上节内容

3.1 引言

3.2 周期信号的傅里叶级数分析

3.3 典型周期信号的傅里叶级数

3.1 引言

- 频域分析揭示了信号内在的频率特性及信号时间特性与其频率特性之间的密切关系，从而导出了信号的频谱、带宽及滤波、调制和频分复用等重要概念。
- 频域分析是通过傅里叶变换（傅里叶分析）进行的。将信号进行正交分解，即分解为三角函数或复指数函数的组合。
- 为什么选择三角函数（正弦波）作为傅里叶级数的基本信号？
  - ➢ 正弦曲线有保真度--一个正弦信号通过LTI系统后，输出的仍是正弦信号，只有幅度和相位可能发生变化，但频率和波形不变。
  - ➢ 三角（指数）函数的积分和求导仍为三角（指数）函数。

傅里叶分析

傅里叶级数展开：周期信号可以表示为成谐波关系的正弦信号的加权和。

傅里叶变换：非周期信号可以表示为在0到无穷高的所有频率分量上的正弦信号的加权积分。

- 狄里赫利条件（傅里叶级数存在的充分不必要条件）：

（1）在一个周期内，信号连续或只有有限个第一类间断点。（函数在该间断点存在有限值的左极限和右极限，如函数 x=|sin(t)|/sin(t)在点t=0处）

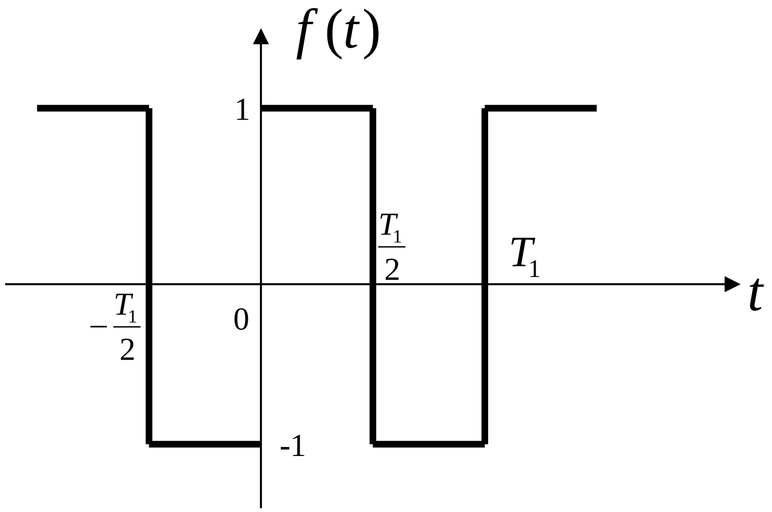
（2）在一个周期内，极大值和极小值的数目应为有限个。

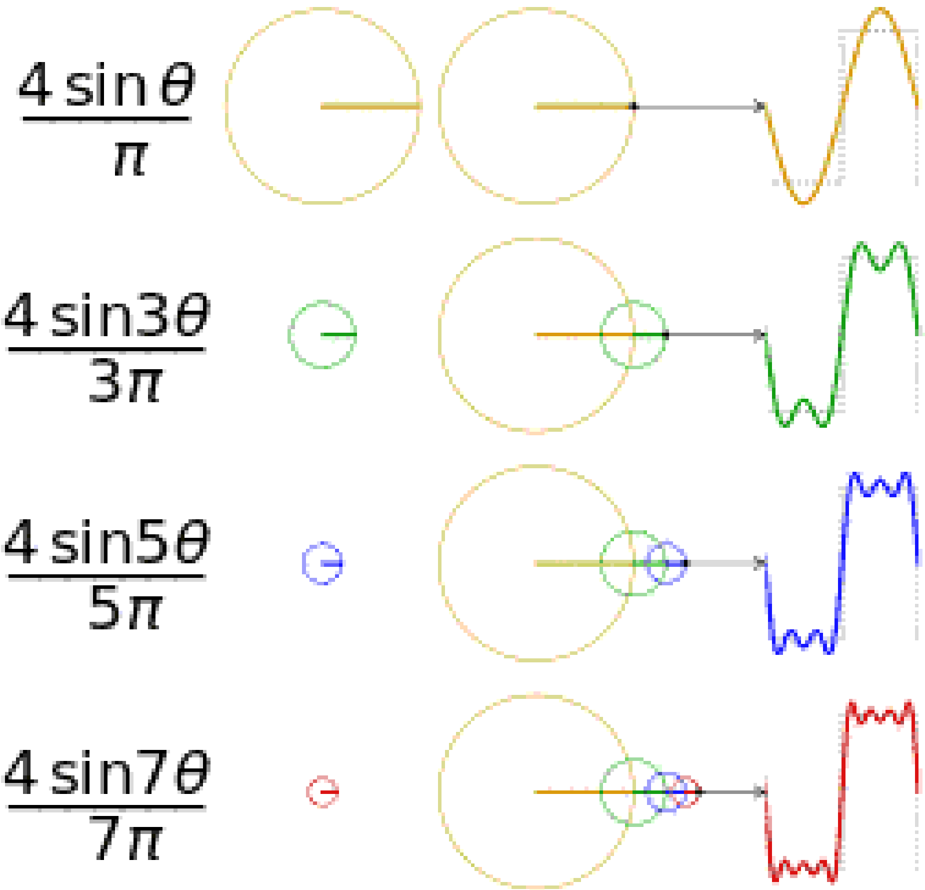
（3）在一个周期内，信号绝对可积，即 $\int_0^T \left|f\left(t\right)\right| \mathrm{d}t < \infty$ 。

- 任何周期函数在满足狄里赫利条件下，可以展成正交函数线性组合的无穷级数。

- 工程中的信号都满足狄里赫利条件。

周期矩形信号的产生





多少个正弦波叠加可以构成矩形信号？

无数个。

三角形式的傅里叶级数

设周期信号为$f(t)$, 其周期是T_1, 基波角频率 $\omega_1=2\pi f_1=\dfrac{2\pi}{T_1}$

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)\qquad（1）$$

直流分量：

$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)dt$$

