上节内容回顾

2.1　引言

2.2　系统数学模型（微分方程）的建立

2.3　用时域经典法求解微分方程

2.4　起始点的跳变-从0-到0+状态的转换

2.1 引言

为什么要进行系统的时域分析？

LTI 系统的时域分析方法：

- 直观、物理概念清楚，是学习各种变换域分析法的基础；
- 计算过程复杂，但计算机和软件的发展使其求解更方便。

信号 → 分解 → 系统 → 叠加 → 响应

对于已知的信号　**确定的系统**　**如何得到系统响应?**

1. 系统的数学模型如何建立？　微分方程
2. 系统的响应如何分解？　自由+强迫，零输入+零状态
3. 不同的响应如何求解？　经典解法和卷积解法
4. 信号与系统如何应用？　模拟框图，计算机求解

2.3 用时域经典法求解微分方程

时域经典法分析电路系统的流程

优点：物理意义清楚；
缺点：过程复杂。

1. 根据基尔霍夫定律列写电路的微分方程

2. 将联立的微分方程化为一元微分方程

3. 求齐次解（系数待定）

4. 查表求特解

5. 完全解 = 齐次解 + 特解, 将完全解代入微分方程求齐次解的系数

初始状态

6. 已定系数的完全解—系统的全响应

齐次解特征方程为

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

特征根$\alpha_1 \ldots \alpha_n$是系统的“固有频率”。

1）特征根无重根，则微分方程的齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}$$

2）特征根有重根，假设α_1是特征方程的K重根，那么，在齐次解中对应于α_1的部分将有K项

$$(A_1 t^{K-1} + A_2 t^{K-2} + \ldots + A_{K-1} t + A_K) e^{\alpha_1 t}$$

3）若α_1、α_2 为共轭复根，即$\alpha_{1,2} = \alpha \pm j\beta$，那么，在齐次解中对应于$\alpha_1$、$\alpha_2$的部分为

$$e^{\alpha t}(A_1 \cos\beta t + A_2 \sin\beta t)$$

特解的函数形式与激励的函数形式有关。**将激励信号代入微分方程的右端得到的函数式称为“自由项”**。通常观察自由项，**查表选特解函数式，将其代入方程后求得特解函数式中的待定系数**，即可求出特解。

自由项	特解
E (常数)	B (常数)
t^p	$B_p t^p + B_{p-1} t^{p-1} + \ldots + B_1 t + B_0$
$e^{\alpha t}$	$\begin{cases} Be^{\alpha t} & (\alpha\text{不是特征根}) \\ Bte^{\alpha t} & (\alpha\text{是单特征根}) \\ Bt^2 e^{\alpha t} & (\alpha\text{是二重特征根}) \end{cases}$
$\begin{cases} \cos\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t \end{cases}$	$B_1 \cos\omega_0 t + B_2 \sin\omega_0 t$

完全响应的分解：

$$v_2(t) = \underbrace{-\frac{6}{25}e^{-t} + \frac{9}{50}e^{-6t}}_{\text{自由响应（齐次解）}} + \underbrace{\frac{21}{50}\sin(2t) + \frac{3}{50}\cos(2t)}_{\text{强迫响应（特解）}}$$

当输入信号为阶跃信号或有始周期信号时，稳定系统的全响应可以分为暂态响应和稳态响应。暂态响应是指激励接入后，全响应中暂时出现的响应，随时间增长逐渐消失，稳态响应通常由阶跃函数和周期函数组成。

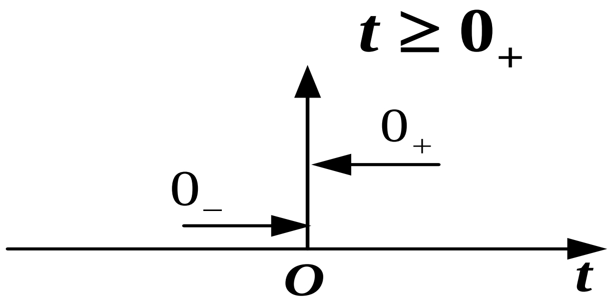
$$v_2(t) = \underbrace{-\frac{6}{25}e^{-t} + \frac{9}{50}e^{-6t}}_{\text{暂态响应}} + \underbrace{\frac{21}{50}\sin(2t) + \frac{3}{50}\cos(2t)}_{\text{稳态响应}}$$

2.4 起始点的跳变–从0_-到0_+状态的转换

在系统分析问题中，初始条件要根据激励接入瞬时**系统的状态**决定。

系统在t_0时的状态是一组必须知道的**最少数据量**，根据这组数据、系统的数学模型以及t_0时接入的激励信号，就能够完全确定在t_0以后任意时刻的响应。***n*阶微分方程的状态是响应的0—(*n*-1)阶导数。** （详见第十二章）

0_-状态，**起始状态**（激励接入之前的瞬间）



$$r^{(k)}(0_-)=\left[r(0_-),\frac{\mathrm{d}\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t},\frac{\mathrm{d}^2\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t^2},\cdots\frac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}\right]$$

0_+状态，**初始条件**，导出的起始状态（激励接入之后的瞬间）

$$r^{(k)}(0_+)=\left[r(0_+),\frac{\mathrm{d}\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t},\frac{\mathrm{d}^2\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t^2},\cdots\frac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}\right]$$

