上节内容

4.1 引言

4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

拉普拉斯变换（LT）

信号 $f(t)$，乘以衰减因子 $e^{-\sigma t}$(σ为任意实数)后容易满足绝对可积条件，依傅里叶变换定义：

$$F_1(\omega) = F\left[f(t)\cdot e^{-\sigma t}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(t)e^{-\sigma t}\right]\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-(\sigma+j\omega)t}dt = F(\sigma + j\omega)$$

令$\sigma + j\omega = s$，具有频率的量纲，称为复频率。

ω是振荡频率，σ控制衰减的速度。

则 $$\boxed{F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt}$$

$$f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$$

4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

拉氏变换对

双边拉氏变换

$$\begin{cases} F(s) = L\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt & \text{正变换} \\ f(t) = L^{-1}\left[F(s)\right] = \dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds & \text{逆变换} \end{cases}$$

记作：$f(t) \leftrightarrow F(s)$，$f(t)$称为原函数，$F(s)$称为象函数。

考虑到实际信号都是因果信号：

单边拉氏变换

所以 $$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

因为实际系统是因果的，信号总是在某个时刻才开始作用于系统，我们可以把这个时刻看作t=0；以上定义式中的积分的下限取0_-，考虑变换对冲激信号也是有效的。

本章及以后各章，若没有特别提到，均是指单边拉氏变换。

傅里叶变换 vs. 拉普拉斯变换

傅里叶变换	拉普拉斯变换
自变量ω是实数，有明确的物理意义--频率	自变量$s=\sigma+j\omega$是复数，其物理意义不明确，通常称其为复频率
信号的傅里叶变换反映了不同频率分量的振幅大小与起始相位的值，即信号的频谱。	信号的拉氏变换没有明确的物理意义。
系统单位冲激响应的傅里叶变换，称作系统的频率响应，它表示不同频率的正余弦信号作用于系统时，系统输出的幅度与相位随输入频率改变而改变的特性。	系统单位冲激响应的拉氏变换，称为系统的系统函数。它虽然较抽象，但是在表征系统特性及系统分析时起重要的作用。
主要应用于信号与系统的频率分析，如调制、滤波、抽样等的频谱分析。	主要应用于微分方程的求解、系统函数及其零极点分析等。

拉普拉斯变换法(LT)

- 优点：
  1. 将微积分方程求解问题转化为代数方程求解。
  2. 进行变换时，初始条件被自动计入，无需计算从0_-到0_+状态的跳变。

$$LT\left[f(t)\right]=F(s) \qquad LT\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=SF(s)-f(0_-)$$

- 缺点：

  物理概念不如傅氏变换那样清楚。

拉普拉斯变换可以看成是傅里叶变换的推广。它们之间在表达式和基本性质上有许多类似。

本章的学习方法：注意与傅里叶变换的对比，便于理解与记忆。

常用信号的拉氏变换

时域信号 (t>0)	S域信号
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

拉普拉斯变换的性质只适用于**因果信号，即满足*f*(*t*)= *f*(*t*)*u*(*t*)的信号*f*(*t*)**。

延时性（时移性）

设 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

$$f(t-t_0)u(t-t_0) \xleftrightarrow{LT} F(s)e^{-st_0}$$

注意：时移后的信号若为非因果信号不可用此性质！可结合课后习题**4-2**理解。

s域平移性（频移性）

设 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

$$f(t)e^{s_0 t} \xleftrightarrow{LT} F(s-s_0)$$

单选题 1分

设置

求$e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)u(t)$的拉氏变换。

A $\dfrac{\omega_0+\alpha}{s^2+\omega_0^2}$

B $\dfrac{s+\alpha}{s^2+\omega_0^2}$

C $\dfrac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$

D $\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$

提交

求$e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)u(t)$的拉氏变换。

解：

$$\sin(\omega_0 t)u(t)=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}\right)u(t)$$

$$e^{j\omega_0 t}u(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{s-j\omega_0}\qquad e^{-j\omega_0 t}u(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{s+j\omega_0}$$

$$\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega_0}-\frac{1}{s+j\omega_0}\right)=\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\therefore\quad \sin(\omega_0 t)u(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

利用频移特性，

$$e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)u(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$$

时域展缩性

如果有 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

$$f(at) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

这里**常数a应 > 0**，否则信号发生反褶，对于单边拉氏变换，这个性质就没有意义。

$$f(at-b)u(at-b) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)e^{-\frac{bs}{a}}$$

$$(a>0, b>0)$$

时域微分性

设 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

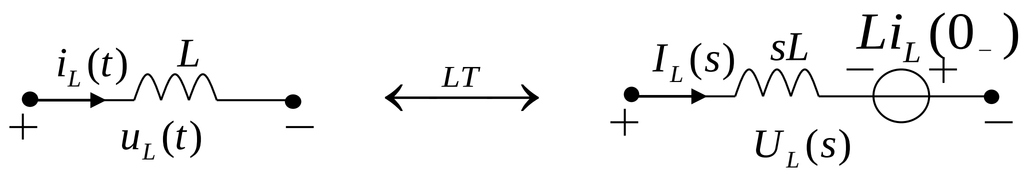
$$f'(t) \xleftrightarrow{LT} sF(s) - f(0_-)$$

$$f^{(n)}(t) \xleftrightarrow{LT} s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} f^{(i)}(0_-)$$

零状态条件下，时域微分一次，频域乘一个s

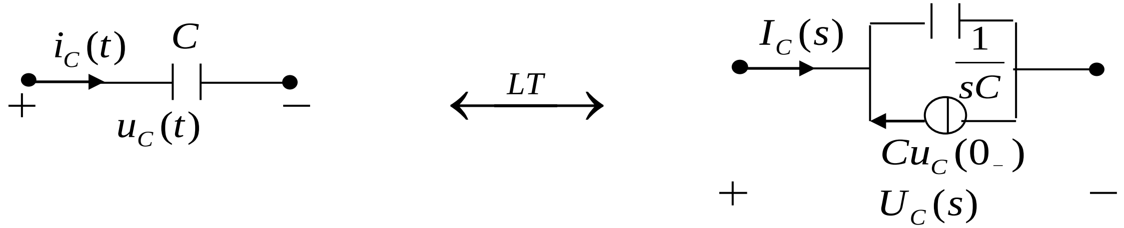
电感两端电压的拉氏变换：

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \xleftrightarrow{LT} U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-)$$