余弦分量的幅度：

$$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\cos n\omega_1 tdt$$

正弦分量的幅度：

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\sin n\omega_1 tdt$$

以上各式中的积分限一般取：$0\sim T_1$ 或 $-\dfrac{T_1}{2}\sim\dfrac{T_1}{2}$

三角形式的傅里叶级数也可表示成：

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)\qquad（2）$$

其中 $c_0=a_0$ $\quad c_n^2=a_n^2+b_n^2$ $\quad \varphi_n=\arctan(-\dfrac{b_n}{a_n})$

指数形式的傅里叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$$

指数形式：

$$\boxed{f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}} \qquad (3)$$

其中 $\boxed{F_n=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt}$ ------ 复振幅

$$F_0=a_0=c_0$$

$$F_n=\left|F_n\right|e^{j\varphi_n}=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$$

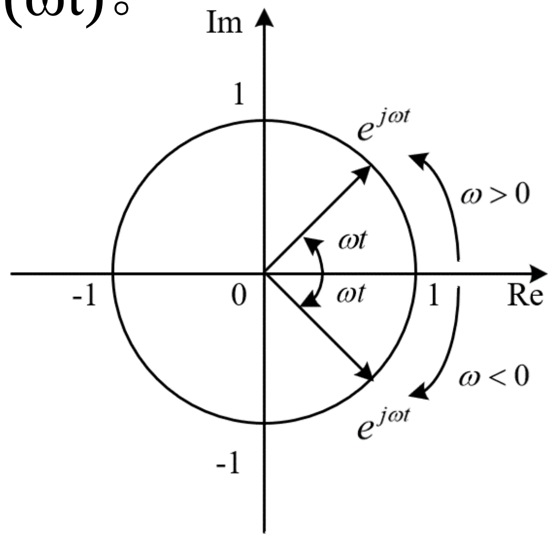
$$\left|F_n\right|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\frac{1}{2}c_n \qquad \varphi_n=\arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

