BTS 2M1

Métrologie 1 :
Mesures et incertitudes

SAINTE CROIX
SAINT EUVERTE

Sommaire

PARTIE I : LA MESURE

1. Qu'est ce qu'une mesure ?

Effectuer une mesure, c'est rechercher la valeur d'une grandeur physique.
La **valeur** d'une **grandeur physique**, c'est le produit d'un nombre et d'une unité.

Valeur d'une grandeur = Nombre × Unité

Exemple d'une mesure de longueur : L = 2,51 cm

- L : grandeur mesurée (Longueur)
- 2,51 : nombre
- cm : Unité de mesure

Attention : La mesure exprimée sans unité n'a aucun sens.

2. Comment déterminer la valeur de la grandeur mesurée ?

Pour déterminer la valeur de la grandeur mesurée, il faut comparer cette grandeur à une **grandeur de référence**.
La comparaison se fait à l'aide de l'**instrument de mesure**.
Par exemple, pour mesurer une longueur, il faut la comparer à une grandeur de référence qui est le mètre.
Chaque **grandeur de référence** est caractérisée par son **unité**.

3. Les grandeurs de référence du système international

Il existe 7 grandeurs de références définies par le **B**ureau **I**nternational des **P**oids et **M**esures.

Grandeur de base	**Unité de base du système international**	
Nom	**Nom**	**Symbole**
Masse	kilogramme	kg
Longueur	mètre	m
Temps	seconde	s
Courant électrique	Ampère	A
Température thermodynamique	Kelvin	K
Quantité de matière	mole	mol
Intensité lumineuse	candela	cd

Il existe pour chaque unité des multiples et sous-multiples.

4. Les autres grandeurs physiques de référence

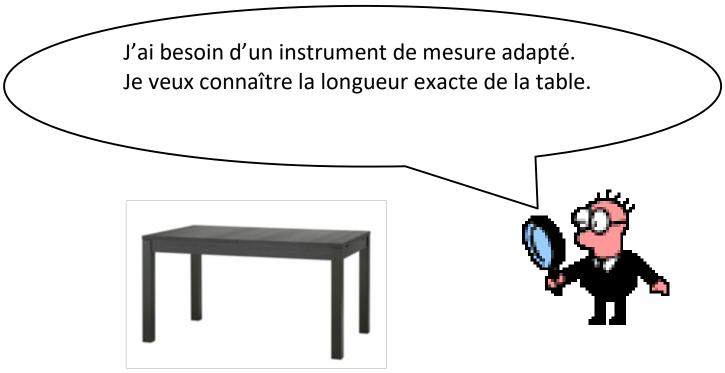
Toutes les autres grandeurs sont définies par rapport aux grandeurs de base du système international.

Par exemple :

- une force est définie par le produit d'une masse par une longueur divisée par un temps au carré.
  L'unité de la force est le newton (N) : $1\ N = 1\ kg.m.s^{-2}$
- une pression est définie par le rapport d'une force par une surface.
  L'unité de la pression est le pascal (Pa) $1\ Pa = 1\ N.m^{-2}$

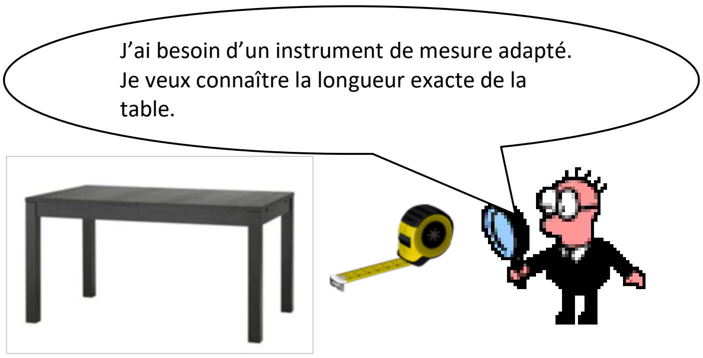
- une charge électrique est définie par le produit d'une intensité par un temps
  L'unité de charge électrique est le coulomb (C) $1\ C = 1\ A.s$

