欢迎你们
北京理工大学的新主人

线 性 代 数

LINEAR ALGEBRA

线性代数简介

线性代数是研究线性问题的代数理论。

线性：变量的次数为一次；研究的计算为
¡加法¡与¡乘法¡运算。

学习内容：可归纳为¡一个问题¡和
¡两个工具¡

一个问题：线性方程组问题

两个工具：矩阵和向量　行列式

这三者之间有着密切的联系，互为工具！

具体来说就是：

讨论矩阵理论、与矩阵相结合的有限维向量空间及其线性变换理论的一门学科。

线性代数属于第二代数学模型范畴，它的许多概念是用公理化的方式表述的。

线性代数特点：具有较强的逻辑性，高度的抽象性和广泛的应用性。

工程上：非线性问题转化为线性问题

应用：自动控制，电子通讯，计算机技术等

线性代数简介

1、线性代数的主要研究对象?(线性方程组）

2、什么是线性方程组？

3、如何研究线性方程组？

--解的判别、求解、解的结构

线性代数知识结构

线性方程组

- 一般方程
  - 判别与求解 → 矩阵
    - 运算（第一章）
    - 对角化（第五章）
  - 解的结构 → n元向量
    - 线性相关性（第二章）
    - 向量空间（第三章）
    - 线性空间
    - 线性变换
- 特殊方程 → 行列式（第四章）

解析几何

→ 二次型（第六章）
- 对称矩阵
- 线性变换

线性代数简介

具体内容

第一章 矩阵

第二章 线性方程组

第三章 线性空间与线性变换

第四章 行列式

第五章 特征值与特征向量

第六章 二次型与正定矩阵

参考书目： 考研辅导书等

【1】《高等代数讲义》（上册），丘维声编，北京大学出版社

【2】《线性代数》，居余马等编，清华大学出版社

【3】《线性代数辅导》，胡金德等编，清华大学出版社

【4】《线性代数学习指导与习题解答》，杨刚等编，高等教育出版社

【5】Lay D C. Linear Algebra and Its Application,(Second Edition)[M]，New York:Wesley Longman 2000.

【6】麻省理工开放课程¡ 线性代数

●**作业要求**：

请用数学作业纸做作业，每次作业请写上序号、班级、学号、姓名，每周星期一交作业。

每章讲授结束时请写一篇关于该章的概念、性质及定理以及计算方法的小结。

每章讲授结束时请在各自专业领域查找该章概念、定理的应用。

●**答疑**：每周课后：2:55¡ 3:30

地点：2层东侧教师休息室

●**课件下载**：邮箱：wjfkejian@sina.com

1201xd

●**成绩考核**：

平时成绩 (出勤、作业、课堂测验等)：20--30％

平时成绩 (20-30分)=平时作业（10分）

+平时测验（10-20分）

期末考试(闭卷)：70¡ 80％

总评成绩(满分100分)=平时成绩 (20-30分)+

期末卷面成绩*(70¡ 80％)

线 性 代 数

第一章 矩 阵

¡ 1.1 Gauss 消元法

● 一般的n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.1.1)$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是未知数，a_{ij} (i=1,¡ ,m;j=1,¡ ,n) 是系数，$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 是常数项。称式(1.1.1)为m个方程n个未知数的线性方程组。

非齐次线性方程组：若 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零。

齐次线性方程组：若 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1.1.2)$$

称**(1.1.2)**为**(1.1.1)**的导出方程组.

● 线性方程组的解

一个解：n元有序数组 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 代入线性方程组 (1.1.1)，即令 $x_1 = c_1$，$x_2 = c_2$，$\cdots$，$x_n = c_n$，若(1.1.1)的所有方程变为恒等式。

解集合：线性方程组(1.1.1)的全部解构成的集合。

不相容线性方程组（无解）：解集合为空集。

相容线性方程组（有解）：解集合不为空集。

一般解（通解）：解集合中全部元素的通项表达式。

具体解（特解）：解集合中一个特定元素。

解的存在性：解集合是否为空集。

解的唯一性：非空的解集合是否只有一个元素。

线性方程组同解：解集合相同。

一般的n元齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1.1.2)$$

零解：所有未知数均取零的解(必为(1.1.2)的解)；

非零解：未知数不全取零的解(可能存在)。

注 对齐次线性方程组，有非零解⇔解不唯一。

例

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

只有零解;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

有无穷多个解,(2,-1),(6,-3)等. **k(2,-1)**

● 求解线性方程组：Gauss消元法

新方法：改进已学过的加减消元法求解线性方程组。新方法简便、规范，适用所有线性方程组.

