

第九讲时间最大值原理

范翻

中央财经大学 (CCFD)



思考：如果国家要规划未来 20 年的减排路径，应该怎样平衡短期经济成本和长期环境收益？这与个人的储蓄决策有何异同？

- 政府和居民在当前面临着给定的环境质量（如碳排放水平）；
- 政府需要决定每一期的减排力度，当期环境质量和减排力度决定了下一期的环境质量；
- 社会福利函数会受到每个时期的环境质量影响；
- 减排力度会受到技术水平和当前环境质量的影响；
- 居民会权衡当期和未来的福利，并按照一定方式将未来福利贴现。

基础概念

① 变量区分

变量类型	符号表示	经济学案例
状态变量	y_t	资本存量、环境质量
控制变量	z_t	投资额、减排力度

② 动态系统核心方程

$$y_{t+1} = y_t + Q(y_t, z_t, t)$$

③ 变量约束方程

$$G(y_t, z_t, t) \leq 0 \quad (10.2)$$

在碳减排案例中， $Q(\cdot)$ 函数应该包含哪些关键参数？约束条件 $G(\cdot)$ 可能是什么？

- 目标函数是加性可分的，即可以表达成一系列函数的和，且每个函数仅依赖于当期的状态变量和控制变量：

$$\sum_{t=0}^T F(y_t, z_t, t) \quad (10.3)$$

- 可能存在初值条件和终值条件：
 - 初值条件： $y_0 = \bar{y}_0$
 - 终值条件： $y_{T+1} = \bar{y}_{T+1}$
- 写出上述跨期最大化问题的标准形式。

一个包含时间维度的最大值问题可以表述为：

$$\begin{aligned} \max_{y_t, z_t} \quad & \sum_{t=0}^T F(y_t, z_t, t) \\ \text{s.t.} \quad & y_{t+1} - y_t = Q(y_t, z_t, t) \\ & G(y_t, z_t, t) \leq 0 \\ & y_0 = \bar{y}_0, \quad y_{T+1} = \bar{y}_{T+1} \end{aligned}$$

典型例子：生命周期储蓄 I

考虑一个有已知寿命 T 的工人：

- 其每一期的效用函数为 $\ln c_t$ ， c_t 为第 t 期的消费，且效用折现率为 ρ
- 他可以选择储蓄或借贷，存款利率和贷款利率均为 r
- 在其生命周期内他将赚取 w 的收入，并用 k_t 表示其在第 t 期积累的资产存量（如果为负则代表债务）
- 资产存量 k_t 会为其带来流量收入 $w + rk_t$ ，因此其资产积累由下式决定

$$k_{t+1} - k_t = w + rk_t - c_t$$

- 写出这个最优化问题的标准形式，区分状态变量和控制变量。

时间最大值问题 I

对于时间最大值问题：

$$\max_{y_t, z_t} \sum_{t=0}^T F(y_t, z_t, t) \quad (1)$$

$$s.t. \quad y_{t+1} - y_t = Q(y_t, z_t, t) \quad (10.1)$$

$$G(y_t, z_t, t) \leq 0 \quad (10.2)$$

构造拉格朗日函数，用 π_{t+1} 代表约束 (10.1) 的拉格朗日乘子， λ_t 代表约束 (10.2) 的拉格朗日乘子。

时间最大值问题 II

对于拉格朗日函数

$$\mathcal{L}(y_t, z_t, \pi_{t+1}, \lambda_t) = \sum_{t=0}^T \{F(y_t, z_t, t) + \pi_{t+1}[y_t + Q(y_t, z_t, t) - y_{t+1}] - \lambda_t G(y_t, z_t, t)\}$$

- λ_t 的经济学含义是什么?
 - 关于 t 时刻约束的影子价格
- π_{t+1} 的经济学含义是什么?
 - 关于 $t+1$ 时刻存量的影子价格
- 关于 y_t 和 z_t 的一阶条件分别是什么?

