2008-2009 学年第二学期概率统计标准答案与评分标准

一、（12 分）

解：设 A=目标被摧毁，B_1＝目标中弹 1 发，

B_2＝目标中弹 2 发，B_3＝目标中弹 3 发，

（1） $P(A/B_1)=0.2$， $P(A/B_2)=0.5$ ，$P(A/B_3)=0.8$

$P(B_1)=0.3\times0.6\times0.5+0.7\times0.4\times0.5+0.7\times0.6\times0.5=0.44$ ---2 分

$P(B_2)=0.3\times0.4\times0.5+0.3\times0.6\times0.5+0.7\times0.4\times0.5=0.29$ ---2 分

$P(B_3)=0.3\times0.4\times0.5=0.06$ ---1 分

$$p(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)$$

$$=0.44\times0.2+0.29\times0.5+0.06\times0.8=0.281$$ ---3 分

目标被摧毁的概率是 0.281.

（2） $P(B_2/A)=\dfrac{P(B_2)P(A/B_2)}{P(A)}=\dfrac{0.29\times0.5}{0.281}=0.516$ ---4 分

已知目标被摧毁，目标中弹 2 发的概率是 0.516.

二.（14 分）

解：（1）由已知 $P(X>k)=1-P(X\le k)=\dfrac{2}{3}$ 得 ---（2 分）

$$F(k)=P(X\le k)=\frac{1}{3}$$

故 $1\le k\le 3$ ---（2 分）

（2）X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0<x<3\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$ ---（2 分）

$Y=5X+2$ 的可取值范围是$(2,17)$

由 $y=5x+2$ 得 $y'=5$

故 $y=5x+2$ 在 $(0,3)$ 上严格单增，

其反函数 $x=h(y)=\dfrac{y-2}{5}$ ，且 $h'(y)=\dfrac{1}{5}$ ---（4 分）

所以 $Y=5X+2$ 的密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\left(\dfrac{y-2}{5}\right)\left|\dfrac{1}{5}\right| , & 2<y<17 \\ 0 , & \text{其他} \end{cases}$$ ---（4 分）

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{15} , & 2<y<17 \\ 0 , & \text{其他} \end{cases}$$

三、（18 分）

1. 由 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$ 可知

$$1=A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-2}^{2} 1dy=A(4\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=4\sqrt{2\pi}A \text{ 得 } A=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}$$

---4 分

2. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

$$f_X(x)=\int_{-2}^{2} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<\infty$$ ---.4 分

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

当 $-2\le y\le 2$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\dfrac{1}{4}$

当 $y\le -2$ 或 $y\ge 2$ 时，$f_Y(y)=0$

---4 分

$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{4},-2\le y\le 2 \\ 0, \quad \text{其他} \end{cases}$$

3. X 与 Y 相互独立. 因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 几乎处处成立 .

---2 分

4. $P(\max(X, Y) \le 0) = P(X \le 0，Y \le 0) = P(X \le 0)P(Y \le 0)$

（因为 X与Y相互独立） $= \Phi(0) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

---4 分

四、（18 分）

解：(1)第一种答案：

由题意可知X,Y的边缘概率密度分别为

当$0 \le x \le 1$时， $f_X(x) = \int_0^1 dy = 1$， -----1 分

当$x > 1$或$x < 0$时， $f_X(x) = 0$； -----1 分

当$0 \le y \le 1$时， $f_Y(y) = \int_0^1 dx = 1$， -----1 分

当$y > 1$或$y < 0$时， $f_Y(y) = 0$ -----1 分

因此$E(X) = \int x f_X(x)dx = \int_0^1 xdx = 1/2$ -----1 分

$E(Y) = \int y f_Y(y)dy = \int_0^1 ydy = 1/2$. -----1 分

第二种答案：

$E(X) = \iint xf(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 xdxdy = 1/2$， -----3 分

$E(Y) = \iint yf(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 ydxdy = 1/2$. -----3 分

(2) $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - EXEY$ -----2 分

由于$E(XY) = \iint xyf(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 xydxdy = 1/4$， -----2 分

所以 $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - EXEY = 0.$ -----2 分

(3) 由于

$$\operatorname{cov}(U,V)=\operatorname{cov}(X+2Y,X-2Y)=\operatorname{cov}(X,X)-4\operatorname{cov}(Y,Y)=D(X)-4D(Y)$$

-----1 分

$E(X^2)=\int x^2 f_X(x)dx=\int_0^1 x^2dx=1/3$ -----1 分

$E(Y^2)=\int y^2 f_Y(y)dy=\int_0^1 y^2dy=1/3$ -----1 分

因此$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=1/12$， -----1 分

$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=1/12$ -----1 分

$\operatorname{cov}(U,V)=D(X)-4D(Y)=1/12-4/12=-1/4.$ -----1 分

五.（8 分）

解：设 X_i 为第 i 个零件的质量，i＝1,2,...100。

总质量 M＝$\sum_{i=1}^{100}X_i$， 由已知，$E(X_i)$＝0.5，$D(X_i)$＝0.1^2 。

由中心极限定理，可知

$$\frac{M-100\times 0.5}{\sqrt{100}\times 0.1}\text{近似}\sim \text{N（0,1）。}$$ -

----(4 分)

所以

$$P(M>51)\approx 1-\Phi\left(\frac{51-50}{10\times 0.1}\right)=1-\Phi(1)=1-0.8413=0.1587.$$ ------(4 分)

六、(18 分)

解：(1)易知 $EX=mp$， -----(3 分)

解得$\theta=\frac{1}{m}EX$ -----(3 分)

用 $\overline{X}$ 代替 EX 得到参数θ的矩估计为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{m}\overline{X}$$ -----(3 分)

(2) 似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=\prod_{i=1}^{n}C_m^{x_i}p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}$

$$=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{\sum_{i-1}^{n}(m-x)_i}\prod_{i=1}^{n}C_m^{x_i}$$ -----(2 分)

取对数得：

$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln p+\sum_{i-1}^{n}(m-x)\ln((1-p))+\ln\prod_{i=1}^{n}C_m^{x_i}$$ -----(2 分)

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{\sum_{i-1}^{n}(m-x_i)}{1-p}$$ -----(2 分)

令 $\frac{d\ln L(p)}{dp}=0$， -----(1 分)

解得： $\hat{p}=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{m}\overline{x}$ 。 -----(2 分)

七.（12 分）

解：假设 H_0： μ≤10,　　H_1: μ>10.

检验统计量：$T=\sqrt{n}\frac{\overline{X}-10}{s}$ 。

拒绝域：{T≥$t_{0.05}$(n-1)} ={T≥ 1.7109}. -----(8 分)

由给定样本知 $\overline{X}=10.2, S=0.5, n=25.$ 计算 T＝2 ＞ 1.7109.

因此，拒绝 H_0, 可以认为装配时间的均值显著地大于 10min。

------(4 分)