BTS 2M1

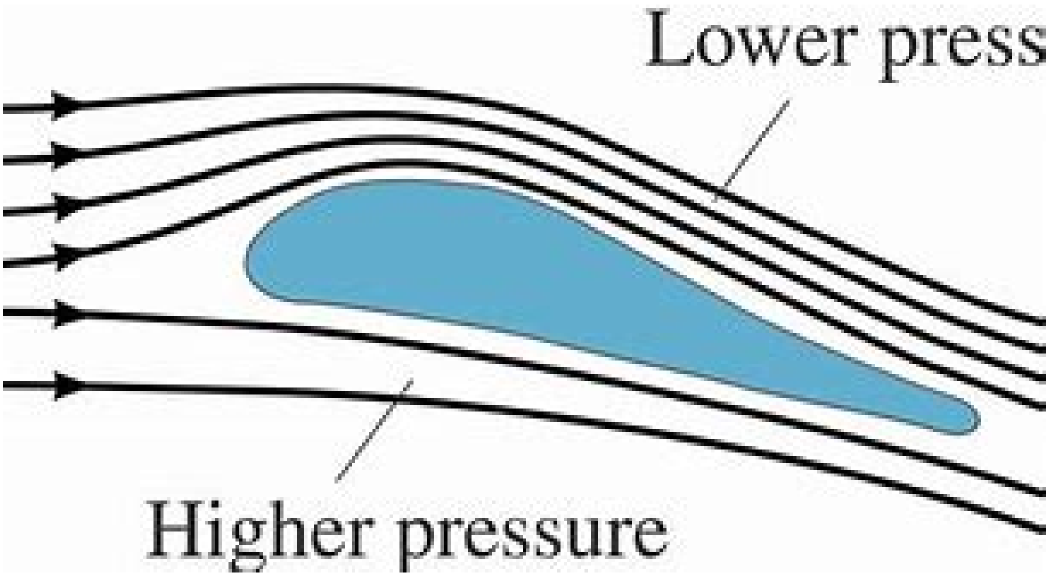
Cours de Physique 5 :

Dynamique des fluides

SAINTE CROIX
SAINT EUVERTE

ORLÉANS

Chapitre 5
Dynamique des fluides



Notions et contenus	*Capacités exigibles*	*autoévaluation*			
		A	**B**	**C**	**D**
Débit massique, débit volumique. Vitesse moyenne d'écoulement. Conservation du débit volumique pour un fluide incompressible. Théorème de Bernoulli. Interprétation énergétique. Effet Venturi	Distinguer les débits massique et volumique et exploiter la relation entre les deux. Relier débit volumique et vitesse moyenne d'écoulement dans une conduite de section donnée. Exploiter la relation de conservation du débit volumique. Exploiter le théorème de Bernoulli, la relation étant donnée. Exploiter la relation entre la pression différentielle dans un organe déprimogène et le débit volumique pour réaliser une mesure de celui-ci				

TABLE DES MATIERES

PARTIE COURS :
DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

I. Débits et vitesse d'écoulement

Débit volumique/débit massique :

Il existe deux façons de quantifier la quantité de fluide qui se déplace dans une conduite par unité de temps :

Le débit volumique (en m^3/s), qui correspond au volume de fluide traversant une section donnée:

$$Q_v = \frac{dV}{dt}$$

Le débit massique (en kg/s), qui correspond à la masse de fluide traversant une section donnée:

$$Q_m = \frac{dm}{dt}$$

La relation entre les deux est donnée par la masse volumique (ρ, en kg/m^3) du fluide :

$$Q_m = \rho\, Q_v$$

Vitesse moyenne d'écoulement :

Le débit volumique est lié à la vitesse moyenne d'écoulement (v) et à la section (S) de la conduite :

$$Q_v = S\, v$$

- S est la section transversale en m^2.
- v est la vitesse moyenne du fluide en m/s.

II. Conservation du Débit

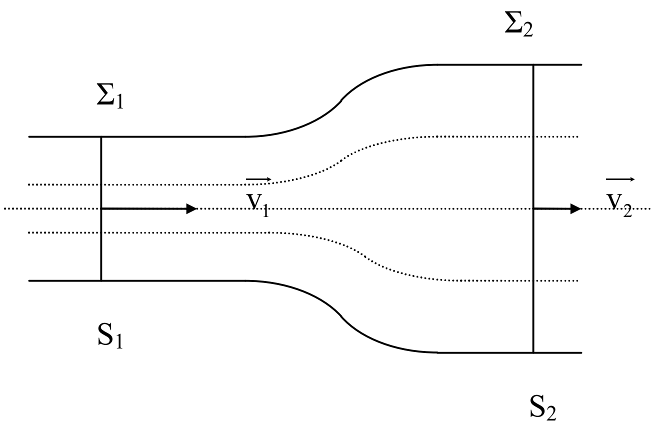
Pour un fluide incompressible (liquides) s'écoulant en régime permanent (débits constants dans le temps), le débit volumique doit être conservé en tout point de la conduite, peu importe les variations de section d'où :

$$Q_{v1} = Q_{v2} \text{ d'où } Q_{m1} = Q_{m2}$$

En utilisant la relation avec la vitesse et la section :

$$S_1 \times v_1 = S_2 \times v_2$$

Conséquence : Si la section S diminue (rétrécissement), la vitesse v doit augmenter pour maintenir le débit constant :

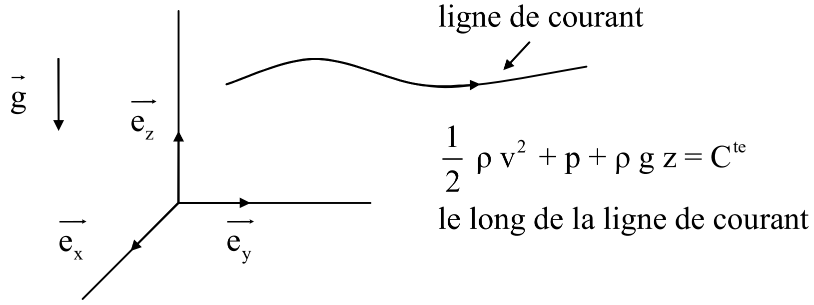


III. Théorème de Bernoulli

Pour un fluide parfait, incompressible et en régime stationnaire, le long d'une ligne de courant :

