

上节内容

3.7 傅里叶变换的基本性质

3.7.1 线性

若 $F[f_1(t)] = F_1(\omega)$, $F[f_2(t)] = F_2(\omega)$,

则 $F[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$

3.7.2 对称性

若 $\mathbf{F}[f(t)] = F(\omega)$

则 $\mathbf{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$\frac{F(t)}{2\pi} \leftrightarrow f(\omega) \quad (f \text{ 为偶函数})$$

$$\frac{-F(t)}{2\pi} \leftrightarrow f(\omega) \quad (f \text{ 为奇函数})$$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega) \quad (f \text{ 为偶函数})$$

$$F(t) \leftrightarrow -2\pi f(\omega) \quad (f \text{ 为奇函数})$$

3.7.3 奇偶虚实性

1. 若 $f(t)$ 是实函数，或虚函数 $[f(t) = jg(t)]$ ，则 $|F(\omega)|$ 是偶函数， $\varphi(\omega)$ 是奇函数。

2. 若 $f(t)$ 是 t 的实偶函数，则 $F(\omega)$ 必为 ω 的实偶函数：

$$[F(\omega) = R(\omega)]$$

若 $f(t)$ 是 t 的实奇函数，则 $F(\omega)$ 必为 ω 的虚奇函数：

$$[F(\omega) = jX(\omega)]$$

例如： $f(t) = e^{-\alpha|t|}$ (实偶) $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ -e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases}$ (实奇)

$$F(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\text{实偶}) \quad \quad F(\omega) = \frac{-2j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\text{虚奇})$$

3.7.4 位移特性

(1) 时移特性

若 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

$$\text{则 } \mathcal{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega(t-t_0)} d(t-t_0)$$

$$= F(\omega)e^{-j\omega t_0} = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}e^{-j\omega t_0}$$

幅度谱不变，相位谱产生附加相移 $-\omega t_0$ 。

同理 $\mathcal{F}[f(t+t_0)] = F(\omega)e^{j\omega t_0}$

(2) 频移特性 (调制原理)

若 $F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)]$

则 $\mathbf{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$ $\mathbf{F}[f(t)e^{-j\omega_0 t}] = F(\omega + \omega_0)$

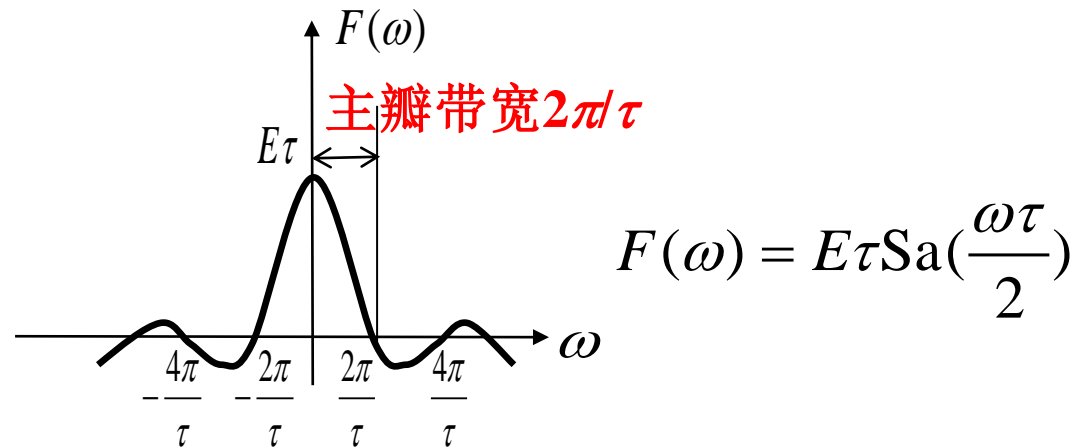
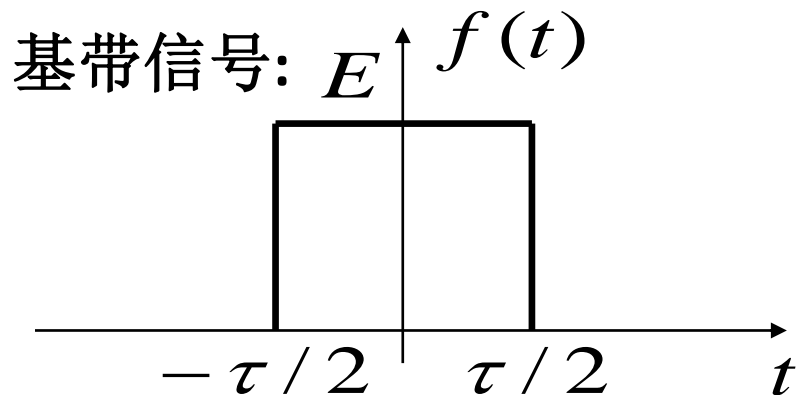
$$\because \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] \quad \sin \omega_0 t = \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}]$$

$$\therefore \mathbf{F}[f(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2}[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$$

$$\mathbf{F}[f(t) \sin \omega_0 t] = \frac{j}{2}[F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)]$$

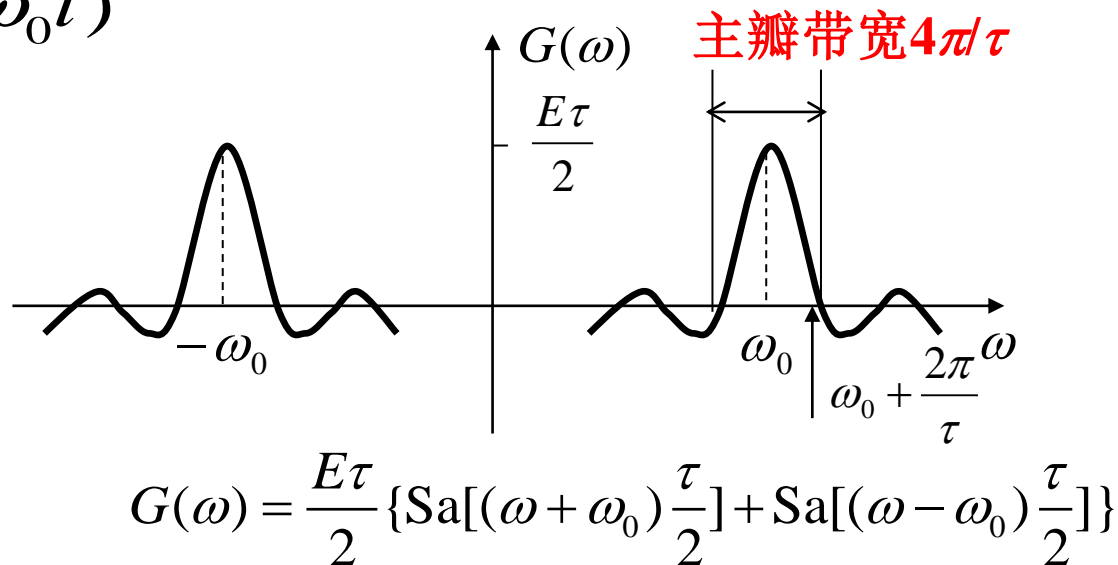
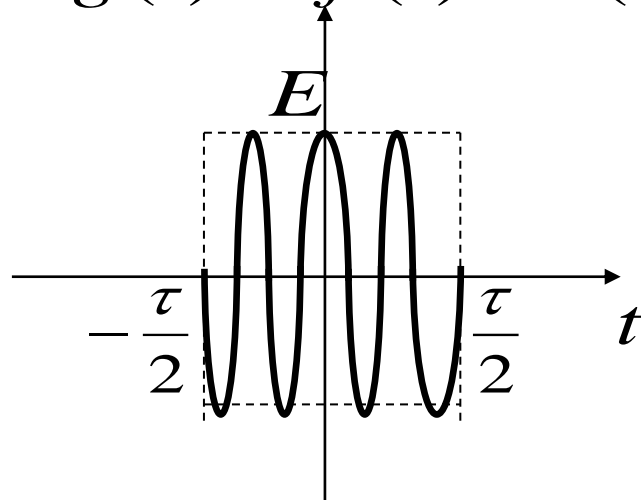
3.7 傅里叶变换的基本性质

求矩形脉冲幅度键控 (ASK) 调制信号的频谱函数, 已知矩形脉冲脉幅为 E , 脉宽为 τ , 载波信号的频率为 ω_0 。



ASK信号

$$g(t) = f(t) \cos(\omega_0 t)$$

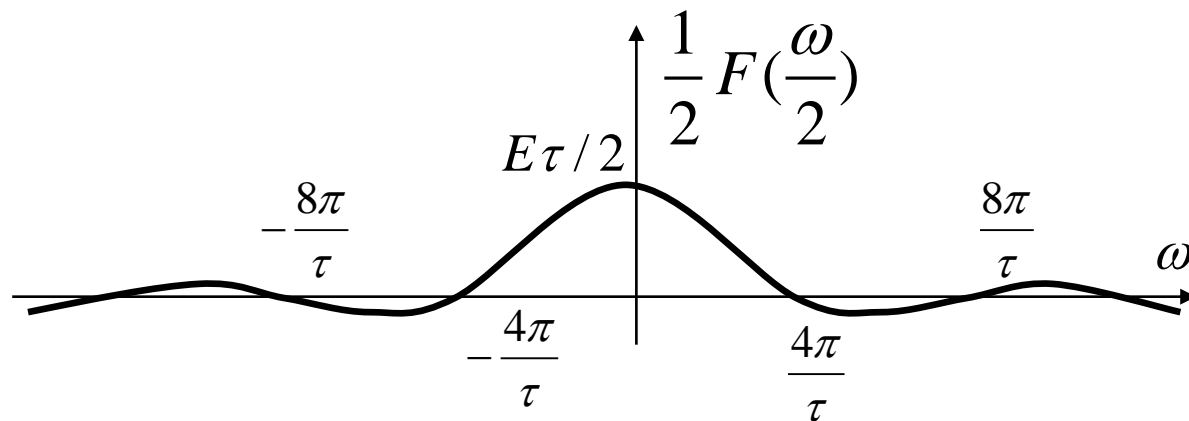
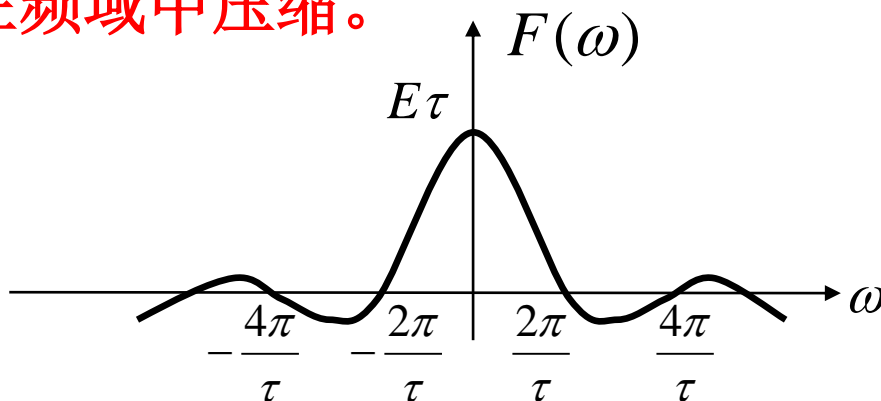
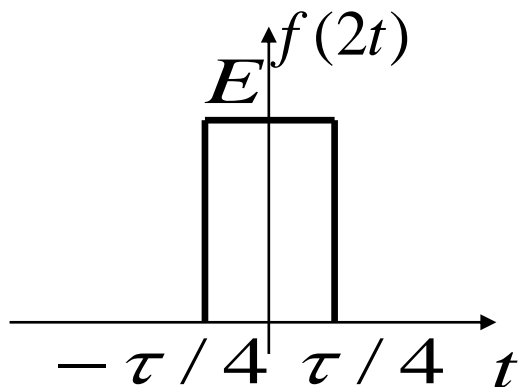
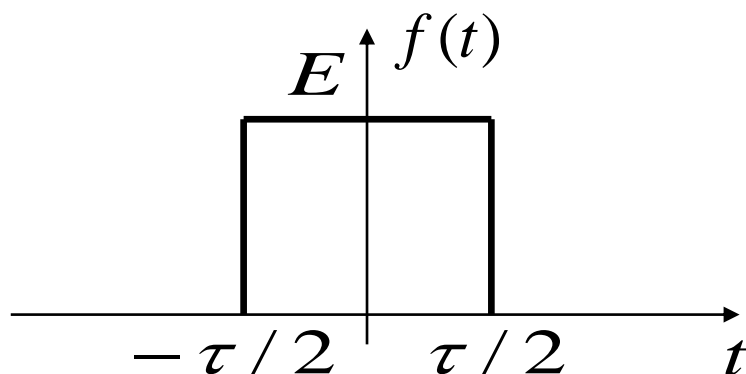