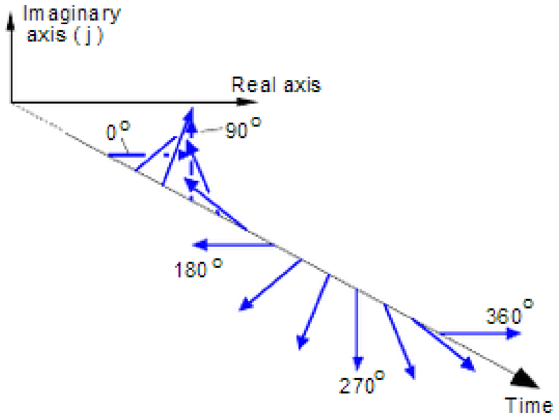
负频率的物理意义

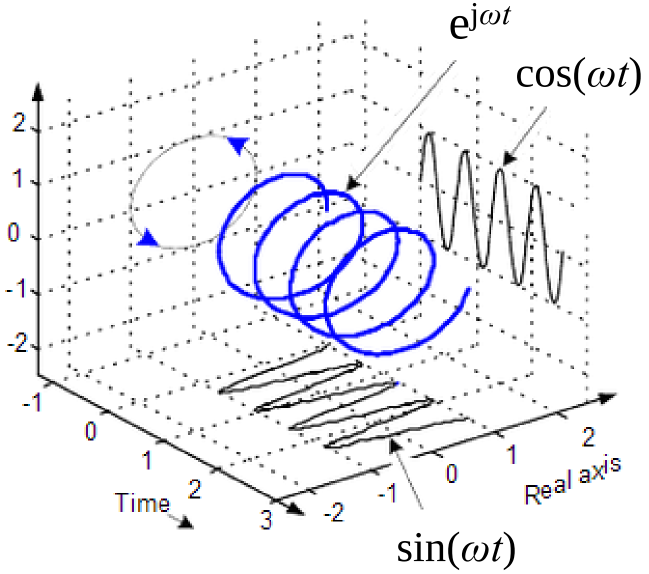
负频率与我们观察所在的空间相关。我们直觉认为现实世界不存在负频率，是在二维空间即x-t平面观察的结果，频率定义为单位时间内信号重复出现的次数，不会出现负值，这相当于仅从实平面或虚平面看信号。

在三维空间，根据欧拉公式，$e^{j\theta}$表示复平面单位圆上的一点，θ表示相角。令$\theta=\omega t$，随时间变化，$e^{j\omega t}$即表示该复数沿着单位圆旋转。定义正频率即$\omega>0$为逆时针旋转，负频率即$\omega<0$为顺时针旋转。

