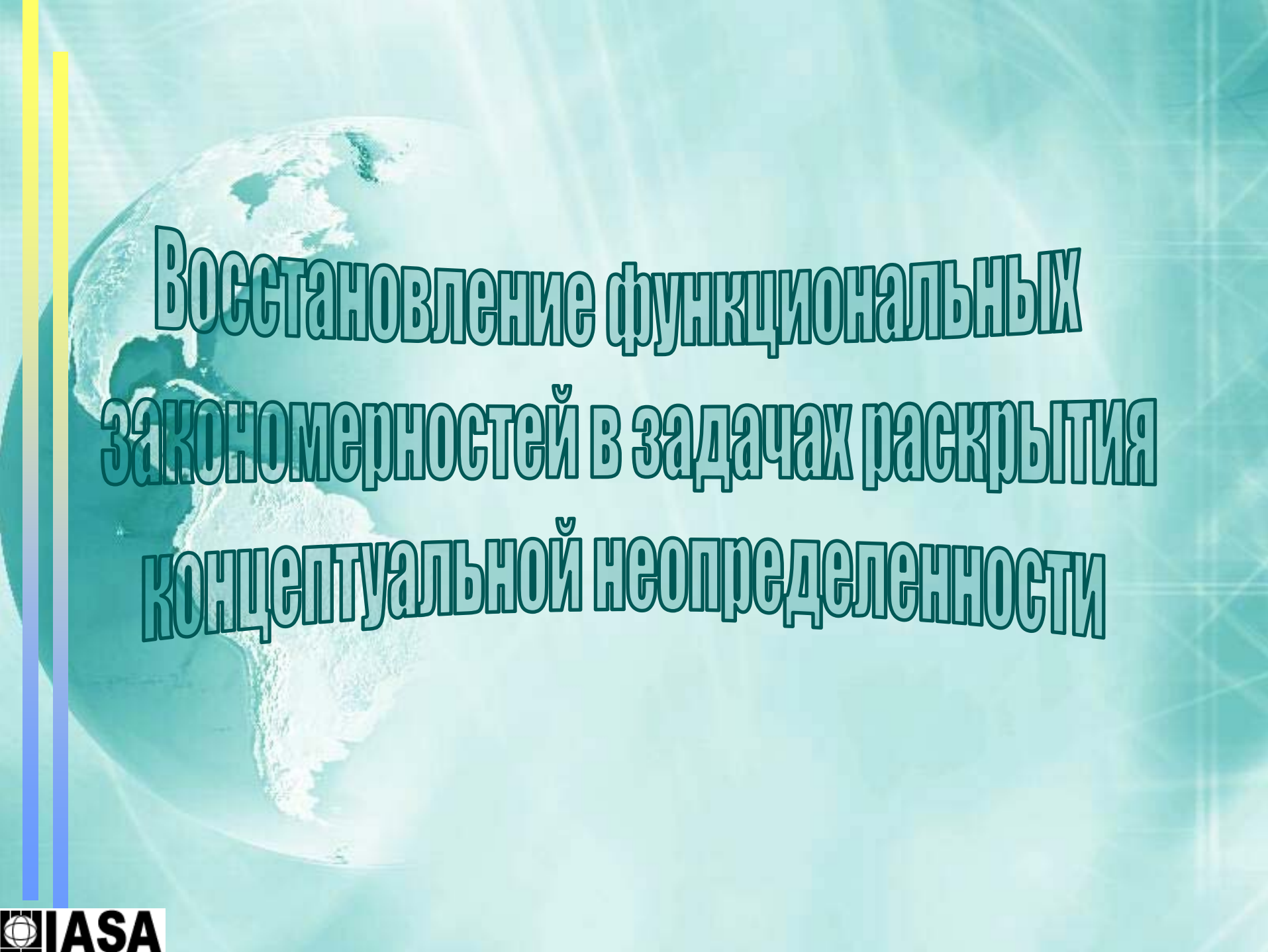


Национальный Технический Университет Украины "КПИ"  
Институт прикладного системного анализа "ИПСА"

# Задачи и методы раскрытия системной неопределенности

Д.Т.Н., проф., академик МАНВШ

Н.Д. Панкратова



# Восстановление функциональных закономерностей в задачах раскрытия концептуальной неопределенности

# ***Восстановление функциональных закономерностей в задачах раскрытия концептуальной неопределенности***

## **Задача раскрытия концептуальной неопределенности**

сводится к задаче системно согласованного раскрытия множества разнородных неопределенностей на основе единых принципов, приемов и критериев. Это множество включает:

- неопределенность целей разработки;
- неопределенность перспектив конкурентоспособности изделия;
- неопределенность изменения рынков спроса и сбыта;
- неопределенность активного противодействия конкурентов;
- ситуационную неопределенность рисков в процессе разработки, производства, сбыта и эксплуатации изделия.

# ***Концептуальная неопределенность***

Такой вид неопределенности относится к концептуальному в том смысле, что в отличие от информационной неопределенности он представляет **собой единый комплекс неизвестности, неоднозначности и противоречивости взаимосвязанных и взаимозависимых элементов указанного множества разнородных неопределенностей.**



## ***Содержательная формулировка задачи***

В содержательной формулировке задачу раскрытия концептуальной неопределенности можно свести к задаче системно согласованного раскрытия множества **разнородных неопределенностей на основе единых принципов, приемов и критериев.**

Это множество содержит неопределенности целей разработки, перспектив конкурентоспособности изделия, изменения рынков спроса и сбыта, активного противодействия конкурентов, а также ситуационную неопределенность рисков в процессе разработки, производства, сбыта и эксплуатации изделия.

## ***Выбор класса и структуры приближающих функций***

- выбор класса и структуры приближающих функций при формировании функциональных зависимостей;
- выбор критериев, принципов, подходов и методов построения приближающих функций;
- нахождение приближающих функций в принятом классе, которые обеспечивают их наилучшее приближение по принятому критерию.

# ***Задача выбора класса и структуры приближающих функций***

Необходимость выбора рационального компромисса между противоречивыми требованиями:

**максимизации уровня достоверности**

процедуры выявления искомой закономерности, что ведет к необходимости повышения сложности класса приближающих функций, и требованием

**минимизации сложности** и трудоемкости

процедуры формирования искомой функциональной зависимости, что обуславливает необходимость упрощения приближающих функций.



# ***Задача формирования приближающих функций***

## **Математическая постановка задачи**

Пусть вектор  $y = (y_i | i = \overline{1, m})$ ,  $y_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$  определяет требуемые или желательные значения искомых функций, которые количественно характеризуют основные свойства объекта.

$x_1$  – образует показатели проектных решений ЛПР, в частности, для технического изделия это его конструктивные, технические, технологические и другие показатели;

$x_2$  – образует контролируемые показатели внешнего воздействия, в частности, показатели статической, динамической нагрузки и другие;

$x_3$  – образует показатели случайных и неуправляемых факторов внешнего воздействия



# ***Математическая постановка задачи***

Исходная информация задана в виде дискретного массива

$$M_0 = \langle Y_0, X_1, X_2, X_3 \rangle,$$

$$Y_0 = (Y_i \mid i = \overline{1, m}), Y_i = (Y_i[q_0] \mid q_0 = \overline{1, k_0}),$$

$$X_1 = (X_{1j_1} \mid j_1 = \overline{1, n_1}), X_{1j_1} = (X_{1j_1}[q_1] \mid q_1 = \overline{1, k_1}),$$

$$X_2 = (X_{2j_2} \mid j_2 = \overline{1, n_2}), X_{2j_2} = (X_{2j_2}[q_2] \mid q_2 = \overline{1, k_2}), X_3 = (X_{3j_3} \mid j_3 = \overline{1, n_3}),$$

$$X_{3j_3} = (X_{3j_3}[q_3] \mid q_3 = \overline{1, k_3}),$$

# Математическая постановка задачи

Множество  $Y_0$  определяет численные значения  $Y_i[q_0] \Rightarrow \langle X_{1j_1}[q_1], X_{2j_2}[q_2], X_{3j_3}[q_3] \rangle$  искомых непрерывных функций

$$y_i = f_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = \overline{1, m};$$

$$x_1 = (x_{1j_1} \mid j_1 = \overline{1, n_1}), x_2 = (x_{2j_2} \mid j_2 = \overline{1, n_2}), x_3 = (x_{3j_3} \mid j_3 = \overline{1, n_3})$$

Каждому значению  $q_0 \in [1, k_0]$  соответствует определенный набор  $q_0 \Leftrightarrow \langle q_1, q_2, q_3 \rangle$  значений  $q_1 \in [1, k_1]$ ,  $q_2 \in [1, k_2]$ ,  $q_3 \in [1, k_3]$ .

Множество  $Y_0$  состоит из  $k_0$  различных значений  $Y_i[q_0]$ .

# Математическая постановка задачи

В множествах  $X_1, X_2, X_3$  определенная часть величин  $X_{1j_1}[q_1], X_{2j_2}[q_2], X_{3j_3}[q_3]$  при некоторых значениях  $q_1 = \hat{q}_1 \in \hat{Q}_1 \subset [1, k_1], q_2 = \hat{q}_2 \in \hat{Q}_2 \subset [1, k_2], q_3 = \hat{q}_3 \in \hat{Q}_3 \subset [1, k_3]$  раздельно повторяется, но для различных  $q_0 \in [1, k_0]$  не существует полностью совпадающих наборов  $\langle X_{1j_1}[q_1], X_{2j_2}[q_2], X_{3j_3}[q_3] \rangle$ . Здесь  $n_1 + n_2 + n_3 = n_0, n_0 \leq k_0$ . Известно, что  $x_1 \in D_1, x_2 \in D_2, x_3 \in D_3, X_1 \in \hat{D}_1, X_2 \in \hat{D}_2, X_3 \in \hat{D}_3$  где

$$D_s = \langle x_{sj_s} \mid d_{sj_s}^- \leq x_{sj_s} \leq d_{sj_s}^+, j_s = \overline{1, n_s} \rangle, \quad s = \overline{1, 3}$$

$$\hat{D}_s = \langle X_{sj_s} \mid \hat{d}_{sj_s}^- \leq X_{sj_s} \leq \hat{d}_{sj_s}^+, j_s = \overline{1, n_s} \rangle, \quad s = \overline{1, 3}$$

$$d_{sj_s}^- \leq \hat{d}_{sj_s}^-, \quad d_{sj_s}^+ \geq \hat{d}_{sj_s}^+.$$



# ***Математическая постановка задачи***

**Требуется** найти такие приближающие функции  $\Phi_i(x_1, x_2, x_3), i = \overline{1, m}$ , которые с практически приемлемой погрешностью характеризуют истинные функциональные зависимости  $y_i = f_i(x_1, x_2, x_3), i = \overline{1, m}$ , на множестве  $D_s$ .

$\bar{y}$  – определяет внешние параметры изделия, которые характеризуют технические, эксплуатационные, экономические и другие показатели качества;

$\bar{x}_1$  – компонентами вектора являются внутренние параметры изделия, изменяемые Разработчиком;

$\bar{x}_2$  – компонентами вектора являются контролируемые параметры, задаваемые Заказчиком;

$\bar{x}_3$  – компонентами вектора являются неконтролируемые параметры внешнего воздействия (показатели внешней среды) .



# ***Формирование приближающих функций в виде иерархической многоуровневой системы моделей***

**На верхнем уровне** реализуется модель, определяющая зависимость приближающих функций от переменных  $x_1, x_2, x_3$ . Искомые функции формируются в классе аддитивных функций и представляются в виде суперпозиции функций от переменных  $x_1, x_2, x_3$ .

$$\Phi_i(x_1, x_2, x_3) = c_{i1}\Phi_{i1}(x_1) + c_{i2}\Phi_{i2}(x_2) + c_{i3}\Phi_{i3}(x_3), i = \overline{1, m}. \quad (1)$$

# **Формирование приближающих функций в виде иерархической многоуровневой системы моделей**

**На втором иерархическом уровне** формируются модели, которые определяют раздельно зависимость приближающих функций от соответственно компонентов переменных  $x_1, x_2, x_3$ .

$$\begin{aligned}\Phi_{i1}(x_1) &= \sum_{j_1=1}^{n_1} a_{ij_1}^{(1)} \Psi_{1j_1}(x_{1j_1}), \Phi_{i2}(x_2) = \sum_{j_2=1}^{n_2} a_{ij_2}^{(2)} \Psi_{2j_2}(x_{2j_2}), \\ \Phi_{i3}(x_3) &= \sum_{j_3=1}^{n_3} a_{ij_3}^{(3)} \Psi_{3j_3}(x_{3j_3}).\end{aligned}\tag{2}$$

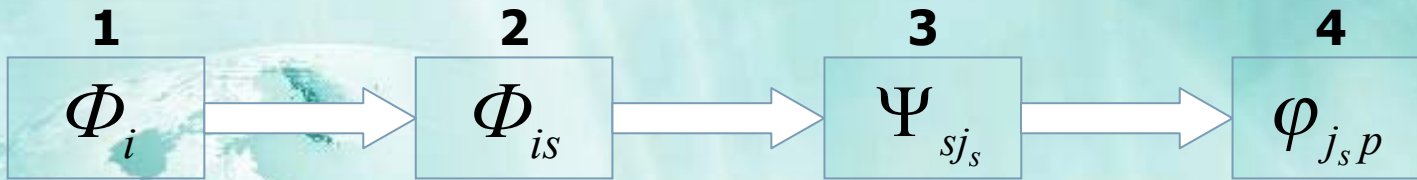
Предлагается для всех  $i = \overline{1, m}$  по каждой переменной  $x_{1j_1}, x_{2j_2}, x_{3j_3}$  выбирать соответственно однотипные функции  $\Psi_{1j_1}, \Psi_{2j_2}, \Psi_{3j_3}$ , что позволяет упростить дальнейшее решение задачи

# ***Формирование приближающих функций в виде иерархической многоуровневой системы моделей***

**На третьем иерархическом уровне** формируются модели, которые определяют функции  $\Psi_{1j_1}, \Psi_{2j_2}, \Psi_{3j_3}$ . Здесь важнейшей задачей является выбор структуры и компонентов функций  $\Psi_{1j_1}, \Psi_{2j_2}, \Psi_{3j_3}$ . Структуры этих функций выбираем аналогично (2). Представим функции в виде следующих обобщенных полиномов

$$\Psi_{s j_s}(x_{s j_s}) = \sum_{p=0}^{P_{j_s}} \lambda_{j_s p} \phi_{j_s p}(x_{s j_s}). \quad (3)$$