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z = C^{te}$$

avec
- ρ : masse volumique du fluide (kg m^{-3})
- v : vitesse du fluide (m s^{-1})
- p : pression du fluide (P_a)
- g : intensité du champ de pesanteur (m s^{-2})
- z : altitude (m)



Soit deux points (1 et 2) le long d'un même ligne de courant, alors :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

Interprétation de chacun des termes :

P_1 :

$\frac{1}{2}\rho v_1^2$:

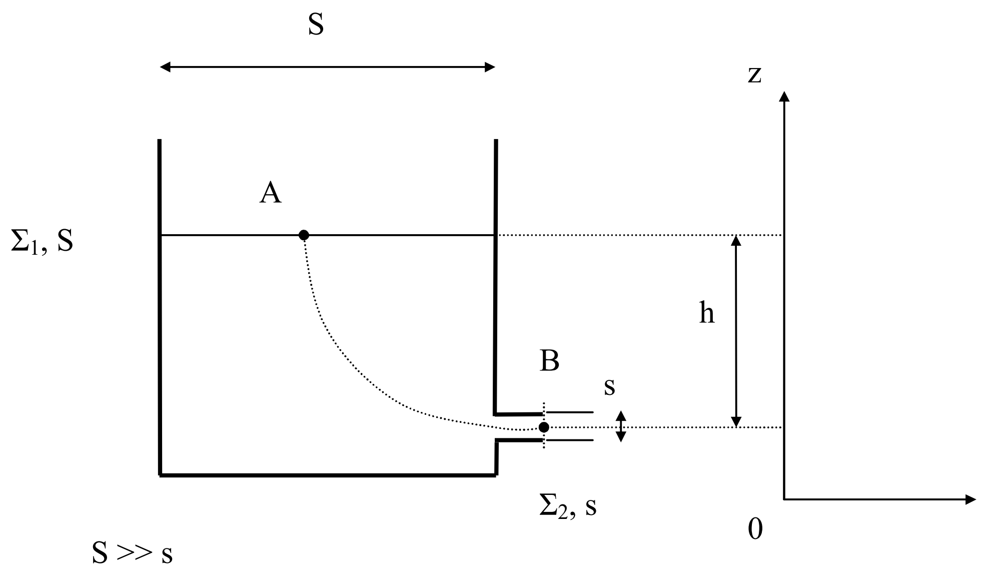
$\rho g z_1$:

.

➔ Si, dans un écoulement, une forme d'énergie augmente (ex. : la vitesse augmente, donc l'énergie cinétique augmente), une ou les deux autres formes d'énergie (statique et/ou potentielle) doivent diminuer en compensation pour que l'énergie totale (la somme) reste constante.

Une application : la formule de Torricelli

- La formule de Torricelli donne la vitesse d'écoulement d'un liquide par un orifice, sous l'effet de la pesanteur.



Le fluide est parfait et incompressible.

- Expression des vitesses en fonction de h, formule de Torricelli.

Hypothèse : le régime est considéré comme stationnaire.

A partir de l'équation de Bernoulli : $\frac{1}{2}\,\rho\, v_A^2 + p_A + \rho\, g\, z_A = \frac{1}{2}\,\rho\, v_B^2 + p_B + \rho\, g\, z_B$ et de l'égalité des pressions : $p_A = p_B = p_0$ (la surface libre et le jet en sortie sont à l'air libre), on obtient la relation :

$$\frac{1}{2}\,\rho\, v_B^2 - \frac{1}{2}\,\rho\, v_A^2 = \rho\, g\,(z_A - z_B) = \rho\, g\, h$$

Le débit de volume se conserve entre les sections Σ_1 et Σ_2 et :

$$v_A\, S = v_B\, s$$

Comme $S >> s$, $v_B >> v_A$

On obtient la formule de Torricelli :

$$v_B = \sqrt{2\, g\, h}$$

La vitesse de la surface libre du liquide est égale à :

$$v_A = \frac{s}{S}\sqrt{2\, g\, h}$$

- Débit de volume

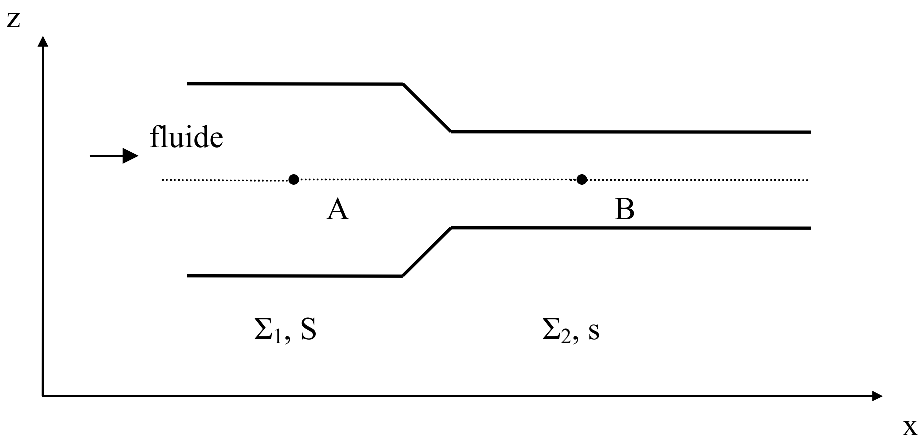
$D_v = v_A\, S = v_B\, s$

$$D_v = s\,\sqrt{2\, g\, h}$$

Le débit de volume augmente avec la hauteur de fluide h.

