习题 2.2

解：由题可知，消费者的效用函数为 $\hat{U}(x,y)=\alpha\ln(x-x_0)+\beta\ln(y-y_0)$

预算约束为 $px+qy=I$

故假设拉格朗日函数为

$$L(x,y,\lambda)=\alpha\ln(x-x_0)+\beta\ln(y-y_0)+\lambda(px+qy-I)$$

一阶必要条件为
$$\begin{cases}\partial L/\partial x=\dfrac{\alpha}{x-x_0}+\lambda p=0\\ \partial L/\partial y=\dfrac{\beta}{y-y_0}+\lambda q=0\\ \partial L/\partial \lambda=px+qy-I=0\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}(\alpha+\beta)px=\alpha I+\beta px_0-\alpha qy_0\\ (\alpha+\beta)qy=\beta I-\beta px_0+\alpha qy_0\end{cases}$$

又 $\alpha+\beta=1$ 所以
$$\begin{cases}px=\alpha I+\beta px_0-\alpha qy_0\\ qy=\beta I-\beta px_0+\alpha qy_0\end{cases}$$

即在这两种商品上的最优支出是收入和价格的线性函数.

习题 2.3

解：目标函数为 $\max\sum_{j=1}^{n}[\alpha_j x_j-\frac{1}{2}\beta_j x_j^2]$

约束条件为 $\sum_{j=1}^{n}x_j\le C$，$x_j\ge0$ $(j=1,2,\dots,n)$

构造拉格朗日函数 $L=\sum_{j=1}^{n}[\alpha_j x_j-\frac{1}{2}\beta_j x_j^2]+\lambda(C-\sum_{j=1}^{n}x_j)+\sum_{j=1}^{n}\mu_j x_j$

其中 $\lambda\ge0$ 为总资本约束的乘数，$\mu_j\ge0$ 为 $x_j\ge0$ 的乘数

对 x_j 求导得

① 当 $x_j>0$ 时，由互补松弛条件知 $\mu_j=0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}=\alpha_j-\beta_j x_j-\lambda=0\Rightarrow x_j=\frac{\alpha_j-\lambda}{\beta_j}>0\Rightarrow\alpha_j-\lambda>0\Rightarrow\alpha_j>\lambda$$

② 当 $x_j=0$ 时，可知 $\mu_j\ge0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}=\alpha_j-\beta_j x_j-\lambda+\mu_j=0\Rightarrow x_j=\frac{\alpha_j-\lambda+\mu_j}{\beta_j}=0$$

$\lambda = \alpha_j + \mu_j \Rightarrow \lambda \geq \alpha_j$

(i) 对于总资本约束 $\sum_{j=1}^{n} x_j \leq C$ 若 $\sum_{j=1}^{n} < C$，则 $\lambda = 0$

此时，对于所有 $x_j > 0$ 的项目，$x_j = \frac{\alpha_j}{\beta_j}$，$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = H < C$

所以当 $C > H$ 时，最优解为 $x_j = \frac{\alpha_j}{\beta_j}$，总投入为 $H < C$，剩余资金 $C - H$ 未被使用

(ii) 当 $\sum_{j=1}^{n} x_j = C$ 时，$\lambda \geq 0$，且由(i)可知此时 $C \leq H$

假设此时所有项目都得到资金，即 $x_j > 0$

则 $\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j - \lambda}{\beta_j} = C \Rightarrow \lambda = \frac{H - C}{K}$

需要满足 $\alpha_j > \lambda = \frac{H-C}{K}$

因此，对所有的 j，如果有 $\alpha_j > \frac{H-C}{K}$，那么每个项目都会得到一些资金

(iii) 根据前面的分析，当某个项目 j 未得到资金时 ($x_j = 0$)，则其 $\alpha_j \leq \lambda$；而那些获得资金的项目 k ($x_k \neq 0$)，则 $\alpha_k > \lambda$ 因此，如果有某个项目未得到资金，那么它对应的 α 一定比任何获得资金的项目小

习题4.1

解：将生产约束加入到社会福利最大化问题中，构建新的拉格朗日函数：

$$L = W(U^1, \dots, U^C) + \sum_{g=1}^{G} \pi_g \left(\Phi^g(z_{1g}, z_{2g}, \dots, z_{Fg}) - \sum_{c=1}^{C} x_{cg}\right) + \sum_{f=1}^{F} \mu_f \left(z_f - \sum_{g=1}^{G} z_{fg}\right)$$

其中，π_g 为商品 g 约束的拉格朗日乘子，

μ_f 为要素 f 约束的拉格朗日乘子

对每个 x_{cg} 求导得 $\frac{\partial W}{\partial U_c} \frac{\partial U^c}{\partial x_{cg}} - \pi_g = 0$

即最优分配的一阶条件和原来一样

对每个 z_{fg} 求导得 $\pi_g \frac{\partial \Phi^g}{\partial z_{fg}} - \mu_f = 0$ 即增加了最优要素配置的新条件

拉格朗日乘子的含义如下：

π_g 表示商品 g 的市场价格，反应了该商品的边际价值

μ_f表示生产要素f的租金率，表示其在生产中的边际贡献价值

若每个企业专精于生产一种商品g，其利润最大化问题为：

$$\max_{z_{fg}} \left(\pi_g \phi^g(z_{1g}, \dots, z_{Fg}) - \sum_{f=1}^{F} \mu_f z_{fg} \right)$$

一阶条件为 $\pi_g \frac{\partial \phi_g}{\partial z_{fg}} - \mu_f = 0$，与中央计划者的一阶条件一致.

因此，生产可以分散化，企业根据市场价格 π_g 和要素租金 μ_f 自主决策

总产出价值为 $\sum_{g=1}^{G} \pi_g x_g$

消费者拥有生产要素，其收入为要素租金的总和：$I_c = \sum_{f=1}^{F} \mu_f z_{fc}$

其中 z_{fc} 是消费者c拥有要素f的数量. 那么 $\sum_{c=1}^{C} I_c = \sum_{f=1}^{F} \mu_f z_f$

根据市场出清条件，所有商品的总销售收入等于总产出价值.

即 $\sum_{f=1}^{F} \mu_f z_f = \sum_{g=1}^{G} \pi_g x_g \Rightarrow \sum_{c=1}^{C} I_c = \sum_{g=1}^{G} \pi_g x_g$

这表明分配给消费者的收入 I_c 总和正好等于总产出的价值