# Формирование многоуровневой системы моделей



$$\Phi_i(x_1, x_2, x_3) = c_{i1} \Phi_{i1}(x_1) + c_{i2} \Phi_{i2}(x_2) + c_{i3} \Phi_{i3}(x_3) \quad i = \overline{1, m}$$

$$\Phi_{i1}(x_1) = \sum_{j_1=1}^{n_1} a_{ij_1}^{(1)} \Psi_{1j_1}(x_{j_1})$$

$$\Phi_{i2}(x_2) = \sum_{j_2=1}^{n_2} a_{ij_2}^{(2)} \Psi_{2j_2}(x_{j_2})$$

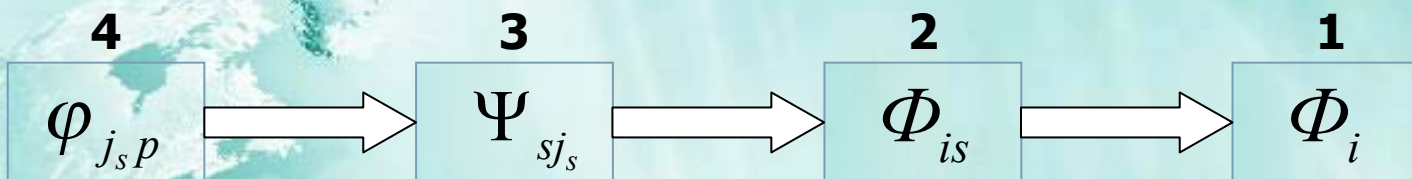
$$\Phi_{i3}(x_3) = \sum_{j_3=1}^{n_3} a_{ij_3}^{(3)} \Psi_{3j_3}(x_{j_3})$$

$$\Psi_{sj_s}(x_{j_s}) = \sum_{p=0}^{p_{j_s}} \lambda_{j_s p} \varphi_{j_s p}(x_{j_s}) \quad x_s = (x_{j_s} | j_s = \overline{1, n_s}), \quad s = 1, 2, 3$$



# Реализация системы моделей

Последовательность формирования системы моделей:



Выбор полинома:

$$\varphi_{j_s p}(x_{j_s}) \Rightarrow T_{j_s p}^*(x_{j_s})$$

Определение функций

:

$$\Psi_1, \quad \Psi_2, \quad \Psi_3$$

# Задача формирования функций $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$

сводится к **чебышевской задаче приближения** для следующей системы уравнений:

$$F_{i1}(\hat{X}[q_0]) - b_{q_0} = 0, \quad q_0 = \overline{1, k_0} \quad (4)$$

$$F_{i1}(\hat{X}[q_0]) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{p_1=0}^{P_{j_1}} \lambda_{j_1 p_1} T_{p_1}^*(\hat{X}_{1j_1}[q_1]) + \sum_{j_2=1}^{n_2} \sum_{p_2=0}^{P_{j_2}} \lambda_{j_2 p_2} T_{p_2}^*(\hat{X}_{2j_2}[q_2]) + \\ + \sum_{j_3=1}^{n_3} \sum_{p_3=0}^{P_{j_3}} \lambda_{j_3 p_3} T_{p_3}^*(\hat{X}_{3j_3}[q_3])$$

$$\hat{X}[q_0] = (\hat{X}_{1j_1}[q_1], \hat{X}_{2j_2}[q_2], \hat{X}_{3j_3}[q_3]) \quad | q_0 \Leftrightarrow \langle q_1, q_2, q_3 \rangle$$

Здесь  $T_{p_1}^*, T_{p_2}^*, T_{p_3}^*$  — смещенные полиномы Чебышева

# **Задача формирования функций $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$**

$b_{q_0}$  – величина, определяемая соотношением

$$b_{q_0} = \{ \max_{i \in [1, m]} \hat{Y}_i [q_0] + \min_{i \in [1, m]} \hat{Y}_i [q_0] \} / 2, q_0 = \overline{1, k_0}$$

$\hat{X}_{1j_1} [q_1], \hat{X}_{2j_2} [q_2], \hat{X}_{3j_3} [q_3], \hat{Y}_i [q_0]$  – значения соответственно величин  $X_{1j_1} [q_1], X_{2j_2} [q_2], X_{3j_3} [q_3], Y_i [q_0]$  нормированных к отрезку  $[0, 1]$ .

# Задача выбора критериев

Решение системы состоит в определении таких матриц  $\|\lambda_{j_1 p_1}^0\|, \|\lambda_{j_2 p_2}^0\|, \|\lambda_{j_3 p_3}^0\|$ , которые с учетом максимальной невязки

$$\Delta_\lambda = \max_{q_0 \in [1, k_0]} |F_1(\hat{X}[q_0]) - b_{q_0}|, \quad (5)$$

принимаемой за меру чебышевского приближения системы (4), обеспечивают наилучшее приближение

$$\Delta_\lambda^0 = \min_{\|\lambda\|} \Delta_\lambda$$

При этом величина наилучшего приближения  $\Delta_\lambda^0$  и искомых матриц характеризуются соотношениями:

$$\Delta_\lambda^0 = \min_{\|\lambda\|} \max_{q_0 \in [1, k_0]} |F_1(\hat{X}[q_0]) - b_{q_0}|,$$

$$\lambda^0 = \text{Arg min}_{\|\lambda\|} \max_{q_0 \in [1, k_0]} |F_1(\hat{X}[q_0]) - b_{q_0}|.$$

Здесь

$$\|\lambda^0\| = \langle \|\lambda_{j_1 p_1}^0\|, \|\lambda_{j_2 p_2}^0\|, \|\lambda_{j_3 p_3}^0\| \rangle, \quad \|\lambda\| = \langle \|\lambda_{j_1 p_1}\|, \|\lambda_{j_2 p_2}\|, \|\lambda_{j_3 p_3}\| \rangle$$



# Задача формирования функций $\Phi_{is}$

В этой задаче полагаем, что  $\forall i \in [1, m]$  степень влияния функций  $\Phi_{i1}(x_1), \Phi_{i2}(x_2), \Phi_{i3}(x_3)$  на свойства соответствующей приближающей функции  $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$  одинакова. В результате задача состоит в определении матриц  $\|a_{ij1}^{(1)}\|, \|a_{ij2}^{(2)}\|, \|a_{ij3}^{(3)}\| \forall i \in [1, m]$  и сводится к чебышевской задаче приближения для следующих трех систем уравнений:

$$\begin{aligned} F_{i21}(\hat{X}_1[q_0]) - \hat{Y}_i[q_0] &= 0, & F_{i22}(\hat{X}_2[q_0]) - \hat{Y}_i[q_0] &= 0, \\ F_{i23}(\hat{X}_3[q_0]) - \hat{Y}_i[q_0] &= 0, & q_0 &= \overline{1, k_0} \end{aligned} \quad (6)$$

# Задача формирования функций $\Phi_{is}$

$$F_{i21}(\hat{X}_1[q_0]) = \sum_{j_1=1}^{n_1} a_{ij_1}^{(1)} \Psi_{1j_1}(\hat{X}_{1j_1}[q_1]), F_{i22}(\hat{X}_2[q_0]) = \sum_{j_2=1}^{n_2} a_{ij_2}^{(2)} \Psi_{2j_2}(\hat{X}_{2j_2}[q_2])$$

$$F_{i23}(\hat{X}_3[q_0]) = \sum_{j_3=1}^{n_3} a_{ij_3}^{(3)} \Psi_{3j_3}(\hat{X}_{3j_3}[q_3]).$$

Решение каждой системы состоит в определении соответственно таких матриц  $\|a_s^0\| = \|\hat{a}_{ij_s}^{(s)}\|$ ,  $s = \overline{1, 3}$ , которые для величины максимальной невязки

$$\Delta_{a_s} = \max_{q_0 \in [1, k_0]} |F_{i2s}(\hat{X}_s[q_0]) - \hat{Y}_i[q_0]|,$$

принимаемой за меру чебышевского приближения системы (5.6), обеспечивают наилучшее приближение

$$\Delta_s^0 = \min_{\|a_s\|} \Delta_{a_s}.$$

# Задача формирования функций $\Phi_{is}$

$$\Delta_1^0 = \min_{\|a_1\|} \max_{q_0 \in [1, k_0]} \left| F_{i21} \left( \hat{X}_1 [q_0] \right) - \hat{Y}_i [q_0] \right|,$$

$$\|a_1^0\| = \text{Arg} \min_{\|a_1\|} \max_{q_0 \in [1, k_0]} \left| F_{i21} \left( \hat{X}_1 [q_0] \right) - \hat{Y}_i [q_0] \right|,$$

$$\Delta_2^0 = \min_{\|a_2\|} \max_{q_0 \in [1, k_0]} \left| F_{i22} \left( \hat{X}_2 [q_0] \right) - \hat{Y}_i [q_0] \right|,$$

$$\|a_2^0\| = \text{Arg} \min_{\|a_2\|} \max_{q_0 \in [1, k_0]} \left| F_{i22} \left( \hat{X}_2 [q_0] \right) - \hat{Y}_i [q_0] \right|,$$

$$\Delta_3^0 = \min_{\|a_3\|} \max_{q_0 \in [1, k_0]} \left| F_{i23} \left( \hat{X}_3 [q_0] \right) - \hat{Y}_i [q_0] \right|,$$

$$\|a_3^0\| = \text{Arg} \min_{\|a_3\|} \max_{q_0 \in [1, k_0]} \left| F_{i23} \left( \hat{X}_3 [q_0] \right) - \hat{Y}_i [q_0] \right|,$$

# Задача формирования функций $\Phi_i$

Формирование каждой функции  $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$  является независимым, и потому  $\forall i \in [1, m]$  все процессы вычислений  $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$  могут выполняться одновременно и параллельно.

Решение задачи для  $\forall i \in [1, m]$  состоит в нахождении матриц  $\|c_{i1}\|$ ,  $\|c_{i2}\|$ ,  $\|c_{i3}\|$  и сводится к чебышевской задаче приближения для системы уравнений:

$$F_{i3}(\hat{X}[q_0]) - \hat{Y}_i[q_0] = 0, \quad q_0 = \overline{1, k_0}, i \in [1, m],$$

где

$$F_{i3}(\hat{X}[q_0]) = c_{i1}\Phi_{i1}(\hat{X}_1[q_1]) + c_{i2}\Phi_{i2}(\hat{X}_2[q_2]) + c_{i3}\Phi_{i3}(\hat{X}_3[q_3]),$$

$$q_0 \Leftrightarrow \langle q_1, q_2, q_3 \rangle.$$



# ***Чебышевский критерий оценивания качества решения***

$$\Delta_c^0 = \min_{\|c\|} \max_{i \in [1, m]} \left| F_{i3} \left( \hat{X}[q_0] \right) - \hat{Y}_i[q_0] \right|,$$

$$\|c^0\| = \text{Arg} \min_{\|c\|} \max_{i \in [1, m]} \left| F_{i3} \left( \hat{X}[q_0] \right) - \hat{Y}_i[q_0] \right|,$$

$$\|c^0\| = \langle \|c_{i1}^0\|, \|c_{i2}^0\|, \|c_{i3}^0\| \rangle, \|c\| = \langle \|c_{i1}\|, \|c_{i2}\|, \|c_{i3}\| \rangle.$$

# Иерархическая система приближающих функций

$$\Phi_i(x_1, x_2, x_3) = c_{i1}^0 \Phi_{i1}(x_1) + c_{i2}^0 \Phi_{i2}(x_2) + c_{i3}^0 \Phi_{i3}(x_3), i = \overline{1, m} \quad (7)$$

$$\Phi_{i1}(x_1) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \hat{a}_{ij_1}^{(1)} \Psi_{1j_1}(x_{1j_1}), \Phi_{i2}(x_2) = \sum_{j_2=1}^{n_2} \hat{a}_{ij_2}^{(2)} \Psi_{2j_2}(x_{2j_2}), \quad (8)$$

$$\Phi_{i3}(x_3) = \sum_{j_3=1}^{n_3} \hat{a}_{ij_3}^{(3)} \Psi_{3j_3}(x_{3j_3})$$

$$\Psi_{sj_s}(x_{j_s}) = \sum_{p_s=0}^{P_{j_s}} \lambda_{j_s p_s}^0 T_{p_s}^*(x_{sj_s}), s = \overline{1, 3} \quad (9)$$

## ***Постановка задачи***

Известно, что  $m$  целевых функций зависят от переменных  $x_1, x_2, x_3$ :

$$y_i = f_i(x_1, x_2, x_3); i = 1 \dots m.$$

Вид этих функций неизвестен, они учитывают 3 вида неопределенности: цели ( $x_1$ ), взаимодействия ( $x_2$ ) и ситуационную неопределенность ( $x_3$ ).

Заданы численные значения переменных ( $x_1, x_2, x_3$ ) и целевых функций в виде совокупности массивов.

## Постановка задачи

Например,

$q_0$	$x_1[q_1]$	$x_2[q_2]$	$x_3[q_3]$	$Y_1[q_1]$	$Y_2[q_2]$	$Y_3[q_3]$
1	1,5	2,5	0,7	23,535	27,93	53,146
2	3	2,0	0,7	35,16	28,68	65,52
...	...	...	...	...	...	...
$n$	0,3	0,2	0,07	3,516	2,868	6,552

**Примечание.** Векторы  $x_1, x_2, x_3$  могут рассматриваться как определенные значения регулируемых параметров в технических или экономических системах, а  $Y$  — значения некоторых зависимых показателей, полученные путем наблюдений, экспериментов или опроса мнения экспертов и т.п.  $q_0$  — номер выборки.

Требуется для каждой из целевых функций  $F_i$  определить вид аппроксимирующей функции  $\Phi_i$ .



## ***Решение задачи***

1. Нормирование всех исходных величин к интервалу  $[0; 1]$ .

