习题4-8.

1. $m=\int_0^{10} u\,dx=\int_0^{10}(6+0.3x)dx=\left(\frac{0.3}{2}x^2+6x\right)\Big|_0^{10}=75\ kg$

2. $S=\int_0^T v\,dt=\int_0^T(t^2+\sin 3t)dt=\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{3}\cos 3t\right)\Big|_0^T$

$=\frac{1}{3}T^3-\frac{1}{3}\cos 3T+\frac{1}{3}.$

3. $F=kL\Rightarrow k=\frac{5}{1000}=5\times10^{-3}N/m.$

设长为$x$米时拉力为$T$. 由$T=kx$, 则这时$T$的功为$\Delta W=T\cdot\Delta x$. $dW=kx\,dx$.

$W=\int dW=\int_0^{15}kx\,dx=\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^{15}=\frac{1}{2}\times5\times10^{-3}x^2\Big|_0^{15}=0.5625J$

4. 由$x=ct^3.\Rightarrow t=\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{1}{3}}$ $v=\frac{dx}{dt}=3ct^2$, $f=kv^2$

$W=\int dW=\int_0^a f\,dx=\int_0^a kv^2dx=\int_0^a k(3ct^2)^2dx$

$=\int_0^a 9kc^2t^4dx=\int_0^a 9kc^2\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{4}{3}}dx$

$=\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}\Big|_0^a$

$=\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}$

5. 设$F=kx$, 则阻力的功为$f\,dx$的积分 $W=\int dW=\int_0^x kx\,dx=\frac{1}{2}kx^2$.

则由$W_1=\frac{1}{2}kx_1^2$ $W_1+W_2=\frac{1}{2}kx_2^2$, $W_1=W_2$.

$\Rightarrow \frac{W_1}{W_1+W_2}=\frac{1}{2}=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$

$\Rightarrow x_2=\sqrt{2}x_1$

则第二次前为$x_2-x_1=(\sqrt{2}-1)\ cm$.

6. $W=uMgs-ug\int_0^{\frac{s}{v_0}}m v_0\,dt$

$=uMgs-ug\cdot mv_0\cdot\frac{1}{2}\frac{s^2}{v_0^2}$

$=ugs\left(M-\frac{ms}{2v_0}\right)$

7. $F=PS=\frac{k}{V}\cdot S=\frac{k}{xS}\cdot S=\frac{k}{x}$.（$x$为圆柱上一点离底部距离）.

$dW=F(x)dx=\frac{k}{x}dx$，$k=P\cdot V=10\times10^4\times\pi\left(\frac{0.2}{2}\right)^2\times0.8=800\pi$.

$W=\int_{0.4}^{0.8}\frac{k}{x}dx=k\ln\frac{0.8}{0.4}=800\pi\ln2$ (J)

8. 可以把水想象成一层层的物体（抽出过程中力的大小等于每层的重力，为恒力，高度有所变化）.

则每层在高度上的密度为 $1000\cdot\pi r^2$ (kg/m).

则 $W=\int_0^h 1000\pi r^2\cdot g\cdot h\,dh$

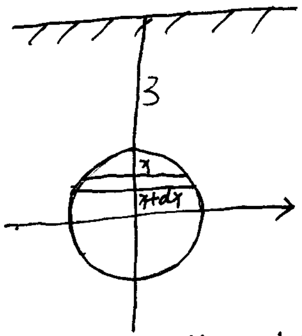
$=\frac{1}{2}\times1000\pi r^2gh^2$

$=500\pi r^2gh^2$ (J).

9. 运用第8题结果.

$W=500\pi\left(\frac{20}{2}\right)^2\times9.8\times15^2=57697500$ J

10. 如图选取坐标系.




