习题2-6

1. 解：$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cdot\sin x+x^{\frac{1}{3}}\cos x$

则 $f'(0)=0$

2. 第(3)个

3. (1) $f(x)=\begin{cases}(x^2-x-2)(x-x^3) & x<-1 \text{ 或 } 0<x<1 \quad (\text{连续可导})\\ 0 & x=-1 \text{ 或 } 0 \text{ 或 } 1\\ (x^2-x-2)(x^3-x) & -1<x<0 \text{ 或 } x>1 \quad (\text{连续可导})\end{cases}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f_-(-1)=\lim_{x\to 1^-}(x^2-x-2)(1-x^2)=0=f_+(-1)$$

则 $x=-1$ 处可导.

但是：

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}(x^2-x-2)(x^2-1)=2$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}(x^2-x-2)(1-x^2)=-2$$

则 $x=0$ 处不可导.

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(2+x-x^2)(1+x)x=4$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x^2-x-2)x(x+1)=-4$$

则 $x=1$ 处不可导.

综上：$f(x)$ 在 $x=0$，$x=1$ 处不可导.

(2) $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1 \quad (\text{连续可导})\\ 1 & |x|=1\\ x^3 & |x|>1 \quad (\text{连续可导})\end{cases}$

因为 $f'_-(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^3-1}{x-(-1)}=-3$

$f'_+(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{1-1}{x-(-1)}=0$

则 $x=-1$ 处不可导

又 $f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=3$

$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-1}{x-1}=0$

则 $x=1$ 处不可导

综上：$f(x)$ 在 $x=-1$ 和 $x=1$ 处不可导

4. 证：因为 $f(x)\neq 0$，所以 $f(0)\neq 0$. 又 $f(x+y)=f(x)f(y)$. 取 $x=y=0$ 得

$f(0+0)=f(0)f(0)\Rightarrow f(0)=1$，对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有

则 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\cdot f(x)\dfrac{(f(h)-f(0))}{h}=f(x)f'(0)=f(x)$.

对左右极限都成立，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f'(x)=f(x)$.

5. 解：$\dfrac{dy}{du}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{du}$

因 $x=y^2+y$，则 $1=2y\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dy}{dx}\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+2y}$

因 $u=(x^2+x)^{\frac{3}{2}}$ 则 $1=\frac{3}{2}(x^2+x)^{\frac{1}{2}}(2x\dfrac{dx}{du}+\dfrac{dx}{du})\Rightarrow\dfrac{dx}{du}=\dfrac{2}{3\sqrt{x^2+x}\,(2x+1)}$

则 $\dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{1+2y}\cdot\dfrac{2}{3\sqrt{x^2+x}\,(2x+1)}=\dfrac{2}{3(2y+1)\cdot(2x+1)\sqrt{x^2+x}}$

6. 解：$g'(x)=(f'(x)\sin^2 x+f(x)2\sin x\cos x)=f'(x)\sin^2 x+f(x)\sin 2x$，$g'(0)=0$

$g''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)\sin^2 x+f(x)\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(f'(x)\sin x+2f(x))$

因为 $f'(x)$ 有界.

则 $g''(0)=0+2f(0)=2f(0)$

7. 解：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

但：$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}=1$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}=-\infty$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

8. 解：两边取~~微分~~导数：

$(2yy')f(x)+y^2f'(x)+f(y)+xf'(y)y'=2x$

$(2yf(x)+xf'(y))y'=2x-y^2f'(x)-f(y)$

$\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=y'=\dfrac{2x-y^2f'(x)-f(y)}{2yf(x)+xf'(y)}$

则 $dy=\dfrac{2x-y^2f'(x)-f(y)}{2yf(x)+xf'(y)}dx$.

9. 解: $f(x)=\begin{cases} ax+b & x<1 \quad (\text{连续可导}) \\ \frac{\cancel{x}a+b+1}{2} & x=1 \\ x^2 & x>1 \quad (\text{连续可导}) \end{cases}$

则 $f(x)$ 可能出现不可导的点在 $x=1$ 处.

