上节内容

8.4 逆z变换

8.5 z变换的基本性质

下列说法正确的有

A 用部分分式法求$X(z)$的逆变换要求$X(z)$是真分式

B 序列位移不会影响z变换在0、∞之外的零极点情况

C 终值定理的使用条件是极点只能在单位圆内

D 在出现零极点相抵消时，$X(z)$的收敛域内可能包含极点

提交

部分分式展开法

1、 X(z)只有一阶极点

$$X(z)=A_0+\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m z}{z-z_m}=A_0+\frac{A_1 z}{z-z_1}+\cdots+\frac{A_M z}{z-z_M} \qquad A_0=X(z)\big|_{z=0}=\frac{b_0}{a_0}$$

z_m为$X(z)$的一阶极点， $A_m=\left[(z-z_m)\dfrac{X(z)}{z}\right]_{z=z_m}$

或 $$X(z)=A_0+\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m}{1-z_m z^{-1}}=A_0+\frac{A_1}{1-z_1 z^{-1}}+\cdots+\frac{A_M}{1-z_M z^{-1}}$$

$$A_m=\left[\left(1-z_m z^{-1}\right)X(z)\right]_{z=z_m}$$

逆变换： $$x(n)=A_0\delta(n)+\sum_{m=1}^{M}A_m z_m^n=A_0\delta(n)+A_1 z_1^n+\cdots+A_M z_M^n$$

2、$X(z)$除含有M个一阶极点外，在$z=z_i$处还含有一个N阶极点

$$X(z)=A_0+\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m z}{z-z_m}+\sum_{j=1}^{N}\frac{B_j z}{(z-z_i)^j}\quad (|z|>\max\{z_1,\ldots z_M,z_i\})$$

令$X_1(z)=(z-z_i)^N\dfrac{X(z)}{z}$

$$B_N=X_1(z)\Big|_{z=z_i}$$

$$B_j=\frac{1}{(N-j)!}\left[\frac{d^{N-j}}{dz^{N-j}}X_1(z)\right]_{z=z_i}\quad (j=1,\ldots,N-1)$$

逆变换：$x(n)=A_0\delta(n)+\sum_{m=1}^{M}A_m z_m^n u(n)+\left(B_1 z_i^n+\sum_{j=2}^{N}\frac{B_j n(n-1)\cdots(n-j+2)}{(j-1)!}z_i^{n-j+1}\right)u(n)$

若为二阶极点$N=2$: $X_1(z)=(z-z_i)^2\dfrac{X(z)}{z}$

$$B_2=X_1(z)\big|_{z=z_i}$$

$$B_1=\left[\frac{d}{dz}X_1(z)\right]_{z=z_i}$$

逆变换： $x(n)=A_0\delta(n)+(A_1z_1^n+\cdots+A_Mz_M^n+B_1z_i^n+B_2nz_i^{n-1})u(n)$

8.4 逆z变换

一般情况下，$X(z)$的表达式为

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z+\cdots b_{r-1}z^{r-1}+b_rz^r}{a_0+a_1z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1}+a_kz^k}$$

利用部分分式展开法求逆变换时，要掌握基本形式的逆变换。

注意：逆变换与收敛域有关。

$$\frac{z}{z-z_m}(|z|>|z_m|)\Leftrightarrow z_m{}^n u(n)$$

$$\frac{z}{z-z_m}(|z|<|z_m|)\Leftrightarrow -z_m{}^n u(-n-1)$$

讨论：只有真分式才可进行部分分式展开，但展开的形式乘以z才具备上述逆z变换的基本形式。

对 $\frac{X(z)}{z}$ 进行部分分式展开，要求 $\frac{X(z)}{z}$ 是真分式，即需要$k\geq r$保证$X(z)$在$z=\infty$处收敛。

因果序列的z变换收敛域为$|z|>R_x$， $k\geq r$是满足收敛的充分必要条件。

8.5.1 线性

若 $ZT[x(n)] = X(z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$， $ZT[y(n)] = Y(z) \quad (R_{y1} < |z| < R_{y2})$

则 $ZT\left[ax(n) + by(n)\right] = aX(z) + bY(z)$

$\max(R_{x1}, R_{y1}) < |z| < \min(R_{x2}, R_{y2})$ 收敛域为重叠部分。

注：如果线性组合中某些零点与极点相抵消，收敛域可能扩大。

8.5.2 位移性

1、双边序列移位后的双边z变换

$$ZT[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$ZT[x(n-m)] = z^{-m}X(z)$$

$$ZT[x(n+m)] = z^{m}X(z)$$

m为任意正整数。

2、双边序列左移的单边z变换

$$ZT[x(n+m)u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n+m)z^{-n} = z^{m}\left[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$$

减去一些点的贡献

3、双边序列右移的单边z变换

$$ZT[x(n-m)u(n)]=z^{-m}\left[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$$

增加一些点的贡献

4、因果序列**x(n)**位移的单边z变换

$$ZT[x(n-m)u(n)]=z^{-m}X(z)$$

$$ZT[x(n+m)u(n)]=z^{m}\left[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$$

序列位移只会使z变换在0或∞处的零极点情况发生变化。

8.5.3 z域微分（时域线性加权）

若 $ZT[x(n)]=X(z)$

$$ZT[nx(n)]=-z\frac{d}{dz}X(z)$$

时域序列乘以n等效于z域中求导且乘以(-z)。

$$ZT[n^2x(n)]=-z\frac{d}{dz}\left[-z\frac{dX(z)}{dz}\right]=\left[-z\frac{d}{dz}\right]^2X(z)$$

$$ZT[n^mx(n)]=\left[-z\frac{d}{dz}\right]^mX(z)$$

8.5.4 z域尺度变换（时域指数加权）

$$ZT[x(n)] = X(z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

$$ZT[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right) \quad (R_{x1} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x2} \Rightarrow |a| R_{x1} < |z| < |a| R_{x2}) \qquad |a| > 1$$

$$ZT[a^{-n} x(n)] = X(az) \quad (R_{x1} < |az| < R_{x2} \Rightarrow \frac{R_{x1}}{|a|} < |z| < \frac{R_{x2}}{|a|}) \qquad |a| > 1$$

$$ZT[(-1)^n x(n)] = X(-z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

$$ZT[(-1)^n u(n)] = z/(z+1) \quad (|z| > 1)$$

8.5.5 初值定理

若**x(n)**是因果序列，已知 $ZT[x(n)]=X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$

