上节内容

7.1 引言

7.2 离散时间信号—序列

7.3 离散时间系统的数学模型

7.1 引言

连续时间系统 vs. 离散时间系统

连续时间系统	离散时间系统
• 微分方程	• 差分方程
• 卷积积分	• 卷积和
• 拉氏变换	• z变换
• 连续傅里叶变换	• 离散傅里叶变换
• 系统函数	• 系统函数
• 卷积定理	• 卷积定理

7.2.2 离散时间信号的运算

1、序列的平移

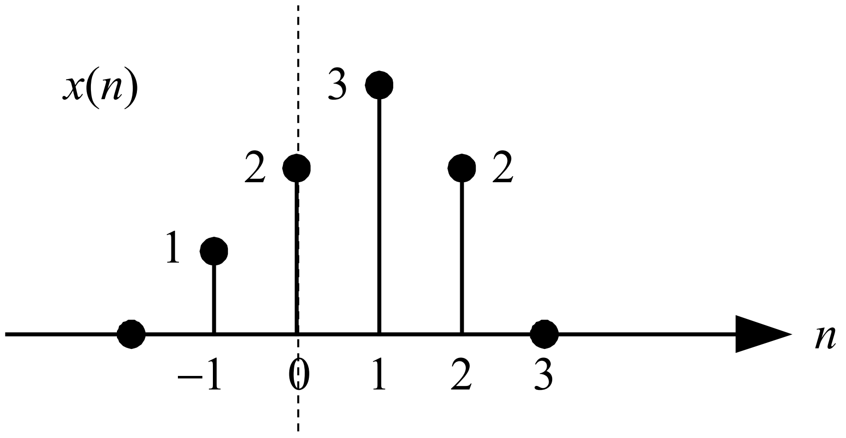
$x(n-m)$ 表示将 $x(n)$右移m个单位。

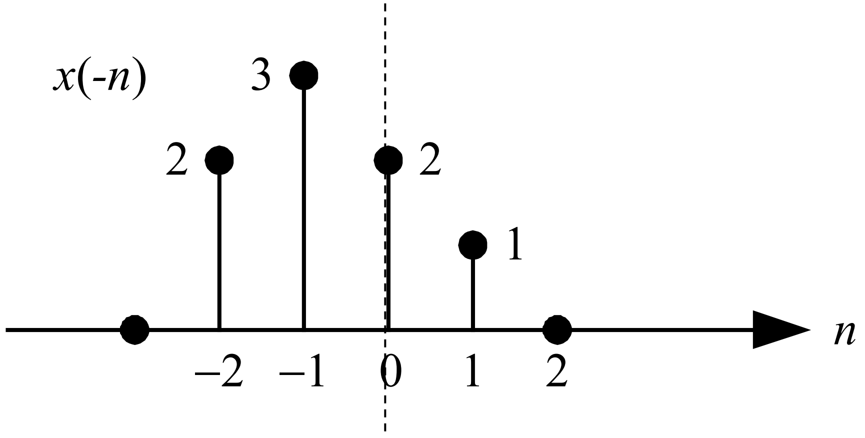
$x(n+m)$ 表示将 $x(n)$左移m个单位。

$m > 0$

2、序列的反褶

$$x(n) \to x(-n)$$





已知序列$x(n)=\{-2,1,2,\overset{\downarrow}{0},3,2,4,6,5\}$，则 $x(2n)=(\quad)$

A $\{-2,\overset{\downarrow}{2},3,4,5\}$

B $\{1,\overset{\downarrow}{0},2,6\}$

C $\{2,\overset{\downarrow}{0},3,2\}$

D $\{-2,1,\overset{\downarrow}{0},2,6\}$

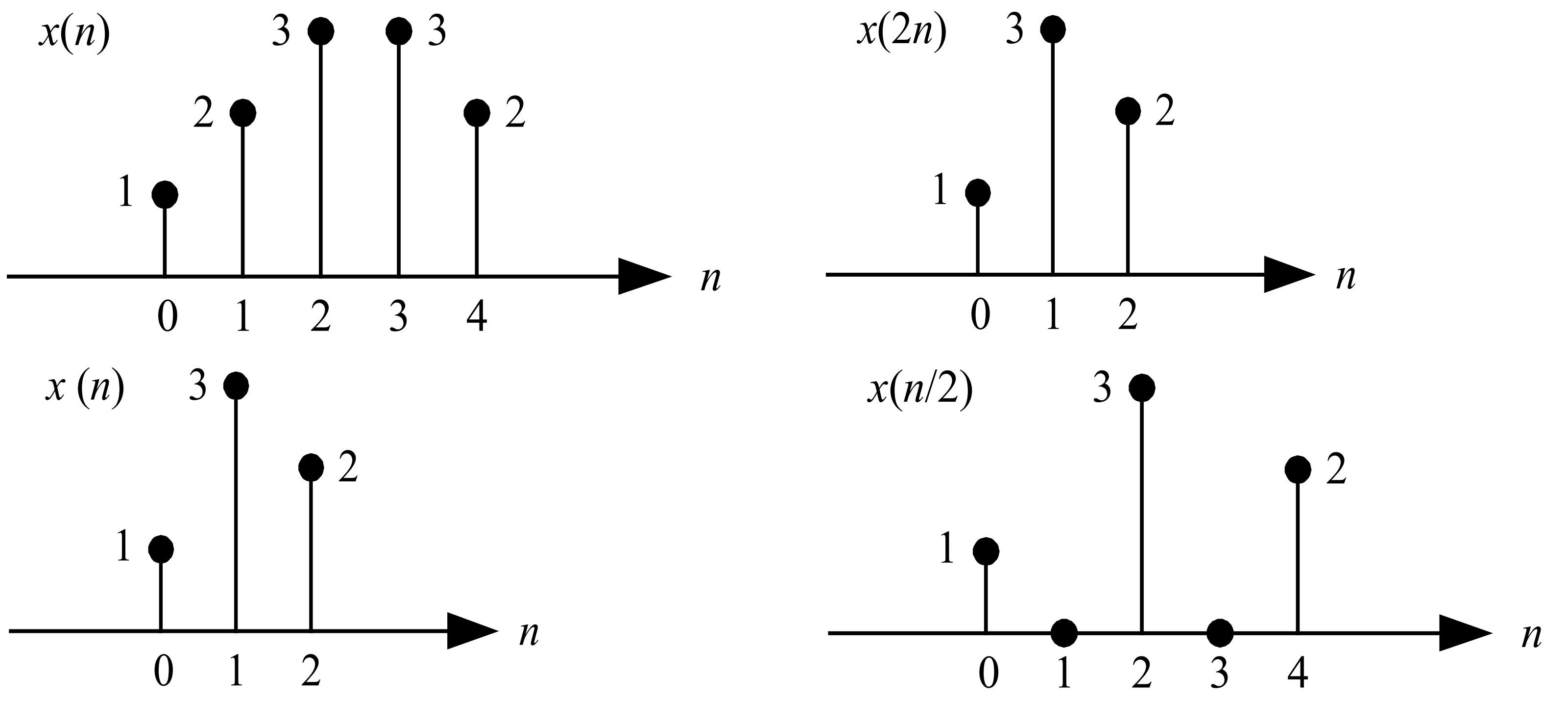
提交

3、序列的尺度变换

***a*为正整数**

$x(n) \to x(an)$ 　　压缩：原点左右每隔(a-1)点抽取一点

$x(n) \to x\left(\dfrac{n}{a}\right)$ 　　扩展：相邻两点之间插入(a-1)个零值点



离散时间系统的数学模型

差分方程

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

输入是离散序列**x(n)**及其时移函数 $x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots.$

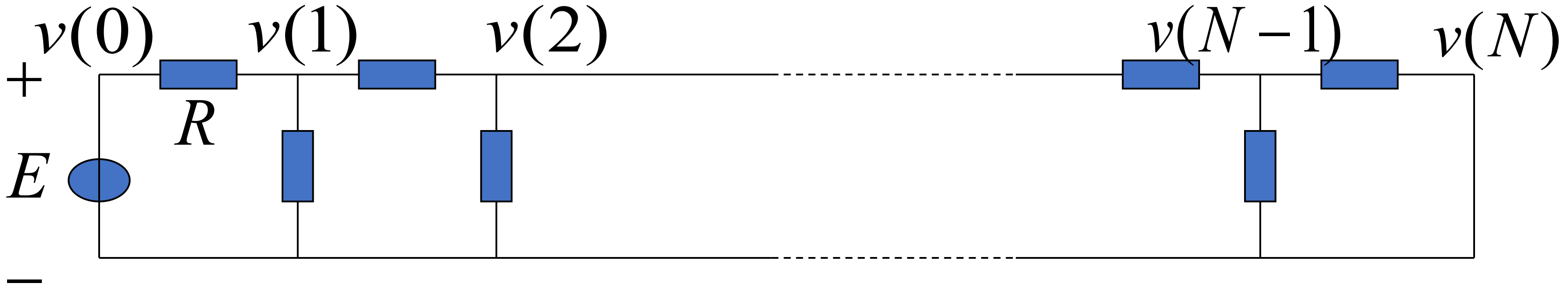
输出是离散序列**y(n)**及其时移函数 $y(n), y(n-1), y(n-2), \ldots.$

基本运算：延时，乘系数，相加

输出序列的第**n**个值不仅决定于同一瞬间的输入样值，而且还与前面输出值有关，每个输出值必须依次保留。

$$\text{通式:} \sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

