06 数学分析第一学期期末试题(A)参考解答 (2007.1)

一. 1. 　　　　$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^x = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2a}{x-a})^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2ax}{x-a}}$ 　　…………………………(2 分)

　　　　　　$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a} = 9$, 　　　　…………………………..(5 分)

　　　　　　$2a = \ln 9$, 　　　$a = \ln 3$. 　　　…………………………..(6 分)

2. 　　　　$t = \dfrac{\pi}{3}$ 时, 　　$x = -\ln 2$, 　　$y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6}$, …………………………(1 分)

　　　　　　$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos t - \cos t + t\sin t}{-\dfrac{\sin t}{\cos t}} = -t\cos t$, 　　…....…………………(4 分)

　　　　　　$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{3}} = -\dfrac{\pi}{6}$, 　　　　…………………………(5 分)

　　　切线方程 　　$y - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{6}(x + \ln 2)$. 　　…………………………(6 分)

3. 　　　　$\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$ 　　…………………………(2 分)

　　　　　　$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\ln x + \dfrac{x-1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}$. 　　…………………………(6 分)

4. 解 1 　令 $t = \arcsin x$, 原式 $= 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} t\sin t\,dt$ 　　…………………………..(2 分)

　　　　　　$= -2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} t\,d\cos t = -2(t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos t\,dt)$ 　　…………………….(5 分)

　　　　　　$= -2(\dfrac{\pi}{6}\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}) = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$ 　　…………………………(6 分)

　　解 2 　原式 $= 2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -2\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,d\sqrt{1-x^2}$ …………………(2 分)

　　　　　　$= -2(\arcsin x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}}dx)$ 　　…………………………(5 分)

　　　　　　$= -2(\dfrac{\pi}{6}\dfrac{\sqrt{3}}{2} - x\Big|_0^{\frac{1}{2}}) = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$. 　　…………………………(6分)

二. 1. $\qquad\qquad y' = 2xe^y + x^2 e^y y',$ ....(2 分)

令 $y' = 0,$ 得 $x = 0,$ ....(3 分)

代入已知方程得 $y = 1,$ ....(4 分)

$y'' = 2e^y + 2xe^y y' + 2xe^y y' + x^2 e^y (y')^2 + x^2 e^y y'',$ ....(2 分)

$\because y''|_{x=0} = 2e > 0,$ 故 $y|_{x=0} = 1$ 是极小值. ....(7 分)

2. $\qquad \int x \arctan x \, dx = \frac{1}{2} \int \arctan x \, d(x^2)$ ....(1 分)

$= \frac{1}{2}(x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx)$ ....(4 分)

$= \frac{1}{2}(x^2 \arctan x - \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx)$ ....(6 分)

$= \frac{1}{2}(x^2 \arctan x - x + \arctan x) + C.$ ....(7 分)

3. $\qquad y_2 - y_1 = 3e^x - x$ 与 $y_3 - y_1 = -e^x + x$ ....(2 分)

通解为 $y = C_1 e^x + C_2 x - x^2.$ ....(7 分)

4. 由于 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - a}{x^2} \exists,$ 得 $a = 1,$ ....(1 分)

故 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - a}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = 1,$

所以 $b = 1,$ ....(2 分)

当 $x \neq 0,$ $f'(x) = (\frac{e^{x^2} - 1}{x^2})'$

$= \frac{2xe^{x^2} x^2 - (e^{x^2} - 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^2 e^{x^2} - 2e^{x^2} + 2}{x^3},$ ....(5 分)

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^3}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2} - 2x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2e^{x^2} - 2}{3x} = 0.$ ....(7 分)

三. $y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$, ………………………(2 分)

当 $x \in (0,3)$，令 $y' = 0$，得 $x = 2$，………………………(3 分)

函数在 $(0,2)$ 与 $(2,3)$ 内单调，………………………(4 分)

