

第五讲凸集及其分离

范翻

中央财经大学 (CCFD)

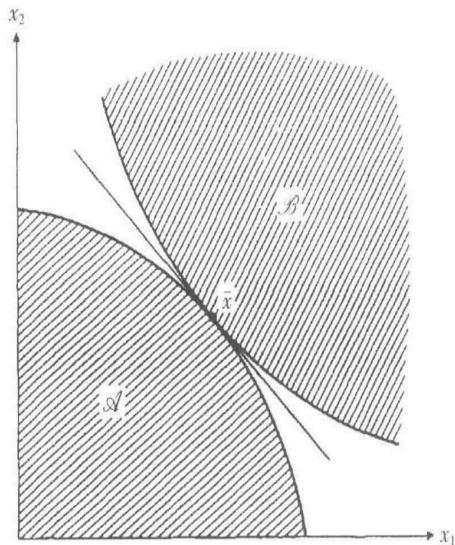


标准的最优化问题

标准的最优化问题：在标量约束 $G(x) \leq c$ 下选择向量 x 以最大化 $F(x)$ 。

- 等值线：对于一个多变量函数 $F(x)$ 而言，使得函数值等于 c 的所有可能的向量 x 共同构成一条等值线，对应优化问题中的约束条件。e.g. 预算约束线，等利润线，无差异曲线
- 上等值集：所有满足 $F(x) \geq v$ 的向量 x 共同构成的集合
- 下等值集：所有满足 $G(x) \leq c$ 的向量 x 共同构成的集合

凸集的分离性质



凸集 (convex set)

定义：对于 n 维空间中的点集 S 而言，如果给定 S 中的任意两点 $x^a = (x_1^a, \dots, x_n^a)$ 和 $x^b = (x_1^b, \dots, x_n^b)$ 以及闭区间 $[0, 1]$ 中的任意实数 θ ，点 $\theta x^a + (1 - \theta)x^b$ 也在点集 S 中，那么称点集 S 是凸的 (**convex**)。

- 生产函数的下等值集是凸集，意味着什么？
- 效用函数的上等值集是凸集，意味着什么？

定义 1 (从函数出发): 如果一个函数 $G(x)$ 满足, 对于所有的 x^a, x^b 和任意 $\theta \in [0, 1]$, 都有

$$G(\theta x^a + (1 - \theta)x^b) \leq \theta G(x^a) + (1 - \theta)G(x^b)$$

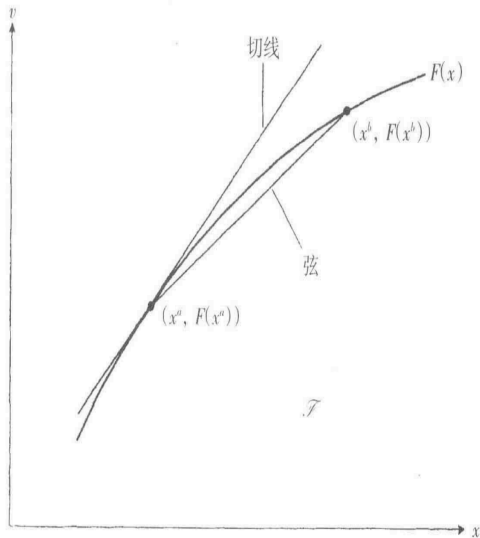
则称其为凸函数 (**convex function**)。

反之, 若一个函数 $F(x)$ 满足

$$F(\theta x^a + (1 - \theta)x^b) \geq \theta F(x^a) + (1 - \theta)F(x^b)$$

则称其为凹函数 (**concave function**)。

凹函数



拟凸函数

从代数上看, 集合 $G(x) \leq c$ 是凸集意味着:

$$G(x^a) \leq c, G(x^b) \leq c \Rightarrow G(\theta x^a + (1 - \theta)x^b) \leq c$$

