线性代数 A 试题 (B 卷)

座号____________班级______________学号____________姓名____________

（试卷共 7 页, 八道大题. 解答题必须有解题过程, 试卷后面空白页撕下做稿纸, 试卷不得拆散）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
签名									

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\3&0&a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. 则有，

$a=$ _9_______, $b=$ ___11____

2. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+tx_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是 _____$t>\frac{3}{2}$________

3. 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 0，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 的通解为 $k(1,1,1,1)^T, k$为任意常数（或者 $k\in R$，不标明 k 的范围扣 1 分）

4. 矩阵乘积 $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}1&2&3\\1&5&4\\1&8&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^6=\begin{bmatrix}1&5&10\\1&2&9\\1&8&11\end{bmatrix}$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 5 阶方阵，且已知存在 5 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

则 A 的所有初等因子为 $(\lambda-2),(\lambda-2)^2,(\lambda-1)^2$__(缺一个，得 0 分)

二、(10 分) 讨论 a,b 取何值时，下列线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + ax_2 + ax_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷解，并在有无穷多解时，用其导出方程组的基础解系表示方程组的通解。

解 将方程组的增广矩阵化为阶梯形：

$$\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & b \\ 1 & a & a & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & b-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & b-a+1 \end{array}\right) \cdots\cdots (3 \text{ 分})$$

（1） 当 $1-a^2 \neq 0$ 时，即 $a \neq 1,-1,\ b \in R$ 时，原方程组有唯一解。……………………………(4 分)

（2） 当 $a=1$，$b \in R$ 时，或者当 $a=-1$，$b \neq -2$ 时原方程组无解。………………………(5 分)

（3） 当 $a=-1, b=-2$ 时，原方程组有无穷多解。方程组增广矩阵化为………………(6 分)

$$\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & b \\ 1 & a & a & 2 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

解得特解为 $\gamma_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，导出组的基础解系 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

所以原方程的通解为是 $\gamma_0 + k\xi$（k 为任意常数）……………………(10 分)

（注：在（1）（2）中，未注明 $b \in R$ 或者 b 为任意实数，不扣分）

三、（10 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，且有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{I}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 。

解：由已知可得

$|\boldsymbol{A}|=2$……………………………………………………….（2 分）

由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{I}$ 整理得，

$$3\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{I}$$

$(3I-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{I}$ 同时左乘 $\boldsymbol{A}$ ，右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得，

$$\boldsymbol{A}(3I-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{X}=(3\boldsymbol{A}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=6\boldsymbol{I}$$

$\boldsymbol{X}=6(3\boldsymbol{A}-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I})^{-1}=6(3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}$………………… （5 分）

又因为

$$(3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&-3&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}10&0&0\\0&1&-3\\0&3&1\end{pmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{X}=6(3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=\frac{3}{5}\begin{pmatrix}10&0&0\\0&1&-3\\0&3&1\end{pmatrix}$.………（10 分）

四（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随矩阵，试求行列式 $|(\frac{1}{2}\boldsymbol{A})^*+(4\boldsymbol{A})^{-1}|$。

解：由已知可得

$|\boldsymbol{A}|=2$…………………………………………………………（2 分）

$$|(\frac{1}{2}\boldsymbol{A})^*+(4\boldsymbol{A})^{-1}|=|\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^*+\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^{-1}|$$

$$=|\frac{1}{4}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}+\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^{-1}|=|\frac{1}{4}\times\boldsymbol{2}\times\boldsymbol{A}^{-1}+\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^{-1}|=|\frac{3}{4}\boldsymbol{A}^{-1}|$$ ……………（7 分）

$$=(\frac{3}{4})^3|\boldsymbol{A}|^{-1}=(\frac{3}{4})^3\times\frac{1}{2}=\frac{27}{128}$$ ……………………………………（10 分）

五、（10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}$，

（1） 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，并找出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组；

（2） 将把不属于这个极大无关组的列向量用（1）中的极大无关组表示。

解：

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ ………………………（3 分）

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ ………………………（5 分）

（1）$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为列向量组的一个极大无关组……（6 分）

（2）$a_3=-a_1-a_2$…………………………（8 分）

$a_5=4a_1+3a_2-3a_4$………………………………（10 分）

六、（10 分）在 $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}]_4$ 中定义 σ ： $\boldsymbol{\sigma}[f(\boldsymbol{x})]=f'(\boldsymbol{x})$，

（1） 证明 $\boldsymbol{\sigma}$ 为 $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}]_4$ 的一个线性变换；

（2） 求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{x}^3$ 下的矩阵，并判断 $\boldsymbol{\sigma}$ 是否为可逆变换。

