

## 第一讲：最优化问题概述

范翻

中央财经大学 (CCFD)



# 课程信息

成绩构成：

- ① 考勤 (15 分)：总计 3 次，每次 5 分；
- ② 期中考试 (15 分)
- ③ 期末考试 (70 分)

教材：

- 《经济理论中的最优化方法》 迈克西特
- 《动态最优化基础》 蒋中一

- ① 最优化问题概述
- ② 重温效用最大化问题
- ③ 数理基础 part I

# 一般表述

一个典型的最优化问题可以表述为：

$$\begin{aligned} \max / \min_x \quad & F(x) \\ & G(x) \leq 0 \\ & H(x) = 0 \end{aligned} \quad (P)$$

- 选择变量  $x \in X$
- 目标函数  $F(x) : X \rightarrow R$ ,
- 约束条件:
  - 不等式约束  $G(x) : X \rightarrow Y$
  - 等式约束  $H(x) : X \rightarrow Z$
- $X$  为选择变量  $x$  的取值空间（范围）， $R$  为实数空间， $X, Y, Z$  可为多维（有限维）实数空间或无限维函数空间。

# 非线性规划问题 (nonlinear programming, NLP)

当变量空间  $X$  和约束条件中函数的取值空间  $Y, Z$  均为有限维实数空间时, 上述最优化问题 (P) 被称为非线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, \dots, x_n} \quad & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \end{aligned} \quad (\text{NLP})$$

其中

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ h_l(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

给定消费者的效用函数形式，在完全竞争市场下，消费者面对给定的市场价格，在给定收入约束下，如何选择不同消费品的最优组合以最大化效用？对于这个问题：

- ① 消费者的选择变量是什么?
- ② 目标函数是什么?
- ③ 约束条件是什么?

从另一个角度来看,如果消费者要达到一定的效用水平,如何最小化消费总支出?对应的选择变量、目标函数和约束条件是什么?如何用非线性规划的形式来表述上述问题?

## 消费者选择问题 II

效用最大化问题:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, \dots, x_n} \quad & U(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{s.t.} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \leq y \end{aligned}$$

支出最小化问题:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, \dots, x_n} \quad & p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \\ \text{s.t.} \quad & U(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq v \end{aligned}$$

# 古典变分法问题 (calculus of variation)

当变量空间  $X$  为函数空间时，最优化问题 (P) 可称为函数空间的非线性规划问题。函数空间的最优化问题，包括古典变分法问题与在其基础上发展而来的最优控制问题。

一个最简变分法问题寻求符合端点条件的、使目标积分值最小的函数：

$$\begin{aligned} \min_{x(\cdot)} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \\ \text{s.t. } x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \end{aligned} \quad (\text{CVP})$$

其中， $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$  表示  $x(t)$  的导函数。



# 最优控制问题 (optimal control problem, OCP)

20 世纪 50 年代, 古典变分法进一步发展出最优控制理论 (optimal control theory), 一个基础的最优控制问题如下:

$$\begin{aligned} \min_{x(\cdot), u(\cdot)} \quad & \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \\ \text{s.t.} \quad & \dot{x}(t) = \Phi(t, x(t), u(t)) \\ & x(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

状态变量  $x(t)$  的变化由微分方程 (b) 决定, 且通过 (a) 直接影响目标函数  $f(t, x, u)$ ;

控制变量  $u(t)$  会通过两种渠道影响最优值:

- 直接渠道是影响 (a) 中的目标函数;
- 间接渠道是影响 (b) 中的控制变量  $x(t)$  的值, 进而影响目标函数.

假设经济体中存在无限期生存的消费者:

- 经济体的人均产出完全转化为消费者的收入，且取决于人均资本存量和技术水平，即  $f(k(t))$ ;
- 消费者在每一时点上选择当期的消费  $c(t)$  和储蓄，且储蓄完全转化为下一期的投资，初始人均资本存量为  $k(0)$ ;
- 消费者的效用函数形式为  $U(c(t))$ ;
- $\theta$  代表时间偏好率或主观贴现率，衡量了不同时点效用的替代程度。

