## ¡ 1.3　矩阵的秩与矩阵的初等变换

Gauss消元法基本上解决了线性方程组求解问题和解的判别问题。但消元过程中的某些方面尚未完全弄清楚，例如，应用Gauss消元法化线性方程组为阶梯形方程组时：

1、阶梯形方程组中方程的个数是否唯一确定?

2、它与增广矩阵有无内在联系?



一、矩阵的秩

二、矩阵的初等变换

三、初等矩阵



### 一、矩阵的秩

**定理1.3.1** 矩阵用初等行变换化成的阶梯形矩阵中，主元的个数（即非零行的数目）唯一确定。

**定义1.3.1** 矩阵$A$用初等行变换化成的阶梯形矩阵中主元的个数称为矩阵$A$的秩，记为秩$(A)$或 $r(A)$。

即非零行的行数



注　①主元的个数=非零行数目=矩阵的秩；

②与线性方程组同解的阶梯形方程组中，方程的个数恰为其增广矩阵的秩；

③从矩阵的秩的定义及定理可知求矩阵秩的方法：通过初等行变换化矩阵为阶梯型矩阵，非零行的数目就是矩阵的秩。

主元的个数



**例1.3.1** 设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&5&-1&-1\\1&-2&1&3\\3&8&-1&1\\1&-9&3&7\end{bmatrix}$,求秩$(A)$.

解：因为

$$A=\begin{bmatrix}1&5&-1&-1\\1&-2&1&3\\3&8&-1&1\\1&-9&3&7\end{bmatrix}\xrightarrow[R_2+(-1)R_1]{\substack{R_4+(-1)R_1\\R_3+(-3)R_1}}\begin{bmatrix}1&5&-1&-1\\0&-7&2&4\\0&-7&2&4\\0&-14&4&8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3+(-1)R_2]{R_4+(-2)R_2}\begin{bmatrix}1&5&-1&-1\\0&-7&2&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

故 秩$(A)$ = 2 。

由秩的定义易证矩阵的秩具有下述性质：

性质1.3.1

(1) 秩$(A)=0$ 当且仅当 $A=0$　　$A\neq 0$,则$r(A)\geq 1$.

(2) 秩$(A_{m\times n})\leq \min\{m, n\}$

(3) 初等行变换不改变矩阵的秩。

非零行矩阵、非零列矩阵的秩为1.

定义1.3.2 设 $A$ 是 $n$ 阶方阵。若秩$(A)=n$，则称 $A$ 是满秩方阵；若秩$(A)<n$，则称 $A$是降秩方阵。



注　①单位矩阵是满秩方阵；

②满秩方阵对应的行简化阶梯形矩阵一定是单位矩阵。

定理1.3.2　满秩方阵只用初等行变换即可化为单位矩阵。



对一般的矩阵$A_{m\times n}$，可用初等行变换化为行简化阶梯形矩阵$B$:

①若秩$(A)=n$，则

$$B=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}n\text{行}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$m\geq n$$

②若秩$(A)=m$，则不能保证

$$\begin{array}{c}\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{m\text{列}}\qquad\qquad\end{array}$$

$$B=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&\cdots&0\end{bmatrix}$$

$$m<n$$



例如，矩阵

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

只用初等行变换不能化为

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$



## 二、矩阵的初等变换

称对矩阵$A$的下述变换为初等列变换

(1) 对调两列.　　$C_{ij}$或$C_i\leftrightarrow C_j$

(2) 以数 $k\neq 0$ 乘以一列的所有元素　$kC_j$

(3) 把某一列所有元素的 $k$ 倍加到另一列对应元素上去.　$C_i+kC_j$

矩阵的初等列变换与初等行变换统称为初等变换.



定义1.3.3　设$A$和$B$是两个同型矩阵。若$A$可通过有限次初等变换化为 $B$，则称 $A$相抵于 $B$，记为 $A\simeq B$。　满秩矩阵$A\simeq I$.　　等价

性质1.3.2 矩阵的相抵满足：

(1) 自反性:　　$A\simeq A$

(2) 对称性:　　$A\simeq B\Rightarrow B\simeq A$

(3) 传递性:　　$A\simeq B, B\simeq C\Rightarrow A\simeq C$

一种关系如果同时具有自反性,对称性和传递性,则称其是等价关系.

矩阵相抵是同型矩阵间的一个等价关系。

问题：

①相抵矩阵中，最简单的矩阵是什么?

②其形式是否唯一?