例 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 = -2 & (1) \times \frac{1}{2} \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -2 & (2) \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -3 & (3) \\ x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 = 2 & (4) \end{cases} \qquad (A)$$

解

$$(A)\xrightarrow{(1)\times\frac{1}{2}}\left\{\begin{array}{rrrrl} \cancel{x_1} & \cancel{-x_2} & & \cancel{+3x_4} & \cancel{=-1} \quad (1) \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +4x_4 & =-2 \quad (2) \\ 3x_1 & -x_2 & +4x_3 & +4x_4 & =-3 \quad (3) \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +8x_4 & =2 \quad (4) \end{array}\right. \quad (B_1)$$

$$\xrightarrow[(4)+(1)\times(-1)]{\substack{(2)+(1)\times(-2)\\(3)+(1)\times(-3)}}\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & & +3x_4 & =-1 \quad (1) \\ & \cancel{-x_2} & \cancel{+2x_3} & \cancel{-2x_4} & \cancel{=0} \quad (2) \\ & 2x_2 & +4x_3 & -5x_4 & =0 \quad (3) \\ & 2x_2 & +x_3 & +5x_4 & =3 \quad (4) \end{array}\right. \quad (B_2)$$

$$\xrightarrow[(4)+(2)\times(-2)]{(3)+(2)\times(-2)}\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & & +3x_4 & =-1 \quad (1) \\ & x_2 & +2x_3 & -2x_4 & =0 \quad (2) \\ & & & -x_4 & =0 \quad (3) \\ & & -3x_3 & +9x_4 & =3 \quad (4) \end{array}\right. \quad (B_3)$$

$$\xrightarrow{(3)\leftrightarrow(4)}\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & -x_2 & & +3x_4 & =-1 \\ & x_2 & +2x_3 & -2x_4 & =0 \\ & & -3x_3 & +9x_4 & =3 \\ & & & -x_4 & =0 \end{array}\right. \quad (B_4)$$

由最后这个阶梯形方程组通过依次回代，解得

$$x_1=1, \quad x_2=2, \quad x_3=-1, \quad x_4=0.$$

小结：

1．上述求解线性方程组有两个过程: 消元与回代.

2．消元过程对方程组进行了如下三种类型的变换:

（1）以一个非零数乘某个方程；

（以 ⓘ$\times k$ 替换 ⓘ）

（2）把一个方程的常数倍加到另一个方程上；

（以 ⓘ$+k$ⓙ 替换 ⓘ）

（3）互换两个方程的位置。

（ⓘ与ⓙ相互替换）

称上述三种变换为方程组的初等变换.

3．上述三种变换都是可逆的.

若$(A)\xrightarrow{ⓘ\leftrightarrowⓙ}(B)$, 则$(B)\xrightarrow{ⓘ\leftrightarrowⓙ}(A)$;

若$(A)\xrightarrow{ⓘ\times k}(B)$, 则$(B)\xrightarrow{ⓘ\div k}(A)$;

若$(A)\xrightarrow{ⓘ+kⓙ}(B)$, 则$(B)\xrightarrow{ⓘ-kⓙ}(A)$.

由于三种变换都是可逆的，所以变换前的方程组与变换后的方程组是同解的.

定理1.1.1 方程组的初等变换把一个线性方程组变成另一个同解的线性方程组。

4. 消元时约定：

①用上面的方程中的未知数消去下面方程中的未知数；

②一个方程中从左向右依次消去未知数；

最后总可以得到一种特殊形式的方程组：阶梯形方程组，即从上向下，每个方程中系数不为零的第一个未知数的下标是严格增大的。

例

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & =1 \\ & x_2 & +x_3 & =2 \\ & & x_3 & =0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =1 \\ & & x_3 & +x_4 & =0 \end{array}\right.$$

注 消元的目的就是把原方程组化为阶梯形方程组，以便于回代过程的进行。

在上述变换过程中，仅仅只对方程组的系数和常数进行运算，未知量、¡ +¡ 、¡ =¡ 并未参与运算. 于是为了简便表示消元过程，前例中方程组

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & -2x_2 & & +6x_4 & =-2 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +4x_4 & =-2 \\ 3x_1 & -x_2 & +4x_3 & +4x_4 & =-3 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +8x_4 & =2 \end{array}\right.$$

可简记为 $$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 6 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

这个数阵就是矩阵。

● 矩阵的定义

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 构成的m 行n 列的矩形表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为$m\times n$矩阵.简称$m\times n$ 矩阵. 记作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad m=n \text{ 称为方阵}$$

简记为 $A=A_{m\times n}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}\right]$.

