课程编号：MTH17003　　北京理工大学 2015-2016 学年第一学期

工科数学分析期末试题(A 卷)评分标准

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、 -1

2、 2

3、 $\dfrac{\pi^2}{4}$

4、 $y = x - \dfrac{\pi}{2}$

5、 $(x_1, f(x_1))$， $(0, f(0))$

二、

解： （1）当 $x\neq 1$ 时， $f'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\cdot\dfrac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$

$$=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{|1-x^2|}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)}$$ ………………（2 分）

当 $x>1$ 时， $f'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{1}{x^2-1}\cdot\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)}=0$， ………………（3 分）

当 $0<x<1$ 时， $f'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{1}{1-x^2}\cdot\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)}=\dfrac{4}{1+x^2}$， ………………（4 分）

又 $f'_+(1)=0$， $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{4}{1+x^2}=2$，所以 $f'(1)$ 不存在。 ………………（6 分）

（2）由（1）知，当 $x\geq 1$ 时， $f'(x)=0$，所以 $f(x)$ 恒等于常数，………………（7 分）

又 $f(1)=2\arctan 1+\arcsin\dfrac{2}{1+1}=\pi$，

所以当 $x\geq 1$ 时， $f(x)=2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi$ 。 ………………（8 分）

三.

解：当 $-1\leq x<0$ 时， $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{x}(t+1)dt=\dfrac{1}{2}(x+1)^2$， ………………（2 分）

当 $0\leq x\leq 1$ 时， $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{x}f(t)dt$

$$=\int_{-1}^{0}(t+1)dt+\int_{0}^{x}tdt=\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}$$ ………………（6 分）

即 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+1)^2 & -1\leq x<0\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{x^2}{2} & 0\leq x\leq 1\end{cases}$，

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\dfrac{1}{2}$，故 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续。 ………………（8 分）

四. 解：（1）令 $t=e^x$， $x=\ln t$， $dx=\frac{1}{t}dt$，则

$$\int\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx=\int\frac{\ln(1+t)}{t^2}dt=-\int\ln(1+t)d(\frac{1}{t})=-[\frac{\ln(1+t)}{t}-\int\frac{1}{t(1+t)}dt]$$

$$=-\frac{\ln(1+t)}{t}+\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t})dt=-\frac{\ln(1+t)}{t}+\ln\frac{t}{1+t}+C$$

$$=-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}+\ln\frac{e^x}{1+e^x}+C$$ ……………………………………（4 分）

（注：任意常数 C 没写扣一分）

（2）令 $t=\sqrt{x}$， $x=t^2$， $dx=2tdt$，则

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\int_1^{+\infty}\frac{2t}{(1+t^2)t}dt=2\arctan t\Big|_1^{+\infty}=2(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}$$ …………（8 分）

五、

解：（1）曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=(1+\cos\theta)\cos\theta\\ y=(1+\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$， ………………（1 分）

$\theta=\frac{\pi}{2}$时， $x=0,y=1$ ………………（2 分）

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}=\frac{(1+\cos\theta)\cos\theta-\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)(-\sin\theta)-\sin\theta\cos\theta}=\frac{\cos\theta+\cos2\theta}{-\sin\theta-\sin2\theta},$$ ………（3 分）

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=1$$ ………………（4 分）

故所求切线方程为 $y=x+1$。 ………………（5 分）

（2） $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\theta}(\frac{dy}{dx})\Big/\frac{dx}{d\theta}$

$$=\frac{(-\sin\theta+2\sin2\theta)(-\sin\theta-\sin2\theta)-(\cos\theta-\cos2\theta)(-\cos\theta-2\cos2\theta)}{(-\sin\theta-\sin2\theta)^3}$$ … …（6 分）

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=1$$ ………………（7 分）

则 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处的曲率 $K=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$。 ………………（8 分）

六.

解：原方程整理得 $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$ ……………… （1 分）

令 $u = \frac{y}{x}$， $y = ux$， $y' = u + xu'$， ……………… （2 分）

则原方程变为 $u + xu' = u\ln u$，

分离变量得 $\frac{1}{u\ln u - u}du = \frac{1}{x}dx$ ……………… （4 分）

得方程通解 $y = xe^{cx+1}$ ……………… （6 分）

又 $y(1) = e^3$，得 $C = 2$， ……………… （7 分）

故所求方程的解为 $y = xe^{2x+1}$。 ……………… （8 分）

七.

