北京理工大学 2016 级《工科数学分析》第一学期期末试题解答及评分标准

2016 年 1 月 18 日

一、每小题 4 分，共 20 分

1. $\ln 3$ ；　　2. $\sqrt{x^2+1}$；　　3. $\frac{1}{9}(2e^3+1)$；

4. $\cos\frac{1}{x}+C$；　　5. $x(\frac{x^2}{2}+C)$.

二、1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}$　　**3 分**

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x(-\sin x)}{6x}=-\frac{1}{3}$　　**5 分**

2　方程两边同时对 x 求导，得：$e^y+xe^y\frac{dy}{dx}+e^x\frac{dy}{dx}+ye^x=0$　　**3 分**

解得：$dy=-\frac{e^y+ye^x}{e^x+xe^y}dx$　　**5 分**

3 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-\cos x\right|dx$　　**2 分**

$=2[\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})]\Big|$　　**3 分**

$=4(\sqrt{2}-1)$　　**5 分**

4　令：$u=x+y$，则 $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$　　**2 分**

代入原方程，得：$\frac{du}{dx}=u^2+1$　解得：$\arctan u=x+c$　　**4 分**

代入，$\arctan(x+y)=x+c$　通解为：$y=\tan(x+c)-x$　　**5 分**

三、由条件知：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2x^2-x}{x+1}-ax-b}{x}=0$ 得

$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x}{(x+1)x}=2$ **3 分**

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x}{x+1}-2x=-3$ **6 分**

四、（1）设 $f(x)=x-\sin x$

则 $f(0)=0$， $f'(x)=1-\cos x\geq 0 \quad (x>0)$ 2 分

所以 $f(x)$ 是单调增加函数，则有 $f(x)>f(0)=0,$

即当 $x>0$ 时，有 $x>\sin x$ 3 分

（2）由（1）知，对自然数 n，有 $x_n>\sin x_n=x_{n+1}$

又 $0<x_{n+1}=\sin x_n<1$，所以 $\{x_n\}$ 单调有界必有极限， **5 分**

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 则有 $a=\sin a \quad a=0$ **6 分**

五、定义域 $x\neq 0$

$y'=\dfrac{-4(x+2)}{x^3}$， $y'=0$ 得 $x_1=-2$； $y''=\dfrac{8(x+3)}{x^4}$ ， $y''=0$ 得 $x_2=-3$。 3 分

列表：

	$-\infty,-3$	-3	$-3,-2$	-2	$-2,0$	0	$0,+\infty$
f'	$-$		$-$	0	$+$	不存在	$-$
f''	$-$	0	$+$		$+$		$+$
f		拐点		极值点			
		$(-3,-\frac{26}{9})$		-3			

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-2$ 渐近线： $y=-2$ 及 $x=0$ **6 分**

六、由对称性可知：

心形线长

$$s=2\int_0^{\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta=4\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta=8\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=16$$ **3 分**

心形线所围面积：

$$A=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\rho^2(\theta)d\theta=4\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta=6\pi$$ **6 分**

七、（1）由对称性可知：

$$V_{\pi}=2\int_0^1\pi y^2(x)dx$$ **2 分**

$$=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^6 t\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)dt=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cos^2 tdt=\frac{32}{105}\pi\,,$$ **4 分**

（2）$\frac{dy}{dx}=\frac{3\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$ ，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1$， **5 分**

$$\frac{d^{2y}}{dx^2}=\frac{-\sec^2 t}{3\cos^2 t(-\sin t)}=\frac{1}{3\cos^4 t\sin t}\,,\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\,,$$ **6 分**

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{3}$$ **8 分**

八、（1）设注水t秒后，液面的高度为$h=h(t)$，则容器内水的容积是

$$V=\int_0^h\pi x^2dy=\int_0^h\pi y^{\frac{2}{3}}dy$$ **2 分**

两边对t求导 $\frac{dV}{dt}=\pi h^{\frac{2}{3}}\frac{dh}{dt}$，

已知$\frac{dV}{dt}=3$，则 $\frac{dh}{dt}=\frac{3}{\pi h^{\frac{2}{3}}}$ **4 分**

（2）选 y 为积分变量， $y \in [0,1]$，

$$dw = \pi x^2 dy \mu g(1-y) = \pi \mu g(1-y) y^{\frac{2}{3}} dy$$

（其中 μ 水的密度， g 重力加速度） **6 分**

$$w = \int_0^1 \pi \mu g(1-y) y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{9}{40} \pi \mu g$$ 。 **8 分**

九、（1）证明：作代换，令 $u = x - t, du = -dt$ **1 分**

$$\int_0^x tf(x-t)dt = \int_x^0 (x-u) f(u)(-du) = x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$$

$$= x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$$ **2 分**

（2）将（1）代入已知等式，有

$f(x) + x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt + \sin x = 0$，两边对 x 求导，有

$f'(x) + \int_0^x f(t)dt + \cos x = 0$，再求导，有

$f''(x) + f(x) - \sin x = 0$，而 $f(0) = 0, f'(0) = -1$，即 $f(x)$ 满足：

$$\begin{cases} y'' + y = \sin x \\ y(0) = 0, y'(0) = -1 \end{cases}$$ **4 分**

$y'' + y = 0$ 的特征根为 $r = \pm i$ ，通解为 $Y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ **5 分**

作辅助方程： $y'' + y = e^{xi}$， i 是特征方程的单根，设 $\tilde{y} = Axe^{xi}$， **6 分**

代入方程解出： $A = -\frac{1}{2}i$， $\tilde{y} = -\frac{1}{2}ixe^{xi}$，取虚部，得特解：

$\bar{y} = -\frac{1}{2}x\cos x$，通解为：$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x\cos x$ **7 分**

代入初始条件，解得：$c_1 = 0, c_2 = -\frac{1}{2}$， 故

$y = f(x) = -\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$ **8 分**

十、（1）由 $f(x)$ 连续，有

$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)}(x-1)=5\cdot 0=0$$ **1 分**

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)}=5$$ **3 分**

（2）$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\frac{\sin x}{x})}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\frac{\sin x}{x})}{\frac{\sin x}{x}-1}\cdot\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}$$ **5 分**

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(\frac{\sin x}{x})}{\frac{\sin x}{x}-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sin x-x}{x^3}=5\cdot(-\frac{1}{6})=-\frac{5}{6}$$ **6 分**

十一、构造辅助函数 $F(x)=x^3 f(x)$ **2 分**

由 $f(x)$ 在 $[0.1]$ 上连续，且 $f(0)\cdot f(1)=-1$，则必有一点 $\eta\in(0,1)$，使得

$f(\eta)=0$ **3 分**

即：$F(0)=F(\eta)=0$，所以 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上满足罗尔定理条件，

则存在 $\xi\in(0,\ \eta)\subseteq(0,1)$，使得

$F'(\xi)=0$ 即 $\xi^3 f'(\xi)+3\xi^2 f(\xi)=0$

$\xi f'(\xi)+3f(\xi)=0$ **6 分**