课程编号：A073122　　　　北京理工大学 2015-2016 学年第一学期

线性代数 A 试题 A 卷

班 级 ________ 学 号 ________ 姓 名 _________ 成 绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $\frac{1}{3}A^{*}XA=2A+XA$，求 X

二、（10 分）已知平面上三条直线的方程

$$x-y+a=0,\ 2x+3y-1=0,\ x-ay-\frac{1}{2}=0$$

讨论参数 a 的取值与这三条直线相互位置之间的关系.

三、（10 分）已知向量组

$$\alpha_1=(1,1,1,a)^T,\alpha_2=(1,1,a,1)^T,\alpha_3=(1,a,1,1)^T,\alpha_4=(a,1,1,1)^T$$

（1）　讨论 a 的取值与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩之间的关系;

（2）　对 a 的不同取值，确定向量空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数与基.

四、（10 分）在实数域上的二阶矩阵构成的线性空间中,

（1）求基底 $I_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},I_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},I_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},I_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 到基底

$E_1=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix},E_4=\begin{pmatrix}6 & 6\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵.

（2）求非零矩阵 A，使 A 在这两组基下的坐标相等.

五、（10 分）在多项式空间 $R[x]_4$ 中定义变换 σ：

$$\sigma(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=a_3+a_1+a_2x+(a_0-a_2)x^3$$

1. 证明：σ是$R[x]_4$上的线性变换;

2. 求σ在$R[x]_4$的自然基$1,x,x^2,x^3$下的矩阵, 并判断σ是否可逆.

六、（10分）设A是5阶方阵, 且已知存在5阶可逆矩阵P, 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ & -2 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试写出A的初等因子;
(2) 判断P的哪几列是A的特征向量.

七、（10分）已知A是$m\times n$矩阵, $n>m$, $r(A)=m$; B是$n\times(n-m)$矩阵, $r(B)=n-m$, 且$AB=0$. 证明：B的列向量组为线性方程组$AX=0$的一个基础解系.

八、（10分）已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$, 其中$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求一正交变换$X=QY$, 将二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形;

(2) 判断二次型$f(x_1,x_2,x_3)$是否正定.

九、（10分） 已知矩阵$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & a-2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量.

（1）求a;

（2）求A^n.

十、（10分）已知 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$，

（1） 求矩阵 A 与 B 的特征值;

（2） 证明 A 与 B 是相似的.