3.7.5 尺度变换特性

若 $F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)]$

$$\text{则 } \mathbf{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

信号在**时域中压缩**等效于在**频域中扩展**（波形压缩 a 倍，信号随时间变化加快 a 倍，所包含的频率分量增加 a 倍，频谱展宽 a 倍。根据能量守恒定律，各频率分量的大小减小 a 倍）；**在时域中扩展**等效于在**频域中压缩**。



特例： $\mathbf{F}[f(-t)] = F(-\omega)$ (反褶, $\mathbf{a=-1}$)

综合**时移**特性和**尺度变换**特性：

$$\mathbf{F}[f(at - t_0)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

证明：

先尺度变换

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

再时移

$$f\left[a\left(t - \frac{t_0}{a}\right)\right] \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

先时移

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

再尺度变换

$$f(at - t_0) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

3.7.6 微分与积分特性

(1) 时域微分特性

若 $F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)]$

$$\text{则 } \mathbf{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega), \quad \mathbf{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (j\omega)^n F(\omega)$$

(2) 时域积分特性

若 $F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)]$

$$\text{则 } \mathbf{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

直流分量

(3) 频域微分特性

$$\text{若 } F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)]$$

$$\text{则 } \mathbf{F}[(-jt)f(t)] = \frac{dF(\omega)}{d\omega},$$

$$\mathbf{F}[(-jt)^n f(t)] = \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

$$\mathbf{F}[t^n f(t)] = j^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

(4) 频域积分特性

$$\text{若 } F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)]$$

$$\text{则 } \mathbf{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\omega} F(u)du\right] = \frac{f(t)}{-jt} + \pi f(0)\delta(t)$$

本次课内容

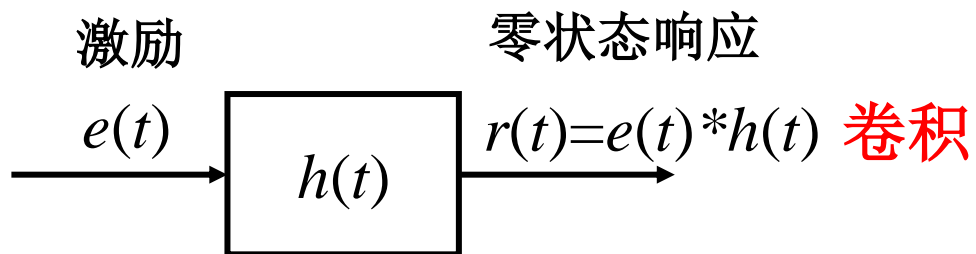
- 3.8 卷积定理
- 3.9 周期信号的傅里叶变换
- 3.10 抽样信号的傅里叶变换
- 3.11 抽样定理

本次课目标

1. 熟练掌握时域卷积定理和频域卷积定理及其应用；
2. 熟悉周期信号的傅里叶变换与傅里叶级数的关系；
3. 熟练掌握抽样定理及其应用。

- 3.1 引言
- 3.2 周期信号的傅里叶级数分析
- 3.3 典型周期信号的傅里叶级数
- 3.4 傅里叶变换
- 3.5 典型非周期信号的傅里叶变换
- 3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换
- 3.7 傅里叶变换的基本性质
- 3.8 卷积定理
- 3.9 周期信号的傅里叶变换
- 3.10 抽样信号的傅里叶变换
- 3.11 抽样定理

- 卷积是系统分析的核心技术。系统的零状态响应为激励与冲激响应的卷积。



- 卷积运算的四步曲：

1. 反褶: $h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$
2. 时移: $h(-\tau) \rightarrow h(t - \tau)$ $\begin{cases} t < 0, & \text{左移 } t \\ t > 0, & \text{右移 } t \end{cases}$
3. 相乘: $e(\tau)h(t - \tau)$
4. 积分: $e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t - \tau)d\tau$

运算复杂！

- 卷积定理—将复杂的时域计算转换为简单的频域计算，反之亦然。
- 抽样定理—卷积定理的应用。

要将一首时间上连续的乐曲转换为CD中的数字音乐，需对模拟信号进行抽样（时间离散化），你认为下列哪个抽样频率（单位Hz代表每秒钟的抽样次数）获得的音乐质量最高？

- ☐ A 5.5 kHz
- ☐ B 11 kHz
- ☐ C 22 kHz
- ☒ D 44 kHz

提交

要将一首时间上连续的乐曲转换为CD中的数字音乐，需对模拟信号进行抽样（时间离散化），你认为下列哪个抽样频率（单位Hz代表每秒钟的抽样次数）获得的音乐质量最高？

44 kHz抽样频率 

22 kHz抽样频率 

11 kHz抽样频率 

5.5 kHz抽样频率 

(1) 时域卷积定理：两信号的时域卷积等效于在频域中频谱相乘。

$$\text{若 } F_1(\omega) = \mathbf{F}[f_1(t)], \quad F_2(\omega) = \mathbf{F}[f_2(t)],$$

$$\text{则 } \mathbf{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

(2) 频域卷积定理：两信号的频域卷积等效于在时域中函数相乘（再除以 2π ）。

$$\text{若 } F_1(\omega) = \mathbf{F}[f_1(t)], \quad F_2(\omega) = \mathbf{F}[f_2(t)],$$

$$\text{则 } \mathbf{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

$$\text{其中: } F_1(\omega) * F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(\omega - u) du$$



例3-8： 利用卷积定理证明傅里叶变换的时域积分特性。

解： $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) u(t-\tau) d\tau = f(t) * u(t)$

已知 $F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)]$,

利用时域卷积定理,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] &= F(\omega) \mathbf{F}[u(t)] \\ &= F(\omega) \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] \\ &= \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)\end{aligned}$$

时域积分特性

$$\mathbf{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

直流分量

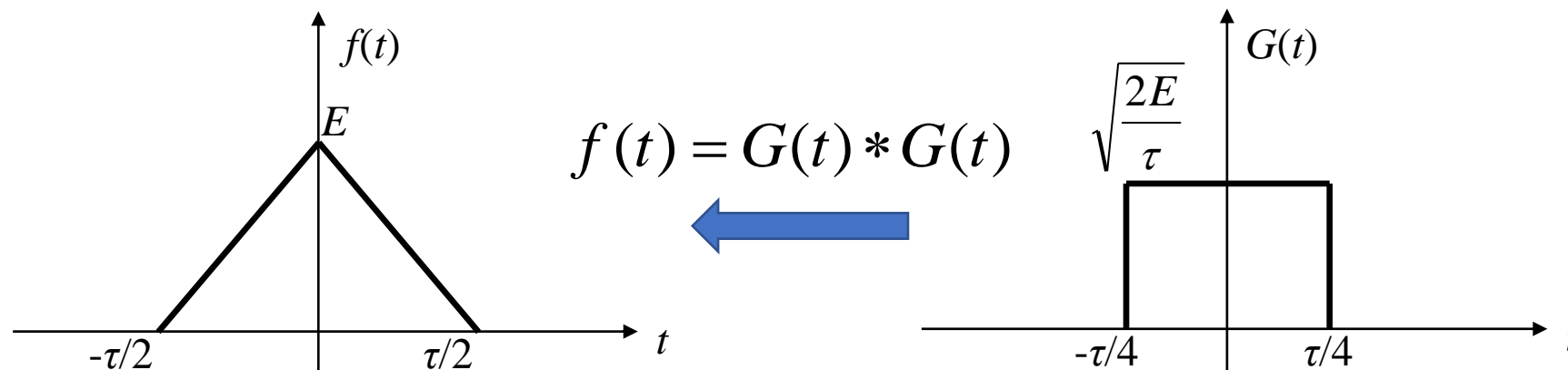
例3-9：利用时域卷积定理求三角脉冲的频谱

$$f(t) = \begin{cases} E(1 - \frac{2|t|}{\tau}) & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

解：

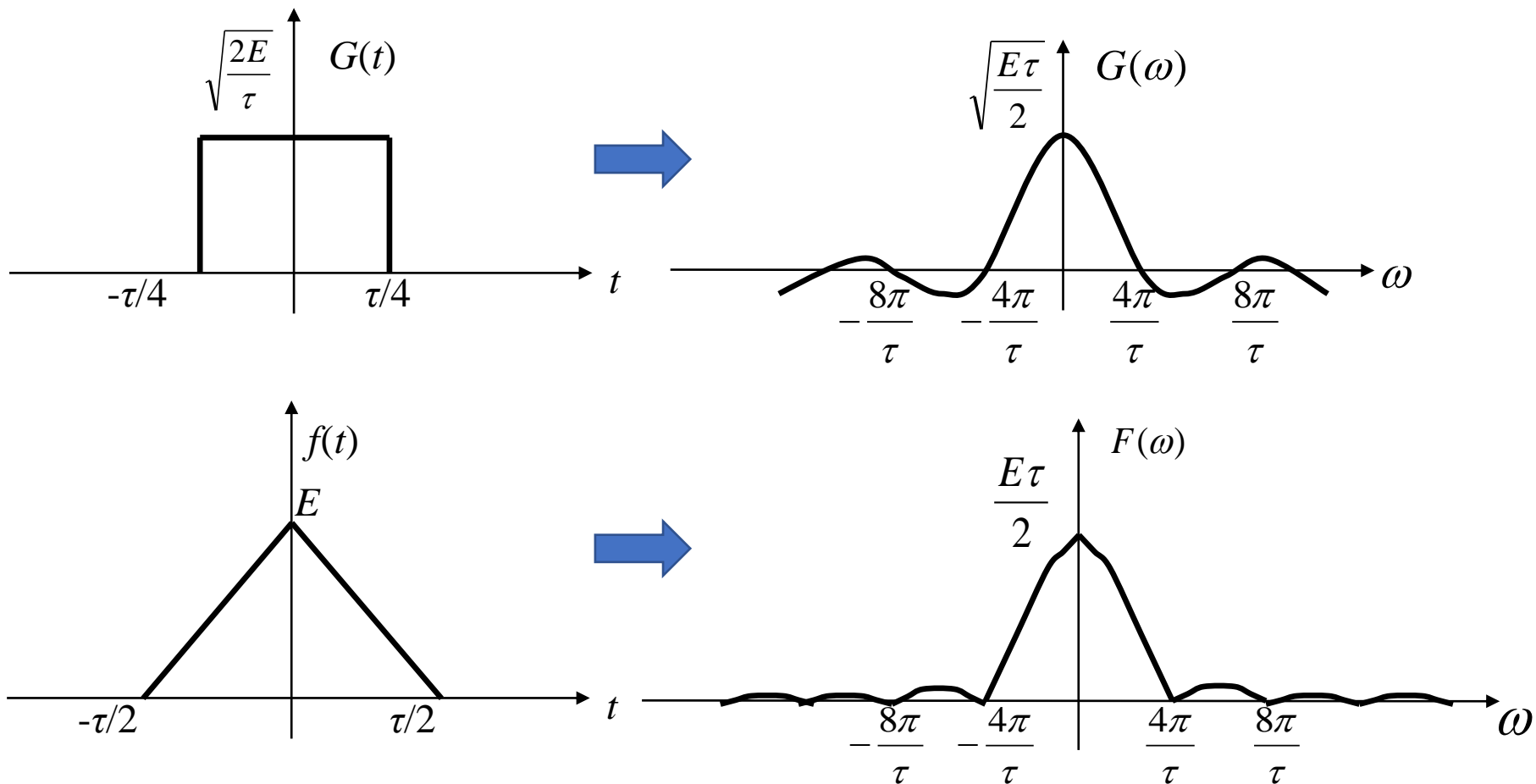
第一步：将三角脉冲视为**两个矩形脉冲的卷积**。

三角脉冲的宽度为两个矩形脉冲的宽度之和，而三角脉冲的幅度峰值为两个矩形幅度的平方和宽度相乘的结果。因此，矩形脉冲的宽度、幅度分别为 $\tau/2$ 及 $\sqrt{2E/\tau}$ 。