IV L'Effet Venturi

Le fluide qui circule dans le tube est parfait et incompressible, le régime est stationnaire.
Etudions un rétrécissement du tube :



- Théorème de Bernoulli entre les points A et B (situés sur la même ligne de courant) :

$$\frac{1}{2}\,\rho\, v_A^{\,2} + p_A + \rho\, g\, z_A = \frac{1}{2}\,\rho\, v_B^{\,2} + p_B + \rho\, g\, z_B$$

- Conservation du débit de volume D_v entre les sections Σ_1 et Σ_2 :

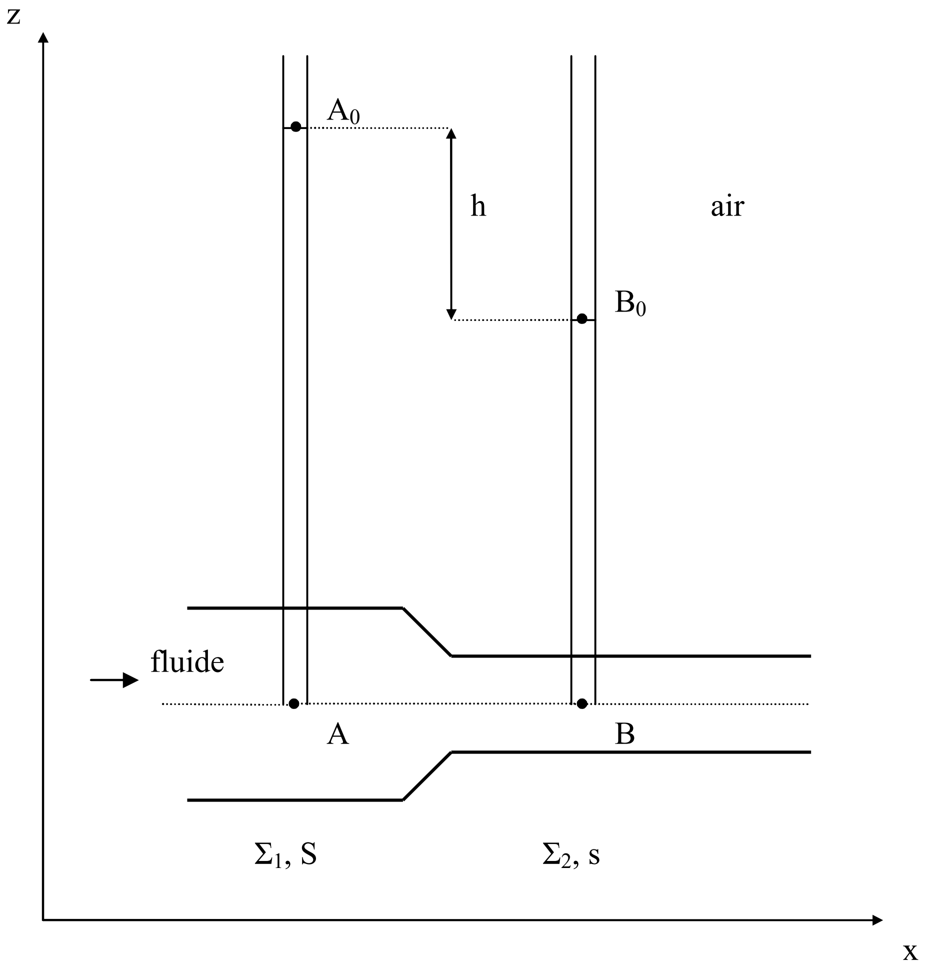
$D_v = v_A\, S = v_B\, s$

- Comme $z_A = z_B$: $p_A - p_B = \frac{1}{2}\,\rho\,\left(v_B^{\,2} - v_A^{\,2}\right)$

$$p_A - p_B = \frac{1}{2}\,\rho\, v_A^{\,2}\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\,\rho\, v_A^{\,2}\ \frac{S^2 - s^2}{s^2}$$

On remarque que la pression est la plus forte dans la section la plus large du tube ou dans la partie ou les lignes de courant sont les plus « écartées». Cette propriété caractérise l'effet Venturi.

Application : Mesure de débit par effet Venturi
L'effet Venturi peut être utilisé pour effectuer une mesure de débit. Prenons le dispositif précédent en y ajoutant 2 manomètres à air libre :



Le fluide qui circule dans la conduite a une masse volumique ρ très grande par rapport à celle de l'air : $\rho >> \rho_{air}$.
Soit p_0 la pression ambiante : $p_{A0} = p_{B0} = p_0$ (les points A_0 et B_0 se trouvent à l'air libre).

- Appliquons la relation de la statique des fluides entre les points A et A_0 et entre les points B et B_0 :

$$p_A = p_{A0} + \rho\, g\, (z_{A0} - z_A)$$
$$p_B = p_{B0} + \rho\, g\, (z_{B0} - z_B)$$

$$p_A - p_B = p_{A0} - p_{B0} + \rho\, g\, (z_{A0} - z_{B0}) + \rho\, g\, (z_B - z_A)$$

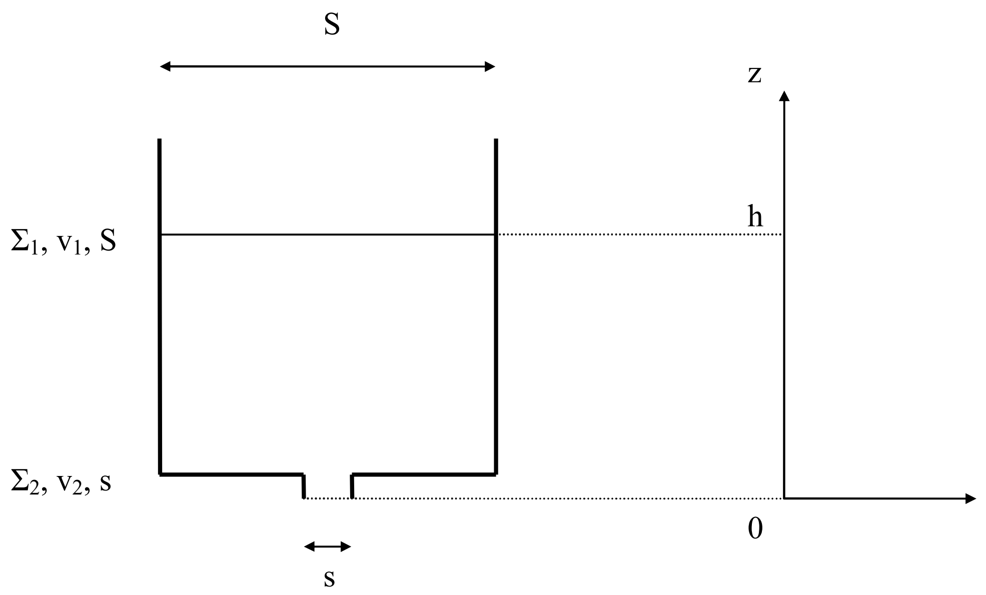
Comme $p_{A0} = p_{B0}$ et $z_B = z_A$, $p_A - p_B = \rho\, g\, (z_{A0} - z_{B0})$

