frac{-128\pi}{3}\frac{(\cos\theta+1)^4}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=160\pi$$

11：钟形曲线：



用薄片法，由 $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$，$\Rightarrow x^2=-2\ln y$

以y为积分变量，因为图形关于y轴对称，则只计算第一象限旋转即可.

$$V=\pi\int_0^1 -2\ln y\,dy=-2\pi\cdot y\ln y\Big|_0^1+\pi\int_0^1(2)\,dy$$

$$=0-\lim_{y\to 0^+}\frac{-2\pi\ln y}{\frac{1}{y}}+(2\pi y)\Big|_0^1$$

$$=0+2\pi$$

$$=2\pi$$

12.(1) $$s=\int_{-1}^1\sqrt{1+(\mathrm{sh}\,x)^2}\,dx$$

$$=\int_{-1}^1|\mathrm{ch}\,x|\,dx$$

$$=\int_{-1}^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\Big|_{-1}^1$$

$$=e-e^{-1}$$

(2) $$s=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}\right)^2}\,dy$$

$$=\int_1^e\left|\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}\right|dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^e\left(y+\frac{1}{y}\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y^2+\ln y\right)\Big|_1^e$$

$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

(3) $S=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$

$= \left[\sqrt{x^2+1} - \ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right]\Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} = \sqrt{8+1} - \ln\frac{1+\sqrt{8+1}}{\sqrt{8}} - \sqrt{3+1} + \ln\frac{1+\sqrt{3+1}}{\sqrt{3}}$

$= 3 - \ln\sqrt{2} - 2 + \ln\sqrt{3} = 1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

(4) $S=\int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t + a\sin t + at\cos t)^2 + (a\cos t - a\cos t + at\sin t)^2}\,dt$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t}\,dt$

$= \int_0^{2\pi} at\,dt$

$= \frac{1}{2}at^2\Big|_0^{2\pi}$

$= 2\pi^2 a$.

(5). $S=\int_0^3 \sqrt{(2\theta^2)^2+(4\theta)^2}\,d\theta$

$= \int_0^3 2\theta\sqrt{\theta^2+4}\,d\theta$

$= \int_0^3 \sqrt{\theta^2+4}\,d(\theta^2+4)$

$= \frac{2}{3}(\theta^2+4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3$

$= \frac{2}{3}(13\sqrt{13}-8)$.

(6) $S=\int_0^{\varphi} \sqrt{(e^{a\theta})^2+(ae^{a\theta})^2}\,d\theta$

$= \int_0^{\varphi} e^{a\theta}\sqrt{1+a^2}\,d\theta$

$= \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\int_0^{\varphi} e^{a\theta}\,da\theta$

$= \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\cdot e^{a\theta}\Big|_0^{\varphi}$

$= \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\varphi}-1)$

13. $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\theta$

$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2}\,d\theta$

$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta$

$=2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$

$=2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta+2a\int_{\pi}^{2\pi}-\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$

$=8a.$

14. 先求摆线第一拱长.

$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{[a(1-\cos t)dt]^2+(a\sin t\,dt)^2}=2a\sin\frac{t}{2}\,dt.$

$s=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$

再求点坐标.

设A点满足要求，此时$t=c$，由$s=8a$，$ds=2a\sin\frac{t}{2}dt$，

由条件OA长为$2a$，即$2a\int_0^{c}\sin\frac{t}{2}dt=2a$，$c=\frac{2\pi}{3}$.

点A的坐标为$\left(\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a,\frac{3}{2}a\right)$.