近世代数

计算机科学与技术学院
唐琳琳

内容

- 1. 集合
- 2. 映射与变换
- 3. 代数运算
- 4. 运算律
- 5. 同态与同构
- 6. 等价关系与集合的分类

等价关系

- 定义

➢ 集合M上的一个法则 R ，如果对与 M 上的任意一对元素a和 b 总能由其判断出是否满足关系 ,R或者说，要么满足关系 R 要么不满足关系 R，那么 R 就称为集合 M 上元素之间的一个关系，或者简称为M 的一个关系。

$$aRb \qquad\qquad a\overline{R}b$$

- 例子

1.有理数集 Q , 法则R 定义如下，判断它是否是Q的一个关系？

$$aRb \Leftrightarrow a+b \in Z$$

$\because 2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ $\therefore 2\overline{R}\frac{1}{3}$

$\because 2+3=5$ $\therefore 2R3$

$\because \frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$ $\therefore \frac{1}{2}R\frac{3}{2}$

等价关系

- 例子

➢2. $M=R$, 法则R定义如下,判断其是否是M的一个关系?

$$aRb \Leftrightarrow a<b$$

$\because 2<3, \therefore 2R3$　　$\because 3 \nless 2, \therefore 3\overline{R}2$　　$\because 2 \nless 2, \therefore 2\overline{R}2$

➢3. $M=Z$, 法则 R定义如下, 判断其是否是M 的一个关系?

$$aRb \Leftrightarrow \frac{a}{b}>0$$

因为 b=0时, 法则无意义故不满足定义中“任意一对”，它不是原集合的一个关系。

等价关系

- 例子

➢4. $M=Q+$ ，法则R定义如下，判断其是否是M的一个关系？

$$\frac{b}{a} R \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{b+d}{a+c} < 1$$

例

$$\because \frac{1+3}{2+2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} \overline{R} \frac{3}{2}$$

but

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{2+3}{4+2} = \frac{5}{6} < 1$$

$$\frac{2}{4} R \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} R \frac{3}{2}$$

等价关系

- 定义

➢ 若集合M上的一个关系 R 满足以下三个条件：

(1) 对$\forall a \in M$ ，总有 aRa ---- 反身性

(2) 若 aRb ，那么 bRa ---- 对称性

(3) 若aRb , bRc , 那么 aRc ---- 传递性

那么关系 R 就被称为集合M 的一个等价关系。

记为 “$\sim$”， $a \sim b$ 就表示a 与 b 等价。

等价关系

- 例子

➢ 1. 设集合$M = Z$,法则R定义如下，判断其是否是M的一个关系？是否是一个等价关系？

$$aRb \Leftrightarrow a|b$$

但不是$M = Z$的一个等价关系。

反身性 $\times$

对称性 $\times$ $2|6$ $6\nmid 2$ $2R6$ $6\overline{R}2$

传递性 $\vee$

等价关系

- 例子

➢2. 集合$M = Z$ ，对 $\forall n \in Z$,$n > 0$, 如下定义的法则R 是否是是它的一个等价关系？

$$aRb \Leftrightarrow a \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$$

检验定义条件

集合的分类

- 定义

➢若把集合 M 的全体元素分成若干个互不相交的子集 (i.e., 任二子集之间没有公共元素), 则称每一个子集 M 的一个类, 类的全体叫做M 的一个分类 。

➢ 集合的分类 和 等价关系之间有密切关联。

等价关系和集合的分类

- 定理 1

➢ 集合M的一个分类决定了集合M的一个等价关系.

$$aRb \Leftrightarrow a,b \in one \quad class$$

首先，是个关系——集合分类的定义。

其次，验证等价关系的三个条件：

自反性—— 分类要求所有元素参与。

对称性—— 同一个类是一个子集，无序。

传递性—— 类与类之间无交。

等价关系与集合的分类

- 定理 2

➤集合 M 的一个等价关系决定了集合M 的一个分类。

证明：设~ 是集合M的一个等价关系. 目标找到一个集合的分类方法：

对 $\forall a \in M$, 设 $\overline{a} = \{x | a \sim x, x \in M\}$, 那么

- 因 $\forall a \in M$ ，$a \sim a$,所以 $a \in \overline{a}$ 。任一元素都属于某一个子集。
- 若有某一个元素属于了不同的两个子集，则有 $a \in \overline{b}, a \in \overline{c}$

$$a \sim b, a \sim c \Rightarrow b \sim c$$

那么$\forall x \in \overline{b}$， $x \sim b \Rightarrow x \sim c \Rightarrow x \in \overline{c}$ ， 即 $\overline{b} \subseteq \overline{c}$

同理可以得到$\overline{c} \subseteq \overline{b}$ ，从而得到 $\overline{b} = \overline{c}$。 任二子集不相交。

等价关系与集合的分类

- 例子

  ➢ 给出整数集 Z 关于如下等价关系的分类.

$$aRb \Leftrightarrow a \equiv b \pmod 4$$

$$\{\cdots,-8,-4,0,4,8,\cdots\}$$
$$\{\cdots,-7,-3,1,5,9,\cdots\}$$
$$\{\cdots,-6,-2,2,6,10,\cdots\}$$
$$\{\cdots,-5,-1,3,7,11,\cdots\}$$

他们称为模4的剩余类 或 模4的同余类，记为：$\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}$ 。

模n的剩余类

等价关系与集合的分类

- 练习

➢1. 设集合 $M=Z$，法则 $aRb \Leftrightarrow 4|a+b$ 是否是 M 的一个关系？是否是 M 的一个等价关系？

反身性	×	$1\overline{R}1$	
对称性	√		
传递性	×	$1R7, 7R5$	$1\overline{R}5$

多选题 1分

设置

以下哪些关系是实数集R的等价关系？ ( )

A $aRb \Leftrightarrow a \le b$

B $aRb \Leftrightarrow ab \ge 0$

C $aRb \Leftrightarrow a = b$

D $aRb \Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge 0$

提交

等价关系与集合的分类

- 练习

➢3. 给出实数集 R 由以下等价关系决定的集合的分类。

(3) $aRb \Leftrightarrow a = b$

$\overline{a} = \{a\}$ ，每一个元素自己构成的子集成为一个类。

(4) $aRb \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 0$

R ，全集是唯一的一个类。

等价关系与集合的分类

- 练习

➢4. 设计出3个满足两个等价关系条件但不满足剩余一个条件的实数集R 的关系。

练习 2. (1) and (2) ---- to some set

$$aRb \Leftrightarrow a \le b \qquad aRb \Leftrightarrow ab \ge 0$$

(3) $aRb \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0$

自反性 × 对称性 √ 传递性 √

作业

- 非空集合M，设$I=\{(a,b)|a,b\in M\}$。求证M的一个关系决定I的一个子集；I的一个子集也决定了M的一个关系。且不同的关系决定出了I的不同子集。