PARTIE II : Le processus de mesure

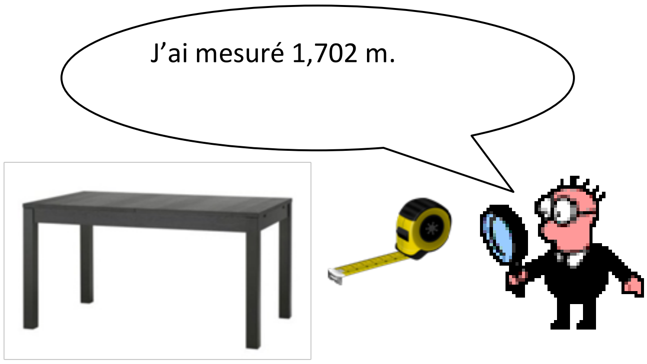


Notre expérimentateur souhaite déterminer la longueur exacte de la table.

L'expérimentateur recherche ce que l'on appelle la **valeur vraie** de la longueur de la table.

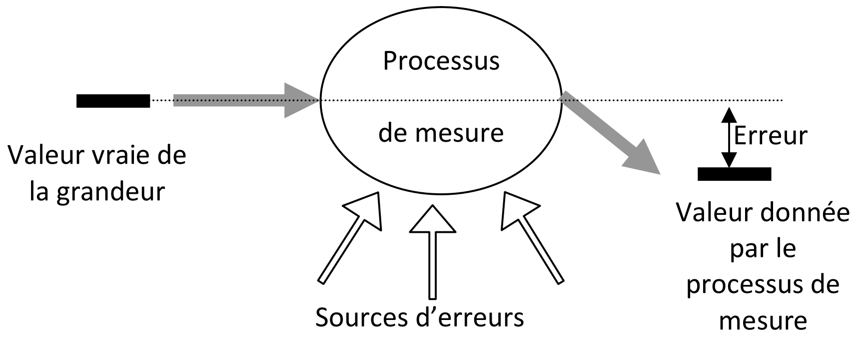


On appelle **processus de mesure** tout ce qui est mis en œuvre pour obtenir la valeur de la grandeur mesurée (instrument, méthode, expérimentateur,…)

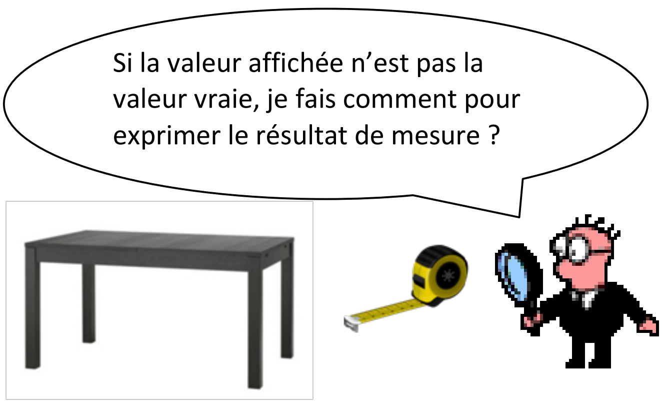


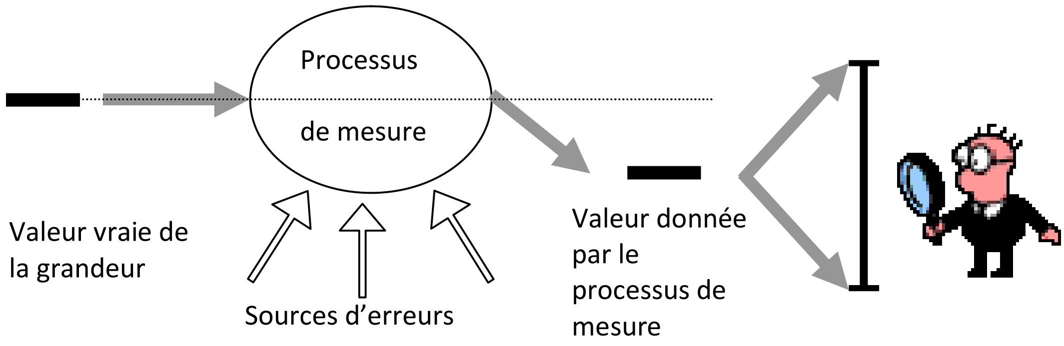
La valeur donnée par le processus de mesure est égale à 1,702 m.
Différentes sources d'erreurs liées au processus de mesure font que la valeur donnée par le processus de mesure est différente de la valeur vraie.