则 $x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$ （***n*=0对应高频分量**）

8.5.6 终值定理

若**x(n)**是因果序列，已知 $ZT[x(n)]=X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$

则 $\lim_{n\to\infty}x(n)=\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$ （***n*→∞对应直流分量，即*s*=0，*z*=*e*^*s*^=1**）

要求当 $n\to\infty$ 时**x(n)**收敛，即**X(z)**极点必须在单位圆内（若在单位圆上只能位于**z=1**处且为一阶极点）。

注意和系统稳定性条件区别，因果系统稳定性的条件是系统函数的极点必须位于单位圆内。

8.5.7　时域卷积定理

已知两序列**x(n), h(n)**，其z变换为

$$ZT[x(n)] = X(z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

$$ZT[h(n)] = H(z) \quad (R_{h1} < |z| < R_{h2})$$

则两序列在时域中的卷积的z变换等效于在z域中两序列z变换的乘积。

$$ZT[x(n) * h(n)] = X(z)H(z)$$

$$\max(R_{x1}, R_{h1}) < |z| < \min(R_{x2}, R_{h2})$$

收敛域为重叠部分

注：如果某些零点与极点相抵消，则收敛域可能扩大。

证明：$ZT[x(n)*h(n)]=ZT[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)]$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)ZT[h(n-m)]$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-m}H(z)$$

$$=X(z)H(z)$$

例：$ZT[\sum_{k=0}^{n}x(k)]=ZT\{[x(n)u(n)]*u(n)\}$

$$=\frac{z}{z-1}X(z)$$

已知离散时间系统的激励为$x(n)=u(n)$，单位样值响应为

$$h(n)=a^{n}u(n)-a^{n-1}u(n-1)\quad(|a|<1)$$

零状态响应的z变换的收敛域为（ ）

A $|a|<|z|<1$

B $|z|<|a|$

C $|z|>|a|$

D $|z|>1$

提交

例8-12：已知一个离散时间系统的激励为$x(n)=u(n)$，系统的单位样值响应为$h(n)=a^n u(n)-a^{n-1}u(n-1)$，求系统的零状态响应。

解：
$$X(z)=\frac{z}{z-1},\quad |z|>1$$

$$H(z)=\frac{z}{z-a}-z^{-1}\frac{z}{z-a}=\frac{z-1}{z-a},\quad |z|>|a|$$

$$Y_{zs}(z)=X(z)H(z)=\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z-1}{z-a}=\frac{z}{z-a},\quad |z|>|a|$$

$X(z)$的极点与$H(z)$的零点相抵消；若$|a|<1$，$X(z)H(z)$ 的收敛域扩大。

零状态响应为 $y_{zs}(n)=a^n u(n)$

本次课内容

8.6　z变换与拉普拉斯变换的关系

8.7　利用z变换解差分方程

8.8　离散时间系统的系统函数

本次课目标

1. 熟悉s平面和z平面的映射关系；
2. 熟练掌握利用z变换求零状态响应；
3. 熟练掌握系统函数、差分方程、模拟框图的映射关系；
4. 了解系统函数极点分布和单位样值响应特征的关系；
5. 熟悉系统稳定性和因果性的判定方法。

离散信号的复频域分析
8.1 z变换的定义
8.2 典型序列的z变换
8.3 z变换的收敛域
8.4 逆z变换
8.5 z变换的基本性质

8.6 z变换与拉普拉斯变换的关系

离散系统的复频域分析
8.7 利用z变换解差分方程
8.8 离散时间系统的系统函数

离散信号的频域分析
8.9 序列的傅里叶变换

离散系统的频域分析
8.10 离散时间系统的频率响应特性

8.6.1 z平面与s平面的映射关系

$$z = e^{sT} \qquad T\text{为序列的时间间隔}$$

将s表示成直角坐标形式，把z表示成极坐标形式

$$s = \sigma + j\omega, \quad z = re^{j\theta}$$

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T}e^{j\omega T} = re^{j\theta}$$

$$\begin{cases} r = e^{\sigma T} = e^{\frac{2\pi\sigma}{\omega_s}} \\ \theta = \omega T = 2\pi\dfrac{\omega}{\omega_s} \end{cases}$$

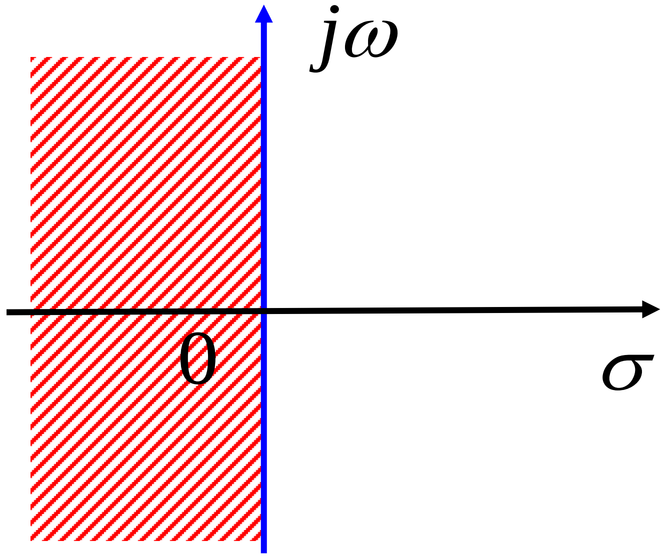
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad \text{为重复频率}$$

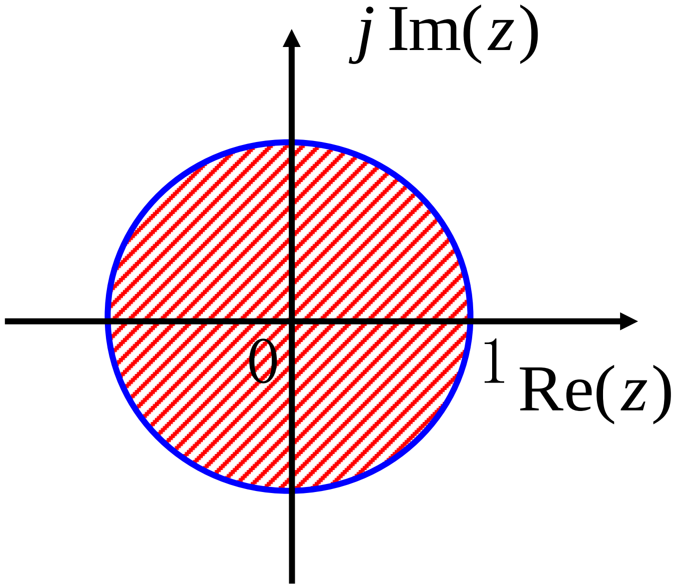
1) s平面上的虚轴 $\xlongequal{\text{映射}}$ z平面上的单位圆$(r=1)$

