第八章 z 变换、离散时间系统的 z 域分析

8.9 序列的傅里叶变换（DTFT）

8.9.1 定义

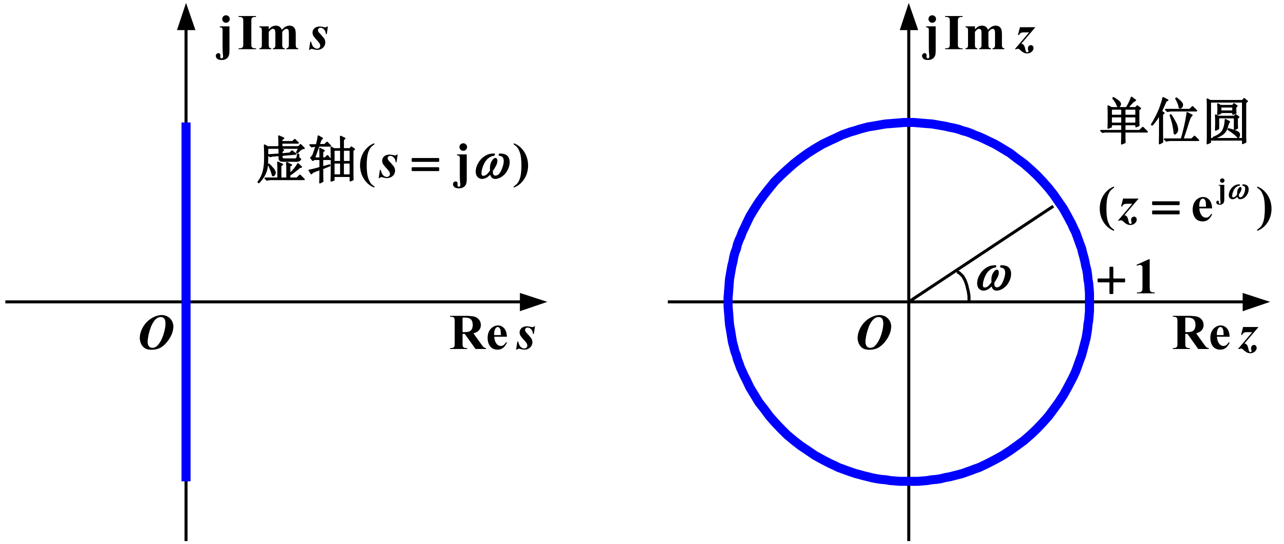
序列的傅里叶变换（**DTFT，Discrete-time Fourier Transform**）为研究离散时间系统的频率响应作准备 。

由 z 变换引出：

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$x(n) = ZT^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C X(z) z^{n-1} \mathrm{d}z$$

1、DTFT 与 z 变换的关系



$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$, $|z|=1$, 即单位圆上的 z 变换就是 DTFT

周期为 2π

$$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)=X(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

2、DTFT的逆变换

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{|z|=1} X(z) z^{n-1} \,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}|=1} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} \,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} \mathrm{j} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} \,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega} \,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{DTFT}[x(n)] = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}
$$

$$
\mathrm{IDTFT}[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega} \,\mathrm{d}\omega
$$

8.9.2 连续信号和离散序列的傅里叶变换的比较

连续	离散
$X(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$	$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$
$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$	$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega$

频率的比较

模拟角频率Ω，量纲：弧度/秒；

数字角频率ω，量纲：弧度；

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$是周期为$2\pi$的周期函数

$$z=\mathrm{e}^{sT}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$$

$$\omega=\Omega T$$

8.9.3 序列的频谱

$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)=\left|X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$ $X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)$为$x(n)$的频谱

$\left|X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right|$为$x(n)$的幅度谱，$\varphi(\omega)$为相位谱。 两者都为 ω 的连续函数

因为$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)=X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega+2\pi)}\right)$， $X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)$是以$2\pi$为周期的周期函数

实序列的傅里叶变换 $X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)$ 的实部偶对称、虚部奇对称，幅度偶对称、相角奇对称 。

8.9.4 DTFT收敛的充分条件

$x(n)$是绝对可和的，即$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right| < \infty$,

或$x(n)$是平方可和的，即$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^2 < \infty$

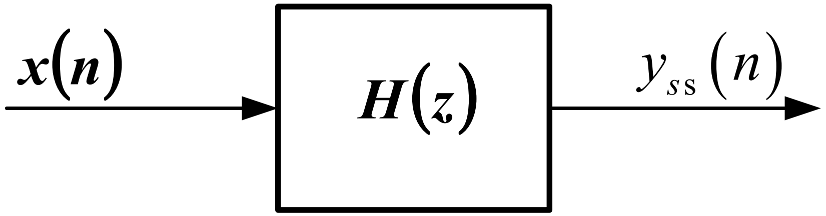
则$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$ 收敛

8.10 离散时间系统的频率响应

8.10.1 离散系统频响特性的意义

1、频率响应特性的定义

频率响应特性：离散系统在正弦序列作用下的**稳态响应**随频率变化的情况。

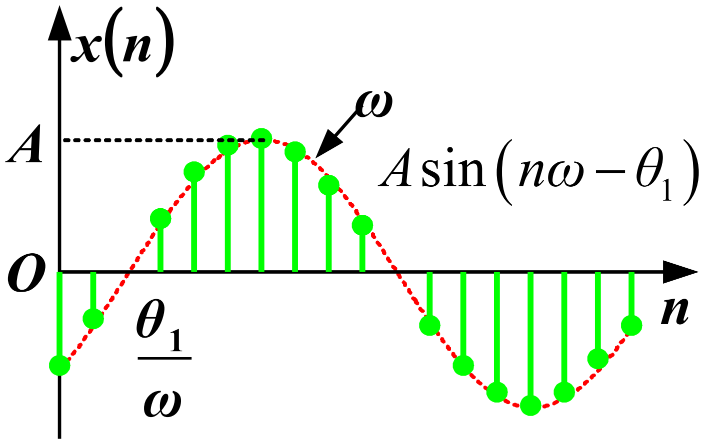


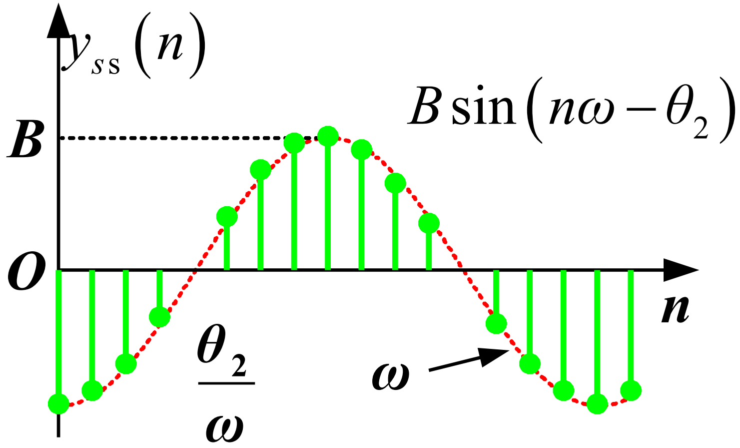
稳定的因果离散系统

$$x(n) = A\sin(n\omega) \quad (n \geq 0)$$

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

$$y_{ss}(n) = A\left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|\sin(n\omega+\varphi)$$





$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi} = \frac{B}{A} e^{j[-(\theta_2-\theta_1)]}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{B}{A} \qquad \varphi = -(\theta_2 - \theta_1)$$

频率响应特性的意义：表示输出序列的幅度和相位相对于输入序列的变化。

2、由系统函数得到频响特性

系统函数在单位圆上的 z 变换即为系统的频率响应特性:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\sim\omega$ ： 幅度响应或幅频特性

输出与输入序列的幅度之比

$\varphi(\omega)\sim\omega$ ： 相位响应或相频特性

输出对输入序列的相移

$e^{j\omega}$ 为周期函数，所以 $H\left(e^{j\omega}\right)$ 为周期函数，

其周期为 2π 是有别于连续系统的一个突出特点。

3、频率响应与单位样值响应的关系

离散系统的频率响应是系统的单位样值响应的傅里叶变换。

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 是以 $h(n)$ 为加权系数，对各次谐波进行改变的情况（物理意义）。

由于$h(n)$一般是实序列，所以 $|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$是偶函数，$\varphi(\omega)$是奇函数。

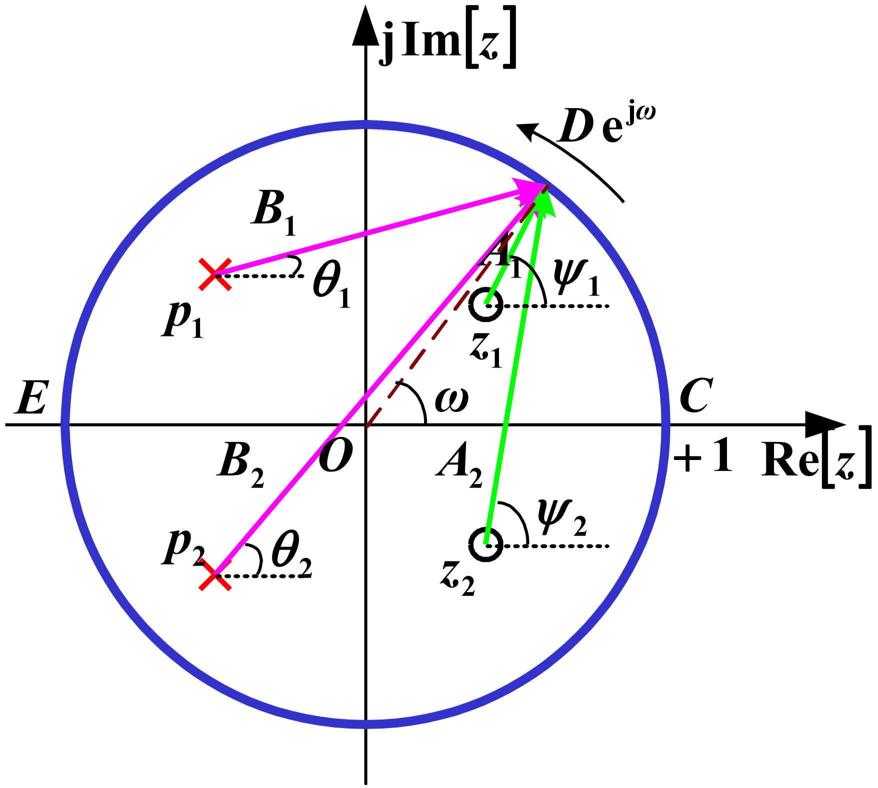
8.10.2 频响特性的几何确定

$$H(z)=H_0\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$

$$H(e^{j\omega})=H_0\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)}=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

令 $e^{j\omega}-z_r=A_r e^{j\psi_r}$

$e^{j\omega}-p_k=B_k e^{j\theta_k}$



幅频响应 $\left|H(e^{j\omega})\right|=H_0\frac{\prod_{r=1}^{M}A_r}{\prod_{k=1}^{N}B_k}$　　相位响应 $\varphi(\omega)=\sum_{r=1}^{M}\psi_r-\sum_{k=1}^{N}\theta_k$

离散时间系统的频率响应小结

1. 系统的频响特性 $H\left(e^{j\omega}\right)=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\cdot e^{j\varphi(\omega)}$

