上节内容

8.9 序列的傅里叶变换

8.10 离散时间系统的频率响应

上节内容

1. 序列的傅里叶变换存在充分不必要条件是序列绝对可和。

2. 系统的频响特性 $H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)=H(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}=\left|H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right|\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$

   $\left|H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right|$：幅频特性，输出与输入序列的幅度之比

   $\varphi(\omega)$ ：相频特性，输出对输入序列的相移

3. 系统的频率响应就是系统函数在单位圆上的动态。

4. 因为 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$是周期为 2π的周期函数，所以系统的频响特性$H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)$ 是周期为 2π的周期函数。

5. $\left|H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right|$ 是关于ω 的偶函数，$\varphi(\omega)$是关于ω 的奇函数。

6. 数字滤波器$\omega=\pi$附近对应实际频率的高频。

1、经典滤波器

$$x(n)=s(n)+u(n)$$ → 加性噪声

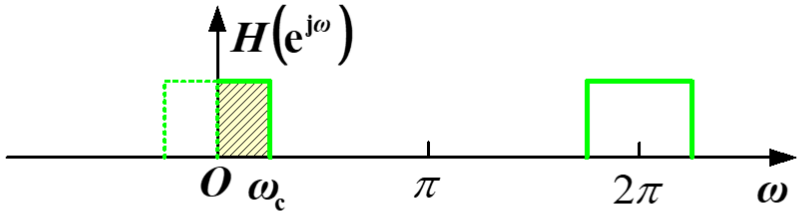
若 $x(n)$ 中的有用成分$s(n)$ 和希望去除的成分$u(n)$各自占有不同的频带，通过一个线性系统可将 $u(n)$ 有效去除。

按功能分：低通（LP），高通（HP），带通（BP），带阻（BS），全通。

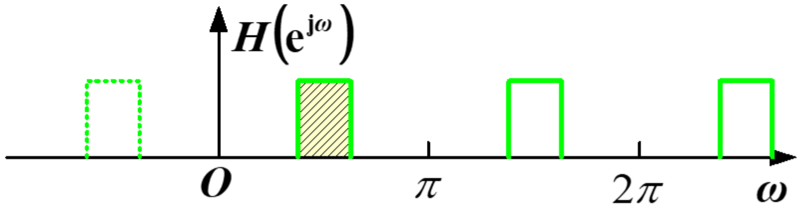
每一种又有模拟（AF）、数字（DF）两种滤波器。

已知某数字滤波器的系统函数H(z)的零极点分布如图（a）所示，系统的相频响应为0，则频响特性曲线为（ ）

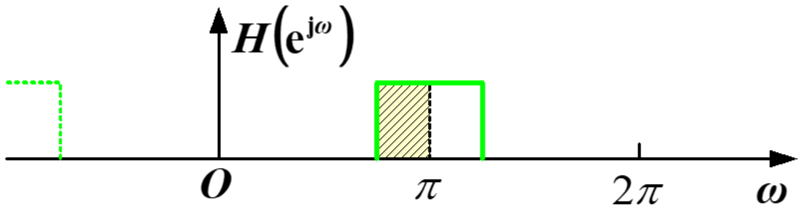
A



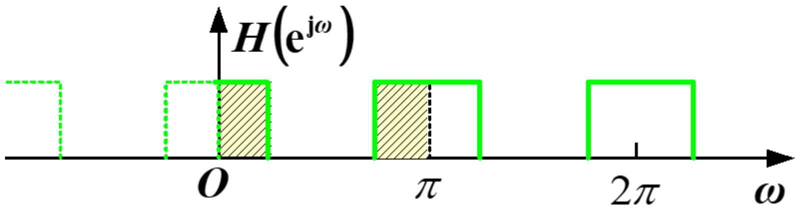
B

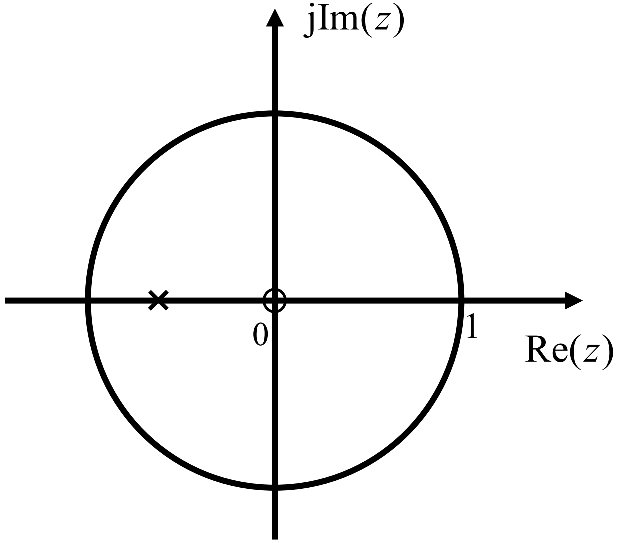


C



D





图（a）

提交

2、现代滤波器

$$x(n)=s(n)u(n) \Rightarrow \boxed{\text{乘法性噪声}}$$

$$x(n)=s(n)*u(n) \Rightarrow \boxed{\text{卷积性噪声}}$$

信号的频谱和噪声频谱混迭在一起，靠经典的滤波方法难以去除噪声。

目标：从含有噪声的数据记录(又称时间序列)中估计出信号的某些特征或信号本身。

滤波器种类：维纳(Wiener)滤波器、卡尔曼(Kalman)滤波器、线性预测、自适应滤波器

对**数字滤波器（DF）**，从实现方法上，有 **finite impulse response (FIR)** 滤波器和 **infinite impulse response (IIR)** 滤波器之分，转移函数分别为：

FIR DF: $$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

IIR DF: $$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

本次课内容

11.6 信号流图

第十二章 系统的状态变量分析

12.1 引言

12.2 连续时间系统状态方程的建立

12.3 连续时间系统状态方程的求解

本次课目标

1. 给定微分（差分）方程/系统函数，能熟练画出系统信号流图；

2. 能熟练建立连续时间系统的状态方程、输出方程；

3. 了解状态变量分析下特征矩阵、转移矩阵、系统函数等变量的定义；

4. 了解连续时间系统状态方程、输出方程的s域和时域求解方法。

11.6　信号流图

1　概述
2　系统的信号流图表示法
3　术语定义
4　信号流图的性质
5　信号流图的代数运算

11.6 信号流图

1、概述

利用方框图可以描述系统（连续的或离散的），比用微分方程或差分方程更为直观。

线性系统的仿真（模拟）

- 连续系统——相加、倍乘、积分
- 离散系统——相加、倍乘、延时

系统框图 $\xrightarrow{\text{简化}}$ 信号流图

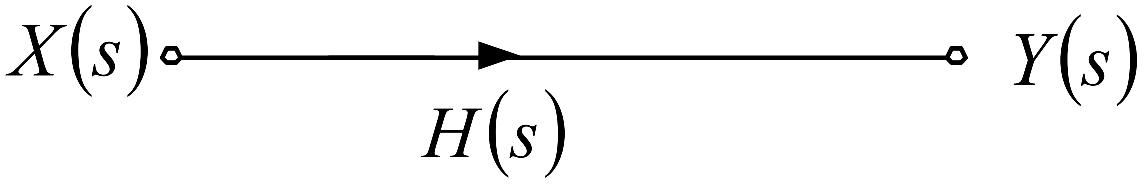
由麻省理工学院的梅森（Mason）于20世纪50年代首先提出。
应用于反馈系统分析、线性方程组求解、线性系统模拟及数字滤波器设计等方面。

