颜梓华
2023310229

解

2.2 消费者目标是最大化效用函数 $U(x,y)=\alpha\ln(x-x_0)+\beta\ln(y-y_0)$

预算约束 $p_x x+p_y y=I$

构造拉格朗日函数

$$L=\alpha\ln(x-x_0)+\beta\ln(y-y_0)+\lambda(I-p_x x-p_y y)$$

$$\frac{\alpha}{x-x_0}=\lambda p_x \quad \frac{\beta}{y-y_0}=\lambda p_y$$

$$I-p_x x-p_y y=0$$

$$\lambda=\frac{1}{I-p_x x_0-p_y y_0} \quad \begin{cases} x=x_0+\frac{\alpha}{p_x}(I-p_x x_0-p_y y_0) \\ y=y_0+\frac{\beta}{p_y}(I-p_x x_0-p_y y_0) \end{cases}$$ ∴得证

3.3 (i) $\sum x_g<C$ 时 $\lambda=0$

此时最优投资额为 $x_g=\frac{\alpha_g}{\beta_g}$

总使用资本 $H=\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_g}{\beta_g}$ 若 $C>H$ 则剩余资本 $C-H$ 未被使用 ∴得证

(ii) $\sum x_g=C$ 时 $\lambda=\frac{H-C}{k}$

若 $\alpha_g>\lambda$ 则投资额 $x_g=\frac{\alpha_g-\lambda}{\beta_g}>0$

$\alpha_g>\frac{H-C}{k}$ 则 $\alpha_g>\lambda$ 所有 $x_g>0$ 即每个项目均获资金 ∴得证

(iii) 若 $x_g=0$ 则库恩-塔克条件要求 $\alpha_g\le\lambda$

$\alpha_k=\lambda+\beta_k x_k>\lambda$ ∴ $\alpha_g\le\lambda<\alpha_k$ 得证

4.1 构造拉格朗日函数

$$L=W(U^1,\cdots,U^c)+\sum_g \pi_g\left(X_g-\sum_c x_{cg}\right)+\sum_g \mu_g\left(\Phi^g(z_{1g},\cdots,z_{Fg})-X_g\right)+\sum_f \eta_f\left(z_f-\sum_g z_{fg}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{cg}}=\left(\frac{\partial W}{\partial U^c}\right)\left(\frac{\partial U^c}{\partial x_{cg}}\right)-\pi_g=0$$ π_g：分配乘子 μ_g：生产乘子（影子价格）

$$\frac{\partial L}{\partial z_{fg}}=\mu_g\cdot\frac{\partial\Phi^g}{\partial z_{fg}}-\eta_f=0 \Rightarrow \mu_g\cdot MP_{fg}=\eta_{fg}$$ η_g：要素乘子

利润最大化问题：$\max\limits_{z_{fg}} \pi_g\Phi^g(z_{1g},\cdots,z_{Fg})-\sum_f \eta_f z_{fg}$

F.O.C. $\pi_g\cdot\frac{\partial\Phi^g}{\partial z_{fg}}=\eta_f$ 与最优要素配置条件一致

总产出价值 $\sum_g \pi_g X_g=\sum_g\sum_f \eta_f z_{fg}=\sum_f \eta_f z_f$

消费者收入 I_c 来自要素所有权 ∴ $\sum_c I_c=\sum_f \eta_f z_f$

∴ $\sum_c I_c=\sum_g \pi_g X_g$ 即消费者收入等于总产出价值 得证