用时域经典法求得的微分方程的解在$t \geq 0_+$的时间范围内，因而不能以0_-状态作为初始条件，而应以0_+状态作为初始条件。

2.4 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换

对于具体的电网络，系统的**起始状态就是系统中储能元件的储能情况**。

一般情况下换路期间**电容两端的电压**和流过**电感中的电流不会发生突变**。这就是在电路分析中的换路定则：

$$v_C(0_-) = v_C(0_+), \quad i_L(0_-) = i_L(0_+)$$

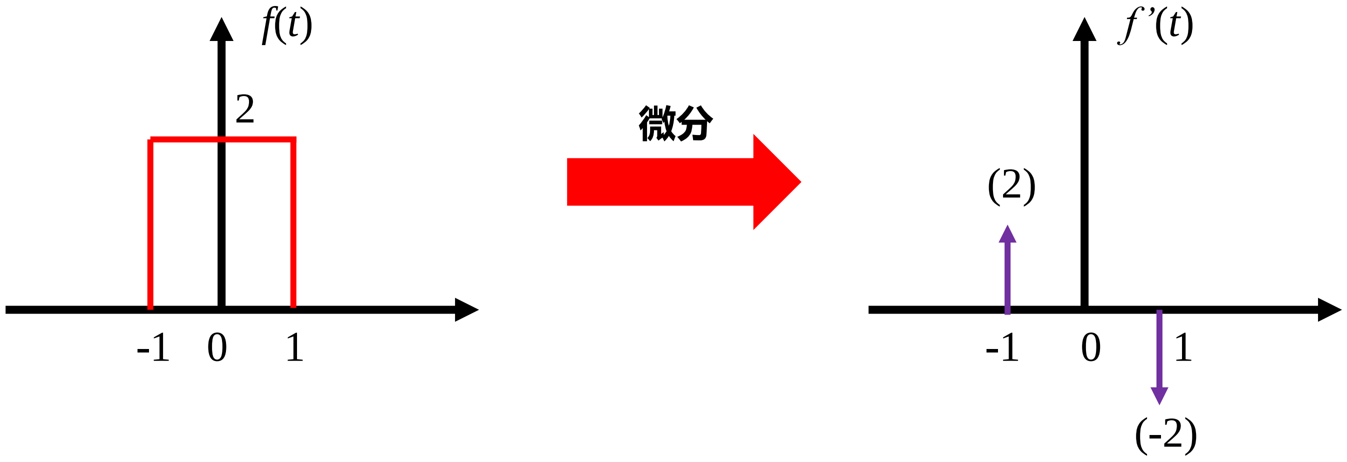
当有冲激电流强迫作用于电容或有冲激电压强迫作用于电感，从0_-到0_+状态就会发生跳变。

重点和难点：如何确定从0_-到0_+状态的跳变量？

2.4 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换

冲激函数匹配法：冲激函数是产生状态跳变的原因（例如，电容中的冲激电流导致其电压跳变），所以***t* =0 时微分方程左右两端的*δ*(*t*)及其各阶导数应该平衡。**

(其他项也应该平衡，我们讨论初始条件，只关注引起状态跳变的冲激函数及其导数，因此可以不管其他项。）



$$f(t)=2u(t+1)-2u(t-1)$$

$$\frac{df(t)}{dt}=2\delta(t+1)-2\delta(t-1)$$

跳变的概念：其导数是冲激函数。

填空题 1分

设置

已知系统微分方程为 $2r''(t)+6r'(t)+4r(t)=\delta(t)$，$r(0_-)=1$，$r'(0_-)=1/2$，则$r(0_+)=$ [填空1] ， $r'(0_+)=$[填空2] 。

作答

2.4 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换

系统微分方程为$2r''(t)+6r'(t)+4r(t)=\delta(t)$，已知$r(0_-)=1$和$r'(0_-)=1/2$，求$r(0_+)$和$r'(0_+)$。

解：将方程左边最高阶导数的系数归一化1，$r''(t)+3r'(t)+2r(t)=\delta(t)/2$

方法一： 设 $r''(t)=\frac{1}{2}\delta(t)$，　$r'(t)=\frac{1}{2}\Delta u(t)$，　$r(t)=0$　(t=0时信号连续)

1/2表示0_-到0_+的状态跳变量

$$r'(0_+)=r'(0_-)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$r(0_+)=r(0_-)=1$$

$\Delta u(t)$：相对单位跳变函数

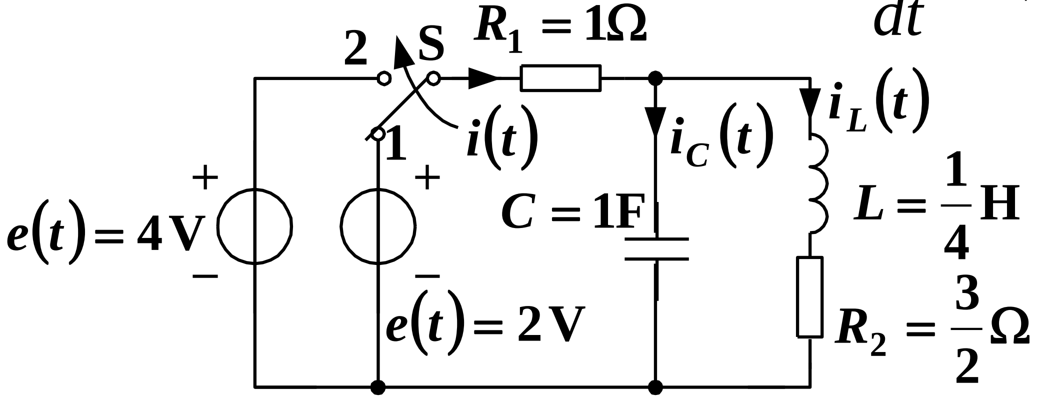
表示0_-到0_+幅度跳变一个单位

方法二： 方程右端含$\delta(t)$项，它一定属于$r''(t)$，说明$r'(t)$在0时刻发生了**1/2个单位的跳变**，即 $r'(0_+)=r'(0_-)+\frac{1}{2}=1$。