信号流图方法的主要优点：

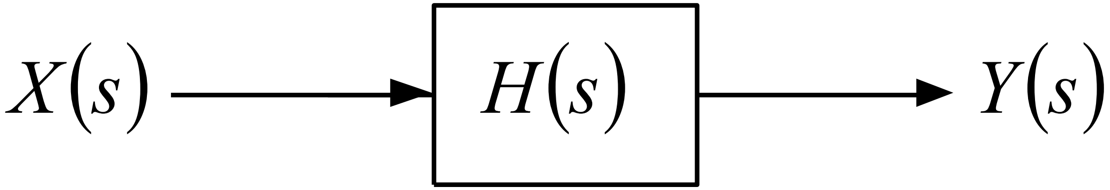
- 系统模型的表示简明清楚；
- 简化系统函数的计算方程。

2、系统的信号流图表示法

实际上是用一些点和支路来描述系统：



流图



方框图

$X(s)$ 、$Y(s)$称为结点。

线段表示信号传输的路径，称为支路。

信号的传输方向用箭头表示，系统函数（转移函数）标在箭头附近，相当于乘法器。

3、术语定义

结点： 表示系统中变量或信号的点。

转移函数： 两个结点之间的增益称为转移函数。

支路： 连接两个结点之间的定向线段，支路的增益即为转移函数。

输入结点或源点： 只有输出支路的结点，它对应的是自变量（即输入信号）。

输出结点或阱点： 只有输入支路的结点，它对应的是因变量（即输出信号）。

混合结点： 既有输入支路又有输出支路的结点。

通路： 沿支路箭头方向通过各相连支路的途径（不允许有相反方向支路存在）。

开通路： 通路与任一结点相交不多于一次。

闭通路： 如果通路的终点就是起点，并且与任何其他结点相交不多于一次。闭通路又称环路。

环路增益： 环路中各支路转移函数的乘积。

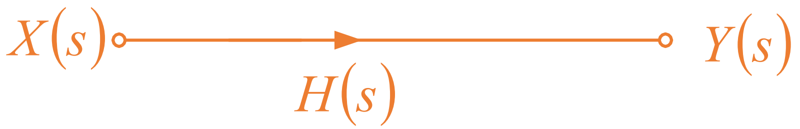
不接触环路： 两环路之间没有任何公共结点。

前向通路： 从输入结点（源点）到输出结点（阱点）方向的通路上，通过任何结点不多于一次的全部路径。

前向通路增益： 前向通路中，各支路转移函数的乘积。

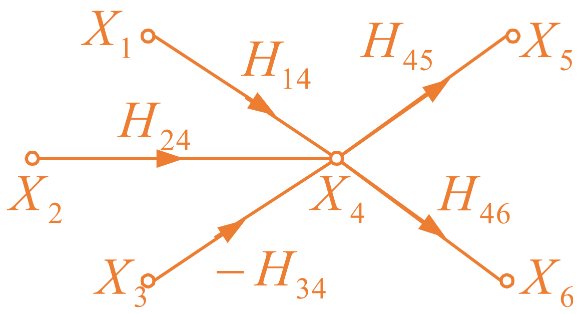
4、信号流图的性质

（1）支路表示了一个信号与另一信号的函数关系，信号只能沿着支路上的箭头方向通过。



$$Y(s)=H(s)X(s)$$

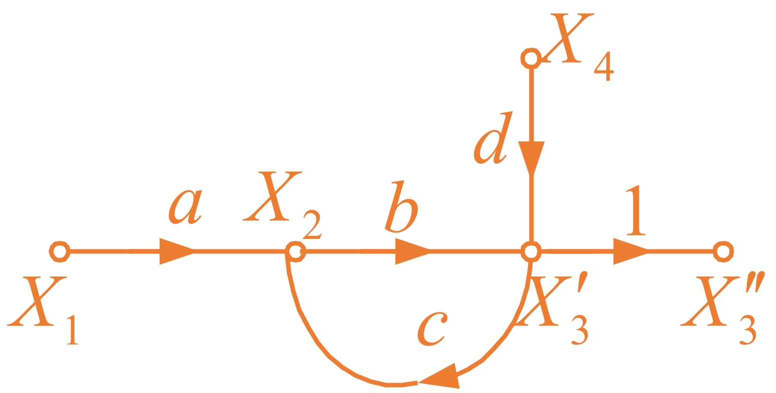
（2）结点可以把所有输入支路的信号叠加，并把总和信号传送到所有输出支路。



例如结点 X_4

$$X_4=H_{14}X_1+H_{24}X_2-H_{34}X_3$$

（3）具有输入和输出支路的混合结点，通过增加一个具有单传输的支路，可以把它变成输出结点来处理。



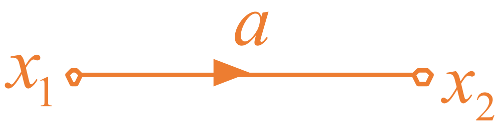
X_3'和X_3''实际上是一个结点。分成两个结点以后，是既有输入又有输出的混合结点；X_3'' 是只有输入的输出结点。

（4）流图转置以后，其转移函数保持不变。所谓转置就是把流图中各支路的信号传输方向调转，同时把输入输出结点对换。

（5）给定系统，信号流图形式并不是唯一的。这是由于同一系统的方程可以表示成不同形式，因而可以画出不同的流图。

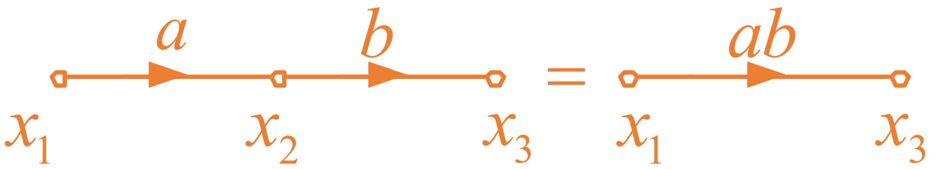
5、信号流图的代数运算

（1）有一个输入支路的结点值等于输入信号乘以支路增益。

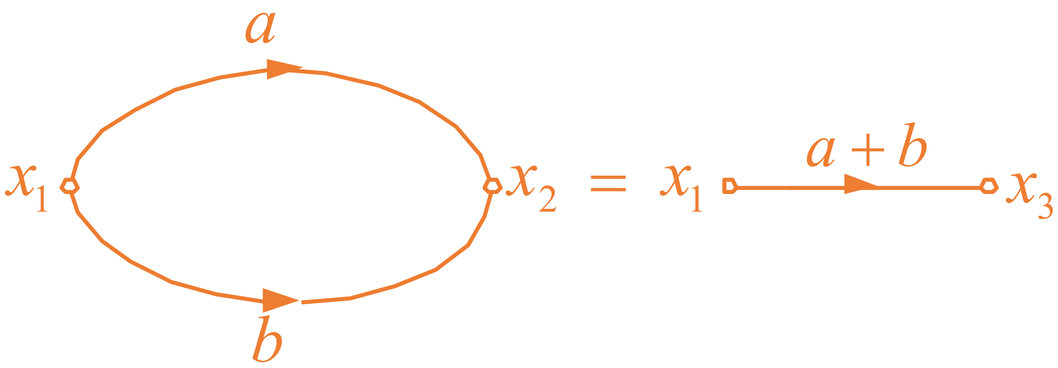


$x_2 = ax_1$

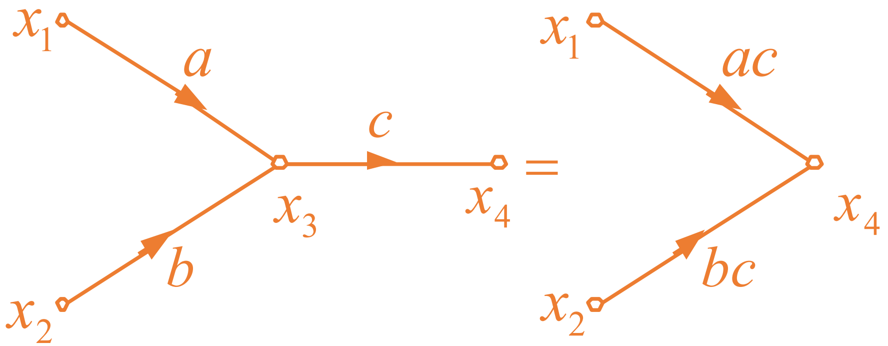
（2）**串联支路的合并**：总增益等于各支路增益的乘积。



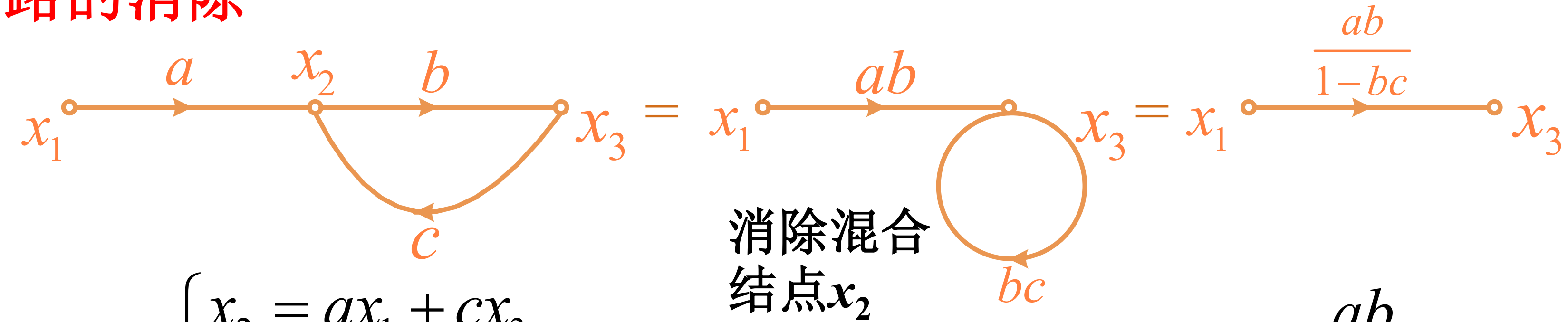
（3）**并联支路的合并**：并联相加



（4）混合结点的消除



（5）环路的消除



因为 $\begin{cases} x_2 = ax_1 + cx_3 \\ x_3 = bx_2 \end{cases} \Rightarrow x_3 = abx_1 + bcx_3 \Rightarrow x_3 = \dfrac{ab}{1-bc}x_1$

