第八讲 不确定性

范翻

中央财经大学 (CCFD)

期望效用

- 假定存在一系列不同状态的基本事件 (events)$i = 1, 2, \cdots, m$;
- 记第 i 个基本事件发生的概率为 p_i，这些概率非负且和为一;
- 与经济事件相关的实现结果通常是收入水平、财富或者决策者应得的利润 Y_i，这些结果所带来的效用分别为 $U(Y_i)$;
- 定义期望效用函数（冯·诺依曼-摩根斯坦效用）为:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i U(Y_i)$$

风险规避

定义决策者是风险规避的，如果对于若干个事件 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$，有

$$U(\sum_{i=1}^{m} p_i Y_i) > \sum_{i=1}^{m} p_i U(Y_i)$$

- 左边是期望收益的效用，右边是事件的期望效用；
- U 在所有事件组成的集合中是（严格）凹的，换言之如果 U 是二次可微的，则 $U'' < 0$ 意味着风险规避。

最优保费问题 I

假设存在两个事件，其收益和发生概率分别为 Y_1, Y_2 和 p_1, p_2，且 $Y_1 < Y_2$。为了规避风险，决策者可以预付保费 x，并在事件 1 发生时赔付 $X = x/p$，在事件 2 发生时不赔付。购买保险后的期望效用为：

$$pU(Y_1 - x + x/p) + (1-p)U(Y_2 - x)$$

用链式法则可以找到 x 为最优解的一阶条件

$$pU^{'}(Y_1 - x + x/p)(1/p - 1) = (1-p)U^{'}(Y_2 - x)$$

如果 $U^{''} < 0$(风险规避者)，上述条件也是充分的，并且意味着

$$Y_1 - x + x/p = Y_2 - x$$

因此，最优保费为 $x = p(Y_2 - Y_1)$，即一个风险规避的决策者会购买保险，使得各个不同状态下的收益相等。

最优保费问题 II

假设保险不仅影响事件的收益，同时会影响事件的发生概率，即决策者可以通过一个预算的支出 z 降低坏结果 1 的概率（但不进行赔付）。例如，使用一个更可靠但更昂贵的产品，或者在有风险的活动中更加谨慎小心，而这种小心翼翼会带来负效用。
则目标函数变为

$$O(z) \equiv p(z)U(Y_1 - z) + [1 - p(z)]U(Y_2 - z)$$

其中 $p(z)$ 是关于 z 的递减函数。意味着随着保费的增加，坏结果 1 发生的概率会降低。

最优保费问题 III

此时对期望收益 $O(z)$ 求导可得

$$\begin{aligned} O^{'}(z) = & -p^{'}(z)[U(Y_2 - z) - U(Y_1 - z)] \\ & - \{p(z)U^{'}(Y_1 - z) + [1 - p(z)]U^{'}(Y_2 - z)\} \end{aligned}$$

- 第一项代表着谨慎行为或使用高质量产品的期望边际收益，是坏结果概率的边际减少乘以两种结果的效用差；
- 第二项是谨慎行为或使用高质量产品的期望边际成本。

最优保费问题 IV

假设保险和谨慎行为都存在，保险公司不能辨别人们是否谨慎行事，而只能观察到结果。如果存在保险经算上公平的保险，目标函数为

$$O(x,z) \equiv p(z)U(Y_1 - z - x + x/p(z)) + [1-p(z)]U(Y_2 - z - x)$$

关于 x 的一阶条件为

$$Y_1 - z - x + x/p(z) = Y_2 - z - x$$

关于 z 的一阶条件为

$$\begin{aligned} O_z(x,z) = & -p^{'}(z)[U(Y_2 - z - x) - U(Y_1 - z - x + x/p(z))] \\ & - \{p(z)U^{'}(Y_1 - z - x + x/p(z)) \\ & + [1 - p(z)]U^{'}(Y_2 - z - x)\} \end{aligned}$$

记 Y_0 为满足 x 一阶条件的值，则上述条件可以表示为

$$\begin{aligned} O_z(x,z) &= -p^{'}[U(Y_0) - U(Y_0)] - U^{'}(Y_0) \\ &= -U^{'}(Y_0) < 0 \end{aligned}$$