$e^{j\omega t}$随时间变化的曲线为螺旋线，且其在实平面的投影为$\cos(\omega t)$，在虚平面的投影为$\sin(\omega t)$。





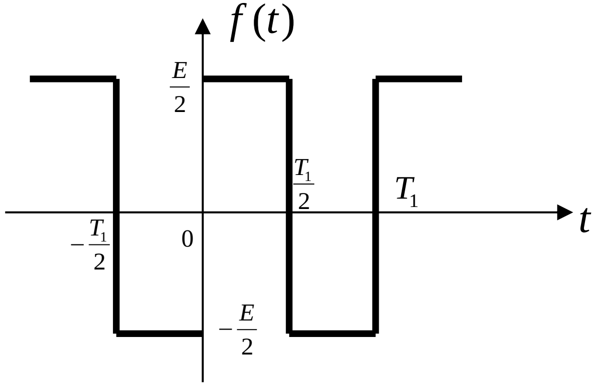


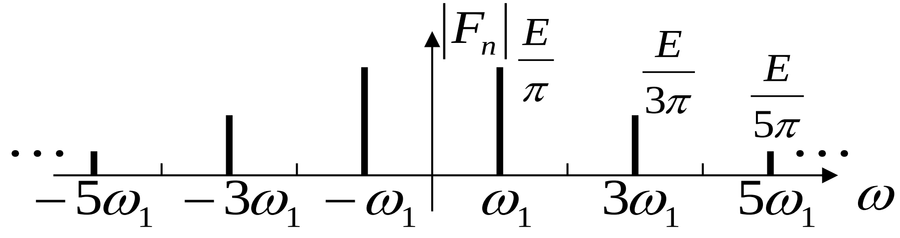
周期信号频谱的特点

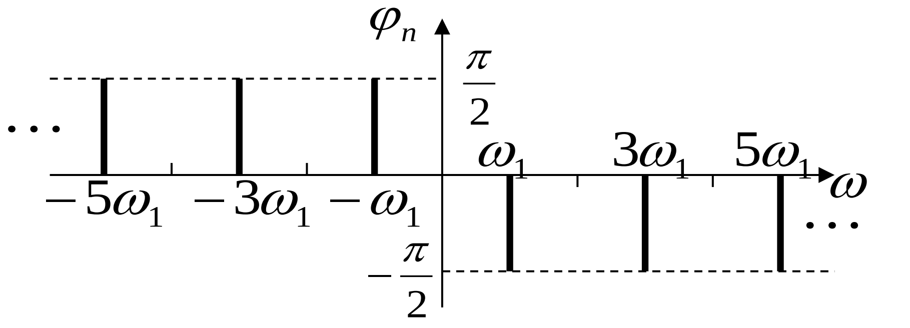
（1）离散性---频谱是离散的而不是连续的，这种频谱称为离散频谱。

（2）谐波性---谱线出现在基波频率 ω_1 的整数倍上。

（3）收敛性---幅度谱的谱线幅度随着$n\to\infty$而逐渐衰减到零。







$$|F_n| = \frac{E}{|n|\pi} \qquad (n=\pm1,\pm3,\pm5\cdots)$$

$$\varphi_n = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (n=1,3,5\cdots) \\ \frac{\pi}{2} & (n=-1,-3,-5\cdots) \end{cases}$$

波形对称性与谐波特性的总结

$f(t)$的对称条件	展开式中系数特点
$f(t)=f(-t)$，纵轴对称（偶函数）	$b_n=0$，$a_n=\dfrac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\cos n\omega_1 t\,dt$
$f(t)=-f(-t)$，原点对称（奇函数）	$a_n=0$，$b_n=\dfrac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\sin n\omega_1 t\,dt$
$f(t)=f(t+\dfrac{T}{2})$，半周重叠（偶谐函数）	无奇次谐波，只有直流和偶次谐波
$f(t)=-f(t+\dfrac{T}{2})$，半周镜像（奇谐函数）	无偶次谐波，只有奇次谐波分量