圆为圆柱体截面，方程为 $x^2+y^2=1.5^2$

$dW=(4.5+x)\cdot(\rho g2y\cdot4dx)=8\rho g(4.5+x)\sqrt{1.5^2-x^2}\,dx$

$W=8\rho g\cdot\int_{-1.5}^{1.5}(4.5+x)\sqrt{1.5^2-x^2}\,dx=8\times4.5\rho g\cdot\int_{-1.5}^{1.5}\sqrt{1.5^2-x^2}dx$

$=8\times4.5\times\rho g\cdot\frac{\pi}{2}\times1.5^2\approx8\times4.5\times9.8\times0.71\times10^3\times\frac{\pi}{2}\times1.5^2$

$\approx884848.86$ J.

11. 以底部为原点建立座标系. 纵向为$x$轴

则 $x\in[0,10]$时 $dV=\pi\, 0.3^2 dx=0.09\pi dx$

$x\in(10,16)$时. $dV=\pi(9-(13-x)^2)dx=\pi(-x^2+26x-160)dx$

$W=\int_0^{10}\rho g x\cdot 0.09\pi dx+\int_{10}^{16}\rho g x\cdot\pi(-x^2+26x-160)dx$

$=0.09\pi\rho g\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{10}+\rho g\pi\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{26}{3}x^3-\frac{160}{2}x^2\right)\Big|_{10}^{16}$

$=472.5\pi\cdot\rho g$ (J)

$\approx 14539700$ (J)

12. $dP=p(x)(l(x))dx=ugx\,l(x)dx$.

其中$x$为离水面距离，$u$为水密度.

$l(x)$为距离顶部$x$处地的截面直径.

则 $l(x)=2\sqrt{R^2-(R-x)^2}$.

则 $P=\int_0^{2R}ugx\,l(x)dx=\int_0^{2R}ugx\cdot 2\sqrt{R^2-(R-x)^2}dx$，令 $x-R=R\sin\theta$. $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$dx=R\cos\theta d\theta$. $x=0$时. $\theta=-\frac{\pi}{2}$. $x=2R$时. $\theta=\frac{\pi}{2}$.

则 $P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2ug(R+R\sin\theta)R\cos\theta\cdot R\cos\theta d\theta$

$=2ugR^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta+\sin\theta\cos^2\theta)d\theta$

$=2ugR^3\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta-2ugR^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta d\theta$

$=4ugR^3\cdot\frac{\pi}{4}-0$ (奇函数)

$=ug\pi R^3$

$=1000g\pi R^3$ (N)

13：$F=\int_{-0.75}^{0.75}\rho g(x+0.75)\cdot 2\sqrt{1-\frac{x^2}{0.75^2}}dx=17309.25$ (N)

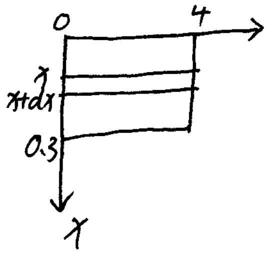
14. $dP=\mu g x\, l(x)dx$.

其中 $l(x)=\frac{2}{3}(x-3)$

则 $P=\int_3^9 \mu g\cdot x(\frac{2}{3}x-3)\,dx = \mu g\int_3^9 (\frac{2}{3}x^2-3x)\,dx$

$=168000g\,(N)\approx 1646400N$.

15. 设竖直矩形侧面所受侧压力为 $P_1$，由图A，其侧压力微元

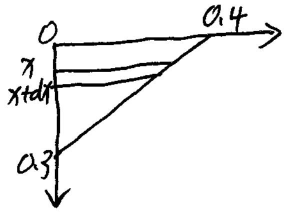


图A.

$dP_1=\rho g x\cdot 4dx=4\rho g x dx$

$P_1=\int_0^{0.3}\rho g x\times 4dx=4\rho g\cdot\int_0^{0.3}x dx=0.18\rho g\approx 1764N$.

设每个三角形侧面所受侧压力为 $P_2$，由图B，三角形斜边方程为 $y=0.4-\frac{4}{3}x$.



图B.

其侧压力微元为：

$dP_2=\rho g x\cdot y dx=\rho g x(0.4-\frac{4}{3}x)dx$

$P_2=\rho g\int_0^{0.3}x(0.4-\frac{4}{3}x)dx=0.006\rho g\approx 58.8N$.

