习题5-2

1. (1) 由 $xyy'=1-x^2$ 得：

$ydy=\frac{1-x^2}{x}dx$，两端积分

$\Rightarrow \int ydy=\int\frac{1-x^2}{x}dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}y^2=\ln|x|-\frac{1}{2}x^2+C_1$

$\Rightarrow x^2+y^2-\ln x^2=C$

(2) 由 $x\sqrt{1+y^2}dx+y\cdot\sqrt{1+x^2}dy=0$ 得：

$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=-\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}$　两端积分：

$\Rightarrow \int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{-y}{\sqrt{1+y^2}}dy$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+y^2)}{\sqrt{1+y^2}}$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$

(3) 由 $xy'-y\ln y=0$ 得

$\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{1}{y\ln y}dy$　两端积分

$\Rightarrow \ln|x|=\ln^{\ln y}+C_1=\ln^{\ln y}+\ln|C|$　(C是任意的非零常数)

$\Rightarrow Cx=\ln^y$

$\Rightarrow y=e^{Cx}$

(4) 由 $\sqrt{1-x^2}y'=\sqrt{1-y^2}$ 得：

$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　两端积分：

$\Rightarrow \arcsin y=\arcsin x+C$

对 $\begin{cases}y=1\\x=1\end{cases}$ 也满足上述通解．

(5) 由 $\frac{dy}{dx}=10^{x+y}$ 得

$$\frac{dy}{10^{y}}=10^{x}dx$$ 两端积分

$$\int\frac{1}{10^{y}}dy=\int 10^{x}dx$$

$$\Rightarrow \int 10^{-y}d(-y)=-\int 10^{x}dx$$

$$\Rightarrow \frac{10^{-y}}{\ln 10}=-\frac{10^{x}}{\ln 10}+C_1$$

$$\Rightarrow 10^{-y}+10^{x}=C$$

(6) 对 $(e^{x+y}-e^{x})dx+(e^{x+y}+e^{y})dy=0$ 变形可得：

$$\frac{dy}{e^{-y}-1}=\frac{dx}{e^{-x}+1}$$ 两端积分：

$$\int\frac{1}{e^{-y}-1}dy=\int\frac{1}{e^{-x}+1}dx$$

$$\Rightarrow -\ln|e^{y}-1|-y=x+\ln|e^{-x}+1|+C_1$$

$$\Rightarrow (e^{-y}-1)e^{y}(e^{-x}+1)e^{x}=C_2$$

$$\Rightarrow (e^{y}-1)(e^{x}+1)=C$$

(7) 由 $(y+1)^2\frac{dy}{dx}+x^3=0$ 得

$$(y+1)^2dy=-x^3dx$$ 两端积分：

$$\int(y+1)^2dy=\int -x^3dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}y^3+y^2+y=-\frac{1}{4}x^4+C_1$$

$$\Rightarrow 3x^4+4(y+1)^3=C$$

(8) 由 $-xy'=y^2$ 得：$-x\frac{dy}{dx}=y^2$，即：

$$-\frac{1}{y^2}dy=\frac{1}{x}dx$$ 两端积分：

$$\int -\frac{1}{y^2}dy=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}=\ln|x|+C.$$

(9) 由 $\cos x\sin y\,dx+\sin x\cos y\,dy=0$ 得：

$$\frac{\cos x}{\sin x}dx=\frac{-\cos y}{\sin y}dy$$ 两端积分：

$$\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=-\int\frac{\cos y}{\sin y}dy$$

$$\Rightarrow \ln|\sin x|=-\ln|\sin y|+C_1$$

$$\Rightarrow \sin x\sin y=C.$$

(10) 对 $xy(y-xy')=x+yy'$ 两边同除 xy 得

$$y-x\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow y-\frac{1}{y}=(x+\frac{1}{x})\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{y^2-1}dy=\frac{x}{x^2+1}dx$$ 两端积分得：

