第八章 z 变换、离散时间系统的 z 域分析

8.6 z 平面与 s 平面的映射关系

8.6.1 z 平面与 s 平面的映射关系

$$z = \mathrm{e}^{sT}$$ T 为序列的时间间隔

将 s 表示成直角坐标形式，将 z 表示成极坐标形式

$$s = \sigma + \mathrm{j}\omega, \quad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

$$z = \mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)T} = \mathrm{e}^{\sigma T}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T} = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$$

$$\begin{cases} r = \mathrm{e}^{\sigma T} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\sigma}{\omega_s}} \\ \theta = \omega T = 2\pi\dfrac{\omega}{\omega_s} \end{cases}$$

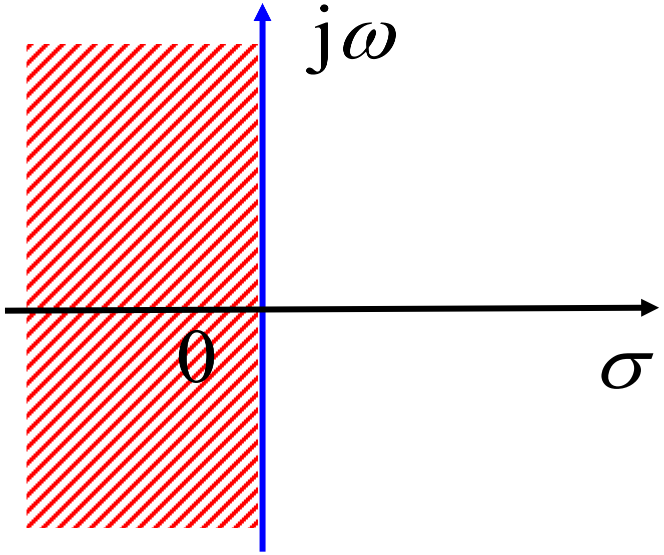
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$ 为重复频率

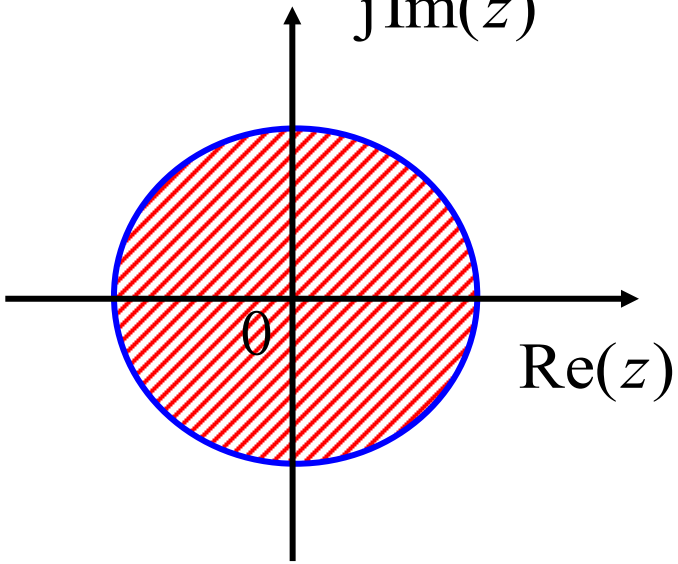
1) s平面上的虚轴$\xlongequal{\text{映射}}$$z$平面上的单位圆$(r=1)$

$$\sigma = 0 \quad s = \mathrm{j}\omega \quad r = |z| = \mathrm{e}^{\sigma T} = 1$$

2) s平面上的左半平面$\xlongequal{\text{映射}}$$z$平面上的单位圆内$(r<1)$

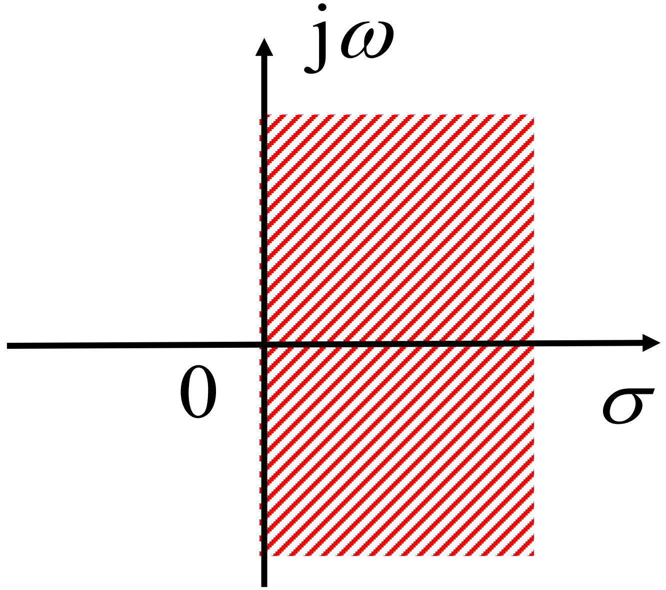
$$\sigma < 0 \quad s = \sigma + \mathrm{j}\omega \quad r = |z| = \mathrm{e}^{\sigma T} < 1$$

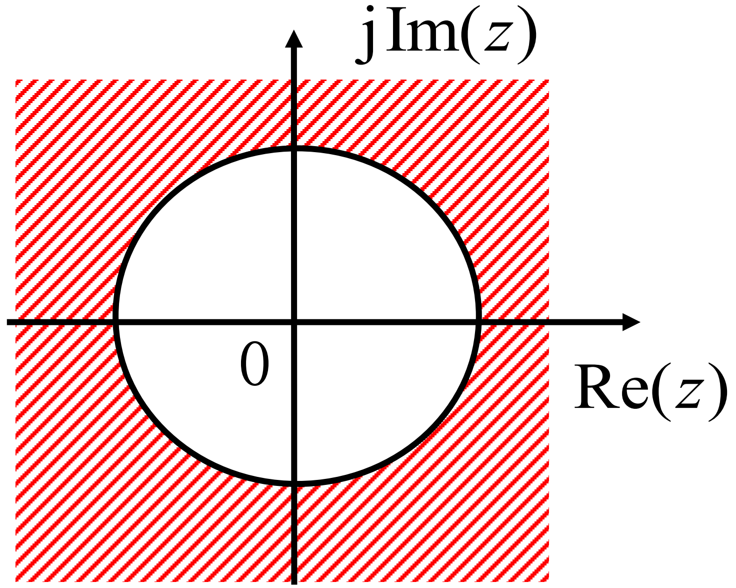




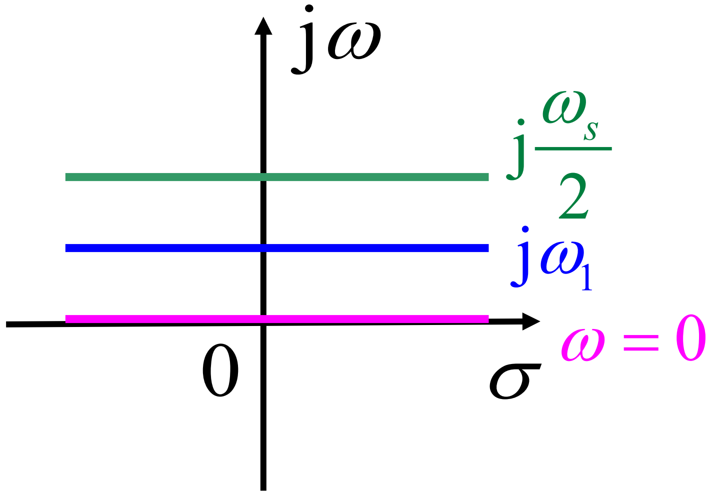
3) s平面上的右半平面$\xlongequal{\text{映射}}$ z平面上的单位圆外$(r>1)$

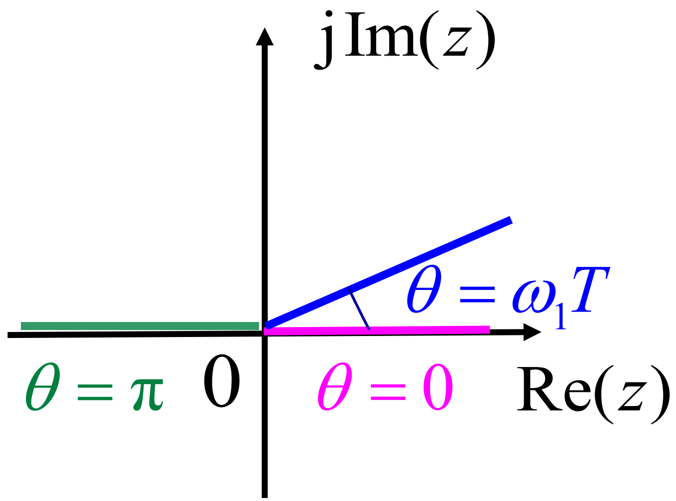
$$\sigma>0 \quad s=\sigma+\mathrm{j}\omega \quad r=|z|=\mathrm{e}^{\sigma T}>1$$





4) s平面上的实轴$\overset{\text{映射}}{===}$$z$平面上的正实轴($\theta$=0)