要使 $f(x)$ 可导，则必须连续，则：

$$f(1+0)=\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}x^2=1$$

$$f(1-0)=\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(ax+b)=a+b$$

则 $\begin{cases} a+b=1 \\ \frac{a+b+1}{2}=1 \end{cases}$

又 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{ax+b-\frac{a+b+1}{2}}{x-1}=a$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-\frac{a+b+1}{2}}{x-1}=2$

$\Rightarrow a=2$.

则 $b=-1$

则 $f'(x)=\begin{cases} 2 & x\le1 \\ 2 & x=1 \\ 2x & x>1 \end{cases}$

10. 解: 首先 $f(x)$ 在 x_0 处应连续 即:

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=c=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\varphi(x_0)$.

然后 $f(x)$ 在 x_0 处一阶导数应连续，即:

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+\varphi(x_0)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}(a(x-x_0)+b)=b$

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\varphi'(x_0)$

则 $b=\varphi'(x_0)$

最后 $f(x)$ 在 x_0 处二阶导数连续，即:

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{2a(x-x_0)+\varphi'(x_0)-\varphi'(x_0)}{x-x_0}=2a$

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{\varphi'(x)-\varphi'(x_0)}{x-x_0}=\varphi''(x)$

则 $2a=\varphi''(x_0)\Rightarrow a=\dfrac{\varphi''(x_0)}{2}$

综上: $a=\dfrac{\varphi''(x_0)}{2}$, $b=\varphi'(x_0)$ $\quad c=\varphi(x_0)$

11. 解：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，可得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x}=-2.$$

则：

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+5)-f(5)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x}=-2$$

则 $f'(5)=-2$

12. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{af(x)-af(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a(f(x)-f(0))}{x}$

而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}=af'(0)=ab$

所以 $f'(1)$ 存在，且 $f'(1)=ab$

13. 解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}-0}{x}=0=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$

则 $g(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $g'(0)=0$

则 $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

则 $[f(g(x))]'|_{x=0}=f'(g(0))g'(0)=f'(0)g'(0)$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，

则原式 $=0$.

14. 解：$f(x)=\sin^2(\sin(x+1))$，$f'(0)=\sin^2(\sin 1)$，$f(0)=4$.

$f(x)$ 图像过 $(0,4)$ 点，设在 $(0,4)$ 处曲线 $f(x)$ 的切线 l_1

倾斜角为 α，那么 $\tan\alpha=f'(0)$，$f(x)$ 与其反函数 $\varphi(x)$ 图像

关于直线 $y=x$ 对称，则 $g(4)=0$，设 $g(x)$ 在 $(4,0)$ 处的切线 l_2

倾斜角为 β，那么 l_1,l_2 关于直线 $y=x$ 对称，

则 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore g'(4)=\tan\beta=\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{\sin^2(\sin 1)}$.

15. (1) 设可导函数为 $f(x)$，因为它是周期函数，所以 $f(x+T)=f(x)$.

则 $f'(x)=(x+T)'\cdot f'(x+T)=1\cdot f'(x+T)$

所以 $f'(x+T)=f'(x)$. 即导函数仍是周期函数.

(2). 设可导的偶函数 $f(x)$. 则 $f(-x)=f(x)$. 两边求导.

$f'(-x)\cdot(-1)=f'(x)$. 即 $f'(-x)=-f'(x)$.

于是 $f'(x)$ 是奇函数.

证毕.

(3) 设可导的~~偶~~奇函数 $f(x)$. 则 $f(-x)=-f(x)$. 两边求导

$f'(-x)(-1)=-f'(x)$ 即 $f'(-x)=f'(x)$

于是 $f'(x)$ 是偶函数.

证毕.

16. 解: 显然 $x=0$ 为 $g(x)$ 的间断点,

又由 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数知: $f(0)=0$

于是有: $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ 存在.

故 $x=0$ 是可去间断点.