例7-4： 电阻梯形网络，其各支路电阻都为R，每个结点对地的电压为$v(n)$，$n=0$，1，2，…，N。已知两边界结点电压为$v(0)=E$，$v(N)=0$。求$v(n)$的差分方程式。



解：

$$\frac{v(n-1)}{R}=\frac{v(n)-v(n-1)}{R}+\frac{v(n-2)-v(n-1)}{R}\qquad (n\geq 2)$$

$$v(n)-3v(n-1)+v(n-2)=0$$

本次课内容

7.4 常系数线性差分方程的求解

7.5 离散时间系统的单位样值(冲激)响应

本次课目标

1. 熟悉差分方程的经典时域求解方法，正确使用边界条件；

2. 熟悉单位样值响应的求解；

7.1 引言

7.2 离散时间信号—序列

7.3 离散时间系统的数学模型

7.4 常系数线性差分方程的求解

7.5 离散时间系统的单位样值(冲激)响应

7.6 卷积和

7.4 常系数线性差分方程的求解

线性时不变离散系统由常系数线性差分方程来描述：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

方程式的阶数等于未知序列变量序号的最高值与最低值之差。

求解方法：

- 迭代法
- 时域经典法：求齐次解和特解
- 卷积法：利用齐次解得零输入响应，再利用卷积和求零状态响应。
- 变换域法（z变换法，第八章）
- 状态变量分析法（第十二章）

7.4.1 迭代法

当差分方程阶次较低时常用此法。

例7-5：已知差分方程 $y(n)=ay(n-1)+x(n)$，$y(-1)=0$，且激励 $x(n)=\delta(n)$，求$y(n)$。

解：$n=0 \quad y(0)=ay(-1)+x(0)=0+\delta(n)=1$

$n=1 \quad y(1)=ay(0)+x(1)=a+0=a$

$n=2 \quad y(2)=ay(1)+x(2)=a.a+0=a^2$

……

$$y(n)=ay(n-1)+x(n)=a^n$$

$$\therefore \quad y(n)=a^n u(n)$$

缺点：不易得到闭合形式的解。

7.4.2 时域经典法

差分方程的完全解即系统的完全响应, 由齐次解$y_h(n)$和特解$y_p(n)$组成:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

齐次解$y_h(n)$的形式由齐次方程的特征根确定。

特解$y_p(n)$的形式由激励信号代入方程右边化简的形式确定。

1、求齐次解(系统固有的响应)

