第五讲凸集及其分离

范翻

中央财经大学 (CCFD)

标准的最优化问题

标准的最优化问题：在标量约束 $G(x) \le c$ 下选择向量 x 以最大化 $F(x)$。

- 等值线：对于一个多变量函数 $F(x)$ 而言，使得函数值等于 c 的所有可能的向量 x 共同构成一条等值线，对应优化问题中的约束条件。

标准的最优化问题：在标量约束 $G(x) \leq c$ 下选择向量 x 以最大化 $F(x)$。

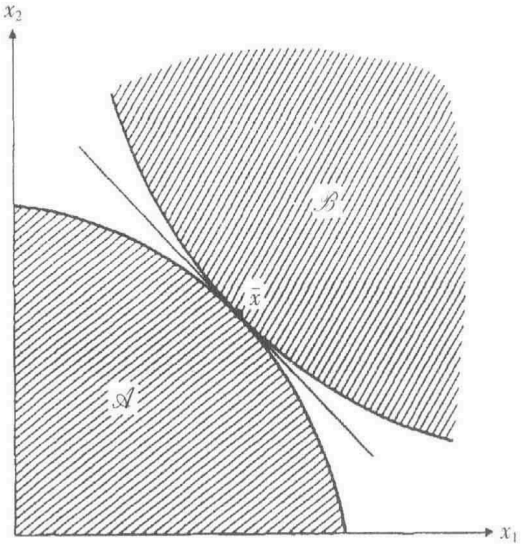
- 等值线：对于一个多变量函数 $F(x)$ 而言，使得函数值等于 c 的所有可能的向量 x 共同构成一条等值线，对应优化问题中的约束条件。
- 上等值集：所有满足 $F(x) \geq v$ 的向量 x 共同构成的集合

标准的最优化问题

标准的最优化问题：在标量约束 $G(x) \leq c$ 下选择向量 x 以最大化 $F(x)$。

- 等值线：对于一个多变量函数 $F(x)$ 而言，使得函数值等于 c 的所有可能的向量 x 共同构成一条等值线，对应优化问题中的约束条件。
- 上等值集：所有满足 $F(x) \geq v$ 的向量 x 共同构成的集合
- 下等值集：所有满足 $G(x) \leq c$ 的向量 x 共同构成的集合

凸集的分离性质



凸集 (convex set)

定义：对于 n 维空间中的点集 S 而言，如果给定 S 中的任意两点 $x^a = (x_1^a, \cdots, x_n^a)$ 和 $x^b = (x_1^b, \cdots, x_n^b)$ 以及闭区间 $[0,1]$ 中的任意实数 θ，点 $\theta x^a + (1-\theta)x^b$ 也在点集 S 中，那么称点集 S 是凸的 **(convex)**。

- 生产函数的下等值集是凸集，意味着什么？

凸集 (convex set)

定义：对于 n 维空间中的点集 S 而言，如果给定 S 中的任意两点 $x^a = (x_1^a, \cdots, x_n^a)$ 和 $x^b = (x_1^b, \cdots, x_n^b)$ 以及闭区间 $[0, 1]$ 中的任意实数 θ，点 $\theta x^a + (1-\theta)x^b$ 也在点集 S 中，那么称点集 S 是凸的 **(convex)**。