Используем минимальные и максимальные значения каждой из переменных:

$$\hat{x}_{1j1} = \frac{x_{1j1} - d_{1j1}^-}{d_{1j1}^+ - d_{1j1}^-}; \quad \hat{x}_{1j1} \in [0,1]; \quad x_{1j1} \in D_{1j1}.$$

$$\hat{x}_{2j2} = \frac{x_{2j2} - d_{2j2}^-}{d_{2j2}^+ - d_{2j2}^-}; \quad \hat{x}_{2j2} \in [0,1]; \quad x_{2j2} \in D_{2j2}.$$

$$\hat{x}_{3j3} = \frac{\alpha_{j3} - d_{3j3}^-}{d_{3j3}^+ - d_{3j3}^-}; \quad \hat{x}_{3j3} \in [0,1]; \quad x_{3j3} \in D_{3j3}.$$

## Решение задачи

Для нашего примера (векторы  $x_1, x_2, x_3$  приняты одномерными)

$$\hat{x}_1[1] = \frac{x_1[1] - x_1^-}{x_1^+ - x_1^-}, \text{ где } x_1^+ = \max_q x_1; \quad x_1^- = \min_q x_1$$

$$x_1^+ = 3; \quad x_1^- = 0,3$$

$$\hat{x}_1[1] = \frac{x_1[1] - x_1^-}{x_1^+ - x_1^-} = \frac{1,5 - 0,3}{3 - 0,3} \cong 0,444$$

$$\hat{x}_2[1] = \frac{x_2[1] - x_2^-}{x_2^+ - x_2^-} = \frac{2,5 - 0,2}{2,5 - 0,2} = 1$$

$$\hat{x}_3[1] = \frac{x_3[1] - x_3^-}{x_3^+ - x_3^-} = \frac{0,7 - 0,07}{0,7 - 0,07} = 1$$

## ***Решение задачи***

И аналогично для  $Y$ :

$$\hat{Y}_1[1] = \frac{Y_1[1] - Y_1^-}{Y_1^+ - Y_1^-} = \frac{23,535 - 3,516}{35,16 - 3,516} = 0,6326$$

$$\hat{Y}_2[1] = \frac{Y_2[1] - Y_2^-}{Y_2^+ - Y_2^-} = \frac{27,93 - 2,868}{28,68 - 2,868} = 0,971$$

$$\hat{Y}_3[1] = \frac{Y_3[1] - Y_3^-}{Y_3^+ - Y_3^-} = \frac{53,146 - 6,552}{65,52 - 6,552} = 0,79$$

## Решение задачи

2. Определение коэффициентов при полиномах Чебышева — матриц  $\|\lambda\|$ .

Для определения  $b_{q_0}$  величины, возможны следующие варианты:

$$b_{q_0} = \{ \max_{i \in [1, m]} \hat{Y}_i [q_0] + \min_{i \in [1, m]} \hat{Y}_i [q_0] \} / 2, q_0 = \overline{1, k_0}$$

- 1)  $b_{q_0}$  определяется средним арифметическим значением
- 2)  $b_{i q_0}$  принимаются равными нормированным значениям

Например, когда  $b_{q_0}$  определяется средним арифметическим значением, имеем

$$\hat{Y}_{cp}[1] = \frac{\max_i Y_i[1] + \min_i Y_i[1]}{2} = \frac{0,971 + 0,6326}{2} = 0,8018$$



## ***Решение задачи***

Смещенные полиномы Чебышева имеют вид

$$T_k^*(x) = T_k(2x - 1) \text{ (рекуррентная формула)}$$

$$T_0^* = 0,5$$

Получим:

$$T_1^*(x) = -1 + 2x$$

$$T_2^*(x) = 1 - 8x + 8x^2$$

$$T_3^*(x) = -1 + 18x - 48x^2 + 32x^3$$

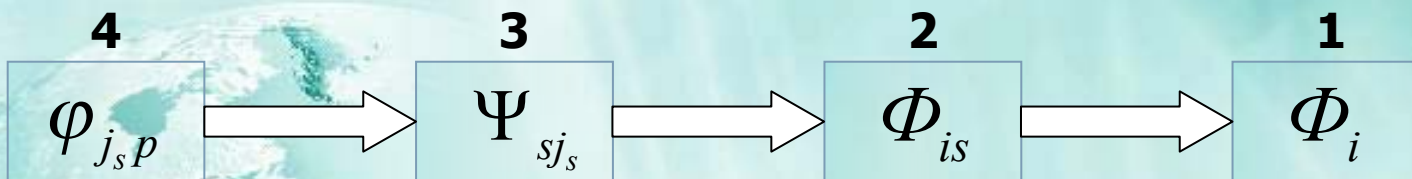
$$T_4^*(x) = 1 - 32x + 160x^2 - 256x^3 + 128x^4$$

$$T_5^*(x) = -1 + 50x - 400x^2 + 1120x^3 - 1280x^4 + 512x^5$$

$$T_6^*(x) = 1 - 72x + 840x^2 - 3584x^3 + 6912x^4 - 6144x^5 + 2048x^6$$

# Реализация системы моделей

Последовательность формирования системы моделей:



Выбор полинома:  $\varphi_{j_s p}(x_{j_s}) \Rightarrow T_{j_s p}^*(x_{j_s})$

Определение функций  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ :

$$\Psi_{1 j_1}(x_{j_1}), \Psi_{2 j_2}(x_{j_2}), \Psi_{3 j_3}(x_{j_3}) \Rightarrow \|\lambda_{j_1 p_1}\|, \|\lambda_{j_2 p_2}\|, \|\lambda_{j_3 p_3}\|$$

$$F_1(\hat{X}[q_0]) - b_{q_0} = 0, \quad q_0 = \overline{1, k_0}$$

$$F_1(\hat{X}[q_0]) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{p_1}^{p_{j_1}} \lambda_{j_1 p_1} T_{p_1}^*(\hat{X}_{j_1}[q_1]) + \sum_{j_2=1}^{n_2} \sum_{p_2}^{p_{j_2}} \lambda_{j_2 p_2} T_{p_2}^*(\hat{X}_{j_2}[q_2]) + \sum_{j_3=1}^{n_3} \sum_{p_3}^{p_{j_3}} \lambda_{j_3 p_3} T_{p_3}^*(\hat{X}_{j_3}[q_3])$$

Определение функций  $\Phi_i$ :

$$\Phi_i(x_1, x_2, x_3) \quad i = \overline{1, m} \Rightarrow \|c_{i1}\|, \|c_{i2}\|, \|c_{i3}\| \quad i = \overline{1, m}$$

$$F_{3i}(\hat{X}[q_0]) - \hat{Y}_i[q_0] = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

# Решение задачи

В общем случае для определения  $\|\lambda\|$  имеем систему уравнений:

(1-й способ)

$$\hat{Y}_{cp}(q) = \sum_{j1=1}^{n_1} \sum_{p1=0}^{P1} \lambda_{1j1p1} T_{p1}^*(\hat{x}_{1j1}[q_1]) + \sum_{j2=1}^{n_2} \sum_{p2=0}^{P2} \lambda_{2j2p2} T_{p2}^*(\hat{x}_{2j2}[q_2]) + \\ + \sum_{j3=1}^{n_3} \sum_{p3=0}^{P3} \lambda_{3j3p3} T_{p3}^*(\hat{x}_{3j3}[q_3])$$

$q = 1 \dots n$  (число уравнений)

## ***Решение задачи***

2-й способ: не единая система уравнений для  $\|\lambda\|$ , а отдельно решаются 3 системы для каждого  $\|\lambda_1\|$ ,  $\|\lambda_2\|$ ,  $\|\lambda_3\|$ , левая часть везде одинакова — средневзвешенные значения  $Y_i$ .

В условии задачи для конкретного варианта оговаривается, какой из двух способов следует использовать, но в программе следует предусмотреть оба!



## Решение задачи

3. Определение структуры векторов  $x_1, x_2, x_3$  — матриц  $\|a\|$ .

После определения матриц  $\|\lambda\|$  вычисляются значения функций  $\Psi$ :

$$\Psi_{1j1}(\hat{x}_{1j1}) = \sum_{p1=0}^{P1} \lambda_{1j1p1} T_{p1}^*(\hat{x}_{1j1})$$

$$\Psi_{2j2}(\hat{x}_{2j2}) = \sum_{p2=0}^{P2} \lambda_{2j2p2} T_{p2}^*(\hat{x}_{2j2})$$

$$\Psi_{3j3}(\hat{x}_{3j3}) = \sum_{p3=0}^{P3} \lambda_{3j3p3} T_{p3}^*(\hat{x}_{3j3})$$

## Решение задачи

Матрицы  $\|a\|$  определяются для каждой  $i$ -ой функции отдельно

$$\hat{Y}_i(q) = \sum_{j1=1}^{n_1} a_{1j1}^{(i)} \Psi_{1j1}(\hat{x}_{1j1}[q])$$

$$\hat{Y}_i(q) = \sum_{j2=1}^{n_2} a_{2j2}^{(i)} \Psi_{2j2}(\hat{x}_{2j2}[q])$$

$$\hat{Y}_i(q) = \sum_{j3=1}^{n_3} a_{3j3}^{(i)} \Psi_{3j3}(\hat{x}_{3j3}[q])$$

$q = 1 \dots n$  для всех трех систем уравнений, а число неизвестных определяется размерностями векторов  $x_1, x_2, x_3$ .

В левой части этих уравнений — нормированные табличные значения  $Y_i(q)$ .

## ***Решение задачи***

В рассматриваемом примере размерности =1 ( $x_{11} \equiv x_1$  и др.)

$$\hat{Y}_1(q) = a_{11}^1 \Psi_{11}(\hat{x}_{11}[q])$$

$$0,6326 = a_{11}^1 [0,5b_{110} + b_{111}(-1 + 2 * 0,444) + ...]$$

$$1 = a_{11}^1 [0,5b_{110} + b_{111}(-1 + 2 * 1) + ...]$$

...

$$0 = a_{11}^1 [0,5b_{110} + b_{111}(-1 + 2 * 0) + ...]$$

Аналогично — другие векторы.

## Решение задачи

4. Определение структуры векторов функций  $\Phi_i$  — матриц  $\|c\|$ .

После нахождения  $\|a\|$  вычисляются значения следующих функций ( $q = 1 \dots n$ ).

$$\Phi_{1i}(\hat{x}_1[q]) = \sum_{j_1=1}^{n_1} a_{1j_1}^{(i)} \Psi_{1j_1}(\hat{x}_{1j_1}[q])$$

$$\Phi_{2i}(\hat{x}_2[q]) = \sum_{j_2=1}^{n_2} a_{2j_2}^{(i)} \Psi_{2j_2}(\hat{x}_{2j_2}[q])$$

$$\Phi_{3i}(\hat{x}_3[q]) = \sum_{j_3=1}^{n_3} a_{3j_3}^{(i)} \Psi_{3j_3}(\hat{x}_{3j_3}[q])$$

**Замечание.** Функции  $\Psi$  для разных целевых функций остаются одинаковыми (в последних формулах отсутствует зависимость от  $i$ ).



## Решение задачи

И, наконец, уточняется вклад каждой функции  $\Phi_{1i}, \Phi_{2i}, \Phi_{3i}$  в функции  $\Phi_i$ :

$$\Phi_i(x_1, x_2, x_3) = C_{1i}\Phi_{1i}(x_1) + C_{2i}\Phi_{2i}(x_2) + C_{3i}\Phi_{3i}(x_3)$$

Матрицы  $\|c\|$  определяются для каждой  $i$ -ой функции отдельно.

Как и при определении  $\|a\|$ , в левой части уравнений берутся нормированные исходные значения  $Y_i(q)$ .

$$\hat{Y}_i(q) = C_{1i}\Phi_{1i}(\hat{x}_1[q]) + C_{2i}\Phi_{2i}(\hat{x}_2[q]) + C_{3i}\Phi_{3i}(\hat{x}_3[q])$$

В каждой из  $i$  систем уравнений будут три неизвестных коэффициента  $C$  и  $n(q = 1 \dots n)$  уравнений.

5. Пересчет коэффициентов полученных многочленов через обратные формулы нормирования

# Задание

В каждом из вариантов заданы:

- исходные таблицы данных;
- размерности векторов  $x_1, x_2, x_3$  —  $n_1, n_2, n_3$  ;
- количество выборок  $n$  (для расчета);
- количество целевых функций  $m$ ;
- веса целевых функций;
- метод решения несовместных систем уравнений, в которых число неизвестных не равно числу уравнений;

Наборы P1, P2, P3 — степени полинома Чебышева (Лежандра, Лагера, Эрмита и др.) для  $x_1, x_2, x_3$  — следует подобрать самостоятельно, исходя из критерия минимума максимального отклонения функций:  $10^{-6} \leq \Delta^0 \leq 10^{-3}$  .

# Задание

Требуется:

- 1) сформировать целевые функции и вывести на печать
  - значения всех промежуточных коэффициентов  $(\lambda, a, c)$  и функций  $(\Psi, \Phi)$ ;
  - вид полученных функций  $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$  через: 1)  $\Phi_{i1}(x_1), \Phi_{i2}(x_2), \Phi_{i3}(x_3)$ ; 2) полиномы Чебышева;
- 3) в форме обычных многочленов (целесообразно это предусмотреть в файле результатов) как в нормированном, так и в восстановленном виде;
  - построить графики исходных и полученных функций;
  - оценить погрешность восстановленных функций по  $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$  отношению к исходной заданной выборке.
- 4) сделать письменный отчет о выполненной работе, включив листинг программы.



## ***Раздел 4. Требования к программе***

1. Языки программирования: Pascal / Delphi , Turbo / Borland C/C++, Borland C++ Builder и др.
2. Учет всех вариантов задания и способов решения задач.