这$m \times n$个数称为A的元素，简称为元。

元素是实数的矩阵称为实矩阵,

元素是复数的矩阵称为复矩阵.

$a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 是 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 的第i行,

$\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$ 是$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ 的第j列,

因此 a_{ij} 位于 $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ 的第i 行第j列,

称之为矩阵 $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$的 (i,j) — 元.

矩阵：$A, B, C, \cdots$；元素：$a, b, c, a_i, b_j, a_{ij}, b_{ij}, \cdots$

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (1.1.1)$$

令

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\text{齐次线性方程组}}$$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\text{非齐次线性方程组}}$$

分别称为方程组(1.1.1)的系数矩阵和增广矩阵。

注　非齐次线性方程组由其增广矩阵唯一确定。

齐次线性方程组由其系数矩阵唯一确定。

增广矩阵的每行对应方程组中的一个方程，故方程组的三种初等变换对应增广矩阵的下列三种变换：

(1) 以数$k \neq 0$乘以某一行的所有元素；

(第i行乘k，记作kR_i)

(2) 把某一行所有元素的k倍加到另一行对应的元素上去（第j行的k倍加到第i行上，记作$R_i + kR_j$）.

(3) 对调两行(对调i, j两行，记作R_{ij}). $R_i \leftrightarrow R_j$

上面三种变换称为矩阵的初等行变换。

注 方程组的初等变换 $\Longleftrightarrow$ 增广矩阵的初等行变换

方程组的消元过程可以通过对增广矩阵的初等变换实现.

例 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+2x_3=4 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=5 \\ 3x_1+4x_2+5x_3=7 \end{cases}$$

解：写出增广矩阵

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2+(-2)R_1]{R_3+(-3)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ x_2+2x_3=1 \\ x_3=1 \end{cases}$$

解得：$x_1=2, x_2=-1, x_3=1.$

注意：

(1) 引入变换提示符指明所做初等变换

$kR_i (k \neq 0)$，$R_i + kR_j$，R_{ij} (或$R_i \leftrightarrow R_j$).

(2) 将矩阵A化为B记为$A \rightarrow B$，*不能记为$A = B$.*

(3) 阶梯型方程组的增广矩阵也有阶梯的 特征.

(i) 零行在 所有非零行的下面；

(ii) 随着行标的增大，每个非零行的首非零元的列标严格增大.

这样形状的矩阵称为阶梯形矩阵.

阶梯形矩阵特点：

（1）、可划出一条阶梯线，线的下方全为零；

（2）、每个台阶只有一行，

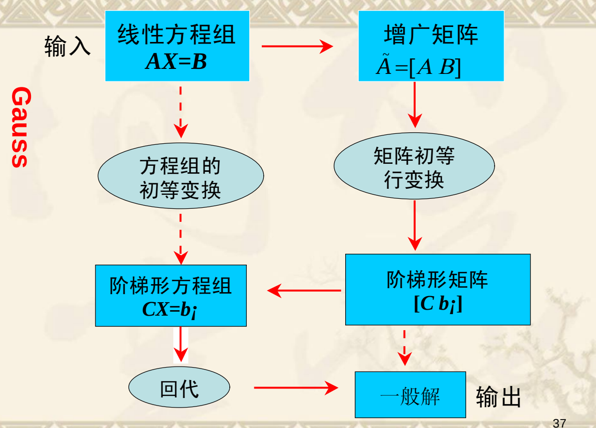
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线后面的第一个元素为非零元，即非零行的第一个非零元（称之为主元）.

显然，以阶梯形矩阵为增广矩阵的线性方程组一定也是阶梯形方程组. 因此只要把增广矩阵用初等行变换化为阶梯形矩阵，即可得所求的阶梯形方程组，从而完成消元过程.

这种求解方法就是所谓的*Gauss*消元法.此方法的关键是把增广矩阵用初等行变换化为阶梯形.