如果其中一个端点的值恰好等于 c 时, 这个条件又可以表述为 $\forall x^a, x^b, \theta \in [0, 1]$:

$$G(\theta x^a + (1 - \theta)x^b) \leq \max(G(x^a), G(x^b))$$

我们称满足上述条件的函数为拟凸函数 (**quasi convex function**)。

反之, 如果函数 $F(x)$ 满足

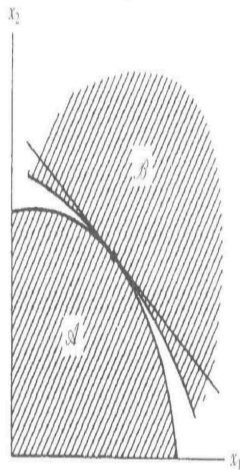
$$F(\theta x^a + (1 - \theta)x^b) \geq \min(F(x^a), F(x^b))$$

则称其为拟凹函数 (**quasi concave function**)。

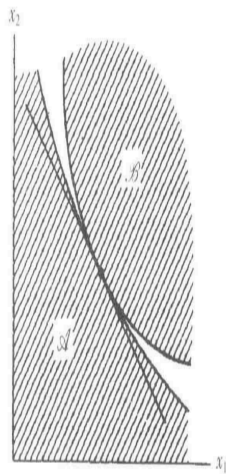
内点与边界点

- 内点: 如果存在点 x^0 的邻域 $B(x^0, \delta)$ 包含于集合 S , 则称点 x^0 是集合 S 的一个内点 (**inner point**)
- 边界点: 如果一个点 x^1 既不是集合 S 的内点, 也不是集合 S 的补集的内点, 则称点 x^1 是集合 S 的一个边界点 (**boundary points**)。换言之, 如果一个点 x^1 是集合 S 的边界点, 那么其任意邻域内, 都既存在属于 S 的点, 也存在不属于 S 的点

分散化下的局部失灵



(a)



(b)

分离定理

如果 A 和 B 为两个没有公共内点的凸集，且至少有一个集合有一个非空内点，那么我们总可以找到一个非零向量 p 和一个数 b ，使得超平面 $px = b$ 分离这两个集合，或：

$$px \begin{cases} \leq b, & \forall x \in A \\ \geq b, & \forall x \in B \end{cases}$$

分离角度的最优化定理

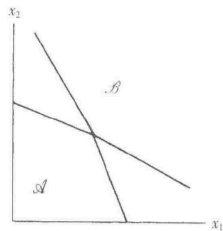
给定拟凹函数 F 和拟凸函数 G ，点 \bar{x} 在满足约束条件 $G(x) \leq c$ 下使得 $F(x)$ 最大，当且仅当存在一个非零向量 p ，使得：

- \bar{x} 在满足 $G(x) \leq c$ 下最大化 px
- \bar{x} 在满足 $F(x) \geq \bar{v}$ 下最小化 px

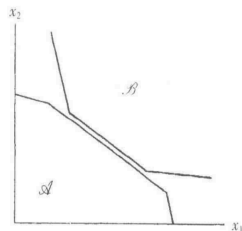
假定 x 为生产-消费向量，约束反映了资源的有限性，目标函数为效用函数。 p 理解为产出的价格向量，那么上述定理意味着：

- 寻求产出价格最大化的企业家会生产出最优产量 \bar{x}
- 试图以最小支出达到既定效用的消费者也恰好需要 \bar{x}
- 社会最优化问题就可以被分散化的机制实现

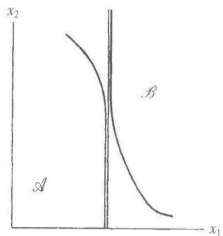
唯一性



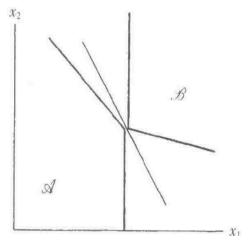
(a)



(b)



(c)



(d)

严格拟凸函数:

$$G(\theta x^a + (1 - \theta)x^b) < \max(G(x^a), G(x^b))$$

严格拟凹函数:

$$F(\theta x^a + (1 - \theta)x^b) > \min(F(x^a), F(x^b))$$

唯一性条件

考虑在约束 $G(x) \leq c$ 下最大化 $F(x)$ 的问题，其中 F 为严格拟凹的， G 为严格拟凸的。假定 x 满足分离角度的最优化定理，那么它将是该最优化问题的唯一解。【证明：反证法】