17. 解: 因 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切, 则由 $y=\sin x$: $y'=\cos x$. $f'(x)|_{x=0}=\cos 0=1$. $f(0)=0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f(\frac{2}{n})}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\sqrt{\frac{f(\frac{2}{n})}{\frac{2}{n}}}=\sqrt{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{f(\frac{2}{n})}{\frac{2}{n}}}$, 令 $u=\frac{2}{n}$. $\lim\limits_{n\to\infty}u=0$

则原式 $=\sqrt{2}\lim\limits_{u\to 0}\sqrt{\frac{f(u)}{u}}$, 又 $f'(u)|_{u=0}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)-f(0)}{u-0}=f'(u)|_{u=0}=1$

则原式 $=\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$.

18. 解: 因为 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}=A$ 为常数. 则 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-b)=0$

则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^{f(x)}-e^{b}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-b}{x-a}\cdot\frac{e^{f(x)}-e^{b}}{f(x)-b}=\lim\limits_{x\to a}A\cdot\frac{e^{b}(e^{f(x)-b}-1)}{f(x)-b}=\lim\limits_{x\to a}A\cdot\frac{e^{b}(f(x)-b)}{f(x)-b}$

$=Ae^{b}$.

19. 解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)+f(1+2\sin x)-f(1)-2[f(1+3\tan x)-f(1)]}{x}$.

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+2\sin x)-f(1)}{2\sin x}\cdot\frac{2\sin x}{x}-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-3\tan x)-f(1)}{-3\tan x}\cdot\frac{-3\tan x}{x}$

$=f'(1)+2f'(1)+6f'(1)$

$=9f'(1)$

$=9$

20. 证：$\begin{cases} \rho=a(1+\cos\theta) \\ \rho=a(1-\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta=\frac{\pi}{2} \\ \rho=a \end{cases}$

即两曲线交于 $(a,\frac{\pi}{2})$ 处.

令 $\begin{cases} x=a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=a(1-\cos\theta)\cos\theta \\ y=a(1-\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$.

则前者 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{a\cos\theta-a\sin^2\theta+a\cos^2\theta}{-a\sin\theta-2a\sin\theta\cos\theta}$

后者 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dy/d\theta}=\frac{a\cos\theta+a\sin^2\theta-a\cos^2\theta}{-a\sin\theta+2a\sin\theta\cos\theta}$.

两者在交点 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处 斜率分别为：$\frac{-a}{-a}=1$，$\frac{a}{-a}=-1$

$-1\times1=-1$

则两直线垂直相交

21. 解：双曲线与椭圆相切，则切点为两个，将 $xy=\lambda$ 代入曲线方程得：

$\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{\lambda}{bx}\right)^2=1$

令 $t=x^2$. 则 $t\geq0$. 要求 t 只有一个正解.

由于对称轴在 y 轴右侧，截距大于 0，故只允许 $\Delta=0$

即 $1=\left(\frac{4\lambda}{ab}\right)^2$ 则 $\lambda=\pm\frac{ab}{2}$

因 $\lambda>0$，故 $\lambda=\frac{ab}{2}$

$\begin{cases} xy=\frac{ab}{2} \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{a}{\sqrt2} \\ y=\frac{b}{\sqrt2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\frac{a}{\sqrt2} \\ y=-\frac{b}{\sqrt2} \end{cases}$

则切线方程为：$y\pm\frac{b}{\sqrt2}=-\frac{b}{a}(x\pm\frac{a}{\sqrt2})$

(此题用求导法也可，类似22题).

22. 解：对 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边对 x 求导：$\frac{2}{a^2}x+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{ya^2}x$

则在 $(1,-1)$ 和 $(-1,-1)$ 处切线斜率为 $\frac{b^2}{-a^2}$、$\frac{b^2}{a^2}$

设抛物线为 $y=ax^2+bx+c$.（$x=ay^2+by+c$ 显然不可能）.