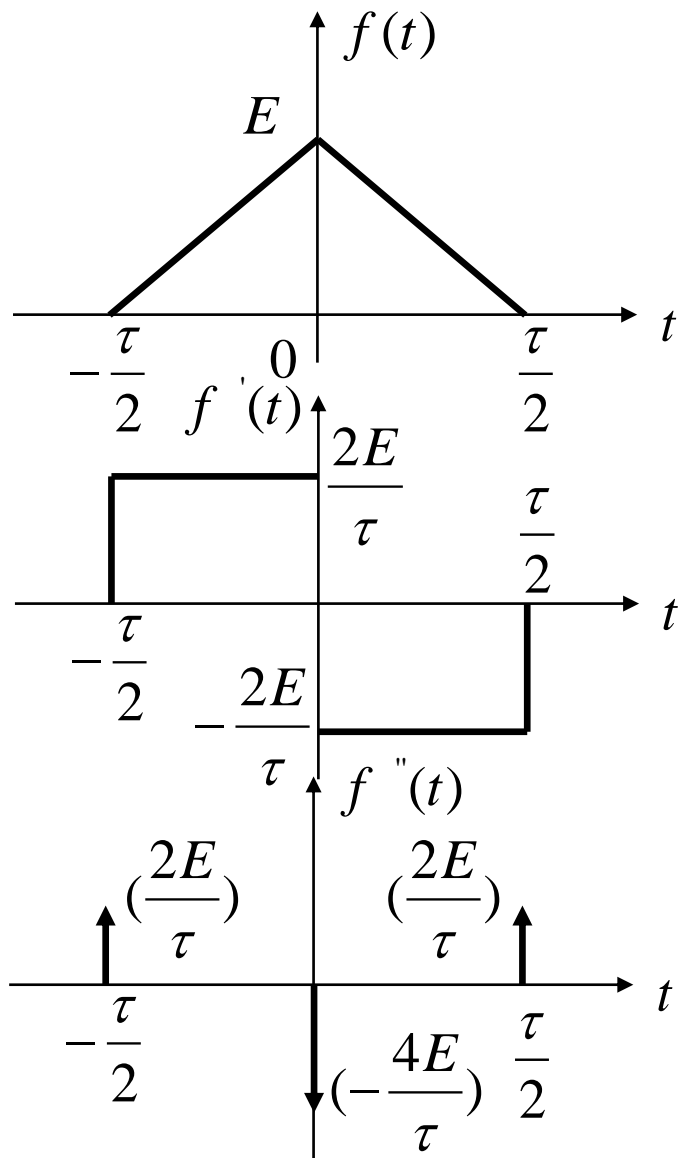


第二步：应用时域卷积定理。

$$G(\omega) = \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \cdot \frac{\tau}{2} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) = \sqrt{\frac{E\tau}{2}} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \quad \therefore F(\omega) = G^2(\omega) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$



回顾例3-7：用时域微分性质求三角脉冲信号的傅里叶变换。

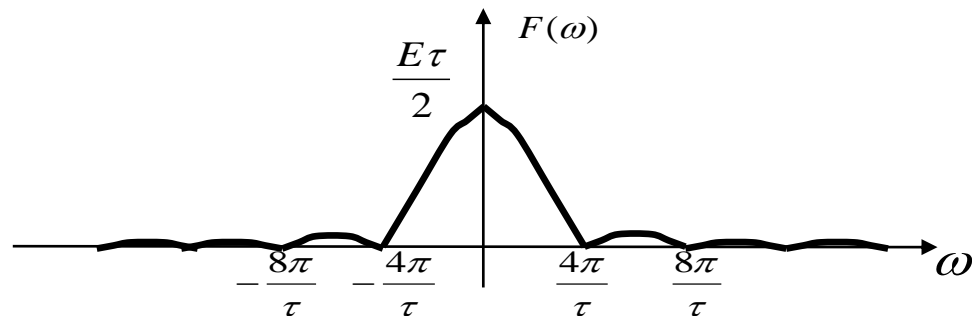


解:
$$f''(t) = \frac{2E}{\tau} \left[\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - 2\delta(t) \right]$$

对上式两边取傅里叶变换:

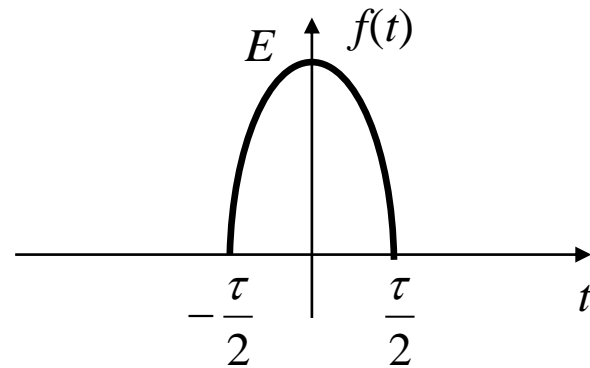
$$\begin{aligned} (j\omega)^2 F(\omega) &= \frac{2E}{\tau} (e^{j\omega\frac{\tau}{2}} + e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} - 2) \\ &= -\frac{\omega^2 E \tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore F(\omega) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$



例3-10： 利用频域卷积定理求余弦脉冲的频谱。

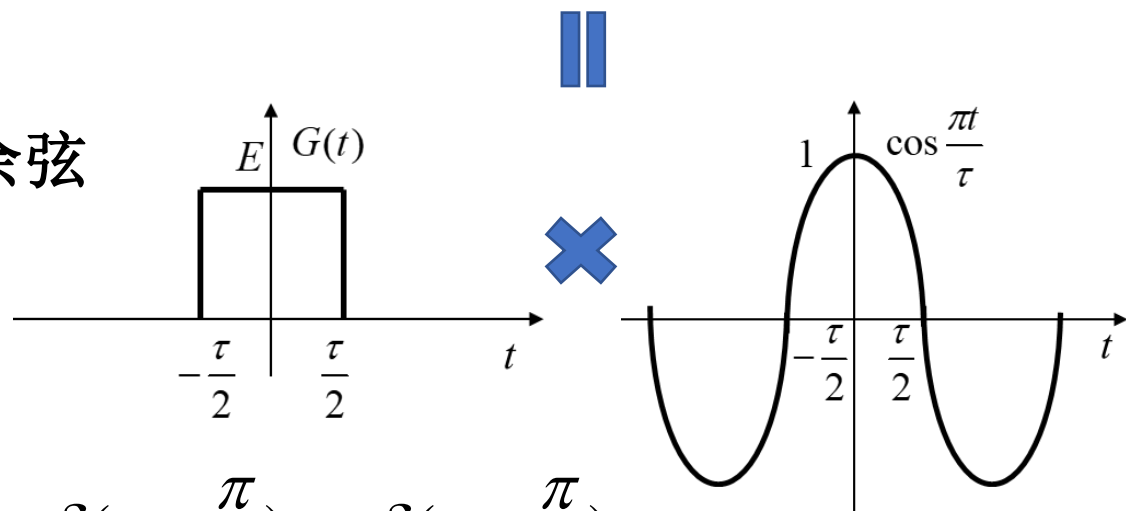
$$f(t) = \begin{cases} E \cos \frac{\pi t}{\tau} & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



解：

第一步： 把 $f(t)$ 看作是矩形脉冲 $G(t)$ 与余弦信号的乘积。

第二步： 应用频域卷积定理。

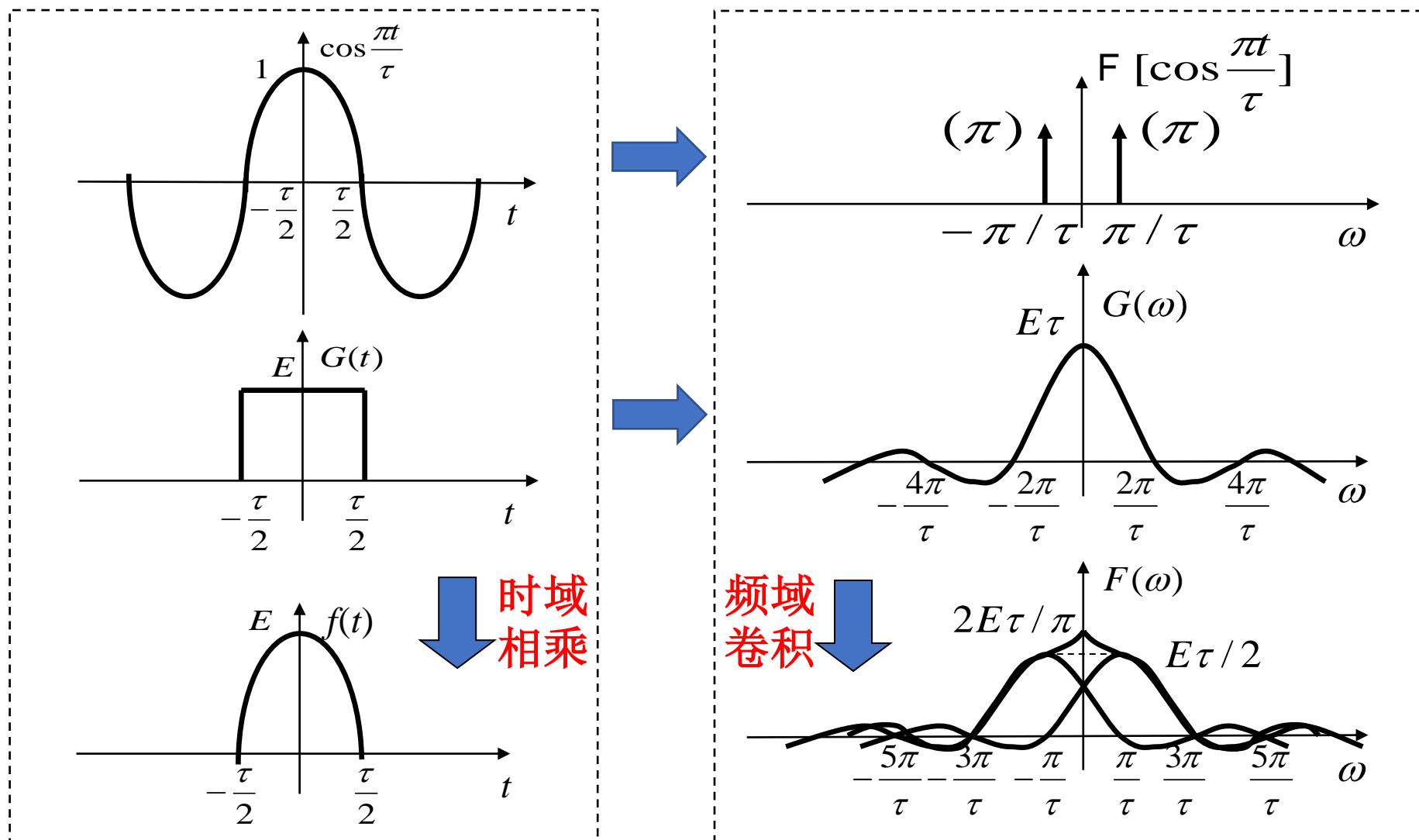


$$G(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\mathbf{F}\left[\cos \frac{\pi t}{\tau}\right] = \pi\delta\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right) + \pi\delta\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} G(\omega) * \pi\left[\delta\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right) + \delta\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right)\right] = \frac{E\tau}{2} \left\{ \text{Sa}\left[\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right) \frac{\tau}{2}\right] + \text{Sa}\left[\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right) \frac{\tau}{2}\right] \right\}$$

$$F(\omega) = \frac{E\tau}{2} \left\{ \text{Sa}\left[\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right)\frac{\tau}{2}\right] + \text{Sa}\left[\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right)\frac{\tau}{2}\right] \right\} = 2E\tau \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \bigg/ \left[\pi \left(1 - \frac{\tau^2\omega^2}{\pi^2}\right) \right]$$