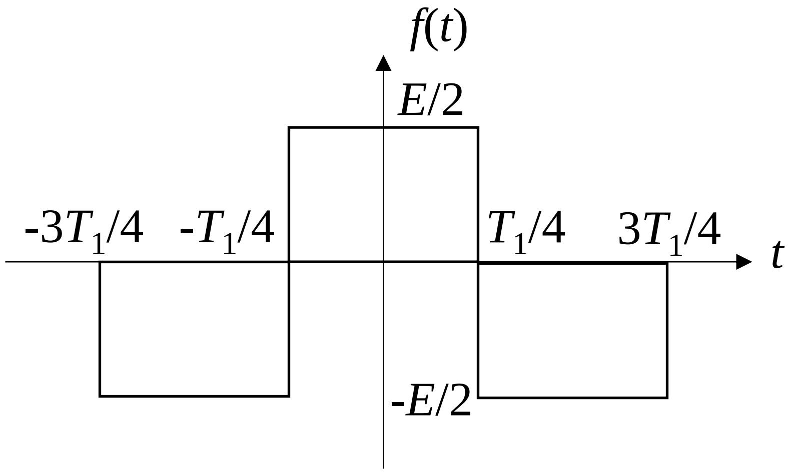
关于题图所示的周期矩形信号的三角形式傅里叶级数正确的参数包括（）

A $a_n = 0 \ \ (n = 0, 2, 4 \cdots)$

B $a_n = 0 \ \ (n = 1, 3, 5 \cdots)$

C $b_n = 0 \ \ (n = 1, 3, 5 \cdots)$

D $b_n = 0 \ \ (n = 2, 4, 6 \cdots)$



提交

对比上节课的例题，两个周期矩形信号时间差$T_1/4$，对应的三角函数相位差$\pi/2$。

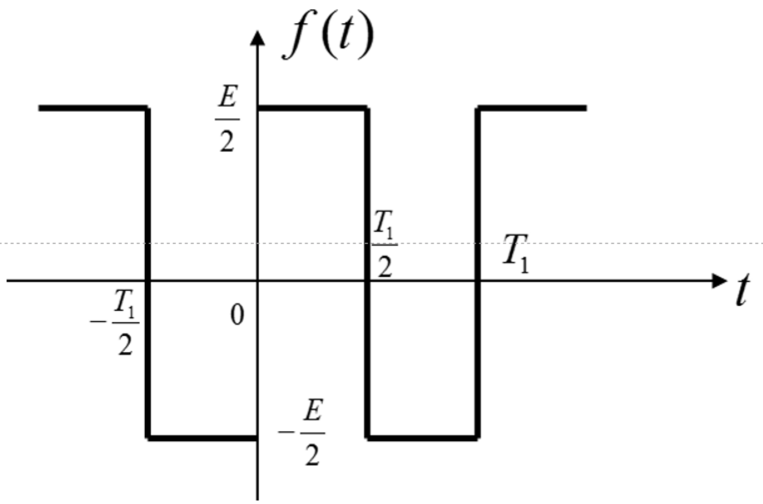
关于题图所示的周期矩形信号的三角形式傅里叶级数正确的参数包括（）

A $a_n = 0 \quad (n = 0, 2, 4 \cdots)$

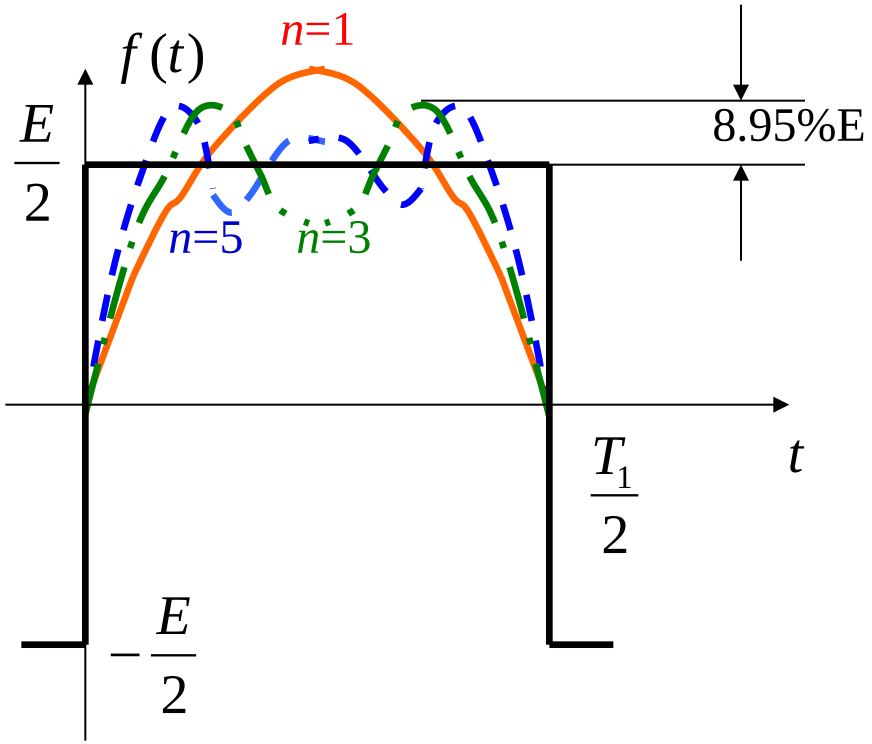
B $a_n = 0 \quad (n = 1, 3, 5 \cdots)$

C $b_n = 0 \quad (n = 1, 3, 5 \cdots)$

D $b_n = 0 \quad (n = 2, 4, 6 \cdots)$



吉布斯（Gibbs）现象

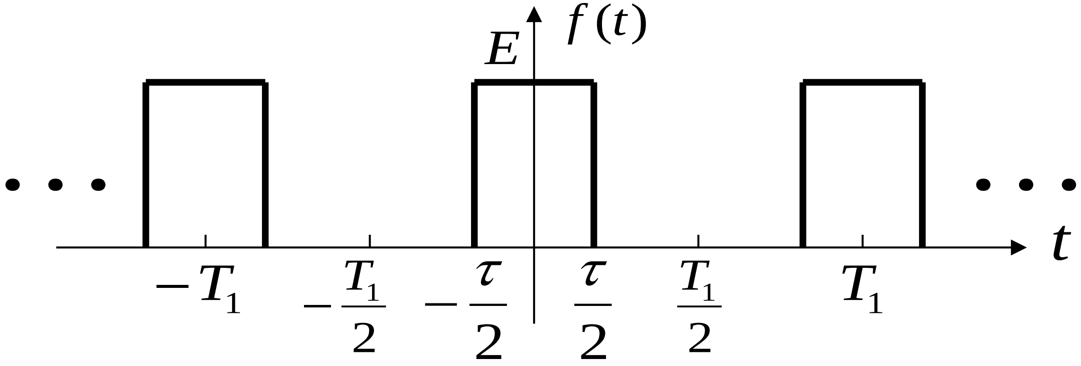


吉布斯现象：当选取的谐波项数N很大时，峰起值趋于一个常数，约等于总跳变值的9%，并从不连续点开始以起伏振荡的形式逐渐衰减下去。

高频分量主要影响脉冲的跳变沿，低频分量主要影响脉冲的顶部。

