¡ 1.4　可逆矩阵

逆矩阵的概念及运算性质;

矩阵可逆性的判别;

逆矩阵的计算方法.

在数的运算中，当数 $a\neq 0$ 时，有

$$b¡\ a = b¡\ a^{-1},$$

其中 $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$ 为 a 的倒数(或称 a 的逆), 满足:

$$aa^{-1}=a^{-1}a=1.$$

仿照数的运算，在矩阵的运算中，单位阵 I 相当于数的乘法运算中的1，那么，对于矩阵 A，如果存在一个矩阵 A^{-1},使得

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I,$$

则矩阵 A^{-1}称为 A 的逆矩阵.

定义1.4.1 设A是n阶方阵。若存在n阶方阵B，使

$$AB=BA=I$$

则称A是可逆矩阵，称B是A的逆矩阵。

A的逆矩阵记作 A^{-1}. 非方阵一定不可逆

例　设　$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix},$

$\because AB=BA=I,\quad \therefore B$是$A$的一个逆矩阵.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}.$$

注 1　若 A 是可逆矩阵，则 A 的逆矩阵是唯一的.

事实上，若设 B 和 C 是 A 的逆矩阵，则有

$$AB=BA=I,\ AC=CA=I,$$

可得 $B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=C$.

所以 A 的逆矩阵是唯一的, 即

$$B=C=A^{-1}.$$

注 2　当 A 是可逆时，由$B=A^{-1}$, 即有

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I,$$

这说明当A可逆时,$B=A^{-1}$也可逆，并且

$B^{-1}=(A^{-1})^{-1}=A$. 即A与A^{-1}互为逆矩阵.

注 3 可逆矩阵只对方阵有意义，但方阵未必都可逆。

例1.4.1 讨论 n 阶零方阵 0 与 n 阶单位矩阵 I 的可逆性。

解　因为对于任意n阶方阵 A，有 $A0=0A=0\neq I$，所以n阶零方阵 0 不可逆。

因为 $II=II=I$，所以n阶单位矩阵 I 可逆，且 $I^{-1}=I$。

例1.4.2 设方阵 A 满足 $A^2-3A-10I=0$，证明 $A, A-3I$ 都可逆。

证明　由　$A^2-3A-10I=0$

$A(A-3I)=10I$　且　$(A-3I)A=10I$

于是有

$$(\frac{1}{10}A)(A-3I)=I \quad 且 \quad (A-3I)(\frac{1}{10}A)=I \qquad (1)$$

$$A[\frac{1}{10}(A-3I)]=I \quad 且 \quad [\frac{1}{10}(A-3I)]A=I \qquad (2)$$

由(1)得　$A-3I$ 可逆，且 $(A-3I)^{-1}=\dfrac{1}{10}A$

由(2)得　A可逆，且 $A^{-1}=\dfrac{1}{10}(A-3I)$.

例1.4.3 初等矩阵都是可逆矩阵，且它们的逆矩阵也是初等矩阵。

$[E_i(k)]^{-1}=E_i(\frac{1}{k})$, $[E_{ij}(k)]^{-1}=E_{ij}(-k)$, $[E_{ij}]^{-1}=E_{ij}$

定理1.4.1 设 A 是方阵，则 A 是可逆的充分必要条件是 A 满秩。

证明 充分性：设A是满秩矩阵，则由例1.3.6知：

存在同阶满秩矩阵B,使得$AB=BA=I$.

由矩阵可逆的定义知：A可逆.

必要性：

设A是n阶可逆矩阵，则存在A^{-1},使得$AA^{-1}=I$.

若A不满秩，则由A经初等行变换所得阶梯型矩阵B至少有一零行．即存在满秩矩阵P,使得$PA=B$,

用P左乘$AA^{-1}=I$,得 $BA^{-1}=P$

因为B至少有一行元素全为零 所以BA^{-1},即P也至少有一行元素全为零，但P是满秩矩阵，不含零行．矛盾！ 所以A是满秩矩阵.

矩阵可逆与矩阵满秩等价，故有关满秩矩阵的结论对可逆矩阵全部成立.

注：矩阵的可逆性的判别：

(1) 利用矩阵的秩； 满秩则可逆

(2) 利用矩阵可逆的定义. $AB=BA=I$

若矩阵是具体的，可利用初等行变换求矩阵的秩判别，若矩阵是抽象的，则可利用矩阵可逆的定义判别.

推论 若$AB=I$（或$BA=I$），则$B=A^{-1}$.

证明：设存在方阵B,使得$AB=I$,

由定理1.4.1的必要性证明过程知：A满秩，从而A可逆.

用A^{-1}左乘$AB=I$,得 $B=A^{-1}$.

同理可证$BA=I$的情况.