当一复指数时间信号作为激励作用于线性时不变系统时，其**稳态响应**是同频率的复指数时间信号，只是幅度与相位被改变。

$$\xrightarrow{e^{j\omega_0 t}} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t) = e^{j\omega_0 t} * h(t)}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * e^{j\omega_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \\ &= H(\omega_0) e^{j\omega_0 t} = |H(\omega_0)| e^{j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{e^{-j\omega_0 t}} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t) = e^{-j\omega_0 t} * h(t)}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * e^{-j\omega_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0(t-\tau)} d\tau = e^{-j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0 \tau} d\tau \\ &= H^*(\omega_0) e^{-j\omega_0 t} = |H(\omega_0)| e^{-j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} \end{aligned}$$

当一个三角函数作为激励作用于线性时不变系统时，其稳态响应是同频率的三角函数，只是幅度与相位被改变。

$$\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{\quad} \boxed{h(t)} \xrightarrow{\quad} y(t) = \cos(\omega_0 t) * h(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} h(t) * (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \\ &= \frac{1}{2} |H(\omega_0)| \left(e^{j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} + e^{-j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} \right) = |H(\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] \end{aligned}$$

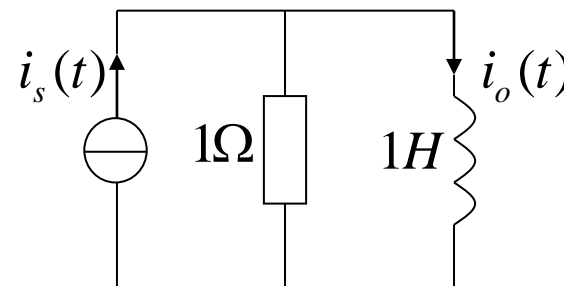
$$\sin(\omega_0 t) \xrightarrow{\quad} \boxed{h(t)} \xrightarrow{\quad} y(t) = \sin(\omega_0 t) * h(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} h(t) * (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \\ &= \frac{1}{2j} |H(\omega_0)| \left(e^{j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} - e^{-j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} \right) = |H(\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] \end{aligned}$$

如一时间信号作用于系统，其输出仍是此时间信号，只是幅度与相位被改变，称此时间信号为系统的特征信号，表征被改变的幅度和相位的函数，称为系统的特征值或系统函数。

所以信号 $e^{j\omega_0 t}$ ， $\cos(\omega_0 t)$ 和 $\sin(\omega_0 t)$ 是系统的特征信号，函数 $H(\omega)$ （系统单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换）是系统的特征值或系统函数，也称为系统的频率响应。

例3-11：一 RL 电路如图所示，激励为电流源 $i_s(t)$ ，响应是电感中的电流 $i_o(t)$ 。列出电路的输入-输出微分方程，求出其频率响应。若激励 $i_s(t)=\cos t$ ，求正弦稳态响应 $i_o(t)$ 。



解：系统方程为 $i_R(t) + i_o(t) = i_s(t)$

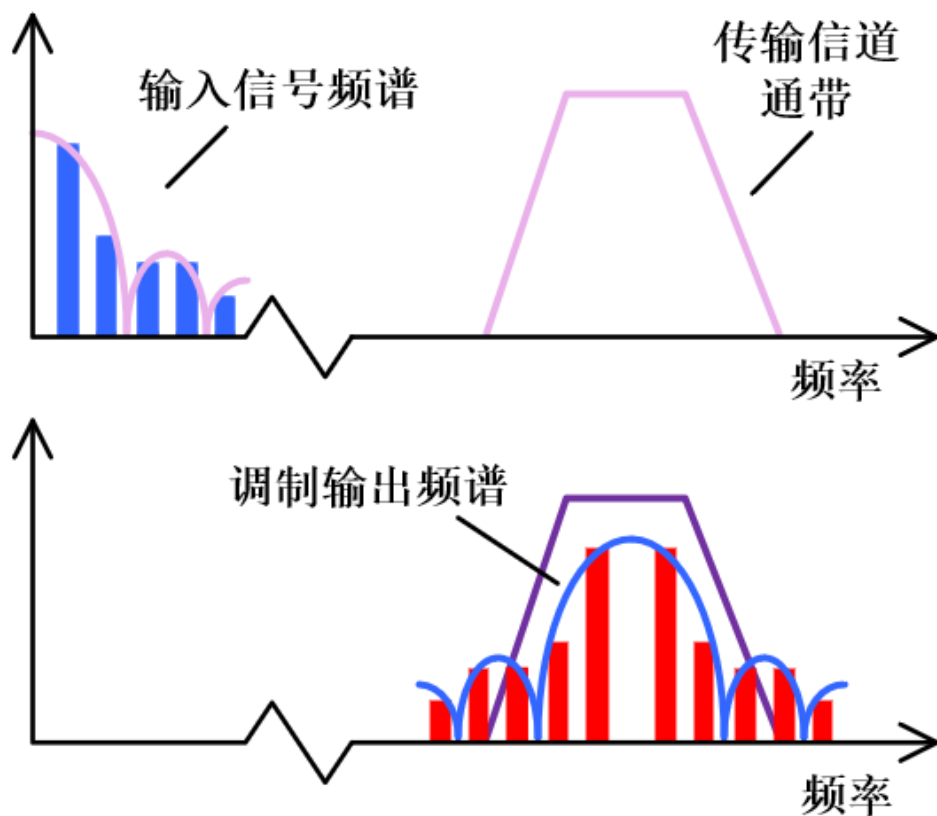
$$\therefore \frac{L}{R} \frac{di_o(t)}{dt} + i_o(t) = i_s(t) \quad \frac{di_o(t)}{dt} + i_o(t) = i_s(t)$$

两边同求傅里叶变换 $(j\omega + 1)I_o(\omega) = I_s(\omega)$

$$\text{所以 } H(\omega) = \frac{I_o(\omega)}{I_s(\omega)} = \frac{1}{j\omega + 1} \quad H(1) = H(\omega) \Big|_{\omega=1} = \frac{1}{j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$i_o(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

卷积定理的应用：通信中的带宽效应



$$x(t) * h(t) \xrightarrow{F} X(\omega)H(\omega)$$

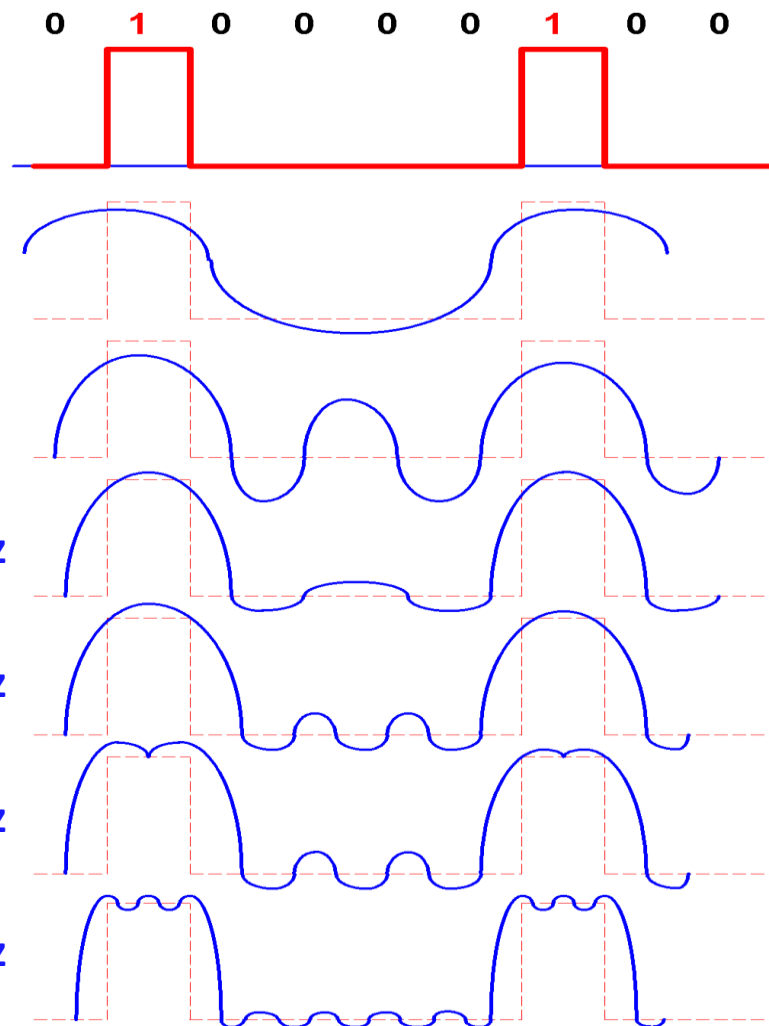
时域卷积定理

- 信道带宽是有限的。
- 如果信号的一些主要频率分量落在信道带宽之外，则信道输出的信号失真。

卷积定理的应用：通信中的带宽效应

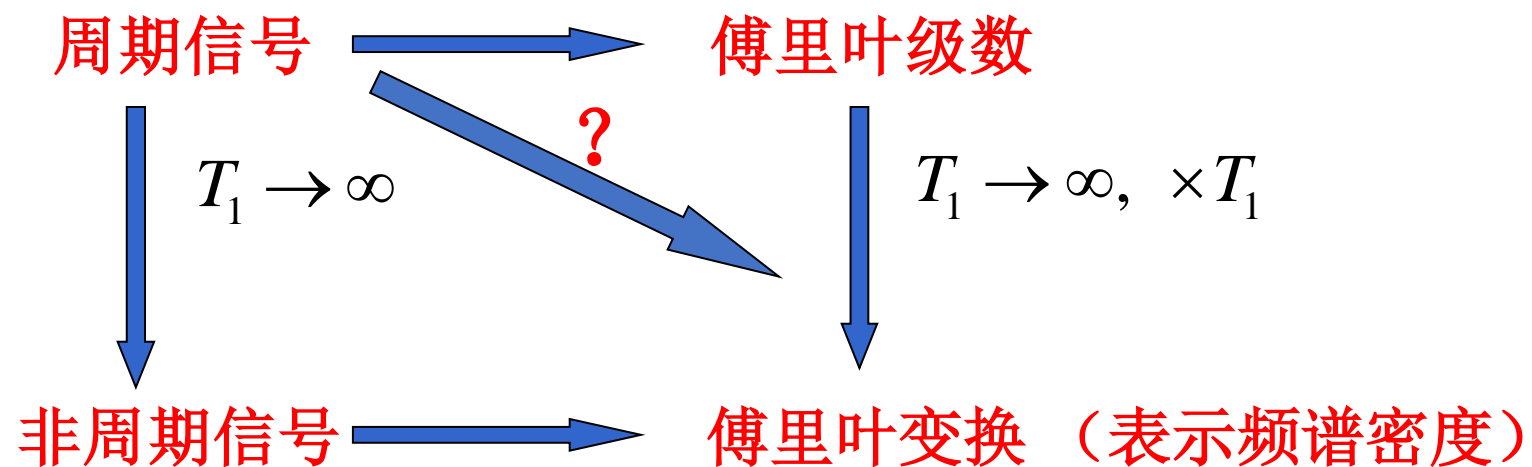
- 信号带宽：2000 Hz

比特速率：
2000 bits/s



- 信道在不同带宽情况下的输出信号

- 3.1 引言
- 3.2 周期信号的傅里叶级数分析
- 3.3 典型周期信号的傅里叶级数
- 3.4 傅里叶变换
- 3.5 典型非周期信号的傅里叶变换
- 3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换
- 3.7 傅里叶变换的基本性质
- 3.8 卷积定理
- 3.9 周期信号的傅里叶变换
- 3.10 抽样信号的傅里叶变换
- 3.11 抽样定理





