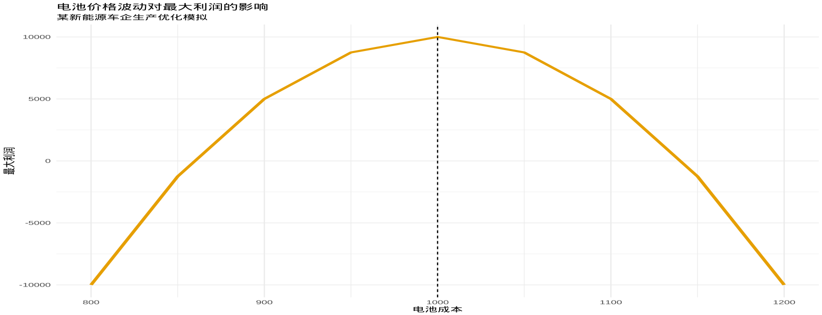
第四讲最大值函数

范翻

中央财经大学 (CCFD)



决策困境：

- 当电池成本 从 1000 元/kWh 上涨时：
- 单日最大利润下降速度如何量化？
- 是否应调整生产计划或库存策略？

本讲学习目标

1. 理解最大值函数的数学构造与经济内涵
2. 掌握包络定理的内容
3. 应用定理解析短期/长期决策差异
4. 构建消费者与生产者行为的统一分析框架

最大值函数

- 对于一个最优化问题，一般而言存在着选择变量、目标函数和约束条件。当选择变量达到最优选择$\bar{x}$ 时，目标函数取得最大值/最小值，即 $v = F(\bar{x})$
- 在给定外生参数 θ，以及目标函数和约束条件形式的情况下，每个最优化问题对应着一个最大值 v ，以及一个（或若干个）最优选择 $\bar{x}$
- 一旦考虑外生参数 θ 的变化，选择变量所能达到的最优选择将会随之变化。即每种情况下的最优选择 $\bar{x}$ 会是外生参数 θ 的函数
- 对应的最大值/最小值实际上也会是外生参数 θ 的函数 $v(\theta)$

参数进入目标函数的情况

假定参数向量 θ 进入目标函数，通过选择 x ，在向量约束 $G(x) = c$ 下 (注意：此时参数 θ 并不会影响约束条件) 最大化目标函数 $F(x, \theta)$

此时，目标函数和拉格朗日函数均依赖于 θ，因此

$$L(x, \lambda, \theta) = F(x, \theta) + \lambda[c - G(x)]$$

最优选择 $\bar{x}$ 满足一阶条件

$$L_x(\bar{x}, \lambda, \theta) = 0, L_\lambda(\bar{x}, \lambda, \theta) = 0$$

最大值的变化

目标函数的最大值记作 v，假定 θ 变动到 $\theta + d\theta$ 。这会导致最优选择 $\bar{x}$ 变到 $\bar{x} + d\bar{x}$，进而最大值 v 变到 $d + dv$：

$$\begin{aligned}
dv &= F(\bar{x} + d\bar{x}, \theta + d\theta) - F(\bar{x}, \theta) \\
&= F_x(\bar{x}, \theta) d\bar{x} + F_\theta(\bar{x}, \theta) d\theta \\
&= \lambda G_x(\bar{x}) d\bar{x} + F_\theta(\bar{x}, \theta) d\theta \\
&= F_\theta(\bar{x}, \theta) d\theta
\end{aligned}$$

- $G_x(\bar{x})d\bar{x} = 0$，因为 $G(\bar{x}) = G(\bar{x} + d\bar{x})$
- 当一个不影响约束条件的参数发生变化后，如果要计算其所导致目标函数最大值的一阶变化，不需要考虑最优选择 $\bar{x}$ 自身的变动
- 我们可以考虑在原来的最优选择处计算参数 θ 变动的偏导数，以及 θ 的变动情况

成本最小化问题 I

最大化 $F(x,\theta) = -\theta x$，同时满足 $G(x) = c$ 。将由此产生的最大值记作 $-v$ ，那么

$$d(-v) = F_\theta(\bar{x},\theta)d\theta = -d\theta \cdot \bar{x} \Longrightarrow dv = \bar{x}d\theta$$

v 意味着当投入要素价格为 θ 时，生产出 c 单位产品的最小成本
当价格发生变化时，生产者会如何调整最优选择?
生产者会减少使用变得更贵的投入要素，同时用更多的（相对更便宜的）其他要素来替代，并且相互替代会沿着一条等产量线进行
我们对 $v = \theta\bar{x}$ 进行微分，可得 $dv = \theta d\bar{x} + d\theta\bar{x}$

- 第一项意味着，以原来的价格衡量的投入组合变动的价值
- 第二项意味着，以原来的最优产量衡量的价格变动的价值
- 在原来的价格下，原来的投入组合选择已经是最优的了，因此任何变动的价值的一阶效应必然为零