$z_{A0} - z_{B0} = h$ et $\Delta P = p_A - p_B = \rho\, g\, h$

L'effet Venturi est exploité dans les organes déprimogènes (venturis, diaphragmes) pour mesurer le débit :
On mesure la différence de pression ΔP entre l'entrée de l'organe (avant le rétrécissement, vitesse faible) et le point de vitesse maximale (le col, pression faible).
Cette différence ΔP est directement proportionnelle au carré du débit volumique. En mesurant ΔP, on en déduit Qv.

Pour aller plus loin : temps de vidange d'un réservoir

Utilisons la formule de Torricelli pour trouver le temps de vidange d'un reservoir :



Expression des vitesses en fonction de h

D'après la formule de Torricelli : $v_2 = \sqrt{2\,g\,h}$

$v_1 = \frac{s}{S}\sqrt{2\,g\,h}$ en utilisant la conservation du débit de volume $v_1\,S = v_2\,s$

Expression du débit de volume Q_V

$$Q_V = v_2\,s = s\sqrt{2\,g\,h}$$

Le débit de volume varie tout au long de la vidange du réservoir.
Il diminue au fur et à mesure que le niveau baisse.

Expression de h en fonction du temps

Soit v_1 la vitesse de la surface libre :

$$v_1 = \frac{s}{S}\sqrt{2\,g\,h}$$

$$v_1 = -\frac{dh}{dt}$$

et $\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2\,g}\,dt$

Par intégration entre le temps t = 0 pour lequel la hauteur est égale à h_0 et le temps t pour lequel la hauteur est égale à h :

$$\int_{h_0}^{h} \frac{dh}{\sqrt{h}} = \int_0^t -\frac{s}{S}\sqrt{2\,g}\,dt$$

$$\left[2\sqrt{h}\right]_{h_0}^{h} = -\frac{s}{S}\sqrt{2\,g}\,\left[\,t\,\right]_0^t$$

$$2\,(\sqrt{h} - \sqrt{h_0}) = -\frac{s}{S}\sqrt{2\,g}\;t$$

et $\qquad h = \left(\sqrt{h_0} - \frac{\sqrt{2g}}{2} \frac{s}{S} t \right)^2$

Remarque : en fonction de t, Q_v a pour expression :

$$Q_V = s\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_0} - \frac{\sqrt{2g}\ s}{2\ S} t\right)$$

Temps de vidange du réservoir

Le temps de vidange T correspond à la valeur de t pour laquelle h = 0:

$$T = \frac{2}{\sqrt{2g}} \frac{S}{s} \sqrt{h_0}$$

PARTIE EXERCICE

EXERCICE 1 : VITESSE DANS UN TUYAU

Un fluide incompressible circule dans un tuyau de rayon r = 5 cm. Le régime est stationnaire et le débit de volume est égal à 5 $m^3\ h^{-1}$.

1) Calculer la vitesse v du fluide.

2) De combien faut-il diminuer le rayon r pour que la vitesse soit multipliée par 4 ?

EXERCICE 2 : VITESSE DES ELECTRONS

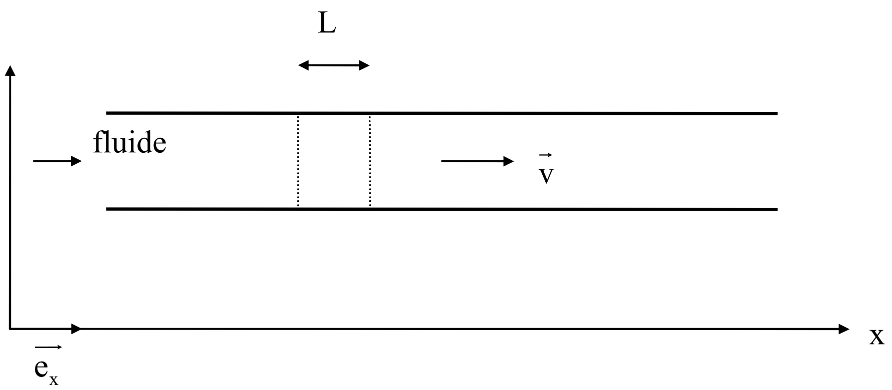
Calculer la vitesse des électrons dans un fil de cuivre cylindrique de section s = 1 mm^2 et parcouru par un courant de 10 A.

On admet que chaque atome possède en moyenne 1,3 électron libre.