f(t)波形变化越剧烈，所包含的高频分量越丰富；变化越缓慢，所包含的低频分量越丰富。

周期矩形脉冲信号的傅里叶级数



$b_n = 0$ （在偶函数的傅里叶级数中不含正弦项）

$$a_0 = \frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)dt = \frac{E\tau}{T_1} \qquad a_n = \frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t dt = \frac{2E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) = c_n$$

$$f(t) = \frac{E\tau}{T_1} + \frac{2E\tau}{T_1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\cos n\omega_1 t$$

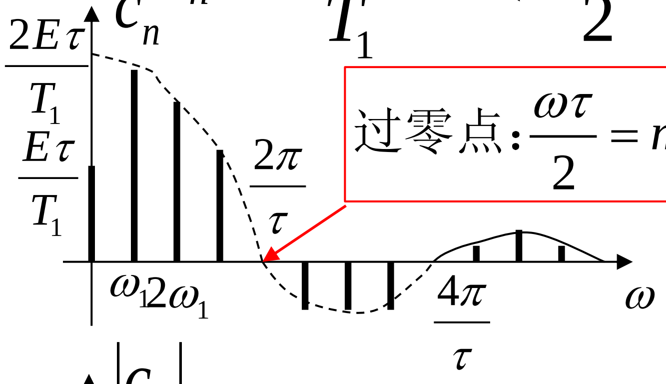
$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2}a_n = \frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \qquad f(t) = \frac{E\tau}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)e^{jn\omega_1 t}$$