$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ ：幅频特性，输出与输入序列的幅度之比

$\varphi(\omega)$ ：相频特性，输出对输入序列的相移

2. 系统的频率响应就是系统函数在单位圆上的动态，因 ω 而变化，影响输出的幅度与相位

3. 因为 $e^{j\omega}$ 是周期为 2π 的周期函数，所以系统的频响特性 $H\left(e^{j\omega}\right)$ 是周期为 2π 的周期函数

4. $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ 是关于 ω 的偶函数，$\varphi(\omega)$ 是关于 ω 的奇函数

8.10.5 经典滤波器和现代滤波器

1、经典滤波器

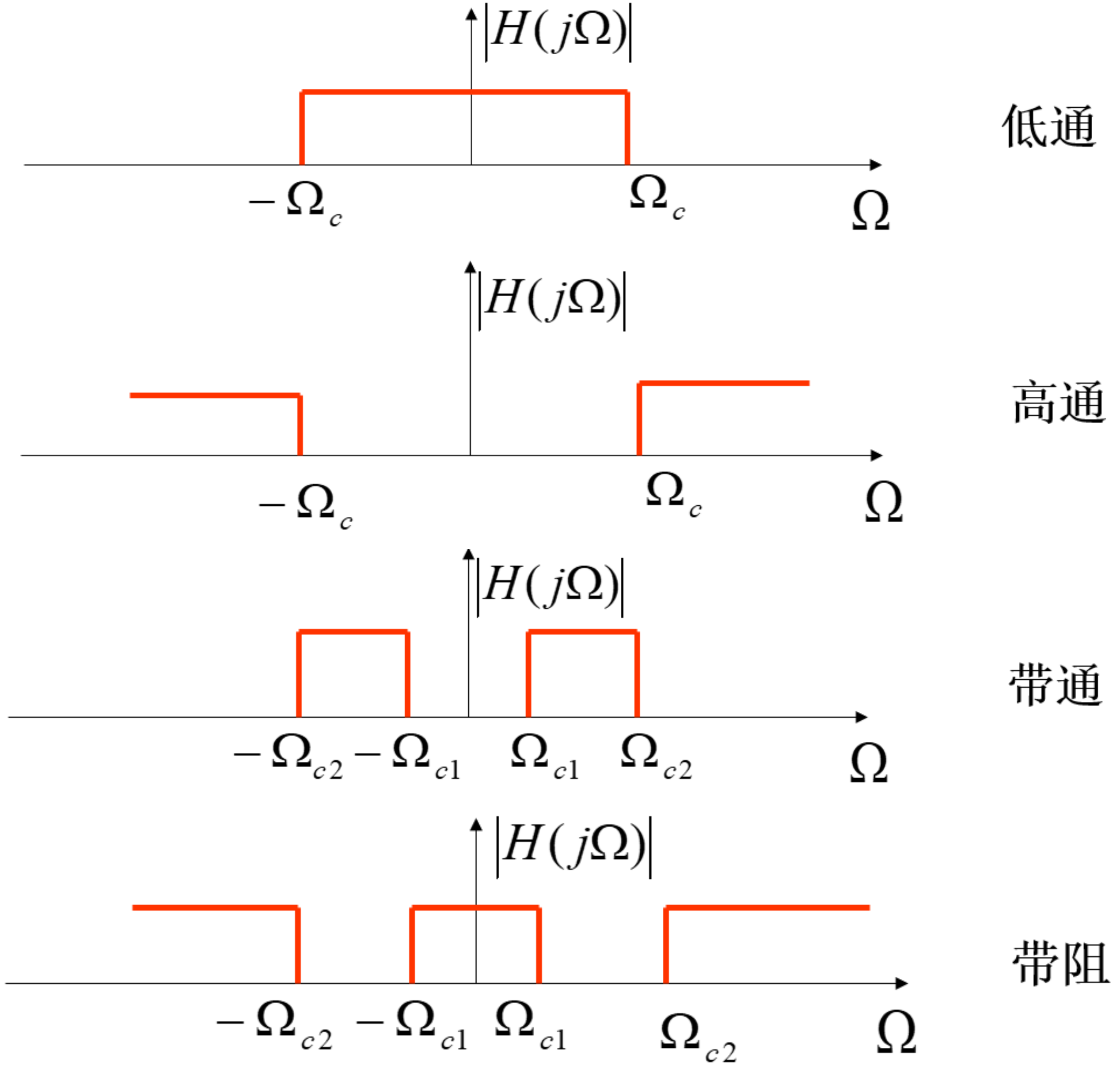
$$x(n)=s(n)+u(n)$$ → 加性噪声

若 $x(n)$ 中的有用成分 $s(n)$ 和希望去除的成分 $u(n)$ 各自占有不同的频带, 通过一个线性系统可将 $u(n)$ 有效去除

按功能分: 低通 (LP)，高通 (HP)，带通 (BP)， 带阻 (BS)，全通

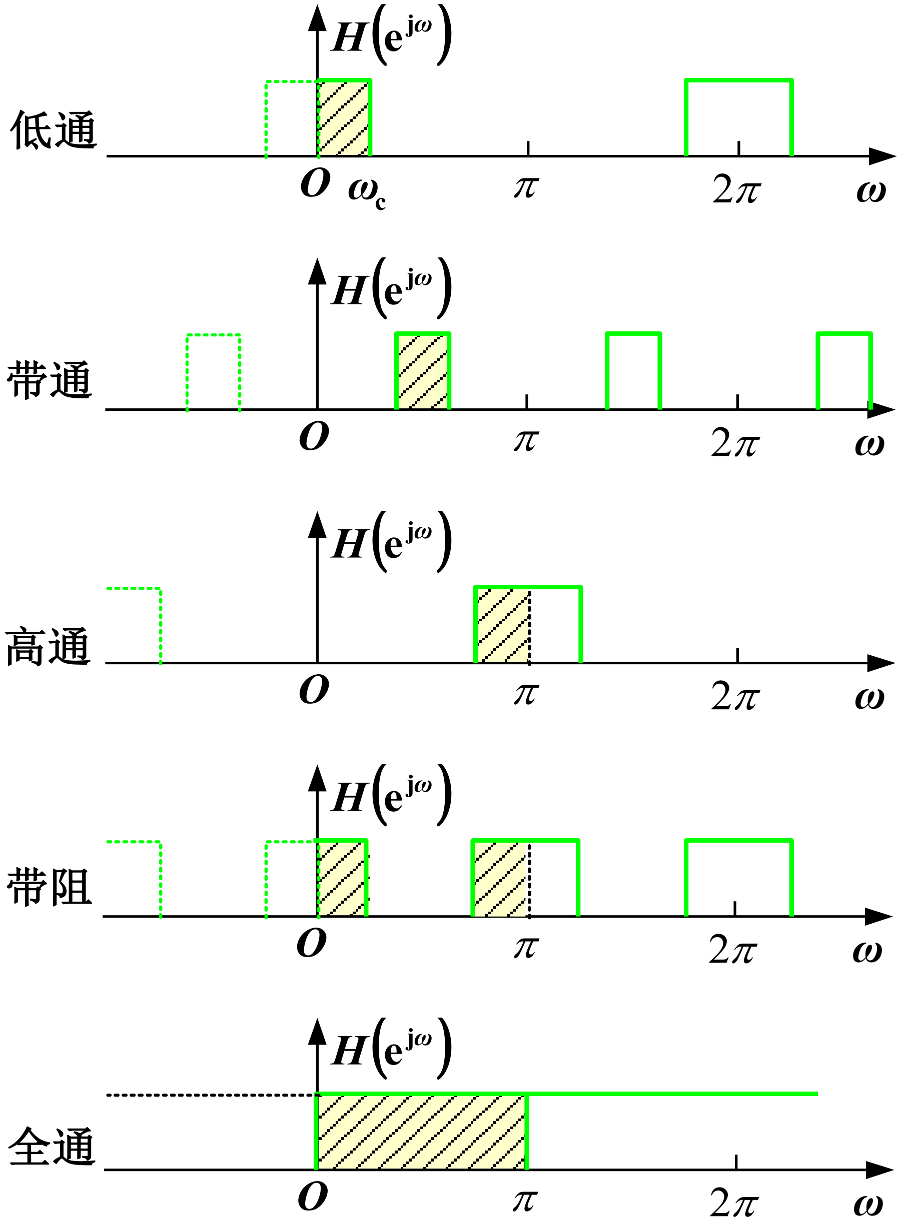
每一种又有模拟 (AF)、数字 (DF) 两种滤波器

1）模拟滤波器的理想幅频特性



2）数字滤波器的理想幅频特性

由于周期性和对称性，只研究 $0 \le \omega \le \pi$ 范围即可。



2、现代滤波器

$x(n) = s(n)u(n)$ → 乘法性噪声

$x(n) = s(n) * u(n)$ → 卷积性噪声

信号的频谱和噪声道频谱混迭在一起，靠经典的滤波方法难以去除噪声。

目标：从含有噪声的数据记录(又称时间序列)中估计出信号的某些特征或信号本身。

滤波器种类：维纳(Wiener)滤波器、卡尔曼(Kalman)滤波器、线性预测、自适应滤波器

对数字滤波器（DF），从实现方法上，有 finite impulse response （FIR）滤波器和 infinite impulse response （IIR）滤波器之分，转移函数分别为:

FIR DF: $$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

IIR DF: $$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

11.6 信号流图

1 概述

2 系统的信号流图表示法

3 术语定义

4 信号流图的性质

5 信号流图的代数运算

1、概述

利用方框图可以描述系统（连续的或离散的），比用微分方程或差分方程更为直观。

线性系统的仿真（模拟）

- 连续系统——相加、倍乘、积分
- 离散系统——相加、倍乘、延时

系统框图 $\xrightarrow{\text{简化}}$ 信号流图

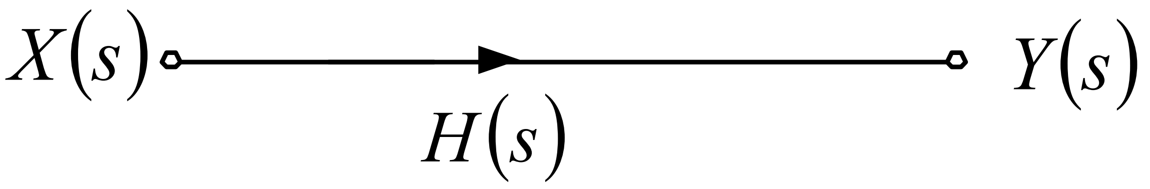
由麻省理工学院的梅森（Mason）于20世纪50年代首先提出。
应用于反馈系统分析、线性方程组求解、线性系统模拟及数字滤波器设计等方面。

信号流图的主要优点:

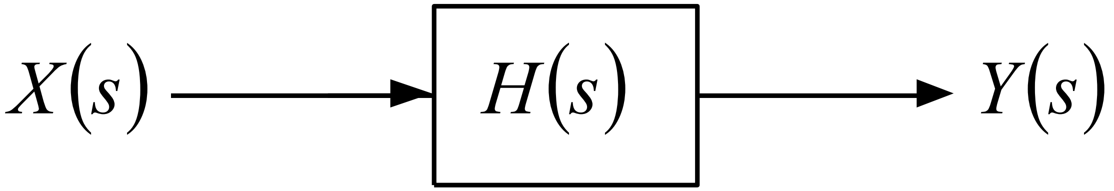
- 系统模型的表示简明清楚
- 简化系统函数的计算方程

2、系统的信号流图表示法

实际上是用一些点和支路来描述系统：



流图



方框图

$X(s)$ 、$Y(s)$ 称为结点 。

线段表示信号传输的路径，称为支路 。

信号的传输方向用箭头表示，转移函数标在箭头附近，相当于乘法器 。

3. 术语定义

结点：表示系统中变量或信号的点。

转移函数：两个结点之间的增益称为转移函数。

支路：连接两个结点之间的定向线段，支路的增益即为转移函数。

输入结点或源点：只有输出支路的结点，它对应的是自变量（即输入信号）。

输出结点或阱点：只有输入支路的结点，它对应的是因变量（即输出信号）。

混合结点：既有输入支路又有输出支路的结点。

开通路：通路与任一结点相交不多于一次。

闭通路：如果通路的终点就是起点，并且与任何其他结点相交不多于一次。闭通路又称环路。

环路增益：环路中各支路转移函数的乘积。

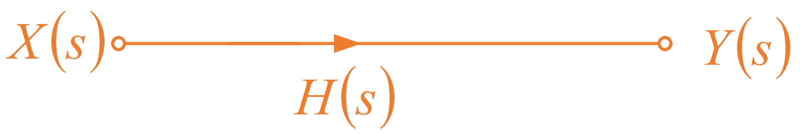
不接触环路：两环路之间没有任何公共结点。

前向通路：从输入结点（源点）到输出结点（阱点）方向的通路上，通过任何结点不多于一次的全部路径。

前向通路增益：前向通路中，各支路转移函数的乘积。

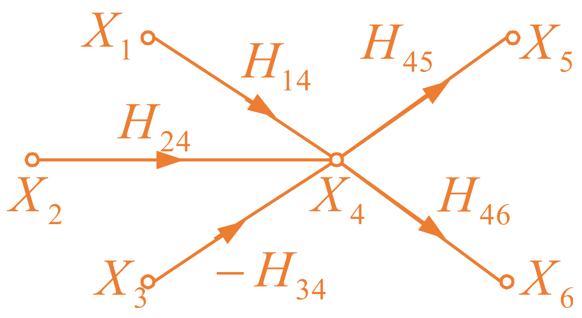
4、信号流图的性质

1）支路表示了一个信号与另一信号的函数关系，信号只能沿着支路上的箭头方向通过。



$$Y(s)=H(s)X(s)$$

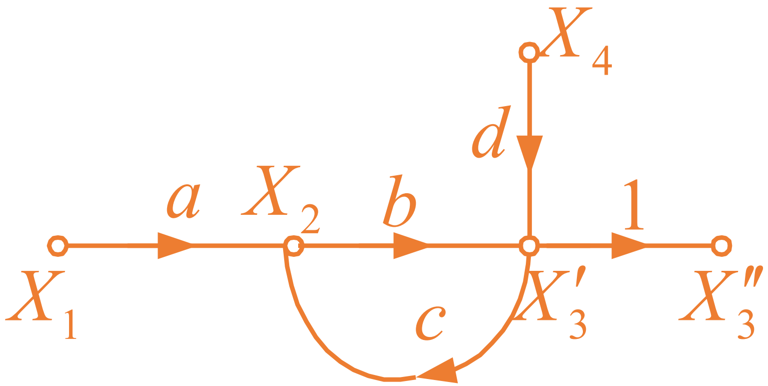
2）结点可以把所有输入支路的信号叠加，并把总和信号传送到所有输出支路。



例如结点 X_4

$$X_4=H_{14}X_1+H_{24}X_2-H_{34}X_3$$

3）具有输入和输出支路的混合结点，通过增加一个具有单传输的支路，可以把它变成输出结点来处理。



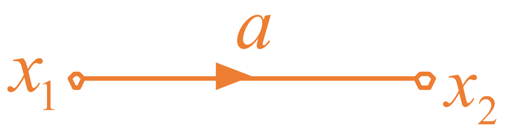
X_3'和X_3'' 实际上是一个结点。分成两个结点以后，X_3'是既有输入又有输出的混合结点；X_3''是只有输入的输出结点 。

4）流图转置以后，其转移函数保持不变 。所谓转置就是把流图中各支路的信号传输方向调转，同时把输入输出结点对换 。

5）给定系统，信号流图形式并不是惟一的 。这是由于同一系统的方程可以表示成不同形式，因而可以画出不同的流图 。

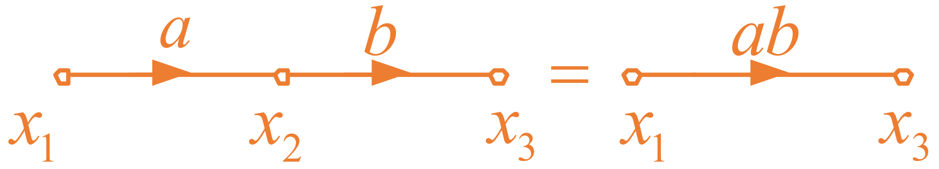
5. 信号流图的代数运算

1）有一个输入支路的结点值等于输入信号乘以支路增益 。

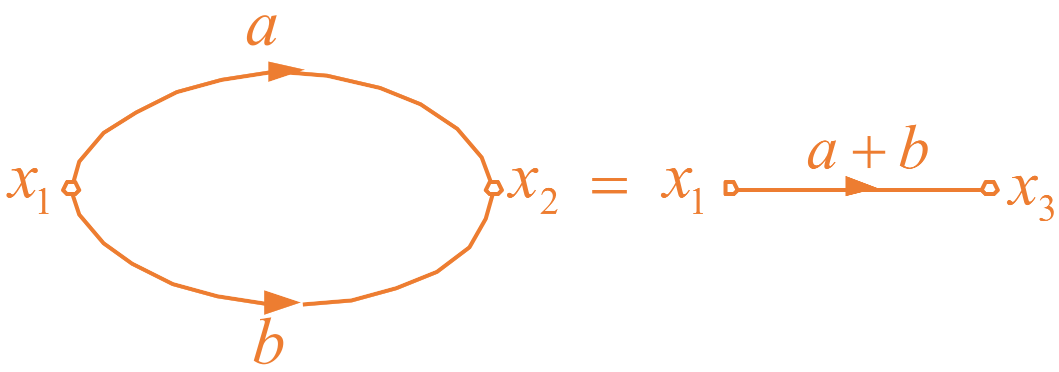


$x_2 = ax_1$

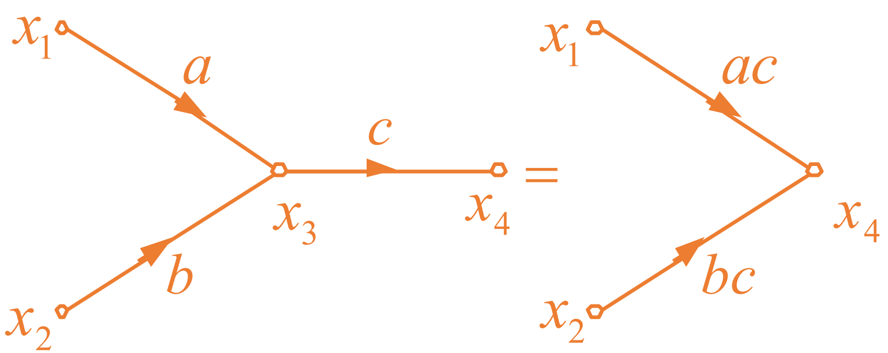
2）串联支路的合并：总增益等于各支路增益的乘积 。



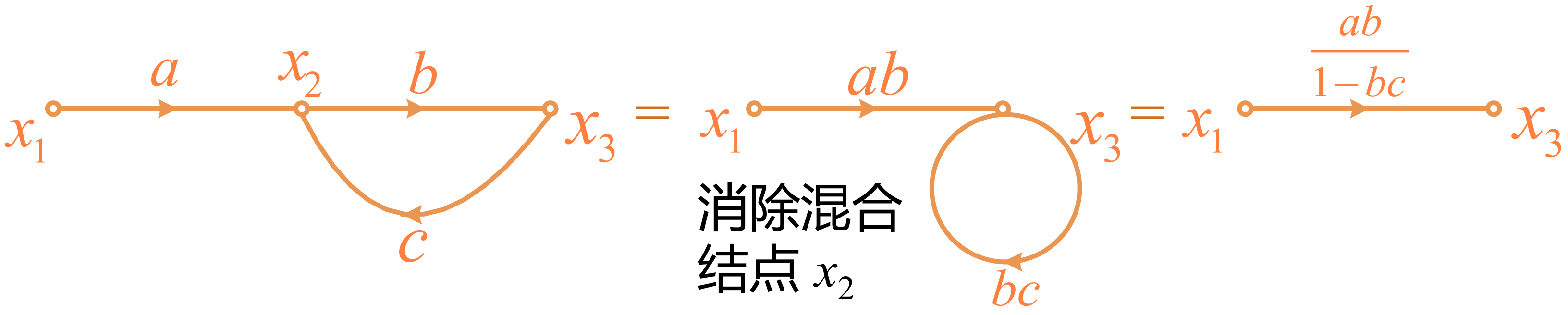
3）并联支路的合并：并联相加



4）混合结点的消除



5）环路的消除

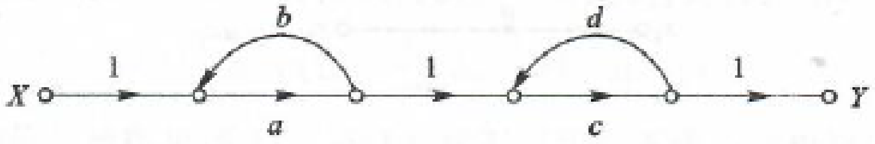


$$\text{因为} \begin{cases} x_2 = ax_1 + cx_3 \\ x_3 = bx_2 \end{cases} \Rightarrow x_3 = abx_1 + bcx_3 \Rightarrow x_3 = \frac{ab}{1-bc}x_1$$