- 生产函数的下等值集是凸集，意味着什么？
- 效用函数的上等值集是凸集，意味着什么？

定义 **1**（从函数出发）：如果一个函数 $G(x)$ 满足，对于所有的 x^a, x^b 和任意 $\theta \in [0,1]$，都有

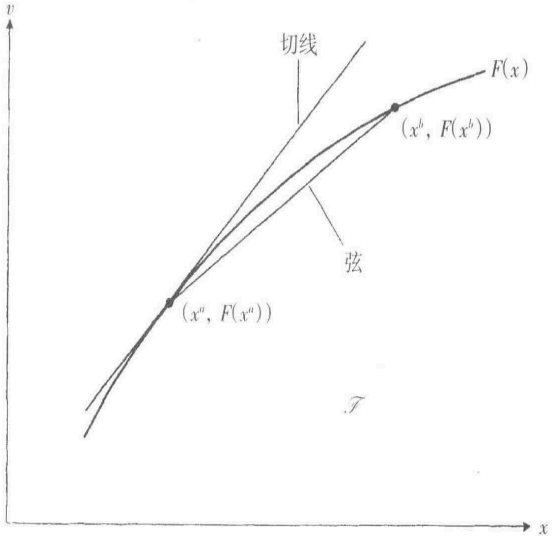
$$G(\theta x^a + (1-\theta)x^b) \leq \theta G(x^a) + (1-\theta)G(x^b)$$

则称其为凸函数 **(convex function)**。
反之，若一个函数 $F(x)$ 满足

$$F(\theta x^a + (1-\theta)x^b) \geq \theta F(x^a) + (1-\theta)F(x^b)$$

则称其为凹函数 **(concave function)**。

凹函数



拟凸函数

从代数上看，集合 $G(x) \leq c$ 是凸集意味着：

$$G(x^a) \leq c, G(x^b) \leq c \Rightarrow G(\theta x^a + (1-\theta)x^b) \leq c$$

如果其中一个端点的值恰好等于 c 时，这个条件又可以表述为 $\forall x^a, x^b, \theta \in [0,1]$：

$$G(\theta x^a + (1-\theta)x^b) \leq max(G(x^a), G(x^b))$$

我们称满足上述条件的函数为拟凸函数 **(quasi convex function)**。
反之，如果函数 $F(x)$ 满足

$$F(\theta x^a + (1-\theta)x^b) \geq min(F(x^a), F(x^b))$$

则称其为拟凹函数 **(quasi concave function)**。

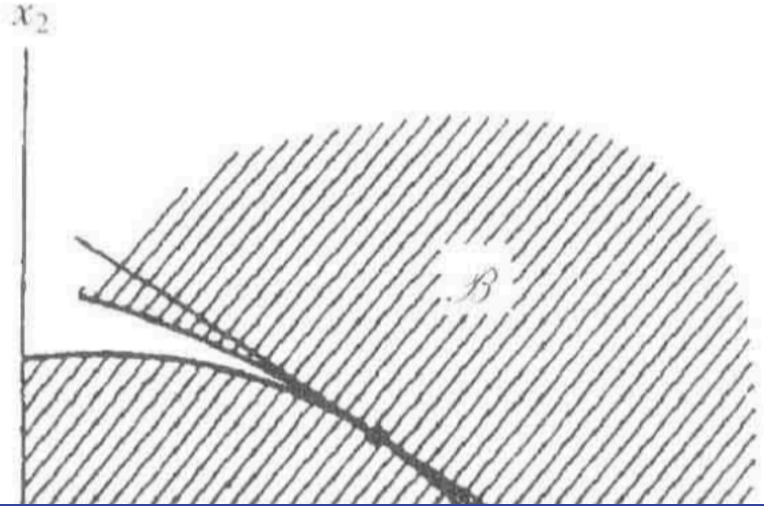
内点与边界点

- 内点：如果存在点 x^0 的邻域 $B(x^0, \delta)$ 包含于集合 S，则称点 x^0 是集合 S 的一个内点 **(inner point)**

内点与边界点

- 内点：如果存在点 x^0 的邻域 $B(x^0, \delta)$ 包含于集合 S，则称点 x^0 是集合 S 的一个内点 **(inner point)**
- 边界点：如果一个点 x^1 既不是集合 S 的内点，也不是集合 S 的补集的内点，则称点 x^1 是集合 S 的一个边界点 **(boundary points)**。换言之，如果一个点 x^1 是集合 S 的边界点，那么其任意邻域内，都既存在属于 S 的点，也存在不属于 S 的点