总结：可以通过如下步骤简化信号流图，从而求得系统函数。

① 串联支路合并，减少结点；② 并联支路合并，减少支路；

③ 消除环路。

（6）信号流图的**梅森增益公式**

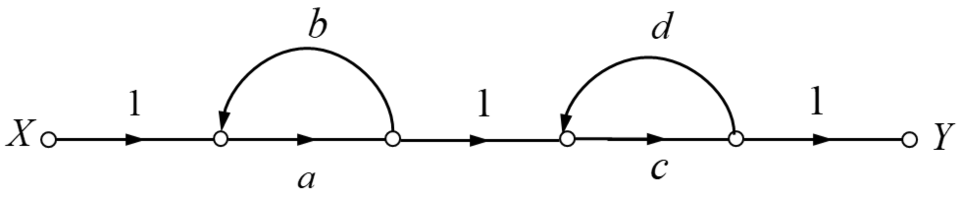
$$H=\frac{1}{\Delta}\sum_k g_k\Delta_k$$

式中：Δ——流图的**特征行列式**。

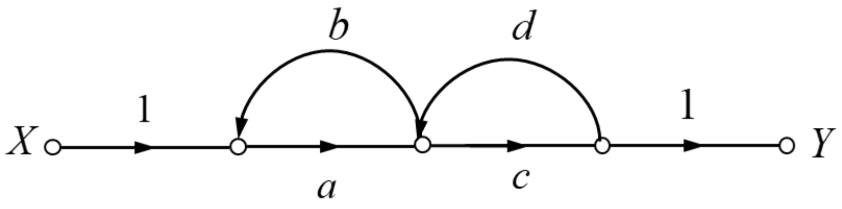
$$\Delta = 1-(\text{所有不同环路增益之和}) + (\text{每两个互不接触环路增益乘积之和})$$
$$-(\text{每三个互不接触环路增益乘积之和})+\ldots\ldots$$
$$=1-\sum_a L_a+\sum_{b,c} L_bL_c-\sum_{d,e,f} L_dL_eL_f+\ldots\ldots$$

k表示由源点到阱点之间第k条前向通路的标号。
g_k表示由源点到阱点之间的第k条**前向通路**的**增益**。
Δ_k称为对于第k条**前向通路**特征行列式的**余因子**。它是除去与k条前向通路相接触的环路外，余下的特征行列式（在Δ式中只留下与该通路不接触者，**如果该通路与各环路都接触则Δ_k=1**）。

例11-1：利用梅森公式求下面两个流图的转移函数。



(a)



(b)

解：

（1）图(a)包括两个互不接触的环路，其增益分别为：

$$L_1: ab; L_2: cd;$$

二者的乘积为***abcd***，由此求得特征行列式

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 + L_1 L_2 = 1 - ab - cd + abcd$$

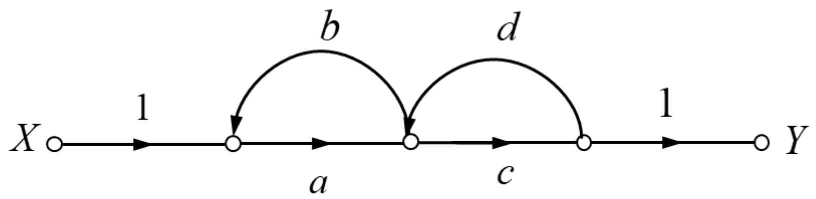
前向通路只有一条　　$g_1 = ac, \Delta_1 = 1$

代入梅森公式后求得

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{1}{\Delta}\sum_k g_k \Delta_k = \frac{ac}{1 - ab - cd + abcd}$$

（2）图（b）中的两个环路与图(a)相同，但二者互相接触，因而有特征行列式为

$$\Delta = 1 - ab - cd$$



(b)

前向通路的情况与前者完全相同。最后求得

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{ac}{1 - ab - cd}$$

作业

基础题：11-28，11-30。
加强题：11-32。

12.1 引言

- 前面几章讨论的信号与系统的各种分析方法属于输入-输出描述法(input-output description)，又称端口分析法或外部法。它强调用系统的输入、输出变量之间的关系来描述系统的特性。
- 输入-输出法当系统的数学模型（ n 阶微分或差分方程）建立以后，就不再关心系统内部的情况，而只考虑系统的时间特性和频率特性（系统函数）对输出物理量的影响。经典的线性系统理论不能全面揭示系统内部特性，也不易有效处理多输入-多输出系统。这种分析法适用于较为简单的系统（如单输入-单输出系统）。
- 要分析非线性、时变、多输入-多输出等复杂系统，可采用状态变量描述法(state variable description)，或内部法。它用状态变量描述系统内部变量的特性，并通过状态变量将系统的输入和输出变量联系起来，用于描述系统的外部特性。

- 状态（state）：系统在初始时刻t_0的状态是最少数目的一组变量（状态变量）。只要知道$t= t_0$时刻的这组变量和$t≥t_0$时的输入，就能完全确定系统在任何时间$t≥t_0$的状态和输出。例如，t_0时刻的状态通常指电容元件上电压$u_c(t_0)$和电感元件 上电流$i_L(t_0)$。n阶系统有n个初始状态。
- 状态变量（state variable)：用来描述系统状态的数目最少的一组变量。实质上反映了系统内部储能状态的变化。
- 状态矢量 (state vector)：能够完全描述一个系统行为的 k 个状态变量，可以看成一个矢量的各个分量的坐标。
- 状态空间（state space)：状态矢量所在的空间。状态矢量所包含的状态变量的个数就是状态空间的维数，也称系统的复杂度阶数(order of complexity)，简称系统的阶数。
- 状态轨迹 (state orbit)：在状态空间中，系统在任意时刻的状态都可以用状态空间中的一点(端点)来表示。状态矢量的端点随时间变化而描述的路径，称为状态轨迹。

状态变量分析法的主要优点：

(1)便于研究系统内部的物理量的变化规律，这些物理量可以用状态矢量的一个分量表示出来。

(2)适用于线性时不变的单输入-单输出系统，也适用于非线性、时变、多输入-多输出系统特性的描述。

(3)系统的状态变量分析法与系统的复杂程度没有关系，复杂系统和简单系统的数学模型相似，都表示为一些状态变量的线性组合。

(4)状态方程都是一阶微分或差分方程，便于计算机分析计算。

(5)状态方程的主要参数鲜明的表征了系统的关键性能，可用于分析系统的可控制性、可观测性、稳定性。

12.2.1 由电路直接列写状态方程

（1）选择状态变量。通常选择电路中独立的电感电流与独立的电容电压作为状态变量。

（2）列方程。列含有独立电感支路的回路电压方程，含独立电容支路的节点电流方程。

（3）整理方程。将所获方程整理成标准形式。

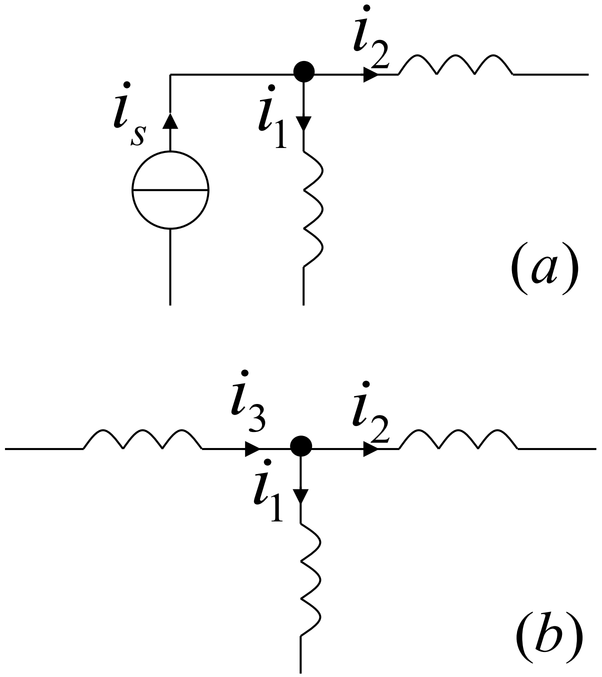
图示的电路(a)和(b)中分别有( )个独立的电感电流（假设电流源的电流已知）。