差分方程的齐次方程：
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=0$$

例7-6：若一阶齐次差分方程的表达式为$y(n)-ay(n-1)=0$，但起始状态$y(-1),y(-2),\dots y(-N)$不能全为零，求对应的齐次解。

解：
$$y(-1)\neq 0,\frac{y(0)}{y(-1)}=\frac{y(1)}{y(0)}=\dots=\frac{y(n)}{y(n-1)}=a$$

说明$y(n)$是一个公比为a的几何级数，所以$y(n)=Ca^n$。

或由特征方程$r-a=0$ 可得 $r=a$，$y(n)=Cr^n=Ca^n$

指数形式

C由起始状态（边界条件）确定。

任意阶差分方程的齐次解以形式为 $C\alpha^n$ 的项线性组合而成。

将 $y(n)=C\alpha^n$ 代入差分方程 $\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=0$ 得到 $\sum_{k=0}^{N} a_k C\alpha^{n-k}=0$,

消去常数 C 并逐项乘以 α^{N-n}，得到

$$a_0\alpha^N + a_1\alpha^{N-1} + \cdots + a_k\alpha^{N-k} + \cdots + a_N = 0$$

特征方程

方程的根 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\ldots$

特征根

α_i 称为系统的固有频率或自由频率、自然频率。

齐次解的形式:

(1) 特征根是不等实根（无重根）$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$

$$y_h(n) = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n + \cdots + C_N\alpha_N^n = \boxed{\sum_{k=1}^{N} C_k\alpha_k^n}$$

(2) 特征根是k阶重根 α_1

$$y_h(n) = C_1 n^{k-1}\alpha_1^n + C_2 n^{k-2}\alpha_1^n + \cdots + C_{k-1} n\ \alpha_1^n + C_k\alpha_1^n = \boxed{\sum_{i=1}^{k} C_i n^{k-i}\alpha_1^n}$$

(3) 特征根是成对共轭复根 $\alpha \pm j\beta = \rho e^{\pm j\omega_0}$

$$y_h(n) = C_1(\alpha + j\beta)^n + C_2(\alpha - j\beta)^n = \boxed{\rho^n[P\cos(n\omega_0) + Q\sin(n\omega_0)]}$$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad P = C_1 + C_2 \quad Q = j(C_1 - C_2)$$

齐次解的待定系数由边界条件决定（在求出特解之后）。

差分方程与微分方程齐次解的比较

特征根	差分方程齐次解	微分方程齐次解
不等实根$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N$	$\sum_{k=1}^{N} C_k \alpha_k^n$	$\sum_{k=1}^{N} A_k e^{\alpha_k t}$
k重根α_1	$\sum_{i=1}^{k} C_i n^{k-i} \alpha_1^n$	$\sum_{i=1}^{k} A_i t^{k-i} e^{\alpha_1 t}$
共轭复根$\alpha \pm j\beta$	$\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^n \left[P\cos(n\omega_0)+Q\sin(n\omega_0)\right]$	$e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$

2、求特解：由激励信号的形式决定

自由项（方程右端）	特解形式
α^n	$D\alpha^n$（α不是特征根） $Dn^r\alpha^n$（α是r重特征根）
n^k	$D_0n^k+\cdots+D_{k-1}n+D_k$（1不是特征根） $n^r[D_0n^k+\cdots+D_{k-1}n+D_k]$（1是$r$重特征根）
$\alpha^n n^k$	$[D_0n^k+\cdots+D_{k-1}n+D_k]\alpha^n$（$\alpha$不是特征根） $n^r[D_0n^k+\cdots+D_{k-1}n+D_k]\alpha^n$（$\alpha$是$r$重特征根）
$\cos(n\omega)$或$\sin(n\omega)$	$D_1\cos(n\omega)+D_2\sin(n\omega)$（$e^{\pm j\omega}$不是特征根）
$\alpha^n\cos(n\omega)$或 $\alpha^n\sin(n\omega)$	$\alpha^n[D_1\cos(n\omega)+D_2\sin(n\omega)]$（$\alpha e^{\pm j\omega}$不是特征根）

➢通过观察方程右端自由项的函数形式，试选特解函数式。

➢将特解代入方程，利用待定系数法来确定D_i。

定理1：k阶常系数非齐次线性差分方程

$$y(n)+a_1y(n-1)+\cdots+\ a_ky(n-k)=P_I(n)\alpha^n$$

有形如$y^*(n)=n^sQ_I(n)\alpha^n$的特解，当α不是方程的特征根时$s=0$，当α是方程的r重特征根时$s=r$。$P_I(n)$为n的I次多项式，$Q_I(n)$为n的I次待定系数多项式。

定理2：k阶常系数非齐次线性差分方程

$$y(n)+a_1y(n-1)+\cdots+\ a_ky(n-k)=\alpha^n[P_h(n)\cos(n\omega)+P_I(n)\sin(n\omega)]$$

有形如$y^*(n)=n^s\alpha^n[Q_t^1(n)\cos(n\omega)+Q_t^2(n)\sin(n\omega)]$ 的特解，当$\alpha e^{\pm j\omega}$非方程特征根时$s=0$，当$\alpha e^{\pm j\omega}$是方程的r重特征根时$s=r$。$Q_t^1(n)$、$Q_t^2(n)$是$t=\max\{\mathrm{h},\mathrm{I}\}$次待定系数多项式。

3、由边界条件确定齐次解待定系数

完全解的一般形式（无重根的情况）：

$$y(n)=C_1\alpha_1^{\ n}+C_2\alpha_2^{\ n}+\cdots+C_N\alpha_N^{\ n}+D(n)=\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n+D(n)$$

C_i须利用N个给定的边界条件来确定。例如，

$$\begin{cases} y(0)=C_1+C_2+\cdots+C_N+D(0) \\ y(1)=C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\cdots+C_N\alpha_N+D(1) \\ \cdots\cdots \\ y(N-1)=C_1\alpha_1^{\ N-1}+C_2\alpha_2^{\ N-1}+\cdots+C_N\alpha_N^{\ N-1}+D(N-1) \end{cases}$$