电容中的电流的拉氏变换：

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \xleftrightarrow{LT} I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0_-)$$



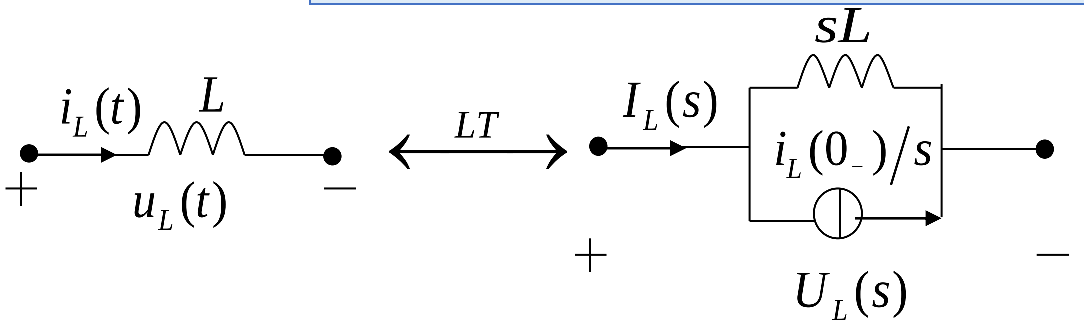
时域积分性

$$f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$$

则 $$y(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \xleftrightarrow{LT} \frac{y(0_-)}{s} + \frac{F(s)}{s}$$

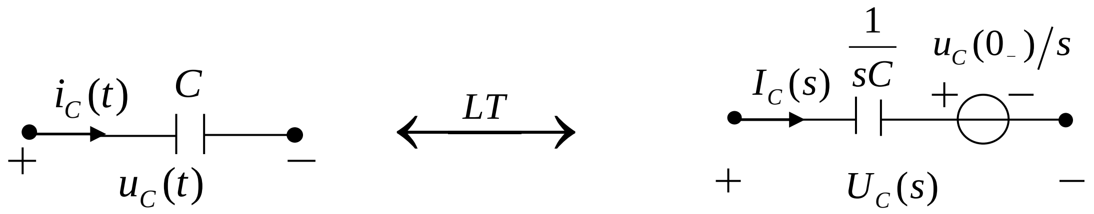
电感中电流的拉氏变换：

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(\tau)d\tau \xleftrightarrow{LT} \frac{i_L(0_-)}{s} + \frac{U_L(s)}{sL}$$



电容两端电压的拉氏变换：

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau \xleftrightarrow{LT} \frac{u_C(0_-)}{s} + \frac{I_C(s)}{sC}$$



s域微分性

设 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

s域微分性 $tf(t) \xleftrightarrow{LT} -\dfrac{dF(s)}{ds}$

s域积分性

$$\frac{f(t)}{t} \xleftrightarrow{LT} \int_s^{\infty} F(\lambda)d\lambda$$

卷积定理(时域、频域)

设 $f_1(t) \xleftrightarrow{LT} F_1(s),\ f_2(t) \xleftrightarrow{LT} F_2(s)$

则 $f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{LT} F_1(s) \cdot F_2(s)$

$$f_1(t)\,f_2(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$$

初值与终值定理

设信号*f*(*t*)是因果的，其与其导数的拉氏变换存在，则

1、初值定理：

$$\lim_{t\to 0_+} f(t) = f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

高频分量（ω→∞），表示t=0时接入信号的突变。

若*f*(t)包含冲激函数$k\delta(t)$,

$$F(s) = k + F_1(s),\ F_1(s)\text{为真分式}$$

$$\lim_{t\to 0_+} f(t) = \lim_{s\to\infty}[sF(s) - ks] = \lim_{s\to\infty} sF_1(s)$$

2、终值定理：若*f*(∞)存在，于是有

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

直流分量（ω→0），得到电路稳态的终值。

当电路等系统较为复杂时，无需做拉氏逆变换，即可直接求出函数的初值和终值。

填空题 1分

设置

已知 $F(s)=\dfrac{2s}{s+1}$，$f(0_{+})=$ [填空1]。

作答

已知 $F(s) = \dfrac{2s}{s+1}$ ，求$f(0_+)$。

$$F(s) = \frac{2s}{s+1} = \underbrace{\frac{-2}{s+1}}_{F_1(s)} + 2$$

$$f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sF_1(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{-2s}{s+1} = -2$$

$$f(t) = -2e^{-t}u(t) + 2\delta(t)$$

本次课内容

4.4 拉普拉斯逆变换

4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型

本次课目标

1. 熟练掌握部分分式法求拉普拉斯逆变换；

2. 熟练使用拉普拉斯逆变换分析电路等系统。

4. 4. 1 拉普拉斯变换的零、极点

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

根据拉普拉斯逆变换的公式，可以应用围线积分求解。但在应用中，拉氏变换绝大多数是有理分式的形式：

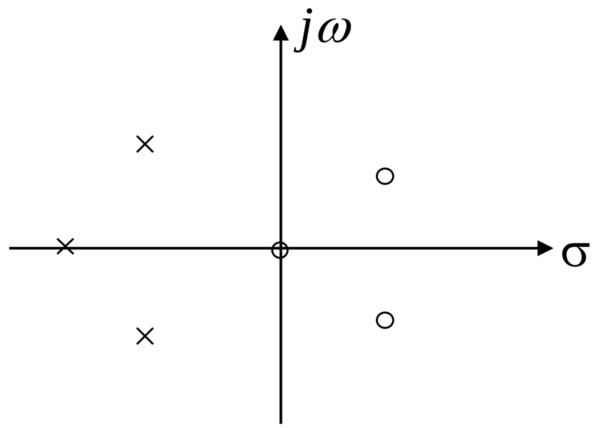
$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\sum_{i=0}^{m}b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n}a_i s^i}$$