定理1.1.2 任一矩阵可通过有限次初等行变换化为阶梯形矩阵。



例 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

解

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2+(-1)R_1]{R_3+(-2)R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+(-1)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对应阶梯形方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad\qquad 0 = 1 \end{cases}$$

因为无论 x_1, x_2, x_3 取何值，都不会使第三个方程成立，所以此方程组无解，亦即原方程组无解。

称形如¡零=非零数¡的方程为矛盾方程。

不相容线性方程组

例 解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 2 \end{cases}$$

解

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = -1 \\ \qquad x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = -1 + x_2 - 3x_5 \\ \quad x_3 + 2x_4 = 2x_5 \\ \qquad x_4 = -1 + 3x_5 \end{cases} \qquad (2)$$

令 $x_2 = k_2$，$x_5 = k_5$，则由(2) 可唯一地确定 x_1, x_3, x_4，

$x_1 = 1 + k_2 - 7k_5$，$x_3 = 2 - 4k_5$，$x_4 = -1 + 3k_5$ (3)

由于

$x_1 = 1 + k_2 - 7k_5$，$x_2 = k_2$，$x_3 = 2 - 4k_5$，

$x_4 = -1 + 3k_5$，$x_5 = k_5$

满足(2)，故也满足(1)，即它们构成原方程组的解。

因为 k_2, k_5 可任意取值，故由（3）式可知原方程组有无穷多个解。

一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 - 7x_5 \\ x_3 = 2 - 4x_5 \\ x_4 = -1 + 3x_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 - 7x_5 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2 - 4x_5 \\ x_4 = -1 + 3x_5 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

因 x_2, x_5 的值是任意取定的，故称之为自由未知数。

相应地，x_1, x_3, x_4 称为主元未知数

例　解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

选 x_2, x_4, x_5 为自由未知数，则有

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = x_2 - 3x_5 \\ x_3 = -2x_4 + 2x_5 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_4 - x_5 \\ x_3 = -2x_4 + 2x_5 \end{cases} \quad (x_2, x_4, x_5\text{为自由未知数})$$

问题：

（1）自由未知量的选法是否唯一？

（2）自由未知量是否可以随意选取？

解答：

(1) 另取 x_1, x_2, x_4 为自由未知量，则有

$$\begin{cases} -x_3 + 3x_5 = -x_1 + x_2 \\ x_3 - 2x_5 = -2x_4 \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x_3 = -2x_1 + 2x_2 - 6x_4 \\ x_5 = -x_1 + x_2 - 2x_4 \end{cases}$$

问题：

（1）自由未知量的选法是否唯一？　不唯一

（2）自由未知量是否可以随意选取？　不随意

解答：

(2) 取 x_3, x_4, x_5 为自由未知量，则有

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = x_3 - 3x_5 \\ x_1 - x_2 = -2x_4 - x_5 \end{cases}$$

对 x_3, x_4, x_5 的某些值无解，而其他的自由未知数

选择总使得阶梯形方程组中由非自由未知数构成的方程组有唯一解.

自由未知量是不能随便取的！

选取时必须保证当自由未知量的值给定后，阶梯型方程组的解唯一。

阶梯形矩阵中各 非零行的第一个非零元，称之为主元．阶梯形方程组中主元对应的未知数称为主元未知数．

注:（1）通常总是取非主元未知数为自由未知数（系数不是阶梯形矩阵主元的未知数）;

（2）阶梯形方程组不含¡ 0=0¡ 的方程。

（3）对齐次方程组消元时，只需对系数矩阵进行初等行变换

对于一般的线性方程组解的判定及求法.

首先,把方程组(1.1.1)的增广矩阵

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

用初等行变换化为阶梯形矩阵 $\tilde{B}$

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & \cdots & b_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & \cdots & b_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中主元均不为零,然后写出 $\tilde{B}$ 对应的阶梯形方程组。

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1r}x_r+\cdots b_{1n}x_n=d_1 \\ \qquad b_{22}x_2+\cdots+b_{2r}x_r+\cdots b_{2n}x_n=d_2 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad b_{rr}x_r+\cdots b_{rn}x_n=d_r \\ \qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1} \end{cases} \qquad (1.1.4)$$

结论

情况1：$d_{r+1}\neq 0$

此时，$0=d_{r+1}$ 是矛盾方程，方程组无解。

情况2：$d_{r+1}=0$ 且 $r=n$.