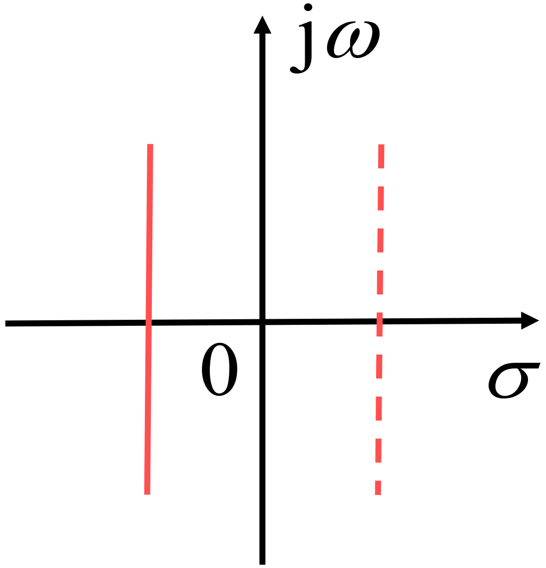
平行于实轴的直线($\omega=$常数)$\overset{\text{映射}}{===}$$z$平面上始于原点的射线

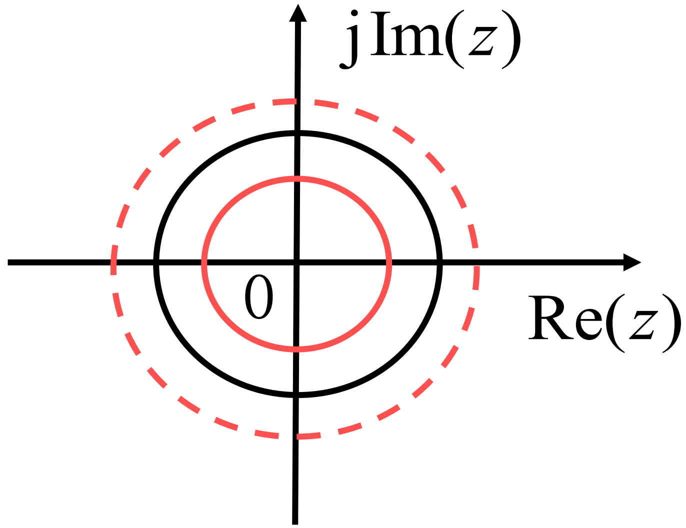
通过$\pm\mathrm{j}\dfrac{k\omega_s}{2}$$(k=\pm1,\pm3,\ldots)$平行于实轴的直线$\overset{\text{映射}}{===}$$z$平面上负实轴$\begin{pmatrix}\theta=\pi\\ r\text{任意}\end{pmatrix}$

$$\theta=\omega T=2\pi\frac{\omega}{\omega_s}=k\pi$$

$$\omega_s=\frac{2\pi}{T}$$

5) 平行于虚轴的直线$\xlongequal{\text{映射}}$z平面上的圆$\begin{pmatrix} \sigma>0,\ r>1 \\ \sigma<0,\ r<1 \end{pmatrix}$





6) s平面上沿虚轴移动$\xlongequal{\text{映射}}$$z$平面上沿单位圆周期性旋转，每平移$\omega_s$，则沿单位圆转一圈。

即$s\sim z$平面的映射并不是单值的。

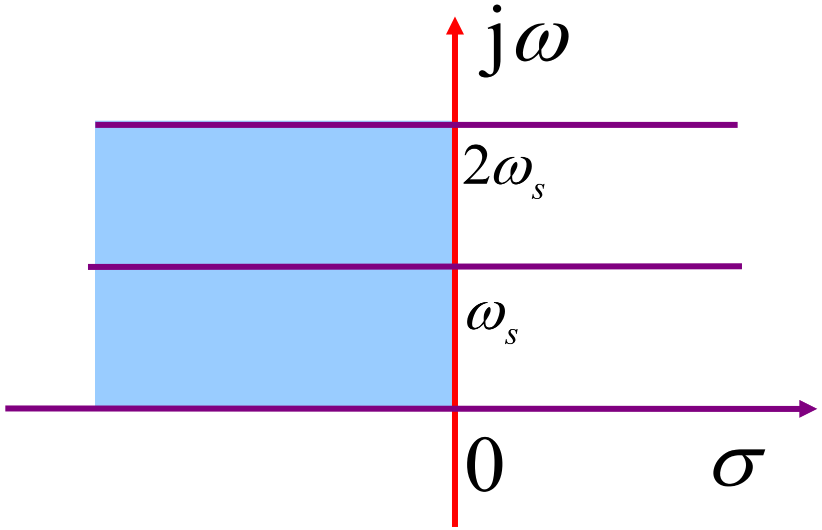
$$\theta=\omega T=2\pi\frac{\omega}{\omega_s} \qquad \omega_s=\frac{2\pi}{T}$$

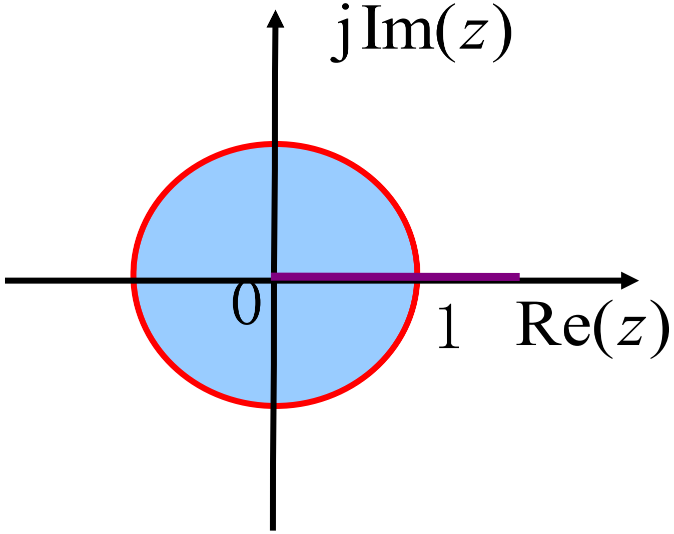
$\omega=0\sim\omega_s$ $\qquad$ $\theta=0\sim2\pi$

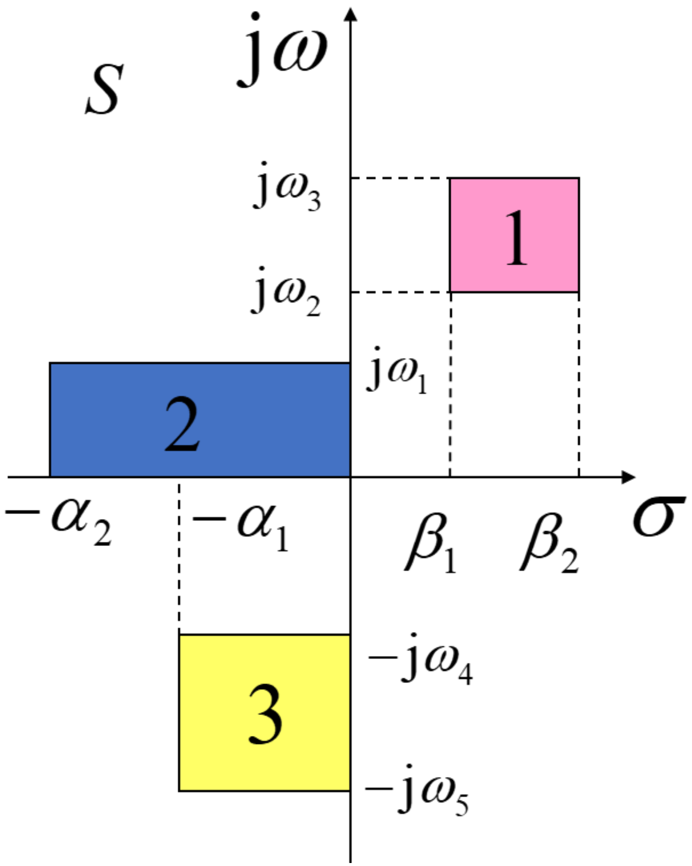
$\omega=\omega_s\sim2\omega_s$ $\qquad$ $\theta=2\pi\sim4\pi$

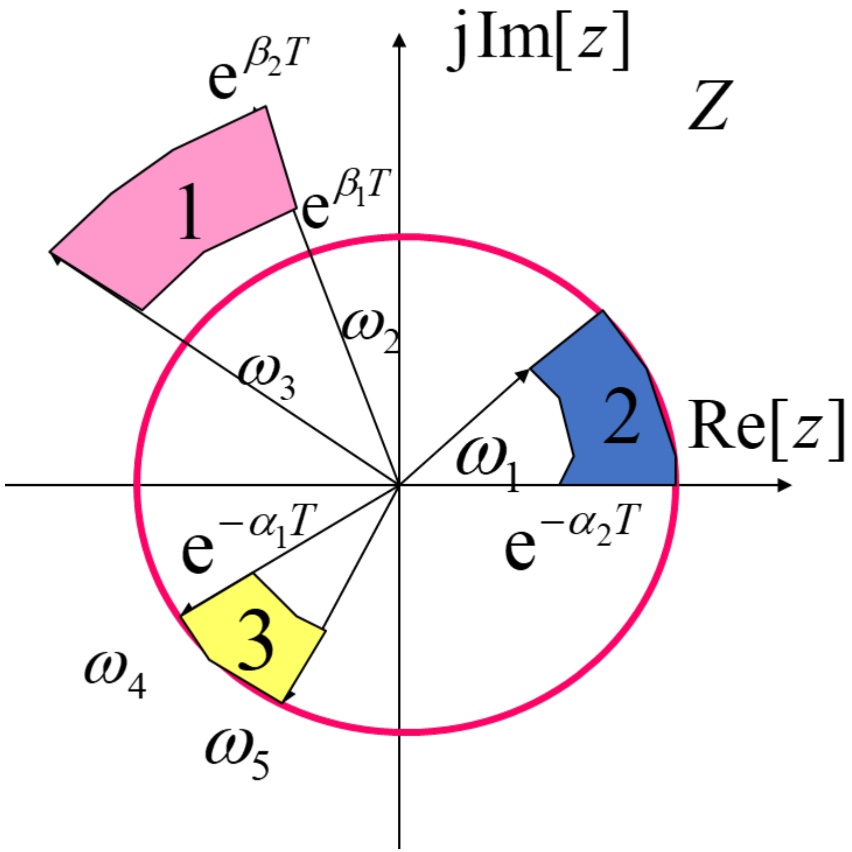
$\omega=0\sim k\omega_s$ $\qquad$ $\theta=0\sim2k\pi$

k 圈









给定 $\frac{\pi}{2T} < \omega_2 < \omega_3 < \frac{\pi}{T}$ ⟶ $\frac{\pi}{2} < \omega_2 T < \omega_3 T < \pi$

