

北京理工大学 2007-2008 学年第二学期

2006 级概率论与数理统计试题 (A 卷)

(本试卷共 8 页, 七个大题, 满分 100 分;)



附表:  $\Phi(1.96)=0.975$ ,  $\Phi(1.79)=0.9633$ ,  $t_{0.025}(9)=2.2622$ ,  $t_{0.05}(9)=1.833$ ,

$$X_{0.05}^2(9)=16.919, X_{0.95}^2(9)=3.325$$

一、(12 分) 有三个口袋, 在家袋中装有 2 只白球和 3 只红球; 乙袋中装有 4 只白球和 1 只红球; 丙袋中装有 3 只白球和 4 只红球。随机地选取一个口袋并从中随机地区出一只球。

(1) 求取出的糗事白球的概率;

(2) 若已知取出的球是白球, 求它是来自甲袋的概率。

二、(14 分) 设随机变量  $X$  服从数学期望为  $\frac{1}{2}$  的指数分布。

(1) 写出  $X$  的概率密度;

(2) 求  $P(X>1|X<3)$ ;

(3) 令  $Y=1-e^{-2x}$ , 求  $Y$  的概率密度。

三、(18 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} A e^{-y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 确定常数  $A$ ;

(2) 求  $X, Y$  的边缘概率密度  $f_X(x)$ ,  $f_Y(y)$ ;

(3) 判断  $X$  与  $Y$  是否相互独立, 说明理由;

(4) 求随机变量  $Z=X+Y$  的概率密度函数。



四、(18 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4}y, & 0 < y < x < 2; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 求  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ;
- (2) 求协方差  $\text{cov}(X, Y)$ ;
- (3) 求相关系数  $\rho_{xy}$ 。

五、(8 分) 设独立同分布，有共同的概率分布列

x	0	1	2	3
y				

计算概率 1 以下的极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 。

六、(18 分) 设  $X_1, \dots, X_n$  是取自正态分布总体  $N(\mu, 1)$  的一个样本，其中  $-\infty < \mu < +\infty$  为

未知参数

- (1) 求参数  $\mu$  的矩估计;
- (2) 求参数  $\mu$  和  $\theta = E(X^2)$  的最大似然估计;
- (3) 若样本容量  $n=4$ ，测得样本均值为  $\bar{X}_n=15$ ，求  $\mu$  的置信水平为 95% 的置信区间。



七、(12 分) 某厂用包装机包装食盐, 假设每袋净重  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。在正常情况下, 每袋净重为 1000 克, 标准差不能超过 15 克。某天为检查机器工作是否正常, 随机抽取 10 袋得其净重的均值  $\bar{X} = 998$ ,  $s^2 = 30.23^2$ 。问该天包装机方差是否正常? ( $\alpha = 0.05$ )

07-08-2- (A 卷) 参考答案:

一、解:  $A_1 = \{\text{选取的口袋是甲袋}\}$ ;  $A_2 = \{\text{选取的口袋是乙袋}\}$ ;  $A_3 = \{\text{选取的口袋是丙袋}\}$ ;

$B = \{\text{取出的球是白球}\}$ 。

(1) 根据全概率公式可得所求的概率为

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i)$$

由题意知

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3} \quad P(B|A_2) = \frac{4}{5} \quad P(B|A_3) = \frac{3}{7}$$

将这些代入上面的全概率公式和所求的概率为

$$P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{19}{35} = 0.5429.$$

(2) 根据 Bayes 公式可得所求的概率为

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}}{\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{7}} = \frac{14}{57} = 0.2456.$$



二、解：(1) X 的概率密度

$$f_x(X) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad P(X > 1 | X < 3) = \frac{P(1 < X < 3)}{P(X < 3)} = \frac{\int_1^3 2e^{-2x} dx}{\int_0^3 2e^{-2x} dx} = \frac{\int_1^3 2e^{-2x} dx}{\int_0^3 2e^{-2x} dx} = \frac{e^{-6} - e^{-2}}{e^{-6} - 1}$$

(3) 由  $Y = 1 - e^{-2x}$ , 且  $y' = 2e^{-2x} > 0$  可知,  $y$  是单调增函数, 其反函数为

$$x = -\frac{1}{2} \ln(1 - y), \quad x' = \frac{1}{2(1 - y)}, \text{ 故 } Y \text{ 的概率密度}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \begin{cases} 2e^{-2[-\frac{1}{2} \ln(1-y)]} \cdot \frac{1}{2(1-y)}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2(1-y) \frac{1}{2(1-y)}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$