此推论简化了定义中可逆的判别步骤！

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2a+c & 2b+d\\ -a & -b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a+c=1,\\ 2b+d=0,\\ -a=0,\\ -b=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0,\\ b=-1,\\ c=1,\\ d=2.\end{cases}$$

$$B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}$$

又因为

$$AB=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}.$$

一般地，对二阶方阵，有如下结论 设

主对角换位置
副对角换符号

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

则当 $ad\neq bc$ 时，A 可逆，并且

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}=\frac{1}{|A|}A^*$$

例如，

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix},\quad A^{-1}=\frac{1}{0-(-1)}\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}$$

求逆矩阵的方法：利用初等变换。--初等行变换法

A 可逆，则A满秩，则 $P_1P_2\cdots P_lA=I$，

用A^{-1}右乘上式两端，得 $P_1P_2\cdots P_lAA^{-1}=IA^{-1}$

$P_1P_2\cdots P_l\ I=A^{-1}$

$$\therefore\quad P_1P_2\cdots P_l\,(A\ \vdots\ I)$$
$$=(P_1P_2\cdots P_lA\ \vdots\ P_1P_2\cdots P_lI)$$
$$=(I\ \vdots\ A^{-1})$$

即对 $n\times 2n$ 矩阵 $(A\ \vdots\ I)$ 施行初等行变换，当把 A 变成 I 时，原来的 I 就变成 A^{-1}.

例1.4.4 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解

$$(A\ I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-R_2]{R_1+R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_2-5R_3]{R_1-2R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&-2&0&3&6&-5\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[(-\frac{1}{2})R_2]{(-1)R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&3&-2\\0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)\quad \therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

注：求逆矩阵时只用初等行变换.

逆矩阵的运算性质：

性质1.4.1

(1)若A可逆,则A^{-1}亦可逆,且$(A^{-1})^{-1}=A$.

(2)若A可逆,数$\lambda\neq 0$,则λA可逆,且

$$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

(3)若A,B为同阶方阵且均可逆,则AB亦可逆,且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

(4)若A可逆,则A^T亦可逆，且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

证明(3) $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}$

$$=AIA^{-1}=AA^{-1}=I,$$

$$\therefore (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

推广 $(A_1\ A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}\ A_1^{-1}$.

例1.4.5 设方阵A满足方程$A^2-A-2I=0$，证明：A，$A+2I$都可逆,并求它们的逆矩阵.

证明 由$A^2-A-2I=0$,

得$A(A-I)=2I\Rightarrow A\dfrac{A-I}{2}=I$ A^{-1}

故A可逆.

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{2}(A-I).$$

又由$A^2 - A - 2I = 0$

$$\Rightarrow (A+2I)(A-3I)+4I=0$$

$$\Rightarrow (A+2I)\left[-\frac{1}{4}(A-3I)\right]=I$$

$(A+2I)^{-1}$

故$A+2I$可逆.

且 $(A+2I)^{-1} = -\frac{1}{4}(A-3I)$

例1.4.6 设B是n阶可逆矩阵，且

$A_1 = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]^T, A_2 = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^T$

令 $A = B + A_1A_2^T$

证明：当 $c = 1 + A_2^TB^{-1}A_1 \neq 0$ 时，A可逆，且

$$A^{-1} = B^{-1} - \frac{1}{c}(B^{-1}A_1)(A_2^TB^{-1})$$

证明 因

$$A[B^{-1} - \frac{1}{c}(B^{-1}A_1)(A_2^TB^{-1})]$$

$$= (B + A_1A_2^T)[B^{-1} - \frac{1}{c}(B^{-1}A_1)(A_2^TB^{-1})]$$

$$= BB^{-1} - B[\frac{1}{c}(B^{-1}A_1)(A_2^TB^{-1})] + A_1A_2^TB^{-1}$$

$$- A_1A_2^T[\frac{1}{c}(B^{-1}A_1)(A_2^TB^{-1})]$$

由$c = 1 + A_2^TB^{-1}A_1 \neq 0 \Rightarrow A_2^TB^{-1}A_1 = c - 1$

$$= I - \frac{1}{c}A_1A_2^TB^{-1} + A_1A_2^TB^{-1} - \frac{1}{c}A_1(\underline{A_2^TB^{-1}A_1})A_2^TB^{-1}$$

$$= I + \frac{c-1}{c}A_1A_2^TB^{-1} - \frac{c-1}{c}A_1A_2^TB^{-1}$$

$$= I$$

故 A 可逆，且 $A^{-1} = B^{-1} - \frac{1}{c}(B^{-1}A_1)(A_2^TB^{-1})$.