$0 < \omega_1 < \frac{\pi}{2T}$ ⟶ $0 < \omega_1 T < \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{T} < \omega_4 < \omega_5 < \frac{3\pi}{2T}$ ⟶ $\pi < \omega_4 T < \omega_5 T < \frac{3\pi}{2}$

8.6.2 z 变换与拉氏变换的表达式的对应

若连续时间信号 $\hat{x}(t)$由 N 项指数信号相加组合而成

$$\hat{x}(t)=\hat{x}_1(t)+\hat{x}_2(t)+\ldots+\hat{x}_N(t)=\sum_{i=1}^{N}\hat{x}_i(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{p_i t}u(t)$$

$$LT\left[\hat{x}(t)\right]=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-p_i}$$

若序列 $x(nT)$ 由 N 项指数序列相加组合而成

$$x(nT)=x_1(nT)+x_2(nT)+\ldots+x_N(nT)=\sum_{i=1}^{N}x_i(nT)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{p_i nT}u(nT)$$

$$ZT\left[x(nT)\right]=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{p_i T}z^{-1}}$$

借助模拟滤波器设计数字滤波器

8.7 利用 z 变换解差分方程

原理：利用单边 z 变换的线性和位移性

1、单边 z 变换的位移性

$$ZT[x(n)u(n)] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$ZT[x(n-m)u(n)] = z^{-m}\left[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k}\right]$$

$$ZT[x(n+m)u(n)] = z^{m}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}\right]$$

2、用单边 z 变换解差分方程的步骤和思路

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

$y(n-k)$， $x(n-r)$ 均为右移序列

两边取单边 z 变换

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}]=\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}[X(z)+\sum_{m=-r}^{-1} x(m)z^{-m}]$$

起始状态

若为因果信号
此项为零

1）零输入响应

若激励 $x(n)=0$，系统处于零输入状态：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}]=0$$

求得的是零输入响应：

$$Y_{zi}(z)=\frac{-\sum_{k=0}^{N}[a_k z^{-k}\cdot\sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}]}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

系统的起始状态 $y(l)$ $(-N\leq l\leq -1)$。

$$y_{zi}(n)=ZT^{-1}[Y_{zi}(z)]$$

2）零状态响应

若系统的起始状态 $y(l)=0 \ (-N \le l \le -1)$，系统处于零状态，且激励 $x(n)$ 为因果序列，则

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X(z)$$

求得的零状态响应：

$$Y_{zs}(z) = X(z) \cdot \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

系统函数:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$Y_{zs}(z) = X(z)H(z)$$

$$y_{zs}(n) = ZT^{-1}[X(z)H(z)]$$

8.8 离散系统的系统函数

8.8.1 系统函数的定义

1、系统零状态响应的 z 变换与激励的 z 变换之比

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

零状态

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

因果

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

2、单位样值响应 $h(n)$ 的 z 变换

激励与单位样值响应的卷积为系统的零状态响应

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

由卷积定理 $$Y(z) = X(z)H(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

8.8.2 由系统函数的零极点分布分析单位样值响应

$$H(z)=\left[G\frac{\prod_{r=1}^{M}(1-z_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_k z^{-1})}\right]=\sum_{k=0}^{N}\frac{A_k z}{z-p_k}=A_0+\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k z}{z-p_k}$$

其中z_r、p_k分别为$H(z)$的零点、极点；$p_0=0$

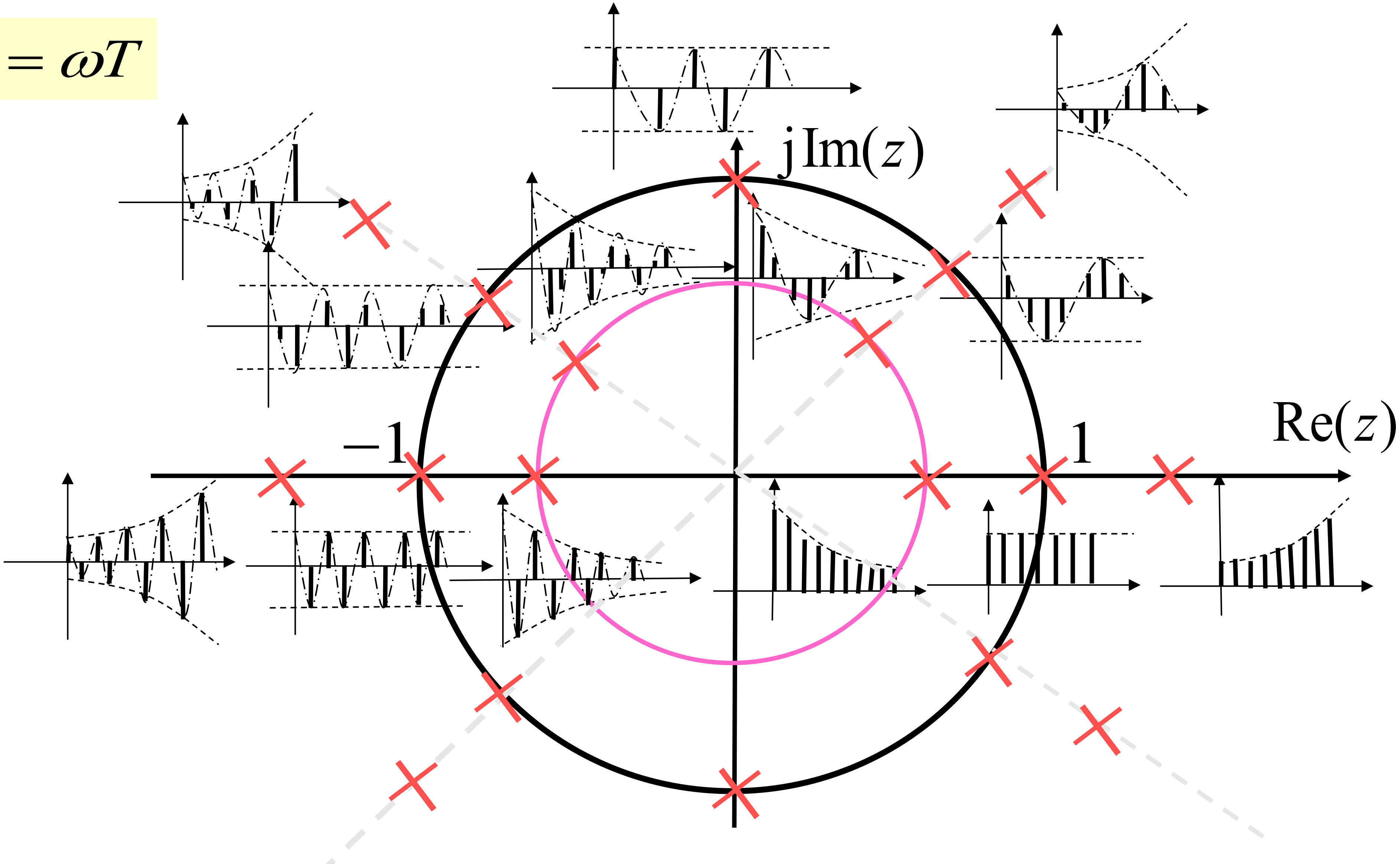
$$h(n)=ZT^{-1}[H(z)]=A_0\delta(n)+\sum_{k=1}^{N}A_k(p_k)^n u(n)$$

$\therefore h(n)$特性$\overset{\text{取决于}}{===}H(z)$的极点$p_k$

$h(n)$幅值$A_k\overset{\text{取决于}}{===}H(z)$的零点$z_r$

极点分布对 $h(n)$ 的影响（教材 86 页）

$$r = \mathrm{e}^{\sigma T}, \theta = \omega T$$



8.8.3 离散时间系统的稳定性和因果性

1、时域中系统因果稳定的条件

离散时间系统稳定的充要条件是：单位样值响应是绝对可和的，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

因果稳定系统的充要条件为：$h(n)$ 是单边的而且是绝对可和的。即

$$\begin{cases} h(n) = h(n)u(n) & \text{因果} \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty & \text{稳定} \end{cases}$$

2、在 z 域中因果稳定的条件

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}\text{, 收敛域要求 }\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)z^{-n}\right|<\infty$$

当$z=1$时， $H(z)$的收敛域变为$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right|<\infty$

恰好满足系统稳定的条件。

因此对于稳定系统， $H(z)$ 收敛域应包含单位圆 。

对于因果稳定系统，收敛域为:

$$\begin{cases} a<\left|z\right|\le\infty \\ a<1 \end{cases}$$

即全部极点位于单位圆内 。

例8-16：已知系统函数如下，试说明分别在三种收敛域情况下系统的稳定性，并求单位样值响应。

$$H(z)=\frac{-9.5z}{(z-0.5)(z-10)}\qquad (1)\ 10<|z|\le\infty\qquad (2)\ 0.5<|z|<10\qquad (3)\ |z|<0.5$$