试求信号 $f(t) = 1 + 2\cos t$ 的傅里叶变换。

- ☐ A $F(\omega) = \delta(\omega) + 2\pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$
- ☐ B $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)$
- ☐ C $F(\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)$
- ☒ D $F(\omega) = 2\pi[\delta(\omega) + \delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$

提交

3.9.1 正弦、余弦信号的傅里叶变换

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

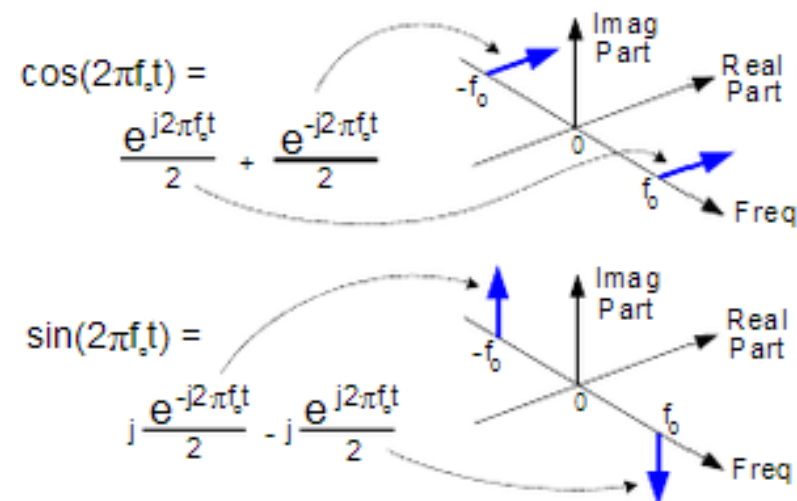
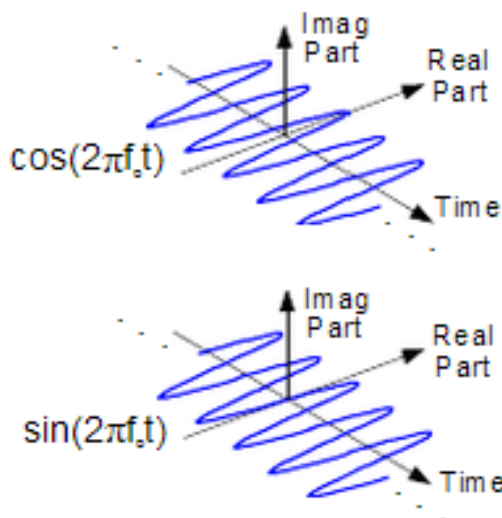
$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

$$F[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$F[e^{-j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$F[\cos \omega_0 t] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$F[\sin \omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$



3.9.2 一般周期信号的傅里叶变换

令周期信号 $f(t)$ 的周期为 T_1 ，角频率为 $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi/T_1$ 。它的傅里叶级数为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (1)$$

其中：
$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

对式(1)两边取傅里叶变换

$$F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)] = \mathbf{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathbf{F}\left[e^{jn\omega_1 t}\right] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

利用频移性质

即：
$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

周期信号 $f(t)$ 的傅里叶变换是由一系列冲激函数所组成，这些冲激位于信号的谐频处 $(0, \pm\omega_1, \pm2\omega_1, \dots)$ ，每个冲激的强度等于 $f(t)$ 的傅里叶级数相应系数 F_n 的 2π 倍。

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (1)$$

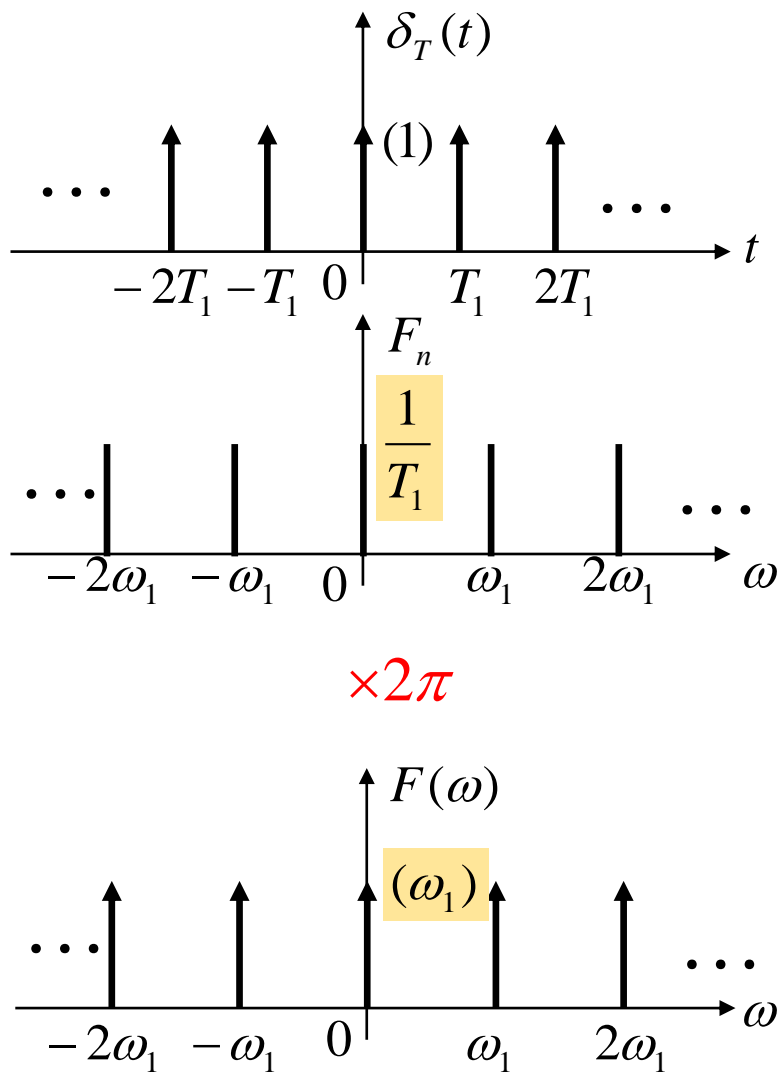
求傅里叶级数的系数也可由 $F_0(\omega) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} T_1 F_n$ 得到:

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1} = \frac{1}{T_1} \left[\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt \right]_{\omega=n\omega_1} \longleftarrow F_0(\omega) : \text{单脉冲信号的傅里叶变换}$$

对式(1)两边取傅里叶变换

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathbf{F}[f(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathbf{F}[e^{jn\omega_1 t}] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1) \\ &= \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1} \delta(\omega - n\omega_1) \end{aligned}$$

例3-12: 求周期单位冲激序列的傅里叶变换。



$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$$

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \delta(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T_1}$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_1 t}$$

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1) = \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1) \quad (2)$$

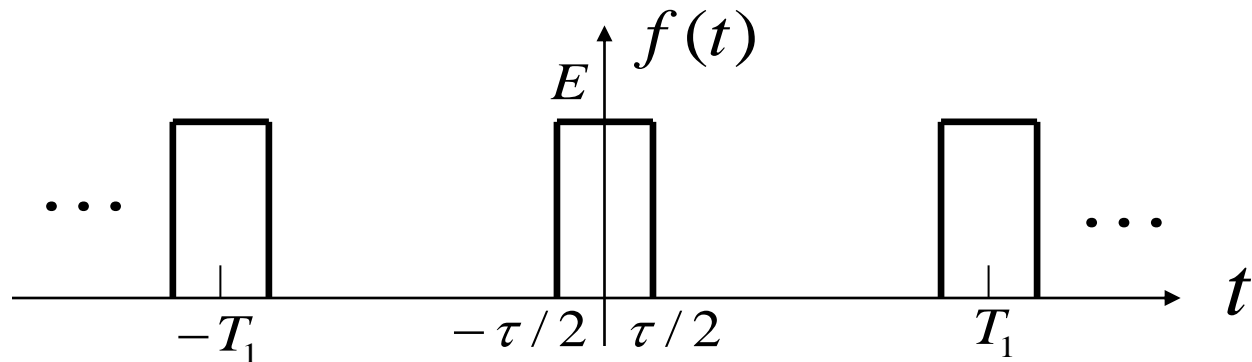
同学们的常用解法：用傅里叶变换定义积分式推导

$$\begin{aligned}\delta_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \right] e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[\delta(t - nT_1)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jnT_1\omega}\end{aligned}$$

课后思考题：用几何级数求值证明上述傅里叶变换与（2）等效。

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jnT_1\omega} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N e^{-jnT_1\omega}$$

例3-13：求周期矩形脉冲信号的傅里叶级数及傅里叶变换。已知周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的幅度为 E ，脉宽为 τ ，周期为 T_1 ，角频率为 $\omega_1=2\pi/T_1$ 。



解：已知单矩形脉冲 $f_0(t)$ 的傅里叶变换 $F_0(\omega)$ 为

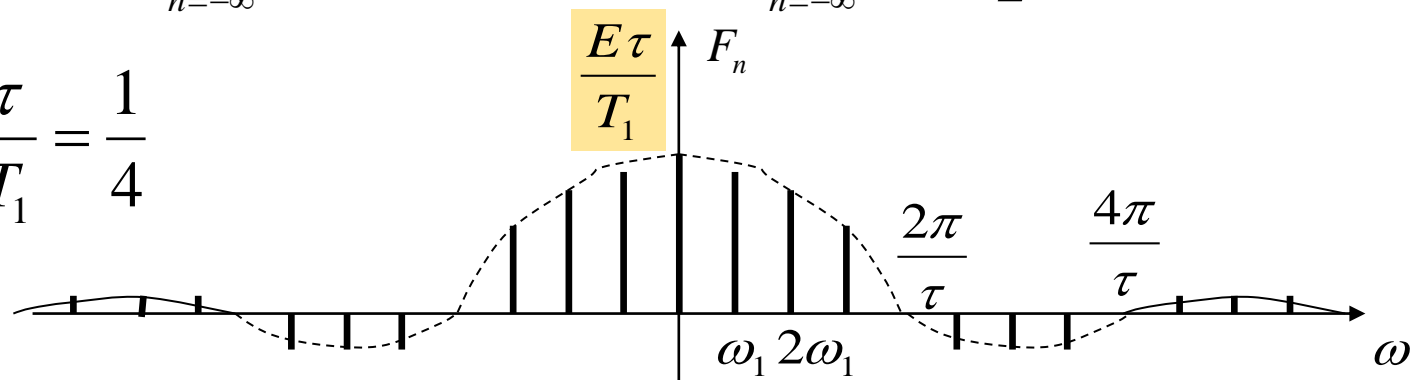
$$F_0(\omega) = E\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1} = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