对于因果系统（激励在n=0时接入系统），常给定$y(-1),y(-2),\ldots,y(-N)$为边界条件。

例7-7：求差分方程 $y(n)+2y(n-1)=x(n)-x(n-1)$ 的完全解。其中激励信号 $x(n)=n^2$，且已知 $y(-1)=-1$ 。

解： $\alpha=-2$ $\therefore$ $y_h(n)=C_1(-2)^n$ 齐次解

$右端自由项=n^2-(n-1)^2=2n-1$

$y_p(n)=D_0n+D_1$ 特解的形式

$D_0n+D_1+2D_0(n-1)+2D_1=2n-1$ 特解代入差分方程

$$\begin{cases} 3D_0=2 \\ 3D_1-2D_0=-1 \end{cases} \Rightarrow D_0=\frac{2}{3},\ D_1=\frac{1}{9}$$

$$y_p(n)=\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}$$ 特解

完全解=齐次解+特解

$$y(n)=C_1(-2)^n+\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}$$

代入边界条件求出待定系数 C_1，

$$y(-1)=C_1(-2)^{-1}+\frac{2}{3}(-1)+\frac{1}{9}=-1$$

$$C_1=\frac{8}{9}$$

得到完全解的闭式

$$y(n)=\frac{8}{9}(-2)^n+\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}$$

例7-8： 解差分方程 $y(n)+2y(n-1)+2y(n-2)=\sin\frac{n\pi}{2}$，已知 $y(0)=1$，$y(-1)=0$。

解： （1）求齐次解

特征方程为 $\alpha^2+2\alpha+2=0$ 特征根为 $\alpha_{1,2}=-1\pm j=-\sqrt{2}e^{\mp j\frac{\pi}{4}}$

（也可写为 $\sqrt{2}e^{\pm j\frac{3\pi}{4}}$）

齐次解为 $y_h(n)=\left(-\sqrt{2}\right)^n\left(P\cos\frac{n\pi}{4}+Q\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

（2）求特解

$$y_p(n)=D_1\sin\frac{n\pi}{2}+D_2\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$\left(2D_2-D_1\right)\sin\frac{n\pi}{2}-\left(2D_1+D_2\right)\cos\frac{n\pi}{2}=\sin\frac{n\pi}{2}\ \Rightarrow\ D_1=-\frac{1}{5}\quad D_2=\frac{2}{5}$$

$$y_p(n)=-\frac{1}{5}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{5}\cos\frac{n\pi}{2}$$

（3）求完全解

$$y(n)=\left(-\sqrt{2}\right)^{n}\left(P\cos\frac{n\pi}{4}+Q\sin\frac{n\pi}{4}\right)-\frac{1}{5}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{5}\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y(-1)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} P+\dfrac{2}{5}=1 \\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(P\dfrac{\sqrt{2}}{2}-Q\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\dfrac{1}{5}=0 \end{cases}$$

$$\therefore P=\frac{3}{5} \quad Q=\frac{1}{5}$$

$$y(n)=\left(-\sqrt{2}\right)^{n}\left(\frac{3}{5}\cos\frac{n\pi}{4}+\frac{1}{5}\sin\frac{n\pi}{4}\right)-\frac{1}{5}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{5}\cos\frac{n\pi}{2}$$

经典法不足之处

1. 若差分方程右边激励项较复杂，则难以处理。

2. 若激励信号发生变化，则须全部重新求解。

3. 若初始条件发生变化，则须全部重新求解。

4. 这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念。

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n+D(n)$$

7.4.3 零输入响应和零状态响应

系统全响应=零输入响应+零状态响应

1、零输入响应

➢定义：输入信号为零，仅由系统的起始状态单独作用而产生的响应，用$y_{zi}(n)$表示。

➢数学模型:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

➢求解方法：根据差分方程的特征根确定零输入响应的形式，再由边界条件求齐次解待定系数。

已知某线性时不变系统的差分方程为:

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$$

系统的起始状态为$y(-1)=0$， $y(-2)= 1/2$。系统的零输入响应为（ ）。

A $y_{zi}(n)=(-1)^n-2(-2)^n \quad n\geq 0$

B $y_{zi}(n)=2(-2)^n \quad n\geq 0$

C $y_{zi}(n)=-2(-2)^n \quad n\geq 0$

D $y_{zi}(n)=(-1)^n \quad n\geq 0$

提交

例7-9： 已知某线性时不变系统的差分方程为 $y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$，系统的起始状态为$y(-1)=0$，$y(-2)=1/2$，求系统的零输入响应。

解： 系统的特征方程为 $\alpha^2+3\alpha+2=0$

特征根为 $\alpha_1=-1,\alpha_2=-2$

设系统的零输入响应为 $y_{zi}(n)=C_1(-1)^n+C_2(-2)^n$

$$y(-1)=-C_1-\frac{1}{2}C_2=0$$

$$y(-2)=C_1+\frac{1}{4}C_2=\frac{1}{2}$$

解得 $C_1=1$，$C_2=-2$

用零点以前的值来求的

$$\therefore y_{zi}(n)=(-1)^n-2(-2)^n \quad (n\geq 0)$$

2、零状态响应

- 定义：当系统的起始状态为零时，由系统的外部激励$x(n)$产生的响应，用$y_{zs}(n)$表示。

- 数学模型：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

- 求解方法：

1） 直接求解起始状态为零的差分方程。

2） 卷积法：利用信号分解和线性时不变系统的特性求解。

3、零状态响应的直接求解法

直接求解起始状态为零的差分方程，也可得零状态响应。

$$y_{zs}(n)=\sum_{k=1}^{N} C_{zsk}\alpha_k^n + D(n)$$

对于因果系统（激励信号在n=0时接入系统），常给出$y(-1)$, $y(-2)$, …,$y(-N)$作为边界条件。

零状态是指$y(-1)$,$y(-2)$,$y(-3)$,…,$y(-N)$都等于零。

$y(0)$,$y(1)$,$y(2)$,…,$y(N-1)$可用迭代法求出。

完全响应=齐次解　＋特解

完全响应=自由响应＋强迫响应

完全响应=零输入响应+零状态响应

$$y(n)=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{D(n)}_{\text{强迫响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zik}\alpha_k^n}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zsk}\alpha_k^n+D(n)}_{\text{零状态响应}}$$