当存在完全保险时，谨慎行为所获得的边际收益消失了，但边际成本仍然为正。因而谨慎行为的最优值位于角点 $z = 0$ 处，即存在道德风险问题。

假设存在一个事件连续统 $[\underline{r}, \bar{r}]$，随机变量 r 代表事件，概率密度函数为 $f(r)$。期望效用函数为

$$E[U(Y)] = \int_{\underline{r}}^{\bar{r}} U(Y(r))f(r)dr$$

类似地，Y 的期望收益为

$$E[Y] = \int_{\underline{r}}^{\bar{r}} Y(r)f(r)dr$$

因此 $U'' < 0$ 意味着

$$U[E(Y)] > E[U(Y)]$$

一个投资者拥有初始财富 W_0。投资于风险资产 x 产生总收益（本金加利息）$x(1+r)$，其中 r 为一个随机变量，其密度函数为 $f(x)$；无风险资产则支付零利息。最终的（随机）财富为

$$W=(W_0-x)+x(1+r)=W_0+xr, x\in[0,W_0]$$

投资者有严格凹的冯·诺依曼-摩根斯坦函数 U，选择 x 以最大化

$$E[U(W)]=\int_{\underline{r}}^{\overline{r}}U(W_0+xr)f(r)dr$$

因此，投资者的最优决策应满足

$$O'(x) = \int_{\underline{r}}^{\overline{r}} rU'(W_0 + xr)f(r)dr = 0$$

特别地

$$O'(0) = U'(W_0)\int_{\underline{r}}^{\overline{r}} rf(r)dr = U'(W_0)E[r]$$

如果风险资产利率的数学期望是正的 ($E[r] > 0$)，则 $O'(0)$ 必为正。那么，x 的最优值就不可能为零。

风险资产和无风险资产 III

如果 $\underline{r} > 0$，那么对于所有的 x，都有 $O'(x) > 0$，而且将所有的 W_0 投资于风险资产是最优的。关于 x 的一阶条件是

$$\int_{\underline{r}}^{\overline{r}} rU'(W_0 + xr) f(r) dr = 0$$

如果存在一个满足上述条件的 $x < W_0$，则 U 的凹性保证了它是全局最优值。

比较静态分析 I

假定初始财富 W_0 是可变的，将最大值函数写为 $O(x, W_0)$，对其全微分可得

$$dx/dW_0 = -O_{xw}(x, W_0)/O_{xx}(w, W_0)$$

由二阶条件可知，上式分母为负，因此 dx/dW_0 的符号取决于二阶交叉导数的符号。而分子

$$O_{xw}(x, W_0) = \int_{\underline{r}}^{\overline{r}} rU''(W_0 + xr)fr(r)dr$$

当且仅当 $\underline{r} < 0 < \overline{r}$ 时，才存在一个可能的最优内点解 x。

风险规避系数

定义一个冯·诺依曼-摩根斯坦效用函数的绝对风险规避系数为

$$A(W) = -U''(W)/U'(W)$$

- 如果 $A(W) < 0$，意味着决策者是风险厌恶的；反之则是风险偏好的；
- 当 $|A(w)|$ 越大时，意味着决策者的风险厌恶/偏好程度越大；
- 较为富有的投资者更能容忍给定的边际风险，因此预期 $A(W)$ 应该是递减函数。

比较静态分析 II

如果绝对风险规避系数 $A(W)$ 是财富的递减函数，那么富有的投资者将持有更有的风险资源。注意到，如果 $r<0$，则

$$-U''(W_0+xr)/U'(W_0+xr) > -U''(W0)/U'(W0) = A(W0)$$

两边乘以 $-r$ 有

$$rU''(W0+xr)/U'(W0+xr) > -rA(W0)$$

即

$$rU''(W0+xr) > -A(W0)rU'(W0+xr)$$

比较静态分析 III

类似地，对 $r > 0$ 同样有

$$rU''(W0 + xr) > -A(W0)rU'(W0 + xr)$$

因此，对任意区间的 r 积分有

$$\int_{\underline{r}}^{\overline{r}} rU''(W0 + xr)f(r)dr > -A(W0)\int_{\underline{r}}^{\overline{r}} rU'(W0 + xr)f(r)dr = 0$$

这意味着，$dx/dW0 > 0$。换言之，随着初始财富 $W0$ 的增加，最优风险资产持有 x 会上升。

投资组合选择 I

假设投资者的目标函数可以表示成财富的均值 M 和标准差 S 的一个函数，在期望效用函数框架中，这对应着两种特殊情况
如果冯·诺依曼-摩根斯坦效用函数是二次的

$$U(W) = W - \frac{1}{2}aW^2, a > 0$$

那么

$$E[U(W)] = M - \frac{1}{2}a(M^2 + S^2)$$

- 如果每一种资产都有正态分布的回报，那么财富也是正态分布的。并且任何冯·诺依曼-摩根斯坦效用函数都可以用均值和方差来表示。例如

$$U(W) = -exp(-aW), a > 0$$

- 其期望为

$$E[U(W)] = -exp(-a[M - \frac{1}{2}aS^2])$$

- 当 $(M - \frac{1}{2}aS^2)$ 达到最大值时，期望效用也达到最大。同时，对于这个函数而言，绝对风险规避系数为常数，并且等于 a。

- 假设初始财富始终不变，且标准化为 1；
- 存在 n 种资产，且总收益可以写作 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$，其数学期望为 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$；
- 总收益的方差-协方差矩阵为 $\sum=(\sigma_{ij})$；
- 投资组合即为投资于各种不同资产的财富比例向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