Tous les processus de mesure, quelque soit leur qualité, sont affectés de **sources d'erreur**.
La valeur donnée par le processus de mesure n'est jamais égale à la valeur vraie.



Erreur de mesure = Valeur Vraie – Valeur donnée par le processus de mesure.
La valeur de l'erreur n'est pas accessible à l'expérimentateur car la valeur vraie de la grandeur est inconnue





Un résultat de mesure s'exprime par un **intervalle** dans lequel se trouve la valeur vraie.
L'expérimentateur ne peut jamais connaître la valeur vraie !

➔ **Activité n°1 :** Mesurer la table sur laquelle sont les mobiles à coussins d'air, remplir ce tableau avec les valeurs de vos camarades.

Mesure	1	2	3	4	5	6	7	8	9
valeur									

Trouvez-vous tous les mêmes valeurs ? Pourquoi ?

PARTIE III: Les erreurs de mesure

Les erreurs de mesures peuvent être dues à l'instrument de mesure, à l'opérateur ou à la variabilité de la grandeur mesurée. On distingue deux types d'erreurs de mesures.

1. Les erreurs aléatoires

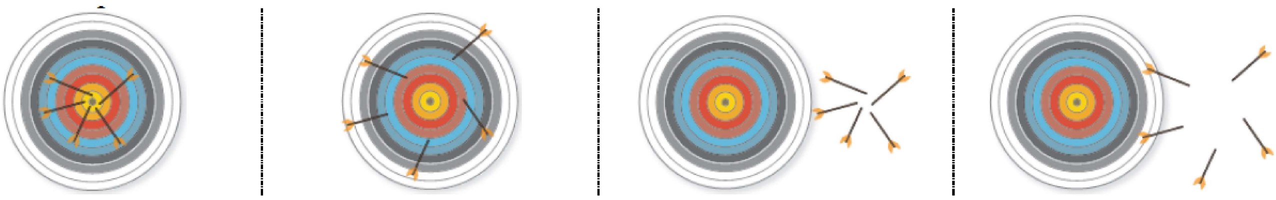
Lorsqu'un même opérateur répète plusieurs fois, dans les mêmes conditions, un même mesurage, les valeurs mesurées peuvent être différentes.

Cette dispersion des valeurs mesurées peut être due à la qualité de l'opérateur, à la qualité de l'instrument de mesure, à d'éventuelles fluctuations de la grandeur mesurée ou de paramètres de l'environnement (température, pression, etc...).

2. Les erreurs systématiques

Un appareil défectueux, mal étalonné ou utilisé incorrectement conduit à des valeurs mesurées proches les unes des autres, mais éloignées de la valeur vraie. Les erreurs systématiques peuvent disparaître par réglage.

Le centre de la cible est la valeur vraie, inconnue. Les flèches sont les résultats de mesurages.



Peu d'erreurs | Erreurs aléatoires | Erreurs systématiques | Erreurs aléatoires ET systématiques

➔ **Activité n°2 :** Mesurer avec précision la taille d'un de vos camarades debout, mettre l'ensemble des valeurs trouvés par vous et vos camarades dans un tableau :

Mesure	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Valeur									

Puis mesurer avec précision la taille d'un de vos camarades allongé, mettre l'ensemble des valeurs trouvées par vous et vos camarades dans un tableau :

Mesure	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Valeur									

Quelle est la nature des erreurs qui entachent nos mesures ici?

PARTIE IV : Détermination de l'incertitude de mesure dans le cas d'une série de mesures (incertitude de type A)

1. Utilisation de la méthode de Student

Soient :

n : le nombre de mesures effectuées ;

$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}$: la moyenne des résultats des mesures (fonction MOYENNE d'Excel

σ_{n-1} ou $\boxed{s_{exp} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}}$: écart-type expérimental (fonction ECARTYPE d'Excel) ;

s : incertitude-type donnée par $s = \frac{s_{exp}}{\sqrt{n}}$;

$t_{\%}$: coefficient de Student au niveau de confiance spécifié en pourcentage ;

U(x) : incertitude élargie donnée par $U(x) = t_{\%} \times \frac{s_{exp}}{\sqrt{n}}$.