$$\sigma=0 \quad s=j\omega \quad r=|z|=e^{\sigma T}=1$$

2) s平面上的左半平面 $\xlongequal{\text{映射}}$ z平面上的单位圆内$(r<1)$

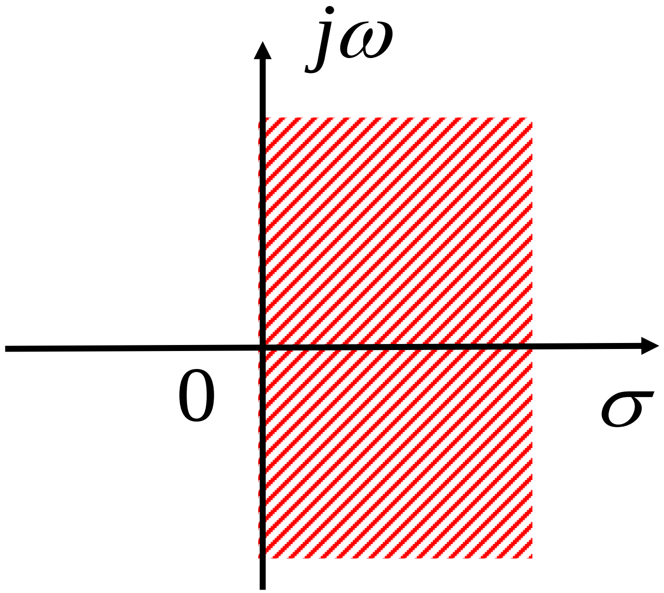
$$\sigma<0, s=\sigma+j\omega \qquad r=|z|=e^{\sigma T}<1$$

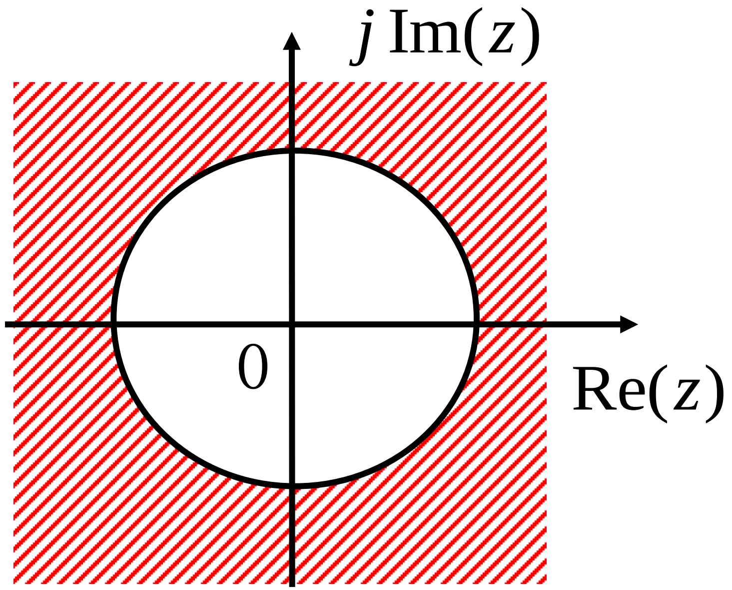




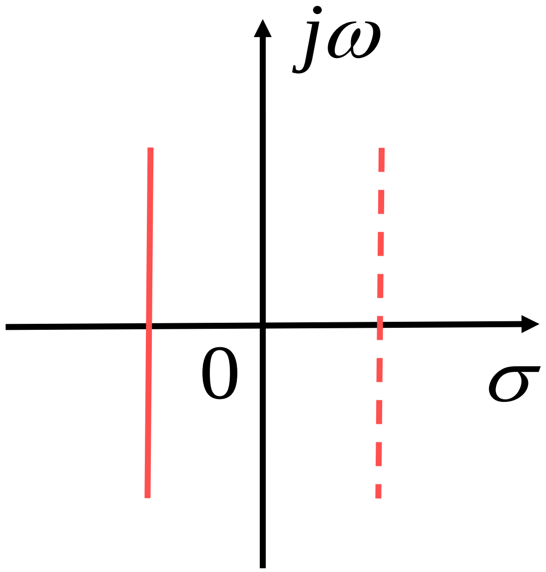
$$3)s\text{平面上的右半平面}\xlongequal{\text{映射}}z\text{平面上的单位圆外}(r>1)$$

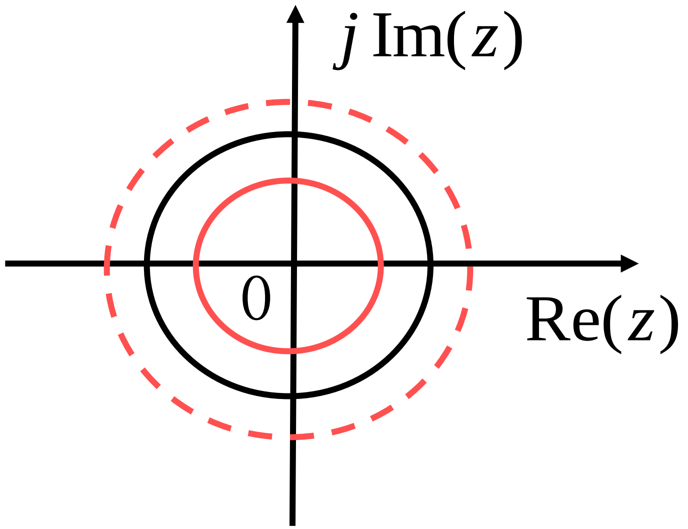
$$\sigma > 0, s = \sigma + j\omega \qquad r = |z| = e^{\sigma T} > 1$$





4)平行于虚轴的直线$\overset{\text{映射}}{=\!=\!=}$z平面上的圆$\begin{pmatrix} \sigma > 0, r > 1 \\ \sigma < 0, r < 1 \end{pmatrix}$





