2019-2020 学年第二学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题(每空 1 分，共 30 分)

1、【正解】$\frac{1}{2}$

【学解】$ABC\subset AB\Rightarrow 0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0\Rightarrow P(ABC)=0$

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})$$
$$=1-P(A\cup B\cup C)=1-P(A)-P(B)-P(C)+P(AB)+P(BC)+P(AC)-P(ABC)$$
$$=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-0=\frac{1}{2}$$

【考点延伸】《考试宝典》第一章 1.1 基本概念

2、【正解】$\frac{2}{3}$

【学解】$\frac{1}{27}=P(X=0)=C_3^0p^0(1-p)^{3-0}=(1-p)^3\Rightarrow p=\frac{2}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》第二章 2.4 常见的一维随机变量及分布

3、【正解】0

【学解】由已知可得X_1和X_2的联合分布律为

$X_2\diagdown X_1$	-1	0	1
-1	0	0.25	0
0	0.25	0	0.25
1	0	0.25	0

故$P(X_1=X_2)=0+0+0=0$

【考点延伸】《考试宝典》 第二章 2.4 常见的一维随机变量及分布

4、【正解】2

【学解】$E[(X-2)(X-3)]=E(X^2-5X+6)=E(X^2)-5E(X)+6$

$$=D(X)+E^2(X)-5E(X)+6=\lambda^2-4\lambda+6=2$$

$$\Rightarrow\lambda^2-4\lambda+4=0\Rightarrow\lambda=2$$

【考点延伸】《考试宝典》第四章 4.3 常见随机变量的数学期望及方差

5、【正解】$2m$

【学解】$E(S^2)=\sigma^2=D(X)=2m$

【考点延伸】《考试宝典》 第六章 常用统计量的数字特征

6、【正解】$\sqrt{2}$，4

【学解】$X_1,X_2\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2$独立 $\Rightarrow X_1+X_2\sim N(0,2\sigma^2)$

$$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1);\frac{X_3}{\sigma},\frac{X_4}{\sigma},\frac{X_5}{\sigma},\frac{X_6}{\sigma}\sim N(0,1)$$

$$\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{X_4}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{X_5}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{X_6}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(4)$$

$$\frac{(X_1+X_2)/(\sqrt{2}\sigma)}{\sqrt{\left(\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{X_4}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{X_5}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{X_6}{\sigma}\right)^2\right)/4}}=\sqrt{2}\cdot\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2+X_6^2}}\sim t(4)$$

【考点延伸】《考试宝典》第六章 【重要题型】题型 6：抽样分布统计量的判断

7、【正解】$\left(\bar{X}-\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

【学解】参考已知σ情况下μ的区间估计

【考点延伸】《考试宝典》第八章 8.2 置信区间

二、【学解】设A表示事件“一位新工人参加过培训”，B表示事件“一位新工人完成生产定额”，

由已知有$P(B|A)=0.86,P\left(B|\bar{A}\right)=0.35,P(A)=0.8$

1、所求概率为:

$$P(B)=P(B|A)P(A)+P\left(B|\bar{A}\right)P\left(\bar{A}\right)=P(B|A)P(A)+P\left(B|\bar{A}\right)[1-P(A)]$$
$$=0.86\times0.8+0.35\times(1-0.8)=0.758$$

2、所求概率为:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}=\frac{0.86\times0.8}{0.758}=\frac{344}{379}$$

【考点延伸】《考试宝典》第一章 【重要题型】题型 4：全概率公式与贝叶斯公式

三、【学解】1、$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，令$g(x)=e^x$，$h(y)=\ln y$为$g(x)$的反函数

$\because g(x)$处处可导且恒有$g'(x)=e^x>0$

$\therefore Y=e^x$的概率密度函数：

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]|h'(y)|, & 0<y<+\infty\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & 0<y<+\infty\\ 0\ , & \text{其他}\end{cases}$$

2、(1) 由规范性，$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}A\cos x dx=2A \therefore A=\frac{1}{2}$

(2) $P(Y=0)=P\left\{0<X<\frac{\pi}{4}\right\}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f_X(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos x dx=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$P\{Y=1\}=1-P\{Y=0\}=1-\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\therefore Y$ 的分布律为：

Y	0	1
P	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$1-\frac{\sqrt{2}}{4}$

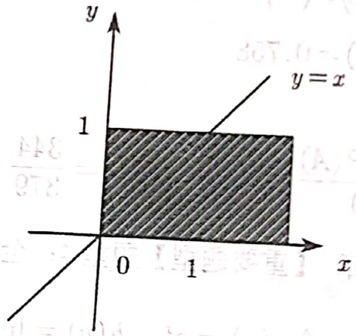
【考点延伸】《考试宝典》第二章【重要题型】题型 2：离散型随机变量及其分布律 题型 3：续型随机变量及其性质

四、【学解】1、由已知 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x},0<x<+\infty\\0\ ,\quad 其他\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}1,0<y<1\\0\ ,\quad 其他\end{cases}$

又 X 和 Y 相互独立

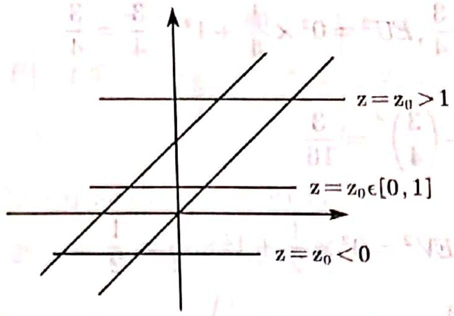
故 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-x},0<x<+\infty,0<y<1\\0\ ,\quad 其他\end{cases}$ 为联合概率密度。