而$r(t)$在0时刻没有变化，即$r(0_+)=r(0_-)=1$。

用冲激函数匹配法求例2-3中0_-到0_+时的状态变化。

给定如图所示电路，$t<0$ 开关S处于1的位置而且已经达到稳态。当$t=0$ 时由1转向2，建立电流 $i(t)$的微分方程并确定换路后的 $i(0_+)$ 和$\frac{d}{dt}i(0_+)$ 。



解： 列写电路的微分方程

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t)$$

0_+时刻附近激励的表达式为：$e(t)=e(0_-)+2\Delta u(t)=2+2\Delta u(t)$,

代入方程右边可得：$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)+8\Delta u(t)+8$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+10i(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)+8\Delta u(t)+8$$

令 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t)=2\delta'(t)+a\delta(t)$，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)=2\delta(t)+\underline{a}\Delta u(t)$，$i(t)=\underline{2}\Delta u(t)$

0_-到0_+的状态跳变量

将上述表达式代入方程左边，只保留方程两边的冲激函数及其导数项进行匹配，

$$2\delta'(t)+(a+14)\delta(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)$$

$$a+14=12 \Rightarrow a=-2$$

$$\therefore i(0_+)=i(0_-)+2=\frac{4}{5}+2=\frac{14}{5}\ \mathrm{A}\,,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_+)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_-)-2=0-2=-2\ \mathrm{A/s}$$

2.4 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换

对于一个N阶微分方程 $\frac{d^N r(t)}{dt^N}+\sum_{k=0}^{N-1} a_k \frac{d^k r(t)}{dt^k}=\sum_{r=0}^{N} b_r \frac{d^r \delta(t)}{dt^r}$

令 $\frac{d^N r(t)}{dt^N}=\sum_{r=0}^{N} c_r \frac{d^r \delta(t)}{dt^r}$

$$\frac{d^{N-1} r(t)}{dt^{N-1}}=\sum_{r=1}^{N} c_r \frac{d^{r-1} \delta(t)}{dt^{r-1}}+\boxed{c_0 \Delta u(t)}$$

$$\frac{d^{N-2} r(t)}{dt^{N-2}}=\sum_{r=2}^{N} c_r \frac{d^{r-2} \delta(t)}{dt^{r-2}}+\boxed{c_1 \Delta u(t)}$$

$\vdots$

$$\frac{d\ r(t)}{dt}=c_N \delta'(t)+c_{N-1}\delta(t)+\boxed{c_{N-2}\Delta u(t)}$$

$$r(t)=c_N \delta(t)+\boxed{c_{N-1}\Delta u(t)}$$

状态跳变

$$\frac{d^{N-1} r(0_+)}{dt^{N-1}}=\frac{d^{N-1} r(0_-)}{dt^{N-1}}+c_0$$

$$\frac{d^{N-2} r(0_+)}{dt^{N-2}}=\frac{d^{N-2} r(0_-)}{dt^{N-2}}+c_1$$

$\vdots$

$$\frac{d\ r(0_+)}{dt}=\frac{d\ r(0_-)}{dt}+c_{N-2}$$

$$r(0_+)=r(0_-)+c_{N-1}$$

将上述公式代入方程左边，

$$c_N \frac{d^N\delta(t)}{dt^N} + \sum_{r=0}^{N-1}\left(c_r + \sum_{k=r+1}^{N}\left(a_{N+r-k}c_k\right)\right)\frac{d^r\delta(t)}{dt^r} = \sum_{r=0}^{N} b_r \frac{d^r\delta(t)}{dt^r}$$

$$c_N = b_N, c_r + \sum_{k=r+1}^{N}\left(a_{N+r-k}c_k\right) = b_r\,(r=0,\ldots,N-1),$$ 求解$c_r\,(r=0\ldots,N-1)$。

$$\frac{d^k r(0_+)}{dt^k} = \frac{d^k r(0_-)}{dt^k} + c_{N-1-k}\,(k=0,\ldots,N-1)$$

特例：若b_1至b_N均为0（方程右边的最高阶为$\delta(t)$），

则c_1至c_N均为0，$c_0 = b_0$。

$$\frac{d^{N-1} r(0_+)}{dt^{N-1}} = \frac{d^{N-1} r(0_-)}{dt^{N-1}} + b_0$$

$$\frac{d^k r(0_+)}{dt^k} = \frac{d^k r(0_-)}{dt^k} \quad (k=0,\ldots,N-2)$$

冲激函数匹配法自主练习题

（1） $2\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+4r(t)=\frac{de(t)}{dt}$