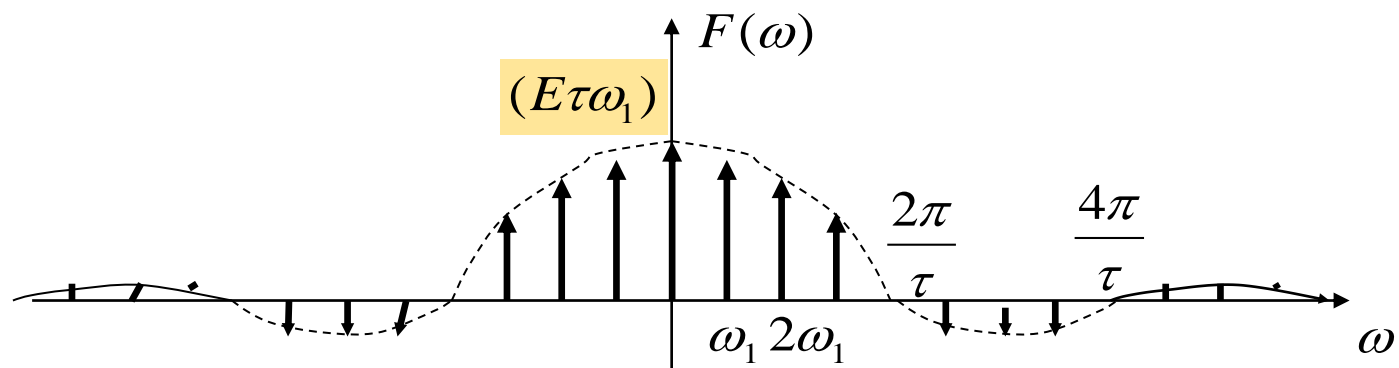
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} = \frac{E\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) e^{jn\omega_1 t}$$

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1) = E\tau\omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_1)$$

设: $\frac{\tau}{T_1} = \frac{1}{4}$



$\times 2\pi$

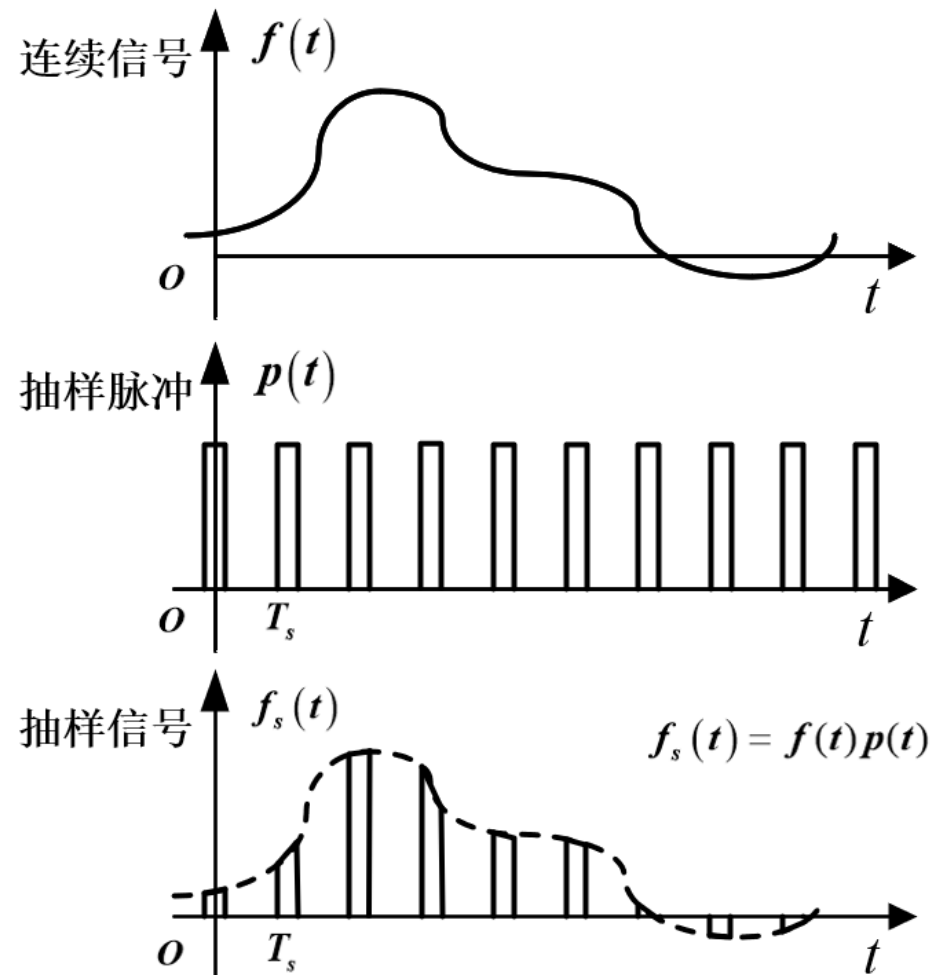
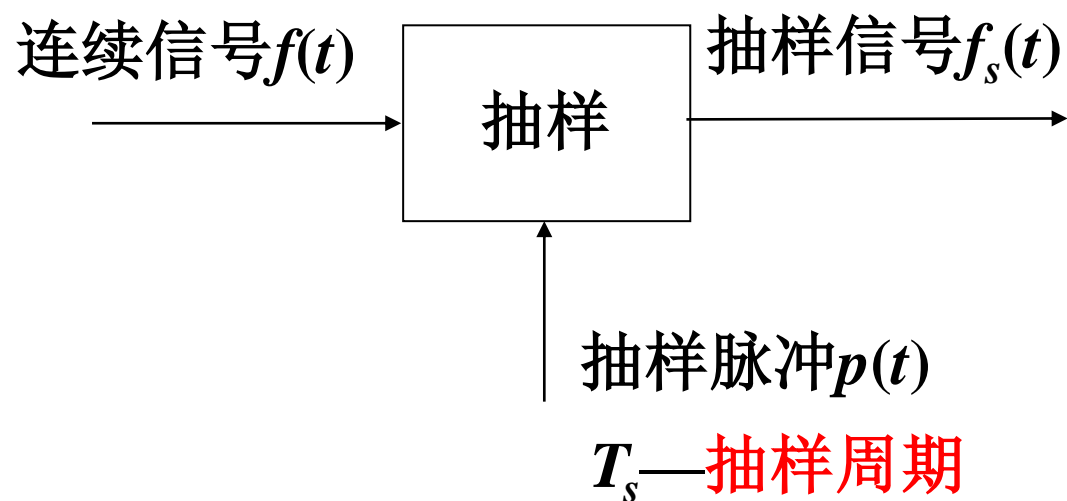


- 3.1 引言
- 3.2 周期信号的傅里叶级数分析
- 3.3 典型周期信号的傅里叶级数
- 3.4 傅里叶变换
- 3.5 典型非周期信号的傅里叶变换
- 3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换
- 3.7 傅里叶变换的基本性质
- 3.8 卷积定理
- 3.9 周期信号的傅里叶变换
- 3.10 抽样信号的傅里叶变换
- 3.11 抽样定理

3.10.1 信号的抽样

抽样--利用抽样脉冲序列从连续信号中“抽样”一系列的离散样值。

这种离散信号通常称为“**抽样信号**”。

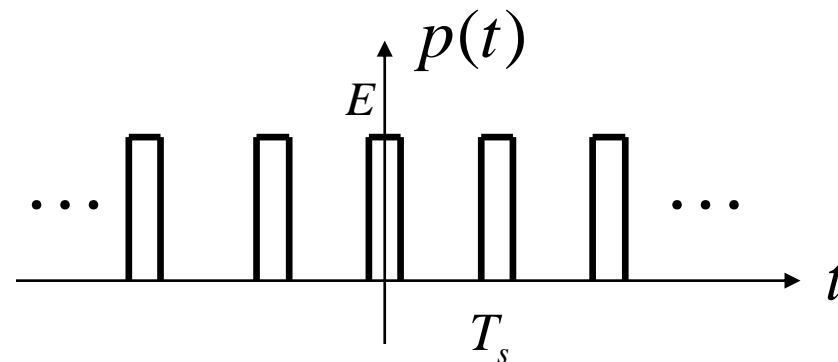


3.10.2 抽样信号的傅里叶变换

令连续信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)$

抽样脉冲 $p(t)$ 的傅里叶变换为 $P(\omega)$

抽样后信号 $f_s(t)$ 的傅里叶变换为 $F_s(\omega)$



$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$\text{其中: } P_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt$$

$$f_s(t) = f(t)p(t)$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

频域卷积定理

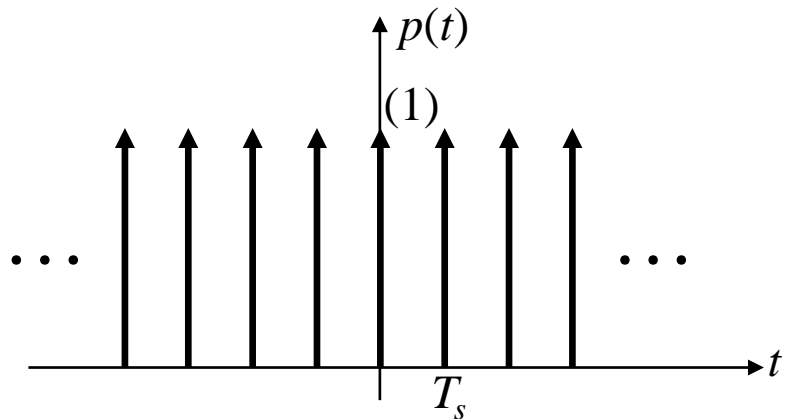
$$\text{所以 } F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \cdot F[(\omega - n\omega_s)]$$

$$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

抽样角频率 抽样频率

冲激抽样

若抽样脉冲 $p(t)$ 是冲激序列，此时称为“冲激抽样”或“理想抽样”。

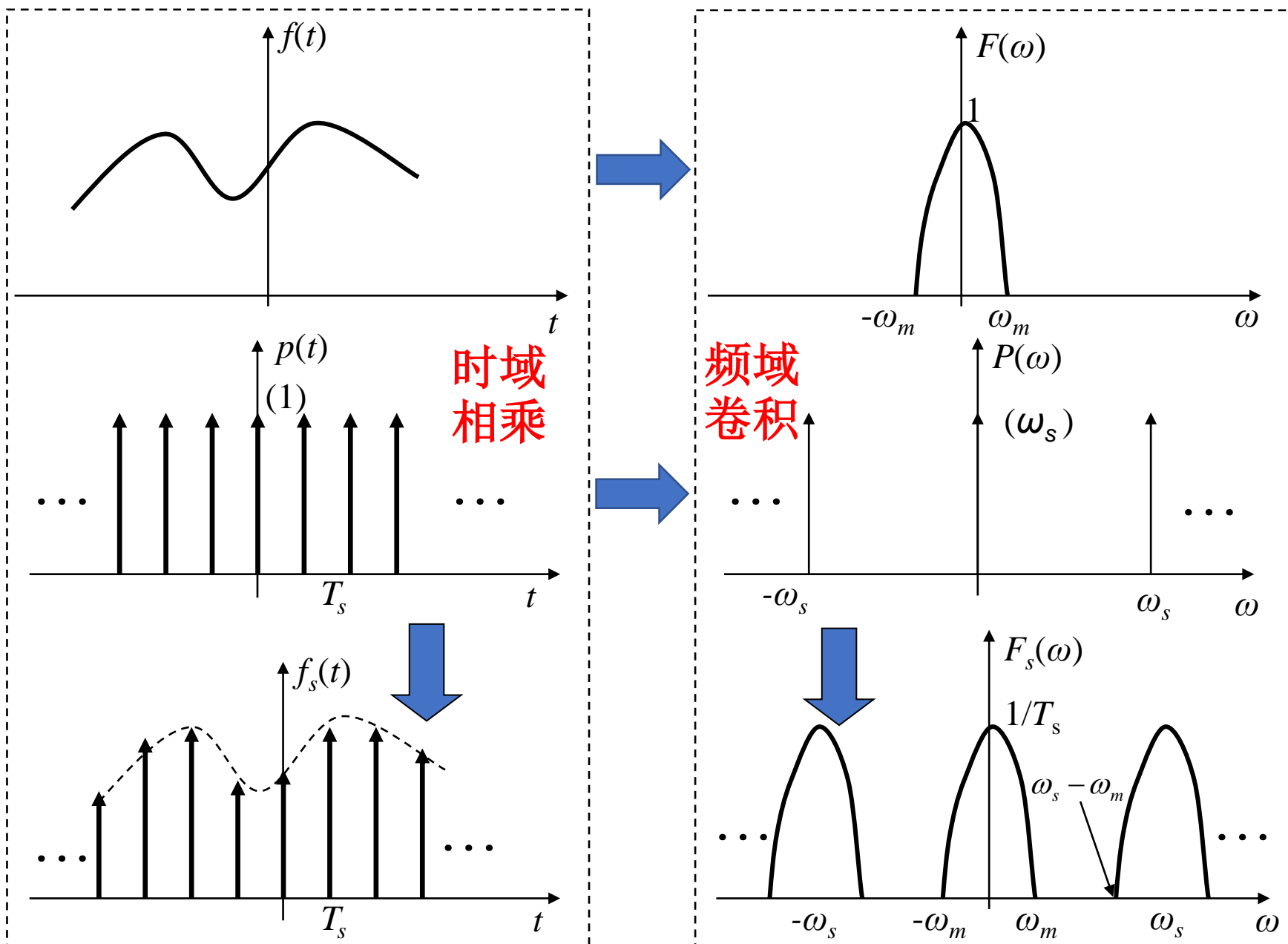


$$p(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \cdot F(\omega - n\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \quad \text{在频域以}\omega_s\text{为周期延拓}$$