Données : masse molaire du cuivre : M(Cu) = 63 g mol^{-1}
masse volumique du cuivre : µ(Cu) = 8800 kg m^{-3}

EXERCICE 3 : TUBE DE SECTION CONSTANTE

Soit un tube de section constante S. Un fluide incompressible de masse volumique ρ circule dans le tube avec une vitesse constante $\vec{v} = v\,\vec{e_x}$



Calculer D_m

Données : ρ = 1000 kg m^{-3} v = 0,1 m s^{-1} S = 10 cm^2 L = 10 cm

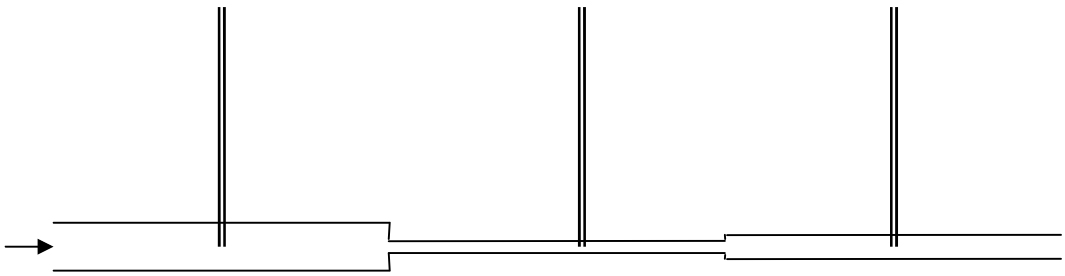
EXERCICE4 : MANOMETRES A AIR LIBRE DANS UN CIRCUIT

L'eau est considérée comme un fluide parfait incompressible. Elle s'écoule dans une conduite cylindrique horizontale composée de 3 parties de diamètres différents :

- partie 1 : diamètre 2 d
- partie 2 : diamètre $\frac{d}{2}$
- partie 3 : diamètre d

On note p_1, p_2, p_3 et v_1, v_2 ,v_3 les pressions et les vitesses de l'eau dans les parties 1, 2 et 3 du circuit et D_v le débit de volume.

1) Calculer D_v en $L\ s^{-1}$ et $m^3\ h^{-1}$.
2) Calculer les vitesses v_1, v_2 et v_3 dans les parties 1, 2 et 3 du circuit.
3) Calculer les pressions p_1 et p_2.
Dans quelle partie du circuit se produit l'effet Venturi ?
4) La pression ambiante est égale à p_0 = 1 bar.
Soit h_1, h_2 , h_3 les hauteurs d'eau dans les manomètres à air libre situés dans les parties 1, 2 et 3 du circuit.
Calculer h_1, h_2, h_3.



partie 1 partie 2 partie 3

Données :

$d = 2$ cm $p_3 = 1,010$ bar $D_v = 10^{-4}\ m^3\ s^{-1}$ $\rho_{eau} = 1000\ kg\ m^{-3}$ $g = 10\ m\ s^{-2}$

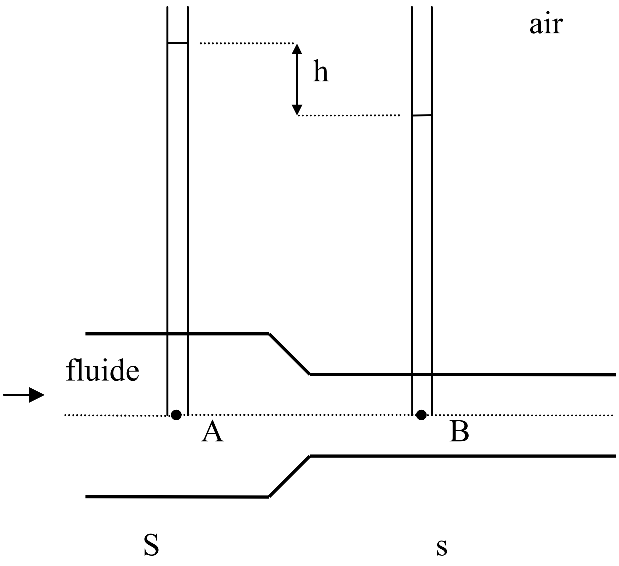
EXERCICE 5 : EFFET VENTURI, MESURE DE DEBIT

L'effet Venturi peut être utilisé pour effectuer une mesure de débit dans une canalisation de section S et s

Le fluide est un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ qui s'écoule à la vitesse v.

1) Exprimer v en fonction de S, s, g et h.

2) Exprimer le débit de volume D_V du fluide en fonction de S, s, g et h.



EXERCICE 6 : TUBE DE PITOT

Le tube de Pitot sert à mesurer le débit d'un fluide dans une canalisation de section S.

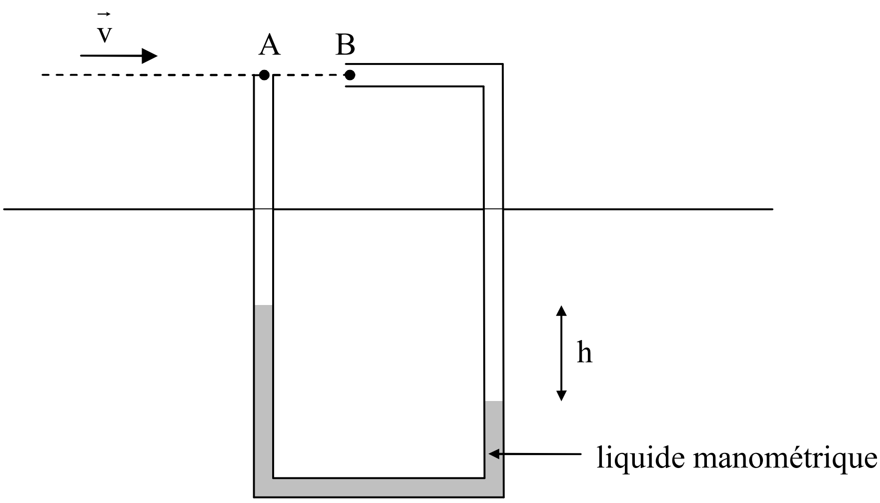
Le fluide est un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ qui s'écoule à la vitesse v.

Le liquide manométrique a pour masse volumique ρ_0.

Le point B est un point d'arrêt.

1) Exprimer v en fonction de ρ, ρ_0, g et h.

2) Exprimer le débit de volume D_V du fluide en fonction de ρ, ρ_0, g, S et h.



EXERCICE 7 : VIDANGE D'UN RECIPIENT

Soit un récipient de forme cubique et de volume V = 1 m^3. Initialement, le récipient est entièrement rempli d'eau. La vidange du récipient se fait par l'intermédiaire d'une ouverture circulaire de diamètre d = 1 cm.