A 2和3

B 2和2

C 1和2

D 1和1



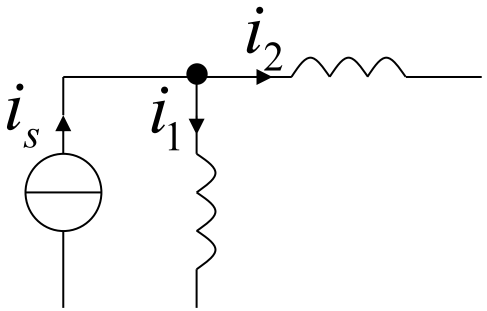
提交

12.2 连续时间系统状态方程的建立

所谓“独立”的电感电流是指各电流不能互相完全表示的电感电流。

图（a）中由于电流源的约束，两个电感电流只有一个是独立的。

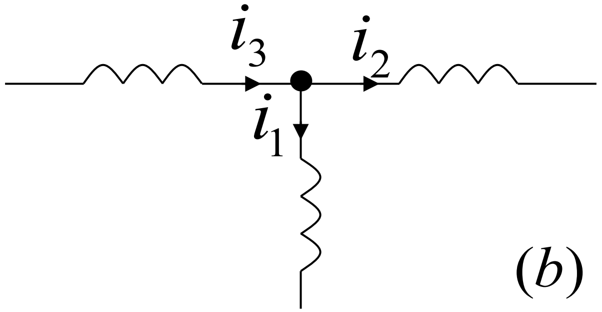
$$i_1 + i_2 = i_s$$



(a)

图（b）中，三个电感电流有两个是独立的。

$$i_1 + i_2 = i_3$$

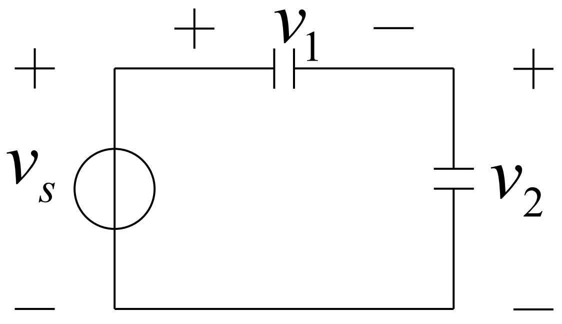


(b)

所谓“独立”的电容电压，是不能完全互相表示的电容电压。

图（a）中，由于电压源的约束，两个电容电压只有一个是独立的。

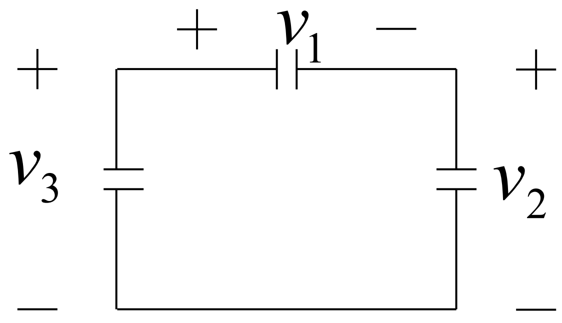
$$v_1 + v_2 = v_s$$



(a)

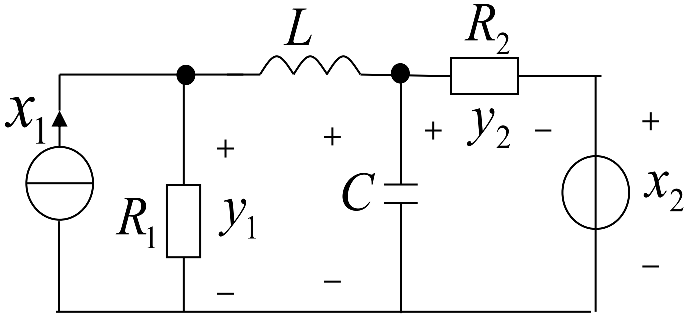
图（b）中，三个电容电压只有两个是独立的。

$$v_1 + v_2 = v_3$$



(b)

例12-1：电路如图所示。分别以电流源的电流和电压源的电压为输入，以两电阻上的电压为输出，试列出电路的状态方程与输出方程。



解：此为2×2的系统。

（1）选择电感电流与电容电压为状态变量。

$$\lambda_1(t)=i_L(t)$$

$$\lambda_2(t)=v_c(t)$$

（2）列状态方程。

列包含电流源、电感和电容的回路电压方程，

$$L\frac{di_L(t)}{dt}=[x_1(t)-i_L(t)]R_1-v_c(t)$$

列包含电容支路的节点电流方程，

$$C\frac{dv_c(t)}{dt}=[x_2(t)-v_c(t)]/R_2+i_L(t)$$

（3）整理方程。

$$L\frac{di_L(t)}{dt}=[x_1(t)-i_L(t)]R_1-v_c(t)=-R_1i_L(t)-v_c(t)+R_1x_1(t)$$

$$\therefore\frac{di_L(t)}{dt}=-\frac{R_1}{L}i_L(t)-\frac{1}{L}v_c(t)+\frac{R_1}{L}x_1(t)$$

$$C\frac{dv_c(t)}{dt}=[x_2(t)-v_c(t)]/R_2+i_L(t)=i_L(t)-\frac{1}{R_2}v_c(t)+\frac{1}{R_2}x_2(t)$$

$$\therefore\frac{dv_c(t)}{dt}=\frac{1}{C}i_L(t)-\frac{1}{R_2C}v_c(t)+\frac{1}{R_2C}x_2(t)$$

写成标准形式：

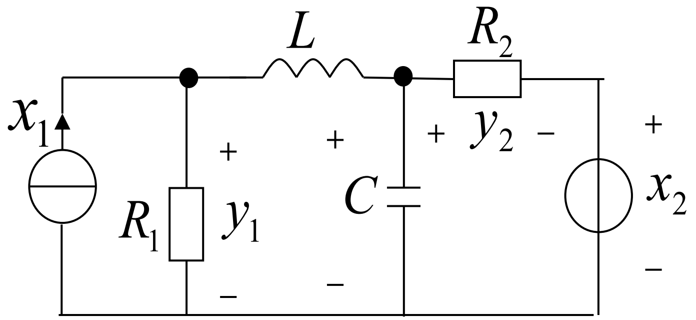
$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt}=-\frac{R_1}{L}\lambda_1(t)-\frac{1}{L}\lambda_2(t)+\frac{R_1}{L}x_1(t)$$

$$\frac{d\lambda_2(t)}{dt}=\frac{1}{C}\lambda_1(t)-\frac{1}{R_2C}\lambda_2(t)+\frac{1}{R_2C}x_2(t)$$

写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix}\frac{d\lambda_1(t)}{dt}\\ \frac{d\lambda_2(t)}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{R_1}{L} & 0\\ 0 & \frac{1}{R_2C}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}$$

（4）列写输出方程。



$$y_1(t)=[x_1(t)-i_L(t)]R_1$$

$$y_2(t)=v_c(t)-x_2(t)$$

于是

$$y_1(t)=-R_1 i_L(t)+R_1 x_1(t)=-R_1\lambda_1(t)+R_1 x_1(t)$$

$$y_2(t)=\lambda_2(t)-x_2(t)$$

写成矩阵式

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

12.2.2 由输入-输出描述列写状态方程

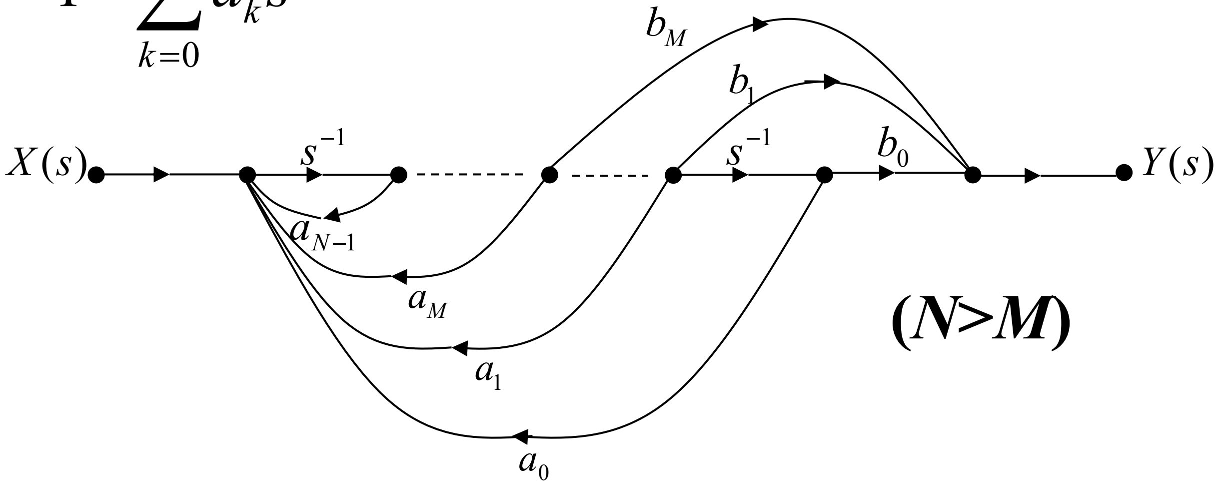
1、相变量法

此时系统的微分方程与系统函数形式如下：

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N}-\sum_{k=0}^{N-1}a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{r=0}^{M}b_r\frac{d^r x(t)}{dt^r}$$

$$H(s)=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_r s^r}{s^N-\sum_{k=0}^{N-1}a_k s^k}=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_r s^{r-N}}{1-\sum_{k=0}^{N-1}a_k s^{k-N}}$$

