¡ 1.5 分块矩阵

在矩阵运算中，重要运算技巧¡ 分块矩阵

把大型矩阵问题转化为小型矩阵问题;

矩阵分块是许多理论推导的有力工具.

一、分块矩阵的定义

二、分块矩阵的运算

三、分块矩阵的秩的性质

$$A=\left[\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&3&2\\0&1&0&-5&1\\0&0&1&2&4\\\hline 0&0&0&2&0\\0&0&0&0&2\end{array}\right]\qquad A_{11}=I_3,\quad A_{12}=\begin{bmatrix}3&2\\-5&1\\2&4\end{bmatrix},$$

$$A_{21}=0_{2\times3},\quad A_{22}=2I_2$$

$$=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_3&A_{21}\\0_{2\times3}&2I_2\end{bmatrix}$$

一、分块矩阵的定义

定义1.5.1 设 A 是 m ¡ n 矩阵，在 A 的行之间加入 s-1 条横线 (1≤s≤m), 在 A 的列之间加入 t-1 条竖线 (1≤t≤n), 则 A 被分成 s×t 个小矩阵，依次记为

$$A_{ij}(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t)$$

此时，A可写为

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1t}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2t}\\&\cdots&\cdots&\\A_{s1}&A_{s2}&\cdots&A_{st}\end{bmatrix}$$

把 A 视为以 A_{ij} 为元素的形式上的 s¡ t 矩阵称之为分块矩阵，也称为对 A 的分块，每个小矩阵 A_{ij} 称为 A 的子块。

常见分块：(1) 根据元素的排列特性；

(2) 按行(列)；

(3) 两个极端。

例

(1)

$$A=\left(\begin{array}{c|ccc}1&1&0&0\\0&0&1&0\\2&0&0&1\\\hline 0&1&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&I_3\\0&A_{22}\end{pmatrix}_{2\times2}$$

其中 $A_{11}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $A_{22}=(1\quad 0\quad 1)$

(2)

$$A=\left(\begin{array}{cccc}1&1&0&0\\\hline 0&0&1&0\\\hline 2&0&0&1\\\hline 0&1&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}_{4\times1}$$

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c}1&1&0&0\\0&0&1&0\\2&0&0&1\\0&1&0&1\end{array}\right)=[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]_{1\times4}$$

(3)

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c}1&1&0&0\\ \hline 0&0&1&0\\ \hline 2&0&0&1\\ \hline 0&1&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}[1]&[1]&[0]&[0]\\ [0]&[0]&[1]&[0]\\ [2]&[0]&[0]&[1]\\ [0]&[1]&[0]&[1]\end{pmatrix}_{4\times4}$$

$$A=[A]_{1\times1}$$

注：这两种极端情况通常不写成分块矩阵的形式.

问题 如何分块，使

（1） 分块矩阵之间的形式运算有意义?

（2） 块与块之间的矩阵运算有意义 ?

二、分块矩阵的运算

1. 分块矩阵的线性运算

(1) 加减法：设矩阵A与B的行数相同，列数相同，采用相同的分块法，有

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{A_{11}}&\cdots&\boxed{A_{1r}}\\ \vdots&&\vdots\\ A_{s1}&\cdots&A_{sr}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\boxed{B_{11}}&\cdots&\boxed{B_{1r}}\\ \vdots&&\vdots\\ B_{s1}&\cdots&B_{sr}\end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 的行数相同，列数相同，那么

$$A\pm B=\begin{pmatrix}\boxed{A_{11}\pm B_{11}}&\cdots&\boxed{A_{1r}\pm B_{1r}}\\ \vdots&&\vdots\\ A_{s1}\pm B_{s1}&\cdots&A_{sr}\pm B_{sr}\end{pmatrix}.$$

(2)数乘 设 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ A_{s1}&\cdots&A_{sr}\end{pmatrix}$,$\lambda$为数,那末

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda A_{11}&\cdots&\lambda A_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ \lambda A_{s1}&\cdots&\lambda A_{sr}\end{pmatrix}.$$

2. 转置

设 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ A_{s1}&\cdots&A_{sr}\end{pmatrix}$, 则 $A^T=\begin{pmatrix}A_{11}^T&\cdots&A_{s1}^T\\ \vdots&&\vdots\\ A_{1r}^T&\cdots&A_{sr}^T\end{pmatrix}$.