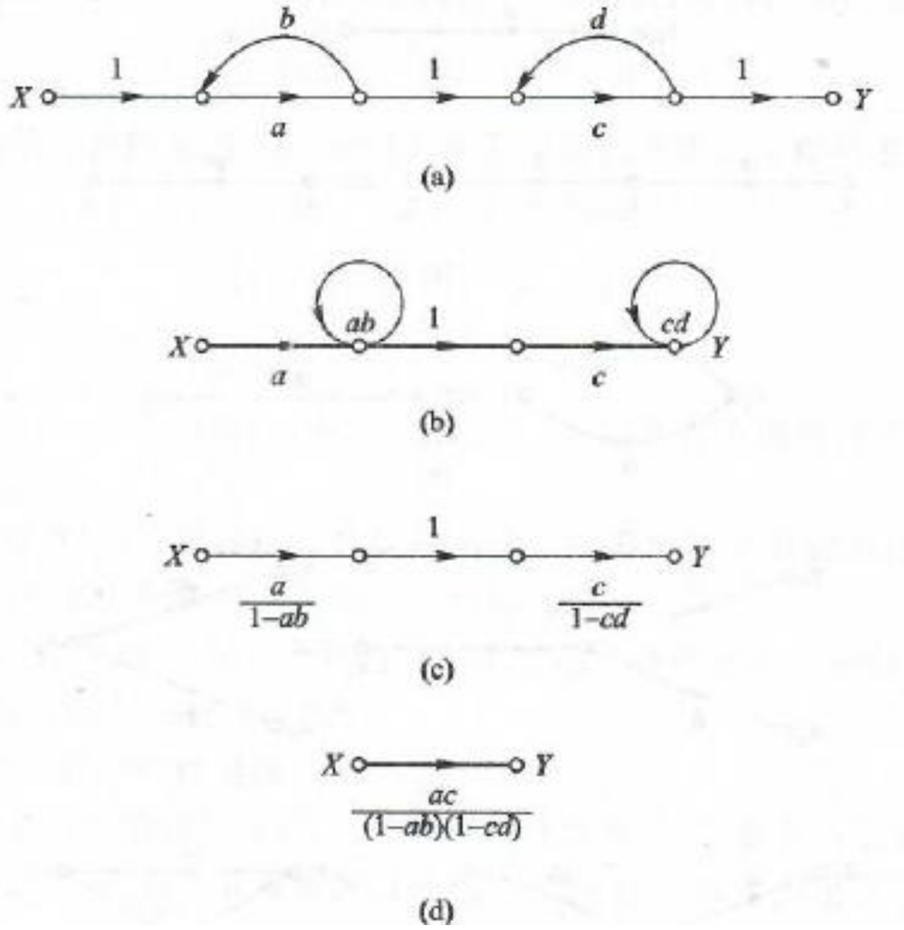
总结： 可以通过如下步骤简化信号流图，从而求得系统函数 。

① 串联支路合并，减少结点；② 并联支路合并，减少支路；③ 消除环路 。

例11-1：利用流图的代数运算规则化简下图所示系统，并求转移函数。



解：

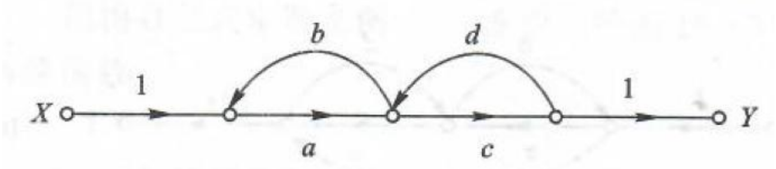


系统的转移函数：$H=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{ac}{(1-ab)(1-cd)}$

单选题 1分

设置

例11-2：利用流图的代数运算规则化简下图所示系统，求得转移函数为（ ）



A $H=\dfrac{ab}{1-ab-cd}$

B $H=\dfrac{ac}{1-ab-cd}$

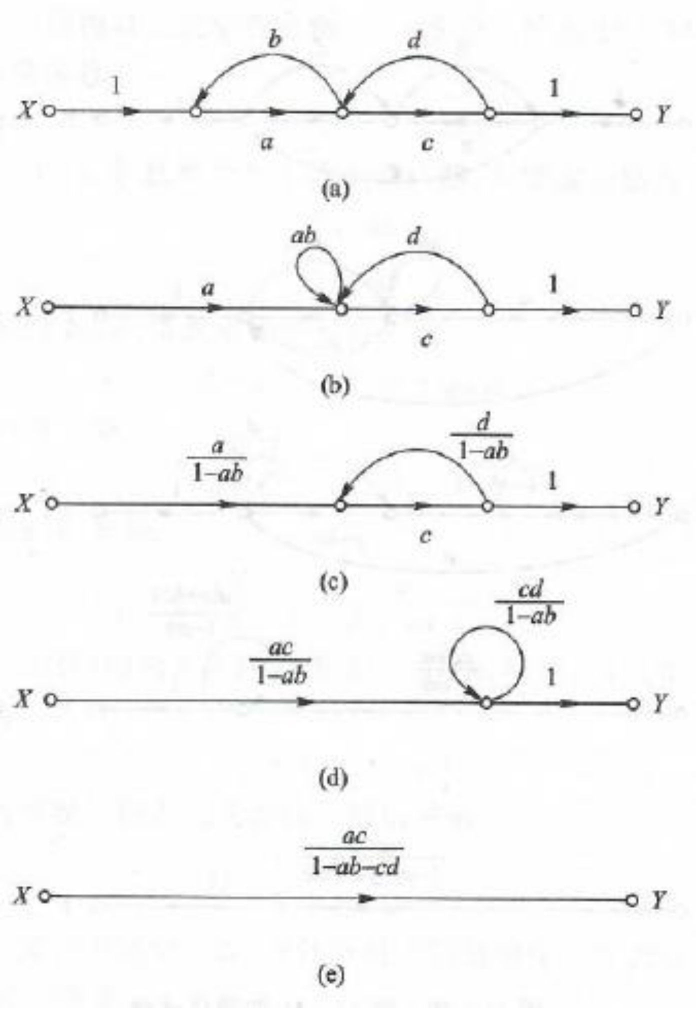
C $H=\dfrac{ab}{1+ab+cd}$

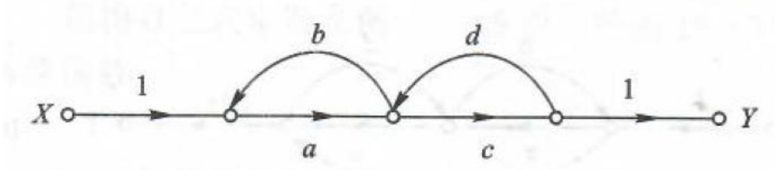
D $H=\dfrac{ac}{1+ab+cd}$

提交

例11-2：利用流图的代数运算规则化简下图所示系统，并求转移函数 。

解：





系统的转移函数为： $H=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{ac}{1-ab-cd}$

6）信号流图的梅森增益公式

$$H=\frac{1}{\Delta}\sum_k g_k\Delta_k$$

式中： Δ——流图的特征行列式。

$$\Delta = 1-(\text{所有不同环路增益之和}) + (\text{每两个互不接触环路增益乘积之和}) - (\text{每三个互不接触环路增益乘积之和}) + \ldots\ldots$$

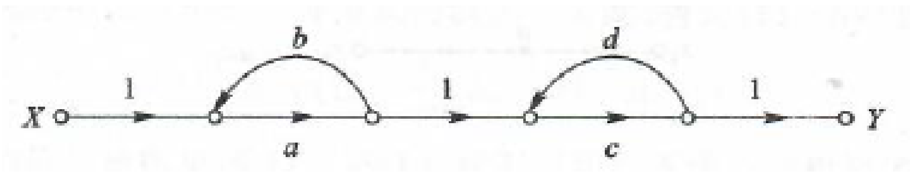
$$=1-\sum_a L_a+\sum_{b,c}L_bL_c-\sum_{d,e,f}L_dL_eL_f+\ldots\ldots$$

k——表示由源点到阱点之间第 k 条前向通路的标号 。

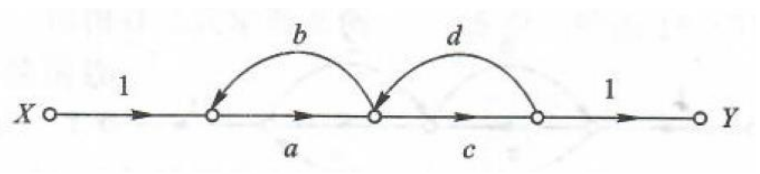
g_k——表示由源点到阱点之间的第 k 条前向通路的增益 。

Δ_k——称为对于第 k 条前向通路特征行列式的余因子。它是除去与 k 条前向通路相接触的环路外，余下的特征行列式。(在 Δ 式中只留下与该通路不接触者，如果该通路与各环路都接触则 $\Delta_k=1$ 。)

例11-3：利用梅森公式求例11-1与11-2所示流图的转移函数 。



例11-1图



例11-2图

解：

（1）例11-1包括两个互不接触的环路，其增益分别为： $L_1 : ab; L_2 : cd;$

二者的乘积为$abcd$，由此求得特征行列式 $\Delta = 1 - ab - cd + abcd$

前向通路只有一条 $g_1 = ac, \Delta_1 = 1$

代入梅森公式后求得 $H = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{ac}{1 - ab - cd + abcd}$

（2）例11-2中的两个环路与例11-1相同，但二者互相接触，因而有特征行列式为

$$\Delta = 1 - ab - cd$$

前向通路的情况与前者完全相同。最后求得

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{ac}{1 - ab - cd}$$

结果与前例完全一致，计算过程明显简化。

作 业

教材习题：

基础题：11-28，11-30

加强题：11-32

第十二章 系统的状态变量分析

12.1 引言

前面几章讨论的信号与系统的各种分析方法属于输入-输出描述法(input-output description)，又称端口分析法或外部法。它强调用系统的输入、输出变量之间的关系来描述系统的特性。

一旦系统的数学模型（n 阶微分或差分方程）建立以后，就不再关心系统内部的情况，而只考虑系统的时间特性和频率特性（系统函数）对输出物理量的影响。经典的线性系统理论不能全面揭示系统内部特性，也不易有效处理多输入-多输出系统。这种分析法适用于较为简单的系统（如单输入-单输出系统）。

要分析非线性、时变、多输入-多输出等复杂系统，可采用状态变量描述法（state variable description），或内部法。它用状态变量描述系统内部变量的特性，并通过状态变量将系统的输入和输出变量联系起来，用于描述系统的外部特性。

- **状态** (**state**)：系统在初始时刻 t_0 的状态是最少数目的一组变量（状态变量）。只要知道 $t = t_0$ 时刻的这组变量和 $t \geq t_0$ 时的输入，就能完全确定系统在任何时间 $t \geq t_0$ 的状态和输出。例如，t_0 时刻的状态通常指电容元件上电压 $u_C(t_0)$ 和电感元件上电流 $i_L(t_0)$ 。n 阶系统有 n 个初始状态 。
- **状态变量** (**state variable**)：用来描述系统状态的数目最少的一组变量。状态变量实质上反映了系统内部储能状态的变化。
- **状态矢量** (**state vector**)：能够完全描述一个系统行为的 k 个状态变量，可以看成一个矢量的各个分量的坐标。
- **状态空间** (**state space**)：状态矢量所在的空间。状态矢量所包含的状态变量的个数就是状态空间的维数，也称系统的复杂度阶数（order of complexity），简称系统的阶数。
- **状态轨迹** (**state orbit**)：在状态空间中，系统在任意时刻的状态都可以用状态空间中的一点（端点）来表示。状态矢量的端点随时间变化而描述的路径，称为状态轨迹。