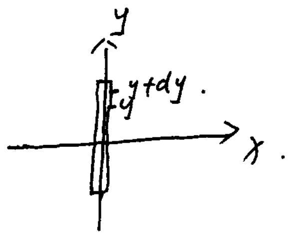
设斜面所受侧压力为 $P_3$，由图B，三角形斜边方程为 $y=0.4-\frac{4}{3}x$.

则 $y'=-\frac{4}{3}$.

其侧压力微元 $dP_3=\rho g x\cdot 4ds=4\rho g x\sqrt{1+(-\frac{4}{3})^2}\,dx=\frac{20}{3}\rho g x dx$

$P_3=\frac{20}{3}\rho g\cdot\int_0^{0.3}x dx=\frac{10}{3}\cdot\rho g\cdot 0.09\approx 2940N$.

16. ①取变量，定区间，取杆中心为原点，杆位于y轴上，建立如图坐标系，取y为积分变量，积分区间为 $[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}]$




②取近似，定微元，在y变化区间内，视任一小区间 $[y, y+dy]$ 对应的小段细杆为质点，质量为 $\mu dy$. 与M相距 $r=\sqrt{a^2+y^2}$.

则此质点对M的引力F大小为：

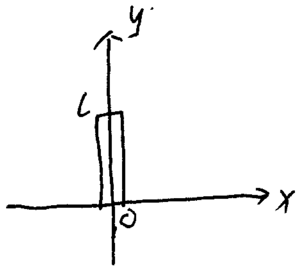
$dF=G\frac{ma\mu dy}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$，则 $dF_x=-G\frac{am\mu dy}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

③求积分，算整量，求积分得引力在水平方向分力为：

$F_x=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}-G\frac{am\mu dy}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2Gm\mu l}{a\sqrt{4a^2+l^2}}$

另外，由对称性可知，引力在铅直方向分力 $F_y=0$. 则 $F=\frac{2Gm\mu l}{a\sqrt{4a^2+l^2}}$，垂直于杆.

17. 如图建立坐标系，取y为积分变量，y的取值范围为[0,l]。




对应小区间[y, y+dy]与质点M的引力大小近似值为：

$$dF = G\cdot\frac{mudx}{r^2} = G\cdot\frac{mMdx}{lr^2}$$

其中 $r=\sqrt{a^2+x^2}$，

把该力分解，得：

$$dF_x = -\frac{a}{r}dF = -G\frac{amM}{l(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$dF_y = \frac{x}{r}dF = G\frac{mMx}{l(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

因此 $F_x = \int_0^l -G\frac{amM}{l(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx \xrightarrow{令x=a\tan t} -G\frac{mM}{la}\int_0^{\arctan\frac{l}{a}}\cos t\,dt$

$$= \frac{-GmM}{a\sqrt{a^2+l^2}}$$

$$F_y = \int_0^l G\frac{mMx}{l(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = -G\frac{mM}{l(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\Big|_0^l = \frac{mMG}{l}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}}\right)$$

18. $P(t) = \frac{w}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{w}}p(t)dt = \frac{wRI_m^2}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{w}}\sin^2 wt\,dt$

$$= \frac{wRI_m^2}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{w}}\frac{1-\cos 2wt}{2}dt = \frac{RI_m^2}{2}$$

19. $s = \int_0^{\frac{25}{2}}(25-2t)dt = \frac{625}{4}m$

20. 设时间[t, t+dt]内汽车行驶~~路~~路程为ds，消耗汽油为dy，则：

$$dy = \frac{ds}{8+\frac{1}{30}v} = \frac{vdt}{8+\frac{1}{30}v} = \frac{\frac{80t}{1+t}dt}{8+\frac{1}{30}\cdot\frac{80t}{1+t}} = \frac{30t}{4t+3}dt$$

$$y = \int_2^3\frac{30t}{4t+3}dt = \left(\frac{15}{2}-\frac{45}{8}\ln\frac{15}{11}\right)升$$