已知 $e(t)=u(t)$，$r(0_-)=1$， $r'(0_-)=1$，求 $r(0_+)$，$r'(0_+)$。

答案： $r(0_+)=1, r'(0_+)=\frac{3}{2}$

（2） $\frac{d^2r(t)}{dt^2}+5\frac{dr(t)}{dt}+6r(t)=\frac{de(t)}{dt}-2e(t)$

已知 $e(t)=u(t)$，$r(0_-)=1$， $r'(0_-)=2$，求 $r(0_+)$，$r'(0_+)$。

答案： $r(0_+)=1, r'(0_+)=3$

本次课内容

2.5　零输入响应和零状态响应

2.6　冲激响应与阶跃响应

本次课目标

1. 掌握经典法求系统的零输入响应（齐次解）；
2. 熟练掌握用经典法和冲激函数匹配法求零状态响应；
3. 熟练运用冲激函数匹配法求冲激响应；
4. 熟悉冲激响应与阶跃响应的关系。

第二章 连续时间系统的时域分析

- 经典法求解系统的完全响应可分为：

完全响应=自由响应+强迫响应

$$r(t)=r_h(t)+r_p(t)$$

- 系统的完全响应也可分为：

完全响应=零输入响应+零状态响应

$$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$$

1．零输入响应的定义与待定系数确定

①定义：没有外加激励信号作用，完全由起始状态所产生的响应,即 $r_{zi}(t)=H[\{x(0_-)\}]$

②满足方程：$c_0\frac{d^n}{dt^n}r_{zi}(t)+\ldots+c_{n-1}\frac{d}{dt}r_{zi}(t)+c_n r_{zi}(t)=0$

故 $r_{zi}(t)$ 是一种齐次解形式，即 $r_{zi}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zik}e^{\alpha_k t}$

其中，$\alpha_1,\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$ 为互不相等的n个系统特征根。

③初始条件：$r_{zi}^{(k)}(0_+)=r_{zi}^{(k)}(0_-)=r^{(k)}(0_-)$

即齐次解$r_{zi}(t)$ 的待定系数用 $r^{(k)}(0_-)$ 确定即可！

2. 零状态响应的定义与待定系数确定

①定义：起始状态为0，只由激励产生的响应 $r_{zs}(t)=H[e(t)]$

②满足方程：

$$c_0\frac{d^n}{dt^n}r_{zs}(t)+\ldots\ldots+c_{n-1}\frac{d}{dt}r_{zs}(t)+c_n r_{zs}(t)=E_0\frac{d^m}{dt^m}c(t)+\ldots..+E_m$$

故 $r_{zs}(t)$ 既含齐次解，又含特解 $r_p(t)$，即 $r_{zs}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zsk}e^{\alpha_k t}+r_p(t)$

③初始条件：

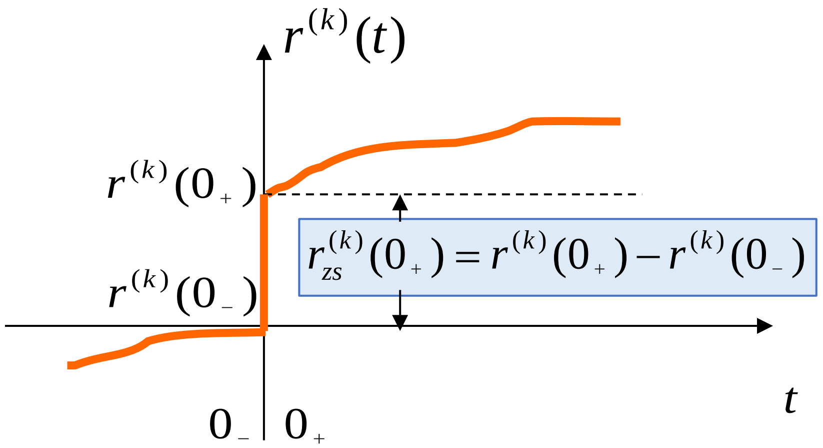
由于$r_{zs}(t)$在0_时刻的$k(k=0,\ldots n\text{-}1)$阶导数均为0，即 $r_{zs}^{(k)}(0\_)=0,$

$$r^{(k)}(0\_)=r_{zi}^{(k)}(0\_)+r_{zs}^{(k)}(0\_)=r_{zi}^{(k)}(0\_)$$

$$r^{(k)}(0_+)=r_{zi}^{(k)}(0_+)+r_{zs}^{(k)}(0_+)=r_{zi}^{(k)}(0\_)+r_{zs}^{(k)}(0_+)$$

$$r_{zs}^{(k)}(0_+)=r^{(k)}(0_+)-r^{(k)}(0\_)=\text{跳变值}$$

故 A_{zsk} 由跳变值确定。



$r^{(k)}(0_+)$：确定全响应的系数

$r^{(k)}(0_-)$：确定零输入响应的系数　重要！

$r_{zs}^{(k)}(0_+)$：确定零状态响应的系数

$$r(t)=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{Zik}e^{a_k t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{Zsk}e^{a_k t}+r_p(t)}_{\text{零状态响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(A_{Zik}+A_{Zsk})\ e^{a_k t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{r_p(t)}_{\text{强迫响应}}$$

单选题 1分

设置

下列说法**错误**的是:

A 系统的零状态响应包括部分自由响应和强迫响应

B 若系统初始状态为零，系统的响应就是系统的强迫响应

C 零状态响应与系统起始状态无关，是由激励信号产生的

D 零输入响应与系统激励无关，是由系统起始状态产生的

提交

2.5 零输入响应与零状态响应

- 自由响应—系统特征对应；强迫响应—激励信号对应。
- 零输入响应—系统内部储能引起；零状态响应—激励信号引起。
- 零状态响应在LTI系统研究领域有重要意义：
  - 大量的通信和电子系统实际问题只需求零状态响应；
  - 为求零状态响应，可以不用繁琐的经典法，而是利用卷积方法。
- 按零输入响应和零状态响应分解有助于理解线性系统的叠加性和齐次性特征。
  - 零输入响应对系统的起始状态（初始储能）呈线性；
  - 零状态响应对系统的激励信号满足线性和时不变特性。