投资组合选择问题本质上是要构建 M 和 S 之间的可行转换边界。

投资组合选择 IV

因此，随机的最终财富为

$$W = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i = x^T r$$

最终财富的均值和方差分别为

$$M = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i = x^T \mu$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} = x^T \sum x$$

注意 M 和 S^2 都是 x 的函数。

为了找到 M 和 S 之间的可行转换边界，对于给定的均值要最小化标准差，即

$$\begin{aligned} min \quad & S = (x^T \sum x)^{1/2} \\ s.t. \quad & x^T \mu = M, x^T e = 1 \end{aligned}$$

在两种资产的情况下，令 x 代表 x_1，那么 $x_2 = 1 - x$。因而

$$M = \mu_2 + (\mu_1 - \mu_2)x$$

且

$$S^2 = \sigma_2^2 - 2K_2 x + (K_1 + K_2)x^2$$

其中

$$K_1 \equiv \sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2, K_2 \equiv \sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2$$

可行转化边界 II

将资产排序确保 $\mu_1 > \mu_2$。当 x 从 0 增加到 1，M 从 μ_2 增加到 μ_1，且 S 从 σ_2 变到 σ_1 时，沿此方向有

$$SdS/dx = -K_2 + (K_1 + K_2)x$$

因此，在 $x = 0$ 处

$$dS/dx = -(\sigma_2 - \rho\sigma_1)$$

以及在 $x = 1$ 处

$$dS/dx = \sigma_1 - \rho\sigma_2$$

可行转化边界 III

- 如果 $\sigma_1 > \sigma_2$，那么在两个完全专门化的投资组合之间，存在风险-收益的权衡。因此在 $x=1$ 附近 dS/dx 肯定为正。
- 即使 $\sigma_1 < \sigma_2$，即资产 1 完全优于资产 2，只要 ρ 足够小，也可能通过混合两种资产而得到分散化的收益，从而也存在一个权衡。
- 更一般地，方差最小的投资组合由下式给出

$$x = \frac{K_1}{K_1 + K_2} = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2) + (\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)}$$

- 从上式看，$x \in [0,1]$，即不存在任何卖空行为。

对 $ SdS/dx = - K_2 + (K_1 + K_2)x $ 两边同时再次微分

$$
\begin{aligned}
K_1 + K_2 &= Sd^2S/dx^2 + dS/dxdS/dx \\
&= Sd^2S/dx^2 + (dS/dx)^2
\end{aligned}
$$

而根据 $ SdS/dx = - K_2 + (K_1 + K_2)x $ 化简可得 d^2S/dx^2 的符号取决于 $(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2$，即

$$d^2S/dx^2 > 0.$$

因此，在 (M, S) 空间内，可行转化边界函数为凸的。

均值-方差框架下的投资组合选择


S
P_2

假设企业所有者必须雇佣一个管理者来经营某项目：

- 如果项目成功的话，该项目将产生价值 V
- 在高质量工作的情况下，项目成功的概率为 p，在低质量工作的情况下，项目成功的概率为 q
- 吸引一个管理者的基本薪水为 w，为了实现高质量他必须更加努力，并且只有当他得到奖金 e 时他才会这么做
- 企业所有者和管理者都是风险中性的

管理者的激励 II

假定企业所有者可以观察到管理者的工作质量：

- 高质量工作期望利润：$pV-(w+e)$
- 低质量工作期望利润：$qV-w$

高质量工作利润必须满足：

- $(p-q)V>e$ （比较优势）
- $pV>w+e$ （正利润）

当无法观察努力时，差异性工作方案：

- 成功时支付 x，失败时支付 y。激励相容条件为：

$$(p-q)(x-y)\geq e$$

管理者的激励 III

参与约束:

$$px + (1-p)y \geq w + e$$

所有者利润最大化:

$$\pi = pV - [px + (1-p)y]$$

受约束于:

$$(p-q)(x-y) \geq e$$
$$y + p(x-y) \geq w + e$$

管理者的激励 V

最优解特征:

$$
\begin{aligned}
x - y &= e/(p-q) \\
y &= w - eq/(p-q) \\
\pi &= pV - w - e
\end{aligned}
$$

政府采购的特殊性：

- 信息不对称下的成本造假风险
- 需设计激励相容方案

关键约束条件：

- 个体理性约束 $R_i \geq c_i q_i$
- 激励相容约束 $\begin{cases} R_1 - c_1 q_1 \geq R_2 - c_1 q_2 \\ R_2 - c_2 q_2 \geq R_1 - c_2 q_1 \end{cases}$