包络定理 (**Envelope Theorem**) 的标准定义:
在优化问题中，若参数变化时最优值的响应可通过直接效应完全刻画，则间接效应（通过调整决策变量）为零。数学表述为:
设优化问题:

$$V(a) = \max_{x} \ f(x, a)$$

其中 x 是决策变量，a 是参数。若 $x^*(a)$ 是内点解且可微，则:

$$\frac{dV(a)}{da} = \left.\frac{\partial f(x^*, a)}{\partial a}\right|_{x=x^*(a)}$$

即参数变化对最优值的影响仅需计算其对目标函数的直接偏导数，无需考虑 $x(a)$ 的调整路径。

参数影响所有函数

假定参数 θ 同时影响目标函数 F 和约束条件 G，且约束条件为 $G(x,\theta)=c$，其中 θ 和 c 是不同的，因此

$$G_x(x,\theta)dx + G_\theta(x,\theta)d\theta = 0$$

对于最大值函数的变动而言

$$\begin{aligned} dv &= -\lambda G_\theta(\bar{x},\theta)d\theta + F_\theta(\bar{x},\theta)d\theta \\ &= L_\theta(\bar{x},\lambda,\theta)d\theta \end{aligned}$$

比较条件 5.1 和 5.4:

- 当 θ 影响约束时，变动 $d\theta$ 会影响约束条件 $G(x)$，使得 G 的值增加 $G_\theta(\bar{x},\theta)d\theta$
- 这相当于 c 减少同等量，等价于 v 的值下降 $\lambda G_\theta(\bar{x},\theta)d\theta$（注意:$\lambda$ 代表着 c 变化一单位导致最大值函数 v 的边际变化）

定义一个更大的参数向量 $\hat{\theta}$，其包括子向量 θ 和 c，并将约束条件写作：

$$\hat{G}(x, \hat{\theta}) \equiv G(x, \theta) - c = 0$$

拉格朗日函数可以写作：

$$\hat{L}(x, \lambda, \hat{\theta}) \equiv F(x, \theta) - \lambda \hat{G}(x, \hat{\theta})$$

因此，最大值函数的变动等价于：

$$dv = \hat{L}_{\hat{\theta}}(\bar{x}, \lambda, \hat{\theta}) d\hat{\theta}$$

而对于广义约束条件而言：

$$\hat{G}\hat{\theta}(x, \hat{\theta}) d\hat{\theta} = G_{\theta}(x, \theta) d\theta - dc$$

因而 dv 的表达式可以变为：

$$dv = L_{\theta}(\bar{x}, \lambda, \theta) d\theta + \lambda dc.$$

某些选择变量固定不变

- 当外生参数 θ 发生变化时，会影响最优选择向量 x 的取值，进而影响最大值 v。
- 包络定理告诉我们，关于最大值 v 的变化 dv，我们可以不需要了解最优选择 x 的变化。

$$dv = L_{\theta}(\bar{x}, \lambda, \theta) d\theta + \lambda dc.$$

- 上式中，dv 的变化可以区分为两个部分：
    1. 当 x 固定在原来的最优选择下，θ 变化对最大值的偏导数效应；
    2. 如果参数变动还影响约束条件，还要考虑等价的约束条件右边 c 的影响。

短期和长期的生产计划 I

对于一个厂商而言，长期内资本和劳动都可以调整，但在短期内资本固定在某个水平无法变动。假设选择变量是 y, z ，其中：

- 在长期中，y 和 z 都可以任意变动
- 在短期内，z 固定不变而仅有 y 可以变化

最优化问题可以写作：

$$\begin{aligned} max \quad & F(y, z, \theta) \\ s.t. \quad & G(y, z, \theta) = 0 \end{aligned}$$

在长期中，最优选择和对应的值函数是外生参数 θ 的函数，即

$$y_l = Y(\theta), z_l = Z(\theta), v_l = V(\theta)$$

在短期中，因为 z 固定不变，所以本质上是类似 θ 的参数：

$$y_s = Y(z, \theta), v_s = V(z, \theta)$$

思考：v_l 和 v_s 之间有什么关系呢?

最大值函数的关系

长期最大值和短期最大值之间满足

$$V(\theta) \geq V(z,\theta), \forall(z,\theta)$$

- 对于任意给定的外生参数 θ，长期最大值必然大于等于短期最大值；
- 原因在于，短期最大值所能做出的最优选择 $y_s = Y(z,\theta)$，一定可以在长期内被选择；
- 等号成立恰好在 $y_s = y_l$，即短期内 z 的取值恰好等于长期内 $z_l = Z(\theta)$。