（1） 证明 $\forall \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\in \boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}]_4, k\in \boldsymbol{F}.$

$$\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]=[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]'=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]+\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]；$$

$$\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{kf}(\boldsymbol{x})]=[\boldsymbol{kf}(\boldsymbol{x})]'=\boldsymbol{kf}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{k\sigma}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]$$

$\boldsymbol{\sigma}$ 为 $\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}]_4$ 的一个线性变换…………………………….(4 分)

（2） $\boldsymbol{\sigma}(1)=0,\boldsymbol{\sigma}(x)=1,\boldsymbol{\sigma}(x^2)=2x,\boldsymbol{\sigma}(x^3)=3x^2$，所以

$$\boldsymbol{\sigma}(1,x,x^2,x^3)=(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{\sigma}$ 在基 $1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{x}^3$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$…………………..(9 分)；

因为 $\begin{vmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{vmatrix}=0$，所以 $\boldsymbol{\sigma}$ 不是可逆变换…………………….(10 分)

七、（15 分）设二次型 $f(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=\boldsymbol{x}_1^2+\boldsymbol{x}_2^2+\boldsymbol{x}_3^2+4\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2+4\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_3+4\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3$，

(1) 写出二次型 $f(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 成对角矩阵；

(3) 求 $|\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|$。

解 (1) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}.$$

……………………………2 分

因为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5),$$

所以矩阵的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5.$ ……………………………………5 分

求 $(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 用初等行变换将 $-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 化为简化阶梯形

$$-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-2&-2\\-2&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得到 $(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.(\text{or } \boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.)$$ ………………

7 分

用施密特方法将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化，得到

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\xi}_2=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.\text{Or}$$

……………8 分

$$(\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\xi}_2=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.)$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\ Or\ (\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix})$$

………9 分

求$(5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系．用初等行变换将$5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$化为简化阶梯形

$$5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得到$(5\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$………10 分

将$\boldsymbol{\xi}_3$规范化，得到

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$………11 分

令

$$Q=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix},(\text{or } Q=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{pmatrix})$$

那么$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵．且有

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix}$$………12 分

(3) 易知$\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$的三个特征值为$\lambda_1=\lambda_2=4,\lambda_3=$-2.

$$|\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|=-32.$$

八、（15 分）设在 $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 中所有实对称矩阵所组成的集合

$$\boldsymbol{W}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a,b,c\in\boldsymbol{R}\right\}$$

（1） 证明 $\boldsymbol{W}$ 构成 $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 的一个线性子空间；

（2） 证明 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{W}$ 的一组基；

（3） 求从基 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 到另一组基 $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的过渡矩阵；

（4） 求矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ 分别关于两组基 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 和 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3$ 的坐标。

(1) 证明： $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in\boldsymbol{W}$， $\boldsymbol{W}\neq\varnothing$

对任意的 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}\in\boldsymbol{W}$， $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ b_1+b_2 & c_1+c_2 \end{pmatrix}\in\boldsymbol{W}$

对任意 $k\in\boldsymbol{R}$， $k\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kb_1 & kc_1 \end{pmatrix}\in\boldsymbol{W}$

所以 $\boldsymbol{W}$ 构成 $\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ 的一个线性子空间……………………….(3 分)

(2) 证明：设 $\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix} \boldsymbol{k}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{k}_2 \\ \boldsymbol{k}_2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{k}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{k}_1 & \boldsymbol{k}_2 \\ \boldsymbol{k}_2 & \boldsymbol{k}_3 \end{pmatrix}=0$，

则有 $\boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{k}_3=0$，从而 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 线性无关………………..…..(5 分)

又因为对任意的 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\in\boldsymbol{W}$，都有 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=a\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{b}\boldsymbol{A}_2+c\boldsymbol{A}_3$

所以 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 为 $\boldsymbol{W}$ 的一组基………………………………………6 分)

(3) 因为 $(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3)=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3)P$，所以过渡矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$……………………………………..(9 分)

(4) 易知 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -5\end{pmatrix}=2\boldsymbol{A}_1+2\boldsymbol{A}_2-5\boldsymbol{A}_3=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3)\begin{pmatrix}2\\ 2\\ -5\end{pmatrix}$，所以

$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -5\end{pmatrix}$在基 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 的坐标为$\begin{pmatrix}2 & 2 & -5\end{pmatrix}^T$ ………………………...(10 分)

因为

$$P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$……………………………...(12 分)

所以 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -5\end{pmatrix}$在基 $\boldsymbol{B_1},\boldsymbol{B_2},\boldsymbol{B_3}$ 的坐标为

$$P^{-1}\begin{pmatrix}2\\ 2\\ -5\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\ 2\\ -5\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}17\\ -6\\ -10\end{pmatrix}$$…………………………………………(15 分)