$$\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\ln C$$

$$\Rightarrow y^2-1=C(x^2+1)$$

(11) 由 $y^2dx+ydy=x^2ydy-dx$ 得

$$\frac{1}{x^2-1}\cdot dx=\frac{y}{y^2+1}dy$$ 两边积分

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=\frac{1}{2}\ln|y^2+1|+\frac{1}{2}\ln|C|$$

$$\Rightarrow y^2+1=C\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

(12). 由 $ydx+\sqrt{x^2+1}\,dy=0$ 得

$$\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{y}dy$$ 两边积分

$$-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\ln|y|+\ln|C|$$

$$\Rightarrow y(x+\sqrt{x^2+1})=C$$

2. (1) 由 $(1+e^x)yy'=e^x$ 得:

$y\,dy=\frac{e^x}{1+e^x}dx$ 两端积分

$\frac{1}{2}y^2=\ln(1+e^x)+C$

又 $y|_{x=1}=1$，有 $\frac{1}{2}=\ln(1+e)+C$

$\Rightarrow C=\frac{1}{2}-\ln(1+e)$

则特解为 $\frac{1}{2}y^2=\ln(1+e^x)+\frac{1}{2}-\ln(1+e)$

(2) 由 $\frac{x}{1+y}dx-\frac{y}{1+x}dy=0$ 得:

$x(1+x)dx=y(1+y)dy$ 两端积分

$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+C$

又 $y|_{x=0}=1$，有 $0=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+C$

$\Rightarrow C=-\frac{5}{6}$

则特解为 $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{5}{6}$

(3) 由 $y'\sin x=y\ln y$ 得:

$\frac{1}{y\ln y}dy=\frac{1}{\sin x}dx$ 两边积分:

$\ln|\ln y|=\ln|\tan\frac{x}{2}|+\ln|C|$ $\Rightarrow \ln|y|=C\tan\frac{x}{2}$.

又 $y(\frac{\pi}{2})=e$ 则 $1=C$

$\Rightarrow C=1$

则特解为 $y=e^{\tan\frac{x}{2}}$,

(4) 由 $xy'+y=y^2$ 得.

$\frac{1}{y^2-y}dy=\frac{1}{x}dx$ 两端积分得

$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|=\ln|x|+\ln|C|$ $\Rightarrow \frac{y-1}{y}=Cx$

又 $y(1)=\frac{1}{2}$，则: $-1=C$

$\Rightarrow C=-1$

则特解为 $y(1+x)=1$

(5) 由 $\cos y dx + (1+e^{-x})\sin y dy = 0$ 得:

$\frac{1}{1+e^{-x}}dx = -\tan y dy$ 两边积分有:

$x+\ln|e^{-x}+1| = \ln|\cos y| + \ln|C|$

则: $1+e^{x} = C\cos y$

又 $y|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$, 则 $1+1 = C\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C = 2\sqrt{2}$

则特解为: $(1+e^{x})\sec y = 2\sqrt{2}$

(6) 由 $\arctan y dy + (1+y^2)x dx = 0$ 得:

$\frac{\arctan y}{1+y^2}dy = -x dx$ 两边积分有:

$\frac{1}{2}(\arctan y)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$

又 $y|_{x=0} = 1$, 则 $\frac{\pi^2}{32} = C$.

则特解为: $x^2+(\arctan y)^2 = \frac{\pi^2}{16}$

3. (1) 由 $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$, 由齐次方程方法:

令 $u = \frac{y}{x}$. 则:

$x\frac{du}{dx} = \frac{1+u}{1-u} - u = \frac{1+u^2}{1-u}$

分离变量则:

$\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{1}{x}dx$ 两边积分:

$\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x| + C_1$

代入 $u = \frac{y}{x}$ 得:

$\arctan\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = C$

(2) 两边同除 xy 可得：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\frac{y}{x})^2-2}{3\frac{y}{x}}$$，这是齐次方程