状态变量分析法的主要优点：

(1) 便于研究系统内部的物理量的变化规律，这些物理量可以用状态矢量的一个分量表示出来。

(2) 适用于线性时不变的单输入-单输出系统，也适用于非线性、时变、多输入-多输出系统特性的描述。

(3) 系统的状态变量分析法与系统的复杂程度没有关系，复杂系统和简单系统的数学模型相似，都表示为一些状态变量的线性组合。

(4) 状态方程都是一阶微分或差分方程，便于计算机分析计算。

(5) 状态方程的主要参数鲜明的表征了系统的关键性能，可用于分析系统的可控制性、可观测性、稳定性。

12.2 连续时间系统状态方程的建立

12.2.1 由电路直接列写状态方程

（1）选择状态变量。通常选择电路中独立的电感电流与独立的电容电压作为状态变量。

（2）列方程。列含有独立电感支路的回路电压方程，含独立电容支路的节点电流方程。

（3）整理方程。将所获方程整理成标准形式。

单选题　1分

设置

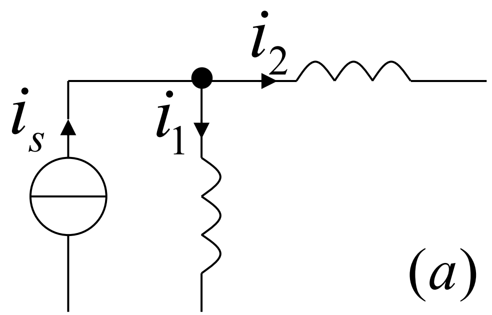
图示的电路（a）和（b）中分别有(　　)个独立的电感电流。

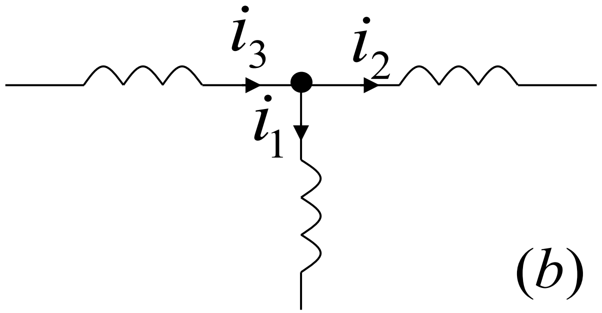
A　2 和 3

B　2 和 2

C　1 和 2

D　1 和 1



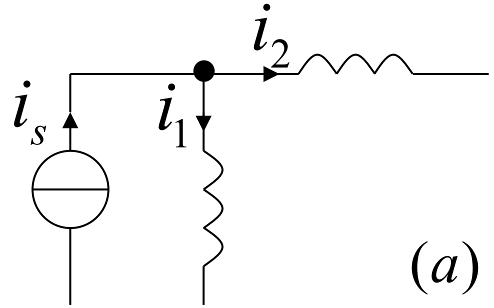


提交

所谓“独立”的电感电流是指各电流不能互相完全表示的电感电流 。

图（a）中由于电流源的约束，两个电感电流只有一个是独立的 。

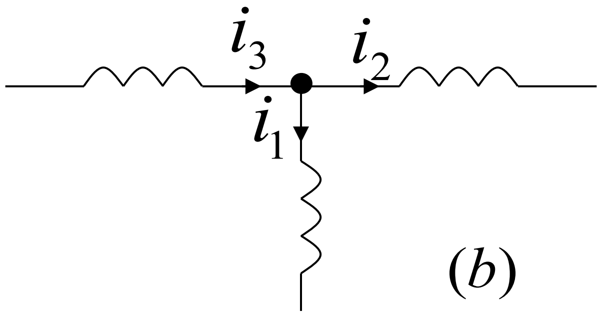
$$i_s - i_1 - i_2 = 0$$



(a)

图（b）中，三个电感电流有两个是独立的 。

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

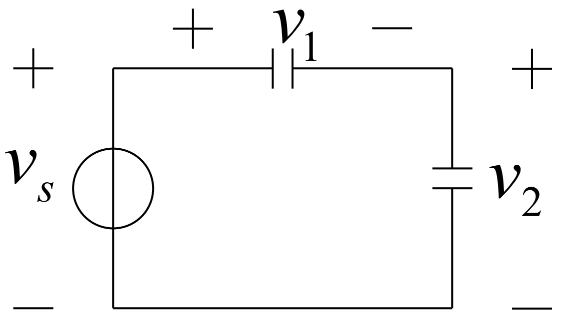


(b)

所谓“独立”的电容电压，是不能完全互相表示的电容电压。

图（a）中，由于电压源的约束，两个电容电压只有一个是独立的。

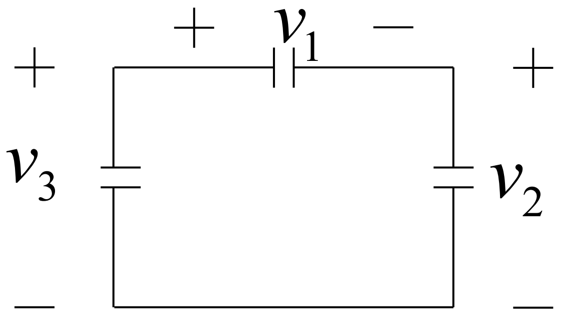
$$v_s = v_1 + v_2$$



(a)

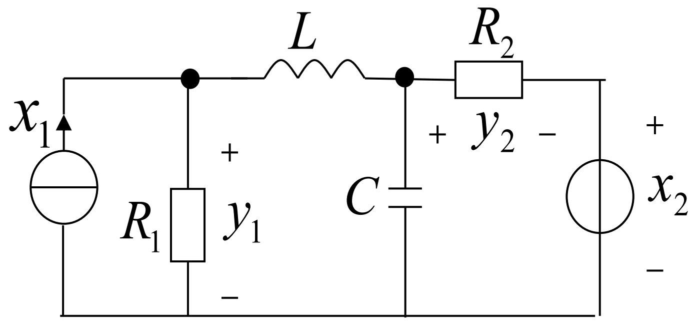
在图（b）中，三个电容电压只有两个是独立的。

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0$$



(b)

例12-1：电路如图中所示，以两电阻上的电压为输出，试列出电路的状态方程与输出方程。



解：

（1）选择电感电流与电容电压为状态变量

$$\lambda_1(t)=i_L(t)$$
$$\lambda_2(t)=v_C(t)$$

（2）列状态方程。列包含电感支路的回路电压方程，

$$L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=[x_1(t)-i_L(t)]R_1-v_C(t)$$

列包含电容支路的节点电流方程，

$$C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}=[x_2(t)-v_C(t)]/R_2+i_L(t)$$

（3）整理方程。

$$L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=[x_1(t)-i_L(t)]R_1-v_C(t)=-R_1 i_L(t)-v_C(t)+R_1 x_1(t)$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{R_1}{L}i_L(t)-\frac{1}{L}v_c(t)+\frac{R_1}{L}x_1(t)$$

$$C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}=[x_2(t)-v_C(t)]/R_2+i_L(t)=i_L(t)-\frac{1}{R_2}v_C(t)+\frac{1}{R_2}x_2(t)$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{C}i_L(t)-\frac{1}{R_2 C}v_C(t)+\frac{1}{R_2 C}x_2(t)$$

写成标准形式：

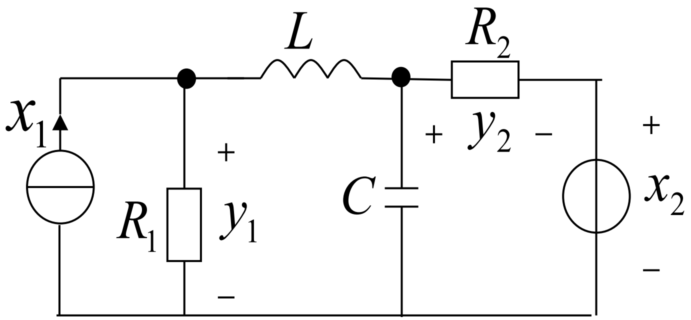
$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{R_1}{L}\lambda_1(t) - \frac{1}{L}\lambda_2(t) + \frac{R_1}{L}x_1(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}\lambda_1(t) - \frac{1}{R_2C}\lambda_2(t) + \frac{1}{R_2C}x_2(t)$$

写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{R_1}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{R_2C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{R_1}{L} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R_2C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

（4）列写输出方程



$$y_1(t)=[x_1(t)-i_L(t)]R_1$$

$$y_2(t)=v_c(t)-x_2(t)$$

于是

$$y_1(t)=-R_1 i_L(t)+R_1 x_1(t)=-R_1\lambda_1(t)+R_1 x_1(t)$$

$$y_2(t)=\lambda_2(t)-x_2(t)$$

写成矩阵式

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

12.2.2 由输入-输出描述列写状态方程

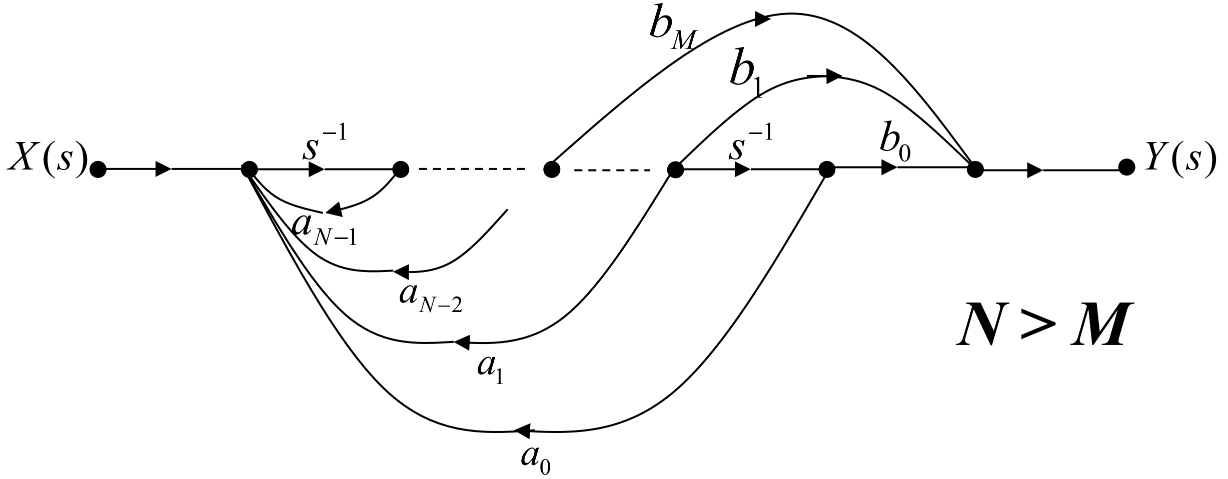
1、相变量法

此时系统的微分方程与系统函数形式如下：

$$\frac{\mathrm{d}^N y(t)}{\mathrm{d}t^N}-\sum_{k=0}^{N-1}a_k\frac{\mathrm{d}^k y(t)}{\mathrm{d}t^k}=\sum_{r=0}^{M}b_r\frac{\mathrm{d}^r x(t)}{\mathrm{d}t^r}$$

$$H(s)=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_r s^r}{s^N-\sum_{k=0}^{N-1}a_k s^k}=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_r s^{r-N}}{1-\sum_{k=0}^{N-1}a_k s^{k-N}}$$