1) Le débit initial est noté D_{V0}. Calculer D_{V0}.

2) Calculer le temps de vidange T

3) Quelle est la hauteur d'eau dans la cuve lorsque l'on se trouve à la moitié du temps de vidange ?

Données : g = 9,81 m s^{-2}

EXERCICE 8 : CLEPSYDRE

Soit un récipient rempli avec un fluide parfait incompressible. Ce récipient possède un axe de révolution vertical. Le rayon r est fonction de la hauteur z.

s et a désignent la section et le rayon de l'orifice, S et z la section et la hauteur de la surface libre.

Initialement, la surface libre se trouve à la hauteur H (hauteur de remplissage).

La géométrie du récipient est telle que $v_1 = C^{te}$ tout au long de la vidange. Ainsi, une échelle verticale peut être linéairement graduée en temps (principe du clepsydre)

1) Montrer que $S^2 = s^2\left(1 + \frac{2\,g\,z}{v_1^{\,2}}\right)$

2) En déduire que $r = a\left(1 + \frac{2\,g}{v_1^{\,2}}\,z\right)^{1/4}$ ou encore $z = \frac{v_1^{\,2}}{2\,g\,a^4}\left(r^4 - a^4\right)$

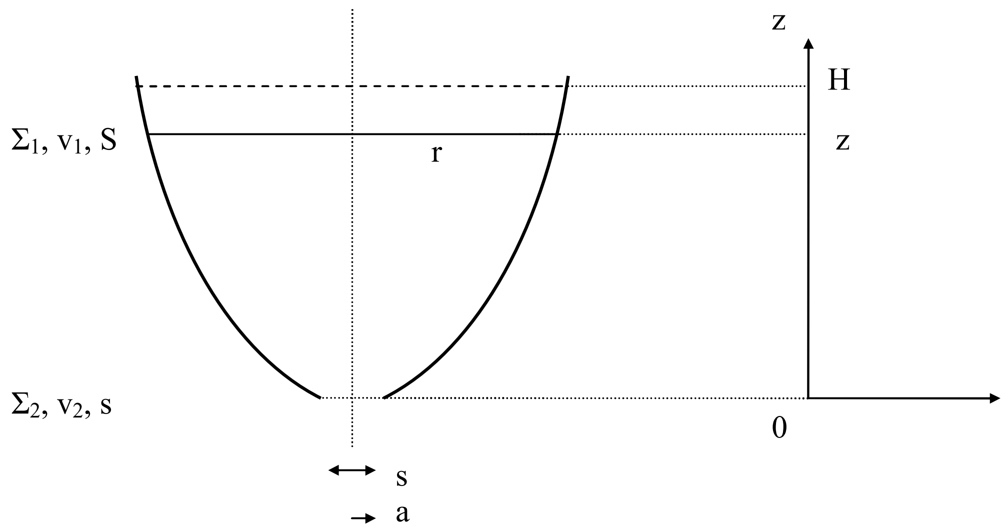
En posant $A = \frac{\pi^2\,v_1^{\,2}}{2\,g\,s^2} = \frac{v_1^{\,2}}{2\,g\,a^4}$, montrer que $r = \left(a^4 + \frac{z}{A}\right)^{\frac{1}{4}}$ et $z = A\left(r^4 - a^4\right)$

3) Soit Δz la variation de hauteur pour un intervalle de temps Δt : exprimer Δz en fonction de v_1 et Δt

4) Exprimer le temps de vidange T en fonction de la hauteur initiale de fluide H et de v_1.

5) Pour une vitesse v_1 = 0,01/60 m s^{-1}, un rayon a = 0,2 cm et une hauteur de remplissage H = 40 cm, calculer A et le rayon r pour z = H.

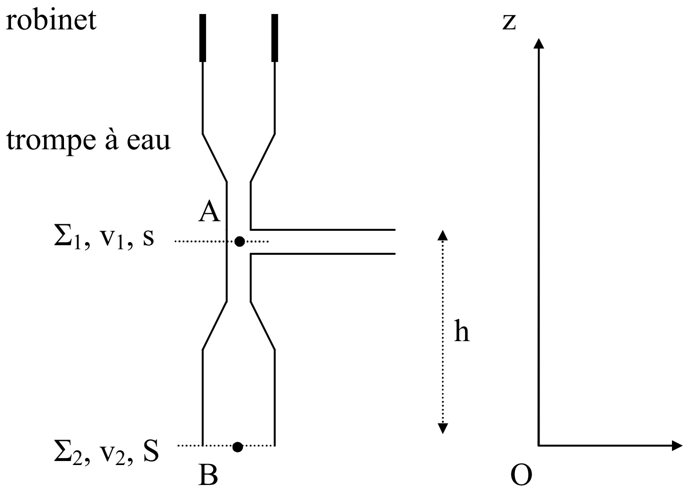
Représenter graphiquement la clepsydre.



EXERCICE 9 : TROMPE A EAU

Une trompe à eau est représentée schématiquement sur la figure.

.



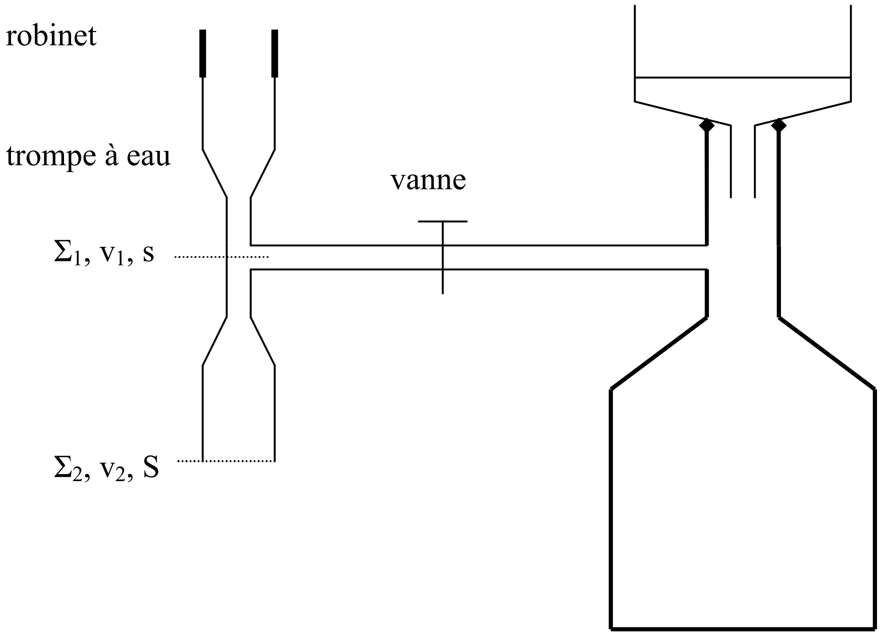
On désigne par D le diamètre de la grande section et par d le diamètre de la petite section.