如果上述函数都是可微的，那么我们可以得到

$$V^{'}(\theta) = V_{\theta}(Z(\theta),\theta)$$

- 等式右边是短期最优值函数 $V(z,\theta)$ 在变量 z 不变时，在点 $z = Z(\theta)$ 处取值的偏导数。

考虑如下生产函数的短期和长期成本曲线之间的关系：

$$Q = (KL)^{1/\alpha}$$

其中，Q 代表产量，K 是短期固定资本，L 是劳动。如果

- $\alpha = 2$，那么规模报酬不变
- $\alpha < 2$，那么规模报酬递增
- $\alpha > 2$，那么规模报酬递减

令 w 表示工资率，r 表示资本使用成本。则长期成本函数为：

$$C(w,r,Q) = \min_{K,L}\{\underbrace{wL + rK}_{\text{最小化成本}} \mid \underbrace{KL = Q^{\alpha}}_{\text{生产目标}}\}$$

使用拉格朗日方法，很容易得到成本最小的投入选择：

$$K = (wQ^{\alpha}/r)^{1/2}$$
$$L = (rQ^{\alpha}/w)^{1/2}$$

那么，长期成本函数为：

$$C(w,r,Q) = 2(wr)^{1/2}Q^{\alpha/2}$$

短期和长期成本 III

在短期内没有选择资本 K 的自由。如果使用资本 K 生产出产量 Q，那么必须使用劳动 $L = Q^\alpha/K$，成本函数变为：

$$C(w,r,Q,K) = wQ^\alpha/K + rK$$

- 长期的边际成本为：$C_Q(w,r,Q) = \alpha(wr)^{1/2}Q^{\alpha/2-1}$
- 短期的边际成本为：$C_Q(w,r,Q,K) = \alpha wQ^{\alpha-1}/K$
- 如果 K 的值恰好是长期中最优值 $\bar{K} = (wQ^\alpha/r)^{1/2}$，那么短期边际成本和长期边际成本是一样的么？

$$\begin{aligned} C_Q(w,r,Q,\bar{K}) &= \alpha wQ^{\alpha-1}/\bar{K} \\ &= \alpha wQ^{\alpha-1}/(wQ^\alpha/r)^{1/2} \\ &= \alpha(wr)^{1/2}Q^{\alpha/2-1} \end{aligned}$$

考虑一个消费者，在 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = I$ 的预算约束下最大化效用 $U(x)$

- 这个最大化问题的参数为价格向量 $\mathbf{p}$ 和收入 I，并由此得到最大效用为 $V(\mathbf{p}, I)$
- 称 $V(\mathbf{p}, I)$ 为间接效用函数，以区别于以消费商品数量决定的 (直接) 效用函数

对于上述效用最大化问题，其拉格朗日函数为:

$$L(x, \lambda, p, I) = U(x) + \lambda(I - px)$$

回忆一下，包络定理告诉我们，最大值的变动等价于

$$dv = \hat{L}_{\hat{\theta}}(\bar{x}, \lambda, \hat{\theta})d\hat{\theta}$$

因此，在最优解处必然有

$$V_I(\mathbf{p}, I) = L_I(x, \lambda, p, I) = \lambda$$
$$V_{p_i}(\mathbf{p}, I) = L_{p_i}(x, \lambda, p, I) = -\lambda x_i$$

- 因此，如果我们知道消费者的间接效用函数，那么可以很轻易地找出消费者的需求函数：

$$D(\mathbf{p}, I) = -V_p(\mathbf{p}, I)/V_I(\mathbf{p}, I), \forall i = 1, \cdots, n$$

- 相反，如果我们知道消费者的（直接）效用函数，那么需要求解所有约束条件下的最大化问题，才能找到消费者的需求函数

支出最小化问题

- 考虑消费者如何以最少的支出达到一个目标效用水平的问题，最小支出是关于价格向量 $\mathbf{p}$ 和目标效用水平 u 的函数 $E(\mathbf{p}, u)$，称之为支出函数
- 这个最小化问题的拉格朗日函数可以写作：

$$L(x, \mu, p, u) = px + \mu[u - U(x)]$$

- 类似地，$E_u(p, u) = \mu$，意味着为了实现目标效用水平的边际增加，所要求的最小支出的增加
- 以及，$E_p(p, u) = x$，代表着对给定效用水平时，使得支出最小的商品组合，我们称之为希克斯需求函数 $C(p, u)$

斯拉茨基分解

- 从某个效用水平 u 开始，在给定价格水平下达到效用水平所需要的最小支出为 $I = E(p, u)$，对应的希克斯需求为 $C(p, u)$
- 以上面的最小支出 I 作为货币收入，并找到效用最大化的选择 $D(p, I)$，则有 $C(p, u) = D(p, I)$
- 对于第 j 个商品的需求，两边同时对第 k 个商品价格求导，根据链式法则有

$$\begin{aligned}
C_k^j(p, u) &= D_k^j(p, E(p, u)) \\
&= \underbrace{D_k^j(p, I)}_{\text{替代效应}} + \underbrace{D_I^j(p, I)E_k(p, u)}_{\text{收入效应}}
\end{aligned}$$