分子分母均是s的有理多项式。

以上分子多项式 $N(s)=0$ 的根，称作***F(s)***的零点；分母多项式 $D(s)=0$ 的根，称作***F(s)***的极点。上式可表示为：

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

式中的z_i与p_i，分别是***F(s)***的零点与极点。可如图将零极点标示在***s***平面上。



4.4.2 求拉氏逆变换

用拉氏变换方法分析系统时，最后还要将象函数进行拉氏逆变换。

1、部分分式法（海维赛法）

(1)极点为单实根的情况 $(p_1 \cdots p_n)$

$$m<n \text{ 时，} F(s) \overset{\text{分解}}{=\!=} \frac{k_1}{s-p_1}+\cdots+\frac{k_n}{s-p_n} \quad \text{（真分式）}$$

$$\text{其中} k_i=(s-p_i)F(s)\big|_{s=p_i} \quad \text{（留数）（证明见教材）}$$

由拉氏变换性质已知：$Ae^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \dfrac{A}{s+\alpha}$

$$F(s) \xrightarrow{L^{-1}} f(t)=\left(k_1 e^{p_1 t}+\cdots+k_n e^{p_n t}\right)u(t)$$

设置

已知$F(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}$，则其拉氏逆变换$f(t)$为（ ）

A $f(t)=\left(2e^{-t}+e^{-2t}\right)u(t)$

B $f(t)=\left(2e^{t}-e^{2t}\right)u(t)$

C $f(t)=\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$

D $f(t)=\left(e^{-t}+2e^{-2t}\right)u(t)$

提交

例4-15：$F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$，试求其拉氏逆变换$f(t)$。

解：$$F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{k_1}{(s+1)}+\frac{k_2}{(s+2)}$$

$$k_1=(s+1)F(s)\big|_{s=-1}=\left.\frac{s+3}{s+2}\right|_{s=-1}=2$$

$$k_2=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=\left.\frac{s+3}{s+1}\right|_{s=-2}=-1$$

所以：$$F(s)=\frac{2}{(s+1)}-\frac{1}{(s+2)}$$

它的拉氏逆变换为：$f(t)=(2e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

即使$F(s)$不是真分式，即$n<m$，它也可表示为一s的多项式与一真分式的和：

例： $$F(s)=\frac{s^3+4s^2+6s+5}{s^2+3s+2}$$

作长除法提出高次项

$$\begin{array}{r|l} & s+1 \\ \hline s^2+3s+2 & s^3+4s^2+6s+5 \\ & s^3+3s^2+2s \\ \hline & s^2+4s+5 \\ & s^2+3s+2 \\ \hline & s+3 \end{array}$$

$$F(s)=\frac{s^3+4s^2+6s+5}{s^2+3s+2}=s+1+\frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

上式中**s+1**的拉氏逆变换等于：$\delta'(t)+\delta(t)$

对于拉氏变换是有理真分式的逆变换，用部分分式法求解。

(2)极点包含共轭复根的情况 $(p_{1,2}=-\alpha\pm j\beta)$

$$F(s)=\frac{A(s)}{D(s)\left[(s+\alpha)^2+\beta^2\right]}$$

$$=\frac{A(s)}{D(s)(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}$$

其中$D(s)$为分母除去共轭复根剩余部分

设$F_1(s)=\dfrac{A(s)}{D(s)}$

则$F(s)=\dfrac{F_1(s)}{(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}$

$$\overset{分解}{==}\frac{K_1}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K_2}{s+\alpha+j\beta}+\ldots$$

其中$K_{1,2}=\dfrac{F_1(-\alpha\pm j\beta)}{\pm 2j\beta}$（留数）

K_1、K_2呈共轭关系：$K_{1,2}=A\pm jB$

得共轭复根有关部分逆变换为$\xrightarrow{\mathrm{LT}^{-1}}$

$$f_c(t)=e^{-\alpha t}(K_1e^{j\beta t}+K_1^*e^{-j\beta t})u(t)$$

$$=e^{-\alpha t}\{(A+jB)[\cos(\beta t)+j\sin(\beta t)]+(A-jB)[\cos(\beta t)-j\sin(\beta t)]\}u(t)$$

$$=2e^{-\alpha t}\left[A\cos\left(\beta t\right)-B\sin\left(\beta t\right)\right]u(t)$$

α--衰减因子；β--震荡频率

例4-16：$F(s)=\dfrac{s^2+3}{(s+2)(s^2+2s+5)}$，试求其拉氏逆变换$f(t)$。

解：令 $F(s)=\dfrac{K_1}{s+2}+\dfrac{K_2}{s+1-j2}+\dfrac{K_2^*}{s+1+j2}$

$\alpha=1,$

$\beta=2,\text{取}\beta>0$

$$K_1=(s+2)F(s)|_{s=-2}=\left.\frac{s^2+3}{s^2+2s+5}\right|_{s=-2}=\frac{7}{5}$$

$$K_2=(s+1-j2)F(s)\big|_{s=-1+j2}=\left.\frac{s^2+3}{(s+2)(s+1+j2)}\right|_{s=-1+j2}=-\frac{1}{5}+j\frac{2}{5}$$

$A=-\frac{1}{5},B=\frac{2}{5}$

共轭复根对应的时域信号为$f_c(t)=2e^{-\alpha t}\left[A\cos(\beta t)-B\sin(\beta t)\right]u(t)$

$$f(t)=\left[\frac{7}{5}e^{-2t}-\frac{2}{5}e^{-t}(\cos 2t+2\sin 2t)\right]u(t)$$

例4-17： $F(s)=\dfrac{s+\gamma}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$ ，试求其拉氏逆变换**f(t)**。