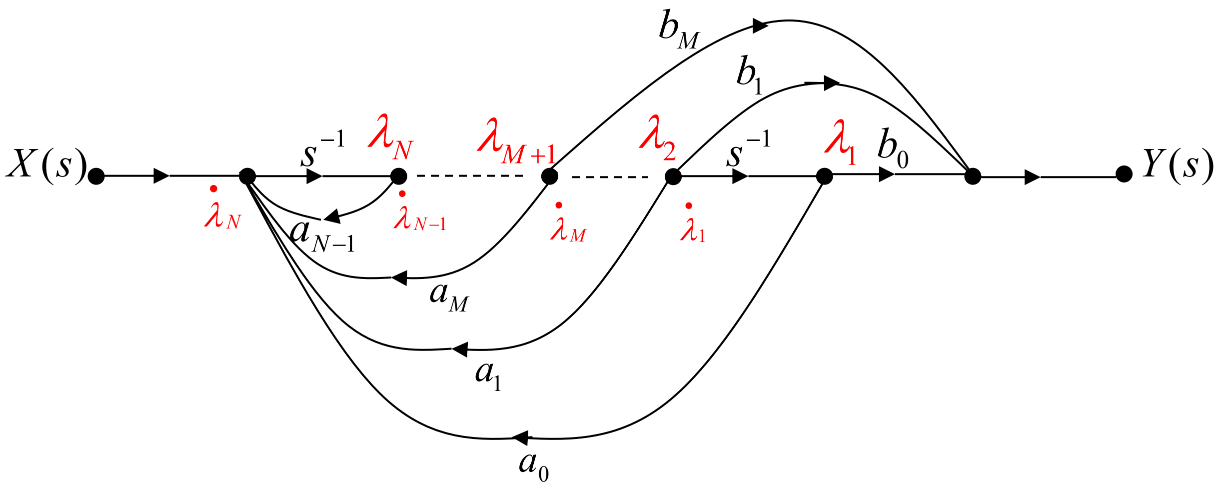
系统的信号流图形式：



(N>M)

（1）在信号流图中，由输出至输入方向，选择积分器的输出为状态变量；

（2）列写状态方程；



$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt} = \lambda_2(t)$$

$$\frac{d\lambda_2(t)}{dt} = \lambda_3(t)$$

$$\cdots$$

$$\frac{d\lambda_{k-1}(t)}{dt} = \lambda_k(t)$$

$$\cdots$$

$$\frac{d\lambda_N(t)}{dt} = a_0\lambda_1(t) + a_1\lambda_2(t) + \ldots + a_{N-1}\lambda_N(t) + x(t)$$

写成矩阵式

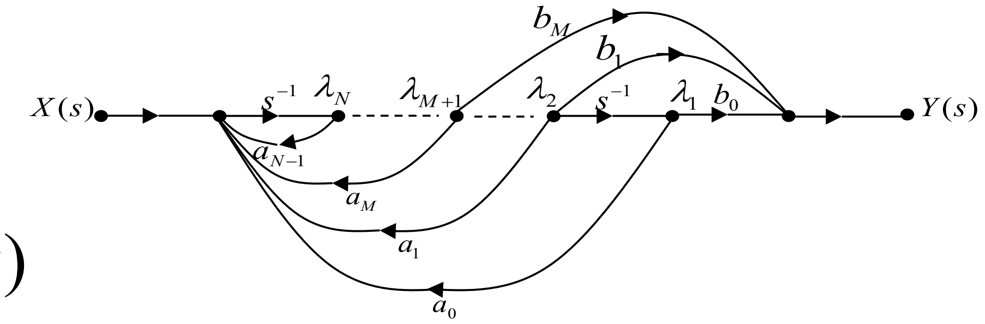
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{d\lambda_1(t)}{dt} \\ \frac{d\lambda_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\lambda_{N-1}(t)}{dt} \\ \frac{d\lambda_N(t)}{dt} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\lambda}'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & & \cdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{N-2} & a_{N-1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_{N-1}(t) \\ \lambda_N(t) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\lambda}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} [x(t)]$$

状态方程: $\boxed{\boldsymbol{\lambda}'(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t)}$

A矩阵第N行由输入-输出方程左边的系数乘以-1并倒序排列而成, 平行于主对角线上方的一位元素均为1，其余位置是0。

B矩阵是列阵，最后一位元素是1，其余全是0。

12.2 连续时间系统状态方程的建立



输出方程： $\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{D}\mathbf{x}(t)$

根据信号流图，**输出方程**一般情况下（***N>M***）为

$$y(t)=b_0\lambda_1(t)+b_1\lambda_2(t)+\ldots+b_{M-1}\lambda_M(t)+b_M\lambda_{M+1}(t)$$

写成矩阵式

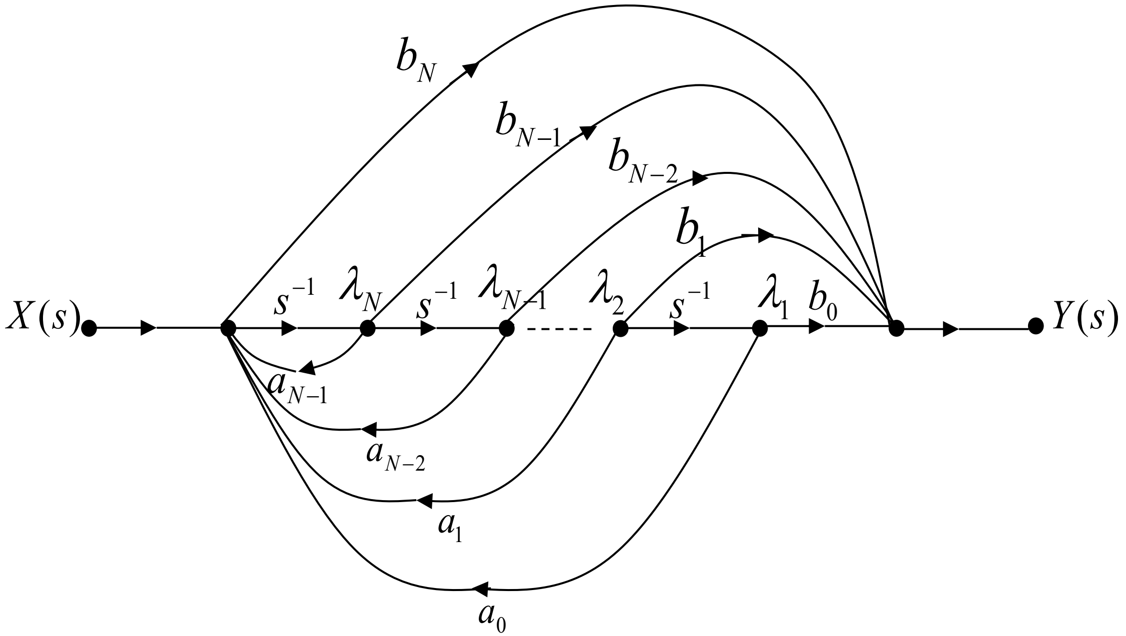
$$y(t)=\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{M-1} & b_M & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ \ldots\\ \lambda_M(t)\\ \lambda_{M+1}(t)\\ \ldots\\ \lambda_N(t)\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=[b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{M-1} \quad b_M \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

D矩阵等于0

C矩阵是行向量，**前*M*+1个元素由输入-输出方程右边的系数倒序排列而成**，其他元素为0。

如果$N=M$，系统的信号流图为：



此时系统的状态方程与前面的相同，
但是输出方程C、D矩阵与前不同。

$$y(t)=b_0\lambda_1(t)+b_1\lambda_2(t)+\dots$$
$$+b_{N-1}\lambda_N(t)+b_N\frac{d\lambda_N(t)}{dt}$$

$$\because \frac{d\lambda_N(t)}{dt}=a_0\lambda_1(t)+a_1\lambda_2(t)+\dots+a_{N-1}\lambda_N(t)+x(t)$$

$$\therefore y(t)=(b_0+b_Na_0)\lambda_1(t)+(b_1+b_Na_1)\lambda_2(t)+\dots+(b_{N-1}+b_Na_{N-1})\lambda_N(t)+b_Nx(t)$$

此时的C矩阵为 $\mathbf{C}=\left[(b_0+b_Na_0)\quad (b_1+b_Na_1)\quad \dots\quad (b_k+b_Na_k)\quad \dots\quad (b_{N-1}+b_Na_{N-1})\right]$