例2-6： 已知系统的微分方程 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=2e'(t)+6e(t)$，起始状态 $r(0_-)=2$，$r'(0_-)=0$，$e(t)=u(t)$，求该系统的零输入响应和零状态响应。

解：（1）先求零输入响应 $r_{zi}(t)$

$$r_{zi}''(t)+3r_{zi}'(t)+2r_{zi}(t)=0$$

求初始值： $r_{zi}(0_+)=r_{zi}(0_-)=r(0_-)=2$

$$r_{zi}'(0_+)=r_{zi}'(0_-)=r'(0_-)=0$$

由特征根为-1，-2，设定 $r_{zi}(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$

代入初始值，求得系数 $A_1=4$，$A_2=-2$

$$r_{zi}(t)=4e^{-t}-2e^{-2t}\quad (t>0)$$

例2-6： 已知系统的微分方程 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=2e'(t)+6e(t)$，起始状态 $r(0_-)=2$，$r'(0_-)=0$，$e(t)=u(t)$，求该系统的零输入响应和零状态响应。

（2）再求零状态响应$r_{zs}(t)$

$$r_{zs}''(t)+3r_{zs}'(t)+2r_{zs}(t)=2\delta(t)+6u(t)$$

$$r_{zs}(0_+)=0 \quad r_{zs}'(0_+)=r_{zs}'(0_-)+2=2$$

观察发现$r(0)$不跳变，$r'(0)$ 跳变2个单位。

当 $t>0$ 时，$r_{zs}''(t)+3r_{zs}'(t)+2r_{zs}(t)=6$

设定齐次解：$r_{zsh}(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

设定特解：常数 B，代入方程，$2B=6$，求得 $B=3$。

$$r_{zs}(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+3 \qquad r_{zs}'(t)=-C_1e^{-t}-2C_2e^{-2t}$$

代入初始值 $r_{zs}(0_+)=0$，$r_{zs}'(0_+)=2$，求得系数C_1=-4，C_2=1

$$r_{zs}(t)=-4e^{-t}+e^{-2t}+3 \quad (t>0)$$

例2-7： 已知一线性时不变系统，在相同初始条件下，当激励为 $e(t)$时，其全响应为 $r_1(t)=[2e^{-3t}+\sin(2t)]u(t)$；当激励为 $2e(t)$ 时，全响应为$r_2(t)=[e^{-3t}+2\sin(2t)]u(t)$ 。

（1）初始条件不变，求当激励为 $e(t-t_0)$ 时的全响应 $r_3(t)$，t_0 为大于零的实常数。

（2）初始条件增大1倍，求当激励为 $0.5e(t)$ 时的全响应 $r_4(t)$。

解： 设零输入响应为$r_{zi}(t)$，零状态响应为 $r_{zs}(t)$，则有

$$\begin{cases} r_1(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=\left[2e^{-3t}+\sin(2t)\right]u(t) \\ r_2(t)=r_{zi}(t)+2r_{zs}(t)=[e^{-3t}+2\sin(2t)]u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_{zi}(t)=3e^{-3t}u(t) \\ r_{zs}(t)=[-e^{-3t}+\sin(2t)]u(t) \end{cases}$$

(1) 初始条件不变，当激励为 $e(t-t_0)$ 时的全响应

$$\therefore r_3(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t-t_0)$$

$$=3e^{-3t}u(t)+[-e^{-3(t-t_0)}+\sin(2t-2t_0)]u(t-t_0)$$

（2）初始条件增大1倍，当激励为$0.5e(t)$ 时的全响应为

$$\therefore r_4(t) = 2r_{zi}(t) + 0.5r_{zs}(t)$$

$$= 2\left[3\mathrm{e}^{-3t}u(t)\right] + 0.5\left[-\mathrm{e}^{-3t} + \sin(2t)\right]u(t)$$

$$= \left[5.5\mathrm{e}^{-3t} + 0.5\sin(2t)\right]u(t)$$

已知系统微分方程为 $r'(t)+r(t)=e(t)$ ，在激励信号与初始储能的共同作用下，系统的完全响应为$r(t)=\left(1+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)$, 则系统的强迫响应分量为：

A $e^{-t}u(t)$

B $\frac{1}{2}e^{-t}u(t)$

C $(1-\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$

D $(1+\frac{1}{2}e^{-t})u(t)$

提交

已知系统微分方程为 $r'(t)+r(t)=e(t)$，在激励信号与初始储能的共同作用下，系统的完全响应为$r(t)=\left(1+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)$, 求系统的强迫响应分量。