又 $y(0) = 10 > 0$，$y(2) = -22 < 0$，$y(3) = 37 > 0$ ………………(6 分)

函数在 $(0,2)$ 与 $(2,3)$ 内各有一个零点，故在 $(0,3)$ 内有两个零点……………(7 分)

四. $f''(x) = g'(x) = 2e^x - f(x)$,

$f''(x) + f(x) = 2e^x$, ………………………(1 分)

$f(0) = 0$，$f'(0) = g(0) = 2$, ………………………(2 分)

$r^2 + 1 = 0$，$r = \pm i$,

$\bar{f}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, ………………………(4 分)

设 $f^*(x) = Ae^x$，代入方程得 $A = 1$，$f^*(x) = e^x$, ………………………(6 分)

通解 $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x$, ………………………(7 分)

由初始条件得 $C_1 = -1$，$C_2 = 1$,

$f(x) = -\cos x + \sin x + e^x$. ………………………(8 分)

五. 令 $F(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t}\, dt$,

$F'(x) = \arcsin|\sin x| \cdot 2\sin x\cos x + \arccos|\cos x| \cdot (-2)\cos x\sin x$

$= 2x\sin x\cos x - 2x\cos x\sin x = 0$, ………………………(3 分)

故 $F(x) = C$, ………………………(4 分)

又 $F(0) = \int_0^1 \arccos \sqrt{t}\, dt$ （令 $\arccos \sqrt{t} = u$) ………………………(5 分)

$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\, d\cos^2 u$

$= -u\cos^2 u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du = \frac{\pi}{4}$,

$\therefore C = \frac{\pi}{4}$. ………………………(7 分)

六.
$$\int_1^t \pi f^2(x)dx = \pi[t^2 f^2(t) - f^2(1)],$$ …………………..………..(3 分)

对 t 求导得 $$f^2(t) = 2tf^2(t) + 2t^2 f(t)f'(t),$$ …………………………(5 分)

$$f'(t) = \frac{1-2t}{2t^2}f(t), \quad \frac{df(t)}{f(t)} = (\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t})dt,$$ …………………………(8 分)

$$\ln|f(t)| = -\frac{1}{2t} - \ln t + C_1,$$

$$f(x) = Ce^{-\frac{1}{2x} - \ln x} = \frac{C}{x}e^{-\frac{1}{2x}}.$$ …………………..………..(10 分)

七.　　设 t 时刻含盐量为 $m(t)$ 克, 则

$$dm = 4 \times 5dt - \frac{m}{100} \cdot 5dt,$$ …………………………….(3 分)

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} + \dfrac{m}{20} = 20, \\ m(0) = 0 \end{cases}$$ …………………………..(4 分)

通解为　　　$$m(t) = Ce^{-\frac{t}{20}} + 400,$$ …………………………..(7 分)
由初始条件得　$C = -400,$

$$\therefore m(t) = 400(1 - e^{-\frac{t}{20}}).$$ …………………………….(8 分)

八. (1)　　由于 $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{f(x)}{x})}{\sin x} = 3,$$ 所以 $$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0,$$ ………………(1 分)

故 $f(0) = 0,$ $$f'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0;$$ ………………………(3 分)

(2)　　令　　　　$$F(x) = f'(x)e^x,$$ …………..…………...(4 分)

根据积分中值定理, $\exists c \in [1,2]$, 使

$$f(c) = \int_1^2 f(x)dx = 0,$$ …..………………….(5 分)

由洛尔定理, $\exists c_1 \in (0,c)$, 使 $f'(c_1) = 0,$ …………..………….(6 分)

$$\therefore F(0) = F(c_1),$$

由洛尔定理, $\exists \xi \in (0,c_1) \subset (0,2)$, 使 $F'(\xi) = 0,$

即　　　　　　$$f''(\xi)e^\xi + f'(\xi)e^\xi = 0,$$

$$f'(\xi) + f''(\xi) = 0.$$ …………………..……….(8 分)