解： (1) $10<|z|\le\infty$

方法一：由收敛域可知此为因果系统。收敛域不包括单位圆，所以系统是不稳定的。

方法二：由收敛域判断该系统是因果系统 $z_1=0.5\quad z_2=10\quad |z_2|>1$

因果稳定系统的极点位于单位圆内。此处有一个极点位于单位圆外，因而系统是不稳定的。

$$h(n)=[(0.5)^n-(10)^n]u(n)$$

(2)　$0.5 < |z| < 10$

右边序列　　左边序列

收敛域包括单位圆，系统稳定。

由收敛域判断该系统是非因果系统。

$$H(z) = \frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{z-10}$$

$$h(n) = (0.5)^n u(n) + (10)^n u(-n-1)$$

(3)　$|z| < 0.5$　左边序列

收敛域不包括单位圆，系统不稳定。

由收敛域判断该系统是非因果系统。

$$h(n) = [(10)^n - (0.5)^n]u(-n-1)$$

单选题 1分

设置

已知某因果系统的差分方程为:

$$y(n)+0.2y(n-1)-0.24y(n-2)=x(n)+x(n-1)$$

该系统是否稳定?

A 稳定

B 不稳定

提交

例8-17：已知 $y(n)+0.2y(n-1)-0.24y(n-2)=x(n)+x(n-1)$ 求 $H(z)$、$h(n)$，讨论此因果系统的收敛域和稳定性。若激励信号为 $u(n)$，求零状态响应 $y(n)$。

解： (1) 先求系统函数

差分方程两边 z 变换，得 $Y(z)+0.2z^{-1}Y(z)-0.24z^{-2}Y(z)=X(z)+z^{-1}X(z)$

整理得 $$\left(1+\frac{0.2}{z}-\frac{0.24}{z^2}\right)Y(z)=\left(1+\frac{1}{z}\right)X(z)$$

$$\therefore H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z(z+1)}{z^2+0.2z-0.24}=\frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.6)}$$

(2) 求收敛域和判断稳定性

$$H(z)=\frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.6)}$$

$\because z_1=0.4,\quad z_2=-0.6$

系统为因果系统，$\therefore |z|>0.6$

收敛域包括单位圆，系统为稳定的。

(3) 求冲激响应 $h(n)$

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{1.4}{z-0.4}-\frac{0.4}{z+0.6}$$

$$H(z)=\frac{1.4z}{z-0.4}-\frac{0.4z}{z+0.6}$$

$$h(n)=[1.4(0.4)^n-0.4(-0.6)^n]u(n)$$

(4) 求零状态响应

$$x(n)=u(n) \qquad X(z)=\frac{z}{z-1} \quad (|z|>1)$$

$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{z^2(z+1)}{(z-1)(z-0.4)(z+0.6)}$$

$$Y(z)=\frac{2.08z}{z-1}-\frac{0.93z}{z-0.4}-\frac{0.15z}{z+0.6} \qquad (|z|>1)$$

零状态响应

$$y(n)=[2.08-0.93(0.4)^n-0.15(-0.6)^n]u(n)$$

作 业

教材习题：

基础题：8-21，8-23，8-26（1）（3）（5），8-29

加强题：8-26（2）（4）

第八章 z 变换、离散时间系统的 z 域分析

8.9 序列的傅里叶变换（DTFT）

8.9.1 定义

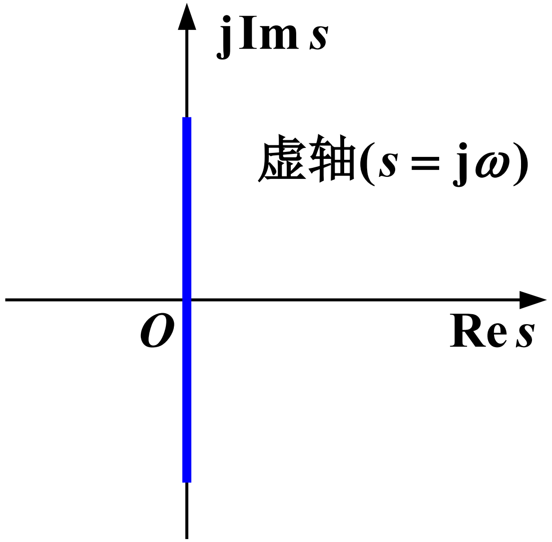
序列的傅里叶变换（**DTFT，Discrete-time Fourier Transform**）为研究离散时间系统的频率响应作准备 。

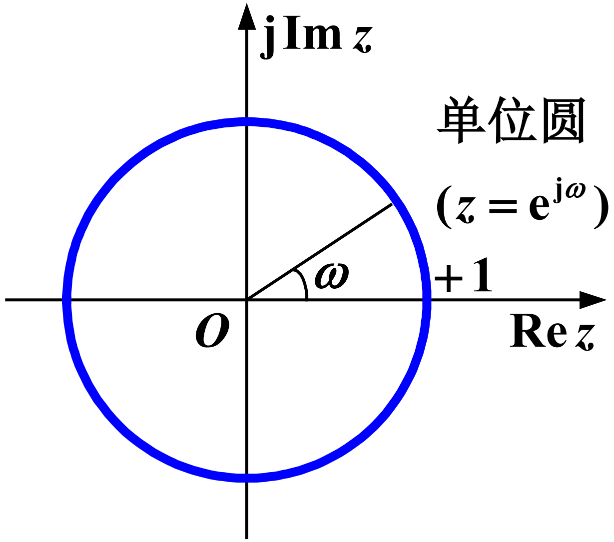
由 z 变换引出：

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$x(n) = ZT^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_C X(z) z^{n-1} \mathrm{d}z$$

1、DTFT 与 z 变换的关系





$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$, $|z|=1$, 即单位圆上的 z 变换就是 DTFT

周期为 2π

$$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)=X(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

2、DTFT的逆变换

$$
\begin{aligned}
x(n) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \oint_{|z|=1} X(z) z^{n-1} \, \mathrm{d} z \\
&= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}} \oint_{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right|=1} X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} \, \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} \mathrm{j} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega} \, \mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{DTFT}\left[x(n)\right] = X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}
$$

$$
\mathrm{IDTFT}\left[X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right] = x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega} \, \mathrm{d}\omega
$$

8.9.2 连续信号和离散序列的傅里叶变换的比较

连续	离散
$X(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$	$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$
$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$	$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega$

频率的比较

模拟角频率Ω，量纲：弧度/秒；

数字角频率ω，量纲：弧度；

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$是周期为$2\pi$的周期函数

$$z=\mathrm{e}^{sT}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$$

$$\omega=\Omega T$$

8.9.3 序列的频谱

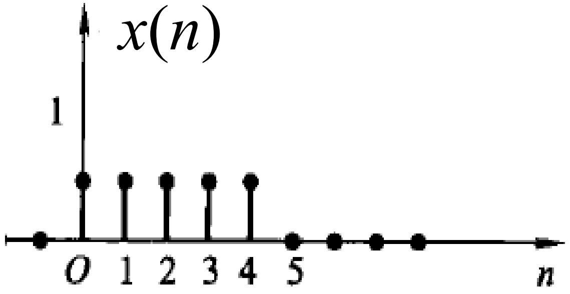
$X\left(e^{j\omega}\right)=\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\varphi(\omega)}$ $X\left(e^{j\omega}\right)$为$x(n)$的频谱

$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$为$x(n)$的幅度谱，$\varphi(\omega)$为相位谱。 两者都为 ω 的连续函数

因为$X\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)$， $X\left(e^{j\omega}\right)$是以2π为周期的周期函数

实序列的傅里叶变换 $X\left(e^{j\omega}\right)$ 的实部偶对称、虚部奇对称，幅度偶对称、相角奇对称 。

例8-18：已知序列 $x(n)=u(n)-u(n-5)$，求其傅里叶变换 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$。



解：

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}=\sum_{n=0}^{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5\omega}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$$