### 3. Основные элементы интерфейса:

Реализовать файловый ввод и вывод (\*.txt), предусмотрев диалоговые окна при нажатии на кнопки «Изменить», «Добавить» и др.:

- имя файла с таблицей переменных  $X$  вводится в окно «Файл исходных данных»;
- в следующее окно последовательно вводятся имена файлов, каждый из которых содержит лишь один столбец — это  $Y_i$  (число файлов совпадает с числом целевых функций), а также  $w_i$  — удельный вес функции, предусмотреть особую отметку для случая  $0,5*(\min+\max)$ ;



## ***Раздел 4. Требования к программе***

- окно для файла численных результатов;
- окно для графического представления результатов;
- окна для размерности векторов  $x_1, x_2, x_3, Y_i$ ;
- окна для выбора требуемой степени полиномов векторов  $x_1, x_2, x_3$ ;
- окна выбора различных видов полиномов: Чебышева, Лежандра, Лагера, Эрмита;
- окно для графического представления результатов используемых полиномов (по мере увеличения количества удерживаемых членов разложения);
- окно «размер выборки», предусматривающее возможность варьирования количества выборки;
- окно, позволяющее решать три системы уравнений для определения матриц  $\|\lambda_{j_1 p_1}^0\|, \|\lambda_{j_2 p_2}^0\|, \|\lambda_{j_3 p_3}^0\|$  отдельно или совместно.

## ***Раздел 4. Требования к программе***

5. Программа решения несовместных систем уравнений предоставляется дополнительно в отдельном исполняемом файле.
6. Все исходные файлы (годные к повторной компиляции в соответствующей оболочке!) вместе с исполняемым (\*.exe) сдаются на жестком носителе информации.

# Пример окна задания исходных данных и просмотра результатов

Входные данные

Размер выборки

☐ Контрольный пример

Файл исходных данных  
 ...

Файл результатов  
 ...

Векторы

Размерность X1

Размерность X2

Размерность X3

Размерность Y

Полиномы

Вид полиномов

☒ Полиномы Чебышева

☐ Полиномы Лежандра

☐ Полиномы Лаггера

☐ Полиномы Эрмита

Степени полиномов

Для X1

Для X2

Для X3

Дополнительно

Веса целевых функций

☐ Среднее арифметическое

☒ Через максимум и минимум

☒ Определять матрицы "лямбда" в 3-х системах

График

☒ График по выборке

☐ График по координатам

Выполнить

График ...

Результаты:

0.3921 0.2171 0.2401  
0.3376 0.2038 0.2286  
||c4||  
0.6455 -0.0771 0.4824  
Ф4= 0.6455\*Ф14+ -0.0771\*Ф24+ 0.4824\*Ф34  
Полученные функции через полиномы Чебышева  
Ф1+= 0.2961\*T0(x11)+ 0.0621\*T1(x11)+ -0.0058\*T2(x11)+ -0.0024\*T3(x11)+ 0.2851\*T0(x12)+ 0.1783\*T1(x12)+ 0.0222\*T2(x12)+ 0.0000\*T3(x12)+  
Ф2+= 0.3133\*T0(x11)+ 0.0657\*T1(x11)+ -0.0061\*T2(x11)+ -0.0025\*T3(x11)+ 0.3204\*T0(x12)+ 0.2004\*T1(x12)+ 0.0250\*T2(x12)+ 0.0000\*T3(x12)+  
Ф3+= 0.3210\*T0(x11)+ 0.0674\*T1(x11)+ -0.0063\*T2(x11)+ -0.0026\*T3(x11)+ 0.3355\*T0(x12)+ 0.2099\*T1(x12)+ 0.0262\*T2(x12)+ 0.0000\*T3(x12)+  
Ф4+= 0.3199\*T0(x11)+ 0.0671\*T1(x11)+ -0.0062\*T2(x11)+ -0.0026\*T3(x11)+ 0.3301\*T0(x12)+ 0.2065\*T1(x12)+ 0.0257\*T2(x12)+ 0.0000\*T3(x12)+  
Полученные функции в виде многочленов (в нормированном виде)  
Y1+= 0.1276\*x11^1+ 0.0682\*x11^2+ -0.0762\*x11^3+ -0.3286\*x12^1+ 0.4956\*x12^2+ 0.4828\*x12^3+ 0.0107\*x21^1+ -0.0232\*x21^2+ 0.00  
Y2+= 0.1350\*x11^1+ 0.0722\*x11^2+ -0.0807\*x11^3+ -0.3776\*x12^1+ 0.5480\*x12^2+ 0.5575\*x12^3+ 0.0091\*x21^1+ -0.0196\*x21^2+ 0.00  
Y3+= 0.1383\*x11^1+ 0.0739\*x11^2+ -0.0827\*x11^3+ -0.3985\*x12^1+ 0.5706\*x12^2+ 0.5894\*x12^3+ 0.0091\*x21^1+ -0.0197\*x21^2+ 0.00  
Y4+= 0.1378\*x11^1+ 0.0737\*x11^2+ -0.0824\*x11^3+ -0.3903\*x12^1+ 0.5632\*x12^2+ 0.5767\*x12^3+ 0.0106\*x21^1+ -0.0229\*x21^2+ 0.00  
Полученные функции в виде многочленов (в восстановленном виде)  
Y1+= 0.5903\*x11^1+ 0.3156\*x11^2+ -0.3529\*x11^3+ 0.6210\*x12^1+ 4.5835\*x12^2+ -1.6060\*x12^3+ 0.0496\*x21^1+ -0.1073\*x21^2+ 0.00  
Y2+= 0.6758\*x11^1+ 0.3612\*x11^2+ -0.4039\*x11^3+ 0.8172\*x12^1+ 5.6378\*x12^2+ -2.0638\*x12^3+ 0.0455\*x21^1+ -0.0983\*x21^2+ 0.00  
Y3+= 0.5004\*x11^1+ 0.2675\*x11^2+ -0.2991\*x11^3+ -0.1316\*x12^1+ 3.4652\*x12^2+ -0.2170\*x12^3+ 0.0330\*x21^1+ -0.0713\*x21^2+ 0.00  
Y4+= 0.4754\*x11^1+ 0.2541\*x11^2+ -0.2842\*x11^3+ -0.1818\*x12^1+ 3.1880\*x12^2+ -0.0989\*x12^3+ 0.0366\*x21^1+ -0.0791\*x21^2+ 0.00

Quantity of objective functions: 4 Range: 45

Variable's dimensions: X1: 2 X2: 2 X3: 3

Standard Values:

Load from files:

File that contains samples of variables X1, X2, X3: Files\_\txt\inp\_X.txt Browse

Files that hold data about objective functions Y1

Name of objective function	File path on the hard drive *
Y1	Files_\txt\inp_Y1.txt
Y2	Files_\txt\inp_Y2.txt
Y3	Files_\txt\inp_Y3.txt
Y4	Files_\txt\inp_Y4.txt

\*: to open dialog window, just double-click on the necessary cell

File output data: output.html Browse

Output to file

\* to refresh values after some changings just reopen TabSheet

N	(max+min)/2	(max-min)/2	(max-min)
1	0.10883917855457	0.07038362236022	0.14076724472045
2	0.07569245774790	0.01783152382789	0.03566304765578
3	0.07755042597185	0.02008569400437	0.04017138800875
4	0.09035563078109	0.04283874254178	0.08567748508357
5	0.10090546862664	0.07656625247642	0.15313250495285
6	0.10817644623366	0.10817644623366	0.21635289246732
7	0.12780324220084	0.11401391619619	0.22802783239238
8	0.16582485304519	0.13858893225133	0.27717786450267
9	0.22682351307670	0.13819386138130	0.27638772276261
10	0.27249997453219	0.11424783972906	0.22849567945812
11	0.37646039508833	0.12447618112062	0.24895236224124
12	0.33995355483013	0.16534641448970	0.33069282897941
13	0.41322993494413	0.11707493074808	0.23414986149616
14	0.49342498554702	0.17753652613577	0.35507305227155
15	0.49823407539459	0.30347925870102	0.60695851740205
16	0.54183423839153	0.4125666639015	0.82513333278030

Now selected weight:

☒ (max + min) / 2  
☐ (max - min) / 2  
☐ max - min

X Y X normalized Y normalized Function weights Coefficients A Coefficients C

Delete Row

Weight selection:

☒ (max + min) / 2  
☐ (max - min) / 2  
☐ max - min

Lambda equations:

☐ in common  
☒ separately

Degree of polynomials:

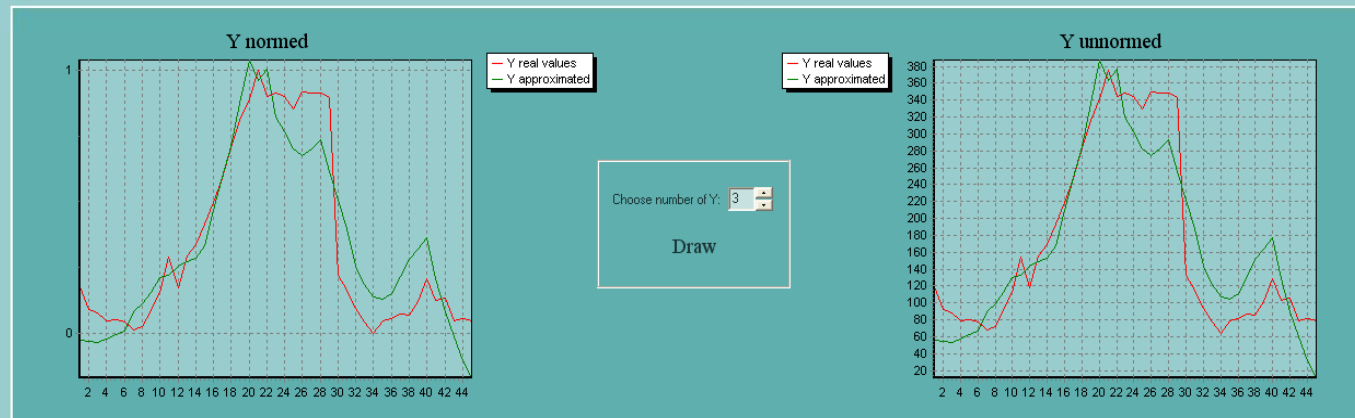
X1: 2 X2: 2 X3: 2

Method of Simplex precision: 0.0001

Go

Polynomials:

☒ Chebishev's polynomial  
☐ Lejand's polynomial  
☐ Lagger's polynomial  
☐ Ermit's polynomial





Quantity of objective functions:  Range:

Variable's dimensions X1:  X2:  X3:

File with samples of X1, X2, X3  
Files\_Lab3.txt\inp\_X.txt

Files that hold data about objective functions Y1  

Name of objective function	File path on the hard drive *
Y1	Files_Lab3.txt\inp_Y1.txt
Y2	Files_Lab3.txt\inp_Y2.txt
Y3	Files_Lab3.txt\inp_Y3.txt
Y4	Files_Lab3.txt\inp_Y4.txt

\* to open dialog window, just double-click on the cell

Output data file:  
output.html

N	X11	X12	X21	X22	X31	X32	X33
1	5.05	8.65	7.75	6.975	4.879	3.501	5.967
2	5.052	8.7	7.78	6.955	4.886	3.553	5.978
3	5.055	8.745	7.80	6.95	4.897	3.611	5.984
4	5.06	8.75	7.82	6.945	4.916	3.652	5.987
5	5.063	9.8	7.845	6.925	4.938	3.723	5.996
6	5.064	10.25	7.851	6.895	4.947	3.758	5.999
7	5.067	11.85	7.852	6.865	4.954	3.784	5.976
8	5.07	12.87	7.853	6.854	4.967	3.809	5.964
9	5.075	14.90	8.854	6.856	4.978	3.825	5.958
10	5.08	16.91	8.855	6.855	4.984	3.845	5.937
11	5.085	18.92	9.856	6.856	4.987	3.851	5.916
12	5.09	15.92	10.86	6.865	4.996	3.8534	5.874
13	5.095	12.93	11.85	7.859	4.999	3.8536	5.842
14	5.1	11.93	12.87	7.876	4.976	3.854	5.814
15	5.125	9.935	11.89	7.895	4.964	3.856	5.756
16	5.135	8.941	9.925	7.925	4.958	3.859	5.718

Polynomial powers:

X1:  X2:  X3:

Polynomials:

☒ Chebishev's polynomial  
☐ Legendr's polynomial  
☐ Lagger's polynomial  
☐ Ermit's polynomial  
☐ Chebishev's 2 sort polynomial  
☐ C-type polynomial  
☐ S-type polynomial

☒ Displaced polynomial

Weight selection:

☒ (max + min) / 2  
☐ (max - min) / 2  
☐ max - min  
☐ average

Lambda equations:  
☐ in common  
☒ separately

Fill lambdas, A and C with:

☒ Zeros  
☐ Random numbers

Norm:

Method of Simplex:

Precision:

☐ Show discrepancies

Choose number of Y:

# Пример окна задания исходных данных и просмотра результатов

**Sysan** [min] [max] [close]

File Help

Parameters

Polynomial dim's

P1

P2

P3

Sample dimension (not more than)

Precision

Weights

☒ Average

☐ (max+min)/2

VIEW

Lambda seek method

☐ 1 equations set

☒ 3 equations set

☐ Half sample

Polynomial type

Delta minus = 1.294721e-002

Delta plus = 2.384852e-001

Chebyshev T

Input monitor

Variable dim's

X1: 2

X2: 2

X3: 3

Criterion function quantity

Graphics

267.52

224.52

181.53

138.53

95.53

52.53

10 20 30 40

Criterion function

push

Load from:

push

Save to:

Process !

