第六讲凹规划

范翻

中央财经大学 (CCFD)

对于 $\theta \in [0,1]$ 而言，称 $F(x)$ 是凹函数，当且仅当:

$$F(x^a+\theta(x^b - x^a)) = F(\theta x^b + (1-\theta)x^a) \geq$$
$$\theta F(x^b) + (1-\theta)F(x^a)$$

稍作变形有

$$\frac{F(x^a + \theta(x^b - x^a)) - F(x^a)}{\theta} \geq F(x)$$

当 $\theta \to 0$，如果 F 是可微的，那么上式左边会趋近于 $F_x(x^a)(x^b - x^a)$（洛必达法则）。因此有

$$F_x(x^a) \geq \frac{F(x^b) - F(x^a)}{x^b - x_a}$$

当 x 是一维的时候：

- $F_x(x^a)$ 就是函数 $F(x)$ 在 x^a 处切线的斜率
- $\frac{F(x^b)-F(x^a)}{x^b-x_a}$ 是函数 $F(x)$ 在点 x^a, x^b 之间连线的斜率
- 函数的凹性意味着切线位于函数曲线之上

凹规划

凹规划的一般问题:

- 考虑在向量约束 $G(x) \leq c$ 下最大化 $F(x)$ 的问题，其中 F 是可微的凹函数，并且约束函数的每一个分量 G^j 都是可微的凸函数。
- 例子：x 为产出向量，$F(x)$ 为出售产品获得的收入，c 为固定的投入要素量，$G(x)$ 为生产 x 所需要的投入向量

最大值函数的性质

对于每组给定的外生参数 c，最优选择 $\bar{x}$ 和最大值 $\bar{v} = F(\bar{x})$ 都是 c 的函数。令 $X(c)$ 表示最优选择函数，$V(c)$ 表示最大值函数：

- V 对于 c 是非减函数，意味着约束条件放松，最大值不可能下降（最多持平）
- V 是凹函数，换言之对于任意给定的两组投入要素 c, c'，以及 $\theta \in [0, 1]$，最大值函数满足

$$V(\theta c + (1-\theta)c') \geq \theta V(c) + (1-\theta)V(c')$$

自然地，我们考虑 $\theta\bar{x} + (1-\theta)\bar{x}'$ 是否可以满足上述要求。

- 对于每一个 j，约束条件 G^j 是凸的，意味着

$$
\begin{aligned}
& G^j(\theta\bar{x} + (1-\theta)\bar{x}') \\
& \leq \theta G^j(\bar{x}) + (1-\theta)G^j(\bar{x}') \\
& \leq \theta c_i + (1-\theta)c_i'
\end{aligned}
$$

- 因此，$\theta\bar{x} + (1-\theta)\bar{x}'$ 是约束条件 $G(x) \leq \theta c_i + (1-\theta)c_i'$ 下的一个可行选择

凹性的证明 II

- 根据 F 的凹性有

$$
\begin{aligned}
& F(\theta\bar{x} + (1-\theta)\bar{x}') \\
& \geq \theta F(\bar{x}) + (1-\theta)F(\bar{x}') \\
& \geq \theta\bar{v} + (1-\theta)\bar{v}'
\end{aligned}
$$

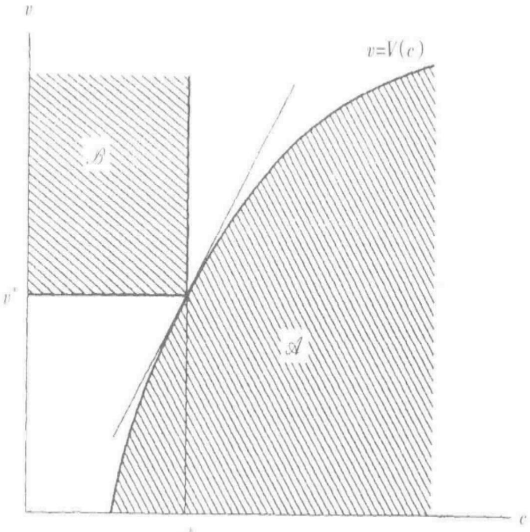
- 而最大值 $V(\theta c + (1-\theta)c')$ 代表着所有可行选择中最大的收入，换言之，一定有

$$
\begin{aligned}
& V(\theta c + (1-\theta)c') \\
& \geq F(\theta\bar{x} + (1-\theta)\bar{x}') \\
& \geq \theta\bar{v} + (1-\theta)\bar{v}'
\end{aligned}
$$

经济学含义

- G 为凸函数，排除了生产中的规模经济或专业化，确保了一个加权平均的产量能够通过相同权重的平均投入生产出来
- F 为凹函数，保证了由此产生的收入大于等于各个收入的对应加权平均值

凹规划中的值函数



分离性质

- 集合 A 是所有满足 $v \leq V(c)$ 的点 (c, v) 的集合，意味着使用投入向量 c 进行生产，生产出的产品至少能带来 v 的收入
- 在集合 A 中选择一点 (c^*, v^*)，使得 $v^* = V(c^*)$，这必然是一个边界点
- 集合 B 是所有满足 $c \leq c^*$ 和 $v \geq v^*$ 的点 (c, v) 的集合

