

第六讲凹规划

范翻

中央财经大学 (CCFD)



凹函数及其导数 I

对于 $\theta \in [0, 1]$ 而言, 称 $F(x)$ 是凹函数, 当且仅当:

$$F(x^a + \theta(x^b - x^a)) = F(\theta x^b + (1 - \theta)x^a) \geq \theta F(x^b) + (1 - \theta)F(x^a)$$

稍作变形有

$$\frac{F(x^a + \theta(x^b - x^a)) - F(x^a)}{\theta} \geq F(x)$$

当 $\theta \rightarrow 0$, 如果 F 是可微的, 那么上式左边会趋近于 $F_x(x^a)(x^b - x^a)$ (洛必达法则)。因此有

$$F_x(x^a) \geq \frac{F(x^b) - F(x^a)}{x^b - x^a}$$

凹函数及其导数 II

当 x 是一维的时候:

- $F_x(x^a)$ 就是函数 $F(x)$ 在 x^a 处切线的斜率
- $\frac{F(x^b)-F(x^a)}{x^b-x^a}$ 是函数 $F(x)$ 在点 x^a, x^b 之间连线的斜率
- 函数的凹性意味着切线位于函数曲线之上

凹规划 (Concave Programming) 的定义

凹规划是一类特殊的数学优化问题，其目标函数为凹函数，且约束条件定义的可行域为凸集。具体形式如下：

$$\begin{aligned} \max_x \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p, \\ & x \in X \subseteq \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

其中：

- 目标函数 $f(x)$ 是凹函数（若为最小化问题，则要求 $f(x)$ 是凸函数）。
- 不等式约束 $g_i(x)$ 是凹函数（确保可行域 $\{x \mid g_i(x) \geq 0\}$ 是凸集）。
- 等式约束 $h_j(x)$ 是仿射函数（即线性函数加常数，形如 $h_j(x) = a_j^T x + b_j$ ）。
- 集合约束 X 是凸集（如 \mathbb{R}^n 或某个凸多面体）。

最大值函数的性质

对于每组给定的外生参数 c ，最优选择 \bar{x} 和最大值 $\bar{v} = F(\bar{x})$ 都是 c 的函数。令 $X(c)$ 表示最优选择函数， $V(c)$ 表示最大值函数：

- V 对于 c 是非减函数，意味着约束条件放松，最大值不可能下降（最多持平）
- V 是凹函数，换言之对于任意给定的两组投入要素 c, c' ，以及 $\theta \in [0, 1]$ ，最大值函数满足

$$V(\theta c + (1 - \theta)c') \geq \theta V(c) + (1 - \theta)V(c')$$

凹性的证明 I

自然地，我们考虑 $\theta\bar{x} + (1 - \theta)\bar{x}'$ 是否可以满足上述要求。

- 对于每一个 j ，约束条件 G^j 是凸的，意味着

$$\begin{aligned} G^j(\theta\bar{x} + (1 - \theta)\bar{x}') \\ &\leq \theta G^j(\bar{x}) + (1 - \theta) G^j(\bar{x}') \\ &\leq \theta c_i + (1 - \theta) c'_i \end{aligned}$$

- 因此， $\theta\bar{x} + (1 - \theta)\bar{x}'$ 是约束条件 $G(x) \leq \theta c_i + (1 - \theta) c'_i$ 下的一个可行选择