Cancel

# Пример окна задания исходных данных и просмотра результатов

Введите кол-во выборок

Введите кол-во параметров

Вид полинома

Вектор X

	Введите размерность	Введите степень полинома
x1	2	2
x2	2	2
x3	3	2

Выборка X

	x11	x12	x21	x22	x31	x32
1	5,05	2,015	7,05	8,015	10	1
2	5,15	2,1	7,15	9,109	15,8	2,1
3	5,2	2,125	7,192	9,125	22,5	2,5
4	5,25	2,175	7,25	9,175	25	3,51
5	5,325	2,2	7,325	9,198	32,5	4,2

Выберите файл входных данных

Выберите файлы значений целевых функций

Кол-во целевых функций

Веса целевых функций

- ☐ Среднее арифметическое
- ☒ Учитывать минимальное и максимальное значение

☒ Определять Lambda из 3 систем уравнений

Выборка Y

	y1	y2	y3	y4
1	254,621	98,145	119,406	117,683
2	198,163	73,368	92,651	90,123
3	187,411	71,084	87,691	83,576
4	167,197	63,567	78,793	74,789
5	166,547	63,813	79,497	74,316

Y\_norm  
0.21141 0.17680 0.17922 0.11251  
0.12834 0.08076 0.09352 0.04340  
0.11253 0.07190 0.07764 0.02698  
0.08279 0.04277 0.04914 0.00495  
0.08183 0.04372 0.05139 0.00376  
0.06306 0.03428 0.04365 0.00000  
0.00000 0.01180 0.01379 0.01156  
0.05952 0.03061 0.02724 0.04188  
0.11246 0.09206 0.08863 0.12177  
0.18419 0.15940 0.15825 0.19148  
0.26690 0.25618 0.28912 0.27916  
0.26099 0.23951 0.17461 0.26666  
0.31780 0.29611 0.29616 0.32204  
0.39164 0.37266 0.33923 0.38284  
0.43313 0.41411 0.41471 0.42169  
0.51119 0.49628 0.49679 0.50914

По всей выборке

По нечетным значениям

Xnorm Ynorm Lambda A C psi psi(T) psi(x) Fi(Psi) F(T) F(x)

## ***Постановка задачи:***

Построить по заданной дискретной выборке приближающие функции  $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$ ,  $i = 1, m$  (аналитические и графически представленные функциональные зависимости), которые с практически приемлемой погрешностью в смысле Чебышевского приближения характеризуют истинные функциональные зависимости  $y_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$ ,  $i = 1, m$ .

Предложить свой вариант дискретной выборки  $X_j$  и  $Y_i$  и построить приближающие функции  $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$ ,  $i = 1, m$ .



## ***Постановка задачи:***

Исходные данные:  $X_1[X_{11}, X_{12}], X_2[X_{21}, X_{22}], X_3[X_{31}, X_{32}, X_{33}]$   
и  $Y_i[X_1, X_2, X_3], i = 1, 4$

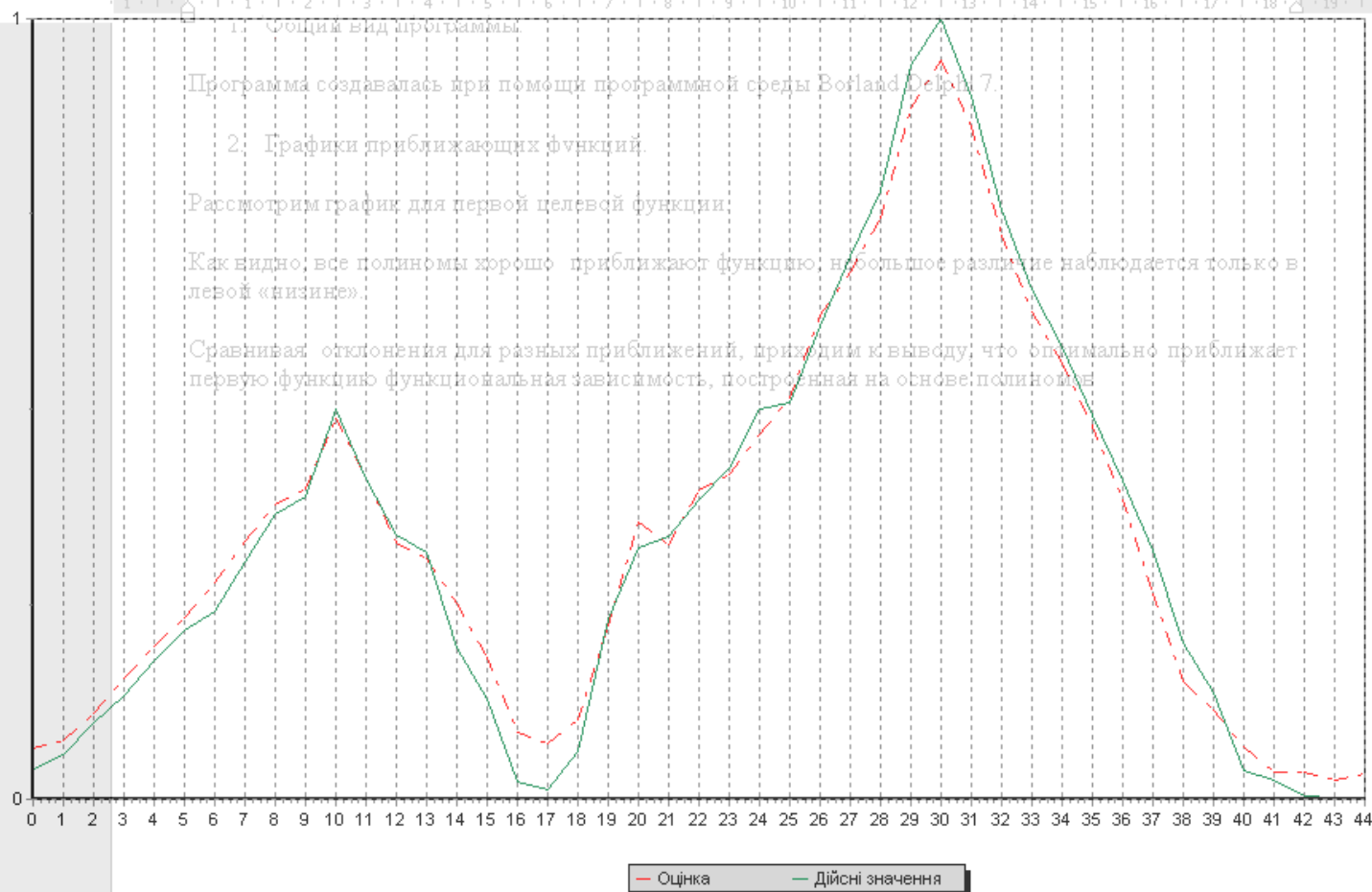
$q_0$	$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{21}$	$X_{22}$	$X_{31}$	$X_{32}$	$X_{33}$
1	6,050	12,015	1,050	9,015	10,000	1,000	6,100
2	8,150	10,100	1,150	9,109	15,800	2,100	4,200
3	10,200	8,125	1,192	9,125	22,500	2,500	3,500
4	12,250	6,175	2,250	9,175	25,700	3,510	2,720
5	14,325	5,200	4,325	9,198	32,500	4,200	2,530
6	16,350	4,250	6,350	9,251	35,000	5,020	2,100
7	18,490	3,400	8,411	9,495	40,700	8,200	1,150
8	20,698	2,500	10,505	10,498	51,800	10,100	0,720
...	...	...	...	...	...	...	...
41	5,950	10,110	7,950	3,115	58,600	2,720	12,850
42	5,020	8,115	9,995	1,115	35,800	2,340	10,340
43	4,050	6,128	11,950	2,120	15,260	2,160	8,680
44	5,935	4,131	13,935	4,130	9,520	1,760	5,320
45	6,925	2,135	15,925	6,135	4,800	1,480	2,160

## Постановка задачи:

$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
254,621	58,145	119,406	117,683
298,163	73,368	92,651	90,123
387,411	71,084	87,691	83,576
467,197	83,567	78,793	74,789
566,547	93,813	79,497	54,316
...	...	...	...
616,829	8,475	101,985	109,463
473,329	10,924	128,591	233,415
249,421	24,183	102,861	308,613
225,356	46,324	105,817	207,319
176,578	76,457	78,473	182,263
170,948	95,814	81,417	84,132
168,334	104,549	78,653	61,953

$b_{q_0}$  определяется средним арифметическим значением

$$b_{q_0} = \{ \max_{i \in [1, m]} \hat{Y}_i[q_0] + \min_{i \in [1, m]} \hat{Y}_i[q_0] \} / 2, q_0 = \overline{1, k_0}$$



**Поліном**

Степені

x1 2

x2 2

x3 3

Вид Чебышева

**Розрахунок**

☐ лямбда (три системи)