解：设 $f(x) = 4\arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$， ……………… （1 分）

$f'(x) = \frac{4}{1+x^2} - 1 = \frac{3-x^2}{1+x^2} = 0$，得驻点 $x = \pm\sqrt{3}$， ……………… （2 分）

当 $x < -\sqrt{3}$ 时， $f'(x) < 0$， $f(x)$ 单减，

当 $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ 时， $f'(x) > 0$， $f(x)$ 单增，

当 $x > \sqrt{3}$ 时， $f'(x) < 0$， $f(x)$ 单减，

则 $x = -\sqrt{3}$ 是 $f(x)$ 的极小值点， $x = \sqrt{3}$ 是 $f(x)$ 的极大值点，……………… （4 分）

而 $f(-\sqrt{3}) = 0$，则 $-\sqrt{3}$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty, \sqrt{3})$ 内的唯一一个零点，…………… （5 分）

因 $f(\sqrt{3}) = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3} > 0$， $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(4\arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}) = -\infty$，

故 $f(x)$ 在 $(\sqrt{3}, +\infty)$ 内只有唯一一个零点， ……………… （7 分）

而 $f(x)$ 在 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 内没有零点，

所以 $f(x)$ 有两个零点，从而两曲线有两个交点。 ……………… （8 分）

八.

解：设t时刻汽水的温度为$T(t)$，则 $\dfrac{dT}{dt}=-k(T-4)$，（其中$k>0$），……………（2 分）

分离变量 $\dfrac{1}{T-4}dT=-kdt$， ………………（3 分）

得方程通解为 $T=Ce^{-kt}+4$ ………………（5 分）

由题设，$T(0)=24$，得 $C=20$，故$T=20e^{-kt}+4$ ………………（6 分）

又由题设 $T(30)=14$，得 $k=\dfrac{\ln 2}{30}$，从而$T=20e^{-\frac{\ln 2}{30}t}+4$ ………………（7 分）

当$T=9$时，$t=60$，

即再经过$60-30=30$(分钟)，物体的温度可以降至9^0C。 ……………………（8 分）

九.

解：原方程变形为 $\int_0^x tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt=f(x)+\cos 2x$ （1）

方程两边关于x求导得 $-\int_0^x f(t)dt=f'(x)-2\sin 2x$ （2）

方程两边再关于x求导得 $-f(x)=f''(x)-4\cos 2x$，$f''(x)+f(x)=4\cos 2x$

由（1）（2）得 $f(0)=-1$，$f'(0)=0$，

得初值问题：$\begin{cases} f''(x)+f(x)=4\cos 2x \\ f(0)=-1,\quad f'(0)=0 \end{cases}$， ……………………（3 分）

特征方程为 $r^2+1=0$，特征根为$r=\pm i$，

则对应的齐次方程的通解为$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$ ………………（4 分）

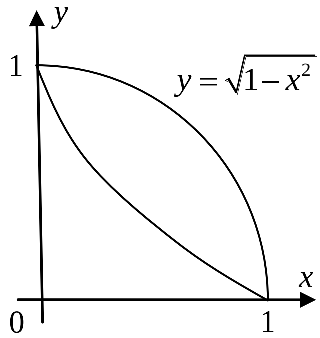
因为$\pm 2i$不是特征根，故设此方程的特解为$y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$……………（5 分）

代入原方程解得 $A=-\dfrac{4}{3},B=0$，故 $y^*=-\dfrac{4}{3}\cos 2x$， ………………（6 分）

所求微分方程的通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{4}{3}\cos 2x$ ………………（7 分）

又由 $f(0)=-1$，$f'(0)=0$，得$C_1=\dfrac{1}{3}$，$C_2=0$，故 $f(x)=\dfrac{1}{3}\cos x-\dfrac{4}{3}\cos 2x$……（8 分）

十.



解：（1） D 的图形如右图所示，则 D 的面积

$$A=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^3 x d\cos^3 x$$ ………………（2 分）

$$=\frac{\pi}{4}-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^2 x dx=\frac{\pi}{4}-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x(1-\sin^2 x)dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 x-\sin^6 x)dx$$ ………………（3 分）

$$=\frac{\pi}{4}-3(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2})=\frac{5}{32}\pi$$ …………（4 分）

（2） D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V=\pi\int_0^1(1-x^2)dx-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^6 x d\cos^3 x$$ ………………（6 分）

$$=\frac{2\pi}{3}-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\cos^2 x dx=\frac{2\pi}{3}-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x(1-\sin^2 x)dx$$

$$=\frac{2\pi}{3}-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 x-\sin^9 x)dx$$ ………………（7 分）

$$=\frac{2\pi}{3}-3\pi(\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}=\frac{18}{35}\pi$$ ………………（8 分）

十一.

解：（1） $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$，（其中 ξ 介于 $0,x$ 之间）。…（3 分）

（2）由题设， $f''(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续，

则在区间 $[-a,a]$ 存在最大值 M 和最小值 m， ………………（4 分）

而 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}(f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2)dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx$

又 $\frac{a^3}{3}m=\frac{m}{2}\int_{-a}^{a}x^2dx\le\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx\le\frac{M}{2}\int_{-a}^{a}x^2dx=\frac{a^3}{3}M$

故 $m\le\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)dx\le M$ ………………（6 分）

由介值定理，存在 $\eta\in[-a,a]$，使得 $f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)d$，

即 $a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx$。 ………………（8 分）