凹性的证明 II

- 根据 F 的凹性有

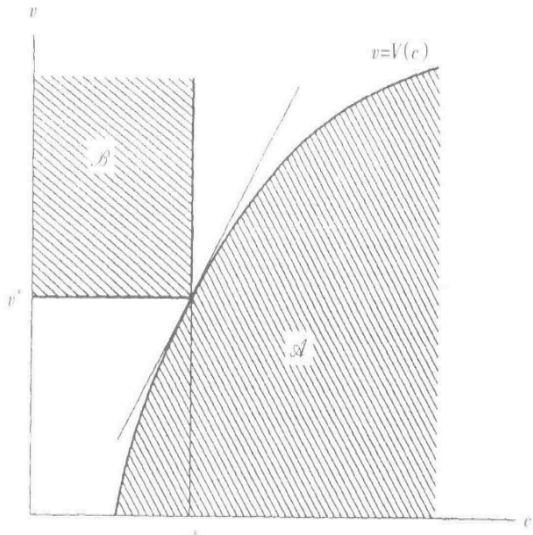
$$\begin{aligned} & F(\theta\bar{x} + (1 - \theta)\bar{x}') \\ & \geq \theta F(\bar{x}) + (1 - \theta)F(\bar{x}') \\ & \geq \theta\bar{v} + (1 - \theta)\bar{v}' \end{aligned}$$

- 而最大值 $V(\theta c + (1 - \theta)c')$ 代表着所有可行选择中最大的收入，换言之，一定有

$$\begin{aligned} & V(\theta c + (1 - \theta)c') \\ & \geq F(\theta\bar{x} + (1 - \theta)\bar{x}') \\ & \geq \theta\bar{v} + (1 - \theta)\bar{v}' \end{aligned}$$

- G 为凸函数，排除了生产中的规模经济或专业化，确保了一个加权平均的产量能够通过相同权重的平均投入生产出来
- F 为凹函数，保证了由此产生的收入大于等于各个收入的对应加权平均值

凹规划中的值函数



分离性质

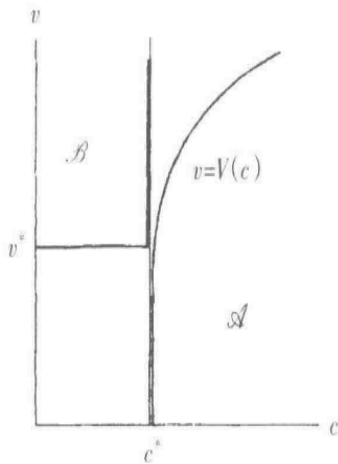
- 集合 A 是所有满足 $v \leq V(c)$ 的点 (c, v) 的集合, 意味着使用投入向量 c 进行生产, 生产出的产品至少能带来 v 的收入
 - 在集合 A 中选择一点 (c^*, v^*) , 使得 $v^* = V(c^*)$, 这必然是一个边界点
 - 集合 B 是所有满足 $c \leq c^*$ 和 $v \geq v^*$ 的点 (c, v) 的集合
- 分离超平面:

$$\epsilon v - \lambda c = b = \epsilon v^* - \lambda c^*$$

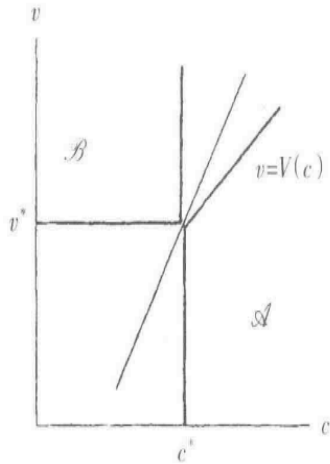
其中 ϵ 是一个标量, λ 是一个 m 维向量, 且满足

$$\epsilon v - \lambda c \begin{cases} \leq b, & \forall (c, v) \in A \\ \geq b, & \forall (c, v) \in B \end{cases}$$

约束规格



(a)



(b)

斯拉特条件

斯拉特条件：集合 A 至少存在一个内点 x_0 使得 $G(x_0) \ll c^*$ ，即 x_0 满足所有约束条件且严格不等式成立

证明思路：

- 假设存在 x_0 满足所有约束严格不等式 - 当 $\epsilon = 0$ 时推导矛盾
- 得出结论 $\epsilon > 0$

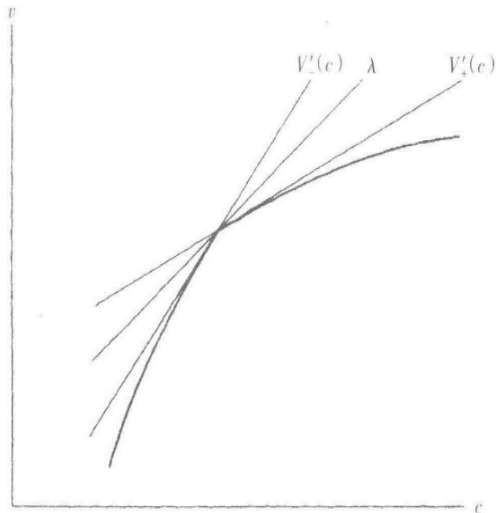
关键等式：

$$\lambda(G(x_0) - c^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(G^i(x_0) - c_i^*) < 0$$