即 $$A^T=\begin{pmatrix}A_{11}^T&\cdots&A_{s1}^T\\ \vdots&&\vdots\\ A_{1r}^T&\cdots&A_{sr}^T\end{pmatrix}.$$

块转

元素转

注：分块矩阵的转置时，不但要将行列互换，而且行列互换后的各子矩阵都应转置.

3. 乘法

设A为$m\times l$矩阵，B为$l\times n$矩阵，分块成

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1t}\\ \vdots&&\vdots\\ A_{s1}&\cdots&A_{st}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_{11}&\cdots&B_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ B_{t1}&\cdots&B_{tr}\end{pmatrix},$$

其中$A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$的列数分别等于$B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$的行数，那么

$$AB=\begin{pmatrix}C_{11}&\cdots&C_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ C_{s1}&\cdots&C_{sr}\end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\quad(i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r).$

注意：

1) 左矩阵的列组数=右矩阵的行组数;

2) 左矩阵的每个列组所含列数
=右矩阵的相应行组所含的行数;

即：左矩阵列的分法与
右矩阵行的分法完全一致

3）实施分块矩阵乘法运算时，左矩阵的子矩阵依然在左边，右矩阵的子矩阵依然在右边，不可交换.

例1.5.1 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix},$$

求 AB.

解 把A,B分块成

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hdashline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}I&O\\A_1&I\end{pmatrix},$$

$$B=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\ \hdashline 1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_{11}&I\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}I&O\\A_1&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&I\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}B_{11}&I\\A_1B_{11}+B_{21}&A_1+B_{22}\end{pmatrix}.$$

例 准对角矩阵

$$\begin{pmatrix}A_1&0&\cdots&0\\0&A_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&A_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1&0&\cdots&0\\0&B_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&B_s\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_1B_1&0&\cdots&0\\0&A_2B_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&A_sB_s\end{pmatrix}.$$

例1.5.2 已知$m\times n$矩阵A，则对$n\times p$矩阵B，等式AB=0 成立的充分必要条件为：B的p个列恰是齐次线性方程组

$$AX=0$$

的p个解。

证明 对 B 按列分块 $B=[B_1, B_2, \cdots, B_p]$，则

$$AB=[A][B_1,B_2,\cdots,B_p]$$

$$=[AB_1,AB_2,\cdots,AB_p]$$

$$=0$$

$$\Leftrightarrow AB_1=0,\quad AB_2=0,\quad \cdots,\quad AB_p=0$$

即 $B_1, B_2, \cdots, B_p$ 是齐次线性方程组 AX=0 的解。

例1.5.3 设A是n阶方阵。若存在 n 阶非零方阵 B，使

$$AB=0$$

则 A是降秩矩阵。

证明 由上例的结论知，B的每个列均是齐次线性方程组

$$AX=0$$

的解。因 $B\neq 0$，故 B 至少有一列的元素不全为零，该列即是上述齐次方程组的非零解。于是，由前面的定理可得，A 不可逆。所以，秩$(A)<n$。

推广 已知$m\times n$矩阵A，则对$n\times p$矩阵B，等式AB=C 成立的充分必要条件为：B的p个列恰是非齐次线性方程组

$$AX=C_j\quad j=1,2,\cdots,p$$

的p个解。其中$C_1,C_2,\cdots,C_p$为矩阵C的p个列.

证明 对 B 按列分块 $B=[B_1, B_2, \cdots, B_p]$，则

$$AB=[A][B_1,B_2,\cdots,B_p]$$

$$=[AB_1,AB_2,\cdots,AB_p]$$

$$=[C_1,C_2,\cdots,C_p]$$

$$\Leftrightarrow AB_1=C_1,\quad AB_2=C_2,\quad \cdots,\quad AB_p=C_p$$

即 $B_1, B_2, \cdots, B_p$ 是非齐次线性方程组 $AX=C_j\quad j=1,2,\cdots,p$ 的解。

4. 求逆

设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{pmatrix}$,

若 A_i 可逆 $(i=1,2,\cdots,s)$，则A可逆，并有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

特例：$\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{bmatrix}$

例1.5.4 设 $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解 $A=\left(\begin{array}{c|cc} 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$,

