练习题

1. 设A是5阶方阵，且 $r(A)=3$，则线性空间 $W=\{x\mid Ax=0\}$的维数为 ____ .

2. 设R^4的一组基为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，令$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$，则子空间 $W=\{k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4\mid k_i\in F,i=1,2,3,4\}$的维数为____，它的一组基为__________.

3. 从R^2的基$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$到基$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$过渡矩阵为__________.

4. 在R^4中，求下述齐次线性方程组的解空间的维数和基.

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0\\3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0\\3x_1+5x_2-13x_3+11x_4=0\end{cases}$$

5. 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维向量空间$R^3$的一组基，向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$满足$\beta_1+\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_1+\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2+\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$，
   (1) 证明：β_1,β_2,β_3是一组基；
   (2) 求由β_1,β_2,β_3到$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵；
   (3) 求向量$\alpha=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$关于基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的坐标.

6. 已知3阶矩阵A有3维向量x满足$A^3x=3Ax-A^2x$，且向量组x,Ax,A^2x线性无关.记$P=(x,Ax,A^2x)$，求3阶矩阵B，使$AP=PB$.

7. 设$k_1\alpha+k_2\beta+k_3\gamma=0$，且$k_1k_3\neq 0$，
   证明：$L(\alpha,\beta)=L(\beta,\gamma)$.

练习题参考答案：

1. 2； 2. 3，β_1,β_2,β_3； 3. $\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}$；

4. 2维，$X_1=(\frac{-1}{9},\frac{8}{3},1,0)^T$，$X_2=(\frac{2}{9},-\frac{7}{3},0,1)^T$；

5. (1)提示：可证$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}\cong\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$
   或者用线性无关定义等

   (2)过渡矩阵为$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&-1&2\\1&0&0\end{bmatrix}$；

   (3)坐标为$\begin{bmatrix}2\\-1\\5\end{bmatrix}$.

6 $\because A^3x=3Ax-A^2x$

$$\therefore AP=A(x,Ax,A^2x)=(Ax,A^2x,A^3x)$$
$$=(Ax,A^2x,3Ax-A^2x)$$
$$=(x,Ax,A^2x)\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

令 $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{bmatrix}$ 则上式变为：$AP=PB$.

满足要求的3阶矩阵 $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-1\end{bmatrix}$。

7 证$L(\alpha,\beta)=L(\beta,\gamma)\Leftrightarrow\{\alpha,\beta\}\cong\{\beta,\gamma\}$

由$k_1k_3\neq 0$知，$k_1\neq 0$，且$k_3\neq 0$，又因为 $k_1\alpha+k_2\beta+k_3\gamma=0$，

$\Rightarrow\alpha=-\frac{k_2}{k_1}\beta-\frac{k_3}{k_1}\gamma$ $\Rightarrow\alpha,\beta$可由β,γ线性表出；

同理，由$k_3\neq 0$，及$k_1\alpha+k_2\beta+k_3\gamma=0$，

$\Rightarrow\gamma=-\frac{k_1}{k_3}\alpha-\frac{k_2}{k_3}\beta$， $\Rightarrow\beta,\gamma$可由α,β线性表出；

$\Rightarrow\{\alpha,\beta\}\cong\{\beta,\gamma\}$，从而有$L(\alpha,\beta)=L(\beta,\gamma)$