8.6 z变换与拉普拉斯变换的关系

5) s平面上的实轴$(\omega=0)\xrightarrow{\text{映射}}z$平面上的正实轴$(\theta=0)$

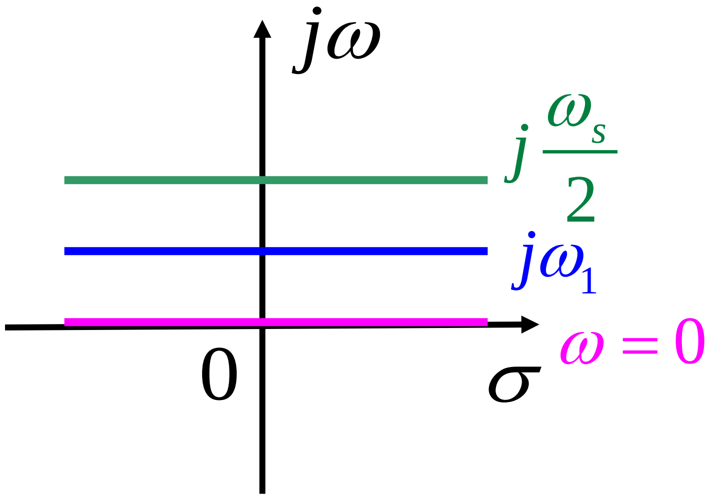
平行于实轴的直线$(\omega=$常数$)\xrightarrow{\text{映射}}z$平面上始于原点的射线

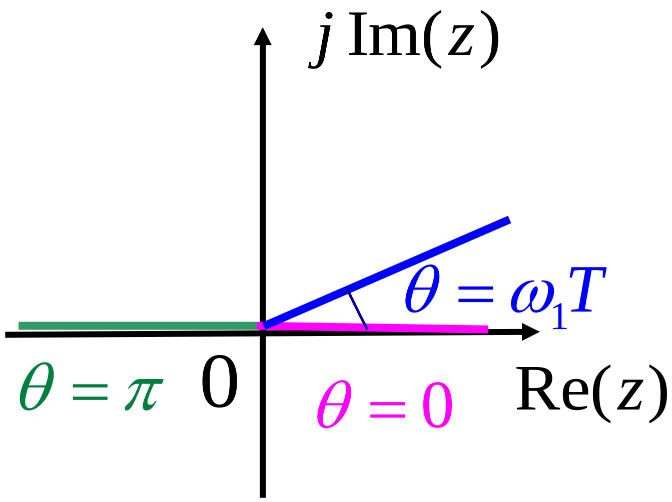
通过$j\dfrac{k\omega_s}{2}(k=\pm1,\pm3,\ldots)$平行于实轴的直线$\xrightarrow{\text{映射}}z$平面上

负实轴$\begin{pmatrix}\theta=\pi \\ r\text{任意}\end{pmatrix}$

$$\theta=\omega T=2\pi\frac{\omega}{\omega_s}=2\pi\frac{k\omega_s/2}{\omega_s}=k\pi$$

$$\omega_s=\frac{2\pi}{T}$$





6) s平面上沿虚轴移动$\xlongequal{映射}$$z$平面上沿单位圆周期性旋转，

每平移ω_s，则沿单位圆转一圈。

即$s \sim z$平面的映射并不是单值的。

$$\theta = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s}$$

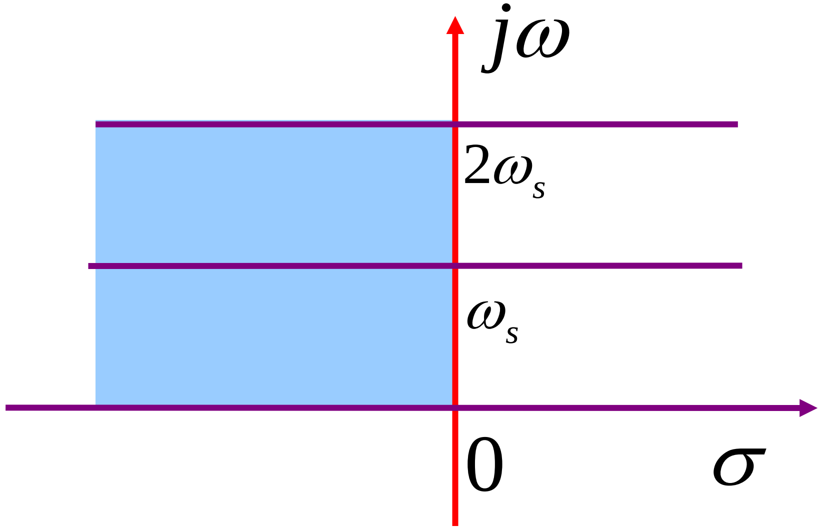
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

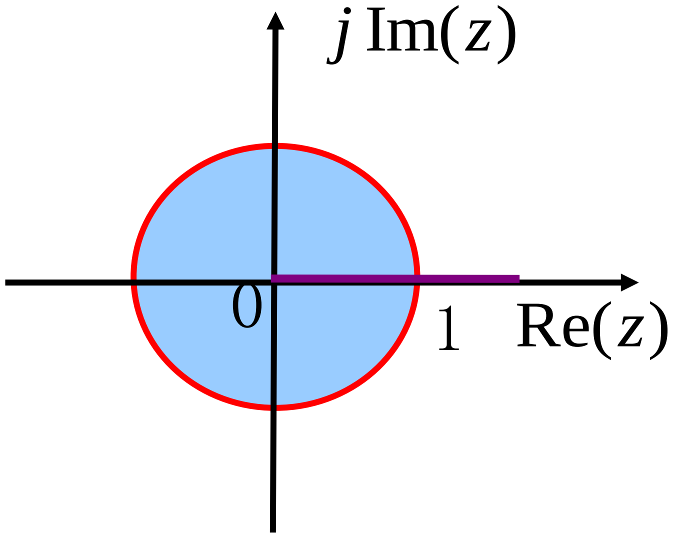
$\omega = 0 \to \omega_s$ $\qquad$ $\theta = 0 \to 2\pi$