解：此函数式只有共轭复根，所以无需用部分分式法。

$$\text{已知}\,\mathrm{LT}[\cos(\beta t)u(t)]=\frac{s}{s^2+\beta^2},\ \mathrm{LT}[\sin(\beta t)u(t)]=\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$$

$$\mathrm{LT}[e^{-\alpha t}\cos(\beta t)u(t)]=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2},\ \mathrm{LT}[e^{-\alpha t}\sin(\beta t)u(t)]=\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$F(s)=\frac{s+\alpha+\gamma-\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}+\frac{(\gamma-\alpha)}{\beta}\cdot\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$\boxed{f(t)=e^{-\alpha t}\left[\cos(\beta t)+\frac{\gamma-\alpha}{\beta}\sin(\beta t)\right]u(t)}$$

(3)极点包含多重根的情况 (k重根p_1,单根$p_2 \ldots p_n$)

$$F(s)=\frac{A(s)}{D(s)}=\frac{A(s)}{(s-p_1)^k D_1(s)}$$

$$=\frac{K_{11}}{(s-p_1)^k}+\frac{K_{12}}{(s-p_1)^{k-1}}+\cdots+\frac{K_{1k}}{(s-p_1)}+\sum_{i=2}^{n}\frac{K_i}{s-p_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{K_{1i}}{(s-p_1)^{k-i+1}}+\sum_{i=2}^{n}\frac{K_i}{s-p_i}$$

求K_i和K_{11}，方法同第一种情况：$K_{11}=(s-p_1)^k F(s)\big|_{s=p_1}$

求其他系数,令：$F_1(s)=(s-p_1)^k\cdot F(s)$

当$i=2$, $K_{12}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_1(s)\Big|_{s=p_1}$

当$i=3$, $K_{13}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}F_1(s)\Big|_{s=p_1}$

$$K_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}\,s^{i-1}}F_1(s)\bigg|_{s=p_1}\qquad (i=1,2,\cdots k)$$

$$F_1(s)=(s-p_1)^k\cdot F(s)$$

得多重根部分的逆变换 $\xrightarrow{\mathrm{LT}^{-1}}$:

$$f_c(t)=e^{p_1t}\left[\frac{K_{11}}{(k-1)!}t^{k-1}+\frac{K_{12}}{(k-2)!}t^{k-2}\cdots+\frac{K_{1i}}{(k-i)!}t^{k-i}\cdots+K_{1k}\right]u(t)$$

例4-18：$F(s)=\dfrac{s-2}{s(s+1)^3}$，试求其拉氏逆变换$f(t)$。

解：令

$$F(s)=\frac{K_{11}}{(s+1)^3}+\frac{K_{12}}{(s+1)^2}+\frac{K_{13}}{(s+1)}+\frac{K_2}{s}$$

先求单根0对应的系数K_2:

$$K_2=sF(s)\big|_{s=0}=\left.\frac{s-2}{(s+1)^3}\right|_{s=0}=-2$$

令$F_1(s)=(s+1)^3F(s)=\dfrac{s-2}{s}$

$$K_{11}=F_1(s)\big|_{s=-1}=\left.\frac{s-2}{s}\right|_{s=-1}=3$$

$$K_{12}=\frac{1}{(3-2)!}\left.\frac{dF_1(s)}{ds}\right|_{s=-1}=\frac{d}{ds}\left[\frac{s-2}{s}\right]\Big|_{s=-1}=\left.\frac{2}{s^2}\right|_{s=-1}=2$$

$$K_{13}=\frac{1}{(3-1)!}\left.\frac{d^2F_1(s)}{ds^2}\right|_{s=-1}=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{-4}{s^3}\right|_{s=-1}=2$$

$$f(t)=\left[e^{-t}\left(\frac{K_{11}}{2!}t^2+K_{12}t+K_{13}\right)+K_2\right]u(t)$$

$$=\left[e^{-t}\left(\frac{3}{2}t^2+2t+2\right)-2\right]u(t)$$

2、留数法

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds,\quad t\geq 0$$

设一闭合围线的积分路径为无限大圆弧,

$$\text{即}f(t)=\sum_{\text{极点}}\left[F(s)e^{st}\text{的留数}\right]$$

则上式中积分等于围线中被积函数的所有极点的留数之和。

若极点$s=p_i$处留数为r_i，围线中有n个极点p_i(k 阶)

$$\text{则}f(t)=\sum_{i=1}^{n}r_i,\quad r_i=\frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}(s-p_i)^k F(s)e^{st}\right]$$

特殊情况：含$e^{-\alpha s}$的非有理式

$e^{-\alpha s}$项不参加部分分式运算，求解时利用时移性质。

例4–19：求 $\dfrac{e^{-2s}}{s^2+3s+2}$ 的拉氏逆变换。

解：

$$\frac{e^{-2s}}{s^2+3s+2}=F_1(s)e^{-2s}$$

$$F_1(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+2}$$

所以 $f_1(t)=L^{-1}[F_1(s)]=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$

所以 $f(t)=f_1(t-2)=\left[e^{-(t-2)}-e^{-2(t-2)}\right]u(t-2)$

4.5.1 用拉普拉斯变换解微分方程

拉普拉斯变换解微分方程的步骤：

(1) 对微分方程求拉氏变换，注意应用微分性质；

(2) 解s域的代数方程，求出响应的拉氏变换；

(3) 求拉氏逆变换，即求出响应的时间表达式。

例4-20： 已知 $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+4x(t)$，$y'(0^-)=y(0^-)=1$，$x(t)=e^{-3t}u(t)$ 。试求系统的响应**y(t)**。

解法一：(1) 对方程两边同求拉氏变换，利用微分性质。

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+4x(t)$$

$$\underline{s^2Y(s)-[sy(0^-)+y'(0^-)]}+\underline{3[sY(s)-y(0^-)]}+\underline{2Y(s)}=sX(s)+4X(s)$$