令 $u=\frac{y}{x}$，则：

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u^2-2}{3u}-u=\frac{-2u^2-2}{3u}$$

分离变量，有：

$$\frac{3u}{-2u^2-2}du=\frac{dx}{x}$$ 两边积分.

$$-\frac{3}{4}\ln(u^2+1)=\ln|x|+C_1$$

$$\Rightarrow 4\ln|x|+3\ln(u^2+1)=4C_1$$

$$\Rightarrow \ln x^4(u^2+1)^3=\ln|C|$$

$$\Rightarrow x^4(u^2+1)^3=C_2$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入，有：

$$\frac{(y^2+x^2)^3}{x^2}=C_2$$

$\Rightarrow$ 通解为：$3\ln(y^2+x^2)=2\ln|x|+C_2$ 即 $(x^2+y^2)^3=Cx^2$

(3) 由 $xy'=y\ln\frac{y}{x}\Rightarrow y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$.

令 $u=\frac{y}{x}$，用齐次方程法：

$x\frac{du}{dx}=u\ln u-u$，分离变量得：

$$\frac{du}{u\ln u-u}=\frac{1}{x}dx$$ 两边积分.

$$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+C_1$$

$$\Rightarrow \ln u-1=Cx$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入：

$$\ln\frac{y}{x}-1=Cx$$

$$\Rightarrow y=xe^{Cx+1}$$

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\cdot(1+\ln\frac{y}{x})$

令$u=\frac{y}{x}$. 用齐次方程法:

$x\frac{du}{dx} = u(1+\ln u) - u$, 分离变量:

$\frac{1}{u\ln u}du = \frac{1}{x}dx$ 两边积分:

$\ln|\ln u| = \ln|x| + C_1$

$\Rightarrow \ln|u| = C_2|x| = C_2 x$

$\Rightarrow u = e^{C_2 x}$

$\Rightarrow y = xe^{C_2 x}$

(5) 两边以x得:

$1-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}-1}{\cos\frac{y}{x}} = \frac{y}{x} - \frac{1}{\cos\frac{y}{x}}$

令$u=\frac{y}{x}$. 则:

$x\frac{du}{dx} = u - \frac{1}{\cos u} - u = \frac{-1}{\cos u}$, 分离变量:

$\cos u\,du = -\frac{1}{x}dx$, 两边积分:

$\sin u = -\ln|x| + C$

$u = \frac{y}{x} = \arcsin(C-\ln|x|)$

$\Rightarrow y = x\arcsin(C-\ln|x|)$

(6) 由$x\frac{dy}{dx}+y=2\sqrt{xy} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}+2\sqrt{\frac{y}{x}}$

令$u=\frac{y}{x}$. 有:

$x\frac{du}{dx} = -u+2\sqrt{u}-u = -2u+2\sqrt{u}$ 分离变量:

$\frac{1}{2\sqrt{u}-2u}du = \frac{1}{x}dx$. 两边积分:

$-\ln|1-\sqrt{u}| = \ln|x| + \ln C_1$

$\Rightarrow C_1 x(1-\sqrt{u}) = 1$.

代入$u=\frac{y}{x}$, 得 $x-\sqrt{xy} = \frac{1}{C_1} = C$

(7) 由题可得：$\frac{dx}{dy}=\frac{2e^{\frac{x}{y}}(\frac{x}{y}-1)}{1+2e^{\frac{x}{y}}}$

设 $\frac{x}{y}=u$. $\frac{dx}{dy}=\frac{du}{dy}\cdot y+u$，$\frac{du}{dy}\cdot y+u=\frac{2e^{u}(u-1)}{y[1+2e^{u}]}$

$\Rightarrow \ln|2e^{u}+u|=-\ln|y|+C_1$

则通解为 $2e^{\frac{x}{y}}+\frac{x}{y}=\frac{C}{y}$

即 $2ye^{\frac{x}{y}}+x=C$

4. (1) 由 $x(x+2y)y'-y^2=0$ 可得

$(1+\frac{2y}{x})y'=(\frac{y}{x})^2$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{1+\frac{2y}{x}}$