分散化下的局部失灵



分离定理

如果 A 和 B 为两个没有公共内点的凸集，且至少有一个集合有一个非空内点，那么我们总可以找到一个非零向量 p 和一个数 b，使得超平面 $px = b$ 分离这两个集合，或：

$$px \begin{cases} \leq b, & \forall x \in A \\ \geq b, & \forall x \in B \end{cases}$$

分离角度的最优化定理

给定拟凹函数 F 和拟凸函数 G，点 $\bar{x}$ 在满足约束条件 $G(x) \leq c$ 下使得 $F(x)$ 最大，当且仅当存在一个非零向量 p，使得:

- $\bar{x}$ 在满足 $G(x) \leq c$ 下最大化 px

分离角度的最优化定理

给定拟凹函数 F 和拟凸函数 G，点 $\bar{x}$ 在满足约束条件 $G(x) \leq c$ 下使得 $F(x)$ 最大，当且仅当存在一个非零向量 p，使得：

- $\bar{x}$ 在满足 $G(x) \leq c$ 下最大化 px
- $\bar{x}$ 在满足 $F(x) \geq \bar{v}$ 下最小化 px

假定 x 为生产-消费向量，约束反映了资源的有限性，目标函数为效用函数。p 理解为产出的价格向量，那么上述定理意味着：

- 寻求产出价格最大化的企业家会生产出最优产量 $\bar{x}$

经济学解释

假定 x 为生产-消费向量，约束反映了资源的有限性，目标函数为效用函数。p 理解为产出的价格向量，那么上述定理意味着：

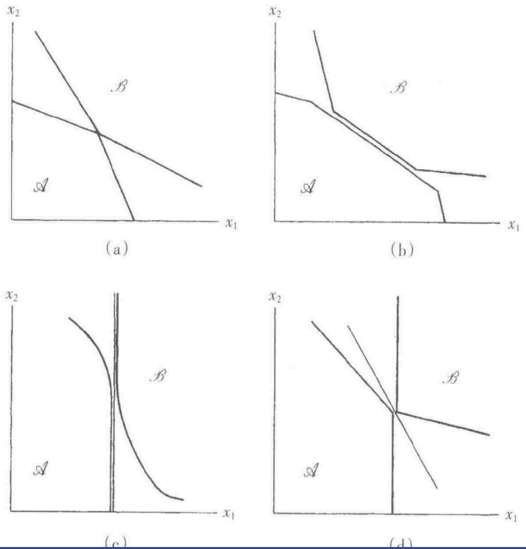
- 寻求产出价格最大化的企业家会生产出最优产量 $\bar{x}$
- 试图以最小支出达到既定效用的消费者也恰好需要 $\bar{x}$

经济学解释

假定 x 为生产-消费向量，约束反映了资源的有限性，目标函数为效用函数。p 理解为产出的价格向量，那么上述定理意味着：

- 寻求产出价格最大化的企业家会生产出最优产量 $\bar{x}$
- 试图以最小支出达到既定效用的消费者也恰好需要 $\bar{x}$
- 社会最优化问题就可以被分散化的机制实现

唯一性


x_2
$\mathscr{B}$
$\mathscr{A}$
x_1
(a)
x_2
$\mathscr{B}$
$\mathscr{A}$
x_1
(b)
x_2
$\mathscr{B}$
$\mathscr{A}$
x_1
(c)
x_2
$\mathscr{B}$
$\mathscr{A}$
x_1
(d)

严格拟凸

严格拟凸函数：

$$G(\theta x^a + (1-\theta)x^b) < max(G(x^a), G(x^b))$$

严格拟凹函数：

$$F(\theta x^a + (1-\theta)x^b) > min(F(x^a), F(x^b))$$

唯一性条件

考虑在约束 $G(x) \leq c$ 下最大化 $F(x)$ 的问题，其中 F 为严格拟凹的，G 为严格拟凸的。假定 x 满足分离角度的最优化定理，那么它将是该最优化问题的唯一解。【证明：反证法】