(2) 整理以上方程，求出响应的拉氏变换式。

$$(s^2+3s+2)Y(s)=(s+4)X(s)+(s+3)y(0^-)+y'(0^-)$$

所以 $Y(s)=\dfrac{(s+4)X(s)+(s+3)y(0^-)+y'(0^-)}{(s^2+3s+2)}$

$$Y(s)=\frac{(s+4)X(s)+(s+3)y(0^-)+y'(0^-)}{(s^2+3s+2)}=\frac{(s+4)}{(s^2+3s+2)}X(s)+\frac{(s+3)y(0^-)+y'(0^-)}{(s^2+3s+2)}$$

代入起始条件和 $X(s)=\dfrac{1}{s+3}$ ，得到 $Y(s)=\dfrac{(s+4)}{(s^2+3s+2)(s+3)}+\dfrac{(s+3)+1}{(s^2+3s+2)}$

(3) 求拉氏逆变换。

用部分分式法可得 $Y(s)=\dfrac{\frac{3}{2}}{s+1}-\dfrac{2}{s+2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{s+3}+\dfrac{3}{s+1}-\dfrac{2}{s+2}$

$$y(t)=\underbrace{(\frac{3}{2}e^{-t}-2e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{(3e^{-t}-2e^{-2t})u(t)}_{\text{零输入响应}}=\underbrace{(\frac{9}{2}e^{-t}-4e^{-2t})u(t)}_{\text{自由响应}}+\underbrace{\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)}_{\text{强迫响应}}$$

零状态响应和零输入响应的公共项—自由响应；非公共项—强迫响应

虽然拉氏变换解方程，可一次求出全解是其优点，但是利用微分性质时，带上其起始条件，使s域的方程运算时复杂而易出错。分别求零状态和零输入响应会更简洁。

解法二：(1) 用s域分析法求零状态响应。对方程两边同求拉氏变换，不带起始条件。

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+4x(t)$$

$$s^2Y_{zs}(s)+3sY_{zs}(s)+2Y_{zs}(s)=sX(s)+4X(s)$$

整理以上方程，求出零状态响应的拉氏变换式。

$$(s^2+3s+2)Y_{zs}(s)=(s+4)X(s)$$

所以 $Y_{zs}(s)=\dfrac{(s+4)}{(s^2+3s+2)}X(s)=H(s)X(s)$

因为 $X(s)=\dfrac{1}{s+3}$

得到零状态响应的拉氏变换

$$Y_{zs}(s)=\frac{(s+4)}{(s^2+3s+2)(s+3)}=\frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$Y_{zs}(s)=\frac{\frac{3}{2}}{s+1}-\frac{2}{s+2}+\frac{\frac{1}{2}}{s+3}$$

求拉氏逆变换，得到系统的零状态响应：

$$y_{zs}(t)=(\frac{3}{2}e^{-t}-2e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$$

试用第二章的时域分析法求零状态响应，并比较结果。

（2） 用时域分析法求零输入响应。由以上方程的拉氏变换

$$(s^2+3s+2)Y(s)=(s+4)X(s)$$

微分方程对应的特征方程是：$s^2+3s+2=0$

特征方程的根：$s=-1$，$s=-2$

设系统的零输入响应为：$y_{zi}(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$

已知 $y'_{zi}(0^-)=y'(0^-)=1$, $y_{zi}(0^-)=y(0^-)=1$ 求法类似第二章

由起始条件确定待定常数：

$$A_1+A_2=1$$

$$-A_1-2A_2=1$$

$\therefore \quad A_1=3$，$A_2=-2$

零输入响应：$y_{zi}(t)=(3e^{-t}-2e^{-2t})u(t)$

最后，求得系统的全响应：

$$y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)$$

$$=(\frac{3}{2}e^{-t}-2e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)+(3e^{-t}-2e^{-2t})u(t)$$

$$=(\frac{9}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$$

4.5.2 拉普拉斯变换解电路

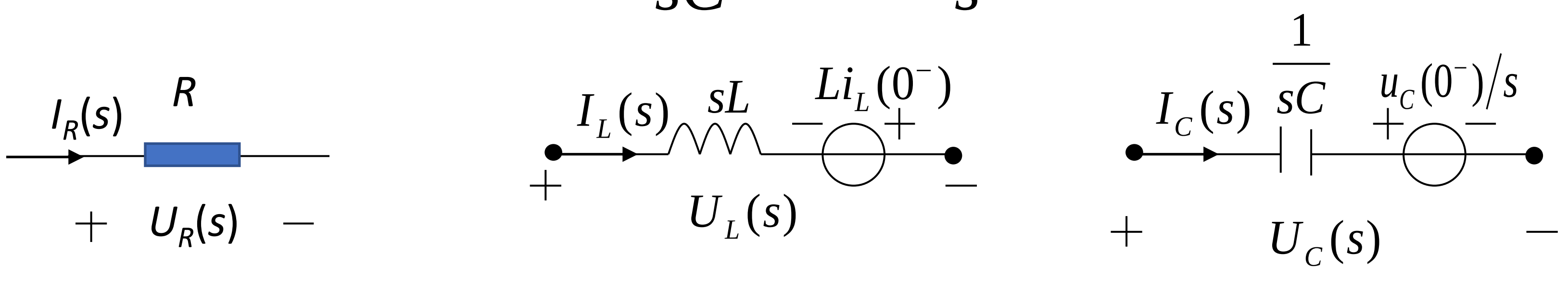
s域元件模型：

1) 回路分析 (KVL)