则 $y'=2ax+b$. 则：

$\begin{cases} -1=a+b+c \\ -1=a-b+c \\ \frac{b^2}{-a^2}=2a+b \\ \frac{b^2}{a^2}=-2a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=-3 \end{cases}$ 则抛物线为 $y=2x^2-3$

23. 证明：设椭圆上任一点 $M(x,y)$，M点法线与F_1M夹角如果等于M点法线与F_2M夹角，则原命题成立：

因法线与M点切线垂直，故先求切线斜率：

对$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$两端微分：

$$2x\frac{dx}{a^2}+\frac{2ydy}{b^2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-b^2x}{a^2y}$$

则法线斜率为$k=\frac{a^2y}{b^2x}$

F_1M斜率为$k_1=\frac{y}{x-a}$

F_2M斜率为$k_2=\frac{y}{x+a}$

则法线与F_1M夹角为：$\tan\theta_1=\frac{|k-k_1|}{|1+kk_1|}=\frac{\left|\frac{a^2y}{b^2x}-\frac{y}{x-a}\right|}{\left|1+\frac{a^2y}{b^2x}\frac{y}{x-a}\right|}=\frac{|k-k_2|}{|1+kk_2|}=\tan\theta_2$

即F_1M与法线夹角等于F_2M与法线夹角

原命题得证

24. 解：设经过t时间后，甲乙相距s km.

则$s^2=(16-8t)^2+(6t)^2$，两边微分：

$$2sds=[2(16-8t)\times(-8)+72t]dt$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt}=\frac{100t-128}{s}$$

当$t=1$，$s=\sqrt{8^2+6^2}=10$

则相离的速度为$\frac{ds}{dt}\Big|_{t=1}=(100-128)/10=-2.8$ km/h.

负号表示两船在靠近.

25. 解：O为坐标原点，轮胎中心为$P=(x,y)=(vt,1)$，对$M(x,y)$.

$W\cdot R=W=v$ (W为角速度). 令$\theta=Wt=vt$.

则$x=vt-R\sin(\frac{vt}{R})=vt-\sin(vt)$

$V_x=\frac{d(x)}{dt}=v-v\cos(vt)$

$y=1-\cos(vt)$

$V_y=\frac{dy}{dt}=v\sin(vt)$

令$\theta=vt$. 则$V_x=(1-\cos\theta)v$，$V_y=v\sin\theta$

26. 解：设在(x_0,y_0)处关闭发动机.

由$y=x^2$. 则 $y'=2x$.

在(x_0,y_0)处切线方程为 $y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$

则切线过$(4,15)$ 则 $15-x_0^2=2x_0(4-x_0)$

得 $x_0=3$

则在$(3,9)$关闭发动机

27. 解：设当苍蝇在$(x_0,7-x_0^2)$处与$(4,0)$相见,

则 $y'=-2x$,

$(x_0,7-x_0^2)$处切线为 $y-(7-x_0^2)=-2x_0(x-x_0)$ 过$(4,0)$

则 $-\cancel{3x}-7+x_0^2=-2x_0(4-x_0)$

得 $x_0=1$ 或 7，取 $x_0=1$

则$\cancel{p}(x_0,7-x_0^2)=(1,6)$

则距离为 $\sqrt{(1-4)^2+(6-0)^2}=3\sqrt{5}$

28. 解：设灯炮与$(1.25,0)$~~相~~与 $x^2+y^2=1$ 切于点(x_0,y_0)

对 $x^2+y^2=1$ 两边微分：

$2xdx+2ydy=0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$

则(x_0,y_0)处切线为 $y-y_0=\frac{-x_0}{y_0}(x-x_0)$

过$(1.25,0)$ 则

$-y_0=\frac{-x_0}{y_0}(1.25-x_0)$

又 $x_0^2+y_0^2=1$

$\Rightarrow x_0=\frac{4}{5}\quad y_0=\frac{3}{5}$

则 $\frac{y_0}{h}=\frac{1.25-\frac{4}{5}}{1.25}=\frac{\frac{3}{5}}{h}$

$\Rightarrow h=\frac{13}{3}$

29. 自害对自身画.