¡ 5.2 矩阵的相似对角化

一、矩阵可对角化的条件

二、相似对角化的方法

一、矩阵可对角化的条件

设A是n阶方阵，可相似对角化。则存在 n阶可逆矩阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\Rightarrow AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

令 $P=[X_1\quad X_2\quad\cdots\quad X_n]$，有

$$=[AX_1\quad AX_2\quad\cdots\quad AX_n]$$

$$AP=[A][X_1\quad X_2\quad\cdots\quad X_n]$$

$$=[X_1\quad X_2\quad\cdots\quad X_n]\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

$$=[\lambda_1X_1\quad\lambda_2X_2\quad\cdots\quad\lambda_nX_n]$$

所以有 $AX_i=\lambda_iX_i\quad i=1,2,\cdots,n$

由 P可逆 $\Rightarrow X_1,X_2,\cdots,X_n$ 线性无关

$\Rightarrow X_1,\cdots,X_n\neq\theta$

$\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A的特征值

于是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 n阶方阵 A的 n个线性无关的特征向量。

反之，设n阶方阵 A有n个线性无关的特征向量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，它们对应的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 则

$$AX_i=\lambda_iX_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

令 $P=[X_1\quad X_2\quad\cdots\quad X_n]$，因 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 n个线性无关的 n元列向量，故 P是 n阶可逆方阵。

又

$$AP=[A][X_1\quad X_2\quad\cdots\quad X_n]$$

$$=[AX_1\quad AX_2\quad\cdots\quad AX_n]$$

$$=[\lambda_1X_1\quad\lambda_2X_2\quad\cdots\quad\lambda_nX_n]$$

$$=[X_1\quad X_2\quad\cdots\quad X_n]\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

$$=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

故

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

即 A可对角化。

综上所述，我们有如下重要结论：

定理5.2.1 n 阶方阵 A 可相似对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量。

注1 对于 n 阶方阵 A，若能找到可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵，则称为方阵 A 可(相似)对角化。

注2 由这个定理可知，考察 n 阶方阵 A 是否可相似对角化的问题转化为考察 A 是否有 n 个线性无关的特征向量。

注3 若 A 可对角化，则与 A 相对应的对角阵的主对角元正好是 A 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，并且特征向量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的顺序与特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的顺序相对应。

注4 $P=[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ 不唯一：

1) 特征向量不唯一；

2) $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的顺序随特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的顺序改变而改变。

例 下列矩阵是否可对角化？

(1) $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ (2) $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$

解 (1) 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

有特征值 2 和 1 (二重)。

对应于每个特征值的线性无关的特征向量分别为

对应于特征值2

对应于二重特征值1

$$(0,0,1)^T,\quad (-1,-2,1)^T$$

可以验证，这两个特征向量线性无关，于是只能找到两个线性无关的特征向量，故由定理知， A 不可相似对角化。

---

(2) 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

有特征值 0（二重）和 -2。对应的特征向量分别为

对应于二重特征值0

对应于特征值-2

$$(1,1,0)^T,\ (-1,0,1)^T,\ (-1,-2,1)^T$$

因

$$\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&0&-2\\0&1&1\end{vmatrix}\neq 0$$

故这三个特征向量线性无关。

所以 A 可相似对角化。

以三个特征向量为列构造矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-1\\0\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-1\\-2\\1\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

例 已知

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

问 A可否相似对角化？

解 $\because \quad |\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

$\therefore \quad A$有特征值 $1,\ 2,\ 3$ ，它们对应的特征向量分别为

$$(1,0,0)^T,(2,1,0)^T,(\frac{9}{2},3,1)^T$$

因这三个向量线性无关，故 A可相似对角化。以三个特征向量为列构造矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{则} \quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

若取 $\quad P=\begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad$ 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

问题：

1. 什么样的n阶方阵才有n个线性无关特征向量？
2. 特征向量之间的线性相关性如何判断？

定理 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 A的互不相同的特征值，它们对应的特征向量分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ ，则 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 线性无关。