$$U_R(s) = RI_R(s)$$

$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{1}{s} u_c(0^-)$$

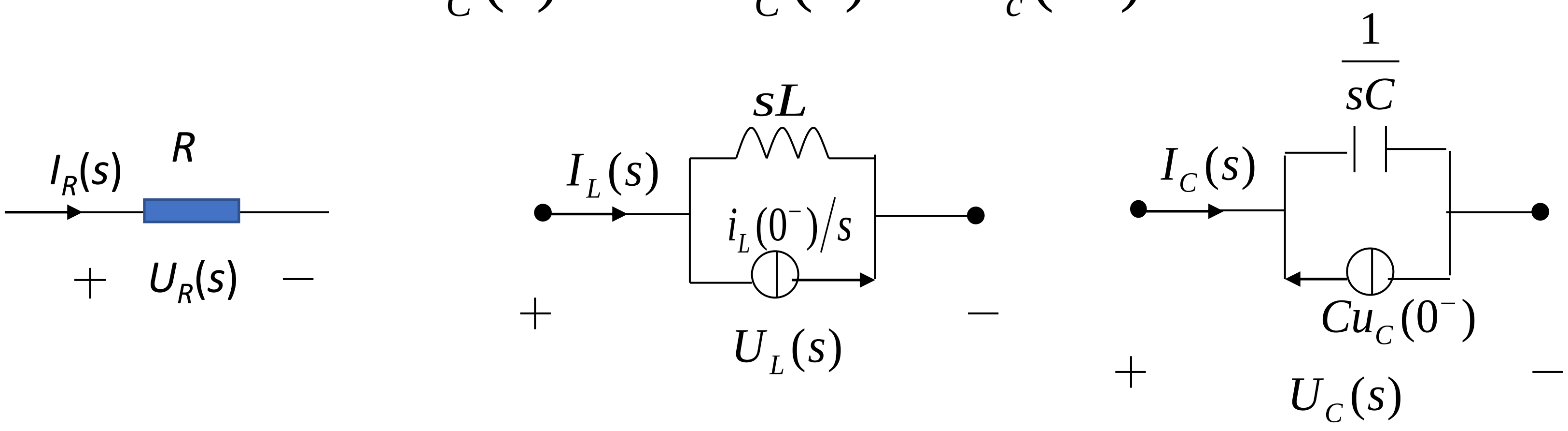


2) 结点分析 (KCL)

$$I_R = \frac{1}{R} U_R(s)$$

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} U_L(s) + \frac{1}{s} i_L(0^-)$$