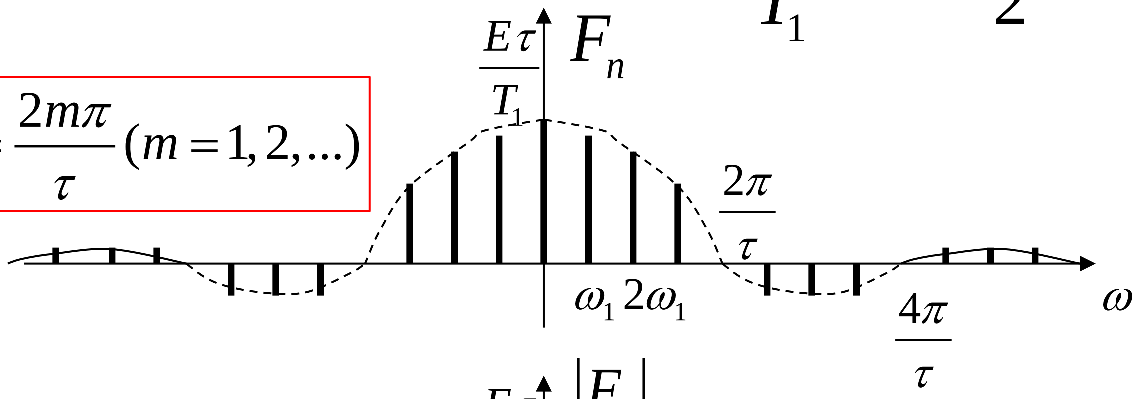
（2）频谱图

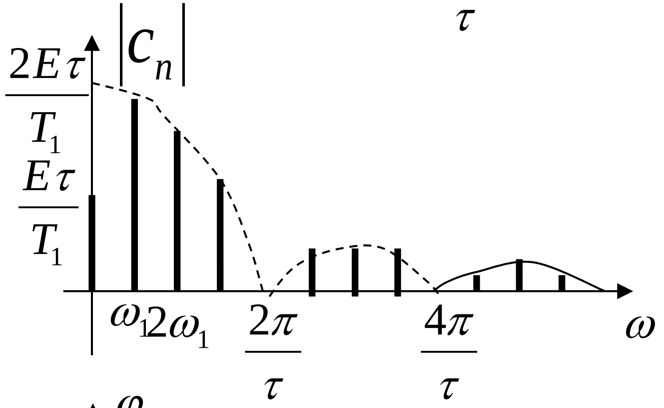
$$c_n = \frac{2E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

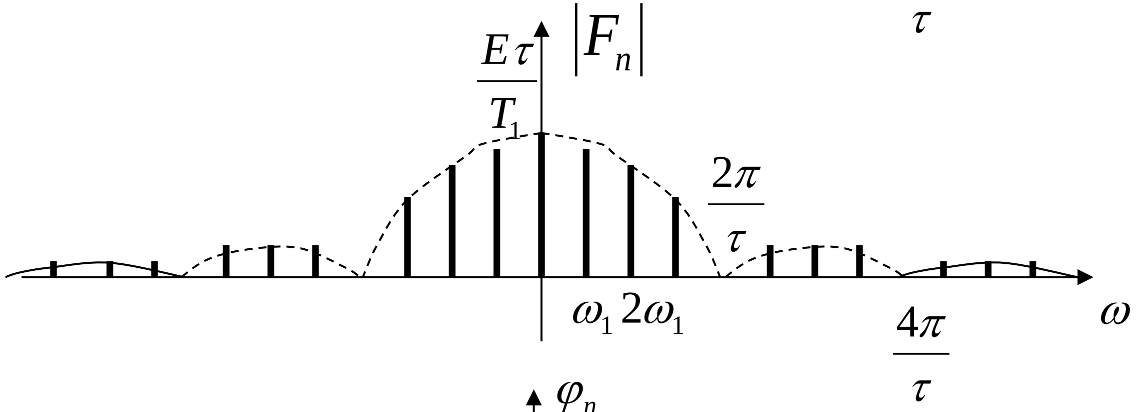
$$F_n = \frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

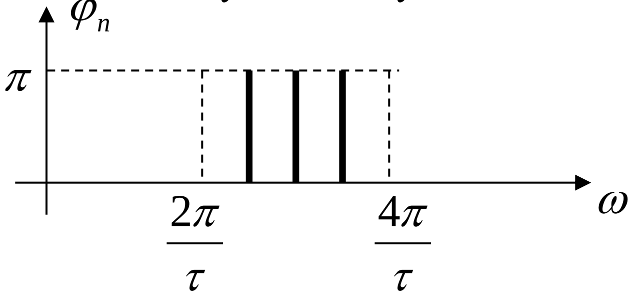
过零点：$\frac{\omega\tau}{2} = m\pi \rightarrow \omega = \frac{2m\pi}{\tau}\ (m = 1, 2, \ldots)$

