课程编号：A073122　　　　北京理工大学 2016-2017 学年第一学期

线性代数 A 试题 A 卷答案

班级 ________ 学号 _________ 姓名 __________ 成绩 ___________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签名											

一、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}5&-1&0\\-2&3&1\\2&-1&6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&2&3\\5&0&5\end{pmatrix}$ 和 X 满足 $XA=B+2X$，求 X。

解 因为 $XA=B+2X$，所以 $X=B(A-2I)^{-1}$ …………………………………………3′

因为

$$\begin{pmatrix}3&-1&0&1&0&0\\-2&1&1&0&1&0\\2&-1&4&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\\0&1&0&2&\frac{12}{5}&-\frac{3}{5}\\0&0&1&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

所以

$$(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\\2&\frac{12}{5}&-\frac{3}{5}\\0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$ ……………………………………………6′

因此

$$X=B(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix}2&2&3\\5&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\\2&\frac{12}{5}&-\frac{3}{5}\\0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&7&-1\\5&5&0\end{pmatrix}.$$

………………………………………10′

二、（10 分）设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = a \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = b \\ x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 + 6x_4 = 2. \end{cases}$$

(1) 求参数 a, b，使得方程组有解;

(2) 当方程组有解时，求出方程组的导出方程组的一个基础解系以及方程组的通解.

解 写出方程组的增广矩阵 B 并作初等行变换,有

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & a \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & b \\ 1 & 2 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & a \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12+b+2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6-2a \end{pmatrix}.$$

(1) 因为方程组有解当且仅当 $-12+b+2a=0$，$6-2a=0$，所以，当 $a=3$，$b=6$ 时，方程组有解…………………………………………………………………………………………5'

(2) 令 $a=3, b=6$，将方程组的增广矩阵 B 化为简化阶梯形:

$$B \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据 B 的简化阶梯形，方程组的导出方程组与方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ \ 8x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

是同解的. 因此，方程组的导出方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

根据 B 的简化阶梯形，方程组与方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 8x_4 = 1 \\ \qquad\qquad x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

是同解的. 因此，方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，从而方程组的通解为

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0 + c_1\boldsymbol{\xi}_1 + c_2\boldsymbol{\xi}_2,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. … .10′

三、（10 分）已知

$$\alpha_1 = (1,3,0,5)^T,\quad \alpha_2 = (1,2,1,4)^T,\quad \alpha_3 = (1,1,2,3)^T,\quad \alpha_4 = (1,-3,6,-1)^T,$$

(1) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩和一个极大无关组;

(2) 用所求的极大无关组线性表出剩余向量。

解 (1) 由题意知：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&2&1&-3\\0&1&2&6\\5&4&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&-6\\0&1&2&6\\0&-1&-2&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-5\\0&1&2&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

由此可得 α_1, α_2 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大无关组，且其秩为 2.. … … … … … ..6′

（2） $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$， $\alpha_4 = -5\alpha_1 + 6\alpha_2$ … … … … … … … … … … … … … … … … … … 10′

四、（10 分）已知线性空间 $F[x]_4$ 的自然基为 $1, x, x^2, x^3$。

(1) 证明：$1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2!}, 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 为 $F[x]_4$ 的一个基；

(2) 求自然基 $1, x, x^2, x^3$ 到基 $1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2!}, 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 的过渡矩阵;

(3) 求 $h(x)=1+3x^2+6x^3$ 在后一个基下的坐标。

解

(1) 令 $k_1 1 + k_2(1+x) + k_3(1+x+\frac{x^2}{2!}) + k_4(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}) = 0$，则

$$(k_1+k_2+k_3+k_4)1+(k_2+k_3+k_4)x+\left(\frac{k_3}{2!}+\frac{k_4}{2!}\right)x^2+\frac{k_4}{3!}x^3=0$$

于是

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=0\\k_2+k_3+k_4=0\\k_3+k_4=0\\k_4=0\end{cases},$$

求解可得 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$。因此 $1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2!}, 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ 为 $F[x]_4$ 的一个

基………………………………………………………………………………4′

（2）过渡矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&\frac{1}{6}\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 7'$$

（3）$h(x)=1+3x^2+6x^3$在后一个基下的坐标为

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&\frac{1}{6}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&2&-6\\0&0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-6\\-30\\36\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots 10'$$

五、（10分）已知3阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&5\\0&0&2\end{pmatrix}$，计算行列式$\left|\frac{1}{3}A^*+2I\right|$。

解

$$\left|\frac{1}{3}A^*+2I\right|=\left|\frac{1}{3}|A|A^{-1}+2AA^{-1}\right|$$

$$=\left|2A^{-1}+2AA^{-1}\right|\cdots\cdots\cdots 6'$$

$$=2^3\left|A^{-1}\right|\left|I+A\right|$$

$$=8\cdot\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 4\cdot 3$$

$$=32\cdots\cdots\cdots 10'$$

六、　（10分）设5阶方阵 A 的初等因子为$\lambda-3$，$\lambda+2$，$(\lambda-1)^2$，λ.

(1) 试写出A的Jordan标准形J;

(2) 如果可逆矩阵P满足$P^{-1}AP=J$，判断P的哪几列是A的特征向量.