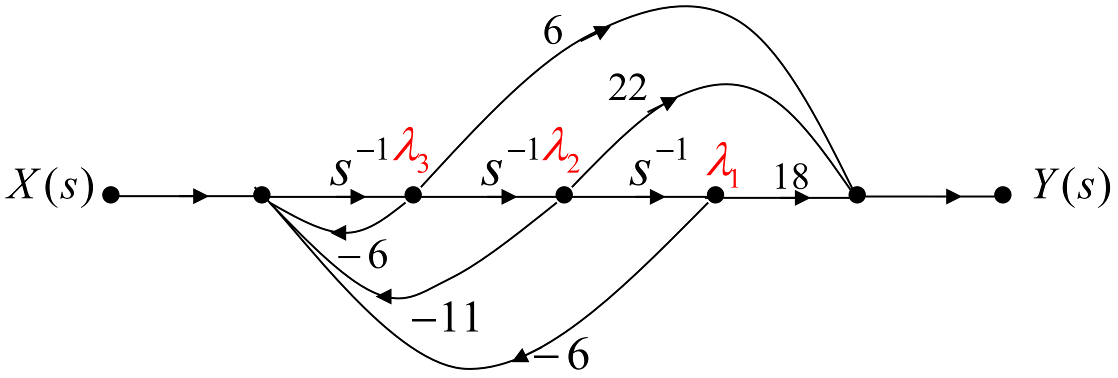
此时的D矩阵为 $\mathbf{D}=b_N$

12.2 连续时间系统状态方程的建立

例12-2：已知系统函数如下，试用相变量法列出系统的状态方程与输出方程。

$$H(s)=\frac{6s^2+22s+18}{s^3+6s^2+11s+6}$$

解：$$H(s)=\frac{6s^{-1}+22s^{-2}+18s^{-3}}{1-(-6s^{-1}-11s^{-2}-6s^{-3})}$$



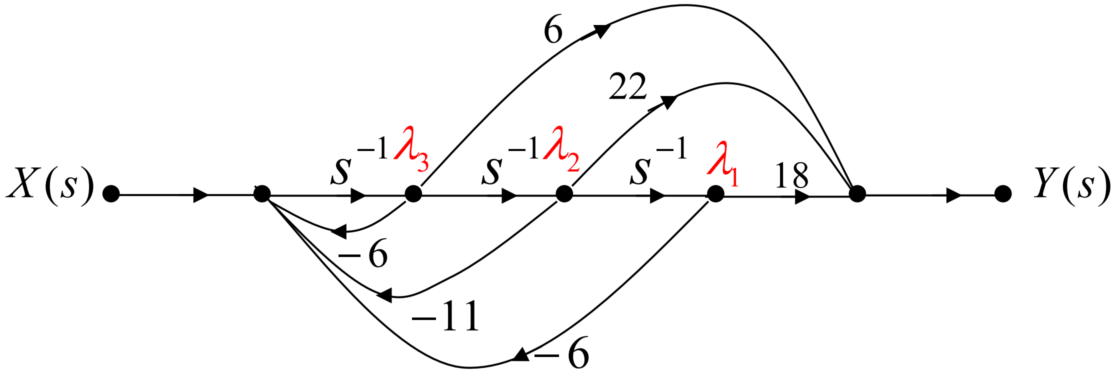
作系统的信号流图，从输出端至输入端，顺序选择积分器的输出为状态变量。

列写状态方程：

$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt}=\lambda_2(t) \qquad \frac{d\lambda_2(t)}{dt}=\lambda_3(t)$$

$$\frac{d\lambda_3(t)}{dt}=-6\lambda_1(t)-11\lambda_2(t)-6\lambda_3(t)+x(t)$$

矩阵形式的状态方程：



$$\begin{pmatrix} \frac{d\lambda_1(t)}{dt} \\ \frac{d\lambda_2(t)}{dt} \\ \frac{d\lambda_3(t)}{dt} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} x(t)$$

系统的输出方程为 $y(t) = 18\lambda_1(t) + 22\lambda_2(t) + 6\lambda_3(t)$

输出方程矩阵形式为

$$y(t) = \begin{pmatrix} 18 & 22 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{pmatrix}$$

方程中的矩阵 $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 18 & 22 & 6 \end{pmatrix}$ $\mathbf{D} = 0$

注：根据前面的分析，有了系统方程或系统函数，无需作信号流图就可直接写出以上矩阵和方程。

已知系统函数 $H(s)=\dfrac{2s+6}{s^2+3s+2}$，系统的状态方程矩阵为

A $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

B $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

C $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

D $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$

Submit

例12-3：已知系统函数如下，试用相变量法列出系统的状态方程与输出方程。

$$H_1(s)=\frac{2s+6}{s^2+3s+2} \qquad H_2(s)=\frac{s^2+2s+6}{s^2+3s+2}$$

解：根据相变量法，可直接写出方程的矩阵

（1）$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}=0$

（2）**A**、**B**矩阵与上相同

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 6-2 & 2-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}=1$$

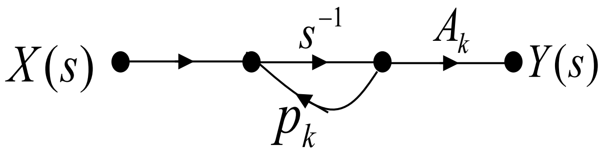
12.2 连续时间系统状态方程的建立

2、对角线法

将系统函数部分分式，表示成一阶分式之和

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-p_k}$$

每一个部分分式对应着一个一阶系统。一阶系统的信号流图如下：



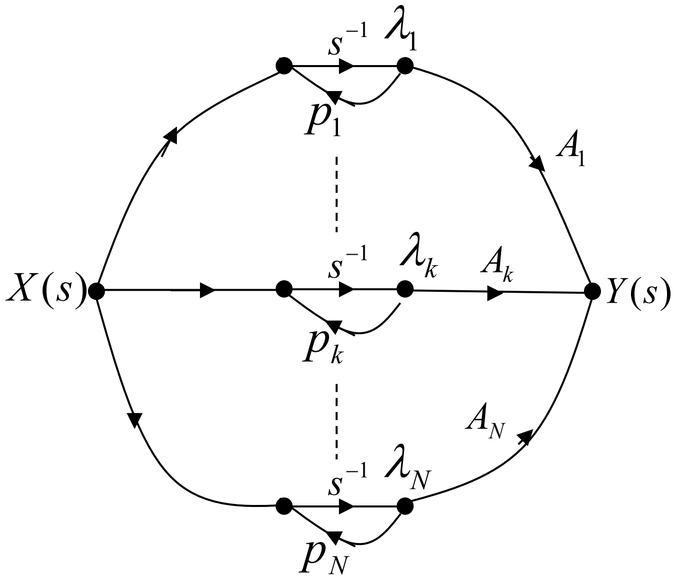
系统的信号流图就是这些一阶系统的并联。

取各积分器的输出为状态变量，可列状态方程：

$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt}=p_1\lambda_1(t)+x(t)$$

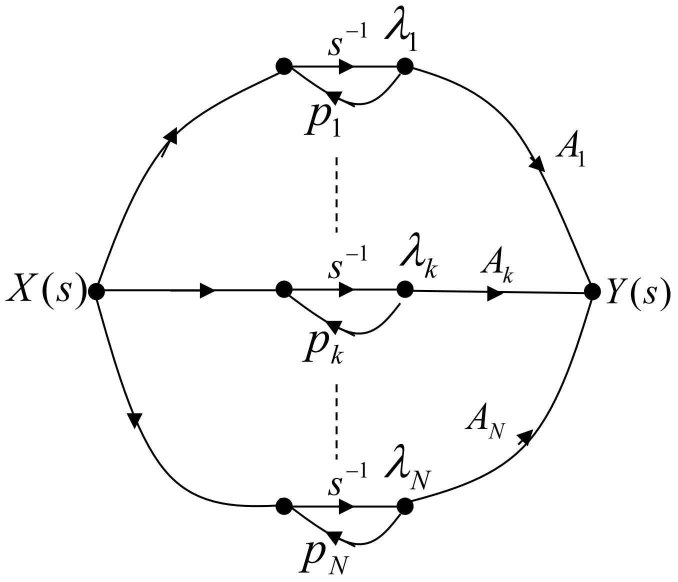
$$\cdots$$

$$\frac{d\lambda_N(t)}{dt}=p_N\lambda_N(t)+x(t)$$



写成矩阵式

$$\begin{pmatrix} \frac{d\lambda_1(t)}{dt} \\ \frac{d\lambda_2(t)}{dt} \\ \cdots \\ \frac{d\lambda_{N-1}(t)}{dt} \\ \frac{d\lambda_N(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & & & & \\ & \cdots & & 0 & \\ & & p_k & & \\ & 0 & & \cdots & \\ & & & & p_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \cdots \\ \lambda_{N-1}(t) \\ \lambda_N(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} [x(t)]$$