定理1.3.3　设$A$是$m$¡ $n$矩阵，且秩$(A)=r$，则$A$相抵于下述矩阵

$$\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&\cdots&0\\&&\cdots&\cdots&&\\0&0&\cdots&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\\&&\cdots&\cdots&&\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\end{bmatrix}_{m\times n}$$

$r$行

称其为$A$的相抵标准型。

问题　$A$的相抵标准形是否唯一?

需要研究初等列变换对矩阵的秩的影响！



例　把下列矩阵用初等变换化为相抵标准型

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&1\\2&-1&2&4\\1&-2&0&3\\4&1&6&2\end{bmatrix}$$

解

$$A\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&-3&-2&2\\0&-3&-2&2\\0&-3&-2&-2\end{bmatrix}\longrightarrow$$



$$\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&-3&-2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&-3&-2&2\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&-3&-2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-3&-2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=B$$

则$B$即为$A$的相抵标准形



问题：矩阵的初等变换和矩阵的运算有什么关系？

三、初等矩阵

例 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$$

构造三个矩阵

$$P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix},\ P_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$E_2(2)$　　$E_{23}(-2)$　　$E_{12}$



分别计算 $P_1$、$P_2$、$P_3$与$A$的乘积。

解

$$P_1A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$$

$E_2(2)$

$$=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\2b_1&2b_2&2b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$$

$$P_2A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$$

$E_{23}(-2)$

$$=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1-2b_1&c_2-2b_2&c_3-2b_3\end{bmatrix}$$



$$P_3A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$$

$E_{12}$

$$=\begin{bmatrix}b_1&b_2&b_3\\a_1&a_2&a_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$$



$$AP_1=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_1&2a_2&a_3\\b_1&2b_2&b_3\\c_1&2c_2&c_3\end{bmatrix}$$



$$AP_2=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

$E_{23}(-2)$

$$=\begin{bmatrix}a_1&a_2-2a_3&a_3\\b_1&b_2-2b_3&b_3\\c_1&c_2-2c_3&c_3\end{bmatrix}$$



$$AP_3=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_2&a_1&a_3\\b_2&b_1&b_3\\c_2&c_1&c_3\end{bmatrix}$$



**定义1.3.4**　由单位矩阵 $I$ 经过一次初等变换得到的方阵称为**初等矩阵**.

三种初等变换对应着三种初等方阵.

$$\begin{cases}\text{1. 对调两行或两列;}\\ \text{2. 以数 } k\neq 0 \text{ 乘某行或某列;}\\ \text{3. 以数 } k \text{ 乘某行（列）加到另一行（列）上去.}\end{cases}$$

## 1、对调两行或两列

对调 $I$ 中第 $i,j$ 两行，即 $(R_i \leftrightarrow R_j)$，得初等方阵

$$E_{ij}=\begin{pmatrix}
1&&&&&&&&\\
&\ddots&&&&&&&\\
&&1&&&&&&\\
&&&0&\cdots&1&&&\\
&&&&1&&&&\\
&&&\vdots&\ddots&\vdots&&&\\
&&&&&1&&&\\
&&&1&\cdots&0&&&\\
&&&&&&1&&\\
&&&&&&&\ddots&\\
&&&&&&&&1
\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \leftarrow 第\, i\, 行\\ \\ \\ \\ \leftarrow 第\, j\, 行\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$



用 $m$ 阶初等矩阵 $E_{ij}$ 左乘 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，得

$$E_{ij}A=\begin{pmatrix}
a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\
\vdots&\vdots&&\vdots\\
a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\
\vdots&\vdots&&\vdots\\
a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\
\vdots&\vdots&&\vdots\\
a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}
\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \leftarrow 第\, i\, 行\\ \\ \leftarrow 第\, j\, 行\\ \\ \\ \end{matrix}$$

相当于对矩阵 $A$ 施行第一种初等行变换：把 $A$ 的第 $i$ 行与第 $j$ 行对调 $(R_i \leftrightarrow R_j)$.



类似地，以 $n$ 阶初等矩阵 $E_{ij}$ 右乘矩阵 $A$，

$$AE_{ij}=\begin{pmatrix}
a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1i}&\cdots&a_{1n}\\
a_{21}&\cdots&a_{2j}&\cdots&a_{2i}&\cdots&a_{2n}\\
\cdots&&\cdots&&\cdots&&\cdots\\
a_{m1}&\cdots&a_{mj}&\cdots&a_{mi}&\cdots&a_{mn}
\end{pmatrix}$$

相当于对矩阵 $A$ 施行第一种初等列变换：把 $A$ 的第 $i$ 列与第 $j$ 列对调 $(c_i \leftrightarrow c_j)$.