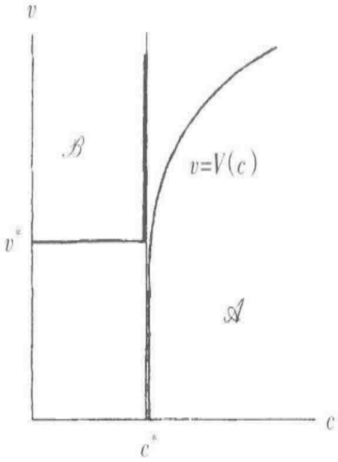
分离超平面：

$$\epsilon v - \lambda c = b = \epsilon v^* - \lambda c^*$$

其中 ϵ 是一个标量，λ 是一个 m 维向量，且满足

$$\epsilon v - \lambda c \begin{cases} \leq b, & \forall (c, v) \in A \\ \geq b, & \forall (c, v) \in B \end{cases}$$

约束规格



(a) (b)

斯拉特条件：集合 A 至少存在一个内点 x_0 使得 $G(x_0) \ll c^*$，即 x_0 满足所有约束条件且严格不等式成立
证明思路： - 假设存在 x_0 满足所有约束严格不等式 - 当 $\epsilon = 0$ 时推导矛盾 - 得出结论 $\epsilon > 0$
关键等式：

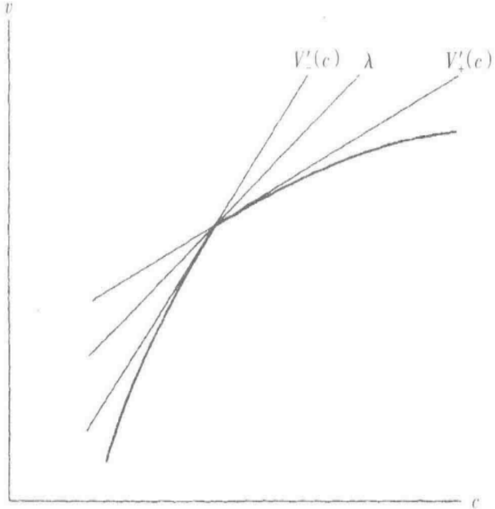
$$\lambda(G(x_0) - c^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (G^i(x_0) - c_i^*) < 0$$

影子价格

- 令 $\epsilon = 1$，则 λ 解释为投入要素的影子价格
- 最大值函数 V 的可微性导致 $\lambda = V_c(c^*)$
- 当 V 不可微时，存在双边不等式：

$$V_i^- \geq \lambda_i \geq V_i^+$$

一般化的边际产品



选择变量

通过分离定理推导关键不等式:

$$F(\bar{x}) - \lambda G(\bar{x}) \leq V(c) - \lambda c$$

结合互补松弛条件: - 对于每个约束 i, $\lambda_i[c_i - G^i(\bar{x})] = 0$ - 要么 $\lambda_i = 0$, 要么 $G^i(\bar{x}) = c_i$

凹规划的必要条件

若 $\bar{x}$ 是凹规划问题的最优解，存在向量 λ 满足：

- $\bar{x}$ 在无约束下最大化 $F(x) - \lambda G(x)$
- $\lambda \geq 0$ 且满足互补松弛条件
- 可微情形下的一阶条件：

$$F_x(\bar{x}) - \lambda G_x(\bar{x}) = 0$$

凸规划的充分条件 I

若 $\bar{x}$ 满足:

- 最大化 $F(x) - \lambda G(x)$
- 满足互补松弛条件

则对任意可行 x 有:

$$F(\bar{x}) \geq F(x)$$

利用凹函数性质:

$$[F(x) - \lambda G(x)] - [F(\bar{x}) - \lambda G(\bar{x})] \leq 0$$

凹规划的充分条件 II

若 $\bar{x}$ 和 λ 满足以下条件:

- $\bar{x}$ 在无约束的情况下最大化了 $F(x) - \lambda G(x)$
- $\lambda \geq 0$ 和 $G(\bar{x}) \leq c$ 满足互补松弛条件

那么 $\bar{x}$ 在约束 $G(x) \geq c$ 下最大化 $F(x)$。如果 $(F - \lambda G)$ 是凹函数，那么

$$F(x) - \lambda G(x) \leq F(\bar{x}) - \lambda G(\bar{x})$$

也意味着条件 (i) 成立。

拟凹规划 (F 拟凹，G 为线性函数)

如果 F 为拟凹函数，那么

$$F((1-\theta)x^a + \theta x^b) \geq \min(F(x^a), F(x^b))$$

假定 $F(x^b) \geq F(x^a)$，那么

$$F(x^a + \theta(x^b - x^a)) \geq F(x^a)$$

将上式看作关于 θ 的函数：

$$h(\theta) \geq h(0), \quad \forall \theta \in [0,1]$$

通过链式法则推导：

$$h'(\theta) = F_x(x^a + \theta(x^b - x^a))(x^b - x^a)$$
$$h'(0) = F_x(x^a)(x^b - x^a) \geq 0$$

考虑在线性约束 $px \leq b$ 下最大化 $F(x)$，最优解必要条件为：

$$F_x(\bar{x}) - \lambda p = 0$$

充分性证明：对任意满足 $F(x) > F(\bar{x}) \equiv \bar{v}$ 的 x，取 $x^a = \bar{x}$ 和 $x^b = x$，由拟凹性可得：

$$F_x(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0$$

结合必要条件推导：

$$p(x-\bar{x}) \geq 0 \Rightarrow px \geq p\bar{x}$$

反证结论：

- 若 $px = p\bar{x}$，则 x 在满足约束下得到更大 F，矛盾
- 故必有 $px > p\bar{x}$，即 x 不可行