Le résultat de la série de mesures s'exprime alors sous la forme :

$$x = \bar{x} \pm U(x)$$

2. Table des coefficients t de Student

(n est le nombre de mesures)

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
t_{95}	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26
t_{99}	63,7	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25
n	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**30**	**50**	**100**	**∞**
t_{95}	2,20	2,16	2,13	2,11	2,09	2,04	2,01	1,98	1,96
t_{99}	3,11	3,01	2,95	2,90	2,86	2,76	2,68	2,63	2,57

3. Exemple : Utilisation de la méthode de Student dans le cas de vos mesures

➔ Reprendre le tableau obtenu dans l'activité 1. Calculer la moyenne, l'écart type puis l'incertitude élargie. Exprimer la mesure obtenue. Conclure.

➔ Reprendre les tableaux obtenus dans l’activité 2. Calculer la moyenne, l’écart type puis l’incertitude élargie. Exprimer la mesure obtenue. Conclure sur les méthodes de mesure de taille des êtres humains.

PARTIE V: Détermination de l'incertitude de mesure dans le cas d'un seul mesurage (incertitude de type B)

L'incertitude de mesure dans le cas d'un seul mesurage tient compte:

- Des informations techniques sur l'instrument de mesure (notice, fournie par le fabriquant)
- Des informations sur l'appréciation de la façon dont la mesure a été effectuée (plus subjectives)

1. Recherche des valeurs des incertitudes absolues : ΔX

On commence par identifier chaque source d'incertitude et on estime pour celles-ci l'intervalle maximal d'erreur de manière à trouver ΔX aussi noté a, appelé incertitude absolue ou demi-étendue. Cette estimation se fait selon les indications suivantes :

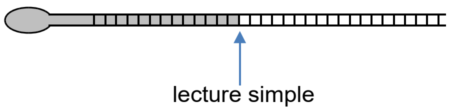
1.1. Valeur issue d'une lecture sans indication supplémentaire

En l'absence de toute autre indication, nous utiliserons le dernier chiffre donné pour la grandeur mesurée :

L'incertitude absolue est alors égale à la demi-unité du dernier chiffre exprimé.

1.2. Mesure unique avec lecture sur graduation

Pour un appareil de mesure analogique (appareil gradué), l'incertitude absolue de lecture ΔX est estimée à partir de la valeur de la plus petite graduation (résolution).



L'incertitude absolue est alors égale à la demi-graduation la plus petite :
$a = \Delta X = R/2$

NB : Pour un instrument de classe a, le constructeur indique l'écart maximum toléré (EMT) L'incertitude absolue est alors égale à l'EMT.

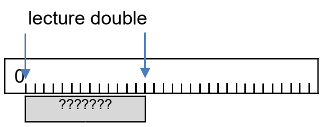
Ex : thermomètre à liquide, pipette jaugée, …

1.3. Incertitude pour une double lecture sur une graduation

Dans le cas d'une double lecture sur un instrument graduée, on tient compte des incertitudes liées aux deux lectures.

$$a = \Delta X = \sqrt{2} \times \text{ demi-graduation}$$

Ex : règle graduée, burette graduée, écran d'oscilloscope… :



Démonstration :

1.4. Mesure unique avec un instrument à affichage digital

Le constructeur indique pour la précision un pourcentage p de la valeur lue et un nombre N de digit (correspondant au dernier chiffre affiché). Cette indication figure dans la notice de l'appareil. On a alors :

a = ΔX = p . valeur lue + N

Ex : Multimètre, thermomètre…

2. Détermination des incertitudes-types correspondante: u

Il faut ensuite choisir la loi de distribution qui correspond à votre mesure. Ici les deux plus courantes :

2.1. Loi de Distribution Uniforme (ou Rectangulaire)

La loi uniforme est utilisée lorsque l'on pense que toutes les valeurs à l'intérieur d'un certain intervalle sont également probables.

Tracer la loi de probabilité dans le cas d'une distribution uniforme sur l'intervalle [-a,a] :

C'est la distribution qui donne la plus grande incertitude-type pour une étendue donnée.

C'est celle que l'on utilise en l'absence d'information.

Formule pour trouver l'incertitude-type dans ce cas :

$$u = \frac{\Delta X}{\sqrt{3}}$$

La démonstration sera faite à la pause pour les volontaires, elle est un peu longue mais est très intéressante car elle permet de mieux comprendre la logique de ces formules.