对于N阶差分方程，激励在n=0时加入，确定零输入响应或零状态响应的齐次解的系数，需利用边界条件-- N个$y(n)$值。

确定零输入响应的齐次解的系数：起始条件$y(n)$中的n可正可负，且未必连续（例如，教材例7-8中给出了$y(1), y(2), y(3), y(5)$）。$y(-1), y(-2),\ldots y(-N)$或$y(0), y(1),\ldots y(N-1)$作为边界条件均可。$n\geq 0$时的$y(n)$可利用$n<0$时的$y(n)$迭代得到，迭代时须令差分方程右边等于零。

确定零状态响应的齐次解的系数：令$y(-1)=y(-2)=\ldots=y(-N+1)=0$，迭代求$y(0), y(1), \ldots$。假设激励在$n = n_0$时加入，边界条件中需包含至少一个$n\geq n_0$的$y(n)$，且$n < n_0$时的$n$需连续（确保可以迭代得到$n\geq n_0$的$y(n)$）。例如，$n_0 = 0$时，$y(0), y(-1), y(-N+1)$作为边界条件。

例7-10：已知某线性时不变因果系统的差分方程式为:

$$y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n)$$

(1)若边界条件$y(-1)=0$，求系统的完全响应。

(2)若边界条件$y(-1)=1$，求系统的完全响应。

解：（1）因为边界条件$y(-1)=0$，求系统的完全响应等效于求零状态响应。

方程的齐次解为 $C(0.9)^n$

由方程右端激励形式，选择特解为D

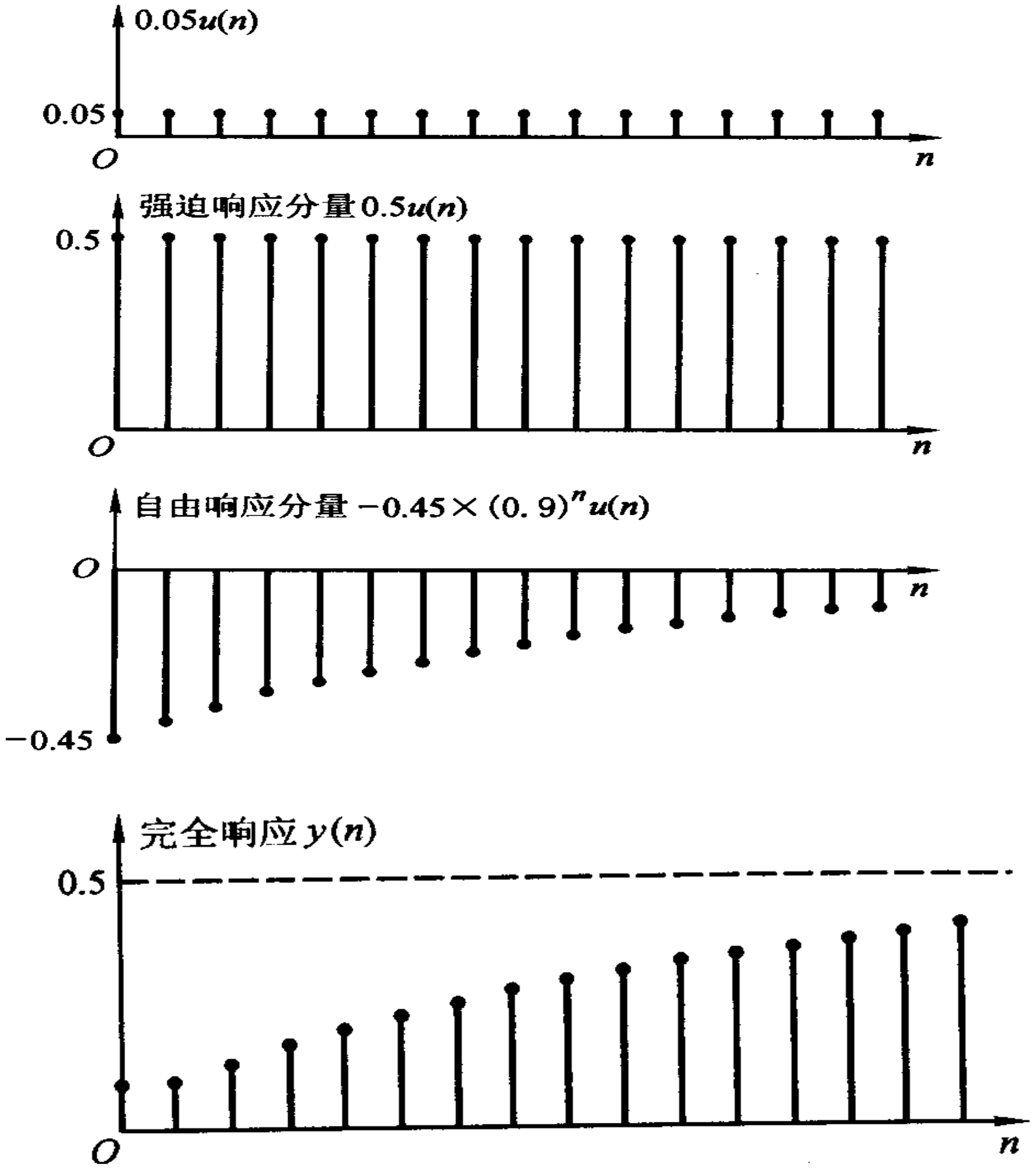
将特解代入差分方程：$D-0.9D=0.05$， $D=0.5$

完全解形式为：$y(n)=C(0.9)^n+0.5$

由$y(-1)=0$，利用迭代法得到 $y(0) = 0.9y(-1)+0.05 = 0.05$

$y(0)$ 代入$y(n)$： $0.05=C+0.5 \quad \Rightarrow C=-0.45$

$$\therefore\ y(n)=\left[-0.45\times(0.9)^n+0.5\right]u(n)$$


0.05u(n)
0.05
O
n
强迫响应分量0.5u(n)
0.5
O
n
自由响应分量 −0.45×(0. 9)ⁿu(n)
O
n
−0.45
完全响应 y(n)
0.5
O
n