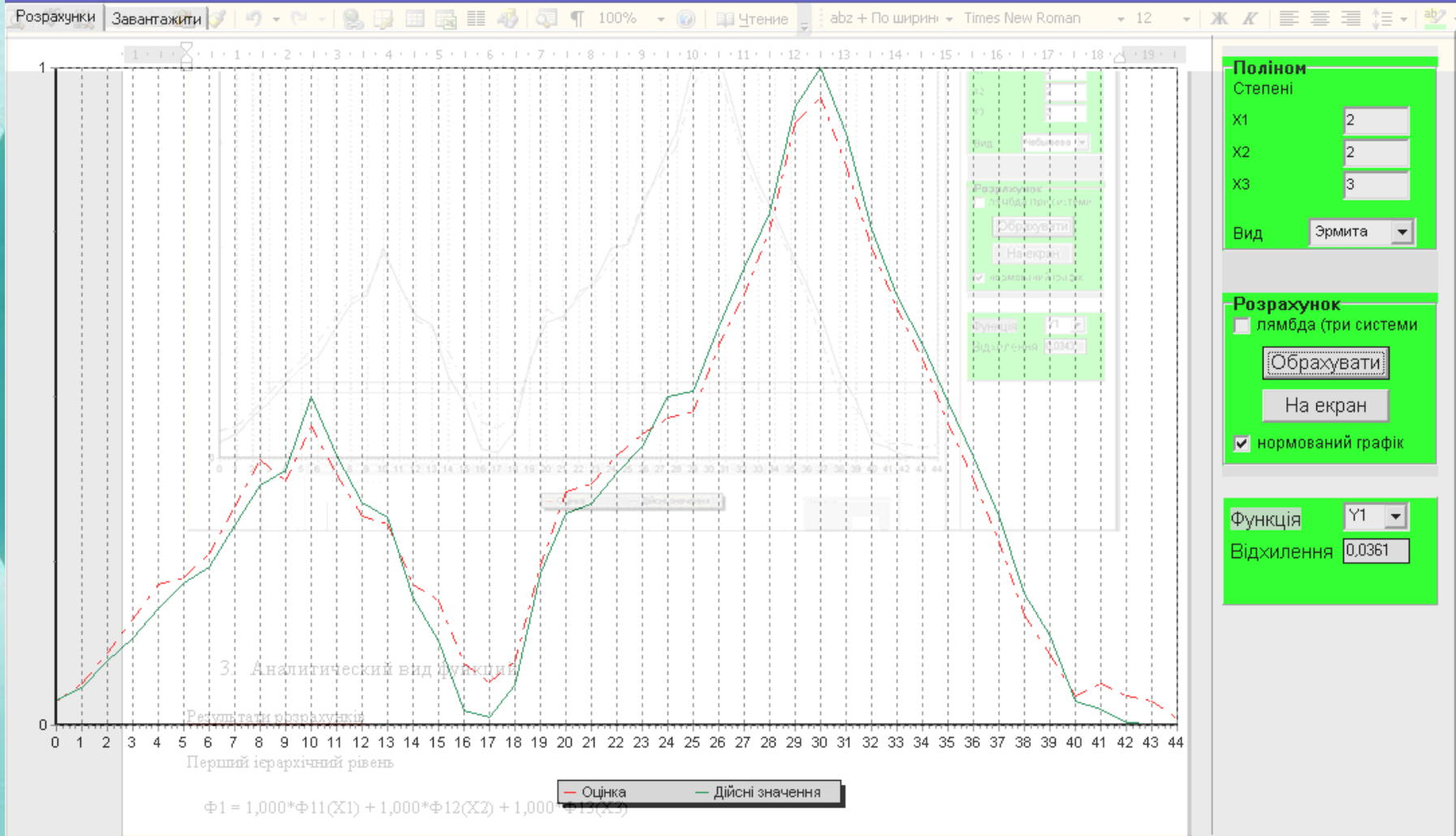
Обрахувати

На екран

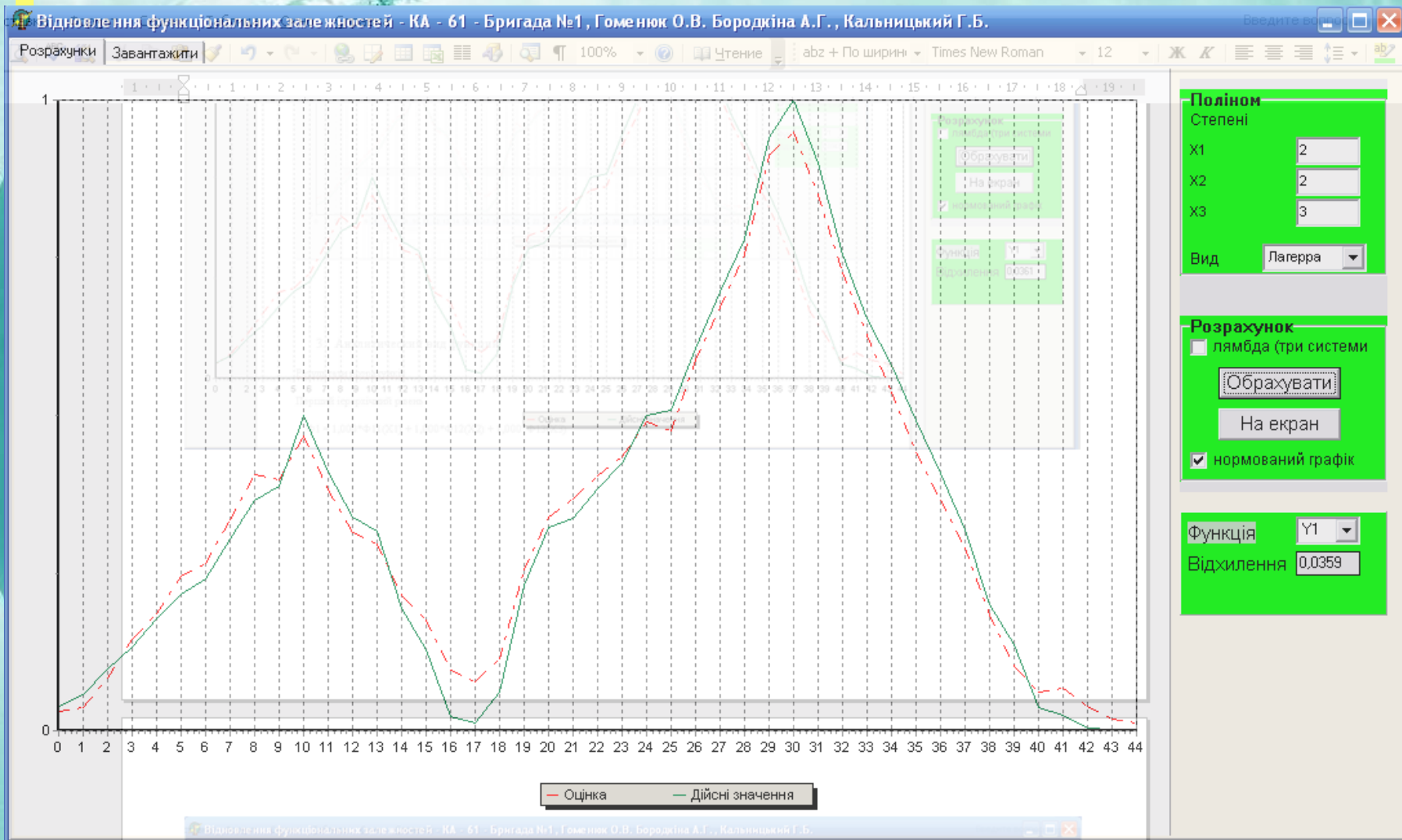
☒ нормований графік

Функція Y1

Відхилення 0,0343





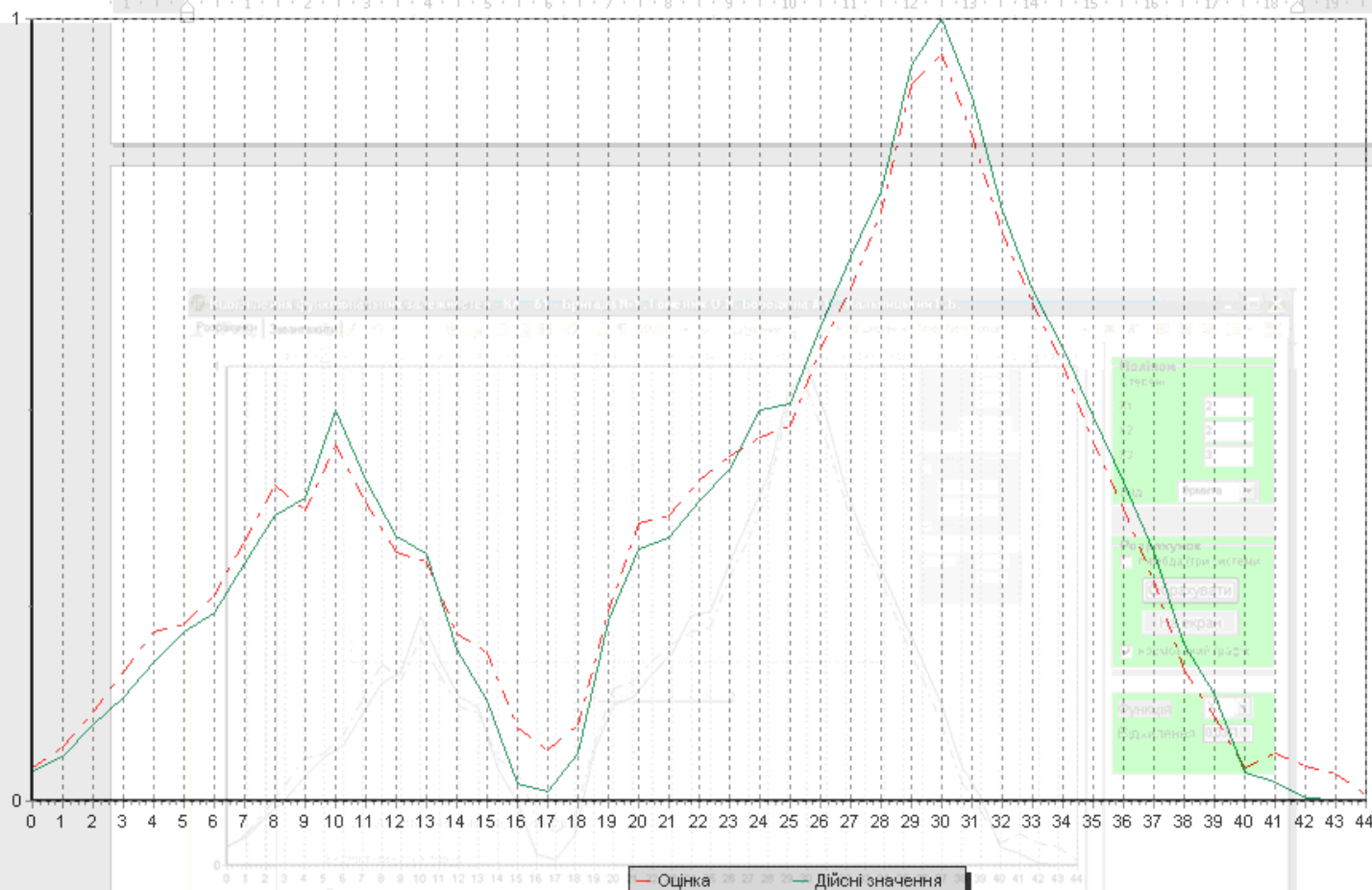


Відновлення функціональних залежностей - КА - 61 - Бригада №1, Гоменюк О.В. Бородкіна А.Г., Кальницький Г.Б.

Розрахунки

Завантажити

100% Чтение abz + По ширині Times New Roman 12 Ж К



Поліном  
Степені

x1 2

x2 2

x3 3

Вид Лежандра

Розрахунок

☐ лямбда (три системи)

Обрахувати

На екран

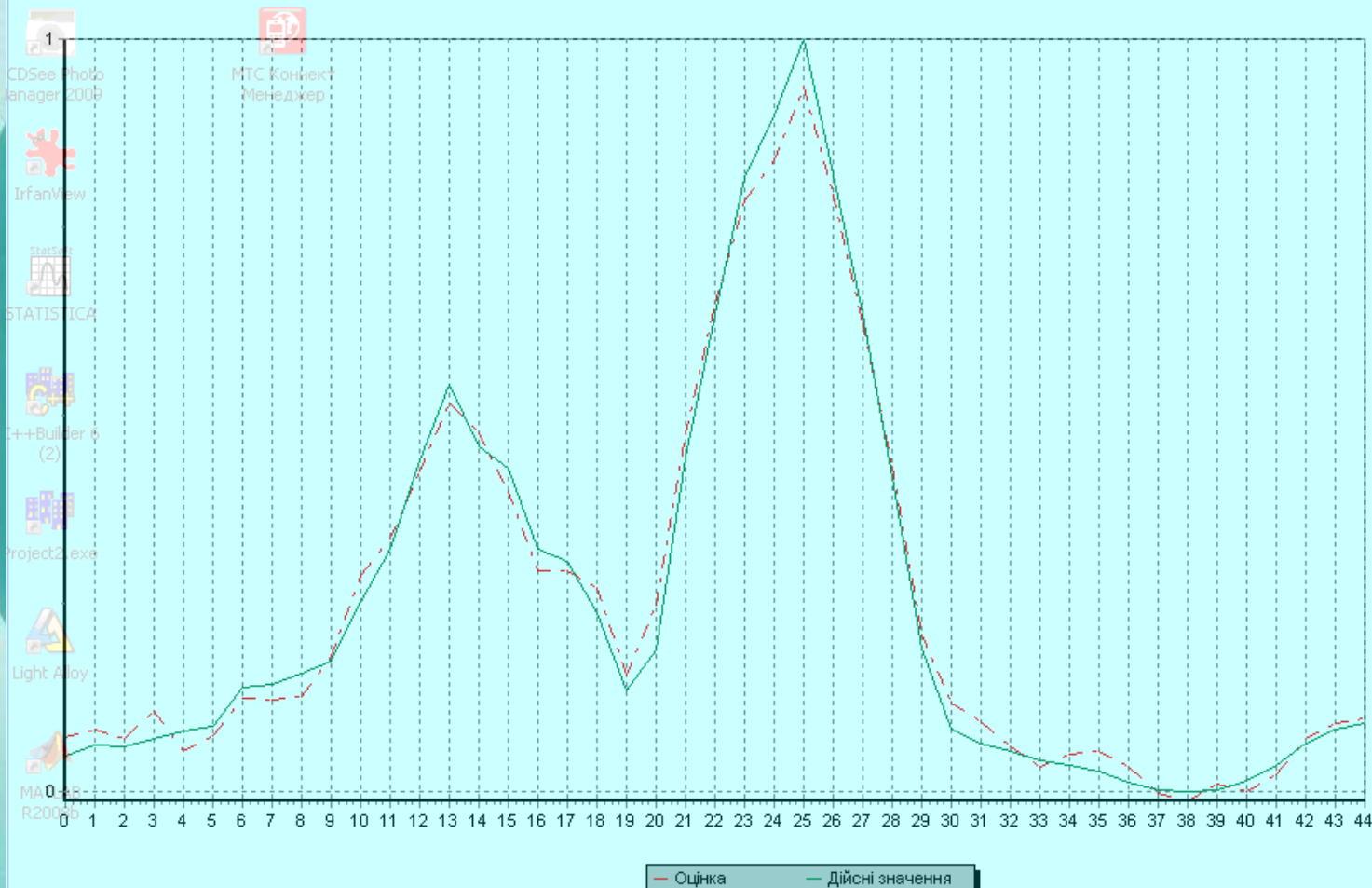
☒ нормований графік

Функція Y1

Відхилення 0,0360

Відновлення функціональних залежностей - КА - 61 - Бригада №1, Гоменюк О.В. Бородкіна А.Г., Кальницький Г.Б.

Розрахунки Завантажити



Поліном

Степені

X1 2

X2 2

X3 3

Вид Чебышева

Розрахунок

☐ лямбда (три системи)

