

工科数学分析(上) 期末试题(A 卷)

座号 _____ 班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

(试卷共 6 页, 十个大题. 解答题必须有过程. 试卷后面空白纸撕下做草稿纸. 试卷不得拆散.)

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

得分	
----	--

一、填空(每小题4分, 共20分)

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{-2x+1} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 曲线 $y = (ax - b)^3$ 在点 $(1, (a - b)^3)$ 处有拐点, 则 a, b 应满足 $\underline{\hspace{2cm}}.$
- $\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 设 $y' + 2xy = 4x$, 则 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

得分	
----	--

二、计算题(每小题5分, 共20分)

- 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}.$

2. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2^{xy} = x + y$ 所确定, 求 $dy|_{x=0}$.

3. 求函数 $f(x) = (2x - 5) \cdot \sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间与极值.

4. 求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

得分	
----	--

三、(8分) 计算不定积分 $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$.

得分	
----	--

四、(8分) 已知曲线 $y = \frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2)$, 求该曲线的渐近线.

得分	
----	--

五、(6分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n=1, 2, \dots)$.

(1) 证明数列 $\{x_n\}$ 有极限, 并求出极限值;

(2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

得分	
----	--

六、(8分) 设曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = x$ 围成一平面图形 D .

(1) 求平面图形 D 的面积;

(2) 求平面图形 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

得分	
----	--

七、(8 分) 某物体的一个侧面为等腰梯形，上底长 10m，下底长 6m，高为 20m，铅直立于水中，在下列条件下分别计算这个侧面所受到的水压力.

- (1) 上底与水面相齐；
- (2) 上底位于水深 2m 处. (重力加速度 $g(m/s^2)$ ，水的密度 $\mu(kg/m^3)$).

得分	
----	--

八、(8 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{f(x)}{x} + \frac{\sin x}{x^2}) = 1$,

试求 $f'(0)$.

得分	
----	--

九、(8分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足

$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1, \text{ 求 } f(x) \text{ 的表达式.}$$

得分	
----	--

十、(6分) 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数, 且 $f(1)=1$.

证明:

- (1) 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$;
- (2) 存在 $\eta \in (-1,1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.