(2) 在(1)中已求得零状态响应 $y_{zs}(n)=\left[-0.45\times(0.9)^n+0.5\right]u(n)$

求零输入响应：

令激励为零，得差分方程：$y(n)-0.9y(n-1)=0$

零输入响应 $y_{zi}(n)=C_{zi}\times(0.9)^n$

y(-1) =1代入：$1=C_{zi}\times(0.9)^{-1} \quad \Rightarrow C_{zi}=0.9$

完全响应：$y(n)=\underbrace{\left[-0.45\times(0.9)^n+0.5\right]}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{0.9\times(0.9)^n}_{\text{零输入响应}}$

$$=\underbrace{0.45\times(0.9)^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{0.5}_{\text{强迫响应}} \qquad (n\geq 0)$$

利用经典法求完全响应

方程的齐次解为 $C(0.9)^n$

由方程右端激励形式，选择特解为D

将特解代入差分方程：$D-0.9D=0.05$，　$D=0.5$

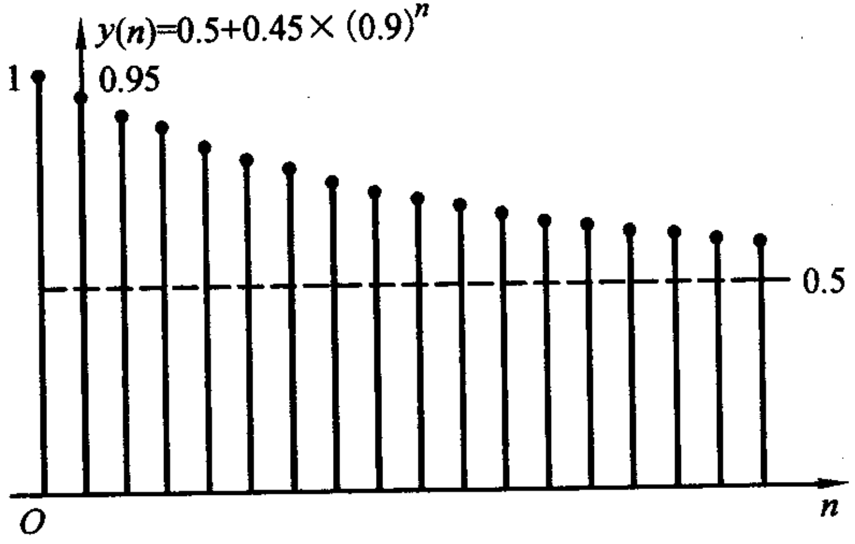
完全解形式为：$y(n)=C(0.9)^n+0.5$

由$y(-1)=1$，利用迭代法得到 $y(0)=0.9y(-1)+0.05=0.95$

$y(0)=0.95$ 代入完全解$y(n)$：

$$0.95=C+0.5 \quad \Rightarrow C=0.45$$

$$\therefore y(n)=\left[0.45\times(0.9)^n+0.5\right]u(n)$$



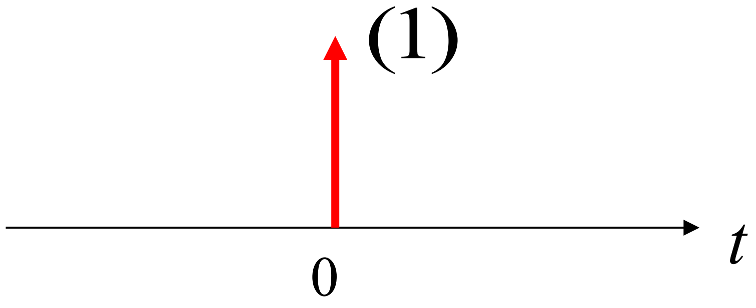
结果同前面一样！

7.5 离散时间系统的单位样值响应

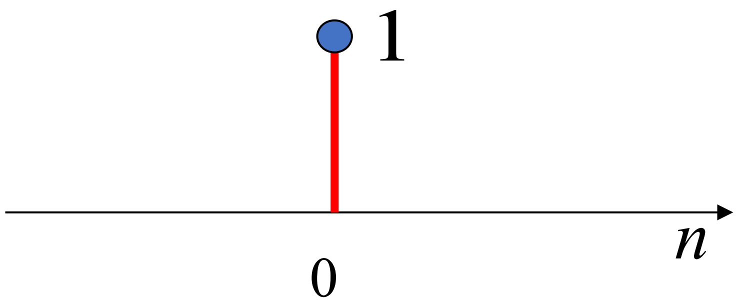
单位样值响应：是激励为$\delta(n)$时产生的系统**零状态响应**，用$\boldsymbol{h(n)}$表示。

注意$\delta(t)$和$\delta(n)$的区别：

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 & (t = 0) \\ \delta(t) = 0 & (t \neq 0) \end{cases}$$