解：

自由响应只与齐次解有关。

系统的特征方程为$\alpha+1=0$，特征根为$\alpha=-1$。因此系统的自由响应为

$\frac{1}{2}e^{-t}u(t)$。

强迫响应分量为全响应减去自由响应：$(1-\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$。

例2-8：假设某线性时不变系统的微分方程为

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=\frac{de(t)}{dt}+3e(t)$$

其中$e(t)$为激励，$r(t)$为响应。已知$e(t)=e^{-t}u(t)$，系统的完全响应为

$$r(t)=[(2t+3)e^{-t}-2e^{-2t}]u(t)\text{ 。}$$

（1）直接区分系统的强迫响应分量和自由响应分量，并说明理由。

（2）根据冲激函数匹配法求系统的初始状态 $r(0_-)$ 和 $r'(0_-)$。

（3）求系统的零输入响应和零状态响应。

解：（1）自由响应只与齐次解有关。系统的特征方程为 $\alpha^2+3\alpha+2=0$

求解得到特征根为 $\alpha_1=-1,\alpha_1=-2$ 。

因此系统的自由响应为$(3e^{-t}-2e^{-2t})u(t)$。

全响应减去自由响应得到强迫响应为 $2te^{-t}u(t)$。（激励中包含特征根）

（2）当 $e(t)=e^{-t}u(t)$ 时，

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=e^{-t}\delta(t)-e^{-t}u(t)+3e^{-t}u(t)$$

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=\delta(t)+2e^{-t}u(t)$$

在 t=0时，$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=\delta(t)+2\Delta u(t)$$

由冲激函数匹配法可知，在0时刻$r'(t)$ 发生了增量为1的跳变， $r(t)$不跳变。

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}=\delta(t),\ \frac{dr(t)}{dt}=1\cdot\Delta u(t),\ r(t)=0$$

$\therefore r(0_+)=r(0_-),\quad r'(0_+)=r'(0_-)+1$ 　0_到0+的状态跳变量

$$r(t)=[(2t+3)e^{-t}-2e^{-2t}]u(t),\quad r(0_+)=1$$

$$r'(t)=[2e^{-t}-(2t+3)e^{-t}+4e^{-2t}]u(t)=[-(2t+1)e^{-t}+4e^{-2t}]u(t),\quad r'(0_+)=3$$

$$r(0_-)=r(0_+)=1,\quad r'(0_-)=r'(0_+)-1=3-1=2$$

（3）求零输入和零状态响应。

方法一：先求系统的零输入响应。

因系统的特征根为 $\alpha_1=-1,\alpha_1=-2$，所以系统的零输入响应为

$$r_{zi}(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}\quad (t>0)。\qquad r_{zi}'(t)=-A_1e^{-t}-2A_2e^{-2t}\quad (t>0)$$

代入初始条件 $r_{zi}(0_+)=r_{zi}(0_-)=r(0_-)=1,\ r_{zi}'(0_+)=r_{zi}'(0_-)=r'(0_-)=2$

$$\begin{cases} A_1+A_2=1 \\ -A_1-2A_2=2 \end{cases} \longrightarrow A_1=4, A_2=-3$$

所以零输入响应为 $r_{zi}(t)=(4e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$

零状态响应为全响应减去零输入响应：$r_{zs}(t)=[(2t-1)e^{-t}+e^{-2t}]u(t)$

方法二：先求系统的零状态响应。

$$r_{zs}(t)=\underbrace{(A_{zs1}e^{-t}+A_{zs2}e^{-2t})u(t)}_{齐次解}+\underbrace{Bte^{-t}u(t)}_{特解}$$

特解即强迫响应，由问题（1）可知B=2。也可将特解和激励分别代入微分方程左侧和右侧求得B=2 。

由问题（2）可知，在0时刻$r(t)$不跳变，$r'(t)$跳变，增量为1。

故$r_{zs}(0_+)=r(0_+)-r(0_-)=0$，$r_{zs}^{'}(0_+)=r'(0_+)-r'(0_-)=1$

$$r_{zs}(0_+)=A_{zs1}+A_{zs2}=0$$

$$r_{zs}^{'}(0_+)=-A_{zs1}-2A_{zs2}+2=1$$

求得A_{zs1}=-1，$A_{zs2}=1$。

$$r_{zs}(t)=(2te^{-t}-e^{-t}+e^{-2t})u(t)$$

零输入响应为全响应减去零状态响应：$r_{zi}(t)=(4e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$