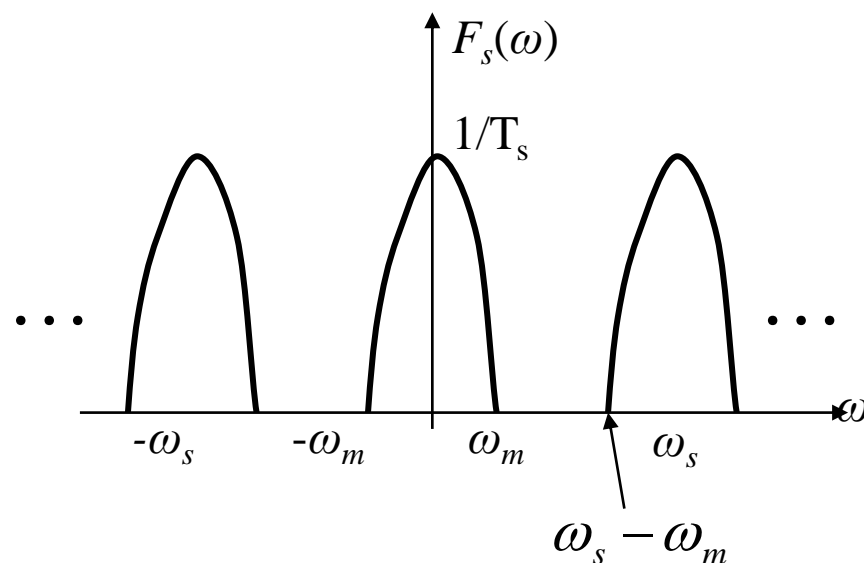
$$\text{其中: } P_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s}$$



- 3.1 引言
- 3.2 周期信号的傅里叶级数分析
- 3.3 典型周期信号的傅里叶级数
- 3.4 傅里叶变换
- 3.5 典型非周期信号的傅里叶变换
- 3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换
- 3.7 傅里叶变换的基本性质
- 3.8 卷积定理
- 3.9 周期信号的傅里叶变换
- 3.10 抽样信号的傅里叶变换
- 3.11 抽样定理

用抽样脉冲对连续信号进行抽样，**如何选取抽样频率和抽样周期？**

并且**如何从抽样信号中恢复原连续信号？**



从上图可知，只有满足 $\omega_s \geq 2\omega_m$, $F_s(\omega)$ 才不会产生频谱混叠，即 $f_s(t)$ 保留了原连续时间信号的全部信息。

这时只要将 $f_s(t)$ 施加于“**理想低通滤波器**”，就可恢复原信号 $f(t)$ 。

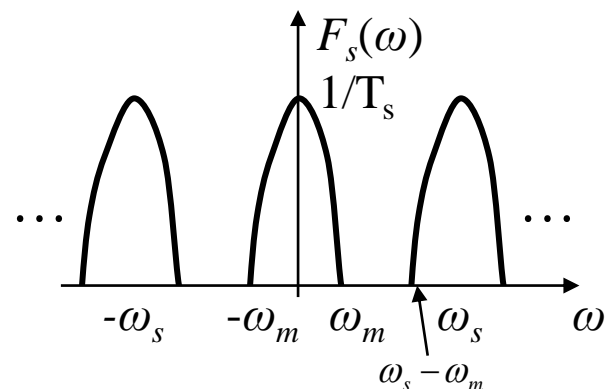
时域抽样定理： 一个频谱受限的信号 $f(t)$ ，如果频谱只占据 $-\omega_m \sim \omega_m$ 的范围，在抽样间隔不大于 $\frac{1}{2f_m}$ （其中 $\omega_m = 2\pi f_m$ ）或者抽样频率大于等于 $2f_m$ 时，信号 $f(t)$ 可以用等间隔的抽样值唯一的表示。

奈奎斯特抽样频率： 最低允许的抽样频率。

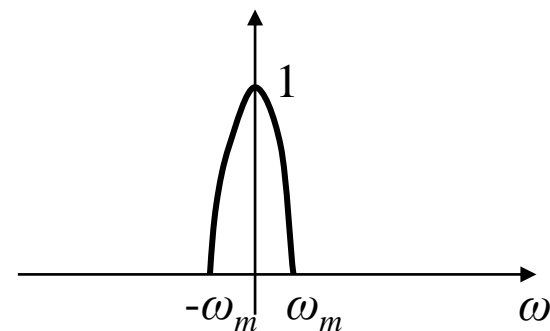
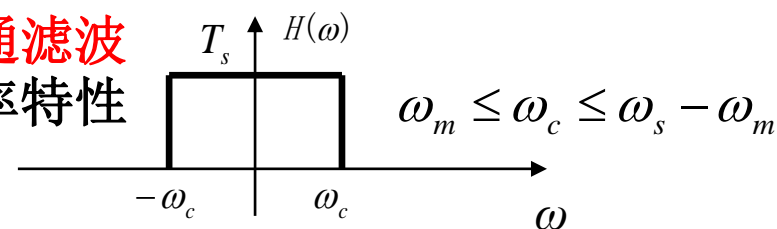
$$f_{s \min} = 2f_m$$

奈奎斯特抽样间隔： 最大允许的抽样间隔。

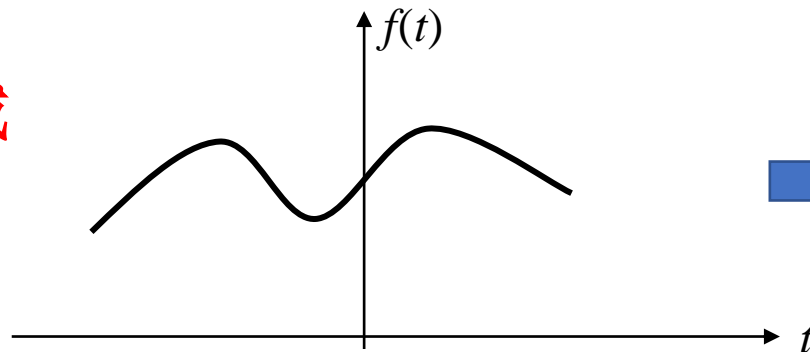
$$T_{s \max} = \frac{1}{f_{s \min}} = \frac{1}{2f_m}$$



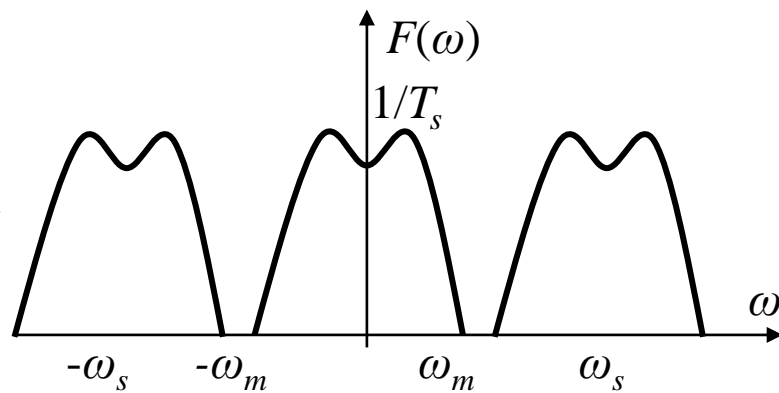
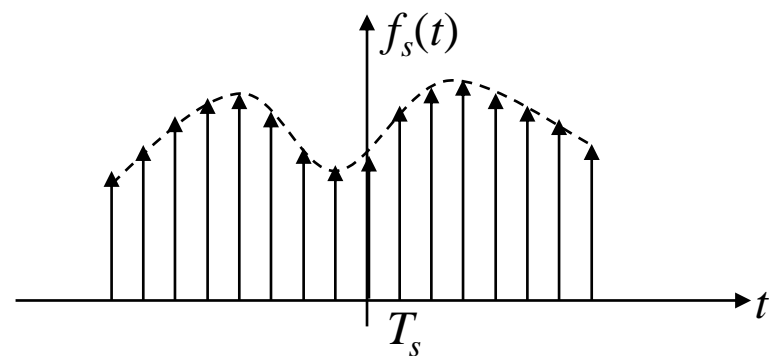
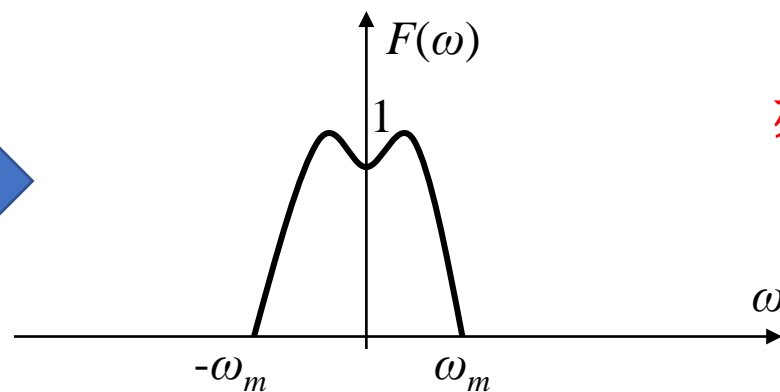
理想低通滤波器
的频率特性



时域

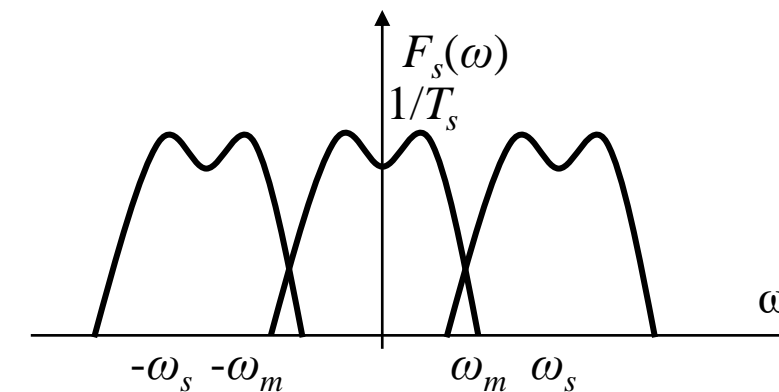
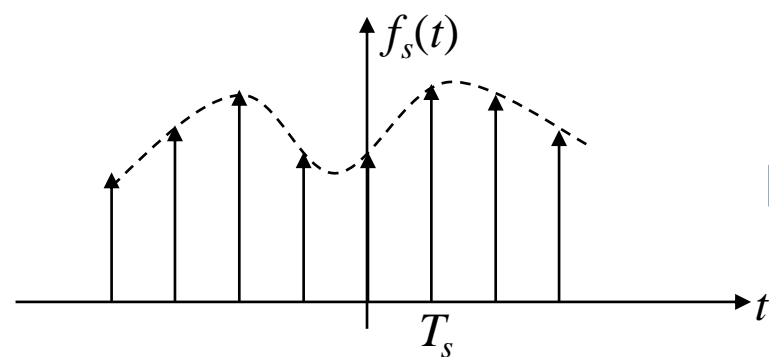