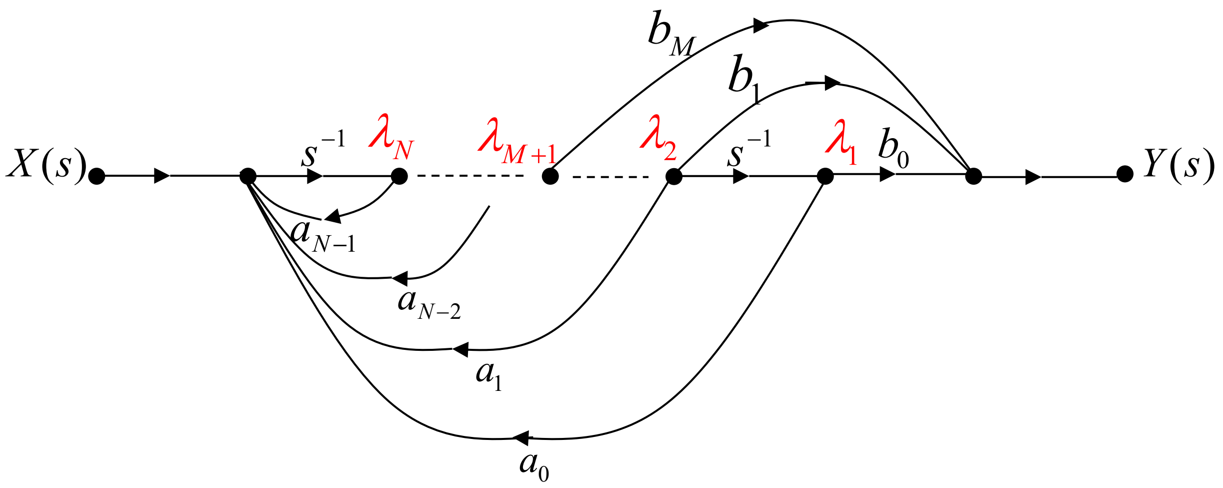
系统的信号流图形式：



$N>M$

（1）在信号流图中，由输出至输入方向，选择积分器的输出为状态变量；

（2）列写状态方程；



$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda_2(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda_3(t)$$

$$\cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_{k-1}(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda_k(t)$$

$$\cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_N(t)}{\mathrm{d}t}=a_0\lambda_1(t)+a_1\lambda_2(t)+\ldots+a_{N-1}\lambda_N(t)+x(t)$$

写成矩阵式

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}\lambda_{N-1}(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\lambda_N(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\lambda}'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & & \cdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{N-2} & a_{N-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_{N-1}(t) \\ \lambda_N(t) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\lambda}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} [x(t)]$$

状态方程: $\boldsymbol{\lambda}'(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t)$

A 矩阵第 N 行由输入输出方程左边的系数排列而成；其它各行均是 0 和 1 。除平行于主对角线上方的一位元素均为 1 外，其余位置是 0 。

B 矩阵是列阵，最后一位元素是 1 ，其余全是 0 。

输出方程: $\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{D}\mathbf{x}(t)$

根据信号流图，输出方程一般情况下（$N>M$）为

$$y(t)=b_0\lambda_1(t)+b_1\lambda_2(t)+\ldots+b_{M-1}\lambda_M(t)+b_M\lambda_{M+1}(t)$$

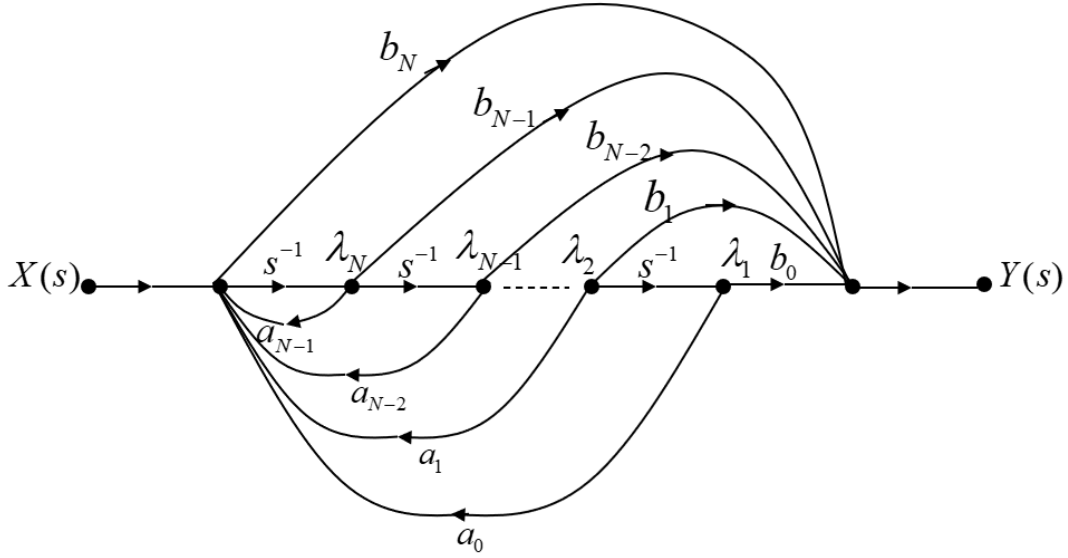
写成矩阵式

$$y(t)=\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{M-1} & b_M & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \ldots \\ \lambda_M(t) \\ \lambda_{M+1}(t) \\ \ldots \\ \lambda_N(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=[b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{M-1} \quad b_M \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

D 矩阵等于 0

如果 $N=M$，系统的信号流图如下



此时，系统的状态方程与前面的相同，但是输出方程 **C**、**D** 矩阵与前不同 。

$$y(t)=b_0\lambda_1(t)+b_1\lambda_2(t)+\ldots+b_{N-1}\lambda_N(t)+b_N\frac{\mathrm{d}\lambda_N(t)}{\mathrm{d}t}$$

由状态方程知道 $\dfrac{\mathrm{d}\lambda_N(t)}{\mathrm{d}t} = a_0\lambda_1(t) + a_1\lambda_2(t) + \ldots + a_{N-1}\lambda_N(t) + x(t)$

$$\therefore\ y(t) = (b_0 + b_N a_0)\lambda_1(t) + (b_1 + b_N a_1)\lambda_2(t) + \ldots\ + (b_{N-1} + b_N a_{N-1})\lambda_N(t) + b_N x(t)$$

此时的 **C** 矩阵为 $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}(b_0 + b_N a_0) & (b_1 + b_N a_1) & \ldots & (b_k + b_N a_k) & \ldots & (b_{N-1} + b_N a_{N-1})\end{bmatrix}$

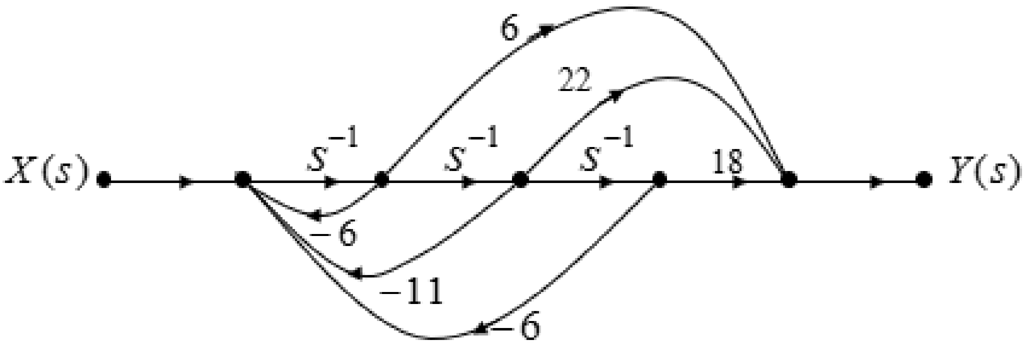
此时的 **D** 矩阵为 $\mathbf{D} = b_N$

例12-2：已知系统函数如下，试用相变量法列出系统的状态方程与输出方程。

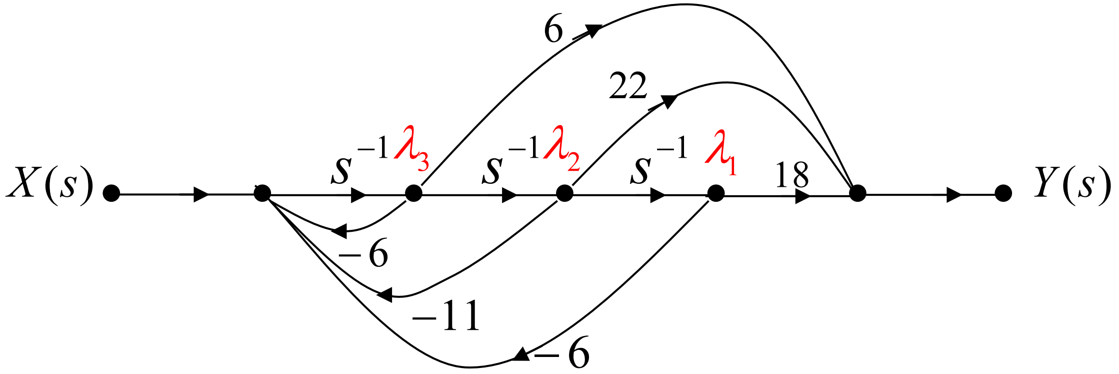
$$H(s)=\frac{6s^2+22s+18}{s^3+6s^2+11s+6}$$

解：作系统的信号流图

$$H(s)=\frac{6s^{-1}+22s^{-2}+18s^{-3}}{1-(-6s^{-1}-11s^{-2}-6s^{-3})}$$



从输出端至输入端，顺序选择积分器的输出为状态变量 。



列写状态方程

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda_2(t) \qquad \frac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda_3(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_3(t)}{\mathrm{d}t}=-6\lambda_1(t)-11\lambda_2(t)-6\lambda_3(t)+x(t)$$

它的矩阵式为

$$\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}\lambda_3(t)}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ \lambda_3(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}x(t)$$

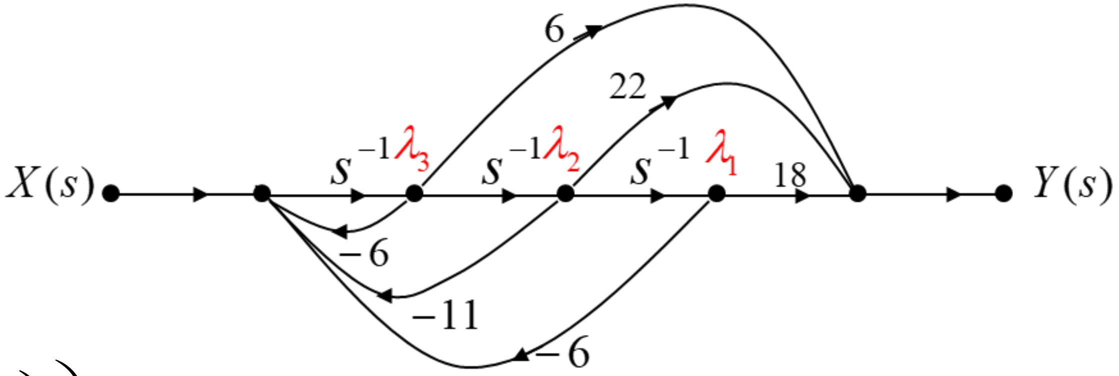
方程中的 A 矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{pmatrix}$$

B 矩阵为

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$H(s)=\frac{6s^{-1}+22s^{-2}+18s^{-3}}{1-(-6s^{-1}-11s^{-2}-6s^{-3})}$$



系统的输出方程为

$$y(t)=18\lambda_1(t)+22\lambda_2(t)+6\lambda_3(t)$$

输出方程矩阵形式为 $y(t)=\begin{pmatrix}18 & 22 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ \lambda_3(t)\end{pmatrix}$

方程中的矩阵

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}18 & 22 & 6\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}=0$$