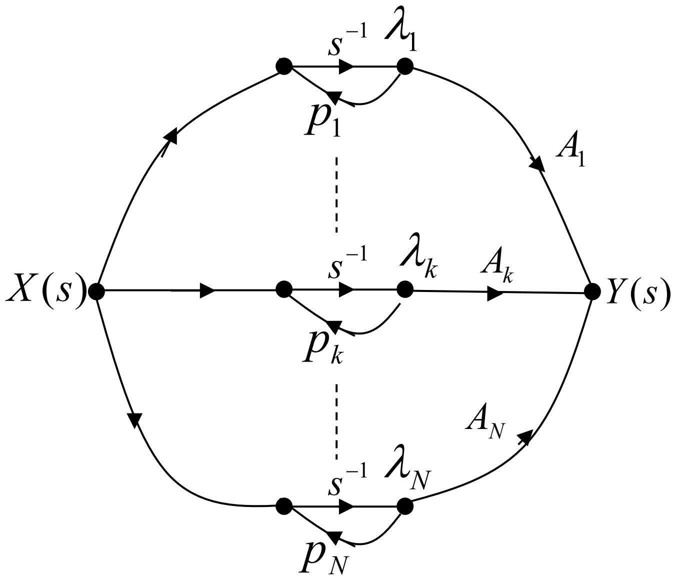


A矩阵为对角阵形式的状态方程在**控制理论**研究中有重要意义。

系统的**输出方程**为

$$y(t)=A_1\lambda_1(t)+\ldots+A_k\lambda_k(t)+\ldots+A_N\lambda_N(t)$$

$$y(t)=\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_k & \ldots & A_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \ldots \\ \lambda_k(t) \\ \ldots \\ \lambda_N(t) \end{pmatrix}$$



例12-4：已知例12-2中的系统函数，试用对角线法列出系统的状态方程与输出方程。

$$H(s)=\frac{6s^2+22s+18}{s^3+6s^2+11s+6}$$

解：将系统函数进行部分分式展开，

$$H(s)=\frac{6s^2+22s+18}{s^3+6s^2+11s+6}=\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}+\frac{3}{s+3}$$

于是，方程中的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{D}=0$$

状态方程： $\boldsymbol{\lambda}'(t)=\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{B}\mathbf{x}(t)$

输出方程： $\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{D}\mathbf{x}(t)$

12.3.1 矢量的微积分与拉氏变换

设有时间矢量$\boldsymbol{\lambda}(t)$，是一个列矢量：$\boldsymbol{\lambda}(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ \cdots\\ \lambda_N(t)\end{pmatrix}$

则

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{d\lambda_1(t)}{dt}\\ \dfrac{d\lambda_2(t)}{dt}\\ \cdots\\ \dfrac{d\lambda_N(t)}{dt}\end{pmatrix}\qquad \int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{\lambda}(\tau)d\tau=\begin{pmatrix}\int_{-\infty}^{t}\lambda_1(\tau)d\tau\\ \int_{-\infty}^{t}\lambda_2(\tau)d\tau\\ \cdots\\ \int_{-\infty}^{t}\lambda_N(\tau)d\tau\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(s)=\mathrm{LT}\{\boldsymbol{\lambda}(t)\}=\int_{0^-}^{\infty}\boldsymbol{\lambda}(t)e^{-st}dt=\begin{pmatrix}\int_{0^-}^{\infty}\lambda_1(t)e^{-st}dt\\ \int_{0^-}^{\infty}\lambda_2(t)e^{-st}dt\\ \cdots\\ \int_{0^-}^{\infty}\lambda_N(t)e^{-st}dt\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda_1(s)\\ \Lambda_2(s)\\ \cdots\\ \Lambda_N(s)\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{LT}\left\{\frac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}(t)\right\}=s\boldsymbol{\Lambda}(s)-\boldsymbol{\lambda}(0^-)=s\begin{pmatrix}\Lambda_1(s)\\ \Lambda_2(s)\\ \cdots\\ \Lambda_N(s)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda_1(0^-)\\ \lambda_2(0^-)\\ \cdots\\ \lambda_N(0^-)\end{pmatrix}$$

12.3.2 状态方程的拉氏变换解法

1、状态方程与输出方程的解

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}(t)}{dt}=\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{B}\mathbf{x}(t)$$

方程两边同求拉氏变换

$$s\boldsymbol{\Lambda}(s)-\boldsymbol{\lambda}(0^-)=\mathbf{A}\boldsymbol{\Lambda}(s)+\mathbf{B}\mathbf{X}(s)$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\boldsymbol{\Lambda}(s)=\boldsymbol{\lambda}(0^-)+\mathbf{B}\mathbf{X}(s)$$

状态变量的拉氏变换：$\boxed{\boldsymbol{\Lambda}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(s)}$

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\boldsymbol{\Lambda}(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(s)\}$$

$$=\boxed{\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)\}}_{\text{零输入分量}}+\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\}*\mathbf{x}(t)}_{\text{零状态分量}}}$$

$\boxed{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}}$---系统的特征矩阵　$|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|$---系统的特征行列式

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{D}\mathbf{x}(t)$$

输出变量的拉氏变换

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}(s)+\mathbf{D}\mathbf{X}(s)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Lambda}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(s)}$$

$$\boxed{\mathbf{Y}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{X}(s)}$$

于是

$$\mathbf{y}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{Y}(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{X}(s)\right\}$$

$$=\boxed{\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)\right\}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}\right\}*\mathbf{x}(t)}_{\text{零状态响应}}}$$

$\boxed{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}}$---系统的特征矩阵 $|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|$---系统的特征行列式

例12-5：已知系统状态方程的系数矩阵、起始条件和输入，试求状态变量。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{\lambda}(0^-)=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\qquad x(t)=u(t)$$

解：求系统的特征矩阵

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\left[\begin{pmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix}s-1 & 0\\ -1 & s+3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}s+3 & 0\\ 1 & s-1\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}s-1 & 0\\ -1 & s+3\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\begin{pmatrix}s+3 & 0\\ 1 & s-1\end{pmatrix}}{(s-1)(s+3)}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s-1} & 0\\ \dfrac{1}{(s-1)(s+3)} & \dfrac{1}{s+3}\end{pmatrix}$$

状态变量的零输入分量

$$\mathbf{\Lambda}_{zi}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)=\begin{pmatrix}\frac{1}{s-1} & 0\\ \frac{1}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{s+3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{s-1}\\ \frac{2s-1}{(s-1)(s+3)}\end{pmatrix}$$

状态变量的零状态分量

$$\mathbf{\Lambda}_{zs}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(s)=\begin{pmatrix}\frac{1}{s-1} & 0\\ \frac{1}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{s+3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{s-1}\\ \frac{1}{(s-1)(s+3)}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{s}=\begin{pmatrix}\frac{1}{s(s-1)}\\ \frac{1}{s(s-1)(s+3)}\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{\Lambda}(s)=\boldsymbol{\Lambda}_{zi}(s)+\boldsymbol{\Lambda}_{zs}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s-1}\\ \dfrac{2s-1}{(s-1)(s+3)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s(s-1)}\\ \dfrac{1}{s(s-1)(s+3)}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s-1}\\ \dfrac{\frac{1}{4}}{s-1}+\dfrac{\frac{7}{4}}{s+3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{s}+\dfrac{1}{s-1}\\ \dfrac{-1}{s}+\dfrac{\frac{1}{4}}{s-1}+\dfrac{\frac{7}{4}}{s+3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{s}+\dfrac{2}{s-1}\\ \dfrac{-\frac{1}{3}}{s}+\dfrac{\frac{2}{4}}{s-1}+\dfrac{\frac{11}{6}}{s+3}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\begin{pmatrix}-1+2e^{t}\\ -\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}e^{t}+\dfrac{11}{6}e^{-3t}\end{pmatrix}u(t)$$

2、状态转移矩阵(State Transition Matrix)

由前面的分析可知，系统的状态变量的拉氏变换为

$$\mathbf{\Lambda}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}[\boldsymbol{\lambda}(0^-)+\mathbf{BX}(s)]$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{\Lambda}(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}*\mathcal{L}^{-1}\{\boldsymbol{\lambda}(0^-)+\mathbf{BX}(s)\}$$

状态转移（过渡）矩阵：
特征矩阵的拉氏逆变换。

$$\boxed{\mathbf{\Phi}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}}$$

状态转移矩阵把系统的起始状态和激励的作用转换成系统在$t>0$后的任意时刻的状态。

例12-6： 已知系统的微分方程，试列出其状态方程和输出方程，并求其状态转移矩阵。

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+3x(t)$$

解： 根据相变量法，可列出状态方程。

$$\boldsymbol{\lambda}'(t)=\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{B}\mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\text{特征矩阵}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{vmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{pmatrix}}{s^2+3s+2}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2}\\ \dfrac{-2}{s^2+3s+2} & \dfrac{s}{s^2+3s+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\\ \dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{pmatrix}$$

输出方程: $\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{D}\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} b_0 & b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}=0$$

状态转移矩阵:

$$\mathbf{\Phi}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}=\begin{pmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{pmatrix}u(t)$$

比较以上系统方程与求解状态转移矩阵对应的特征行列式

$$\begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix}=s^2+3s+2$$

特征行列式恰好与系统方程对应的特征多项式相同，一般情况下也是系统函数的分母多项式，它的根是系统的特征根。

3、求系统（转移）函数

由前面分析可知，系统的输出矢量的拉氏变换为

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\lambda(0^-) + [\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{X}(s)$$