频域



$$\omega_s > 2\omega_m$$

过采样

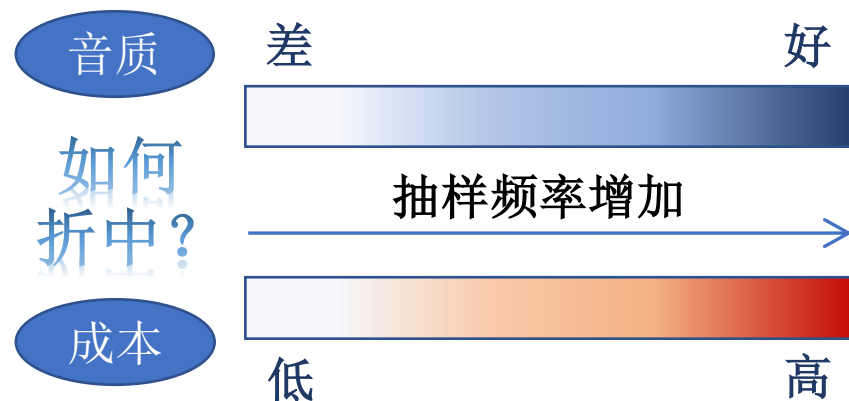


$$\omega_s < 2\omega_m$$

欠采样

例3-14：CD的抽样频率通常采用44 kHz，请解释原因。抽样频率是否越高越好？

- 多数人耳可以听到20 Hz--16 kHz的频率。测试可听到的频率范围可访问：
<https://www.bilibili.com/video/av40724545/>
- 对应的奈奎斯特抽样频率为32 kHz。
- 可以用抗混(pre-alias)滤波器对16 kHz以上的频率分量进行移除。
- 对高质量的音频信号，我们一般采用比奈奎斯特抽样频率更高的抽样频率，如44 kHz, 48 kHz, 96 kHz 或128 kHz。
- 抽样频率的选取需在音质和成本之间取得折中。



例3-15: 若 $f(t)$ 的最高角频率为 ω_m ，则对 $f(t/4)$ 抽样允许的最大时间间隔为多少？

解: 根据傅里叶变换的尺度变换特性可知信号 $f(t/4)$ 的时域扩展4倍，频域压缩4倍，最高角频率为 $\omega_m/4$ 。

再根据抽样定理，可得频谱不混叠的最小抽样频率为

$$\omega_s = 2(\omega_m/4) = \omega_m/2$$

最大抽样间隔为

$$T_{\max} = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{4\pi}{\omega_m}$$

工程中抽样频率的选取

若信号最高频率 ω_m 已知，一般取 $\omega_s \geq (5 \sim 10)\omega_m$

若信号的带宽 ω_B 已知，一般取 $\omega_s \geq (5 \sim 10)\omega_B$

若干扰信号的最高频率为 ω_f ，应满足 $\omega_s \geq 2\omega_f$

在工业控制系统中，抽样周期的经验数据如下：

流量信号： $T_s = 1 \sim 5$ 秒； 压力信号： $T_s = 3 \sim 10$ 秒

液位信号： $T_s = 6 \sim 8$ 秒； 温度信号： $T_s = 15 \sim 20$ 秒

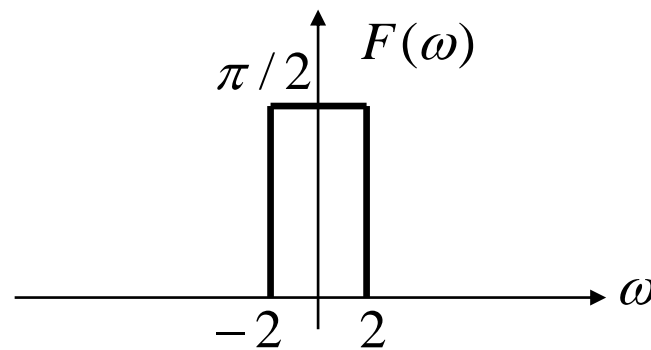
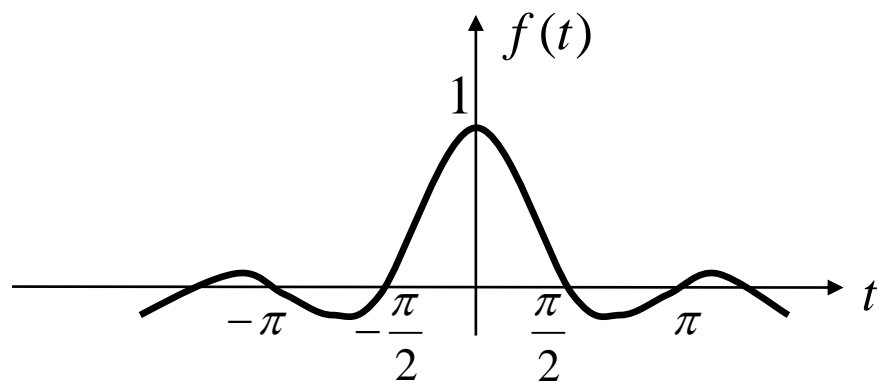
成分信号： $T_s = 15 \sim 20$ 秒

频域抽样定理：若信号 $f(t)$ 是时间受限信号，它集中在 $-t_m \sim +t_m$ 的时间范围内，若在频域中以不大于 $\frac{1}{2t_m}$ 的频率间隔对 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 进行抽样，则抽样后的频谱 $F_s(\omega)$ 可以唯一的表示原信号。

例3-16: 已知信号 $f(t) = \text{Sa}(2t)$, 用 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$ 对其进行抽样,

- (1) 确定奈奎斯特抽样频率;
- (2) 若取 $\omega_s = 6\omega_m$, 求抽样信号 $f_s(t) = f(t)\delta_T(t)$, 并画出波形图;
- (3) 求 $F_s(\omega) = \mathcal{F}[f_s(t)]$, 并画出频谱图;
- (4) 确定低通滤波器的截止频率 ω_c .

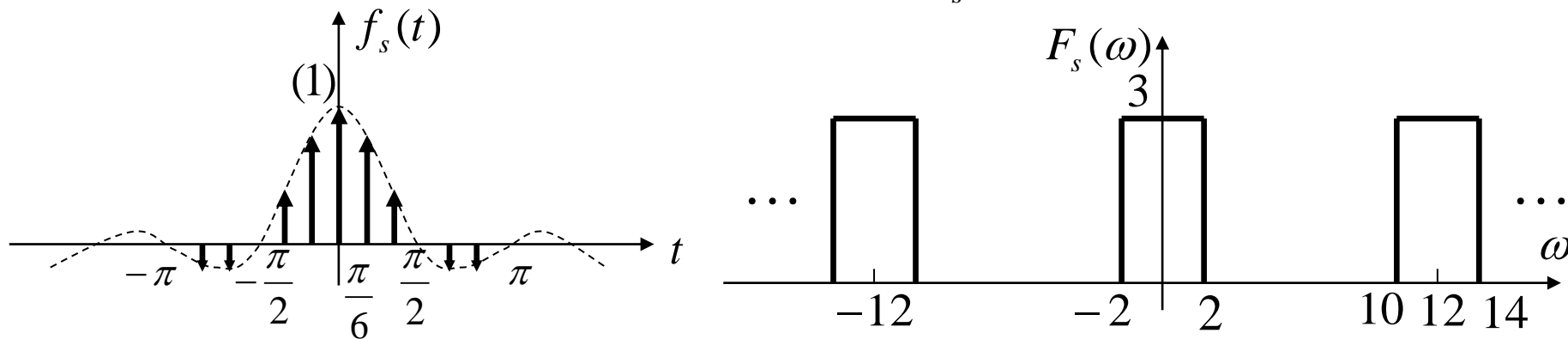
解: (1) $\because f(t) = \text{Sa}(2t) \quad \therefore F(\omega) = \frac{\pi}{2} [u(\omega + 2) - u(\omega - 2)]$



奈奎斯特抽样频率为:

$$f_{s \min} = 2f_m = 2 \times \frac{2}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \text{ Hz}$$

$$(2) \because \omega_s = 6\omega_m = 12 \text{ rad/s} \quad \therefore T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ s}$$

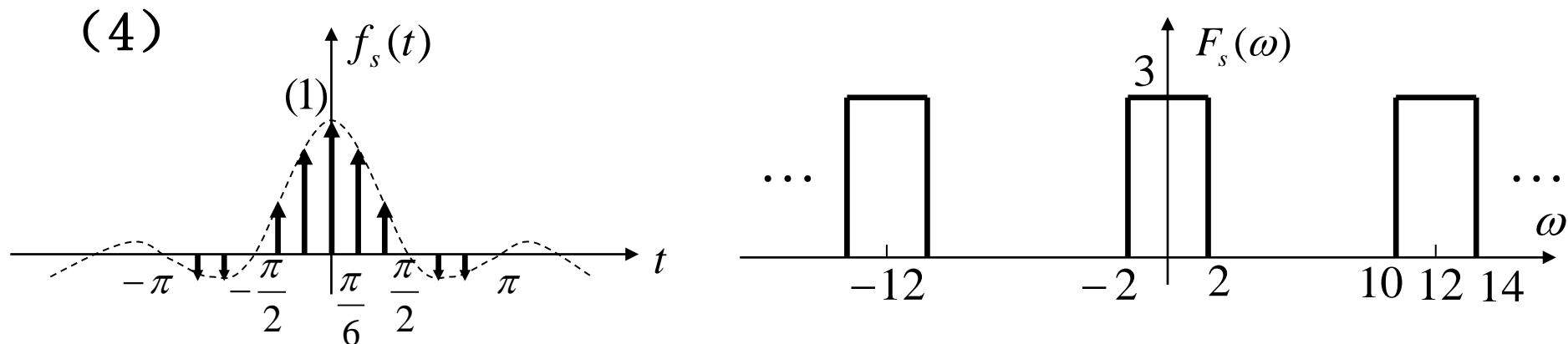


$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(2t)\big|_{t=nT_s} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{3}\right) \delta(t - nT_s)$$

$$(3) \quad F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - 12n)$$

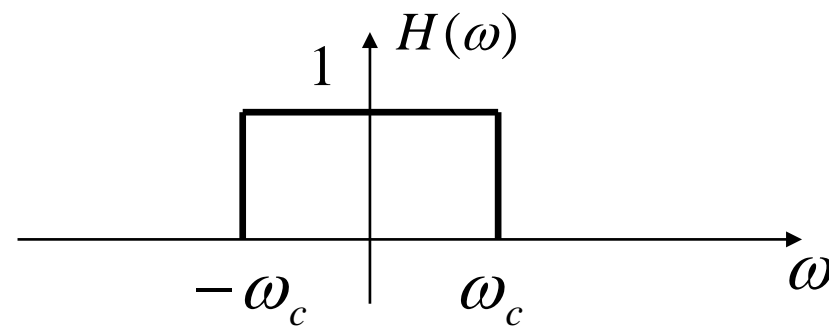
$$= 3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [u(\omega + 2 - 12n) - u(\omega - 2 - 12n)]$$



低通滤波器的截止频率 ω_c 应满足下式:

$$\omega_m \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_m$$

即 $2 \leq \omega_c \leq 10$



作业

基础题（需提交）：3-31，3-32，3-34，3-37（a）（b），3-39。

加强题（选做，不提交）：3-37（d）。