## 2、以数 $k \neq 0$ 乘某行或某列

以数$k\neq 0$乘单位矩阵的第$i$行$(R_i\times k)$，得初等矩阵$E_i(k)$.

$$E_i(k)=\begin{pmatrix}
1&&&&&&\\
&\ddots&&&&&\\
&&1&&&&\\
&&&k&&&\\
&&&&1&&\\
&&&&&\ddots&\\
&&&&&&1
\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \leftarrow 第\, i\, 行\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$



以 $E_i(k)$ 左乘矩阵$A$，

$$E_i(k)A=\begin{pmatrix}
a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\
\vdots&\vdots&&\vdots\\
ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\
\vdots&\vdots&&\vdots\\
a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}
\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \leftarrow 第\, i\, 行\\ \\ \\ \end{matrix}$$

相当于以数 $k$ 乘 $A$ 的第 $i$ 行 $(R_i\times k)$;

类似地，以$E_i(k)$ 右乘矩阵$A$，其结果相当于以数 $k$ 乘 $A$ 的第 $i$ 列 $(c_i\times k)$.



## 3. 以数$k$乘某行(列)加到另一行(列)上去

以 $k$乘 $I$ 的第 $i$ 行加到第 $j$ 行上 $(R_j+kR_i)$

[或以 $k$ 乘 $I$ 的第 $j$ 列加到第 $i$ 列上 $(c_i+kc_j)$]

$$E_{ij}(k)=\begin{pmatrix}
1&&&&&\\
&\ddots&&&&\\
&&1&&&\\
&&\vdots&\ddots&&\\
&&k&\cdots&1&\\
&&&&&\ddots&\\
&&&&&&1
\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \leftarrow 第 i 行\\ \\ \leftarrow 第 j 行\\ \\ \\ \end{matrix}$$

以 $E_{ij}(k)$ 左乘矩阵 $A$，

$$E_{ij}(k)A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

把 $A$的第 $i$ 行乘 $k$ 加到第 $j$ 行上 $(kR_i+R_j)$.



类似地，以 $E_{ij}(k)$ 右乘矩阵 $A$，其结果相当于把 $A$ 的第$j$列乘 $k$ 加到第 $i$ 列上 $(c_i+kc_j)$.

$$AE_{ij}(k)=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi}+ka_{mj} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



**定理1.3.4** 设 $A$是一个 $m\times n$矩阵，对 $A$施行一次初等行变换，相当于在 $A$的左边乘以相应的 $m$ 阶初等矩阵；对 $A$施行一次初等列变换，相当于在 $A$的右边乘以相应的 $n$阶初等矩阵.



**例** 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 3c_1 \\ a_2 & b_2 & 3c_2 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} a_1-2b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2-2b_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

问$A$与$B$、$C$、$D$之间有何联系？



**解** 因为

$$A\xrightarrow{3C_3}B$$

与之相对应，

$$I_3\xrightarrow{3C_3}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}=E_3(3)$$

故

$$AE_3(3)=B$$



同理可得 $AE_{13}=C$ 。

因为

$$A\xrightarrow{C_1+(-2)C_2}D$$

而

$$I_3\xrightarrow{C_1+(-2)C_2}\begin{pmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}=E_{12}(-2)$$

故 $AE_{12}(-2)=D$。

例 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}b_1&b_2&b_3\\a_1&a_2&a_3\\c_1+2a_1&c_2+2a_2&c_3+2a_3\end{bmatrix}$$

$$\underset{E_{12}}{P}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \underset{E_{23}(2)}{Q}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}$$

问$P$与$Q$如何与$A$相乘可得到$B$?



解 因为对$A$作两次初等行变换可得$B$，而$P$与$Q$均为初等矩阵，所以应有 $PQA=B$ 或 $QPA=B$。

$$\because\ A=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}b_1&b_2&b_3\\a_1&a_2&a_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+2R_2}\begin{bmatrix}b_1&b_2&b_3\\a_1&a_2&a_3\\c_1+2a_1&c_2+2a_2&c_3+2a_3\end{bmatrix}=B$$