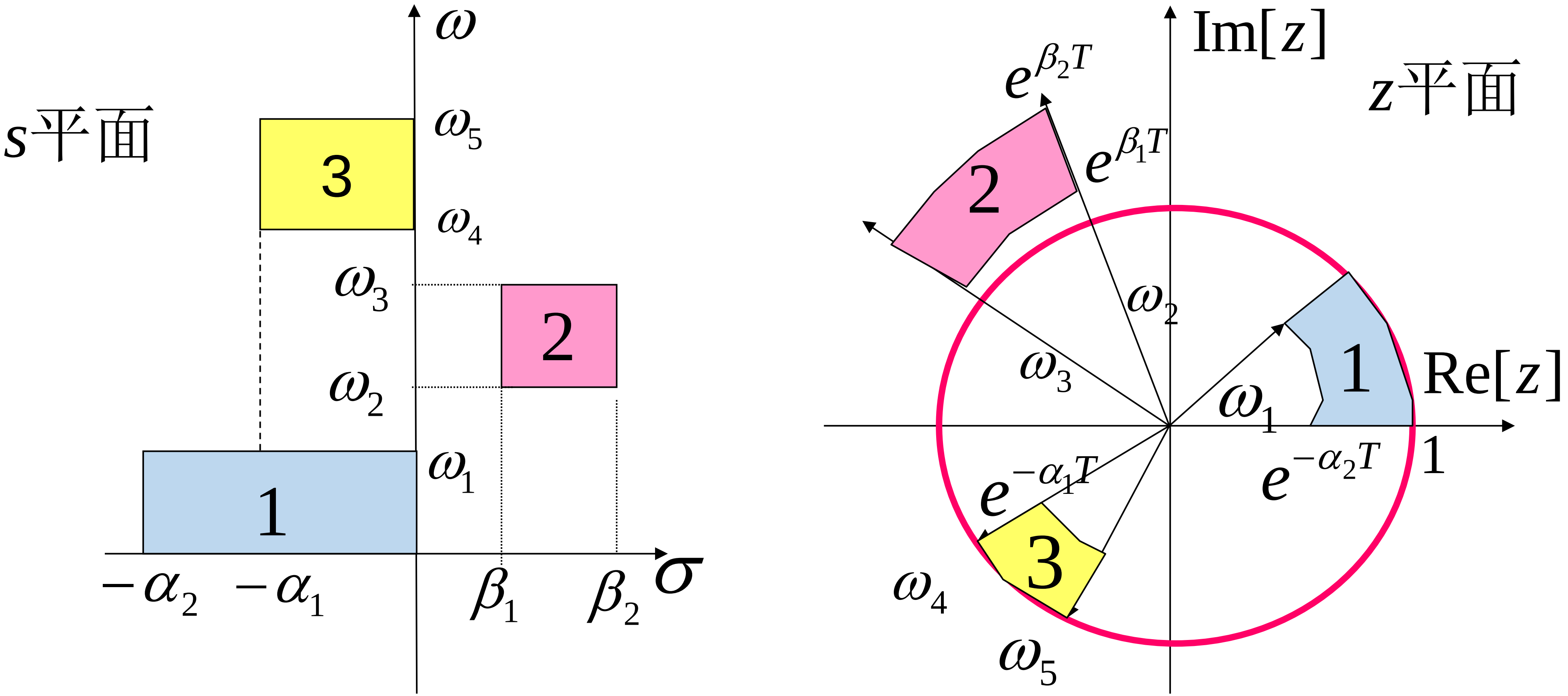
$\omega = \omega_s \to 2\omega_s$ $\qquad$ $\theta = 2\pi \to 4\pi$

$\omega = 0 \to k\omega_s$ $\qquad$ $\theta = 0 \to 2k\pi$

多圈







$0<\omega_1<\frac{\pi}{2T} \quad \Rightarrow \quad 0<\omega_1 T<\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2T}<\omega_2<\omega_3<\frac{\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2}<\omega_2 T<\omega_3 T<\pi$

$\frac{\pi}{T}<\omega_4<\omega_5<\frac{3\pi}{2T} \quad \Rightarrow \quad \pi<\omega_4 T<\omega_5 T<\frac{3\pi}{2}$

8.6.2 z变换与拉氏变换的表达式的对应

若连续时间信号$\hat{x}(t)$由N项指数信号相加组合而成

$$\hat{x}(t)=\hat{x}_1(t)+\hat{x}_2(t)+\ldots+\hat{x}_n(t)=\sum_{i=1}^{N}\hat{x}_i(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{p_i t}u(t)$$

$$LT\left[\hat{x}(t)\right]=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-p_i}$$

若序列$x(nT)$由N项指数序列相加组合而成

$$x(nT)=x_1(nT)+x_2(nT)+\ldots+x_N(nT)=\sum_{i=1}^{N}x_i(nT)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{p_i nT}u(nT)$$

$$ZT\left[x(nT)\right]=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-\mathrm{e}^{p_i T}z^{-1}}$$

借助模拟滤波器设计数字滤波器

例8-13：已知指数函数$e^{-at}u(t)$的拉式变换为$\frac{1}{s+a}$，求抽样序列$e^{-anT}u(nT)$ 的z 变换。

解：

$$x(t)=e^{-at}u(t)$$

$$X(s)=\frac{1}{s+a}$$

$X(s)$ 只有一个一阶极点 $s=-a$ ，可以直接求出 $e^{-anT}u(nT)$ 的z变换为：

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}} \quad |z|>e^{-aT}$$

离散信号的复频域分析

8.1 z变换的定义
8.2 典型序列的z变换
8.3 z变换的收敛域
8.4 逆z变换
8.5 z变换的基本性质
8.6 z变换与拉普拉斯变换的关系

离散系统的复频域分析

8.7 利用z变换解差分方程
8.8 离散时间系统的系统函数

离散信号的频域分析

8.9 序列的傅里叶变换

离散系统的频域分析

8.10 离散时间系统的频率响应特性

原理：利用单边z变换的线性和位移性

1、单边z变换的位移性

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)u(n)z^{-n}$$

$$ZT[x(n-m)u(n)]=z^{-m}\left[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$$

$$ZT[x(n-1)u(n)]=z^{-1}X(z)+x(-1)$$

$$ZT[x(n-2)u(n)]=z^{-2}X(z)+z^{-1}x(-1)+x(-2)$$

8.7 利用z变换解差分方程

2、用单边z变换解差分方程的步骤和思路

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

x(n-r)，y(n-k)均为右移序列

两边取单边z变换

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}[Y(z) + \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}] = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}[X(z) + \sum_{m=-r}^{-1} x(m) z^{-m}]$$

起始状态

若为因果信号
此项为零

（1）零输入响应

若激励$x(n)=0$，系统处于零输入状态。

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}]=0$$

求得的是零输入响应。

$$Y_{zi}(z)=\frac{-\sum_{k=0}^{N}[a_k z^{-k} \cdot \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}]}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