第二章 连续时间系统的时域分析

2.1 引言

2.2 系统数学模型（微分方程）的建立

2.3 用时域经典法求解微分方程

2.4 起始点的跳变-从0-到0+状态的转换

2.5 零输入响应和零状态响应

2.6 冲激响应与阶跃响应

2.7 卷积

2.8 卷积的性质

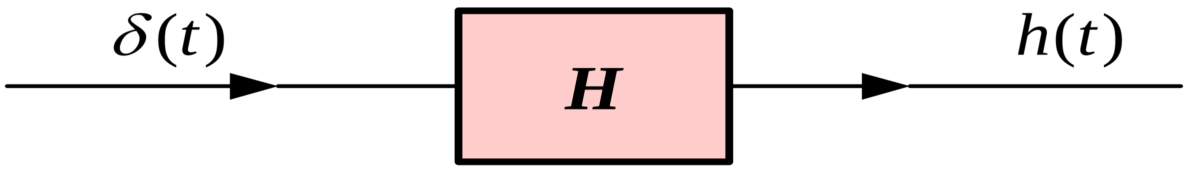
2.9 用算子符号表示微分方程

2.10 以“分配函数”的概念认识冲激函数

2.6.1 冲激响应

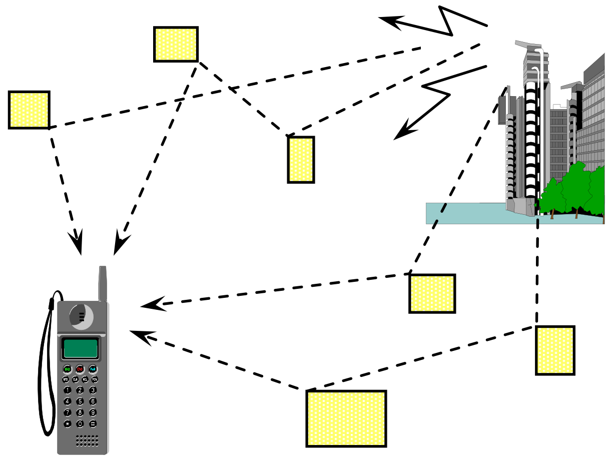
1. 定义

系统在单位冲激信号 $\delta(t)$ 作用下产生的零状态响应，称为单位冲激响应，简称冲激响应，一般用**h(t)**表示。



说明：在时域，对于不同系统，零状态情况下加同样的激励 $\delta(t)$ 看响应 $h(t)$，$h(t)$ 不同，说明其系统特性不同。冲激响应可以衡量系统的特性。

思考如何用冲激响应表征一个无线多径信道。



2. 冲激响应的数学模型

对于线性时不变系统，可以用一个微分方程表示

$$C_0\frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n}+C_1\frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+C_{n-1}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+C_n r(t)=$$

$$E_0\frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m}+E_1\frac{\mathrm{d}^{m-1} e(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+E_{m-1}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+E_m e(t)$$

响应及其各阶导数(最高阶为**n**次)

激励及其各阶导数(最高阶为**m**次)

令 $e(t)=\delta(t)$

则 $r(t)=h(t)$

$$C_0h^{(n)}(t)+C_1h^{(n-1)}(t)+\cdots+C_{n-1}h^{(1)}(t)+C_nh(t)$$

$$=E_0\delta^{(m)}(t)+E_1\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+E_{m-1}\delta^{(1)}(t)+E_m\delta(t)$$

下列说法中有哪些是正确的:

A 冲激响应是激励为单位冲激函数的全响应

B 冲激响应是激励为单位冲激函数的零状态响应

C 冲激响应是求齐次解，形式与零输入响应相同

D 冲激信号可以转换为系统的起始条件

提交

3. 冲激响应解的形式

$$C_0 h^{(n)}(t) + C_1 h^{(n-1)}(t) + \cdots + C_{n-1} h^{(1)}(t) + C_n h(t)$$
$$= E_0 \delta^{(m)}(t) + E_1 \delta^{(m-1)}(t) + \cdots + E_{m-1} \delta^{(1)}(t) + E_m \delta(t)$$

①与n, m相对大小有关

一般$n>m$，$h^{(n)}(t)$ 中包含$\delta^{(m)}(t)$项，以便与方程右端匹配，依次有$h^{(n-1)}(t)$ 中包含$\delta^{(m-1)}(t)$ 项，…。若$n=m+1$，$h'(t)$包含$\delta(t)$，而$h(t)$不包含$\delta(t)$ 。

$n > m$	$h(t)$ 不包含 $\delta(t)$ 及其各阶导数	（最常见）
$n = m$	$h(t)$ 包含 $\delta(t)$，不包含其各阶导数	
$n < m$	$h(t)$ 包含 $\delta(t)$ 及其各阶导数（最高为**m-n**阶）	

3. 冲激响应解的形式

②与特征根有关

若$n>m$且特征根为简单根（无重根）时，$h(t)=\left[\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\alpha_i t}\right]u(t)$

当$n>m$时，由于δ(t)及其导数在$t>0_+$时为零，即激励不复存在，因而方程式右端的自由项恒等于零，系统的冲激响应形式与零输入响应相同（相当于只求齐次解）。此时，冲激响应是具有零输入响应形式的零状态响应。冲激信号引入的能量存储转换为（等效于）零输入响应的起始条件。

例2-9： 已知一个系统的微分方程如下，求冲激响应$h(t)$。

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+4\frac{dr(t)}{dt}+3r(t)=\frac{de(t)}{dt}+2e(t)$$

解： 将$e(t)=\delta(t)$代入方程， $\frac{d^2h(t)}{dt^2}+4\frac{dh(t)}{dt}+3h(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$

特征根： $\alpha_1=-1,\alpha_2=-3$ 齐次解：$h(t)=(A_1e^{-t}+A_2e^{-3t})u(t)$

冲激函数匹配法一：从微分方程右边出发，根据右边的冲激函数及其导数项，推导响应的最高阶导数表达式，依次降阶得到响应及其各阶导数的表达式，代入方程左边，使两边的冲激函数平衡。

令 $\frac{d^2h(t)}{dt^2}=\delta'(t)+a\delta(t)$ 则 $\frac{dh(t)}{dt}=\delta(t)+a\Delta u(t)$ $h(t)=1\cdot\Delta u(t)$

将 $h(t)$、$h'(t)$、$h''(t)$代入微分方程，利用冲激函数匹配法，

$$a+4=2\rightarrow a=-2 \qquad \therefore h(0_+)=h(0\_)+1=1,\ h'(0_+)=h'(0\_)+a=-2$$

$$h(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-3t}\quad(t>0)$$

$$h(0_+)=1$$

$$\frac{dh(t)}{dt}=-A_1e^{-t}-3A_2e^{-3t}\quad(t>0)$$

$$\frac{dh(0_+)}{dt}=-2$$

$$\begin{cases}A_1+A_2=1\\A_1+3A_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=1/2\\A_2=1/2\end{cases}$$

所以$h(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{-3t})u(t)$。

例2-9： 已知一个系统的微分方程如下，求冲激响应$h(t)$。

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+4\frac{dr(t)}{dt}+3r(t)=\frac{de(t)}{dt}+2e(t)$$