解（1）5阶方阵 A 的初等因子$\lambda-3$，$\lambda+2$，$(\lambda-1)^2$，λ对应的Jordan块分别为：

$$\boldsymbol{J}_1=[3],\boldsymbol{J}_2=[-2],\boldsymbol{J}_3=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{J}_4=[0]$$

则A的Jordan标准形为：

$$J=\begin{pmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&J_3&\\&&&J_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&&&&\\&-2&&&\\&&1&1&\\&&&1&\\&&&&0\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6'$$

（2）P的第 1, 2, 3，5列是 A的特征向量………………………………………………. 10'

七、（10分）在线性空间$R^{2\times2}$中定义变换σ：

$$\sigma(X)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$$

（1）证明：σ是线性变换；

（2）写出σ在基$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$下的矩阵。

解：（1）易知σ是$R^{2\times2}$中的一个变换，任取$X,Y\in R^{2\times2}$，$a,b\in R$，由矩阵运算性质，得到

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}(aX+bY)\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}Y\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}.$$

即$\sigma(aX+bY)=a\sigma(X)+b\sigma(Y)$. 故$\sigma$是$R^{2\times2}$ $R^{2\times2}$中的线性变换……………………… 5'

（2）因为$\sigma(E_1)=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}=E_1+2E_2+E_3+2E_4$.

$$\sigma(E_2)=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}=-E_1+E_2-E_3+E_4.$$

$$\sigma(E_3)=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}=E_1+2E_2+E_3+2E_4.$$

$$\sigma(E_4)=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}=-E_1+E_2-E_3+E_4.$$

所以

$$\sigma(E_1,E_2,E_3,E_4)=(E_1,E_2,E_3,E_4)\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\2&1&2&1\\1&-1&1&-1\\2&1&2&1\end{pmatrix}.$$

因此，σ在基E_1, E_2, E_3, E_4下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$…………………………………10′

八、（10分）已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_3$

（1）用正交变换将它化为标准形并给出所用的正交变换；

（2）该二次型是否正定？

解 写出二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

因为

$$\left|\lambda I - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 3)$$

所以A的特征值为$\lambda = 2$（二重），$\lambda = -3$。………………………………………………3′

当$\lambda = 2$时，因为$2I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以特征方程组的基础解

系为$\alpha_1 = (2, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T$；

当$\lambda = -3$时，因为$-3I - A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以特征方程组的基础

解系为$\alpha_3 = (1, 0, -2)^T$。……………………………………………………………………6′

单位化

$$\eta_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^T, \eta_2 = (0, 1, 0)^T, \eta_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^T$$

取$Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$，则

$Q^T A Q = diag(2, 2, -3)$………………………………………………8′

（2）不正定…………………………………………………………………………………10′

九、（10分）设向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_t$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解. 证明向量组 $\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_t$ 是线性无关的.

证明 设常数 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_t$ 满足

$$k_0\boldsymbol{\gamma}+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\xi}_t=\boldsymbol{0}. \qquad (1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2'$$

在等式(1)两边左乘 A，得到

$$k_0\boldsymbol{A\gamma}+k_1\boldsymbol{A\xi}_1+k_2\boldsymbol{A\xi}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{A\xi}_t=\boldsymbol{0}. \qquad (2)$$

因为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_t$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以由等式(2)得到 $k_0\boldsymbol{A\gamma}=\boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{\gamma}$ 不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以 $\boldsymbol{A\gamma}\neq\boldsymbol{0}$，于是由 $k_0\boldsymbol{A\gamma}=\boldsymbol{0}$ 可以得到 $k_0=0$. 因此，由等式(1)得到

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\xi}_t=\boldsymbol{0}. \qquad (3)\ldots\ldots\ldots\ldots 6'$$

因为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_t$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，所以 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_t$ 是线性无关的. 于是等式(3)意味着 $k_1=k_2=\cdots=k_t=0$. 因此，满足等式(1)的常数 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_t$ 都为零. 这就证明了 $\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_t$ 是线性无关的…………………………………………………………… 10′

十、（10分）设 A 为三阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，

(1) 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(2) 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$

解 (1) 法一：假设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关. 由于 α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 特征向量，从而 α_1,α_2 线性无关，故 α_3 可由 α_1,α_2 线性表出，不妨设 $\alpha_3=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$. 因为 $A\alpha_1=-\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$，所以

$$A\alpha_3=A(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2)=-l_1\alpha_1+l_2\alpha_2,$$

又

$$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3=\alpha_2+l_1\alpha_1+l_2\alpha_2$$

所以 $2l_1\alpha_1+\alpha_2=0$，即 α_1,α_2 线性相关，矛盾（因为 α_1,α_2 分别属于不同特征值得特征向量，故 α_1,α_2 线性无关）. 所以，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无

关. …………………………5′

法二：假设存在k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0 \qquad (1)$$

用矩阵A左乘（1）式两端，并由题设知$A\alpha_1=-\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$得：

$$-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=0 \qquad (2)$$

（1）减（2）得

$$2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0$$

由于α_1,α_2分别属于不同特征值得特征向量，故α_1,α_2线性无关，从而$k_1=k_3=0$．代入（1）式得$k_2\alpha_2=0$．因为α_2是A的特征向量，所以$\alpha_2\neq 0$，故$k_2=0$．综上$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关．

……………………………………………………5′

（2）记$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,则$P$可逆，且

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)$$

$$=(-\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

即$AP=P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，于是

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}. \qquad \text{…………………………}10'$$