1) Exprimer p_A en fonction de D_v, p_0, D, d, ρ, g et h.

2) Sachant que $\frac{D}{d} = 2$, calculer D_v de manière à vérifier $p_A = \frac{1}{4}\ p_0$

3) La trompe à eau est reliée à un dispositif de filtration (filtre Buchner).
On procède à une filtration. Parmi les séquences suivantes, lesquelles sont à éviter ?
On désigne le robinet par R et la vanne par V.
Séquence 1 : ouverture du R, ouverture de V, fermeture de V, fermeture de R
Séquence 2 : ouverture du R, ouverture de V, fermeture de R, fermeture de V
Séquence 3 : ouverture du V, ouverture de R, fermeture de V, fermeture de R
Séquence 4 : ouverture du V, ouverture de R, fermeture de R, fermeture de V

Données : D = 2 cm h = 10 cm
g = 10 m s^{-2} pression ambiante : $p_0 = 10^5\ P_a$
masse volumique de l'eau ρ= 1000 kg m^{-3}


robinet
trompe à eau
vanne
Σ_1, v_1, s
Σ_2, v_2, S

EXERCICE 10 : VIDANGE D'UNE PISCINE AVEC UN SIPHON

Pour vider une piscine, on utilise un tuyau AB préalablement rempli d'eau selon le schéma ci-dessous. La section s du tuyau est très faible devant la section S de la piscine.

L'eau est considérée comme un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ.

ETUDE STATIQUE

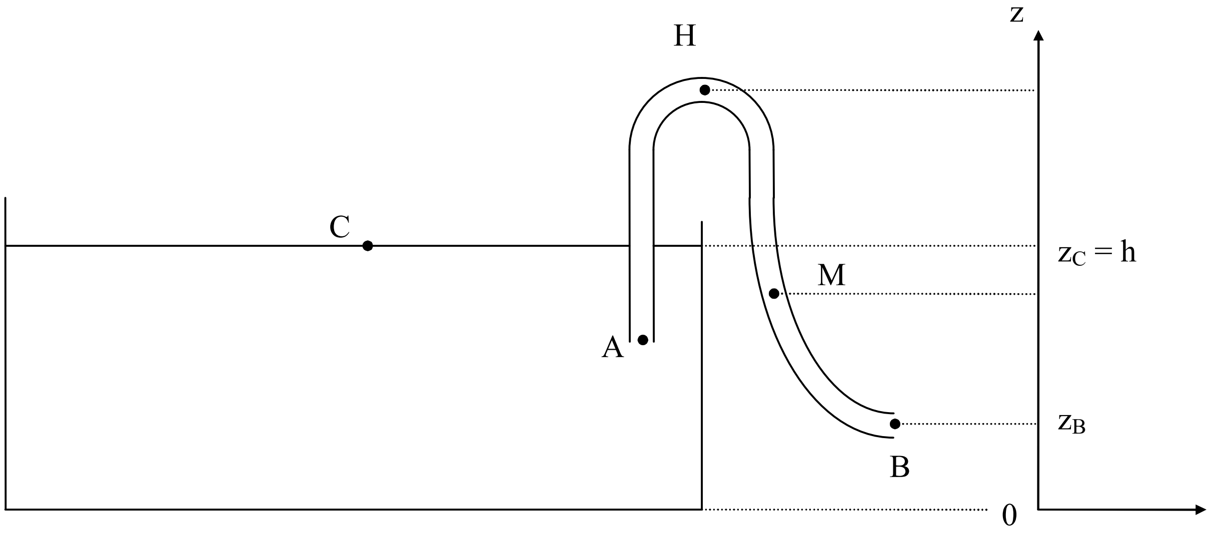
1) Le tuyau est rempli d'eau et l'extrémité B reste bouchée. Déterminer la pression en B. Pour quelles valeurs de z_B cette pression est-elle supérieure à la pression atmosphérique p_0 ?

ETUDE DYNAMIQUE

2) Exprimer le débit de volume du siphon en fonction de g, s, h et z_B.

3) Exprimer la pression p_M en un point M quelconque du tuyau en fonction de ρ, g, p_0, z_M et z_B.

4) Quelles conditions doivent vérifier z_B et z_H pour que le siphon fonctionne ?



5) La hauteur d'eau est initialement de 1 m dans la piscine. Le tuyau est placé de façon à ce que le point B soit au même niveau que le point A, lequel se trouve au fond de la piscine. Calculer le temps de vidange.

6) La hauteur d'eau est initialement de 1 m dans la piscine. Le tuyau est placé de façon à ce que le point B se situe 50 cm en dessous du point A, lequel se trouve au fond de la piscine. Calculer le temps de vidange.