- 令 $\epsilon = 1$, 则 λ 解释为投入要素的影子价格
- 最大值函数 V 的可微性导致 $\lambda = V_c(c^*)$
- 当 V 不可微时, 存在双边不等式:

$$V_i^- \geq \lambda_i \geq V_i^+$$

一般化的边际产品



通过分离定理推导关键不等式:

$$F(\bar{x}) - \lambda G(\bar{x}) \leq V(c) - \lambda c$$

结合互补松弛条件:

- 对于每个约束 i , $\lambda_i [c_i - G^i(\bar{x})] = 0$
- 要么 $\lambda_i = 0$, 要么 $G^i(\bar{x}) = c_i$

凹规划的必要条件

若 \bar{x} 是凹规划问题的最优解, 存在向量 λ 满足:

- \bar{x} 在无约束下最大化 $F(x) - \lambda G(x)$
- $\lambda \geq 0$ 且满足互补松弛条件
- 可微情形下的一阶条件:

$$F_x(\bar{x}) - \lambda G_x(\bar{x}) = 0$$

凸规划的充分条件 I

若 \bar{x} 满足:

- 最大化 $F(x) - \lambda G(x)$
- 满足互补松弛条件

则对任意可行 x 有:

$$F(\bar{x}) \geq F(x)$$

利用凹函数性质:

$$[F(x) - \lambda G(x)] - [F(\bar{x}) - \lambda G(\bar{x})] \leq 0$$

凹规划的充分条件 II

若 \bar{x} 和 λ 满足以下条件:

- \bar{x} 在无约束的情况下最大化了 $F(x) - \lambda G(x)$
- $\lambda \geq 0$ 和 $G(\bar{x}) \leq c$ 满足互补松弛条件

那么 \bar{x} 在约束 $G(x) \geq c$ 下最大化 $F(x)$ 。如果 $(F - \lambda G)$ 是凹函数, 那么

$$F(x) - \lambda G(x) \leq F(\bar{x}) - \lambda G(\bar{x})$$

也意味着条件 (i) 成立。

拟凹规划 (F 拟凹, G 为线性函数)

如果 F 为拟凹函数, 那么

$$F((1 - \theta)x^a + \theta x^b) \geq \min(F(x^a), F(x^b))$$

假定 $F(x^b) \geq F(x^a)$, 那么

$$F(x^a + \theta(x^b - x^a)) \geq F(x^a)$$

将上式看作关于 θ 的函数:

$$h(\theta) \geq h(0), \quad \forall \theta \in [0, 1]$$

通过链式法则推导:

$$h'(\theta) = F_x(x^a + \theta(x^b - x^a))(x^b - x^a)$$

$$h'(0) = F_x(x^a)(x^b - x^a) \geq 0$$

考虑在线性约束 $px \leq b$ 下最大化 $F(x)$ ，最优解必要条件为：

$$F_x(\bar{x}) - \lambda p = 0$$

充分性证明：对任意满足 $F(x) > F(\bar{x}) \equiv \bar{v}$ 的 x ，取 $x^a = \bar{x}$ 和 $x^b = x$ ，由拟凹性可得：

$$F_x(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0$$

结合必要条件推导:

$$p(x - \bar{x}) \geq 0 \Rightarrow px \geq p\bar{x}$$

反证结论:

- 若 $px = p\bar{x}$, 则 x 在满足约束下得到更大 F , 矛盾
- 故必有 $px > p\bar{x}$, 即 x 不可行