在这个连续型最优经济增长问题中，消费者的状态变量、控制变量分别是什么？

## 最优经济增长问题（连续型）II

最优增长问题的核心是消费者在预期每期收入的情况下，选择最优的消费路径，并由此决定了相对应的资本路径，从而最大化其从现在到将来的效用贴现值总和。以最优控制问题的形式可以表述为：

$$\begin{aligned} \max_{c(\cdot), k(\cdot)} \quad & \int_0^{\infty} U(c(t)) e^{-\theta t} dt \\ \text{s.t.} \quad & \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) \\ & k(0) = k_0 \end{aligned}$$

在这个最优控制问题中，消费路径  $c(t)$  控制变量，资本存量  $k(t)$  是状态变量，该问题的最优解  $c(t), k(t)$  即表示最优的消费和资本的增长路径。

## 动态规划 (dynamic programming)

当选择变量  $X$  是有限维向量时, 要考虑的最优化问题也就是有限维空间的非线性规划问题 (NLP)。如果选择函数  $X$  是无限维的离散变量  $(x_1, x_2, \dots)$  时, 通常采取动态规划方法 (dynamic programming, DP):

$$\begin{aligned} \min_{x_t, u_t} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} f(t, x_t, u_t) \\ \text{s.t.} \quad & x_{t+1} - x_t = g(t, x_t, u_t) \\ & x_0 = \bar{x}_0 \\ & u_t \in U \end{aligned} \tag{DP}$$

其中  $t$  代表离散的时间,  $t = 0, 1, 2, \dots$ , 约束条件的动态方程一般称为差分方程。

## 无限期离散型 Ramsey 最优经济增长问题

用离散型变量描述上述最优经济增长问题时，可以重新表述为：

$$\begin{aligned} \max_{c_t, k_t} \quad & \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \\ \text{s.t.} \quad & k_{t+1} - k_t = f(k_t) - c_t, \quad t = 0, 1, \dots \\ & k_0 = \bar{k}_0 \end{aligned}$$

离散形式的目标函数更直观地表述了每期消费效用贴现值的总和，差分方程也更直观地描述了前后期资本存量的变化。但不论是表述为连续形式还是离散形式，主要数学结论与经济学含义应该是一致的。

- ① 最优化问题概述
- ② 重温效用最大化问题
- ③ 数理基础 part I

## 消费者的最优选择

考虑一个两商品的效用最大化问题，对于消费者而言：

- 选择变量是什么？
- 目标函数是什么？
- 约束条件是什么？

无差异曲线



# 套利方法 I

在任意试验性的消费束下，考虑消费者选择的商品组合出现一个微小的变动：

- 如果这种微小变动带来效用的改进，那么后者将作为一个新的试验性消费束而被消费者采取；
- 一旦发现某个消费束已经无法用这种方式来改进，那么它就成为消费者的最优配置。



## 套利方法 II

当两种商品分别变动  $dx_1, dx_2$  时，消费者效用变化为：

$$MU_1 dx_1 + MU_2 dx_2$$

- $dx_1, dx_2$  代表对应商品的“一个微小（边际、无穷小量）变动”，意味着  $\Delta x \rightarrow 0$ ，但不能理解为等于 0；
- $MU_1, MU_2$  代表对应商品的边际效用，意味着每单位商品增加所能额外给消费者带来的效用；
- $dx_1$  和  $dx_2$  之间存在什么关系？

## 套利方法 III

由于预算约束  $p_1x_1 + p_2x_2 = I$  的存在,  $dx_1$  和  $dx_2$  之间必然满足:

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 = dI$$

假设消费者的收入没有发生变化 ( $dI = 0$ ), 则商品 1 消费数量的微小增加  $dx_1 > 0$  必然导致商品 2 消费数量的微小减少:

$$dx_2 = -\frac{p_1}{p_2} dx_1 < 0$$

此时, 消费者效用的边际变化为:

$$\begin{aligned} MU_1 dx_1 + MU_2 dx_2 = \\ p_1 dx_1 \left[ \frac{MU_1}{p_1} - \frac{MU_2}{p_2} \right] \end{aligned}$$

# 套利方法 IV

如果在某个消费束  $(x_1, x_2)$  处，消费者达到效用最大化，意味着  $x_1$  任意方向的变化（增加或减少），都至少不会增加消费者效用：

$$p_1 dx_1 \left[ \frac{MU_1}{p_1} - \frac{MU_2}{p_2} \right] \leq 0$$

具体而言

- 当  $x_1$  略微增加时， $dx_1 > 0$ ，必然有  $\frac{MU_1}{p_1} - \frac{MU_2}{p_2} \leq 0$ ;
- 当  $x_1$  略微减少时， $dx_1 < 0$ ，必然有  $\frac{MU_1}{p_1} - \frac{MU_2}{p_2} \geq 0$ 。