冲激函数匹配法二（教材P65方法）：从微分方程左边出发，把响应表达式代入方程左边，使左右两边的冲激函数匹配，求出齐次解的系数。

齐次解：$h(t)=(A_1e^{-t}+A_2e^{-3t})u(t)$

$$\frac{dh(t)}{dt}=(A_1e^{-t}+A_2e^{-3t})\delta(t)+(-A_1e^{-t}-3A_2e^{-3t})u(t)$$

$$=(A_1+A_2)\delta(t)+(-A_1e^{-t}-3A_2e^{-3t})u(t)$$

$$\frac{dh^2(t)}{dt^2}=(A_1+A_2)\delta'(t)+(-A_1e^{-t}-3A_2e^{-3t})\delta(t)+(A_1e^{-t}+9A_2e^{-3t})u(t)$$

$$=(A_1+A_2)\delta'(t)+(-A_1-3A_2)\delta(t)+(A_1e^{-t}+9A_2e^{-3t})u(t)$$

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2}+4\frac{dh(t)}{dt}+3h(t)=\delta^{'}(t)+2\delta(t)$$

将 $h(t)$、$h^{'}(t)$、$h^{''}(t)$代入微分方程，只保留冲激函数及其导数项，利用冲激函数匹配法可得：

$$(A_1+A_2)\delta'(t)+(3A_1+A_2)\delta(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

$$\begin{cases} A_1+A_2=1 \\ 3A_1+A_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=1/2 \\ A_2=1/2 \end{cases}$$

所以$h(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{-3t})u(t)$。

注：此方法绕开了求$h(0_+)$和$h'(0_+)$。

例2-10： 已知一个LTI系统的微分方程如下，求冲激响应$h(t)$。

$$\frac{dr(t)}{dt}+5r(t)=\frac{de(t)}{dt}+2e(t)$$

解： 将冲激函数作为激励代入方程右边，得到 $\frac{dh(t)}{dt}+5h(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$

特征根 $\alpha_1=-5$

冲激函数匹配法一：从微分方程右边出发，根据右边的冲激函数及其导数项，推导响应的最高阶导数表达式，依次降阶得到响应及其各阶导数的表达式，代入方程左边，使两边的冲激函数平衡。

$$\frac{dh(t)}{dt}=\delta'(t)+a\delta(t) \qquad h(t)=\delta(t)+a\Delta u(t)$$

代入方程左边， $a+5=2\Rightarrow a=-3$

a—$h(t)$在0_-到0_+的跳变值。$h(0_+)=a$。

冲激响应：$h(t)=\delta(t)+\boxed{ae^{\alpha_1 t}}u(t)=\delta(t)-3e^{-5t}u(t)$

a决定初始值，特征根决定信号衰减的速度。在只有一个特征根时可直接写成这种形式。

$$\frac{dh(t)}{dt}+5h(t)=\delta^{'}(t)+2\delta(t)$$

特征根 $\alpha_1=-5$

冲激函数匹配法二：从微分方程左边出发，把响应表达式代入方程左边，使左右两边的冲激函数匹配，求出齐次解的系数。

冲激响应：$h(t)=A_1e^{\alpha_1 t}u(t)+b\delta(t)=A_1e^{-5t}u(t)+\boxed{b\delta(t)}$

此项存在是因方程左右两边阶数相同。δ(t) 的系数b与方程右边δ'(t)（对应*h'*(t)项）的系数相同，可观察到**b=1**，也可计算得到*b*。

将冲激响应的表达式代入微分方程，

$$-5A_1e^{-5t}u(t)+A_1e^{-5t}\delta(t)+b\delta'(t)+5A_1e^{-5t}u(t)+5b\delta(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

化简得到

$$b\delta'(t)+(A_1+5b)\delta(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

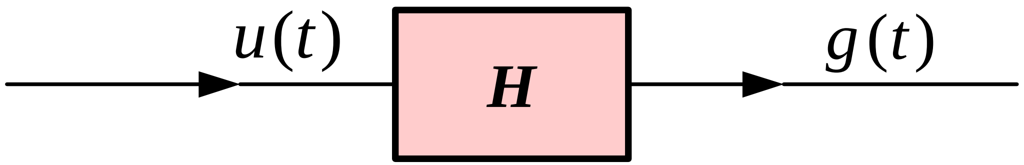
利用冲激函数匹配法， $b=1, A_1=-3$

冲激响应： $h(t)=\delta(t)-3e^{-5t}u(t)$

2.6.2 阶跃响应

1. 定义

系统在单位阶跃信号作用下的零状态响应，称为单位阶跃响应，简称阶跃响应。



系统方程的右端包含阶跃函数，所以除了齐次解外，还有特解项。

也可以根据线性时不变系统特性，利用冲激响应与阶跃响应的关系求阶跃响应。

2. 阶跃响应与冲激响应的关系

线性时不变系统满足微、积分特性

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{0_-}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$g(t)=\int_{0_-}^{t}h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$ 阶跃响应是冲激响应的积分。

$$h(t)=\frac{dg(t)}{dt}$$ 冲激响应是阶跃响应的微分。

因果系统的充分必要条件：冲激响应或阶跃响应在$t<0$时为0, 即

$$h(t)=0\quad(t<0)\quad 或\quad g(t)=0\quad(t<0)$$

作业

基础题（需提交）：2-4，2-6，2-8，2-9

加强题（选做，不提交）：2-7