$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



7.1 引言

7.2 离散时间信号—序列

7.3 离散时间系统的数学模型

7.4 常系数线性差分方程的求解

7.5 离散时间系统的单位样值(冲激)响应

7.6 卷积和

7.5.1 单位样值响应的求解

1、迭代法求系统单位样值响应

例7-11：已知离散时间系统的差分方程表达式如下，求单位样值响应。

$$y(n)-0.5y(n-1)=x(n)$$

解：对于因果系统 $x(-1)=\delta(-1)=0,\quad y(-1)=h(-1)=0$

$$h(0)=\delta(0)+0.5y(-1)=1$$

$$h(1)=\delta(1)+0.5y(0)=0.5$$

$$h(2)=\delta(2)+0.5y(1)=(0.5)^2$$

……

$$\therefore\quad h(n)=(0.5)^n u(n)$$

2、将单位样值激励信号转化为边界条件

将 $\delta(n)$ 转化为边界条件，于是求单位样值响应转化为求齐次解，即 $n>0$ 时的零输入响应。

以上一例题为例 $y(n)-0.5y(n-1)=x(n)$

$$\alpha-0.5=0 \qquad \alpha=0.5$$

齐次解为 $h(n)=C(0.5)^n u(n)$

$$h(-1)=0 \qquad h(0)=0.5h(-1)+\delta(0)=1$$

$$h(0)=C(0.5)^0=1 \qquad C=1$$

$$\therefore h(n)=(0.5)^n u(n)$$

例7-12:已知系统差分方程，求单位样值响应。

$$y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$$

解： ***h*(*n*)**满足方程

$$h(n)-3h(n-1)+3h(n-2)-h(n-3)=\delta(n)$$

（1）求零输入响应

$$\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1=0,\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$$

齐次解为 $C_1n^2+C_2n+C_3$

（2）边界条件

对于因果系统，有 $h(-1)=0,h(-2)=0,h(-3)=0$

代入差分方程，可推出

$$h(0)=3h(-1)-3h(-2)+h(-3)+\delta(0)=1$$

$$C_1 n^2 + C_2 n + C_3$$

以 $h(0)=1, h(-1)=0, h(-2)=0$ 作为零输入响应的边界条件

$$\begin{cases} 1 = C_3 \\ 0 = C_1 - C_2 + C_3 \\ 0 = 4C_1 - 2C_2 + C_3 \end{cases} \qquad C_1 = \frac{1}{2} \quad C_2 = \frac{3}{2} \quad C_3 = 1$$

（3）求单位样值响应 $\boxed{h(n) = \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2)u(n)}$

边界条件也可以是 $h(0), h(1), h(2)$

注意：选择边界条件的基本原则是必须将 $\delta(n)$ 的作用体现在边界条件中。

3、利用线性时不变性求单位样值响应

在 $n \neq 0$ 时，接入激励 $\delta(n-1)$，用线性时不变性来计算 $\boldsymbol{h(n)}$。

$$y(n)-0.5y(n-1)=\delta(n-1)$$

$$x(n)=\delta(n) \qquad h(n)=(0.5)^n u(n)$$

$$x(n)=\delta(n-1) \qquad r(n)=h(n-1)=(0.5)^{n-1}$$

例7-13：已知系统的差分方程模型，求单位样值响应。

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)\text{-}3x(n\text{-}2)$$

拆开求解

解：（1）齐次解为 $C_1 2^n + C_2 3^n$

（2）只考虑激励**$x(n)=\delta(n)$**作用时系统的单位样值响应**$h_1(n)$**

$$h_1(0)=1,\quad h_1(-1)=0 \qquad C_1=-2,\quad C_2=3$$

$$h_1(n)=(3^{n+1}-2^{n+1})u(n)$$

（3）只考虑激励**$-3x(n-2)$**

$$h_2(n)=-3h_1(n-2)=-3(3^{n-1}-2^{n-1})u(n-2)$$

利用LTI性质

（4）$h(n)=h_1(n)+h_2(n)=(3^{n+1}-2^{n+1})u(n)-3(3^{n-1}-2^{n-1})u(n-2)$

$$=(3^{n+1}-2^{n+1})\left[\delta(n)+\delta(n-1)+u(n-2)\right]-(3^n-3\times 2^{n-1})u(n-2)$$

$$=\delta(n)+5\delta(n-1)+(2\times 3^n-2^{n-1})u(n-2)$$

7.5.2 根据单位样值响应分析系统的因果性和稳定性

因果系统：输出变化不领先于输入变化的系统。即响应只取决于此时及以前的激励。

离散时间线性时不变系统是因果系统的充分必要条件：

$$n<0 \quad h(n)=0 \quad \text{或} h(n)=h(n)u(n)$$

稳定系统：输入有界则输出必定有界。

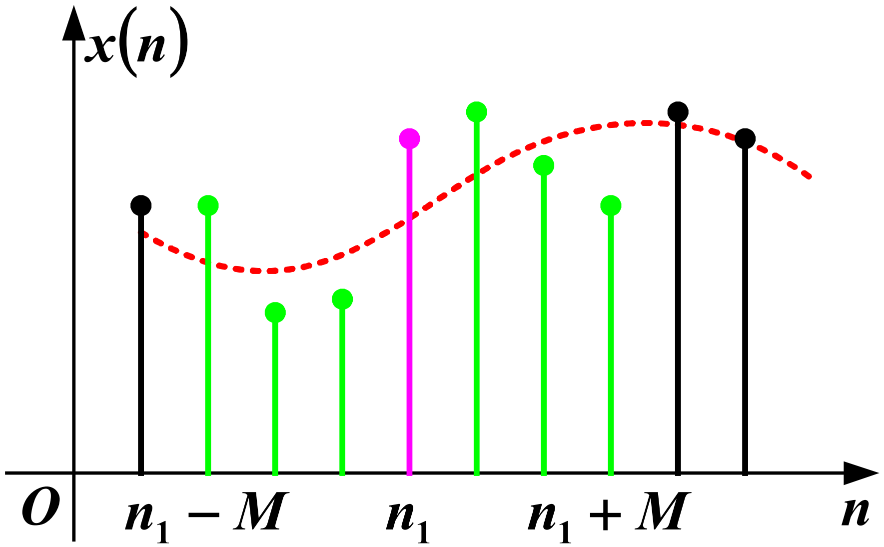
离散实际线性时不变系统是稳定系统的充分必要条件：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right| \le M, M\text{为有界正值}$$