令 $u=\frac{y}{x}$，有：

$x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{1+2u}-u=\frac{-u^2-u}{1+2u}$

分离变量得：

$\frac{1+2u}{-u^2-u}du=\frac{1}{x}dx$ 两边积分

$-\ln|u(u+1)|=\ln|x|+C$

即 $\ln\left|\frac{x^2}{y^2+xy}\right|=\ln|x|+C$

因 $y|_{x=1}=1$，则：$-\ln 2=0+C \Rightarrow C=-\ln 2$

则特解为 $\frac{x^2}{y^2+xy}=\frac{x}{2}$

即：$y^2+xy=2x$

(2) 令 $u=\frac{y}{x}$. 则 $x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{u}-u=\frac{1}{u}$，分离变量：

$udu=\frac{1}{x}dx$ 两边积分得 $\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C_1$.

即 $\frac{y^2}{x^2}=2\ln|x|+C$

又 $y|_{x=1}=2$，则 $\frac{4}{1}=2\times0+C \Rightarrow C=4$

则通解为：$\frac{y^2}{x^2}=2\ln|x|+4$

(3) 两边同除以x^2后可得:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+2\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2}{1-2\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2}$$，这是齐次方程.

设$u=\frac{y}{x}$，则:

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^2-2u-1}{u^2+2u-1}-u$$ 分离变量:

$$\frac{(u^2+2u-1)}{(u+1)(u^2+1)}du = -\frac{1}{x}dx$$ 两边积分

$$\ln\left|\frac{u^2+1}{u+1}\right| = -\ln|x|+\ln|C|$$

$$\Rightarrow \frac{(u^2+1)x}{u+1} = C$$

即: $\frac{y^2+x^2}{y+x} = C$

又 $y|_{x=1}=1$. 则 $\frac{1+1}{1+1}=C$，$\Rightarrow C=1$.

$\therefore x+y = x^2+y^2$

5. (1) 解方程组$\begin{cases} y+2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow x=3 \quad y=-2$.

令 $u=x-3$ $v=y+2$，则:

$$\frac{dv}{du} = 2\left(\frac{v}{u+v}\right)^2,$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dv} = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{v}+1\right)^2$$

令 $z=\frac{u}{v}$，则.

$$v\frac{dz}{dv} = \frac{1}{2}(z+1)^2-z = \frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}$$

分离变量:

$$\frac{1}{z^2+1}dz = \frac{1}{2}\frac{1}{v}dv$$ 两边积分:

$$\arctan z = \frac{1}{2}\ln|v|+C$$

即$\arctan\frac{x-3}{y+2} = \frac{1}{2}\ln|y+2|+C$

(2) 令 $u=x-y+1$，两端对 x 求导得：

$$\frac{du}{dx}=1-\frac{dy}{dx}，则\frac{du}{dx}=1-\sin^2u=\cos^2u$$

分离变量：$\frac{1}{\cos^2u}du=dx$

两边求积分：$\tan u=x+C$

即 $\tan(x-y+1)=x+C$

(3) 令 $u=x+y$，两端对 x 求导得：

$$\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}=1+(x+y)^2=1+u^2$$

分离变量：$\frac{1}{1+u^2}du=dx$

两边积分：$\arctan u=x+C$

即 $\arctan(x+y)=x+C$

(4) 由已知得：$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$

求解 $\begin{cases}2x-5y+3=0\\2x+4y-6=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

令 $\xi=x-1$，$\eta=y-1$ 则：

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{2\xi-5\eta}{2\xi+4\eta}=\frac{2-5\frac{\eta}{\xi}}{2-4\frac{\eta}{\xi}}$$