此时，方程组可表示为

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1r}x_r+\cdots b_{1n}x_n=d_1 \\ \qquad b_{22}x_2+\cdots+b_{2r}x_r+\cdots b_{2n}x_n=d_2 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad b_{nn}x_n=d_n \end{cases}$$

方程组有唯一解。

情况3：$d_{r+1}=0$ 且 $r<n$.

此时，方程组可表示为

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1r}x_r=d_1-b_{1r+1}x_{r+1}-\cdots-b_{1n}x_n \\ \qquad b_{22}x_2+\cdots+b_{2r}x_r=d_2-b_{2r+1}x_{r+1}\cdots-b_{2n}x_n \\ \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad b_{rr}x_r=d_r-b_{rr+1}x_{r+1}\cdots-b_{rn}x_n \end{cases}$$

方程组有无穷多个解。

● 线性方程组解的存在性与唯一性：

定理　把方程组化为同解的阶梯形方程组：

(1)若方程组含矛盾方程，则方程组无解；

(2)若方程组不含矛盾方程，则方程组有解.此时，若 $r=n$，则方程组有唯一解；若 $r<n$，则方程组有无穷多个解。

推论　若齐次线性方程组中方程的个数少于未知数的个数，则其必有非零解。

注　此结论不能推广到非齐次线性方程组。

●系数中有参数时，分析参数和解的关系：

例　设有线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

问λ取何值时，有解？有无穷多个解？

解　对增广矩阵 $B=(A,b)$ 作初等行变换，

$$B=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{交换1，3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1 \cdot (-\lambda)+R_3]{R_1 \cdot (-1)+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \cdot (1)+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

(1)　当$\lambda=1$时，

$$B \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯数 <3，方程组有无穷多解.

其通解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \quad (x_2, x_3\text{为任意实数}).$$

(2)　当$\lambda \neq 1$时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(1+\lambda)^2 \end{pmatrix}$

$$B \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2+\lambda & (1+\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

这时又分两种情形：

1) $\lambda \neq -2$时，阶梯数为3，方程组有唯一解：

$$x_1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, \quad x_2 = \frac{1}{\lambda+2}, \quad x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}.$$

2) $\lambda=-2$时，

$$B \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

最后方程为 $0=3$，故方程组无解.

Gauss消元法的进一步讨论:

Gauss消元法的关键是把增广矩阵或系数矩阵化为阶梯形矩阵,而阶梯形矩阵不唯一，需要寻找更简单的阶梯形.

我们希望:**零元素更多, 非零元素尽可能是1.**

矩阵的初等行变换可以把阶梯形矩阵化为更简单的形式，例如

阶梯形矩阵 $\tilde{B}$有如下特点：主元为1并且主元所在列的其它元素全为零。

称这样的阶梯形矩阵为行简化阶梯形矩阵或标准阶梯形矩阵。

$$\xrightarrow{R_1+R_2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{B}$$

假设某一五元线性方程组以 $\tilde{B}$为其增广矩阵，则其形式为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad +7x_5 = 1 \\ \qquad x_3 \qquad +4x_5 = 2 \\ \qquad\qquad x_4 \quad -3x_5 = -1 \end{cases}$$

由此立得其一般解

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - 7x_5 + 1 \\ x_3 = \quad -4x_5 + 2 \\ x_4 = \quad 3x_5 - 1 \end{cases} \quad (x_2,\ x_5\text{是自由未知数})$$

增广矩阵 $\Rightarrow$ 阶梯形矩阵 $\Rightarrow$ 阶梯形方程组 $\Rightarrow$ 回代 $\Rightarrow$ 解

增广矩阵 $\Rightarrow$ 行简化阶梯形矩阵 $\Rightarrow$ 阶梯形方程组 $\Rightarrow$ 解

定理 任一矩阵均可通过有限次初等行变换化为行简化阶梯形矩阵。

总结

1：**Gauss** 消元法：

a: 消元过程： 增广矩阵 $\longrightarrow$ 阶梯型矩阵（会根据阶梯型矩阵的特点判断方程组解的情况）

b: 回代过程： 阶梯型矩阵 $\longrightarrow$ 行简化的阶梯型矩阵

c: 写出方程组的解，无穷多解时写出解的一般形式（写明自由未知数）

2：系数中有参数时，会判别参数和方程组解的关系。

作业

习题一 **(P73)：1(1)(3)，2，4**
(1---7题均可做练习**)**