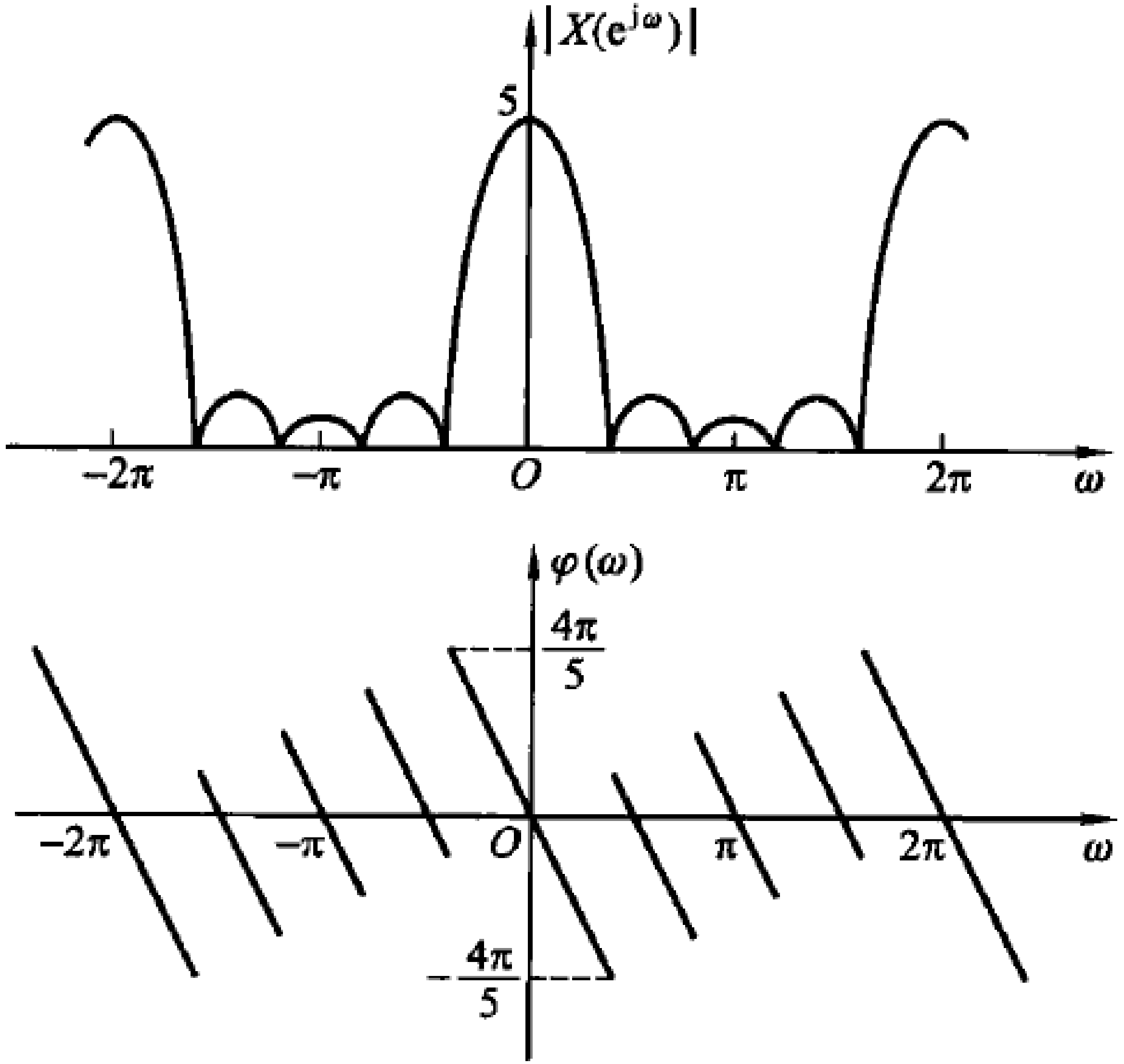
$$=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5\omega/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/2}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}5\omega/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5\omega/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/2}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}\cdot\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

$$=\left|X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

$$\left|X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right|=\left|\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right|$$

$$\varphi(\omega)=-2\omega+\arg\left[\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right]$$

方框内表达式的相移

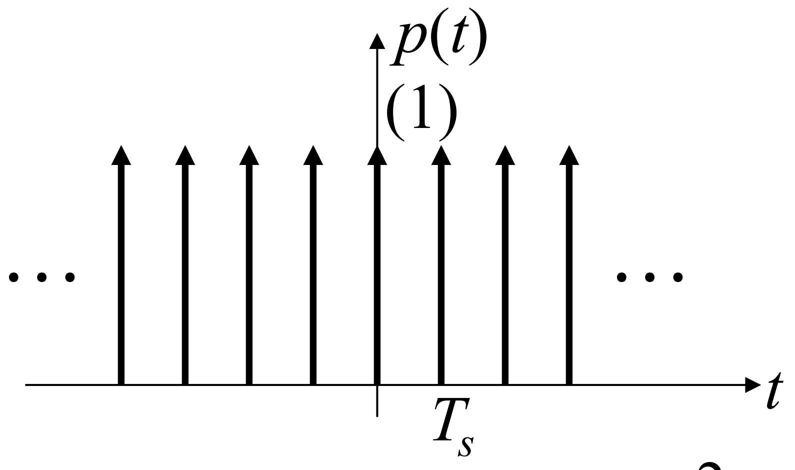

$|X(e^{j\omega})|$
5
-2π
$-\pi$
O
π
2π
ω
$\varphi(\omega)$
$\frac{4\pi}{5}$
$-\frac{4\pi}{5}$

抽样信号的傅里叶变换

令连续信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\mathrm{j}\Omega)$

抽样脉冲 $p(t)$ 的傅里叶变换为 $P(\mathrm{j}\Omega)$

抽样后信号 $f_s(t)$ 的傅里叶变换为 $F_s(\mathrm{j}\Omega)$



$$\left(\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}\right)$$

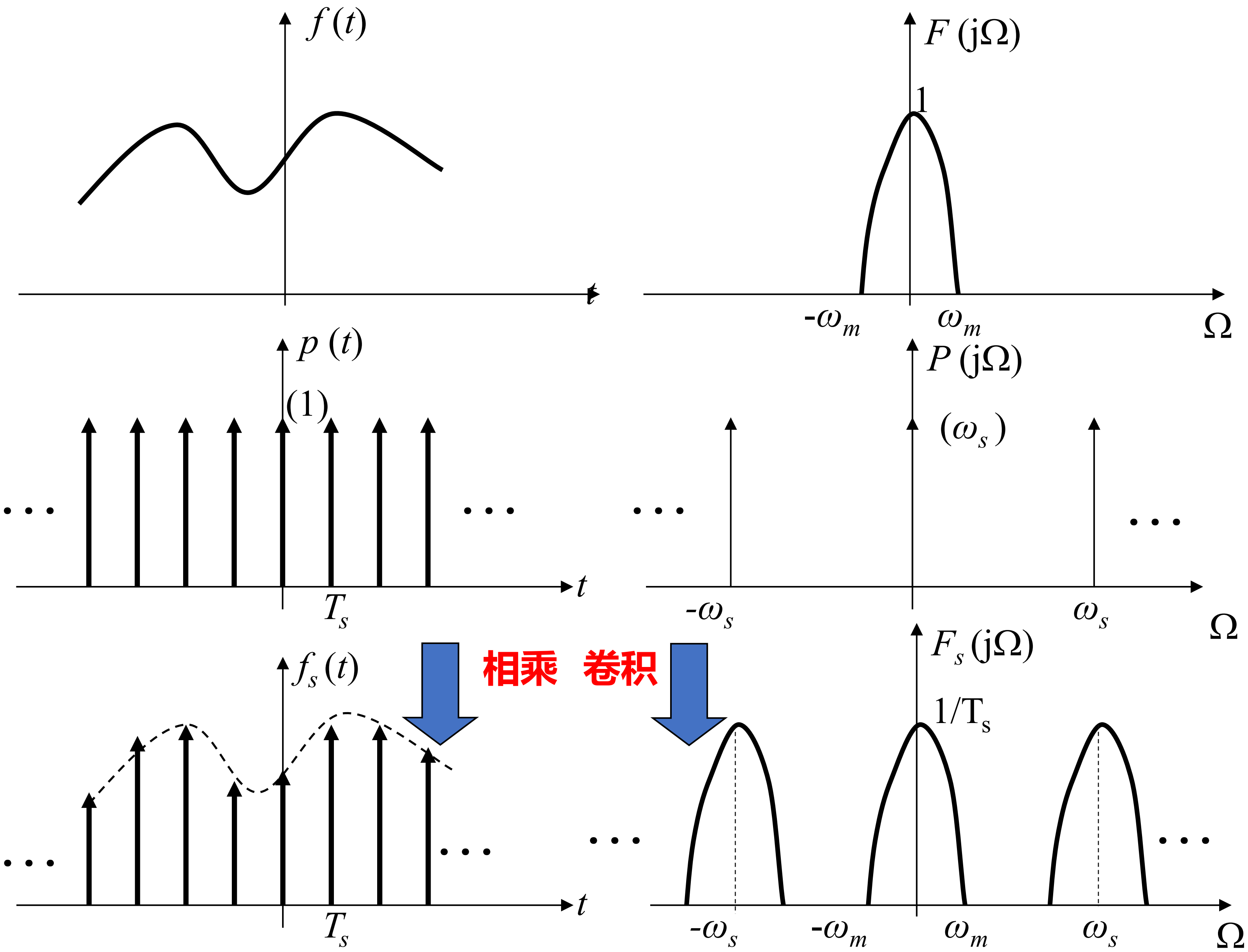
抽样信号：$f_s(t) = f(t)p(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$

$$P(\mathrm{j}\Omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\delta(\Omega-n\omega_s)$$ 其中，$$P_n = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_s t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T_s}$$

$$F_s(\mathrm{j}\Omega) = \frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\Omega)*P(\mathrm{j}\Omega) = \frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\Omega)*\frac{2\pi}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-n\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F[\mathrm{j}(\Omega-n\omega_s)] \longleftarrow$$ $F_s(\mathrm{j}\Omega)$ 是周期为 ω_s 的周期函数。

$\omega = \Omega T_s$，$\omega_s T_s = 2\pi$　　$F_s(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 是周期为 2π 的周期函数。


$f(t)$
t
$F(\mathrm{j}\Omega)$
1
$-\omega_m$
ω_m
Ω
$p(t)$
(1)
T_s
t
$P(\mathrm{j}\Omega)$
(ω_s)
$-\omega_s$
ω_s
Ω
$f_s(t)$
相乘
卷积
T_s
t
$F_s(\mathrm{j}\Omega)$
$1/\mathrm{T_s}$
$-\omega_s$
$-\omega_m$
ω_m
ω_s
Ω