输入与输出无关——不可控

其实，根据前面的分析，有了系统方程或系统函数，不用作信号流图，就可以直接写出以上的矩阵和方程。

单选题 1分

设置

已知系统函数 $H_1(s)=\dfrac{2s+6}{s^2+3s+2}$ ，系统的状态方程矩阵为

A $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

B $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

C $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

D $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$

提交

例12-3：已知系统函数如下，试用相变量法列出系统的状态方程与输出方程。

$$H_1(s)=\frac{2s+6}{s^2+3s+2} \qquad H_2(s)=\frac{s^2+2s+6}{s^2+3s+2}$$

解：根据相变量法，可直接写出方程的矩阵

（1）$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6 & 2\end{pmatrix}$ $\mathbf{D}=0$

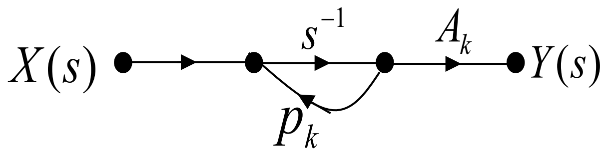
（2）**A**、**B** 矩阵与上相同

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6-2 & 2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}=1$$

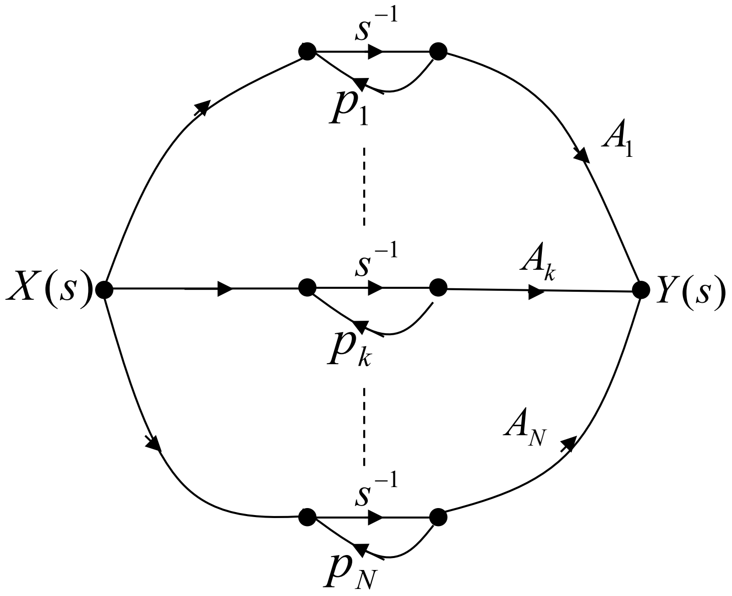
2、对角线法

将系统函数部分分式，表示成一阶分式之和 $H(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}=\sum_{k=1}^{N}\dfrac{A_k}{s-p_k}$

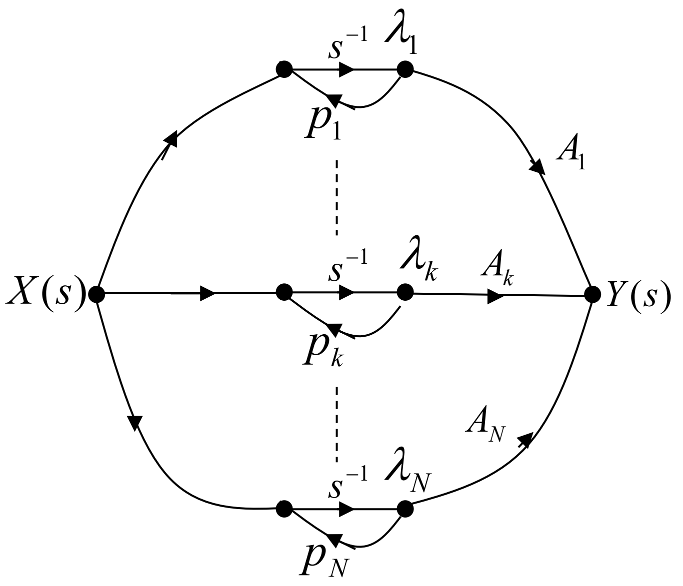
每一个部分分式对应着一个一阶系统。一阶系统的信号流图如下。



系统的信号流图就是这些一阶系统的并联。



取各积分器的输出为状态变量，于是可列状态方程



$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t} = p_1\lambda_1(t) + x(t)$$

$$\cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_N(t)}{\mathrm{d}t} = p_N\lambda_N(t) + x(t)$$

写成矩阵式

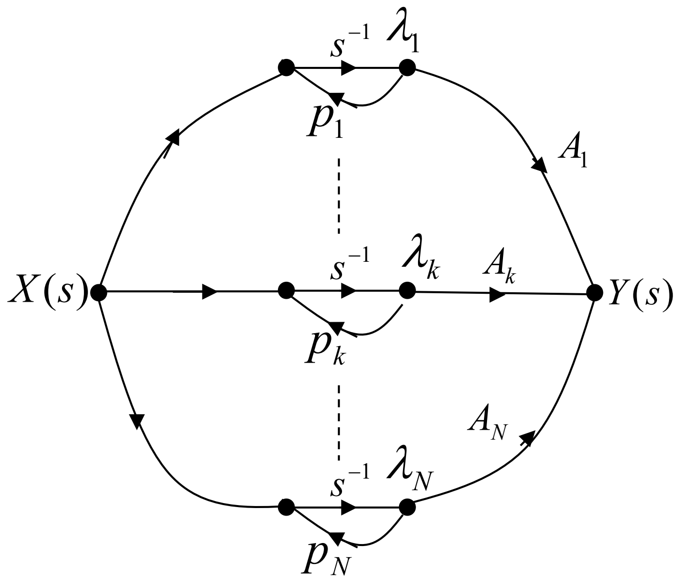
$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t} \\ \cdots \\ \frac{\mathrm{d}\lambda_{N-1}(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}\lambda_N(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & & & & \\ & \cdots & & 0 & \\ & & p_k & & \\ & 0 & & \cdots & \\ & & & & p_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \cdots \\ \lambda_{N-1}(t) \\ \lambda_N(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} [x(t)]$$

A 矩阵为对角阵形式的状态方程在控制理论研究中有重要意义。

系统的输出方程为

$$y(t) = A_1\lambda_1(t) + \ldots + A_k\lambda_k(t) + \ldots + A_N\lambda_N(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_k & \ldots & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \ldots \\ \lambda_k(t) \\ \ldots \\ \lambda_N(t) \end{pmatrix}$$



例12-4：已知例12-2中的系统函数，试用对角线法列出系统的状态方程与输出方程。

$$H(s)=\frac{6s^2+22s+18}{s^3+6s^2+11s+6}$$

解：将系统函数部分分式 $H(s)=\dfrac{6s^2+22s+18}{s^3+6s^2+11s+6}=\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}+\dfrac{3}{s+3}$

于是，方程中的系数矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{D}=0$

状态方程： $\boldsymbol{\lambda}'(t)=\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{Bx}(t)$

输出方程： $\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{Dx}(t)$

12.3 连续时间系统状态方程的求解

12.3.1 矢量的微积分与拉氏变换

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ \cdots\\ \lambda_N(t)\end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\lambda}(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t}\\ \cdots\\ \dfrac{\mathrm{d}\lambda_N(t)}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}$$

$$\int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{\lambda}(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{pmatrix}\int_{-\infty}^{t}\lambda_1(\tau)\mathrm{d}\tau\\ \int_{-\infty}^{t}\lambda_2(\tau)\mathrm{d}\tau\\ \cdots\\ \int_{-\infty}^{t}\lambda_N(\tau)\mathrm{d}\tau\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(s) = LT\{\boldsymbol{\lambda}(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \boldsymbol{\lambda}(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \int_{0^-}^{\infty} \lambda_1(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\ \int_{0^-}^{\infty} \lambda_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\ \cdots \\ \int_{0^-}^{\infty} \lambda_N(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_1(s) \\ \Lambda_2(s) \\ \cdots \\ \Lambda_N(s) \end{pmatrix}$$

$$LT\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\lambda}(t)\right\} = s\boldsymbol{\Lambda}(s) - \boldsymbol{\lambda}(0^-) = s\begin{pmatrix} \Lambda_1(s) \\ \Lambda_2(s) \\ \cdots \\ \Lambda_N(s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1(0^-) \\ \lambda_2(0^-) \\ \cdots \\ \lambda_N(0^-) \end{pmatrix}$$

12.3.2 状态方程的拉氏变换解法

1、状态方程与输出方程的解

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(t)}{\mathrm{d}t}=\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{B}\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{D}\mathbf{x}(t)$$

方程两边同求拉氏变换

$$s\boldsymbol{\Lambda}(s)-\boldsymbol{\lambda}(0^-)=\mathbf{A}\boldsymbol{\Lambda}(s)+\mathbf{B}\mathbf{X}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}(s)+\mathbf{D}\mathbf{X}(s)$$

其中状态变量的拉氏变换

$$s\boldsymbol{\Lambda}(s)-\mathbf{A}\boldsymbol{\Lambda}(s)=\boldsymbol{\lambda}(0^-)+\mathbf{B}\mathbf{X}(s)$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\boldsymbol{\Lambda}(s)=\boldsymbol{\lambda}(0^-)+\mathbf{B}\mathbf{X}(s)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Lambda}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(s)}$$

其中输出变量的拉氏变换

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}(s)+\mathbf{D}\mathbf{X}(s)\quad=\mathbf{C}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(s)]+\mathbf{D}\mathbf{X}(s)$$

$$\boxed{\mathbf{Y}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{X}(s)}$$

于是

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\boldsymbol{\Lambda}(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(s)\right\}$$

$$=\boxed{\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)\right\}}_{\text{零输入分量}}+\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\right\}*\mathbf{x}(t)}_{\text{零状态分量}}}$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{Y}(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{X}(s)\right\}$$

$$=\boxed{\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)\right\}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}\right\}*\mathbf{x}(t)}_{\text{零状态响应}}}$$

$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ ---系统的特征矩阵　$|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|$ ---系统的特征行列式

例12-5：已知系统状态方程的系数矩阵、起始条件和输入，试求状态变量 。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{\lambda}(0^-)=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\qquad x(t)=u(t)$$

解：先求特征矩阵

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\left[\begin{pmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix}s-1 & 0\\ -1 & s+3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}s+3 & 0\\ 1 & s-1\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}s-1 & 0\\ -1 & s+3\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\begin{pmatrix}s+3 & 0\\ 1 & s-1\end{pmatrix}}{(s-1)(s+3)}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s-1} & 0\\ \dfrac{1}{(s-1)(s+3)} & \dfrac{1}{s+3}\end{pmatrix}$$

状态变量的零输入分量

$$\mathbf{\Lambda}_{zi}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^{-})=\begin{pmatrix}\frac{1}{s-1} & 0\\ \frac{1}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{s+3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{s-1}\\ \frac{2s-1}{(s-1)(s+3)}\end{pmatrix}$$