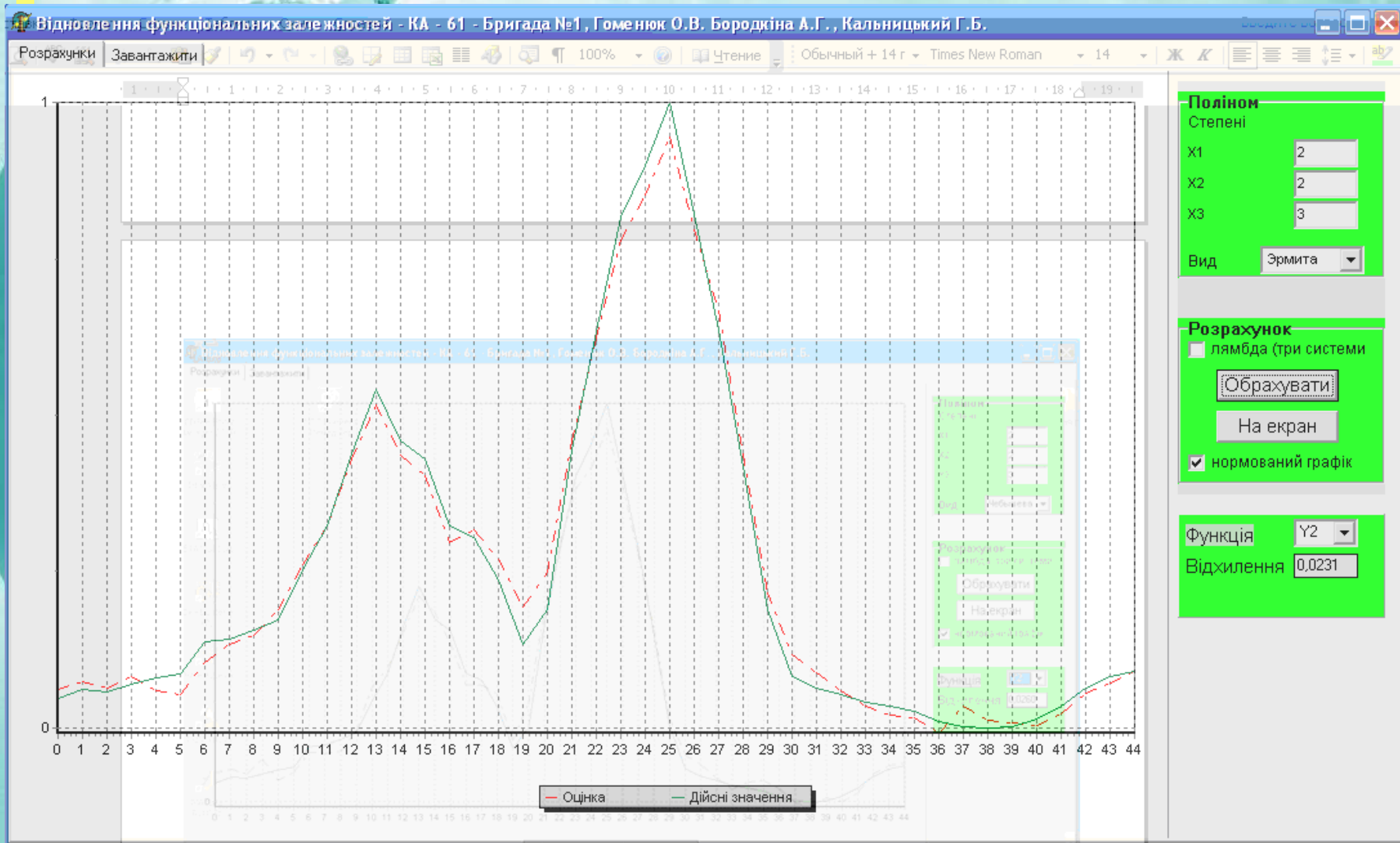
Обрахувати

На екран

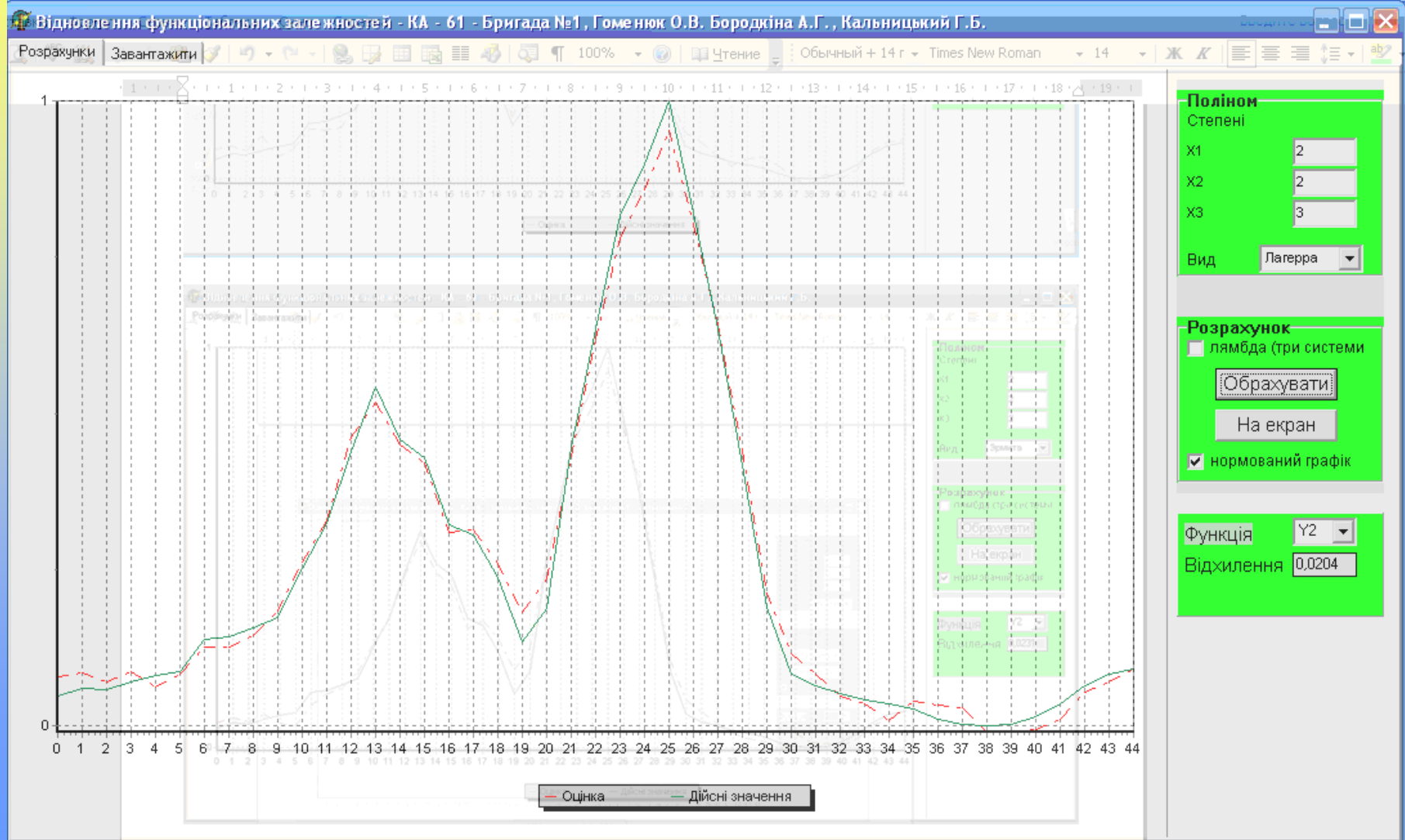
☒ нормований графік

Функція Y2

Відхилення 0,0260

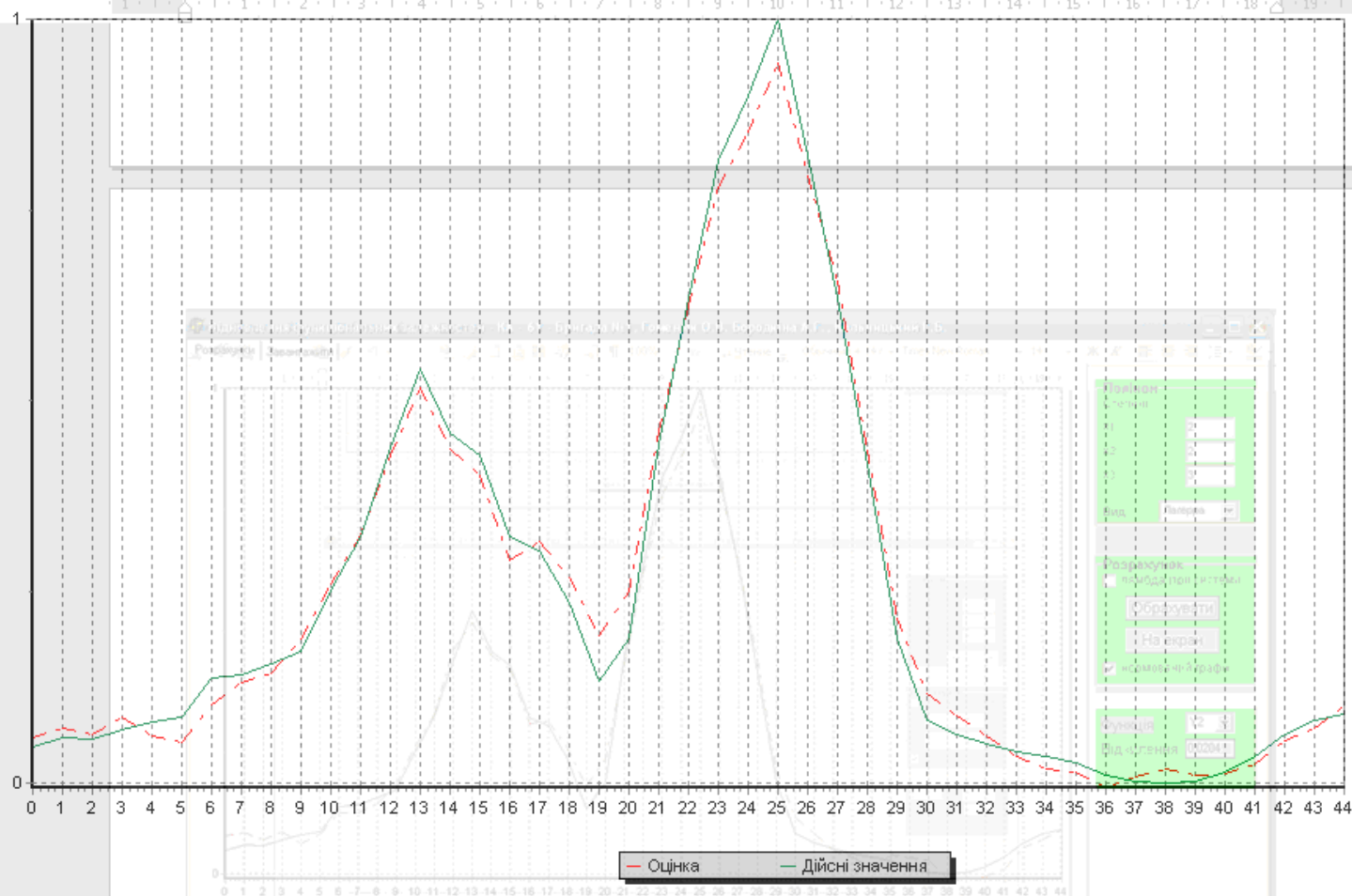






Відновлення функціональних залежностей - КА - 61 - Бригада №1, Гоменюк О.В. Бородкіна А.Г., Кальницький Г.Б.

Розрахунки Завантажити 100% Чтение Обычный + 14 г Times New Roman 14 Ж

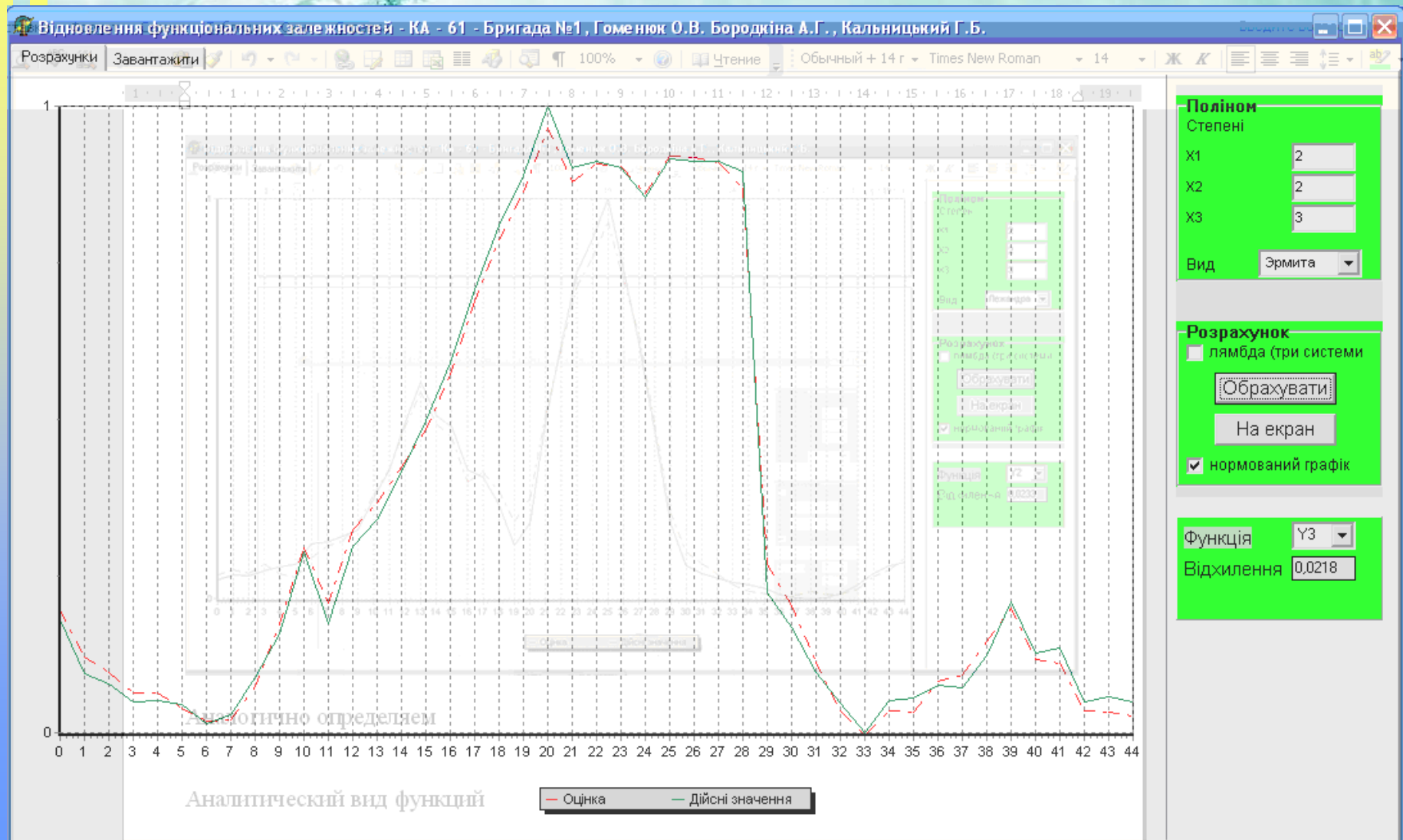


**Поліном**  
Степені  
x1 2  
x2 2  
x3 3  
Вид Лежандра

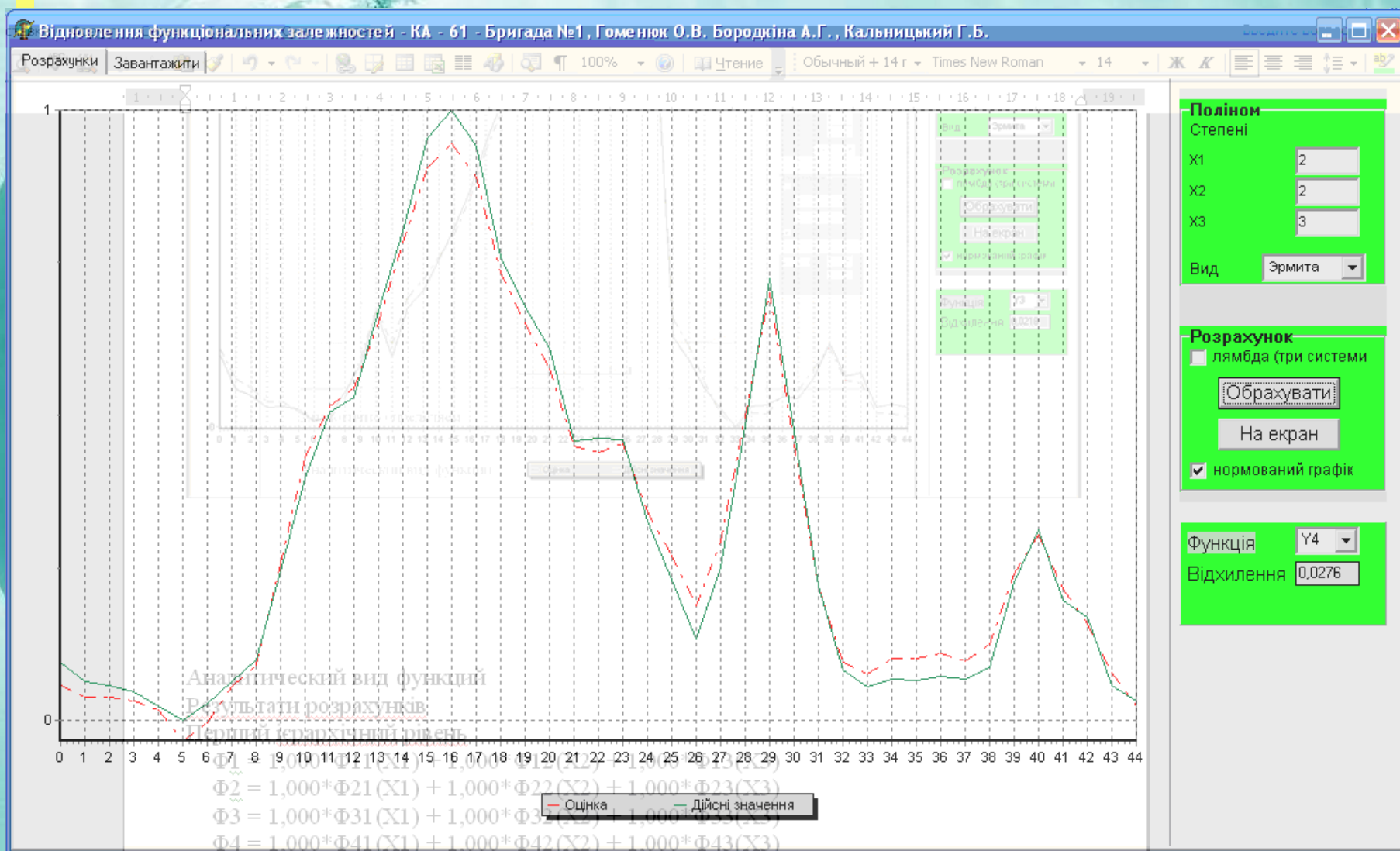
**Розрахунок**  
☐ лямбда (три системи)  
Обрахувати  
На екран  
☒ нормований графік