证明 对 m作归纳法：

$m=1$： $X_1\neq\theta\Rightarrow X_1$线性无关；

m -1： 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{m-1}$ 线性无关；

m： 证 $X_1,\cdots,X_{m-1},X_m$ 线性无关。

令

$$k_1X_1+\cdots+k_mX_m=\theta \qquad ①$$

则

$$A(k_1X_1+\cdots+k_mX_m)=A\theta$$

$$\Rightarrow \quad k_1(AX_1)+\cdots+k_m(AX_m)=\theta$$

$$\Rightarrow \quad k_1\lambda_1X_1+\cdots+k_m\lambda_mX_m=\theta \qquad ②$$

由①又得

$$\lambda_mk_1X_1+\cdots+\lambda_mk_mX_m=\theta \qquad ③$$

②-③得

$$(\lambda_1-\lambda_m)k_1X_1+\cdots+(\lambda_{m-1}-\lambda_m)k_{m-1}X_{m-1}=\theta$$

根据归纳假设 $X_1,X_2,\cdots,X_{m-1}$ 线性无关，故

$$(\lambda_1-\lambda_m)k_1=0,\cdots,(\lambda_{m-1}-\lambda_m)k_{m-1}=0$$

已知 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 互不相同，故

$$\lambda_1-\lambda_m\neq 0,\cdots,\ \lambda_{m-1}-\lambda_m\neq 0$$

由此得

$$k_1=0,\ \cdots,\ k_{m-1}=0$$

代入①得

$$k_mX_m=\theta$$

又 $X_m\neq\theta$ ，故 $k_m=0$ 。于是，$X_1,X_2,\cdots,X_m$ 线性无关。

推论 若 n阶方阵有 n个不同的特征值，则该矩阵可相似对角化。

问题 当方阵有重特征值时，线性无关特征向量的个数又如何呢？

在前面的例中，对矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

其两个特征值 -2与0（二重）对应的特征向量分别

$$X_1=(-1,\quad -2,\quad 1)^T$$

$$X_2=(1,\quad 1,\quad 0)^T$$

$$X_3=(-1,\quad 0,\quad 1)^T$$

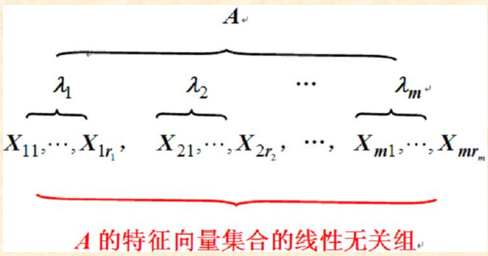
不难发现，

$$\underbrace{\overset{\text{线性无关}}{X_1}\qquad\qquad \overbrace{X_2,\ X_3}^{\text{线性无关}}}_{\text{线性无关}}$$

定理 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是矩阵A的互不相同特征值，$X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{ir_i}$ 是A属于λ_i的线性无关的特征向量，则

$$X_{11},\cdots,X_{1r_1},X_{21},\cdots,X_{2r_2},\cdots,X_{m1},\cdots X_{mr_m}$$

线性无关。



$r_1+r_2+\cdots+r_m$个

由前面的定理可知，对 n 阶方阵 A 来说，只要属于它的各个互异特征值的线性无关特征向量的总数不少于 n，就可以相似对角化。那么，对它的特征值 λ_i 来说，属于它的线性无关的特征向量最多有多少个？

由¡ 5.1知，特征值 λ_i 对应的全部特征向量正好是特征方程组 $(\lambda_i I ¨ A)X=0$ 的全部非零解。因此，A 的属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量最多有 n - 秩($\lambda_i I - A$) 个。