一阶条件 I

关于 $z_t(t = 0, 1, \dots, T)$ 的一阶条件:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_t} \equiv F_z(y_t, z_t, t) + \pi_{t+1} Q_z(y_t, z_t, t) - \quad (2)$$

$$\lambda_t G_z(y_t, z_t, t) = 0 \quad (10.5)$$

关于 $y_t(t = 0, 1, \dots, T)$ 的一阶条件, 需要将 \mathcal{L} 重新整理为包含所有 y_t 的形式:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{t=0}^T \{ F(y_t, z_t, t) + \pi_{t+1} Q(y_t, z_t, t) + y_t(\pi_{t+1} - \pi_t) - \\ & \lambda_t G(y_t, z_t, t) \} + F(y_0, z_0, 0) + \pi_1 Q(y_0, z_0, 0) + \\ & y_0 \pi_1 - y_{T+1} \pi_{T+1} \end{aligned}$$

一阶条件 II

因此, 关于 $y_t(t = 0, 1, \dots, T)$ 的一阶条件为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_t} &\equiv F_y(y_t, z_t, t) + \pi_{t+1} Q_y(y_t, z_t, t) + \\ &\quad \pi_{t+1} - \pi_t - \lambda_t G_y(y_t, z_t, t) \\ &= 0\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}\pi_{t+1} - \pi_t &= -[F_y(y_t, z_t, t) + \pi_{t+1} Q_y(y_t, z_t, t) - \\ &\quad \lambda_t G_y(y_t, z_t, t)]\end{aligned}\tag{3}$$

(10.8)

哈密尔顿函数 I

定义一个新的函数 H ，称为哈密尔顿函数：

$$H(y, z, \pi, t) = F(y, z, t) + \pi Q(y, z, t).$$

考虑一个目标函数是哈密尔顿函数，约束条件服从 (10.2) 式，选择变量为 z_t 的单期最优化问题：

$$\begin{aligned} \max_{z_t} \quad & F(y_t, z_t, t) + \pi_{t+1} Q(y_t, z_t, t) \\ \text{s.t.} \quad & G(y_t, z_t, t) \leq 0 \end{aligned}$$

写出上述单期最大化问题的拉格朗日函数。

哈密尔顿函数 II

拉格朗日函数为：

$$L = H(y_t, z_t, \pi_{t+1}, t) - \lambda_t G(y_t, z_t, t)$$

那么，该拉格朗日函数关于 z_t 的一阶条件为：

$$\frac{\partial L}{\partial z_t} = F_z + \pi_{t+1} Q_z - \lambda_t G_z = 0$$

等价于跨期问题的一阶条件 (10.5)。当 z_t 达到最优时，上述问题的最大值记为 $H^*(y_t, \pi_{t+1}, t)$ 。

在这个框架下, (10.8) 可以简写作:

$$\pi_{t+1} - \pi_t = -L_y(y_t, z_t, \pi_{t+1}, t)$$

在静态最大化问题中, 只有 z_t 是选择变量, y_t 和 π_{t+1} 都是参数。因此使用包络定理可得:

$$\pi_{t+1} - \pi_t = -H_y^*(y_t, z_t, t) \quad (10.11)$$

此外, 由包络定理还有 $H_\pi^* = L_\pi = Q$, 并在最优解处取值。因此 (10.1) 式可以写成与 (10.11) 式对称的形式:

$$y_{t+1} - y_t = H_\pi^*(y_t, \pi_{t+1}, t)$$

最大值原理在满足约束 (10.1) 式和 (10.2) 式下最大化 (10.3) 式的一阶必要条件是：

- 对每一期的 t 而言, z_t 在单期约束 $G(y_t, z_t, t) \leq 0$ 下最大化汉密尔顿函数 $H(y_t, z_t, \pi_{t+1}, t)$
- 差分方程 (10.11) 式和 (10.12) 式共同决定了 y_t 和 π_{t+1} 在时间维度上的变动

最大化条件 (i) 意味着 z_t 的选择会通过 (10.1) 式影响到 y_{t+1} ，从而影响到 y_{t+1} 和 $t+1$ 时期目标函数中的各项。例如，今天大肆挥霍的消费虽然会增加今天的效用，但意味着未来只有较少的资本积累，从而降低了未来的消费和效用。如何刻画 z_t 变化对未来的影响？通过利用受影响的存量的影子价格：