令 $u=\frac{\eta}{\xi}$，则

$$\xi\frac{du}{d\xi}=\frac{2-5u}{2-4u}-u=\frac{4u^2-7u+2}{2-4u}$$

两边分离变量：$\frac{2-4u}{4u^2-7u+2}du=\frac{1}{\xi}d\xi$

两边积分：$-\int\left(\frac{\frac{2}{3}}{u-2}+\frac{\frac{4}{3}}{4u+1}\right)du=\int\frac{1}{\xi}d\xi$

即：$-\frac{2}{3}\ln|u-2|-\frac{1}{3}\ln|4u+1|=\ln|\xi|+\ln|C|$

$\Rightarrow \xi^3(u-2)^2(4u+1)=C$

即 $(4y-x-3)(y+2x-3)^2=C$

(5) 令 $u=x+y$. 则 $du=dx+dy \Rightarrow dx=du-dy$ 代入原入程

$$udu-udy+(3u-4)dy=0$$

$$\Rightarrow udu+2udy-4dy=0$$

$$\Rightarrow dy=\frac{udu}{4-2u}$$ 两边积分

$$y=-\frac{1}{2}u-\ln|u-2|+C_1$$

$$=-\frac{1}{2}(x+y)-\ln|x+y-2|+C_1$$

即 $x+3y+2\ln|x+y-2|=C$

6. (1) 利用一阶线性微分方程通解公式有:

$$y=e^{-\int 1dx}\left[C+\int \cos x\, e^{\int 1dx}dx\right]$$

$$=e^{-x}\left[C+\int \cos x\, e^{x}dx\right]$$

$$=e^{-x}\left[C+\frac{e^x}{1+1}(\sin x+\cos x)\right]$$

$$=Ce^{-x}+\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$$

(2). 该方程为一阶线性微分方程.

$P(x)=2x$. $Q(x)=xe^{-x^2}$

利用通解公式:

其中 $\int P(x)dx=x^2$

$$y=e^{-x^2}\left[C+\int xe^{-x^2}e^{x^2}dx\right]$$

$$=e^{-x^2}\left[C+\frac{1}{2}x^2\right]$$

$$=Ce^{-x^2}+\frac{1}{2}e^{-x^2}\cdot x^2$$

(3) 由 $(y^4+2x)y'=y$ 可得: $\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}\cdot x=y^3$. 这是一阶线性微分方程

$P(y)=-\frac{2}{y}$ $Q(y)=y^3$

$$x=e^{-\int -\frac{2}{y}dy}\left[C+\int y^3e^{\int -\frac{2}{y}dy}dy\right]=e^{2\ln y}\left[C+\int y^3 e^{-2\ln y}dy\right]$$

$$=y^2\left[C+\frac{1}{2}y^2\right]=\frac{1}{2}y^4+Cy^2$$

(4) $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 1+x^2$. 这是一阶线性微分方程.

$P(x) = \frac{-2x}{1+x^2}$ $Q(x) = 1+x^2$

$\int P(x)dx = -\ln(1+x^2)$,

则 $y = e^{\ln(1+x^2)}\left[C + \int (1+x^2) e^{-\ln(1+x^2)} dx\right]$

$= (1+x^2)\left[C + x\right]$

(5) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\cos^2 x} y = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$, 这是一阶线性微分方程.

$P(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ $Q(x) = \frac{\tan x}{\cos^2 x}$

$\int P(x)dx = \tan x$

则 $y = e^{-\tan x}\left[C + \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} e^{\tan x} dx\right]$

其中 $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} e^{\tan x} dx = \int \tan x e^{\tan x} d(\tan x) = \tan x e^{\tan x} - e^{\tan x}$

则 $y = Ce^{-\tan x} + \tan x - 1$

(6) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x\ln x} \cdot y = \frac{1}{x}$, 这是一阶线性微分方程

$P(x) = \frac{1}{x\ln x}$ $Q(x) = \frac{1}{x}$

$\int P(x)dx = \int \frac{1}{x\ln x} dx = \ln|\ln x|$

则 $y = e^{-\ln|\ln x|}\left[C + \int \frac{1}{x} \cdot e^{\ln|\ln x|} dx\right]$

$= \frac{1}{|\ln x|}\left[C + \int \frac{1}{x} \cdot |\ln x| dx\right]$ (不妨设 $x>1$)

$= C\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)$

$= \frac{C}{\ln x} + \frac{1}{2}\ln x$

(7) $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{\ln x}$ 这是一阶线性微分方程.