这个数就是特征方程组$(\lambda_i I - A)X = 0$解空间的维数，也即特征子空间V_{λ_i}的维数，称之为**特征值λ_i的几何重数**，记为q_i。即

$$q_i = n - \text{秩}(\lambda_i I - A)$$

设A的互异特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，对应的**几何重数**分别为$q_1, q_2, \cdots, q_m$。于是$A$的线性无关的特征向量最多有$\sum_{i=1}^{m} q_i$个，$A$可相似对角化当且仅当$\sum_{i=1}^{m} q_i = n.$

另外，有

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{p_1}(\lambda - \lambda_2)^{p_2}\cdots(\lambda - \lambda_m)^{p_m}$$

称p_i为**特征值λ_i的代数重数**$(i = 1, 2, \cdots, m)$，简称为**重数**。易知，$\sum_{i=1}^{m} p_i = n$

λ_i的代数重数：λ_i作为A的特征多项式的零点的重数.

定理 设λ_0是方阵A的特征值，则λ_0的几何重数q_0不大于其代数重数p_0。

互异特征值	λ_1	λ_2	$\cdots$	λ_m
特征值的代数重数	p_1	p_2	$\cdots$	p_m
特征值的几何重数	q_1	q_2	$\cdots$	q_m
q与p的关系	$q_1 \le p_1$	$q_2 \le p_2$	$\cdots$	$q_m \le p_m$

注

$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = A$的阶数或特征多项式的次数$n$

$q_1 + q_2 + \cdots + q_m = A$线性无关特征向量最大个数

同时，由前面讨论已知，A可相似对角化当且仅当

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_m = n$$

于是由上述定理可知，A可相似对角化

$\Leftrightarrow n = q_1 + q_2 + \cdots + q_m \le p_1 + p_2 + \cdots + p_m = n$

$\Leftrightarrow q_i = p_i \ (i = 1, 2, \cdots, m)$

定理 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$是$n$阶方阵$A$的全部互异的特征值，$p_i$和$q_i$分别是特征值$\lambda_i$的代数重数和几何重数$(i = 1, 2, \cdots, m)$，则$A$可相似对角化的充分必要条件是

$$p_i = q_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

注 对于单特征值，其代数重数与几何重数相等，都等于1，因此对于有n个不同特征值的n阶方阵，其所有特征值的代数重数与几何重数相等，于是由上述定理，该矩阵可相似对角化。

小结

? n阶方阵A可相似对角化的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量。

2. 方阵A的互不相同的特征值所对应的特征向量是线性无关。

3. 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$是矩阵$A$的互不相同特征值，$X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{ir_i}$是$A$属于$\lambda_i$的线性无关的特征向量，则$X_{11}, \cdots, X_{1r_1}, X_{21}, \cdots, X_{2r_2}, \cdots, X_{m1}, \cdots X_{mr_m}$线性无关。

特征值 λ_i 的几何重数 $q_i = n - \text{秩}(\lambda_i I - A)$

即：特征方程组$(\lambda_i I - A)X = 0$ 解空间的维数.

即：对特征值λ_i,它的线性无关特征向量的最大个数是q_i个.

特征值 λ_i 的代数重数 p_i :

$$|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)^{p_1}(\lambda-\lambda_2)^{p_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{p_m}$$

4. 设 λ_0 是方阵A的特征值，则 λ_0 的几何重数q_0 不大于其代数重数p_0 。

$$q_0 \le p_0$$

5. A可相似对角化的充分必要条件是:

$$p_i = q_i,\quad i = 1,2,\cdots,m$$

6. 若 n阶方阵有 n个不同的特征值，则该矩阵可相似对角化。

二、相似对角化的方法

求相似对角阵及相似变换矩阵的方法和步骤:

(1) 求出 A 的全部互异的特征值

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m;$$

(2) 对每个特征值 λ_i ,求特征矩阵 $\lambda_i I\text{-}A$ 的秩，并判断 λ_i的几何重数 $q_i = n - r(\lambda_i I\text{-}A)$是否等于它的代数重数 $p_i\ (i = 1, 2, \cdots, m)$;