$$I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_c(0^-)$$



s域电路分析方法

1. 将网络中每个元件用其s域模型代替；

将信号源写作变换式（$\frac{E}{s}$, 或$\frac{E}{sR}$，$U_s(s)$或$I_s(s)$）。

2. 对此构成的s域模型图采用*KVL*和*KCL*分析得到所需的系统方程变换式。

（所进行的数字运算是代数关系，类似电阻性网络；

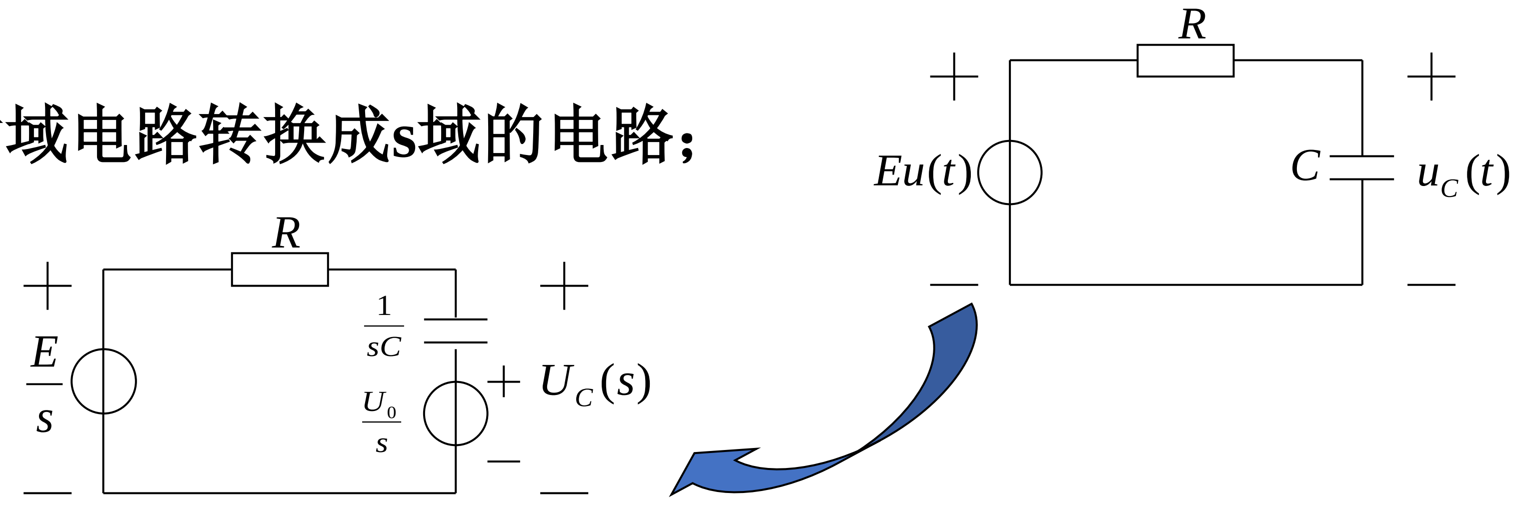
戴维南定理与诺顿定理均适用；适合较多结点或回路的网络分析。）

3. 求出响应的拉氏变换。

4. 求拉氏逆变换，即求出响应的时间表达式。

例4-21：RC电路如图所示，设已知电容上起始电压$u_C(0^-)=U_0$，试求$t>0$时的电容电压$u_C(t)$。

解：(1) 将时域电路转换成s域的电路；



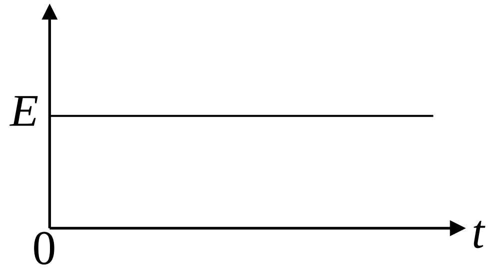
(2) 列s域的电路方程，求输出的拉氏变换；

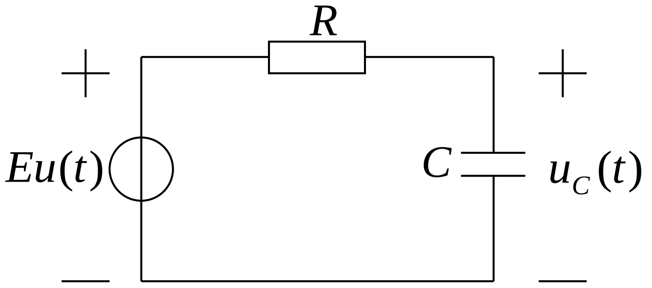
直接可写出电容电压的拉氏变换为

$$U_C(s)=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}\frac{E-U_0}{s}+\frac{U_0}{s}=\frac{1}{sRC+1}\frac{E-U_0}{s}+\frac{U_0}{s}$$

(3) 通过拉氏逆变换求出响应的时间表达式。

$$U_C(s)=\frac{\frac{1}{RC}(E-U_0)}{s(s+\frac{1}{RC})}+\frac{U_0}{s}=\frac{E-U_0}{s}-\frac{(E-U_0)}{s+\frac{1}{RC}}+\frac{U_0}{s}=\frac{E}{s}-\frac{(E-U_0)}{s+\frac{1}{RC}}$$



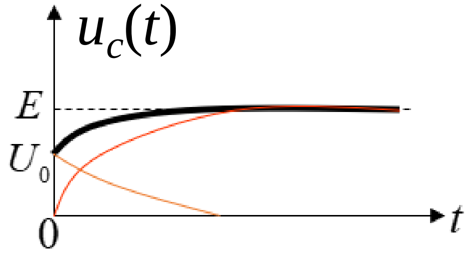


求得电容上电压

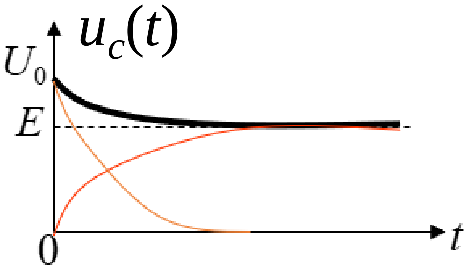
$$u_C(t)=[E-(E-U_0)e^{-\frac{t}{RC}}]u(t)$$ （黑线）

$$u_{Czs}(t)=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})u(t)$$ （红线）

$$u_{Czi}(t)=U_0e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$ （橙线）

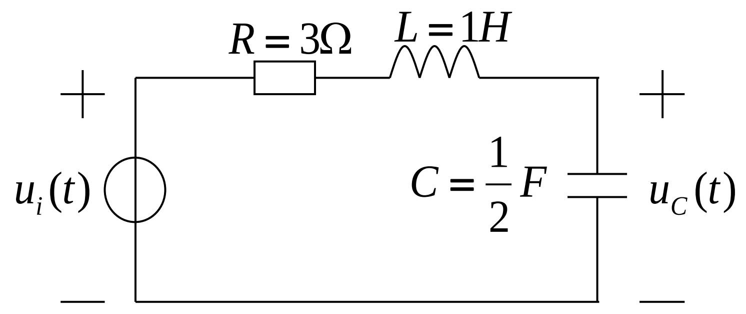


$E>U_0$

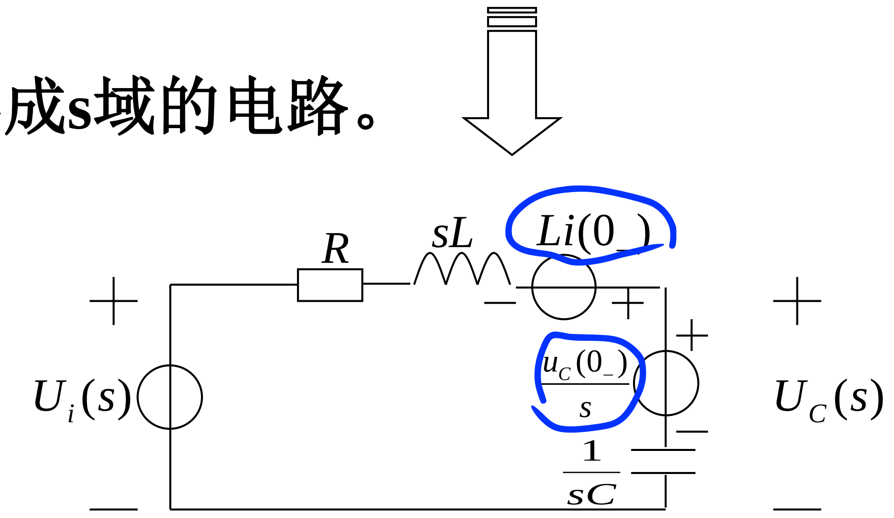


$E<U_0$

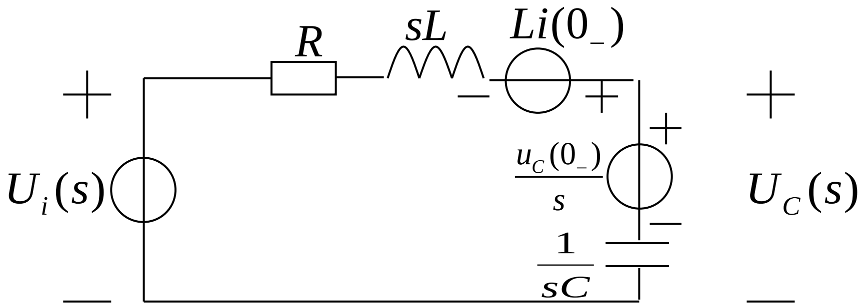
例4-22：RLC串联电路如图所示，设电容上起始电压$u_C(0_-)=1$ V，回路中的起始电流$i(0_-)=1$ A，输入电压$u_i(t)=e^{-3t}u(t)$。试求$t>0$时的电容电压$u_C(t)$。