Données : $S = 8{,}0\ m^2$ $s = 4\ cm^2$ $\rho = 1000\ kg\ m^{-3}$

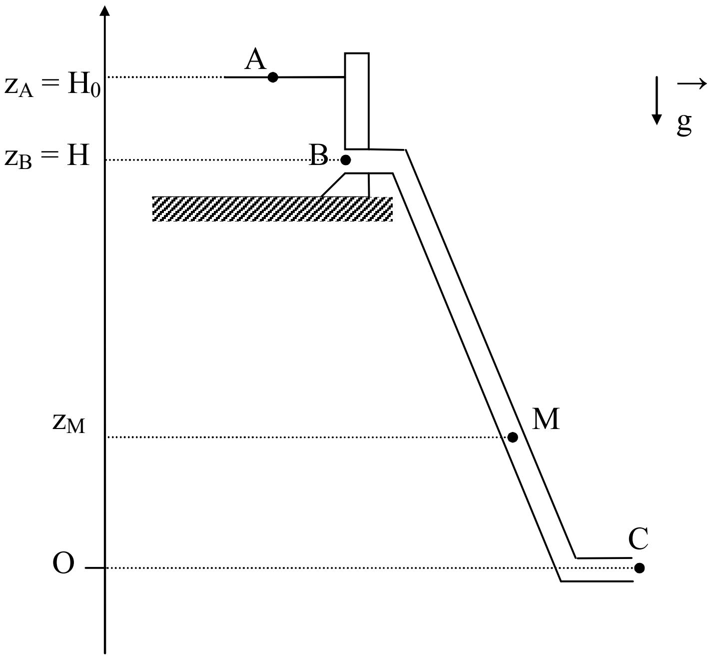
EXERCICE 11 : CONDUITE FORCEE ET CAVITATION

L'eau est considérée comme un fluide parfait incompressible.

Une conduite de section constante s part du point B pour rejoindre un point C situé en aval.

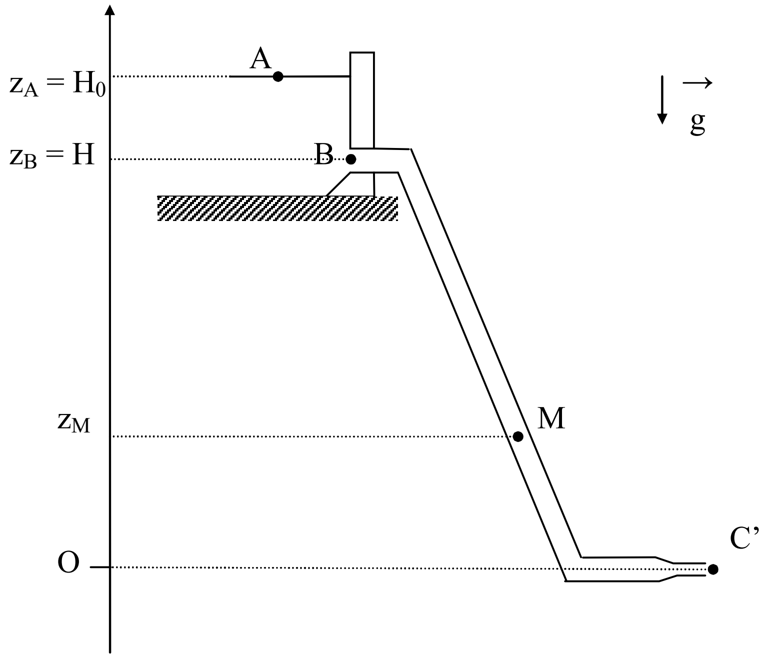
Si la pression dans la conduite devient inférieure à la pression de vapeur saturante p_s ($p_s << p_0$), il y a cavitation (formation de bulles).

1) L'eau à la sortie de la conduite en C se trouve à l'air libre à la pression p_0.



- Exprimer la pression p_M en M en fonction de p_0, ρ, g et z_M.
- Exprimer la vitesse de l'eau en C en fonction de g et H_0.
- Exprimer la condition sur H pour éviter la cavitation dans la conduite.
- Calculer la valeur maximale H_{max} de H à ne pas dépasser si l'on veut éviter la cavitation.

2) Pour éviter le phénomène de cavitation, on dispose à la sortie de la conduite un injecteur qui réduit la section de s à s' et le diamètre de d à d'.
L'eau à la sortie de la conduite en C' se trouve à l'air libre à la pression p_0.



- Exprimer la pression p_M en M en fonction de p_0, ρ, g, z_M, $v_{C'}$ (vitesse de l'eau en C'), s et s'.

- Exprimer la vitesse de l'eau en C'en fonction de g et H_0.

- Exprimer la condition sur le rapport s'/s et sur le rapport d'/d pour éviter la cavitation dans la conduite.

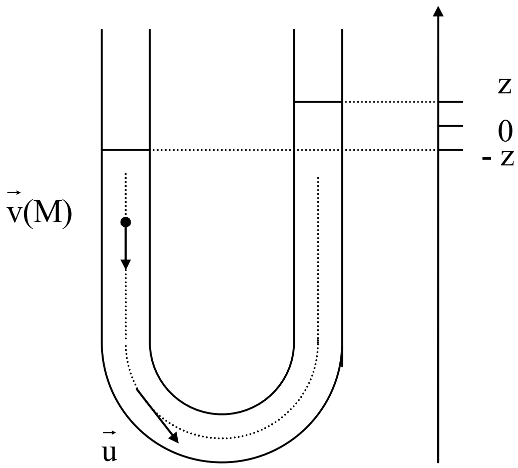
- Calculer la valeur maximale $(d'/d)_{max}$ à ne pas dépasser si l'on veut éviter la cavitation.

Données : H = 80 m H_0 = 100 m
g = 10 m s^{-2} pression ambiante : $p_0 = 10^5$ P_a
masse volumique de l'eau ρ= 1000 kg m^{-3}

EXERCICE 10 : TUBE EN U

Un tube en U est rempli d'un liquide considéré comme un fluide parfait incompressible (masse volumique ρ).
Ce liquide occupe une longueur totale L dans le tube.
A partir de l'équilibre, on provoque une dénivellation entre les branches du tube.

La vitesse d'une particule de fluide M est donnée par $\vec{v}(M) = \dot{z}(t)\,\vec{u}$



On considère que le volume du liquide V est donné par V = S L, S étant la section du tube.
Calculer la période T des oscillations dans le tube.

Données : g = 9,81 m s^{-2} L = 40 cm