- z_t 对 y_{t+1} 的影响等于其对 $Q(y_t, z_t, t)$ 的影响
- 由此产生的目标函数值变动等于这一影响乘以 y_{t+1} 的影子价格 π_{t+1}
- 汉密尔顿函数中加入 π_{t+1} 修正了目标函数 $F(y_t, z_t, t)$ ，使之考虑了在 t 时期控制变量 z_t 的选择对未来的影响

$$\pi_{t+1} - \pi_t = -[F_y(y_t, z_t, t) + \pi_{t+1} Q_y(y_t, z_t, t) - \quad (4)$$

$$\lambda_t G_y(y_t, z_t, t)] \quad (10.8)$$

$$= -H_y^*(y_t, z_t, t) \quad (10.11)$$

(10.8) 式或等价的 (10.11) 式意味着：

- 单期约束的影子成本 π_{t+1} 意味着 y_t 的一单位边际变化在时期 t 中产生的边际回报为 $F_y(t) - \lambda_t G_y(t)$ ，并在下一期产生额外的 $G_y(t)$ ，即一期中使用 y_t 的利息或机会成本
- 当 y_t 为最优解时，全部的边际回报应该为零，即

$$[F_y(t) - \lambda_t G_y(t)] + \pi_t Q_y(t) + [\pi_{t+1} - \pi_t] = 0$$

- 对于 y_{T+1} 的终值条件，由于这些存量对于目标函数没有任何贡献，最优策略应该是让 y_{T+1} 尽可能低
- 但在某些情况下，也可以先积累一定存量以提供产出或效用，然后保证其在终值时刻恰好折旧完
- 换言之，我们应该有

$$y_{T+1} \geq 0, \quad \pi_{T+1} \geq 0, \text{ 满足互补松弛条件}$$

典型例子：生命周期储蓄 II

最大化问题可以写作

$$\begin{aligned} \max_{c_t} \quad & \sum_{t=0}^T (1 + \rho)^{-t} \ln(c_t) \\ \text{s.t.} \quad & k_{t+1} - k_t = w + rk_t - c_t \end{aligned}$$

定义汉密尔顿函数为

$$H(k_t, c_t, \pi_{t+1}, t) = (1 + \rho)^{-t} \ln(c_t) + \pi_{t+1}(w + rk_t - c_t)$$

典型例子：生命周期储蓄 III

使 H 取得最大值的关于 c_t 的条件为：

$$c_t^{-1}(1 + \rho)^{-t} - \pi_{t+1} = 0$$

汉密尔顿函数的最大值：

$$H^* = -[\ln(\pi_{t+1}) + \rho t](1 + \rho)^{-t} + \pi_{t+1}(w + rk_t) - (1 + \rho)^{-t}$$

状态变量差分方程：

$$k_{t+1} - k_t = \frac{\partial H^*}{\partial \pi_{t+1}} = w + rk_t - \pi_{t+1}^{-1}(1 + \rho)^{-t}$$
$$\pi_{t+1} - \pi_t = -\frac{\partial H^*}{\partial k_t} = -r\pi_{t+1}$$

典型例子：生命周期储蓄 IV

解得：

$$\pi_t = \pi_0(1+r)^{-t}, \quad c_t = \pi_0^{-1} \left(\frac{1+r}{1+\rho} \right)^t$$

消费路径特征：

- 当 $r > \rho$ 时，消费持续增长
 - 生命周期早期 $c < w$
 - 后期阶段 $c > w$
- 当 $r < \rho$ 时，消费呈现递减趋势

连续时间模型

将离散时间模型连续化 (令 $\Delta t \rightarrow 0$):

$$y(t + \delta) - y(t) = Q(y(t), z(t), t)\delta + o(\delta)$$

$$\dot{y}(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{y(t + \delta) - y(t)}{\delta} = Q(y(t), z(t), t)$$

目标函数连续形式:

$$\int_0^T F(y(t), z(t), t) dt$$