2.2. Loi de Distribution Triangulaire

La loi triangulaire est utilisée lorsque l’on pense que les valeurs autour du centre de l'intervalle sont plus probables que les valeurs aux extrémités..

Tracer la loi de probabilité dans le cas d’une distribution triangulaire sur l’intervalle [-a,a] :

La distribution uniforme sera plus souvent utilisée, toutefois dans les cas suivants, la distribution triangulaire vous donnera une estimation de l’incertitude plus juste :

- Pour les instruments avec une graduation analogique, l'opérateur a tendance à lire plus précisément au centre de la graduation qu'aux extrémités. La lecture "la plus probable" est au point indiqué, et la probabilité diminue linéairement à mesure que l'on s'éloigne vers les limites de la lecture.
- Si une source d'incertitude est le résultat de l'addition de deux contributions uniformes (par exemple, une incertitude de résolution et une incertitude de positionnement), la résultante peut être modélisée par une distribution triangulaire.
- Tolérances du fabricant avec une indication de "meilleur" point : Si le fabricant indique une tolérance avec une valeur nominale et des limites et que la plupart des instruments produits sont très proches de la valeur nominale
- Estimations basées sur un minimum, un maximum et une valeur la plus probable sans d’autres indications

Formule pour trouver l’incertitude-type dans ce cas :

$$u = \frac{\Delta X}{\sqrt{6}}$$

La démonstration sera également faite lors d’une pause (probablement pas la même !)

3. Prise en compte des différentes sources d'incertitude

Les incertitudes se compensant parfois partiellement, nous ne pouvons les sommer simplement sans les surestimer grandement. Il faut utiliser alors la somme quadratique :

$$\boldsymbol{u = \sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2 + \dots\dots + u_n{}^2}}$$

4. Estimation de l'incertitude portant sur une grandeur calculée

Si la grandeur cherchée est directement celle mesurée, pas besoin de mettre en œuvre ce paragraphe, mais dans le cas d'une grandeur calculée à partir de plusieurs grandeurs mesurées, il faut tenir compte de l'influence de chacune des incertitudes calculées précédemment.
Les formules que nous allons utiliser sont les suivantes :

Relation	Incertitude
$X = Y + Z$ ou $X = Y - Z$	$u(X) = \sqrt{u(Y)^2 + u(Z)^2}$
$X = \lambda \cdot Y$ (λ constante)	$u(X) = \lvert\lambda\rvert \cdot u(Y)$
$X = \frac{Y}{Z}$ ou $X = Y \cdot Z$	$\frac{u(X)}{X} = \sqrt{\left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2 + \left(\frac{u(Z)}{Z}\right)^2}$
$X = aY + bZ$	$u(X) = \sqrt{a^2(u(Y))^2 + b^2(u(Z))^2}$
$X = kY^aZ^b$	$\frac{u(X)}{\lvert X\rvert} = \sqrt{a^2\left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2 + b^2\left(\frac{u(Z)}{Z}\right)^2}$

Ces formules peuvent se démontrer, et nous pouvons en trouver d'autres personnalisées :

Partie VI: Calcul de l'incertitude élargie

L'incertitude élargie, qui constituera l'incertitude de la mesure, notée U(M) s'exprime sous la forme :

$U(M) = k \times u(M)$ où u(M) est l'incertitude-type et k le facteur d'élargissement. k = 1 pour un niveau de confiance de 68 % k = 2 pour un niveau de confiance de 95 % k = 3 pour un niveau de confiance de 99 %

Partie VII: Ecriture du résultat d'une mesure

L'incertitude est arrondie par excès pour ne conserver qu'un seul chiffre significatif.
La valeur d'une grandeur physique doit être écrite afin que le dernier chiffre significatif ait la même position (en écriture décimale) que le chiffre de l'incertitude.
Par exemple, si nous relevons 47,24°C sur un thermomètre avec une incertitude élargie de 0,27°C, nous écrivons :

T = (47.2 ± 0.3) °C

NB : Un chiffre significatif n'est pas un chiffre dont on est sûr mais un chiffre qui a une signification.