其中零状态分量是

$$\mathbf{Y}_{zs}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{X}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{X}(s)$$

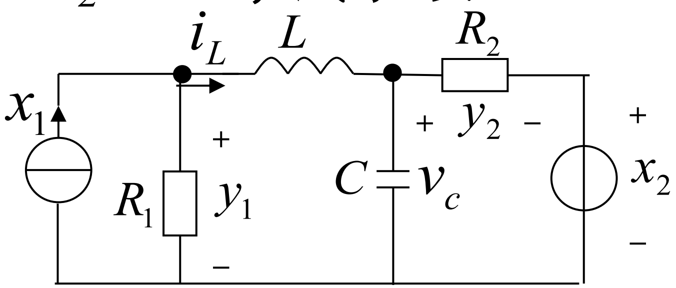
$$\boxed{\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}} \longleftarrow$$ 系统（转移）函数

对于单输入-单输出的系统， **H(s)是标量。将例12-6中求得的矩阵A, B, C, D代入上述公式，可验证H(s)与直接从微分方程得到的系统函数相同。**

对于有m个输入，l个输出的系统，**H(s)是一个$l \times m$ 的矩阵，第i行第j列为**

$$H_{ij}(s) = \left.\frac{\text{第}i\text{个输出对第}j\text{个输入的响应}}{\text{第}j\text{个输入}}\right|_{\text{其它输入为零}}$$

例12-7： 例12-1所示电路如图，设 $L=1H, C=1F, R_1=R_2=1\Omega$，试求该2×2系统的转移函数矩阵。



解： 由例12-1已知

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-\dfrac{R_1}{L} & -\dfrac{1}{L}\\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{R_2C}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\dfrac{R_1}{L} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{R_2C}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-R_1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}R_1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

系统的特征矩阵

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{pmatrix}s+1 & 1\\ -1 & s+1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}s+1 & -1\\ 1 & s+1\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}s+1 & 1\\ -1 & s+1\end{vmatrix}}=\begin{pmatrix}\dfrac{s+1}{s^2+2s+2} & \dfrac{-1}{s^2+2s+2}\\ \dfrac{1}{s^2+2s+2} & \dfrac{s+1}{s^2+2s+2}\end{pmatrix}$$

于是，系统转移函数矩阵

$$\mathbf{H}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{s+1}{s^2+2s+2} & \frac{-1}{s^2+2s+2}\\ \frac{1}{s^2+2s+2} & \frac{s+1}{s^2+2s+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{-(s+1)}{s^2+2s+2} & \frac{1}{s^2+2s+2}\\ \frac{1}{s^2+2s+2} & \frac{s+1}{s^2+2s+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{-(s+1)}{s^2+2s+2} & \frac{1}{s^2+2s+2}\\ \frac{1}{s^2+2s+2} & \frac{s+1}{s^2+2s+2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{s^2+s+1}{s^2+2s+2} & \frac{1}{s^2+2s+2}\\ \frac{1}{s^2+2s+2} & -\frac{s^2+s+1}{s^2+2s+2}\end{pmatrix}$$

12.3.3 状态方程的时域解法

由前面拉氏变换解中已知，状态方程的解为

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}\boldsymbol{\lambda}(0^{-})+\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}\mathbf{B}*\mathbf{x}(t)$$

式中的状态转移矩阵表示为矩阵指数

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}=e^{\mathbf{A}t}}$$

于是以上状态方程的解

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda}(t)=e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{\lambda}(0^{-})+e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}*\mathbf{x}(t)}$$

状态方程的解或输出方程的解都由零输入解和零状态解相加组成，两部分的变化规律都与矩阵e^{At}有关，因此e^{At}反映了系统状态变化的本质，称为状态转移矩阵。

显然，求解以上结果的关键是求状态转移矩阵。

1、状态转移矩阵的时域求解

在标量情况下，以自然数为底的指数用泰勒级数展开

$$e^{at}=1+(at)+\frac{1}{2!}(at)^2+\ldots+\frac{1}{k!}(at)^k+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(at)^k$$

在矢量情况下，定义矩阵指数。设矩阵A为方阵

$$e^{\mathbf{A}t}=1+(\mathbf{A}t)+\frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2+\ldots+\frac{1}{k!}(\mathbf{A}t)^k+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k$$

矩阵指数有以下的性质：

(1) $e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t}=\mathbf{I}$　　(2) $e^{\mathbf{A}t}=[e^{-\mathbf{A}t}]^{-1}$　　(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$

根据凯莱—汉密尔顿定理，当A是一N阶方阵，则有

$$\mathbf{A}^k=b_0\mathbf{I}+b_1\mathbf{A}+b_2\mathbf{A}^2+\ldots+b_{N-1}\mathbf{A}^{N-1}=\sum_{i=0}^{N-1}b_i\mathbf{A}^i\quad(k\geq N)$$

将其代入泰勒级数展开式，对N阶方阵A，对应的指数矩阵

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t}=c_0\mathbf{I}+c_1\mathbf{A}+c_2\mathbf{A}^2+\ldots+c_{N-1}\mathbf{A}^{N-1}}$$（c_k是时间函数）

求解的方法与步骤：

(1) 解矩阵A的特征方程，求特征根；$\left|\alpha\mathbf{I}-\mathbf{A}\right|=0$

(2) 根据特征根，列方程组；若以上特征根均为单根，则

$$e^{\alpha_i t}=c_0+c_1\alpha_i+c_2\alpha_i^2+\ldots+c_{N-1}\alpha_i^{N-1}$$

若有特征根α_1为m重根，则对应的m个方程为

$$e^{\alpha_1 t}=c_0+c_1\alpha_1+c_2\alpha_1^2+\ldots+c_{N-1}\alpha_1^{N-1}\quad (i=1,2,\ldots N)$$

$$\frac{de^{\alpha t}}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_1}=te^{\alpha_1 t}=c_1+2c_2\alpha_1+\ldots+(N-1)c_{N-1}\alpha_1^{N-2}$$

$$\cdots$$

$$\frac{d^{m-1}e^{\alpha t}}{d\alpha^{m-1}}\Big|_{\alpha=\alpha_1}=t^{m-1}e^{\alpha_1 t}=(m-1)!c_{m-1}+m!c_m\alpha_1+\frac{(m+1)!}{2!}c_{m+1}\alpha_1^2+\ldots+\frac{(N-1)!}{(N-m)!}c_{N-1}\alpha_1^{N-m}$$

(3) 解方程，求出c_i；

(4) 做矩阵运算，求出 $e^{\mathbf{A}t}=c_0\mathbf{I}+c_1\mathbf{A}+c_2\mathbf{A}^2+\ldots+c_{N-1}\mathbf{A}^{N-1}$。

例12-8：例12-6中已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$，试用时域法求状态转移矩阵。

解：（1）求矩阵的特征根：

$$|\alpha\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\left|\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\alpha & -1\\ 2 & \alpha+3\end{vmatrix}$$

$$=\alpha^2+3\alpha+2=0 \quad \therefore \alpha_1=-1,\alpha_2=-2$$

（2）得到以下方程：

$$e^{-2t}=c_0-2c_1 \qquad e^{-t}=c_0-c_1$$

（3）解以上方程，得到：

$$c_0=2e^{-t}-e^{-2t} \qquad c_1=e^{-t}-e^{-2t}$$

（4）状态转移矩阵为：

$$e^{\mathbf{A}t}=c_0\mathbf{I}+c_1\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & 0\\ 0 & 2e^{-t}-e^{-2t}\end{pmatrix}+(e^{-t}-e^{-2t})\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & 0\\ 0 & 2e^{-t}-e^{-2t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -3e^{-t}+3e^{-2t}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}u(t)$$

2、输出方程的时域求解

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+\left[\mathbf{C}\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}\mathbf{B}+\mathbf{D}\delta(t)\right]*\mathbf{x}(t)$$

$$=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+\left[\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}+\mathbf{D}\delta(t)\right]*\mathbf{x}(t)$$

零输入解　　零状态解

例12-9：例12-6中，已知状态方程与输出方程的系数矩阵，以及初始条件，且输入$x(t)=\delta(t)$，试解输出方程。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\quad \mathbf{D}=0\quad \boldsymbol{\lambda}(0^-)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

解：由例12-6已知系统的状态转移矩阵 $e^{\mathbf{A}t}=\begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}u(t)$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+[\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}+\mathbf{D}\delta(t)\mathbf{I}]*\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right]*\delta(t)$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t}-e^{-2t}\\ -e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t}-e^{-2t}\\ -e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}\right]*\delta(t)\ =(2e^{-t}-e^{-2t})+(2e^{-t}-e^{-2t})*\delta(t)$$

$$=2(2e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

作业

基础题：12-1，12-5，12-6。
加强题：12-7，12-10。