三、解:

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

$$1 = \int_{0 < x < y} A e^{-y} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^y A e^{-y} dx dy = A \int_0^{\infty} y e^{-y} dy = A$$

$$\text{或} = A \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} e^{-y} dy dx = A \int_0^{\infty} e^{-x} dx = A$$

所以  $A=1$

$$(2) f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f_x(x) = \int_x^{\infty} e^{-y} dy = e^{-x}$$

$$\text{当 } x \leq 0 \text{ 时, } f_x(x) = 0$$

$$f_x(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{或} \quad f_x(x) = e^{-x}, x > 0$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

$$\text{当 } y > 0 \text{ 时, } f_Y(y) = \int_0^y e^{-y} dx = y e^{-y}$$

$$\text{当 } y \leq 0 \text{ 时, } f_Y(y) = 0$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} y e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{或} \quad f_Y(y) = y e^{-y}, y > 0$$

(4) X 与 Y 不相互独立

$$\text{因为 } f(x, y) \neq f_x(x) f_y(y), (x, y) \in D,$$

$$\text{其中 } D = \{ (x, y) | 0 < x < y \}$$

-- 5 -- 四、解: (1)  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^x x \frac{3}{4} y dy = \int_0^2 \frac{3}{8} x^3 dx = \frac{3}{2};$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^x y \frac{3}{4} y dy = \int_0^2 \frac{1}{4} x^3 dx = 1;$$

$$(2) E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^x xy \frac{3}{4} y dy = \int_0^2 \frac{1}{4} x^4 dx = \frac{8}{5};$$



$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{5}{8} - \frac{3}{2} = \frac{1}{10}.$$

(3)

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^x x^2 \frac{3}{4} y dy = \int_0^2 \frac{3}{8} x^4 dx = \frac{12}{5};$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^x y^2 \frac{3}{4} y dy = \int_0^2 \frac{3}{16} x^4 dx = \frac{6}{5};$$

$$\text{所以 } \text{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{12}{5} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{20},$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{6}{5} - (1)^2 = \frac{1}{5}$$

$$\text{故 } \rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\frac{1}{10}}{\sqrt{\frac{3}{20} \times \frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

五、解：由大数律有：  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = EX^2, wpl$ ,

又由  $EX^2 = 3$ ,

可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = 3$

六、解：(1) 由于  $\mu = EX$ ，以  $\bar{X}_n$  代替  $\mu$  得  $\mu$  的矩估计为  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$

(2)  $X$  的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)^2\right\}$$

似然函数为

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_i - \mu)^2\right\} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\right\}$$



对数似然函数为

$$\ln L(\mu) = -n \ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

对  $\mu$  求导并令其为零，既得

$$\frac{d \ln L}{d \mu} = \sum_{i=1}^n X_i - n\mu = 0$$

解得  $\mu$  的最大似然估计为  $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n$

由于  $\theta = E(X^2) = \text{Var}(X) + (EX)^2 = 1 - \mu^2$ ,

因此  $\theta$  的最大似然估计为  $\hat{\theta} = 1 - \bar{X}_n^2$

(3) 由于  $\mu$  的置信水平  $1-\alpha$  的置信区间为  $[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}]$ , 这里

$1-\alpha=0.95$ , 因此  $\frac{\alpha}{2}=0.025$ ,  $z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$ , 又  $n=4$ ,  $\bar{X}_n=15$ ,

代入得到  $\mu$  的置信水平为 95% 的置信区间为

$$[15 - \frac{1}{\sqrt{4}} 1.96, 15 + \frac{1}{\sqrt{4}} 1.96] = [15 - 0.98, 15 + 0.98] = [14.02, 15.98]$$

七、解:

设  $H_0: \sigma^2 \leq 225; H_1: \sigma^2 > 225$

取统计量  $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

拒绝域  $\chi^2 \geq \chi_{0.05}^2(9) = 16.919$

$$\chi_0^2 = \frac{9 \times (30.23)^2}{15^2} = 36.55 > 16.919$$

落在拒绝域内，故拒绝  $H_0$

改天包装机方差不正常