8.9.4 DTFT收敛的充分条件

$x(n)$是绝对可和的，即$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|<\infty$,

或$x(n)$是平方可和的，即$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^{2}<\infty$

则$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(n\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$ 收敛

证明:

(1) 若要DTFT存在，就要求对于全部的 ω 有 $|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| < \infty$ 。

$$|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| = |\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)||\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

这表明若序列绝对可和，则傅里叶变换存在。但由于上式存在不等式缩放，绝对可和仅是充分条件。

(2) 若序列平方可和，即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 < \infty$，序列能量有限，此时有 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$均方收敛于$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，序列的傅里叶变换也存在。

上述两条件仅是傅里叶变换存在的充分条件，不满足这两个条件的某些序列（如周期性序列、单位阶跃序列），只要引入单位样值信号 $\delta(n)$，也可以得到它们的傅里叶变换。

序列傅里叶变换存在的充分必要条件至今尚未找到。

设置

下列关于序列傅里叶变换的说法中，错误的是（ ） 教材91页~95页

A 实序列的傅里叶变换满足共轭对称性，即 $X(e^{j\omega})$ 的实部偶对称、虚部奇对称，模值偶对称、相角奇对称。

B 序列满足绝对可和条件时一定满足能量受限，而能量受限不能保证绝对可和。

C $X(e^{j\omega})$是 ω 的复函数且周期为2π，但其模值与相角不一定以2π为周期。

D 序列傅里叶变换的帕塞瓦尔定理表明，序列的时域总能量等于频域一周期内的总能量。

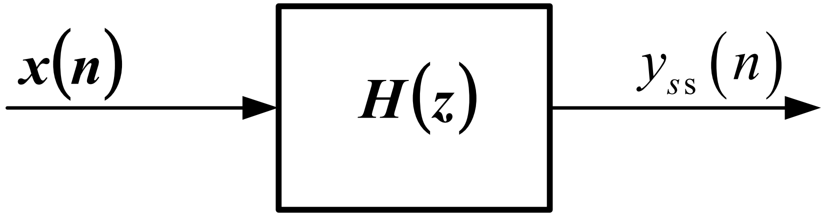
提交

8.10 离散时间系统的频率响应

8.10.1 离散系统频响特性的意义

1、频率响应特性的定义

频率响应特性：离散系统在正弦序列作用下的**稳态响应**随频率变化的情况。

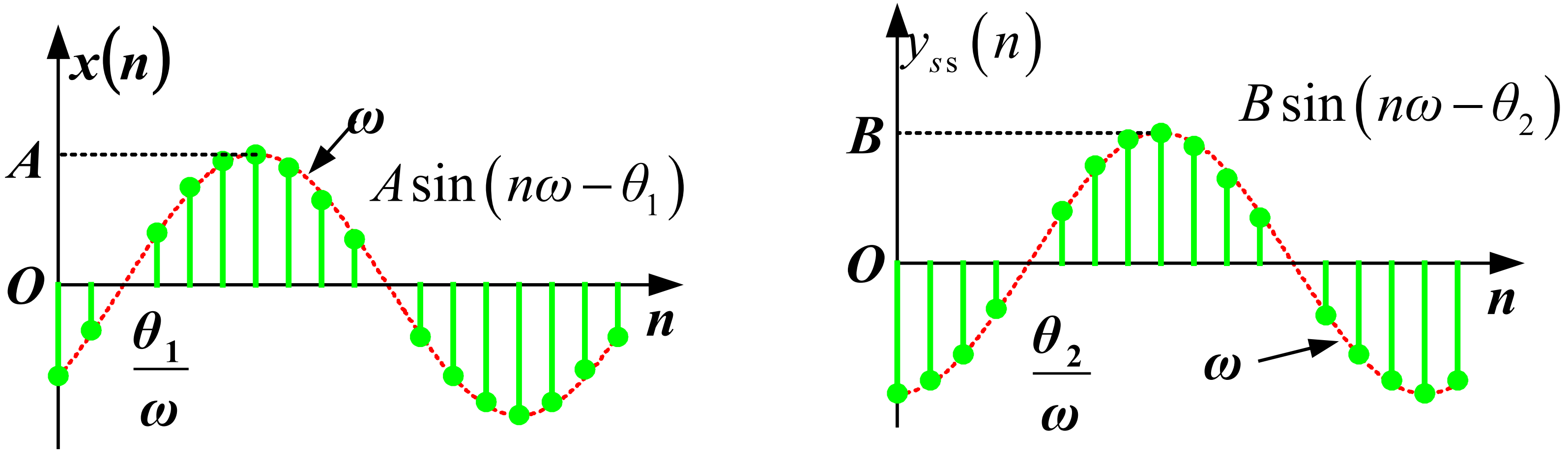


稳定的因果离散系统

$$x(n) = A\sin(n\omega) \quad (n \geq 0)$$

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi}$$

$$y_{ss}(n) = A\left|H(e^{j\omega})\right|\sin(n\omega + \varphi)$$



$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \frac{B}{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}[-(\theta_2-\theta_1)]}$$

$$\left|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right| = \frac{B}{A} \qquad \varphi = -(\theta_2 - \theta_1)$$

频率响应特性的意义：表示输出序列的幅度和相位相对于输入序列的变化。

2、由系统函数得到频响特性

系统函数在单位圆上的 z 变换即为系统的频率响应特性:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\sim\omega$ ：幅度响应或幅频特性

输出与输入序列的幅度之比

$\varphi(\omega)\sim\omega$ ：相位响应或相频特性

输出对输入序列的相移

$e^{j\omega}$ 为周期函数，所以 $H\left(e^{j\omega}\right)$ 为周期函数，

其周期为 2π 是有别于连续系统的一个突出特点。

3、频率响应与单位样值响应的关系

离散系统的频率响应是系统的单位样值响应的傅里叶变换。

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 是以 $h(n)$ 为加权系数，对各次谐波进行改变的情况（物理意义）。

由于$h(n)$一般是实序列，所以 $|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$是偶函数，$\varphi(\omega)$是奇函数。

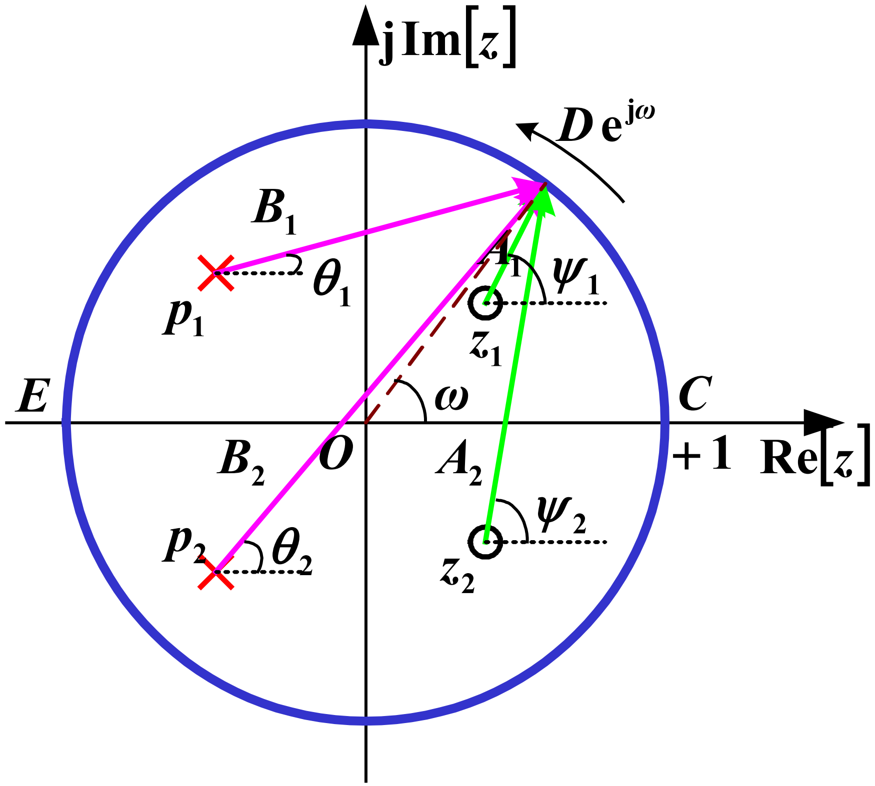
8.10.2 频响特性的几何确定

$$H(z)=H_0\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$

$$H(e^{j\omega})=H_0\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)}=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