$A_1=(5)$, $A_1^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)$;

$A_2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

$$\therefore\ A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

类似地，我们有：$\begin{bmatrix} & A \\ B & \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{bmatrix}$

思考：$\begin{bmatrix} & & A \\ & B & \\ C & & \end{bmatrix}^{-1}=?$ $\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ A_n & & & \end{bmatrix}^{-1}=?$

例1.5.5 已知分块矩阵

$$T=\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

可逆，其中A、D是可逆的子块，求 T^{-1}

证明 已知 T 可逆，故 T^{-1} 存在。

根据T，对 T^{-1}分块

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$$

其中 X_1、X_4 是分别与A、D同型的子块。

因为

$$TT^{-1}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 \\ CX_1+DX_3 & CX_2+DX_4 \end{bmatrix}$$

$$=I=\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & I_t \end{bmatrix}$$

其中 I_s、I_t 是分别与A、D同型的单位子块

$$AX_1=I_s,\qquad AX_2=0,$$
$$CX_1+DX_3=0,\qquad CX_2+DX_4=I_t$$

由此解出

$$X_1=A^{-1},\ X_2=0,\ X_3=-D^{-1}CA^{-1},\ X_4=D^{-1}$$

于是

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$$

类似可得：

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}.$$

三、分块矩阵的秩的性质

（1） 秩$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \geq$ 秩(A)

（2） 秩$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} \geq$ 秩$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$

（3） 秩$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} =$ 秩$(A) +$ 秩(B)

（4） 秩$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix} =$ 秩$(A) +$ 秩(B)

（5）

若A,B都满秩，则分块矩阵$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$都满秩.

关于矩阵的秩我们有如下重要结论.

定理1.5.2 （1）设A与B是同型矩阵，则

秩$(A+B)$≤秩(A)+秩(B)；

熟记！

(2) 设A是s ¡ n矩阵，B是n ¡ t矩阵，则

秩(AB)≥秩(A)+秩(B)-n.

证明 （1）构造分块矩阵 $T_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$

则由分块矩阵的性质（3），得

$$r(T_1) = r(A) + r(B).$$

令$T_2 = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & B \end{bmatrix}$

I的阶数等于A的行数，

又$\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$满秩，所以$r(T_2) = r(T_1)$.

再令$T_3 = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B & B \\ B & B \end{bmatrix}$

I的阶数等于A的列数，

又$\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}$满秩，所以$r(T_3) = r(T_2)$.

由性质(1),有$r(T_3) \geq r(A+B)$,

所以有 $r(A+B) \leq r(T_3) = r(T_2) = r(T_1) = r(A) + r(B)$.

(2) 构造分块矩阵 $S_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{bmatrix}$

I为n阶单位矩阵，由性质(2)（3），得

$$r(S_1) \geq r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$$

令$S_2 = \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & AB \\ -I & B \end{bmatrix}$

$S_3 = \begin{bmatrix} 0 & AB \\ -I & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & AB \\ -I & 0 \end{bmatrix}$

则我们有 $r(S_1) = r(S_2) = r(S_3)$, 由性质(4)得

$$r(S_3) = r(AB) + r(-I) = r(AB) + n$$

所以 $r(A) + r(B) \leq r(S_1) = r(S_3) = r(AB) + n$

即 $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n.$

推论 设A是s ¡ n矩阵，B是n ¡ t矩阵。若AB=0，则

秩(A)+秩(B)≤n.

四、小结

在矩阵理论的研究中，矩阵的分块是一种最基本，最重要的计算技巧与方法.

分块矩阵之间的运算

分块矩阵之间与一般矩阵之间的运算性质类似

(1) 加法　同型矩阵，采用相同的分块法

(2) 数乘　数k乘矩阵A，需k乘A的每个子块

(3) 乘法　若A与B相乘，需A的列划分与B的行划分相一致

(4) 转置 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$

(5) 分块矩阵的逆

$$\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & A \\ B & \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{bmatrix}$$

(6) 矩阵的秩的相关结论 ----自行归纳总结

要求：熟练掌握矩阵分块的有关理论和方法.

作业　习题一(P79)：
43(1)、45、46
(42¡ 47题均可作为练习)