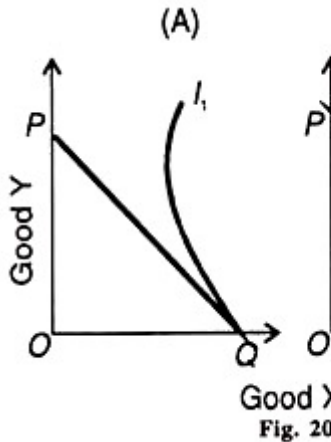
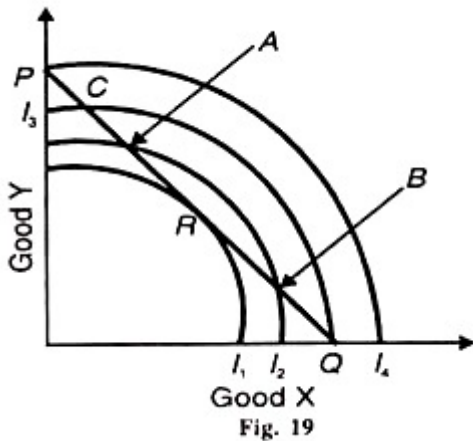
综合上述可得，最优配置下的消费束必然满足无套利条件：

$$\frac{MU_1}{p_1} = \frac{MU_2}{p_2} \quad (\text{no-arbitrage})$$



# 角点解

套利方法相比相切条件方法的优势在哪儿？考虑其中一种商品存在不被购买可能的情况：



## 收入的边际效用

假定消费者获得额外收入  $dl$  且全部用于消费，此时他可以

- 全部用于商品 1，即购买额外的  $(dl/p_1)$  单位的商品 1，并取得额外的  $(MU_1 dl/p_1)$  单位的效用；
- 全部用于商品 2，即购买额外的  $(dl/p_2)$  单位的商品 2，并取得额外的  $(MU_2 dl/p_2)$  单位的效用；

根据无套利条件 (no-arbitrage condition)，这两个效用的增量必须相等，才能达到新的最优值点。此时消费者获得的边际效用为

$$\lambda dl = MU_1 dl/p_1 = MU_2 dl/p_2$$

$\lambda$  可以理解为收入的边际效用：

$$\lambda = MU_1/p_1 = MU_2/p_2$$

## 多商品情形

假定有  $n$  种商品，价格和数量分别为  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  和  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，在最优消费束下：

- 对于所有购买了正数量的商品，必然存在一个相同的边际效用，而这个值可以被解释为收入的边际效用  $\lambda$ ；
- 对于没有被购买的商品而言，其边际效用对价格的比例必然小于或至多等于收入的边际效用  $\lambda$ 。

因此，对任意商品  $i$  而言：

$$MU_i/p_i \begin{cases} = \lambda, & \text{当 } x_i > 0 \text{ 时} \\ \leq \lambda, & \text{当 } x_i = 0 \text{ 时} \end{cases}$$

对于多个约束条件，我们可以对每个约束条件设置一个单独的  $\lambda$ ，它可以理解为放松该约束条件的边际效用。

## 非紧的约束条件

假设一个有钱的消费者已经满足到无法花光所有收入，那么预算约束应该是一个不等式  $p_1x_1 + p_2x_2 \leq I$ 。

通过定义一种新商品  $x_3$  (“没有被花掉且不带来任何效用的收入”)，其价格为 1，那么预算方程将变为：

$$p_1x_1 + p_2x_2 + x_3 = I$$

假设消费者选择了一个正的  $x_3$ ：

- 那么对于  $i = 3$  而言， $\lambda = MU_3 = 0$ ，意味着如果消费者没有花完所有收入，那么收入增量所带来的边际效用应该为零；
- 对于  $x_1, x_2$  而言，由  $\lambda = 0$  可知，最优消费下  $MU_i = 0$ ，意味着这些商品被消费到了一个产生零边际效用的水平。



- ① 最优化问题概述
- ② 重温效用最大化问题
- ③ 数理基础 part I

## 不带约束的最优化问题

考虑多变量函数  $f(\mathbf{x}) : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ :

- 如果存在  $\delta > 0$ , 使得所有满足  $\mathbf{x} \in D, |\mathbf{x} - \mathbf{x}^*| < \delta$  的  $\mathbf{x}$  都有  $f(\mathbf{x}) \geq (\leq) f(\mathbf{x}^*)$ , 则称  $\mathbf{x}^*$  为局部极小 (极大) 值点;
- 如果对任意满足  $\mathbf{x} \in D, |\mathbf{x} - \mathbf{x}^*| < \delta, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$  的  $\mathbf{x}$  都有  $f(\mathbf{x}) > (<) f(\mathbf{x}^*)$ , 则称  $\mathbf{x}^*$  为局部严格极小 (极大) 值点;
- 若  $\forall \mathbf{x} \in D$  都有  $f(\mathbf{x}) \geq (\leq) f(\mathbf{x}^*)$ , 则称  $\mathbf{x}^*$  为全局极小 (极大) 值点。

# 梯度向量和海塞矩阵

对于多变量函数  $f(\mathbf{x}) : D \subset R^n \rightarrow R$ , 其梯度向量为:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

记其二阶偏导数为  $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ , 其海塞矩阵为:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}$$

# 必要条件

设定义开集  $D$  上的函数  $f: D \subset R^n \rightarrow R$  在  $D$  上可微, 若  $\mathbf{x}^*$  是局部极小/极大值点, 则有  $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 。

设定义开集  $D$  上的函数  $f: D \subset R^n \rightarrow R$  在  $D$  上二阶可微, 若  $\mathbf{x}^*$  是局部极小/极大值点, 则有:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad d^T H(\mathbf{x}^*) d \geq 0, \quad \forall d \in R^n$$

## 二阶充分条件

设定义开集  $D$  上的函数  $f : D \subset R^n \rightarrow R$  在  $D$  上二阶可微, 如果对于  $\mathbf{x}^*$  有:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad d^T H d > 0, \quad \forall d \in R^n, \quad d \neq 0.$$

则  $\mathbf{x}^*$  是一个严格局部极小值点。

证明.

考虑二阶泰勒展开:

$$f(\mathbf{x}^* + \epsilon d) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x})^T \epsilon d + \frac{1}{2} \epsilon^2 d^T H(\mathbf{x}^*) d$$

这里,  $\forall d \in R^n, \theta \in [0, 1], \epsilon \rightarrow 0$ .



# 带等式约束的最优化问题 I

考虑以下含等式约束的最优化问题：

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & f(x_1, x_2) \\ \text{s.t.} \quad & g(x_1, x_2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{NLP-1})$$

假定  $g$  满足隐函数定理的相关条件，则等式约束隐含了  $x_2 = x_2(x_1)$ ，代入目标函数则有

$$f(x_1, x_2(x_1)) = \phi(x_1)$$

且  $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g_{x_1}}{g_{x_2}}$ 。其对  $x_1$  的一阶导数为

$$\frac{d\phi}{dx_1} = f_{x_1} - f_{x_2} \frac{g_{x_1}}{g_{x_2}}$$

## 带等式约束的最优化问题 II

根据无约束条件下最优化问题的一阶条件, 对于  $\phi(x_1)$  有  $\frac{d\phi}{dx_1}(x_1^*) = 0$ 。此时, 不妨设  $\lambda = \frac{f_{x_2}(x^*)}{g_{x_2}(x^*)}$ , 则有:

$$f_{x_1}(x^*) + \lambda g_{x_1}(x^*) = 0$$

类似地, 等式约束隐含了  $x_1 = x_1(x_2)$ , 可以得出

$$f_{x_2}(x^*) + \lambda g_{x_2}(x^*) = 0$$

因此, 带等式约束的最优化问题 (NLP-1) 在  $x^*$  处取得最优化的一阶必要条件等价于函数

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$$

在  $x^*$  处取得最优化的一阶必要条件。

# 拉格朗日函数

称  $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)$  为拉格朗日 (*Lagrange*) 函数, 则其在  $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$  处取得最大值/最小值的一阶条件为:

$$\begin{cases} f_{x_1}(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_{x_1}(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ f_{x_2}(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* g_{x_2}(x_1^*, x_2^*) = 0 \\ g(x_1^*, x_2^*) = 0 \end{cases}$$