非因果系统举例

滑动平均滤波器：为考察一段时间内的慢变化趋势，可以利用移动平滑系统滤除高频成分。

$$y(n)=\frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{M}x(n-k)$$



已知某系统的单位样值响应 $h(n)=a^n u(n)$ ，该系统（）

A 因果，稳定

B 非因果，稳定

C 因果，$|a|<1$时稳定，$|a|>1$时不稳定

D 因果，$|a|<1$时不稳定，$|a|>1$时稳定

提交

7.5 离散时间系统的单位样值响应

例7-14： 已知某系统的单位样值响应 $h(n)=a^n u(n)$ ，判断它的因果性和稳定性。

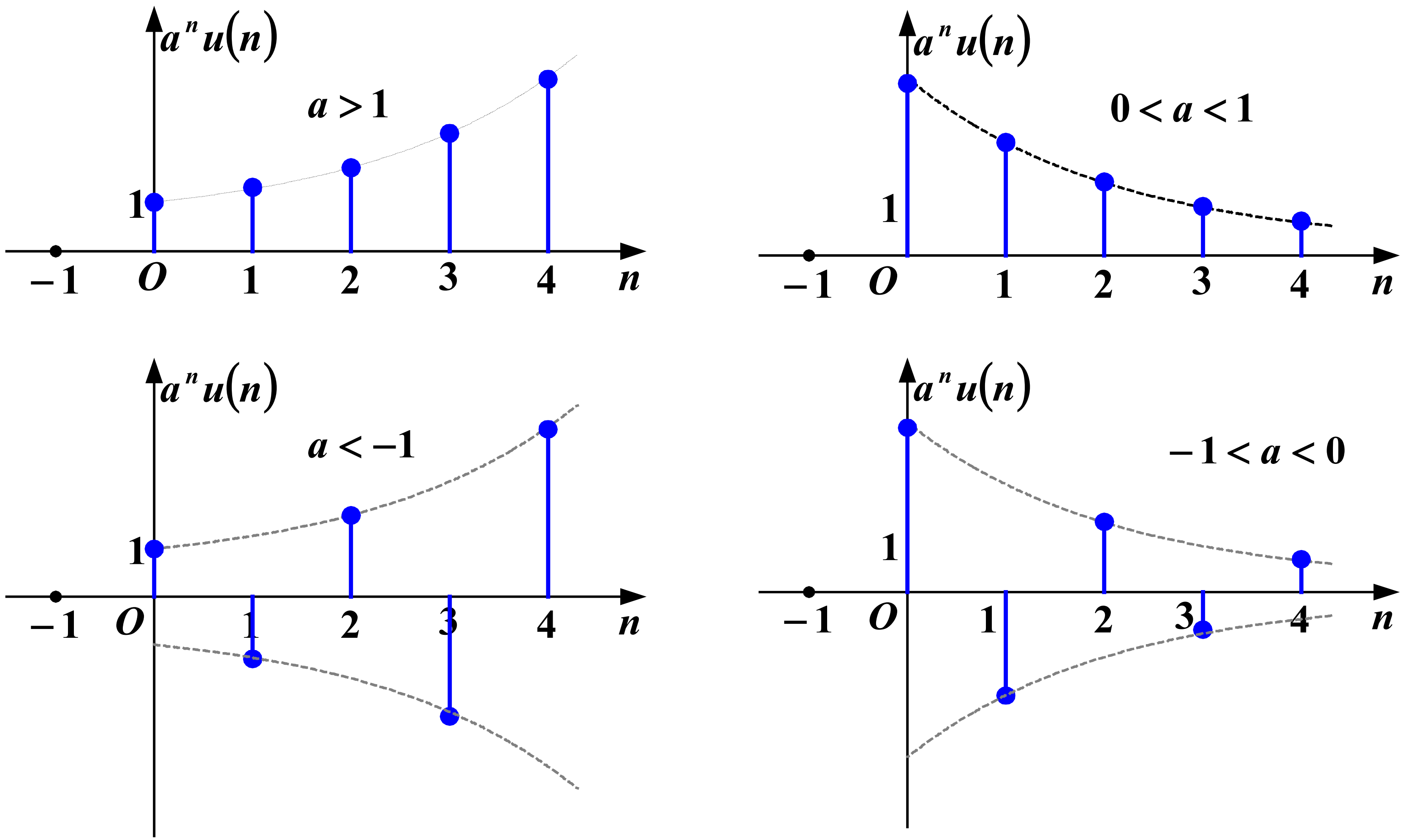
解： $n<0, u(n)=0 \quad \therefore n<0, h(n)=a^n u(n)=0$

该系统是因果系统。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}|a|^n=\begin{cases}|a|<1 & \dfrac{1}{1-|a|} & \text{有界稳定} \\ |a|>1 & \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-|a|^{n+1}}{1-|a|} & \text{发散不稳定}\end{cases}$$

7.5 离散时间系统的单位样值响应

当$|a|>1$时序列是发散的；当$|a|<1$时序列是收敛的。



例7-15： 已知系统的差分方程模型如下，求系统的单位样值响应 $h(n)$，并判断系统的稳定性。

$$y(n)+\frac{1}{5}y(n-1)=x(n)+2x(n-1)+3x(n-2)$$

解：

$$h(n)+\frac{1}{5}h(n-1)=\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)$$

特征根 $\alpha=-\frac{1}{5}$　　$\therefore h(n)=C(-\frac{1}{5})^n$　　$n\geq 2$

此时方程右边的三个样值函数都已作用完毕

$h(-1)=0$，　迭代求得 $h(0)=1, h(1)=\frac{9}{5}, h(2)=\frac{66}{25}\rightarrow C=66$

$$h(n)=\delta(n)+\frac{9}{5}\delta(n-1)+66\left(-\frac{1}{5}\right)^n u(n-2)$$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=1+\frac{9}{5}+\sum_{n=2}^{\infty}\left|66(-0.2)^n\right|<\infty$　　此为稳定系统。

作业

基础题：7-12（1）（2），7-29。

加强题：7-27。