例1.4.7 设 A 与 B 是同阶方阵，且 A、B、$A+B$ 都可逆，证明：$A^{-1} + B^{-1}$ 也可逆。

证 因为 A 与 B 都可逆，故存在 A^{-1} 与 B^{-1} 使

$$A^{-1}A=I,\quad B^{-1}B=I。$$

于是，$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1} + IB^{-1}$

$$= A^{-1} + A^{-1}AB^{-1}$$

$$= A^{-1}(I + AB^{-1})$$

$$= A^{-1}(BB^{-1} + AB^{-1})$$

$$= A^{-1}(B + A)B^{-1},$$

又 A^{-1}、$B+A$、B^{-1} 均可逆，故

$$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(B + A)B^{-1}$$

可逆，且

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = [A^{-1}(B + A)B^{-1}]^{-1}$$

$$= (B^{-1})^{-1}(B + A)^{-1}(A^{-1})^{-1}$$

$$= B(A + B)^{-1}A.$$

解题思路：充分利用已知条件、单位矩阵的各种变形及矩阵的运算性质！

定理1.4.2 设 A 是 n 阶方阵，则齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解的充分必要条件是 A 不可逆。

逆矩阵的应用---求解矩阵方程问题：

三种最简形式：

$$AX=C,\quad XB=D,\quad AXB=F$$

其中 A、B、C、D、F 均为已知矩阵，而 X 为未知矩阵。

当系数矩阵 A、B 都是可逆矩阵时，

$$AX=C \Rightarrow X=A^{-1}C$$
$$XB=C \Rightarrow X=CB^{-1}$$
$$AXB=F \Rightarrow X=A^{-1}FB^{-1}$$

注意乘入方式

例1.4.8 解矩阵方程

(1) $\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1&-6\\2&1\end{bmatrix}$

(2) $X\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\1&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&3\end{bmatrix}$

解 (1)
$$X=\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&-6\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-5\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-6\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&-23\\3&8\end{bmatrix}$$

(2)
$$X=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\1&0&-2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&2&3\\2&-1&-2\\-1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&3&5\\-5&6&7\end{bmatrix}$$

例1.4.9 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$,

求矩阵 X 使满足 $AXB=C$.

解 $\because A^{-1}$, B^{-1} 都存在

且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3/2&-3&5/2\\1&1&-1\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$,

又由 $AXB=C \Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$

于是 $X=A^{-1}CB^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3/2&-3&5/2\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\0&-2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\10&-4\\-10&4\end{pmatrix}.$$

例1.4.10 已知矩阵 A、B、X 满足下述关系

$$(I-AB^{-1})^T X=(B^T)^{-1}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\0&3&-1&0\\0&0&4&-1\\0&0&0&5\end{pmatrix}$$

求 X

解 由 $(I-AB^{-1})^T X=(B^T)^{-1}$ 可得

$$X=[(I-AB^{-1})^T]^{-1}(B^T)^{-1}=\{B^T(I-AB^{-1})^T\}^{-1}$$

$$=\{[(I-AB^{-1})B]^T\}^{-1}$$

$$=[(B-A)^T]^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

熟练掌握矩阵的运算性质！

例1.4.11 设三阶矩阵 A,B 满足关系：

$$A^{-1}BA=6A+BA,\text{且}A=\begin{pmatrix}1/2&&O\\&1/4&\\O&&1/7\end{pmatrix}$$

求 B.

解 $A^{-1}BA-BA=6A$

$$\Rightarrow (A^{-1}-I)BA=6A\ \Rightarrow (A^{-1}-I)B=6I$$

$$\Rightarrow B=6(A^{-1}-I)^{-1}.$$

$$B=6(A^{-1}-I)^{-1}$$

$$=6\left[\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/3&0\\0&0&1/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例1.4.12 设矩阵 X 满足 $AX=A+2X$，其中

$$A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$$

(1) 证明：$A-2I$ 可逆；(2) 求 X。

解 (1)

$$\because\ A-2I=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$\therefore$ $A-2I$ 满秩，所以 $A-2I$ 可逆。

$(A-2)X=A$ ✗

(2) 由 $AX=A+2X$ 可得 $\underline{(A-2I)X}=A$，故

$$X=(A-2I)^{-1}A=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}$$

（另法¡ 可逆的定义）

(1) 由 $AX = A + 2X$ 得

$$A(X - I) = 2X = 2(X - I) + 2I$$

整理后可得

$$(A - 2I)[\frac{1}{2}(X - I)] = I$$

于是 $A - 2I$ 可逆。

(2) 由上式得 $(A - 2I)^{-1} = \frac{1}{2}(X - I)$

$$2(A - 2I)^{-1} = X - I$$

$$X = I + 2(A - 2I)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

小结

逆矩阵的概念及运算性质.

矩阵可逆性的判别：

(1) 根据可逆矩阵的定义(只需判别$AB=I$或$BA=I$中的一个等式);

(2) 根据定理：逆矩阵 A^{-1} 存在$\leftrightarrow$ A满秩;

(3) 利用可逆矩阵的性质. 满秩矩阵的性质

求逆矩阵的计算方法：

(1) 待定系数法(根据可逆矩阵的定义);

(2) 初等变换法(利用初等行变换);

(3) 利用可逆矩阵的性质.

会解矩阵方程¡ 延伸（系数矩阵不可逆时如何求解矩阵方程）

作业 习题一(P78)：

31、34、36、39、41

(30¡ 41题均可作为练习)