只要有一个不相等，A就不可以相似对角化

$$p_i = q_i,\quad i = 1,2,\cdots,m$$

(3) 当 A 可以对角化时，对每个特征值 λ_i ，求方程组 $(\lambda_i I\text{-}A)X = 0$ 的一组基础解系

$$X_{i1}, X_{i2},\cdots, X_{iq_i}\ (i = 1,2,\cdots,m)$$

(4) 令

$$P = \left[X_{11}, X_{12},\cdots, X_{1q_1},\cdots, X_{m1}, X_{m2},\cdots, X_{mq_m}\right]$$

则有

$$P^{-1}AP = diag\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_1,\cdots,\lambda_m,\cdots,\lambda_m\right)$$

其中有 q_i 个$\lambda_i\ (i = 1, 2, \cdots, m)$。

例 判断矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

可否对角化。

解

$$\because\ |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

所以，A的特征值为2（代数重数为1）和1（代数重数为2）。

对$\lambda = 1$，考虑齐次方程组 $(I - A)X = 0$ ：

$$I - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因矩阵$I\text{-}A$的秩为2，故方程组$(I\text{-}A)X=0$的基础解系只含一个解，由此得特征值1的几何重数为1，小于其代数重数2，故A不可对角化。

例 已知

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

问 a,b,c 满足什么条件时，A可对角化？

解 首先

$$|\lambda I-A|=(\lambda-a)^2(\lambda-c)$$

所以，A 的特征值为 a 和 c。

分情况讨论：

(1) $a=c$

A 有 3 重特征值 a，对方程组 $(aI-A)X=0$，当且仅当 秩$(aI-A)=0$ 时，才能使基础解系含3个解。

又

$$aI-A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $b=0$ 。

(2) $a\neq c$

A 有特征值 a (二重) 和 c，对特征值 a，仅当秩$(aI-A)=1$ 时，才能使方程组 $(aI-A)X=0$的基础解系含2个解。

又

$$aI-A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & a-c \end{pmatrix}$$

因 $a-c\neq 0$，故秩$(aI-A)=1$，此时 b 任意。

结论：当 $a=c, b=0$ 或 $a\neq c, b$ 任意时，A可对角化。

例 设4阶矩阵$A=\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 1 & * & * & * \\ 0 & 2 & * & * \\ 0 & 0 & 3 & * \end{bmatrix}$,其中*表示任意常数.

证明：如果A的特征多项式有重根，则A不可相似对角化.

证明：

设λ是A的特征多项式的重根，即λ的代数重数≥ 2.

因为$|\lambda I-A|=0$,且$\lambda I-A$有一个非零子式

$$\begin{vmatrix} -1 & * & * \\ 0 & -2 & * \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-6\neq 0.$$

所以$r(\lambda I-A)=3$,

所以λ的几何重数$=4-r(\lambda I-A)=1$

<2(代数重数)

所以A不可以相似对角化.

例 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

求 A^n。

解 ∵ $|\lambda I-A|=(\lambda+2)(\lambda-2)^3$

∴ A有特征值 -2 （代数重数为1）和 2 （代数重数为3）

对 $\lambda=2$，解 $(2I-A)X=0$ 得基础解系

$$2I-A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=0\Rightarrow x_1=-x_2-x_3-x_4.$$

$X_1=(1,-1,0,0)^T$ $\quad X_2=(1,0,-1,0)^T$

$X_3=(1,0,0,-1)^T$

故特征值**2**的几何重数也为3，由此得***A***可对角化。

对 $\lambda=-2$，解 $(-2I-A)X=0$ 得基础解系

$$X_4=(1,1,1,1)^T$$

令

$$P=[X_1\quad X_2\quad X_3\quad X_4]=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&0&0&1\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&&\\&2&&\\&&2&\\&&&-2\end{pmatrix}=B$$

由此得 $A=PBP^{-1}$。

于是，

$$A^n=PB^nP^{-1}=\begin{cases}2^nI_4, & n\text{为偶数}\\ 2^{n-1}A, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

作业　习题五(P262):
18(2)(3)(5), 21
(18-26题均可作为练习)