Si les valeurs sont données sans les valeurs d'incertitude, le résultat d'un calcul (impliquant multiplications et/ou divisions) doit être écrit avec le nombre de chiffres significatifs de la donnée qui en possède le moins.

Partie VIII: Interprétation d'une mesure

1. L'incertitude relative

L'incertitude relative est un indicateur de la qualité d'une mesure.
L'incertitude relative exprime le poids de l'incertitude absolue par rapport à la mesure. Elle nous indique si l'incertitude absolue est grande ou petite devant la mesure. Elle s'exprime en %

$$\text{Incertitude relative d'une grandeur M} = \frac{incertitude\ \ absolue}{valeur\ centrale} \times 100$$

On retiendra :

Incertitude relative < 0,1% :	mesure de haute qualité
Incertitude relative < 1% :	mesure de bonne qualité
Incertitude relative < 5%	mesure de qualité moyenne
Incertitude relative > 5 % :	mesure de qualité médiocre

2. Zscore

Un outil très intéressant pour étudier la compatibilité d'une mesure avec un modèle est le Zscore :
On compare une valeur mesurée Xmes à une valeur de référence Xréf en calculant le quotient suivant :

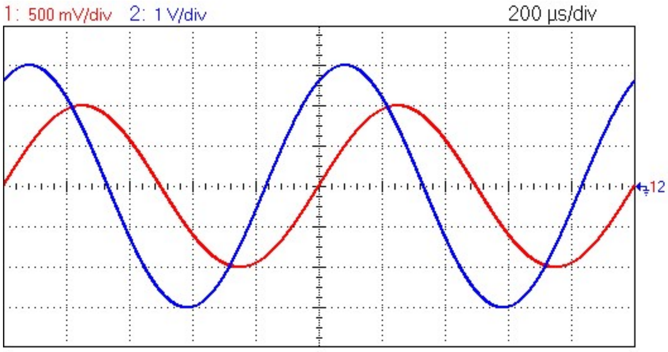
$$z = \frac{\left|x_{mes} - x_{réf}\right|}{u(x_{mes})}$$

Le Zscore est un écart rapporté à l'incertitude de mesure.
Dans les cas les plus simples :
Si z > 2, il y a incompatibilité : la mesure n'est pas jugée convenable au regard de la référence proposée par le modèle
Si z < 2, il y a compatibilité : la mesure est jugée compatible avec la valeur de référence proposée par le modèle.

Partie IX: Exercices d'application

Exercice n°1:
Calculs d'incertitudes élargies
Calculez les incertitudes absolues pour un taux de confiance de 95% dans les cas suivant :

Mesure d'une température avec un thermomètre à graduation
valeur lue : $\theta = 23{,}9°C$; plus petite graduation : 0,5°C
Mesure d'un volume à l'aide d'une fiole jaugée
Fiole jaugée de 100 mL ; intervalle de tolérance : ± 0,1 mL
Mesure d'une période à l'oscilloscope



Mesure d'une masse sur une balance électronique
Une balance numérique au 1/100 de g affiche une masse m = 38,45 g.
Détermination d'une résistance électrique avec le code des couleurs
R = 80 Ω ; tolérance ± 5 %
Mesure de la valeur d'une résistance à l'ohmmètre de précision
On lit R = 0,90097 kΩ ; La notice du fabricant indique : « accuracy : 0,019% + 3d »
Mesure d'un volume à la burette graduée
On mesure un volume d'eau de 40,0 mL avec une burette graduée de 50 mL de classe A (tolérance ± 0,05 mL) graduée au $1/10^{ème}$ de mL

Exercice n°2: Solution d'éosine
L'éosine est une espèce chimique colorée, soluble dans l'eau et possédant des propriétés antiseptique et desséchante.
On souhaite obtenir 100mL de solution à une concentration **C** = $2{,}90 \times 10^{-2}$ mol.L^{-1}.

Détailler le protocole expérimental à suivre en précisant le matériel utilisé. Préciser l'incertitude correspondant à chaque mesure réalisée.
Déterminer l'incertitude absolue et relative sur la concentration finale

Donnée : masse molaire de l'éosine : **M** (Eosine) = 693,6 g / mol ; incertitude de la masse U(m) = 1 mg ; incertitude de volume (fabricant) pour la fiole de 100 mL de classe A : U(V) = 0,1 mL