Функція Y2  
Відхилення 0,0233

# Рассмотрим график для третьей целевой функции



# Рассмотрим график для четвертой целевой функции





# ***Аналитический вид функций***

## ***Результаты расчетов***

Первый иерархический уровень

$$\Phi_1 = 1,000 * \Phi_{11}(X_1) + 1,000 * \Phi_{12}(X_2) + 1,000 * \Phi_{13}(X_3)$$

$$\Phi_2 = 1,000 * \Phi_{21}(X_1) + 1,000 * \Phi_{22}(X_2) + 1,000 * \Phi_{23}(X_3)$$

$$\Phi_3 = 1,000 * \Phi_{31}(X_1) + 1,000 * \Phi_{32}(X_2) + 1,000 * \Phi_{33}(X_3)$$

$$\Phi_4 = 1,000 * \Phi_{41}(X_1) + 1,000 * \Phi_{42}(X_2) + 1,000 * \Phi_{43}(X_3)$$

# ***Аналитический вид функций***

## ***Результаты расчетов***

Второй уровень

$$\Phi_{11} = 1,769 * K_{11}(X_{11}) + 0,437 * K_{12}(X_{12});$$

$$\Phi_{12} = 1,710 * K_{21}(X_{21}) + 2,785 * K_{22}(X_{22});$$

$$\Phi_{13} = 0,948 * K_{31}(X_{31}) + 0,469 * K_{32}(X_{32}) + 0,726 * K_{33}(X_{33});$$

$$\Phi_{21} = 0,619 * K_{11}(X_{11}) + 1,342 * K_{12}(X_{12});$$

$$\Phi_{22} = -0,766 * K_{21}(X_{21}) + 0,794 * K_{22}(X_{22});$$

$$\Phi_{23} = 0,932 * K_{31}(X_{31}) + 1,255 * K_{32}(X_{32}) + 1,120 * K_{33}(X_{33});$$

# ***Аналитический вид функций***

## ***Результаты расчетов***

Второй уровень

$$\Phi_{31} = 1,187 * K_{11}(X_{11}) + 0,579 * K_{12}(X_{12});$$

$$\Phi_{32} = 2,531 * K_{21}(X_{21}) + 0,415 * K_{22}(X_{22});$$

$$\Phi_{33} = 1,346 * K_{31}(X_{31}) + 1,023 * K_{32}(X_{32}) + 0,897 * K_{33}(X_{33});$$

$$\Phi_{41} = -0,101 * K_{11}(X_{11}) + 0,561 * K_{12}(X_{12});$$

$$\Phi_{42} = 0,947 * K_{21}(X_{21}) + -1,575 * K_{22}(X_{22});$$

$$\Phi_{43} = -0,066 * K_{31}(X_{31}) + 1,089 * K_{32}(X_{32}) + 0,554 * K_{33}(X_{33});$$

# ***Аналитический вид функций***

## ***Результаты расчетов***

Третий уровень

$$K_{11}(X_{11}) = 0,074 * T_1(X_{11}) + -0,095 * T_2(X_{11});$$

$$K_{12}(X_{12}) = -0,224 * T_1(X_{12}) + -0,116 * T_2(X_{12});$$

$$K_{21}(X_{21}) = -0,186 * T_1(X_{21}) + -0,069 * T_2(X_{21});$$

$$K_{22}(X_{22}) = 0,100 * T_1(X_{22}) + 0,022 * T_2(X_{22});$$

$$K_{31}(X_{31}) = -0,144 * T_1(X_{31}) + 0,122 * T_2(X_{31}) + -0,134 * T_3(X_{31});$$

$$K_{32}(X_{32}) = 0,031 * T_1(X_{32}) + -0,230 * T_2(X_{32}) + -0,024 * T_3(X_{32});$$

$$K_{33}(X_{33}) = -0,021 * T_1(X_{33}) + -0,177 * T_2(X_{33}) + 0,016 * T_3(X_{33});$$



# ***Аналитический вид функций***

## ***Результаты расчетов***

С ПОМОЩЬЮ ПОЛИНОМОВ

$$\begin{aligned}\Phi_1 = & 0,131 * T_1(X_{11}) + -0,168 * T_2(X_{11}) + -0,098 * T_1(X_{12}) + -0,051 * T_2(X_{12}) + \\ & -0,317 * T_1(X_{21}) + -0,118 * T_2(X_{21}) + 0,279 * T_1(X_{22}) + 0,063 * T_2(X_{22}) + \\ & -0,136 * T_1(X_{31}) + 0,115 * T_2(X_{31}) + -0,127 * T_3(X_{31}) + 0,015 * T_1(X_{32}) + \\ & -0,108 * T_2(X_{32}) + -0,011 * T_3(X_{32}) + -0,016 * T_1(X_{33}) + -0,128 * T_2(X_{33}) + \\ & 0,012 * T_3(X_{33})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2 = & 0,046 * T_1(X_{11}) + -0,059 * T_2(X_{11}) + -0,301 * T_1(X_{12}) + -0,155 * T_2(X_{12}) + \\ & 0,142 * T_1(X_{21}) + 0,053 * T_2(X_{21}) + 0,079 * T_1(X_{22}) + 0,018 * T_2(X_{22}) + \\ & -0,134 * T_1(X_{31}) + 0,113 * T_2(X_{31}) + -0,125 * T_3(X_{31}) + 0,039 * T_1(X_{32}) + \\ & -0,288 * T_2(X_{32}) + -0,030 * T_3(X_{32}) + -0,024 * T_1(X_{33}) + -0,198 * T_2(X_{33}) + \\ & 0,018 * T_3(X_{33})\end{aligned}$$

# ***Аналитический вид функций***

## ***Результаты расчетов***

С ПОМОЩЬЮ ПОЛИНОМОВ

$$\begin{aligned}\Phi_3 = & 0,088 * T_1(X_{11}) + -0,113 * T_2(X_{11}) + -0,130 * T_1(X_{12}) + -0,067 * T_2(X_{12}) + \\ & -0,470 * T_1(X_{21}) + -0,175 * T_2(X_{21}) + 0,042 * T_1(X_{22}) + 0,009 * T_2(X_{22}) + \\ & -0,193 * T_1(X_{31}) + 0,164 * T_2(X_{31}) + -0,180 * T_3(X_{31}) + 0,032 * T_1(X_{32}) + \\ & -0,235 * T_2(X_{32}) + -0,024 * T_3(X_{32}) + -0,019 * T_1(X_{33}) + -0,159 * T_2(X_{33}) + \\ & 0,015 * T_3(X_{33})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_4 = & -0,007 * T_1(X_{11}) + 0,010 * T_2(X_{11}) + -0,126 * T_1(X_{12}) + -0,065 * T_2(X_{12}) + \\ & -0,176 * T_1(X_{21}) + -0,065 * T_2(X_{21}) + -0,158 * T_1(X_{22}) + -0,035 * T_2(X_{22}) + \\ & 0,009 * T_1(X_{31}) + -0,008 * T_2(X_{31}) + 0,009 * T_3(X_{31}) + 0,034 * T_1(X_{32}) + \\ & -0,250 * T_2(X_{32}) + -0,026 * T_3(X_{32}) + -0,012 * T_1(X_{33}) + -0,098 * T_2(X_{33}) + \\ & 0,009 * T_3(X_{33})\end{aligned}$$

# ***Аналитический вид функций***

## ***Результаты расчетов***

Для нормированных значений  $X$

$$\begin{aligned}\Phi_1 = & 1,602 * X_{11}^1 + -1,341 * X_{11}^2 + 0,208 * X_{12}^1 + -0,404 * X_{12}^2 + \\ & 0,310 * X_{21}^1 + -0,945 * X_{21}^2 + 0,057 * X_{22}^1 + 0,500 * X_{22}^2 + \\ & -3,479 * X_{31}^1 + 7,015 * X_{31}^2 + -4,062 * X_{31}^3 + \\ & 0,692 * X_{32}^1 + -0,330 * X_{32}^2 + -0,354 * X_{32}^3 + \\ & 1,208 * X_{33}^1 + -1,593 * X_{33}^2 + 0,377 * X_{33}^3 + -0,125\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2 = & 0,561 * X_{11}^1 + -0,469 * X_{11}^2 + 0,640 * X_{12}^1 + -1,242 * X_{12}^2 + \\ & -0,139 * X_{21}^1 + 0,423 * X_{21}^2 + 0,016 * X_{22}^1 + 0,143 * X_{22}^2 + \\ & -3,421 * X_{31}^1 + 6,897 * X_{31}^2 + -3,993 * X_{31}^3 + \\ & 1,850 * X_{32}^1 + -0,884 * X_{32}^2 + -0,948 * X_{32}^3 + \\ & 1,864 * X_{33}^1 + -2,457 * X_{33}^2 + 0,581 * X_{33}^3 + -0,227\end{aligned}$$



# ***Аналитический вид функций***

## ***Результаты расчетов***

Для нормированных значений  $X$

$$\begin{aligned}\Phi_3 = & 1,076 * X_{11}^1 + -0,900 * X_{11}^2 + 0,276 * X_{12}^1 + -0,536 * X_{12}^2 + \\ & 0,459 * X_{21}^1 + -1,399 * X_{21}^2 + 0,009 * X_{22}^1 + 0,075 * X_{22}^2 + \\ & -4,940 * X_{31}^1 + 9,959 * X_{31}^2 + -5,767 * X_{31}^3 + \\ & 1,508 * X_{32}^1 + -0,720 * X_{32}^2 + -0,772 * X_{32}^3 + \\ & 1,492 * X_{33}^1 + -1,967 * X_{33}^2 + 0,465 * X_{33}^3 + 0,266\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_4 = & -0,092 * X_{11}^1 + 0,077 * X_{11}^2 + 0,267 * X_{12}^1 + -0,519 * X_{12}^2 + \\ & 0,172 * X_{21}^1 + -0,524 * X_{21}^2 + -0,032 * X_{22}^1 + -0,283 * X_{22}^2 + \\ & 0,241 * X_{31}^1 + -0,485 * X_{31}^2 + 0,281 * X_{31}^3 + \\ & 1,605 * X_{32}^1 + -0,766 * X_{32}^2 + -0,822 * X_{32}^3 + \\ & 0,922 * X_{33}^1 + -1,215 * X_{33}^2 + 0,288 * X_{33}^3 + -0,069\end{aligned}$$



# ***Аналитический вид функций***

## ***Результаты расчетов***

Для исходных значений  $X$

$$\begin{aligned}\Phi_1 = & 0,136 * X_{11}^1 + -0,001 * X_{11}^2 + 0,019 * X_{12}^1 + 0,000 * X_{12}^2 + \\ & 0,061 * X_{21}^1 + -0,001 * X_{21}^2 + -0,023 * X_{22}^1 + 0,000 * X_{22}^2 + \\ & -0,234 * X_{31}^1 + 0,001 * X_{31}^2 + 0,000 * X_{31}^3 + \\ & 0,007 * X_{32}^1 + 0,001 * X_{32}^2 + 0,000 * X_{32}^3 + \\ & 0,284 * X_{33}^1 + -0,007 * X_{33}^2 + 0,000 * X_{33}^3 + 6,192\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2 = & 0,048 * X_{11}^1 + 0,000 * X_{11}^2 + 0,060 * X_{12}^1 + 0,000 * X_{12}^2 + \\ & -0,027 * X_{21}^1 + 0,000 * X_{21}^2 + -0,007 * X_{22}^1 + 0,000 * X_{22}^2 + \\ & -0,230 * X_{31}^1 + 0,001 * X_{31}^2 + 0,000 * X_{31}^3 + \\ & 0,018 * X_{32}^1 + 0,002 * X_{32}^2 + 0,000 * X_{32}^3 + \\ & 0,438 * X_{33}^1 + -0,011 * X_{33}^2 + 0,000 * X_{33}^3 + 5,318\end{aligned}$$

# ***Аналитический вид функций***

## ***Результаты расчетов***

Для исходных значений  $X$

$$\begin{aligned}\Phi_3 = & 0,091 * X_{11}^1 + -0,001 * X_{11}^2 + 0,026 * X_{12}^1 + 0,000 * X_{12}^2 + \\ & 0,090 * X_{21}^1 + -0,001 * X_{21}^2 + -0,003 * X_{22}^1 + 0,000 * X_{22}^2 + \\ & -0,332 * X_{31}^1 + 0,002 * X_{31}^2 + 0,000 * X_{31}^3 + \\ & 0,015 * X_{32}^1 + 0,001 * X_{32}^2 + 0,000 * X_{32}^3 + \\ & 0,351 * X_{33}^1 + -0,009 * X_{33}^2 + 0,000 * X_{33}^3 + 11,071\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_4 = & -0,008 * X_{11}^1 + 0,000 * X_{11}^2 + 0,025 * X_{12}^1 + 0,000 * X_{12}^2 + \\ & 0,034 * X_{21}^1 + 0,000 * X_{21}^2 + 0,013 * X_{22}^1 + 0,000 * X_{22}^2 + \\ & 0,016 * X_{31}^1 + 0,000 * X_{31}^2 + 0,000 * X_{31}^3 + \\ & 0,016 * X_{32}^1 + 0,001 * X_{32}^2 + 0,000 * X_{32}^3 + \\ & 0,217 * X_{33}^1 + -0,005 * X_{33}^2 + 0,000 * X_{33}^3 + -6,733\end{aligned}$$