系统的起始状态$y(l)$ $(-N \leq l \leq -1)$。

$$y_{zi}(n)=ZT^{-1}[Y_{zi}(z)]$$

（2）零状态响应

若系统的起始状态$y(l)=0\ (-N\le l\le -1)$，系统处于零状态，且激励$x(n)$为因果序列，则

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X(z)$$

求得的是零状态响应。

$$Y_{zs}(z) = X(z)\cdot\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

系统函数: $\boxed{H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}}$

$$Y_{zs}(z) = X(z)H(z)$$

$$y_{zs}(n) = ZT^{-1}[X(z)H(z)]$$

例8-14： 利用单边z变换求解下列系统差分方程

$$y(n)+0.1y(n-1)-0.02y(n-2)=10u(n)$$

已知$y(-1)=4,\ y(-2)=6$。

解法一：

$$Y(z)+0.1z^{-1}[Y(z)+zy(-1)]-0.02z^{-2}[Y(z)+z^{2}y(-2)+zy(-1)]=\frac{10z}{z-1}$$

$$(1+0.1z^{-1}-0.02z^{-2})Y(z)=\frac{10z}{z-1}+0.08z^{-1}-0.28$$

$$Y(z)=\frac{9.72+0.36z^{-1}-0.08z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-0.1z^{-1})(1+0.2z^{-1})}$$

$$Y(z)=\frac{A_1}{1-z^{-1}}+\frac{A_2}{1+0.2z^{-1}}+\frac{A_3}{1-0.1z^{-1}}$$

解法二：

a) 利用z变换求零状态响应

$$Y(z)+0.1z^{-1}Y(z)-0.02z^{-2}Y(z)=\frac{10z}{z-1}$$

$$(1+0.1z^{-1}-0.02z^{-2})Y(z)=\frac{10}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)=\frac{10}{(1-z^{-1})(1-0.1z^{-1})(1+0.2z^{-1})}$$

$$Y(z)=\frac{A_1}{1-z^{-1}}+\frac{A_2}{1+0.2z^{-1}}-\frac{A_3}{1-0.1z^{-1}}$$

$$A_1=(1-z^{-1})Y(z)\Big|_{z=1}=\frac{10}{(1-0.1z^{-1})(1+0.2z^{-1})}\Bigg|_{z=1}=9.26$$

$$A_2=(1+0.2z^{-1})Y(z)\Big|_{z=-0.2}=\frac{10}{(1-z^{-1})(1-0.1z^{-1})}\Bigg|_{z=-0.2}=1.11$$

$$A_3=(1-0.1z^{-1})Y(z)\Big|_{z=0.1}=\frac{10}{(1-z^{-1})(1+0.2z^{-1})}\Bigg|_{z=0.1}=-0.37$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{9.26}{1-z^{-1}}+\frac{1.11}{1+0.2z^{-1}}-\frac{0.37}{1-0.1z^{-1}}\quad(|z|>1)$$

$$y_{zs}(n)=[9.26+1.11(-0.2)^n-0.37(0.1)^n]u(n)$$

b) 求零输入响应

$$Y_{zi}(z)=\frac{-0.1y(-1)+0.02y(-2)+0.02y(-1)z^{-1}}{1+0.1z^{-1}-0.02z^{-2}}$$

$$=\frac{-0.28+0.08z^{-1}}{1+0.1z^{-1}-0.02z^{-2}}$$

$$=\frac{-0.45}{1+0.2z^{-1}}+\frac{0.17}{1-0.1z^{-1}} \quad (|z|>0.2)$$

$$y_{zi}(n)=[-0.45(-0.2)^n+0.17(0.1)^n]u(n)$$ （也可用时域分析法）

c) 求全响应

$$y(n)=y_{zs}(n)+y_{zi}(n)=[9.26+0.66(-0.2)^n-0.2(0.1)^n]u(n)$$

离散信号的复频域分析	8.1 z变换的定义 8.2 典型序列的z变换 8.3 z变换的收敛域 8.4 逆z变换 8.5 z变换的基本性质
	8.6 z变换与拉普拉斯变换的关系
离散系统的复频域分析	8.7 利用z变换解差分方程 **8.8 离散时间系统的系统函数**
离散信号的频域分析	8.9 序列的傅里叶变换
离散系统的频域分析	8.10 离散时间系统的频率响应特性

8.8.1 系统函数的定义

1、系统零状态响应的z变换与激励的z变换之比

若**x(n)**是因果序列, 且系统处于零状态下：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

零状态

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

因果

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

2、单位样值响应*h*(*n*)的z变换

激励与单位样值响应的卷积和为系统的零状态响应

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

由时域卷积定理，

$$Y(z)=X(z)H(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

设置

差分方程$y(n)-ay(n-1)=bx(n)$所描述的离散时间系统的单位样值响应为（ ）

A $h(n)=ab^n u(n)$

B $h(n)=\left(\frac{a}{b}\right)^n u(n)$

C $h(n)=ba^n u(n)$

D $h(n)=\left(\frac{b}{a}\right)^n u(n)$

提交

8.8 离散时间系统的系统函数

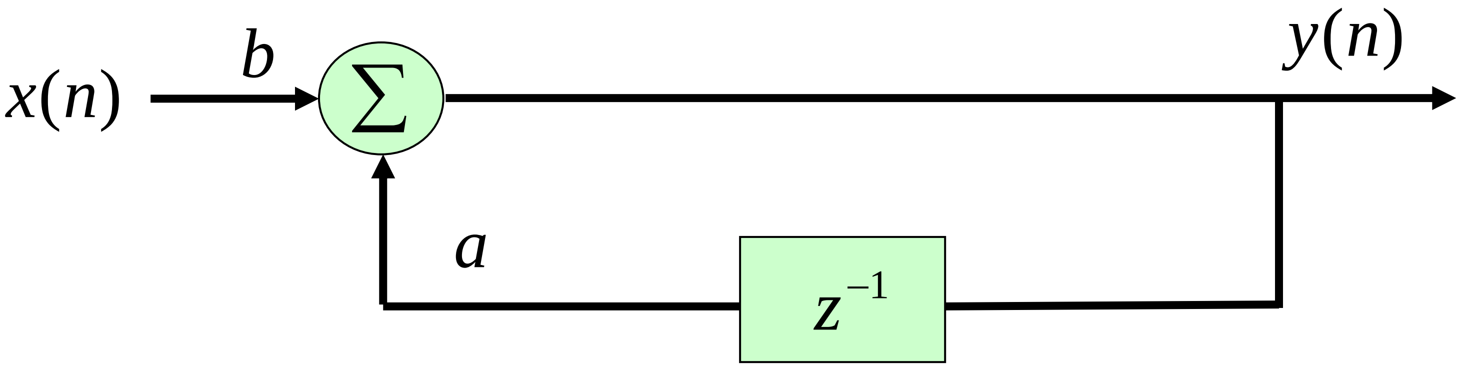
例8-15：求下列差分方程所描述的离散时间系统的系统函数和单位样值响应，并画出系统框图。