2、$P\{X\leqslant Y\}=\int_0^1\int_0^y e^{-x}dxdy=\int_0^1(1-e^{-y})dy=y+e^{-y}\Big|_0^1=e^{-1}$



3、$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

令 $\begin{cases}0<x<+\infty\\0<z-x<1\end{cases}$ 得 $max\{0,z-1\}<x<z$



当$z<0$时，$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=0$

当$0<z<1$时，$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\int_0^z e^{-x}dx=1-e^{-z}$

当$z>1$时，$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\int_{z-1}^{z}e^{-x}dx=(e-1)e^{-z}$

$$\therefore f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-e^{-z}, & 0<z<1\\ (e-1)e^{-z}, & z>1\end{cases}$$

【考点延伸】《考试宝典》第三章 【重要题型】题型 2：连续型二维随机变量及其分布

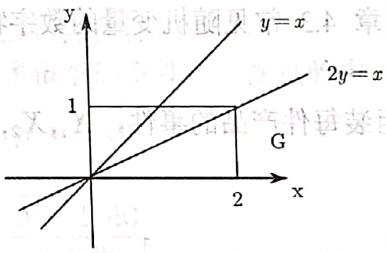
五、【学解】

1、此命题不正确。反例：$Z\sim U(0,2\pi),X=\cos Z,Y=\sin Z$

则$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E\left(\frac{1}{2}\sin 2Z\right)-E(\cos Z)E(\sin Z)=0$

于是X与Y不相关，但是X和Y有关系：$X^2+Y^2=1$，即X与Y不独立

2、(1)



$$P(U=0)=P(X\leqslant Y)=\frac{\frac{1}{2}\times1\times1}{1\times2}=\frac{1}{4},P(U=1)=1-P(U=0)=\frac{3}{4}$$

$$P(V=1)=P(X\leqslant 2Y)=\frac{\frac{1}{2}\times2\times1}{1\times2}=\frac{1}{2},P(V=0)=1-P(V=1)=\frac{1}{2}$$

$\therefore EU=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}, EU^2=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

$DU=EU^2-(EU)^2=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{16}$

$EV=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, EV^2=0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$DV=EV^2-(EV)^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

(2)U,V的联合分布律为:

V \ U	0	1
0	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(UV)=0\times\left(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$\therefore Cov(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}$

$\rho_{UV}=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}}=\frac{-\frac{1}{8}}{\sqrt{\frac{3}{16}}\times\sqrt{\frac{1}{4}}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(3)$\because \rho_{UV}\neq 0$ $\therefore U,V$相关$\therefore U,V$不独立

【考点延伸】《考试宝典》第四章 4.3 常见随机变量的数字特征 【重要题型】题型 6：判断独立性与相关性

六、【学解】设总体X为生产线上组装每件产品的事件，$X_1,X_2,\ldots,X_{100}$为组装 100 件产品各自的时间（单位均为小时）

由已知，$f(x)=\begin{cases}6e^{-6x}, x>0\\ 0, \quad 其他\end{cases}$ 故$\mu=E(X)=\frac{1}{6},\sigma^2=D(X)=\frac{1}{36}$

由中心极限定理，$\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-100\mu}{\sqrt{100}\sigma}=\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-\frac{50}{3}}{\frac{5}{3}}\overset{近似地}{\sim}N(0,1)$

故$P\left(15\leqslant\sum_{i=1}^{100}X_i\leqslant 20\right)=P\left(-1\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-\frac{50}{3}}{\frac{5}{3}}\leqslant 2\right)\approx\Phi(2)-\Phi(-1)$

$=\Phi(2)+\Phi(1)-1=0.9772+0.8413-1=0.8185$

【考点延伸】《考试宝典》第五章 5.3 中心极限定理

七、【学解】1、$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$

用样本矩A_1代替μ_1得$\hat{\theta}=\frac{1-2A_1}{A_1-1}=\frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$，为$\theta$的矩估计量

$\hat{\theta}=\frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$为$\theta$的矩估计值

2、似然函数$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta}$

$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，令$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0$

得$\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

$\therefore\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$为θ的最大似然估计值

θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$

【考点延伸】《考试宝典》第七章 点估计

八、【学解】1、实际推断原理：概率很小的事件在一次试验中几乎是不发生的。

2、假设H_0：$\mu=1.40$，H_1：$\mu\neq 1.40$

检验统计量$Z=\frac{\bar{X}-1.40}{0.04/\sqrt{25}}=\frac{\bar{X}-1.40}{0.008}$

拒绝域为$|z|\geqslant z_{\frac{\alpha}{2}}$

代入已知数据得

$|z|=\left|\frac{\bar{x}-1.40}{0.008}\right|=\left|\frac{1.39-1.40}{0.008}\right|=1.25$，$z_{0.025}=1.96$

故$|z|<z_{0.025}$，不在拒绝域中

∴接受原假设，即认为$\mu=1.40$，该纤维得强力符合要求。

【考点延伸】《考试宝典》第九章 9.3 常用的假设检验