

2008-2009 第一学期期末数学分析 B(A 卷)参考解答及评分标准(2009.1)

一. 1. $-\frac{1}{x}$

2. $\frac{x^3}{6} - \sin x + 2x$

3. 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2 分, 2 分)

4. $y = Cx + \frac{x^3}{2}$ (没有 y 扣 1 分)

5. $-1 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{4} + o(x^5)$

6. $\pm 2, -\frac{1}{4}$ (2 分(没有 \pm 扣 1 分), 2 分)

7. e

二. $r^2 + r - 2 = 0$ (1 分)

$r_1 = 1 \quad r_2 = -2$ (3 分)

$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ (5 分)

设 $y^* = A x e^x$ (6 分)

代入方程得 $A = \frac{1}{3} \quad y^* = \frac{1}{3} x e^x$ (8 分)

通解 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{3} x e^x$ (9 分)

三. $\int x^2 \arctan x dx = \frac{1}{3} \int \arctan x d(x^3)$ (2 分)

$= \frac{1}{3} (x^3 \arctan x - \int x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx)$ (5 分)

$= \frac{1}{3} [x^3 \arctan x - \int (x - \frac{x}{1+x^2}) dx]$ (7 分)

$= \frac{1}{3} x^3 \arctan x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C$ (9 分)

四. 由题设, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) - (ax+bx^2) \sim x^2$ (2 分)

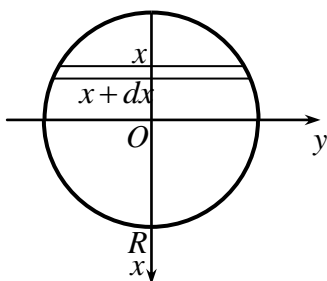
$$\ln(1+x) - (ax+bx^2) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (ax+bx^2) \quad \text{.....(4 分)}$$

$$= (1-a)x + (-\frac{1}{2}-b)x^2 + o(x^2) \quad \text{.....(5 分)}$$

$$1-a=0 \quad -\frac{1}{2}-b=1 \quad \text{.....(7 分)}$$

$$a=1 \quad b=-\frac{3}{2} \quad \text{.....(9 分)}$$

五. 如图建立坐标系



$$dP = \mu g(x+R)2y \, dx \quad \text{.....(2 分)}$$

$$= 2\mu g(x+R)\sqrt{R^2-x^2} \, dx \quad \text{.....(3 分)}$$

$$P = \int_{-R}^R 2\mu g(x+R)\sqrt{R^2-x^2} \, dx \quad \text{.....(5 分)}$$

$$= 4\mu gR \int_0^R \sqrt{R^2-x^2} \, dx \quad \text{.....(6 分)}$$

$$= \pi\mu gR^3 = 800\pi gR^3 \, (\text{N}) \quad \text{.....(9 分)}$$

六. 令 $t = \sqrt{x+1}$, 即 $x = t^2 - 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{t^2-1} dt \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \quad \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$$

$$= \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right|_{\sqrt{2}}^{+\infty} \quad \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

$$= \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \quad \dots\dots\dots(9 \text{ 分})$$

七. 设曲线方程为 $y = y(x)$

$$\int_1^t \sqrt{1+(y')^2} dx = 2 \int_1^t y dy \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

两端对 t 求导

$$\sqrt{1+(y')^2} = 2y \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$y' = \sqrt{4y^2 - 1} \quad \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$$

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^2 - 1}} = dx \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

积分得 $\frac{1}{2} \ln 2y + \sqrt{(2y)^2 - 1} = x + C_1 \quad \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$

由 $y|_{x=1} = \frac{1}{2}$, 得 $C_1 = -1 \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$

$$\ln 2y + \sqrt{(2y)^2 - 1} = 2(x-1)$$

$$y = \frac{1}{2} \ln 2(x-1) = \frac{e^{2(x-1)} + e^{-2(x-1)}}{4} \quad \dots\dots\dots(9 \text{ 分})$$

八. (1) 在 $(0, \pi)$, $e^{\sin x} \sin x > 0$, 故 $I_1 > 0$, 在 $(\pi, 2\pi)$, $e^{\sin x} \sin x < 0$, 故 $I_2 < 0$

$$I_1 > I_2 \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

$$(2) \quad F'(x) = e^{s i \pi + 2\pi} s i \pi - e^{s i \pi} s i \pi$$

$$= e^{s i \pi} s i \pi - e^{s i \pi} s i \pi = 0$$

$$\text{所以 } F(x) \text{ 为常数} \quad \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$$

令 $u = x - \pi$

$$I_2 = \int_0^\pi e^{s i \pi + u} s i \pi du = - \int_0^\pi e^{-s i \pi} s i \pi du$$

$$F(0) = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$$

$$= \int_0^\pi e^{s i \pi} s i \pi dt + \int_\pi^{2\pi} e^{s i \pi} s i \pi dt = I_1 + I_2$$

$$= \int_0^\pi e^{s i \pi} s i \pi dt - \int_0^\pi e^{-s i \pi} s i \pi dt$$

$$= \int_0^\pi s i \pi (e^{s i \pi} - e^{-s i \pi}) dt$$

当 $t \in (0, \pi)$, $\sin t > 0$, $e^{\sin t} > 1$, $e^{-\sin t} < 1$, $\sin t(e^{\sin t} - e^{-\sin t}) > 0$

故 $F(0) > 0$, 因此 $F(x)$ 为正的常数 $\dots\dots\dots(9 \text{ 分})$

九. (1) 由题设, 得 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, $f(1) = 0 \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 0$$

故 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内存在驻点 $\dots\dots\dots(4 \text{ 分})$

(2) 根据拉格朗日中值定理, $\exists \xi_1 \in (0, 1)$, $\exists \xi_2 \in (1, 2)$, 使

$$f'(1) - f'(0) = f''(\xi_1) \quad f'(2) - f'(1) = f''(\xi_2) \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

$$|f'(0)| + |f'(2)| = |f'(1) - f'(0)| + |f'(2) - f'(1)| \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

$$= |f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)| \leq 1 + 1 = 2 \quad \dots\dots\dots(9 \text{ 分})$$