又 $R_{12}$ 对应 $P$，$R_3+2R_2$ 对应 $Q$

$$\therefore\quad QPA=Q(PA)=B$$

初等矩阵的性质：

性质1.3.2 （1）初等矩阵是满秩方阵且初等矩阵的乘积也是满秩方阵；

(2) 任一初等矩阵 $P$，均存在初等矩阵 $Q$，使 $PQ=QP=I$。

定理1.3.5 满秩方阵可表示成若干初等矩阵的乘积。

推论 满秩方阵的乘积也是满秩方阵。



定理1.3.6 设$A$与$B$是两个$m$ ¡ $n$矩阵，则$A$相抵于$B$的充分必要条件是：存在$m$阶满秩矩阵$P$与$n$阶满秩矩阵$Q$，使$PAQ=B$。

定理1.3.7 同型矩阵$A$与$B$相抵的充分必要条件是 秩($A$)=秩($B$)。

推论 矩阵的初等列变换也不改变矩阵的秩。

即 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩。

注 矩阵$A$的相抵标准形被$A$的秩唯一确定(矩阵相抵标准形的唯一性)。

矩阵的秩的重要结论：

定理1.3.8 （1）秩($A$)=秩($A^T$)

（2） $A$是$m$ ¡ $n$ 矩阵，$P$ 是$m$ 阶满秩方阵，$Q$ 是$n$ 阶满秩方阵，则

秩($A$)=秩（$PA$）=秩（$AQ$）=秩（$PAQ$）

例 设$A$是4¡ 5矩阵且秩($A$)=3，求秩($BA$), 这里

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&0\\3&4&0&0\\4&0&0&0\end{bmatrix}$$



解

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&0\\3&4&0&0\\4&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}$$

所以秩($B$)=4. 由定理1.3.8(2)可知

$$r(BA)=r(A)=3$$

**例** 对任一满秩方阵 $P$，均存在同阶的满秩方阵 $Q$，使 $PQ = QP = I$。

**证**：设$P$是$n$阶满秩方阵，则由定理 1.3.5 可知，存在若干个$n$阶初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_S$ 使得

$$P = P_1 P_2 \cdots P_S$$

又由性质1.3.2 (2) 可知，存在$s$个$n$阶初等矩阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_S$，使得

$$P_1Q_1 = Q_1P_1 = I, P_2Q_2 = Q_2P_2 = I$$

$$\cdots \quad P_SQ_S = Q_SP_S = I$$



令 $Q = Q_s \cdots Q_2Q_1$，则有 $PQ = QP = I$，根据性质1.3.2 (1)，$Q$ 也是 $n$ 阶满秩方阵。

**例1.3.7** 设$A$是$n$阶非零方阵。则$A$是降秩矩阵的充分必要条件是：存在$n$阶非零方阵$B$，使$AB$=0。

**证明：充分性** 设存在$n$阶非零方阵$B$，使得$AB = 0$，

$\because B \neq 0, \therefore r(B) \geq 1.$ 假设$A$是满秩矩阵，则有

$r(B) = r(AB) = r(0) = 0,$ 与$r(B) \geq 1$矛盾.

故$A$一定是降秩矩阵.



**必要性** 设$A$是$n$阶降秩矩阵，则 $r(A) = r < n.$

则$A$与下述矩阵$B_1$相抵，

$$B_1 = \begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}r\text{行}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

**由两矩阵相抵的充要条件知：**

存在$n$阶满秩矩阵$P'$与$Q$，使得$P'AQ = B_1$ (1)

又由上例可知，存在$n$阶满秩矩阵$P$，使得$PP' = I$，

在(1)式两边左乘$P$，得 $AQ = PB_1$ (2)

**构造n阶方阵**

$$B_2 = \begin{bmatrix}0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\0&\cdots&0&1&0&\cdots&0\\0&\cdots&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}n-r\text{行}\end{matrix}$$

在(2)式两边右乘$B_2$，得 $AQB_2 = PB_1B_2 = P0 = 0$

令$B = QB_2$，则$AB = 0$. 又因为$r < n$，所以$n - r > 0$，

所以$B_2 \neq 0$，$\Rightarrow r(B_2) \geq 1$，

又$Q$满秩，故有$r(B) = r(QB_2) = r(B_2) \geq 1$，$\Rightarrow B \neq 0$.

**总 结**

1. 阶梯形矩阵中主元个数的唯一性；
2. 相抵标准形的唯一性；
3. 矩阵秩的性质；
4. 满秩矩阵的性质。

**要 求**

1. 求矩阵的秩；
2. 化矩阵为相抵标准型；
3. 熟悉矩阵秩的性质；
4. 熟悉满秩矩阵的性质。



**作业** 习题一(P77)：

24(1)(2)、25、27、28