$$y(n)-ay(n-1)=bx(n)$$

解：如果系统处于零状态，则$y(-1)=0$，方程两边z变换可得

$$Y(z)(1-az^{-1})=bX(z)$$

$$H(z)=\frac{b}{1-az^{-1}}=\frac{bz}{z-a}\quad(|z|>|a|)\qquad h(n)=ba^{n}u(n)$$



例8-16： 假设一个二阶离散线性时不变系统的系统函数是

$$H(z)=\frac{(1+z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{3}{4}z^{-1})}$$

求满足该系统的差分方程，并画出系统模拟框图。

解：

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}\right)Y(z)=\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)X(z)$$

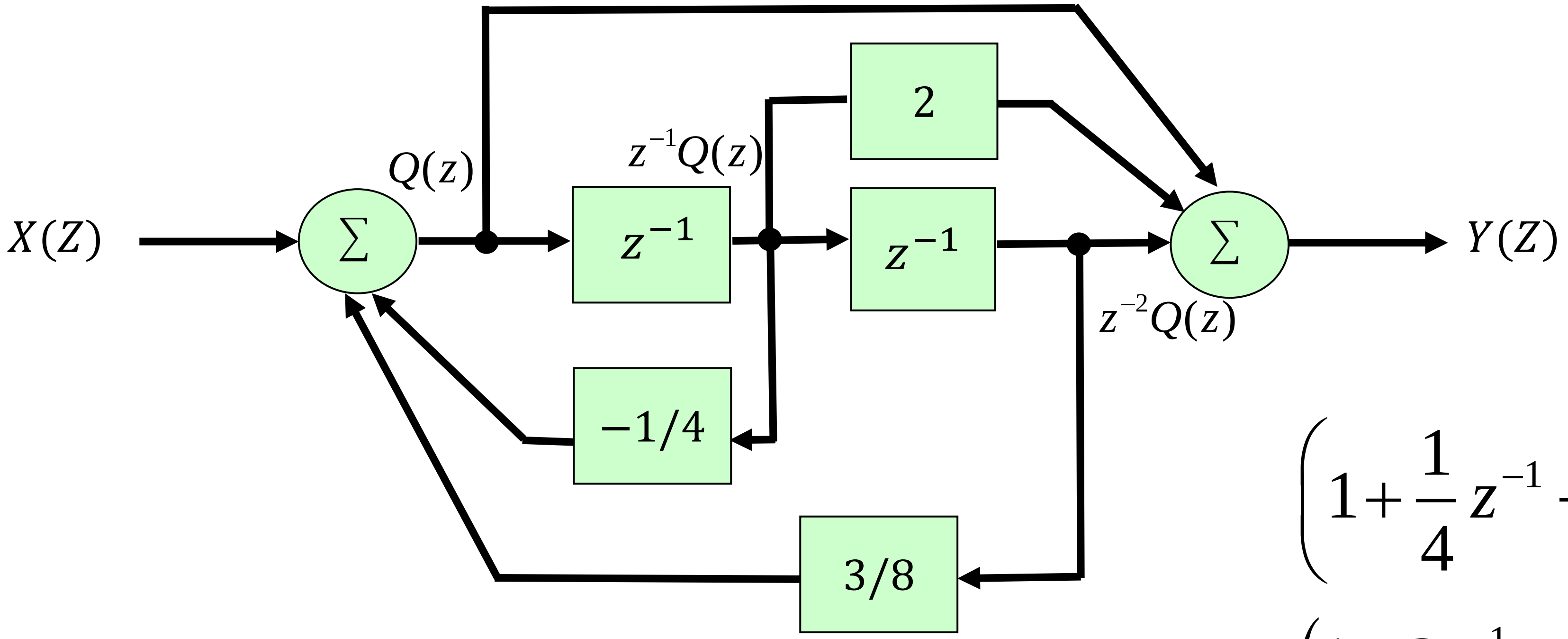
系统差分方程为

$$y(n)+\frac{1}{4}y(n-1)-\frac{3}{8}y(n-2)=x(n)+2x(n-1)+x(n-2)$$

8.8 离散时间系统的系统函数

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

系统模拟框图：



$$\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}\right)Q(z)=X(z)$$

$$\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)Q(z)=Y(z)$$

8.8.2 由系统函数的零极点分布分析单位样值响应

$$H(z)=\left[G\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-z_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_k z^{-1})}\right]=\sum_{k=0}^{N}\frac{A_k z}{z-p_k}=A_0+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k z}{z-p_k}$$