状态变量的零状态分量

$$\mathbf{\Lambda}_{zs}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(s)=\begin{pmatrix}\frac{1}{s-1} & 0\\ \frac{1}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{s+3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{s}=\begin{pmatrix}\frac{1}{s-1}\\ \frac{1}{(s-1)(s+3)}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{s}=\begin{pmatrix}\frac{1}{s(s-1)}\\ \frac{1}{s(s-1)(s+3)}\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{\Lambda}(s)=\boldsymbol{\Lambda}_{zi}(s)+\boldsymbol{\Lambda}_{zs}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s-1}\\ \dfrac{2s-1}{(s-1)(s+3)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s(s-1)}\\ \dfrac{1}{s(s-1)(s+3)}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s-1}\\ \dfrac{\frac{1}{4}}{s-1}+\dfrac{\frac{7}{4}}{s+3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{s}+\dfrac{1}{s-1}\\ \dfrac{-\frac{1}{3}}{s}+\dfrac{\frac{1}{4}}{s-1}+\dfrac{\frac{7}{4}}{s+3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{s}+\dfrac{2}{s-1}\\ \dfrac{-\frac{1}{3}}{s}+\dfrac{\frac{2}{4}}{s-1}+\dfrac{\frac{11}{6}}{s+3}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\begin{pmatrix}-1+2\mathrm{e}^{t}\\ -\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t}+\dfrac{11}{6}\mathrm{e}^{-3t}\end{pmatrix}u(t)$$

2、状态转移矩阵（State Transition Matrix）

由前面的分析知道，系统的状态变量

$$\mathbf{\Lambda}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}[\boldsymbol{\lambda}(0^-)+\mathbf{BX}(s)]$$

$$\therefore \boldsymbol{\lambda}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{\Lambda}(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}*\mathcal{L}^{-1}\{\boldsymbol{\lambda}(0^-)+\mathbf{BX}(s)\}$$

状态转移（过渡）矩阵：

$$\boxed{\mathbf{\Phi}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}}$$

等于系统特征矩阵的拉氏逆变换。它把系统的起始状态和激励的作用，转换成系统在 $t>0$ 后的任意时刻的状态。

例12-6：已知系统的微分方程，试列出其状态方程和输出方程，并求其状态转移矩阵。

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2y(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+3x(t)$$

解：根据相变量法，可列出状态方程。方程中的系数矩阵为

$$\boldsymbol{\lambda}'(t)=\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{B}\mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{pmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{vmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{pmatrix}}{s^2+3s+2}=\begin{pmatrix}\dfrac{s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2}\\ \dfrac{-2}{s^2+3s+2} & \dfrac{s}{s^2+3s+2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\\ \dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{pmatrix}$$

输出方程: $\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{D}\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}b_0 & b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}=0$$

状态转移矩阵: $\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}=\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}u(t)$

比较以上系统方程与求解状态转移矩阵对应的特征行列式

$$\begin{vmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{vmatrix}=s^2+3s+2$$

这正好是系统方程对应的特征多项式，一般情况下也是系统函数的分母多项式，它的根是系统的特征根。

3、求系统（转移）函数

由前面分析知道，系统的输出矢量的拉氏变换为

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{X}(s)$$

其中零状态分量是 $\mathbf{Y}_{zs}(s)=[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{X}(s) \quad =\mathbf{H}(s)\mathbf{X}(s)$

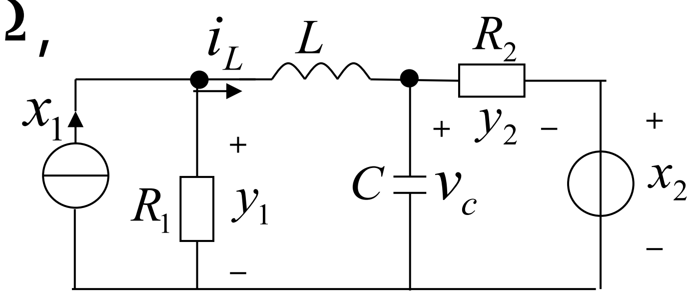
$$\mathbf{H}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D} \Longleftarrow \text{系统（转移）函数}$$

对于单输入-单输出的系统， H (s) 是标量 。将例12-6中求得的矩阵 **A**，**B**，**C**，**D** 代入上述公式，可验证 H (s) 与直接从微分方程得到的系统函数相同 。

对于有 m 个输入，l 个输出的系统，H(s) 是一个 $l\times m$ 的矩阵。其第 i 行第 j 列表示

$$H_{ij}(s)=\left.\frac{\text{第}i\text{个输出对第}j\text{个输入的响应}}{\text{第}j\text{个输入}}\right|_{\text{其它输入为零}}$$

例12-7：例12-1所示电路如图，设 $L=1H, C=1F, R_1=R_2=1\Omega$，试求该 2×2 系统的转移函数矩阵。



解：由例12-1已知

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2C}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\frac{R_1}{L} & 0\\ 0 & \frac{1}{R_2C}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-R_1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}R_1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

系统的特征矩阵

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{pmatrix}s+1 & 1\\ -1 & s+1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}s+1 & -1\\ 1 & s+1\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}s+1 & 1\\ -1 & s+1\end{vmatrix}}=\begin{pmatrix}\frac{s+1}{s^2+2s+2} & \frac{-1}{s^2+2s+2}\\ \frac{1}{s^2+2s+2} & \frac{s+1}{s^2+2s+2}\end{pmatrix}$$

于是，系统转移函数矩阵

$$\mathbf{H}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{s+1}{s^2+2s+2} & \dfrac{-1}{s^2+2s+2}\\ \dfrac{1}{s^2+2s+2} & \dfrac{s+1}{s^2+2s+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{-(s+1)}{s^2+2s+2} & \dfrac{1}{s^2+2s+2}\\ \dfrac{1}{s^2+2s+2} & \dfrac{s+1}{s^2+2s+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{-(s+1)}{s^2+2s+2} & \dfrac{1}{s^2+2s+2}\\ \dfrac{1}{s^2+2s+2} & \dfrac{s+1}{s^2+2s+2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{s^2+s+1}{s^2+2s+2} & \dfrac{1}{s^2+2s+2}\\ \dfrac{1}{s^2+2s+2} & -\dfrac{s^2+s+1}{s^2+2s+2}\end{pmatrix}$$

※ 12.3.3 状态方程的时域解法

由前面拉氏变换解中已知，状态方程的解为

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}\boldsymbol{\lambda}(0^-) + \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}\mathbf{B} * \mathbf{x}(t)$$

式中的状态转移矩阵表示为矩阵指数 $\boxed{\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}}$

于是以上状态方程的解 $\boxed{\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{\lambda}(0^-) + \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} * \mathbf{x}(t)}$

状态方程的解或输出方程的解都由零输入解和零状态解相加组成，两部分的变化规律都与矩阵 e^{At} 有关，因此 e^{At} 反映了系统状态变化的本质，称为状态转移矩阵。而状态转移矩阵可以由系统特征矩阵的拉氏逆变换求得，也可用时域求解方法。

※1、状态转移矩阵的时域求解

在标量情况下，以自然数为底的指数 $\mathrm{e}^{at}=1+(at)+\dfrac{1}{2!}(at)^2+\ldots+\dfrac{1}{k!}(at)^k+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}(at)^k$

在矢量情况下，定义矩阵指数。设矩阵 $\mathbf{A}$ 为方阵

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}=1+(\mathbf{A}t)+\frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2+\ldots+\frac{1}{k!}(\mathbf{A}t)^k+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k$$

矩阵指数有以下的性质：

(1) $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathrm{e}^{-\mathbf{A}t}=\mathbf{I}$ (2) $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}=[\mathrm{e}^{-\mathbf{A}t}]^{-1}$ (3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}=\mathbf{A}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}=\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$

根据凯莱—汉密尔顿定理，当 $\mathbf{A}$ 是一 N 阶方阵，则有

$$\mathbf{A}^k=b_0\mathbf{I}+b_1\mathbf{A}+b_2\mathbf{A}^2+\ldots+b_{N-1}\mathbf{A}^{N-1}=\sum_{i=0}^{N-1}b_i\mathbf{A}^i\quad(k\geq N)$$

对 N 阶方阵 $\mathbf{A}$，对应的指数矩阵 $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}=c_0\mathbf{I}+c_1\mathbf{A}+c_2\mathbf{A}^2+\ldots+c_{N-1}\mathbf{A}^{N-1}$

求解的方法与步骤:

(1) 解矩阵A的特征方程，求特征根; $\left|\alpha\mathbf{I}-\mathbf{A}\right|=0$

(2) 根据特征根，列方程组；若以上特征根均为单根，则

$$\mathrm{e}^{\alpha_i t}=c_0+c_1\alpha_i+c_2\alpha_i^2+\ldots+c_{N-1}\alpha_i^{N-1}$$

若有特征根 α_1 为 m 重根，则对应的 m 个方程为

$$\mathrm{e}^{\alpha_1 t}=c_0+c_1\alpha_1+c_2\alpha_1^2+\ldots+c_{N-1}\alpha_1^{N-1}\quad (i=1,2,\ldots N)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\alpha t}}{\mathrm{d}\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_1}=t\mathrm{e}^{\alpha_1 t}=c_1+2c_2\alpha_1+\ldots+(N-1)c_{N-1}\alpha_1^{N-2}$$

$$\cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}\mathrm{e}^{\alpha t}}{\mathrm{d}\alpha^{m-1}}\Big|_{\alpha=\alpha_1}=t^{m-1}\mathrm{e}^{\alpha_1 t}=(m-1)!c_{m-1}+m!c_m\alpha_1+\frac{(m+1)!}{2!}c_{m+1}\alpha_1^2+\ldots+\frac{(N-1)!}{(N-m)!}c_{N-1}\alpha_1^{N-m}$$

(3) 解方程，求出 c_i ;

(4) 做矩阵运算，求出 $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}=c_0\mathbf{I}+c_1\mathbf{A}+c_2\mathbf{A}^2+\ldots+c_{N-1}\mathbf{A}^{N-1}$

例12-8：例12-6中已知矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$，试用时域法求状态转移矩阵 。

解：（1）求矩阵的特征根：$|\alpha\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\left|\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\alpha & -1\\ 2 & \alpha+3\end{vmatrix}$

$$=\alpha^2+3\alpha+2=0 \quad \therefore \alpha_1=-1, \alpha_2=-2$$

（2）有以下方程： $e^{-2t}=c_0-2c_1$ $\qquad e^{-t}=c_0-c_1$

（3）解以上方程，得到： $c_0=2e^{-t}-e^{-2t}$ $\qquad c_1=e^{-t}-e^{-2t}$

（4）状态转移矩阵为：

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}=c_0\mathbf{I}+c_1\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & 0\\ 0 & 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}+(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & 0\\ 0 & 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -3\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}u(t)$$

※ 2、输出方程的时域求解

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+\left[\mathbf{C}\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}\mathbf{B}+\mathbf{D}\delta(t)\right]*\mathbf{x}(t)$$

$$\boxed{=\underbrace{\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{\lambda}(0^-)}_{\text{零输入解}}+\underbrace{\left[\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}+\mathbf{D}\delta(t)\right]*\mathbf{x}(t)}_{\text{零状态解}}}$$

例12-9：例12-6中，已知状态方程与输出方程的系数矩阵，以及初始条件，且输入 $x(t)=\delta(t)$，试解输出方程 。

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\quad \mathbf{D}=0\quad \boldsymbol{\lambda}(0^-)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

解：由上例已知系统的状态转移矩阵 $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}=\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}u(t)$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+[\mathbf{C}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}+\mathbf{D}\delta(t)\mathbf{I}]*\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]*\delta(t)$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}\right]*\delta(t)$$

$$=(2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})+(2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})*\delta(t)$$

$$=2(2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

作 业

教材习题：

基础题：12-1，12-5，12-6

加强题：12-7，12-10