解：(1) 将时域电路转换成s域的电路。



(2) 列s域的电路方程，求出响应的拉氏变换。



$$U_C(s)=\frac{\frac{1}{sC}}{R+sL+\frac{1}{sC}}[U_i(s)-\frac{u_C(0\_)}{s}+Li(0\_)]+\frac{u_C(0\_)}{s}$$

$$=\frac{\frac{2}{s}}{3+s+\frac{2}{s}}[U_i(s)-\frac{1}{s}+1]+\frac{1}{s}$$

$$=\frac{2U_i(s)}{s^2+3s+2}-\frac{2}{s^2+3s+2}(\frac{1-s}{s})+\frac{1}{s}$$

$$U_{Czs}(s)=\frac{2}{s^2+3s+2}U_i(s)=\frac{2}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s+3}$$

$$=\frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

$$U_{Czi}(s)=\frac{2}{s^2+3s+2}(\frac{s-1}{s})+\frac{1}{s}=\frac{2(s-1)}{s(s+1)(s+2)}+\frac{1}{s}$$

$$=\frac{-1}{s}+\frac{4}{s+1}-\frac{3}{s+2}+\frac{1}{s}=\frac{4}{s+1}-\frac{3}{s+2}$$

(3) 通过拉氏逆变换求出响应的时间表达式。

$$u_{Czs}(t)=(e^{-t}-2e^{-2t}+e^{-3t})u(t) \qquad u_{Czi}(t)=(4e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$$

$$u_C(t)=u_{C_{zs}}(t)+u_{C_{zi}}(t)=(5e^{-t}-5e^{-2t}+e^{-3t})u(t)$$

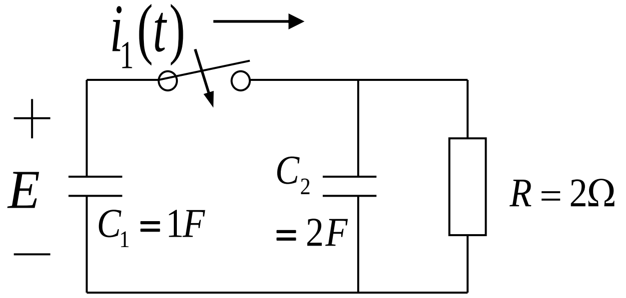
例4-23：电路如图所示，设电容上起始电压$v_{c1}(0^-)=E$，$t=0$时开关闭合，求电流$i_1(t)$，并讨论$t=0$时刻前后，电容两端电荷发生的变化。

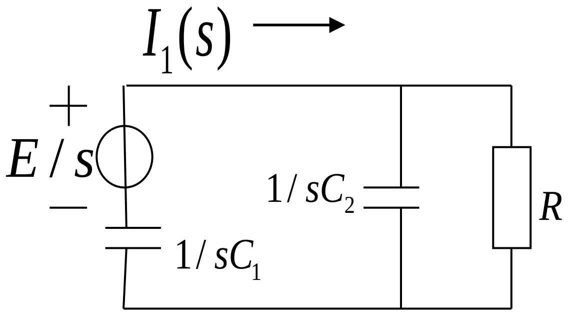
解：画s域电路，并列方程。

$$I_1(s)=\frac{E}{s}\frac{1}{\frac{R/sC_2}{R+1/sC_2}+\frac{1}{sC_1}}=\frac{E}{s}\frac{1}{\frac{R}{RC_2s+1}+\frac{1}{sC_1}}$$

$$I_1(s)=\frac{E}{s}\frac{s(RC_1C_2s+C_1)}{RC_1s+RC_2s+1}=\frac{ERC_1C_2}{R(C_1+C_2)}\frac{s+\frac{1}{RC_2}}{s+\frac{1}{R(C_1+C_2)}}$$

$$=\frac{2E}{3}\frac{s+\frac{1}{4}}{s+\frac{1}{6}}$$





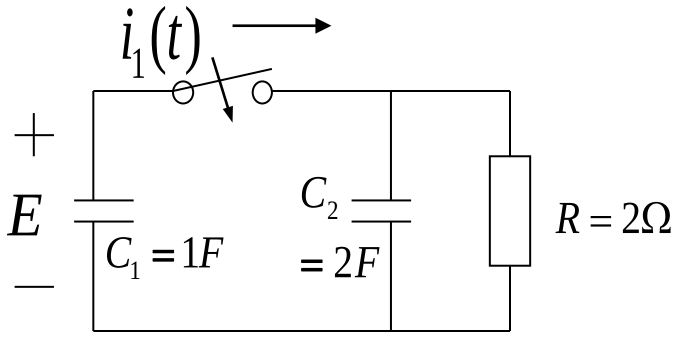
4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域元件模型

$$I_1(s)=\frac{2E}{3}\left(1+\frac{\frac{1}{12}}{s+\frac{1}{6}}\right) \qquad \therefore \quad i_1(t)=\frac{2E}{3}[\delta(t)+\frac{1}{12}e^{-\frac{t}{6}}u(t)]$$

当t=0时刻，电容上的电荷发生移动，但是总量不变。

$$C_1v_{C1}(0_-)=(C_1+C_2)v_{C1}(0_+) \qquad \therefore \quad E=3v_{C1}(0_+)$$

$$\therefore \quad v_{C1}(0_+)=\frac{E}{3}$$



所以t=0$^+$时刻，电容上的电荷各有：

$$q_{C1}=C_1v_{C1}(0_+)=\frac{E}{3} \qquad q_{C2}=C_2v_{C1}(0_+)=\frac{2E}{3}$$

作业

基础题：4-4，4-5，4-8，4-11。

加强题：无。