令 $e^{j\omega}-z_r=A_r\,e^{j\psi_r}$

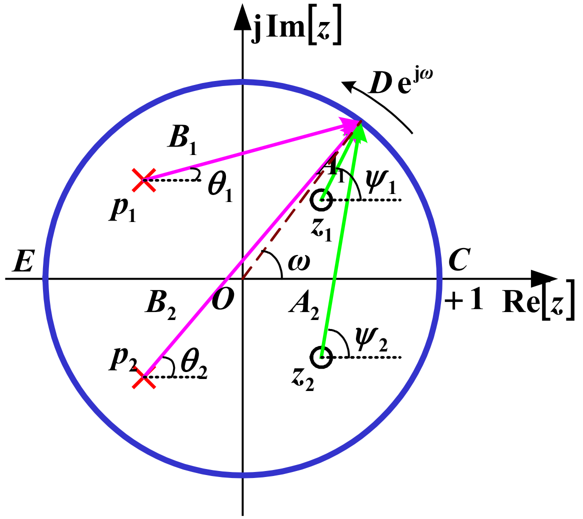
$$e^{j\omega}-p_k=B_k\,e^{j\theta_k}$$



$$\boxed{\text{幅频响应}\left|H(e^{j\omega})\right|=H_0\frac{\prod_{r=1}^{M}A_r}{\prod_{k=1}^{N}B_k}\qquad\text{相位响应}\,\varphi(\omega)=\sum_{r=1}^{M}\psi_r-\sum_{k=1}^{N}\theta_k}$$

$$\text{幅频响应}\left|H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right| = H_0 \frac{\prod_{r=1}^{M} A_r}{\prod_{k=1}^{N} B_k}$$

$$\text{相位响应}\,\varphi(\omega) = \sum_{r=1}^{M}\psi_r - \sum_{k=1}^{N}\theta_k$$



说明：

1）位于 $z=0$ 的零点或极点对幅度响应不产生作用，因而在 $z=0$ 处加入或去除零极点，不会使幅度响应发生变化，但会影响相位响应。

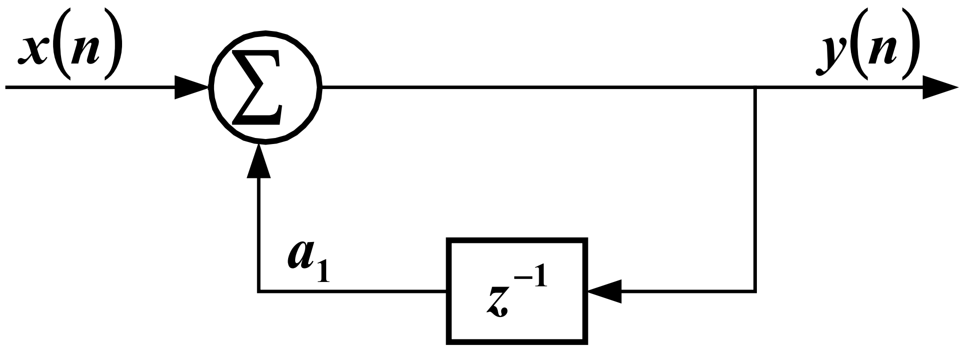
2）当 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$ 点旋转到某个极点 p_k 附近时，如果矢量长度 B_k 最短，则频率响应在该点可能出现峰值。

若极点 p_k 越靠近单位圆，B_k 越短，则频率响应在峰值附近越尖锐；

若极点 p_k 落在单位圆上，$B_k=0$，则频率响应的峰值趋于无穷大。

3）零点的作用与极点相反。

例8-19: 求下图所示一阶离散因果稳定系统的频率响应并分析其特性。



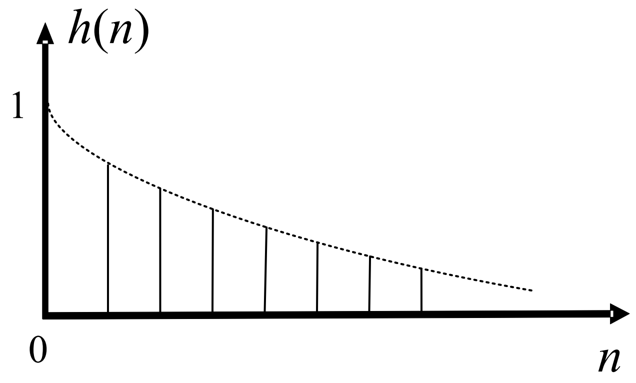
解:

差分方程 $y(n)=a_1 y(n-1)+x(n)$

系统函数 系统为因果系统，$H(z)=\dfrac{z}{z-a_1} \quad |z|>|a_1|$

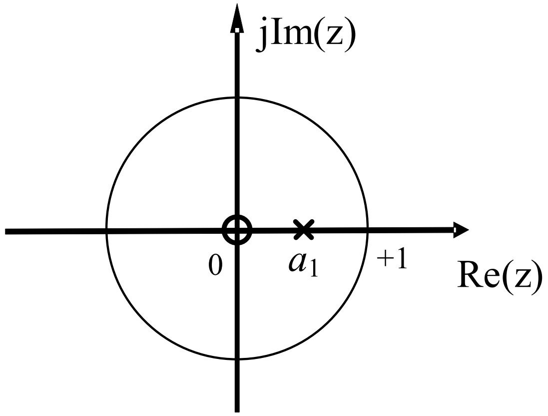
为了保证该系统稳定，要求$|a_1|<1$

单位样值响应 $h(n)=a_1^{\,n}u(n)$



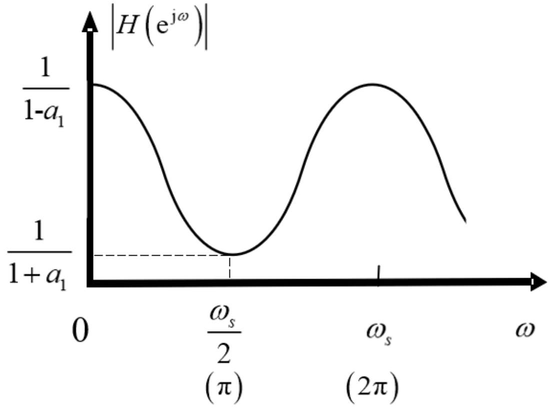
频率响应 $H\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a_1}=\dfrac{1}{\left(1-a_1\cos\omega\right)+ja_1\sin\omega}$

幅度响应 $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{1+a_1^{\,2}-2a_1\cos\omega}}$



相位响应 $\varphi(\omega)=-\arctan\left(\dfrac{a_1\sin\omega}{1-a_1\cos\omega}\right)$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a_1}$$



$0<a_1<1$时，系统为低通特性;$-1<a_1<0$时，系统为高通特性。

离散时间系统的频率响应小结

1. 系统的频响特性 $H\left(e^{j\omega}\right)=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\cdot e^{j\varphi(\omega)}$

$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ ：幅频特性，输出与输入序列的幅度之比

$\varphi(\omega)$ ：相频特性，输出对输入序列的相移

2. 系统的频率响应就是系统函数在单位圆上的动态，因 ω 而变化，影响输出的幅度与相位

3. 因为 $e^{j\omega}$ 是周期为 2π 的周期函数，所以系统的频响特性 $H\left(e^{j\omega}\right)$ 是周期为 2π 的周期函数

4. $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ 是关于 ω 的偶函数，$\varphi(\omega)$ 是关于 ω 的奇函数

8.10.3 滤波器介绍

滤波器的作用：

1）去除信号中不需要的部分(信号分离)，如随机噪声；

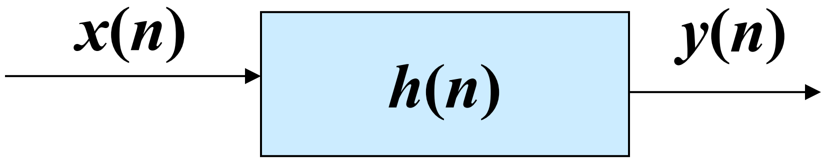
2）提取信号中的有用部分(信号恢复)，如提取某一频率段内的成分。

从系统角度看，滤波器分为模拟滤波器（analog filter, AF）和数字滤波器（digital filter, DF）两大类。它们都是可实现的线性时不变系统。两类滤波器在物理组成和工作方式上有很大不同 。

➢模拟滤波器：利用模拟电路对模拟信号做滤波处理。模拟滤波器只能用硬件实现，其元件是 R，L，C 及运算放大器或开关电容等 。

➢数字滤波器：利用离散时间系统对数字信号做滤波处理。数字滤波器既可以用硬件实现（数字信号处理器），也可以用计算机软件来实现。其在体积、重量、精度、稳定性、可靠性、存储功能、灵活性以及性能价格比等方面明显优于模拟滤波器 。

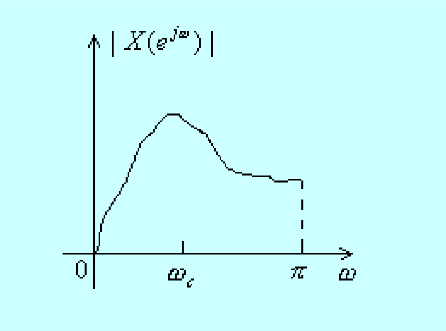
8.10.4 数字滤波器的工作原理



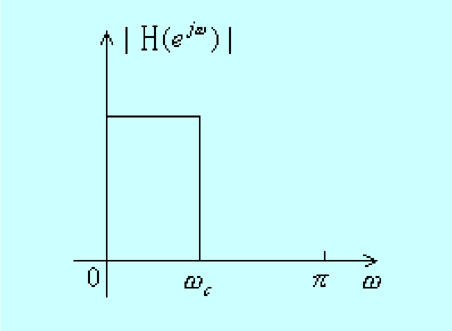
LTI 系统的输出为: $y(n)=x(n)*h(n)=IDTFT[X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]$

输入序列的频谱 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 经过滤波器 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 后变成 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$

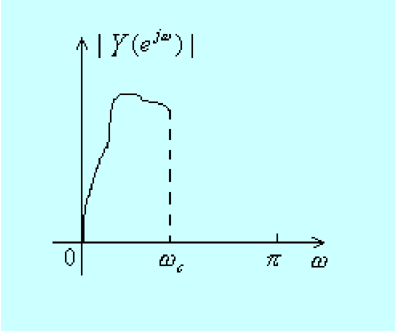
选取 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$,使滤波器输出 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 符合我们的要求，这就是数字滤波器的工作原理。