$P(x) = -\frac{1}{x}$ $Q(x) = \frac{1}{\ln x}$

$\int -\frac{1}{x}dx = -\ln x$

则 $y = e^{\ln x}\left[C + \int \frac{1}{\ln x} \cdot e^{-\ln x} dx\right]$

$= x\left[C + \ln|\ln x|\right]$

$= Cx + x\ln|\ln x|$

(8) $\frac{dx}{dy} - x = e^y$, 这是一阶线性微分方程

$P(y) = -1$. $Q(y) = e^y$

$\int P(y)dy = -y$

则 $x = e^y\left[C + \int e^y e^{-y} dy\right]$

$= e^y\left[C + y\right]$

(9) $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -\frac{y}{2}$，属于一阶线性微分方程

$P(y) = \frac{-3}{y}$ $Q(y) = \frac{-y}{2}$

$\int P(y)dy = -3\ln y$

$x = e^{3\ln y}\left[C + \int \frac{-y}{2} \cdot e^{-3\ln y} dy\right]$

$= Cy^3 + y^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y}$

$= Cy^3 + \frac{1}{2}y^2$

7. (1) $xy'+y-e^x=0 \Rightarrow y'+\frac{1}{x}y=\frac{e^x}{x}$ 是一阶线性微分方程.

$P(x)=\frac{1}{x}$ $\quad Q(x)=\frac{e^x}{x}$, 不妨令 $x>0$

$\int P(x)dx=\ln x$

则 $y=e^{-\ln x}\left[C+\int\frac{e^x}{x}\cdot e^{\ln x}dx\right]$

$=\frac{1}{x}\left[C+e^x\right]$

又 $y|_{x=a}=b$.

则 $b=\frac{1}{a}(C+e^a) \Rightarrow C=ab-e^a$

则 $y=\frac{1}{x}\cdot(e^x+ab-e^a)$

(2) 原微分方程是一阶线性微分方程

$P(x)=-\tan x$ $\quad Q(x)=\sec x$

$\int P(x)dx=\ln\cos x$

则 $y=e^{\ln\cos x}\left[C+\int\sec x\, e^{\ln\cos x}dx\right]$

$=\frac{1}{\cos x}\left[C+x\right]$

又 $y|_{x=0}=0$, 有 $0=\frac{C}{1} \Rightarrow C=0$

则 $y=\frac{x}{\cos x}$

(3) $\Rightarrow x\frac{dy}{dx}+y=\sin x$

$\Rightarrow d\cdot(xy)=\sin x\,dx$

$\Rightarrow xy=-\cos x+C$

又 $y|_{x=\pi}=1$

则 $\pi=1+C \Rightarrow C=\pi-1$

则 $xy=-\cos x+\pi-1$

(4) $y' + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{1}{1-x^2}$，这是一阶线性微分方程.

$P(x)=\frac{x}{1-x^2}$ $Q(x)=\frac{1}{1-x^2}$

$\int P(x)dx = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x^2}d(1-x^2) = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2|$

则 $y=e^{\frac{1}{2}\ln|1-x^2|}\left[C+\int\frac{1}{1-x^2}e^{-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|}dx\right]$，不妨设 $x^2<1$

$= \sqrt{1-x^2}\left[C+\int\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\right.$

$= C\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$= C\sqrt{1-x^2}+x$

又 $y(0)=1$，有 $1=C+0 \Rightarrow C=1$

则 $y=\sqrt{1-x^2}+x$

8、(1) 这属于 $n=2$ 的伯努利方程

令 $u=y^{-1}$，则方程可化为:

$\frac{du}{dx}-u=\sin x-\cos x$

这是一个线性方程: $P(x)=-1$ $Q(x)=\sin x-\cos x$

$\int P(x)dx=-x$

由通解公式: $u=e^{x}\left[C+\int(\sin x-\cos x)e^{-x}dx\right]$

$=e^{x}\left[C+(-e^{-x}\sin x)\right]$

$=Ce^{x}-\sin x$

则 $y=\frac{1}{Ce^{x}-\sin x}$

(2) 这属于 $n=5$ 的伯努利方程

令 $u=y^{-4}$，则方程化为:

$\frac{du}{dx}-4\times(-1)u=-4x$

这是线性方程: $P(x)=4$ $Q(x)=-4x$

$\int P(x)dx=4x.$

由通解公式:

$$u=e^{-4x}\left[C+\int(-4x)e^{4x}dx\right]$$

$$=Ce^{-4x}+e^{-4x}\cdot\left[e^{4x}\left(-x+\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$=Ce^{-4x}-x+\frac{1}{4}$$

则 $\frac{1}{y^4}=Ce^{-4x}-x+\frac{1}{4}$

(3) 原方程变形为: $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=y^3(1+\ln x)$ 这是 $n=3$ 的伯努利方程.

令 $u=y^{-2}$, 则方程化为:

$\frac{du}{dx}-2\left(-\frac{1}{x}\right)u=-2(1+\ln x)$ 这是线性方程

$P(x)=\frac{2}{x}$　　$Q(x)=-2(1+\ln x)$

$\int P(x)dx=2\ln x$

由通解公式, 有:

$$u=e^{-2\ln x}\left[C+\int-2(1+\ln x)e^{2\ln x}dx\right]$$

$$=\frac{C}{x^2}+\frac{1}{x^2}\left[-\frac{4}{9}x^3-\frac{2}{3}x^3\ln x\right]$$

$$=\frac{C}{x^2}-\frac{4}{9}x-\frac{2}{3}x\ln x$$

即 $\frac{1}{y^2}=\frac{C}{x^2}-\frac{4}{9}x-\frac{2}{3}x\ln x$

(4) 这是 $n=-1$ 的伯努利方程

令 $u=y^2$, 原方程化为:

$\frac{du}{dx}+2\times(-1)u=2x^2$ 这是线性方程

$P(x)=-2$　　$Q(x)=2x^2$

$\int P(x)dx=-2x$

由通解公式:

$$u=e^{2x}\left[C+\int 2x^2e^{-2x}dx\right]=Ce^{2x}+e^{2x}\left[-e^{-2x}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)\right]=Ce^{2x}-x^2-x-\frac{1}{2}$$