其中z_r、p_k分别为$H(z)$的零点、极点；$p_0=0$

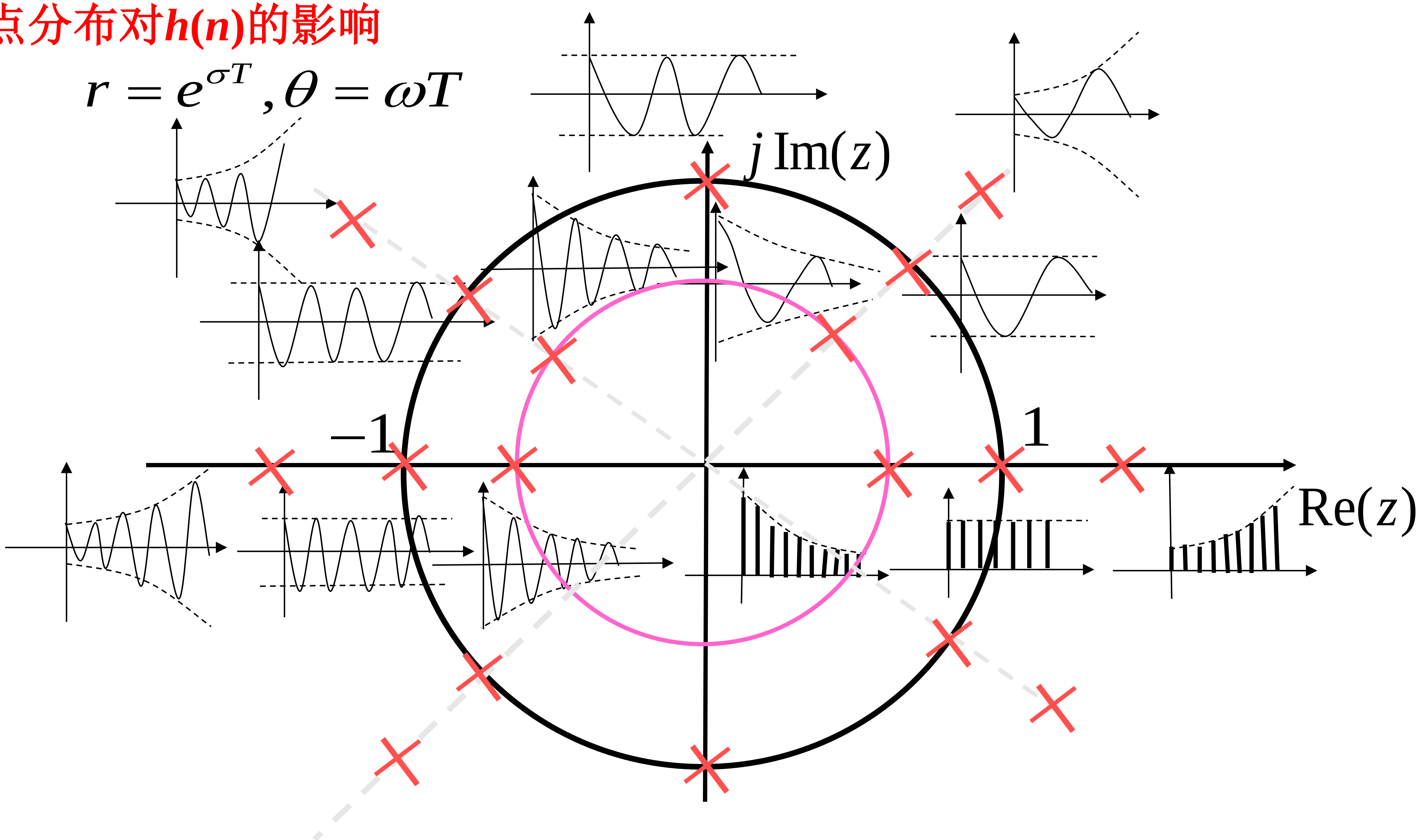
$$h(n)=ZT^{-1}[H(z)]=A_0\delta(n)+\sum_{k=1}^{N}A_k(p_k)^n u(n)$$

$\therefore h(n)$特性取决于$H(z)$的极点p_k

$h(n)$幅值A_k取决于$H(z)$的零点z_r

极点分布对*h(n)*的影响

$$r = e^{\sigma T}, \theta = \omega T$$



例8-17：已知例7-15中系统的差分方程如下，利用z域分析法求系统的单位样值响应。

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

解：（1）差分方程两边求z变换，得$(1-5z^{-1}+6z^{-2})Y(z)=(1-3z^{-2})X(z)$

（2）系统函数为：$H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1-3z^{-2}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}=\dfrac{z^2-3}{z^2-5z+6}$

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{z^2-3}{z(z-2)(z-3)}=-\frac{1}{2z}-\frac{\frac{1}{2}}{z-2}+\frac{2}{z-3}$$

$$H(z)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\bullet\frac{z}{z-2}+\frac{2z}{z-3}\quad\left(|z|>3\right)$$

（3）对系统函数求逆z变换，得到单位样值响应为：

$$h(n)=-\frac{1}{2}\delta(n)+(-2^{n-1}+2\times 3^n)u(n)=\delta(n)+5\delta(n-1)+(2\times 3^n-2^{n-1})u(n-2)$$

8.8.3 离散时间系统的稳定性和因果性

1、时域中系统因果稳定的条件

离散时间系统稳定的充要条件是：单位样值响应绝对可和。即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$$

因果稳定系统的充要条件为：***h*(*n*)是因果序列且绝对可和**, 即

$$\begin{cases} h(n)=h(n)u(n) & \text{因果} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty & \text{稳定} \end{cases}$$

2、z域中因果稳定的条件

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}, \text{其存在要求} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)z^{-n}\right|<\infty$$

当$|z|=1$时，$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$ ，恰好满足系统稳定的条件。

因此对于稳定系统，$H(z)$的收敛域应包含单位圆（无论是否为因果系统）。

对于因果稳定系统，收敛域为：$a<|z|\leq\infty\ (a<1)$

即全部极点位于单位圆内。

例8-18：已知系统函数如下，试说明分别在三种收敛域情况下系统的稳定性，并求单位样值响应。

$$H(z)=\frac{-9.5z}{(z-0.5)(z-10)}$$

(1) $10<|z|\le\infty$ (2) $0.5<|z|<10$

(3) $|z|<0.5$

解： (1) $10<|z|\le\infty$

方法一：由收敛域可知此为因果系统。收敛域不包括单位圆，所以系统是不稳定的。

方法二：由收敛域判断该系统是因果系统

$$z_1=0.5 \quad z_2=10 \quad |z_2|>1$$

因果稳定系统的极点位于单位圆内。此处有一个极点位于单位圆外，因而系统是不稳定的。

$$h(n)=[(0.5)^n-(10)^n]u(n)$$

(2) $0.5<|z|<10$

右边序列　　左边序列

收敛域包括单位圆，系统稳定。

由收敛域判断该系统是非因果系统。

$$H(z)=\frac{z}{z-0.5}-\frac{z}{z-10}$$

$$h(n)=(0.5)^n u(n)+(10)^n u(-n-1)$$

(3) $|z|<0.5$ 左边序列

收敛域不包括单位圆，系统不稳定。

由收敛域判断该系统是非因果系统。

$$h(n)=[(10)^n-(0.5)^n]u(-n-1)$$

由上可知，非因果系统稳定性的条件也是系统函数的收敛域包含单位圆。

已知某因果系统的差分方程为：

$$y(n) + 0.2y(n-1) - 0.24y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

该系统是否稳定？

A 稳定

B 不稳定

提交

作业

基础题：8-21，8-23，8-26（1）（3）（5），8-29

加强题：8-26（2）（4）