$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$



$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$



$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$

$x(n)$ 通过系统 $h(n)$ 后，
使输出 $y(n)$ 中
不再含有 $|\omega|>\omega_c$ 的频率成分，
而使 $|\omega|<\omega_c$ 的成分”不失真的通过”

8.10.5 经典滤波器和现代滤波器

1、经典滤波器

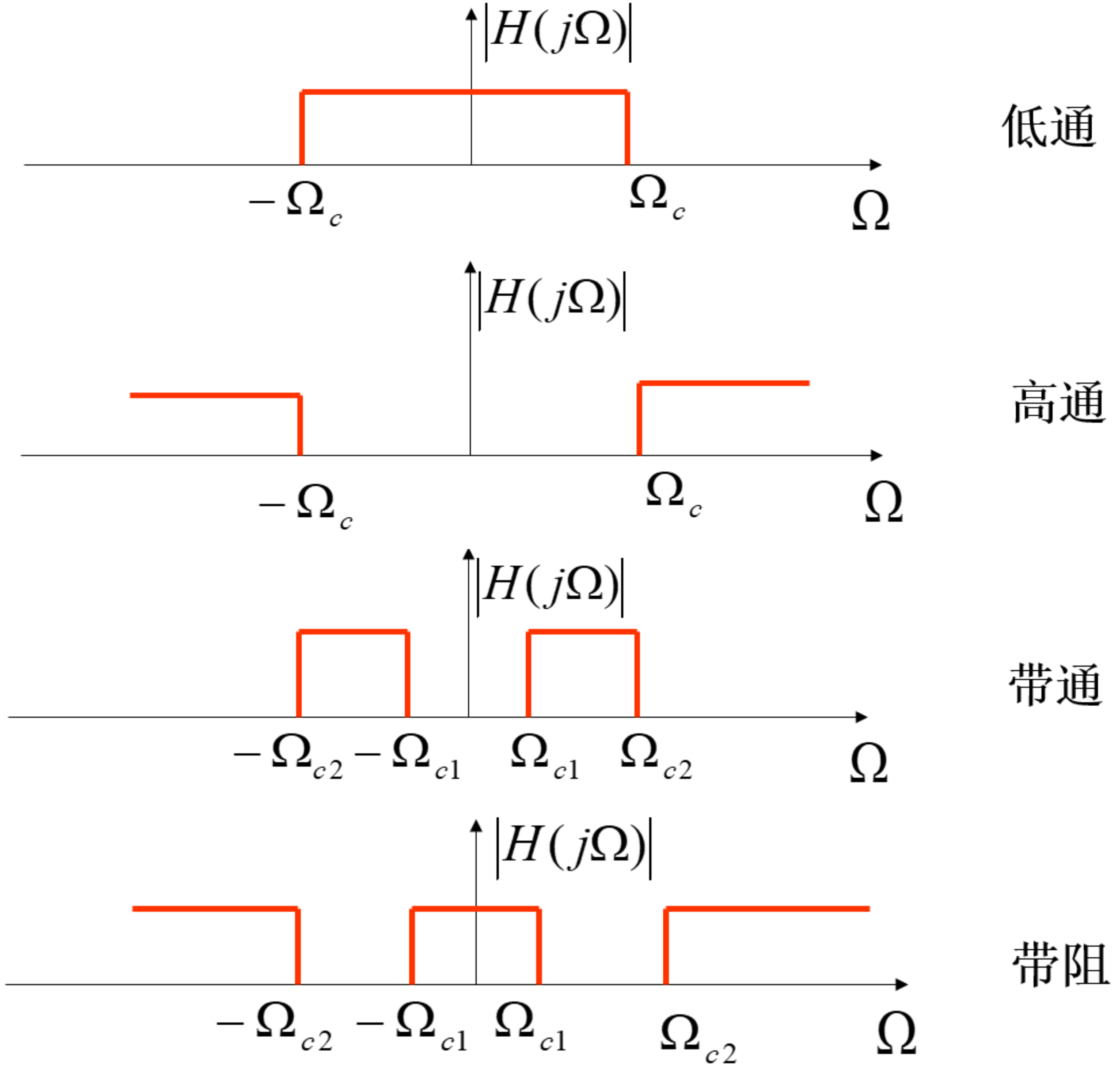
$$x(n)=s(n)+u(n)$$ → 加性噪声

若 $x(n)$ 中的有用成分 $s(n)$ 和希望去除的成分 $u(n)$ 各自占有不同的频带, 通过一个线性系统可将 $u(n)$ 有效去除

按功能分: 低通 (LP)，高通 (HP)，带通 (BP)， 带阻 (BS)，全通

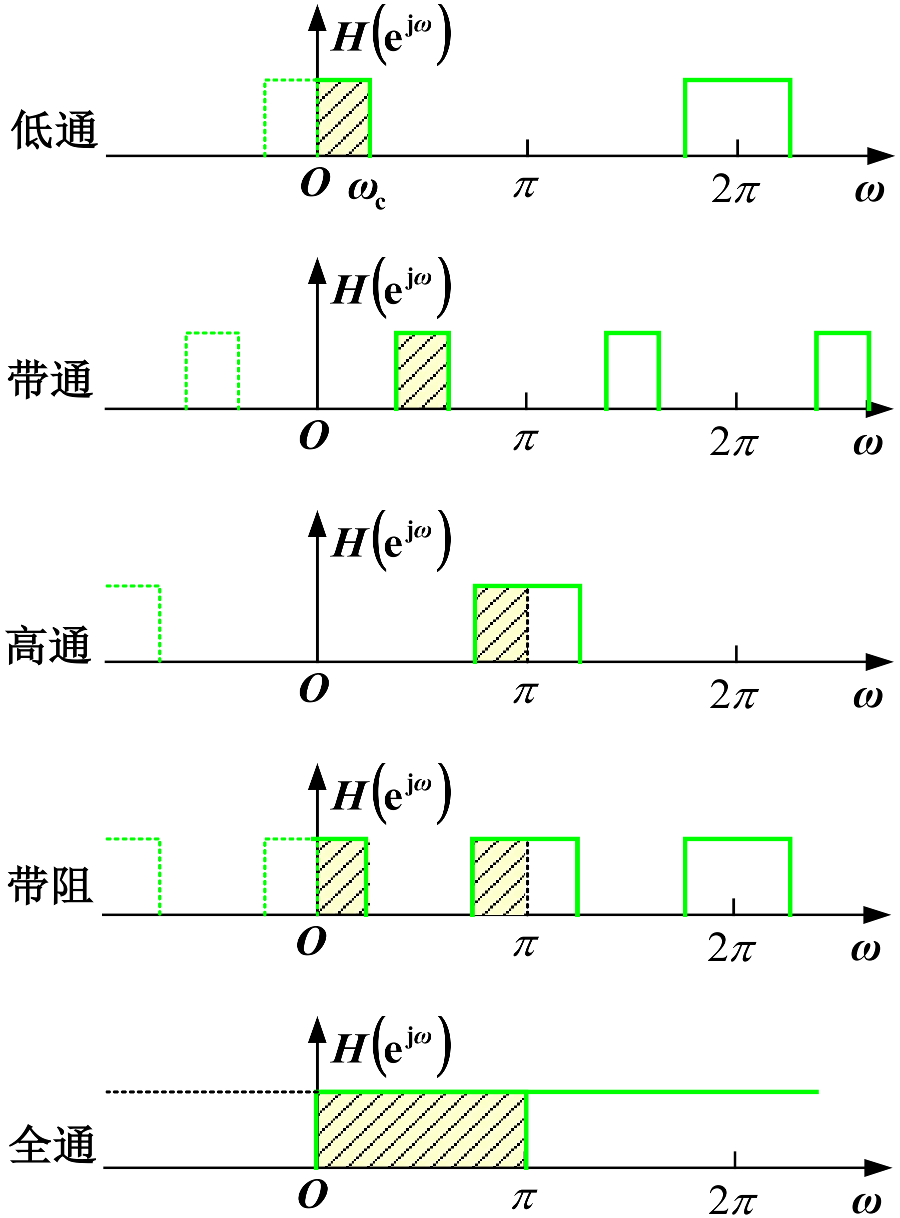
每一种又有模拟 (AF)、数字 (DF) 两种滤波器

1）模拟滤波器的理想幅频特性



2）数字滤波器的理想幅频特性

由于周期性和对称性，只研究 $0 \le \omega \le \pi$ 范围即可。



单选题 1分

设置

下列关于滤波器的说法中，错误的是（ ）

A 滤波器通过减小某频率处的增益来“滤除”该频率

B 数字滤波器 $\omega = \pi$ 附近区域对应实际频率的“高频”

C 模拟滤波器可直接对模拟信号进行处理，数字滤波器只能处理经过模数转换后的数字信号。

D 理想数字低通滤波器可以物理实现。

提交

2、现代滤波器

$x(n) = s(n)u(n)$ → 乘法性噪声

$x(n) = s(n) * u(n)$ → 卷积性噪声

信号的频谱和噪声道频谱混迭在一起，靠经典的滤波方法难以去除噪声。

目标：从含有噪声的数据记录(又称时间序列)中估计出信号的某些特征或信号本身。

滤波器种类：维纳(Wiener)滤波器、卡尔曼(Kalman)滤波器、线性预测、自适应滤波器

对数字滤波器（DF），从实现方法上，有 finite impulse response （FIR）滤波器和 infinite impulse response （IIR）滤波器之分，转移函数分别为:

FIR DF: $$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

IIR DF: $$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

作 业

教材习题：

基础题：8-32，8-33（2），8-34

加强题：8-33（1）（3），8-38