则 $y^2=Ce^{2x}-x^2-x-\frac{1}{2}$

(5) 由已知可得：$\frac{dx}{dy}-yx=y^3x^2$

这是 $n=2$ 的伯努利方程

令 $u=x^{-1}$，则方程化为：

$\frac{du}{dy}+yx=-y^3$ 这是一阶线性方程

$P(y)=y \quad Q(y)=-y^3$

$\int P(y)dy=\frac{1}{2}y^2$

由通解公式：

$u=e^{-\frac{1}{2}y^2}\left[c+\int -y^3e^{\frac{1}{2}y^2}dy\right]$

$=Ce^{-\frac{y^2}{2}}-y^2+2$

即：$\frac{1}{x}=Ce^{-\frac{y^2}{2}}-y^2+2$

9 (1) $\Rightarrow xy\,dxy+dxy+x^3y^2dy=0$

令 $u=xy$，（与书中方法不同，这个方法可参考其他常微分教材）

$(u+1)du+u^3y^{-1}dy=0$

$d(\ln y)=(-u^{-2}-u^{-3})du$

$\ln y=u^{-1}+\frac{1}{2}u^{-2}+C$

$\Rightarrow y=C\cdot e^{\frac{1}{2}(u^{-1}+1)^2}$

即 $y=Ce^{\frac{1}{2}(\frac{1}{xy}+1)^2}$

(2) 当 $a=0$ 时，原方程为 $3y^2y'=x+1 \Rightarrow (y^3)'=x+1$

即 $y^3=\int(x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x+C$

当 $a\neq 0$ 时，原方程可化为 $3y^2dy-ay^3dx=(x+1)dx$

$\Rightarrow dy^3-ay^3dx=(x+1)dx$，令 $u=y^3$

$\Rightarrow du-au\,dx=(x+1)dx$

$\Rightarrow \frac{du}{dx}-au=x+1$ 这是一阶线性微分方程.

则 $u=e^{\int a dx}\left[c+\int(x+1)e^{\int -a dx}dx\right]=Ce^{ax}-\frac{1}{a}(ax+1-a)$

即 $y^3=Ce^{ax}-\frac{1}{a}(ax+1-a)$

(3) 由题可得：$\cos y\,dy + \sin y\cos^2 y\,dx = \sin^3 y\,dx$

即 $d\sin y + \sin y\cos^2 y\,dx = \sin^3 y\,dx$

令 $u=\sin y$，有：

$$du + u(1-u^2)dx = u^3 dx$$

则 $\frac{du}{dx} = u^3 - u(1-u^2) = 2u^3 - u$

则 $u = \int(2u^3-u)du = \frac{1}{2}u^4 - \frac{1}{2}u^2 + c_1$

即 $\frac{1}{2}\sin^4 y - \frac{1}{2}\sin^2 y - \sin y = C$

（怀疑是题目出错了）

(4) 由题可得：$\sec^2 y\,dy + \frac{x}{1+x^2}\tan y\,dx = x\,dx$

$\Rightarrow d\tan y + \frac{x}{1+x^2}\tan y\,dx = x\,dx$

令 $u=\tan y$，有：

$\frac{du}{dx} + \frac{x}{1+x^2}u = x$　　这是一阶线性方程.

$P(x) = \frac{x}{1+x^2}$　　$Q(x) = x$

$\int P(x)dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

由通解公式：

$$u = e^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}\left[C + \int x e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}dx\right]$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\left[C + \int x\sqrt{1+x^2}\,dx\right]$$

$$= \frac{C}{1+x^2} + \frac{1}{3}(1+x^2)$$

即 $\tan y = \frac{C}{1+x^2} + \frac{1}{3}(1+x^2)$

(5) 两边同乘 e^y 可得：$e^y dy + e^y dx = 4\sin x\,dx$

$\Rightarrow de^y + e^y dx = 4\sin x\,dx$，令 $u=e^y$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} + u = 4\sin x$. 这是一阶线性方程：

$P(x)=1$　　$Q(x)=4\sin x$.　$\int P(x)dx = x$

则 $u = e^{-x}\left[C + \int 4\sin x\, e^x dx\right] = Ce^{-x} + 2(\sin x - \cos x)$

即 $e^y = Ce^{-x} + 2\sin x - 2\cos x$

(6) 由原式可得：

$$x\left(\frac{dy}{dx}+\frac{dx}{dx}\right)=-\sin(x+y) \quad 即：x\frac{d(x+y)}{dx}=-\sin(x+y)$$

$$\Rightarrow \frac{d(x+y)}{\sin(x+y)}=-\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x+y)}{\sin^2(x+y)}d(x+y)=-\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \frac{d(\cos(x+y))}{1-\cos^2(x+y)}=-\frac{1}{x}dx$$ ，两边积分．

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{1+\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}\right|=2\ln|x|+\ln|c|$$

$$\Rightarrow \frac{1+\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}=ce^{2x}$$

$$\Rightarrow \cos(x+y)=\frac{ce^{2x}-1}{ce^{2x}+1}$$