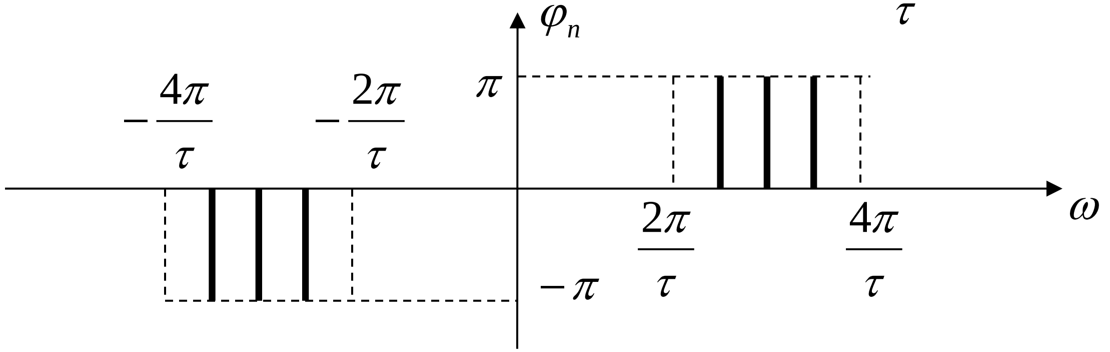




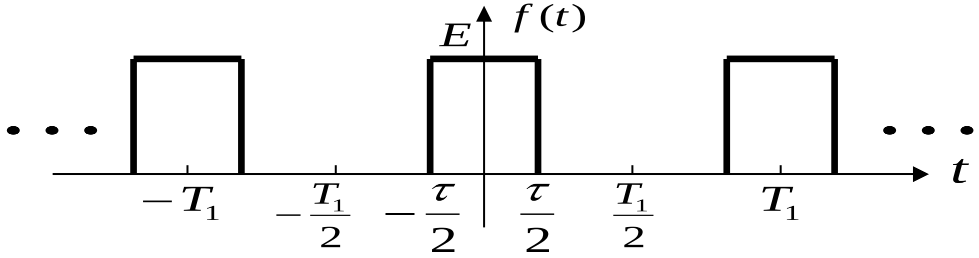








周期矩形信号的波形如图所示，以下说法正确的是（ ）



A 若T_1加倍，信号频谱图的谱线间隔减半，幅度减半

B 若T_1加倍，信号的带宽减半，幅度加倍

C 若τ减半，信号频谱图的谱线间隔减半，幅度加倍

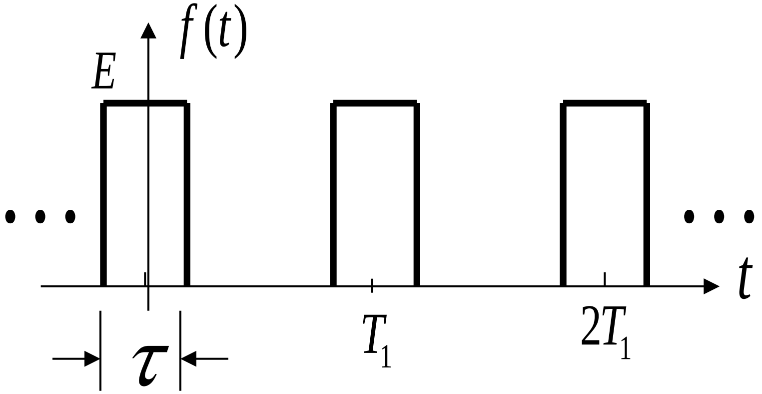
D 若τ减半，信号的带宽加倍，幅度减半

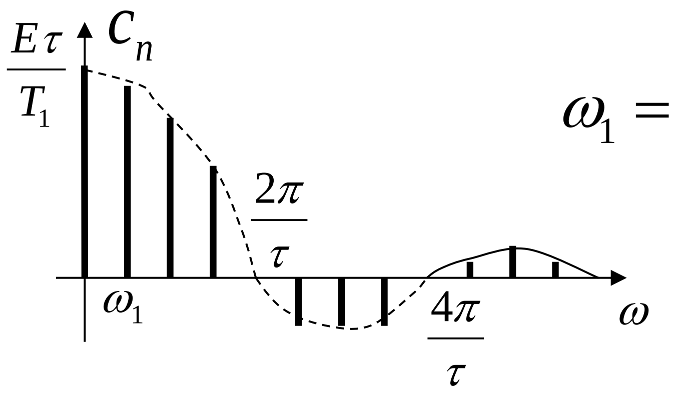
提交

3.3 典型周期信号的傅里叶级数

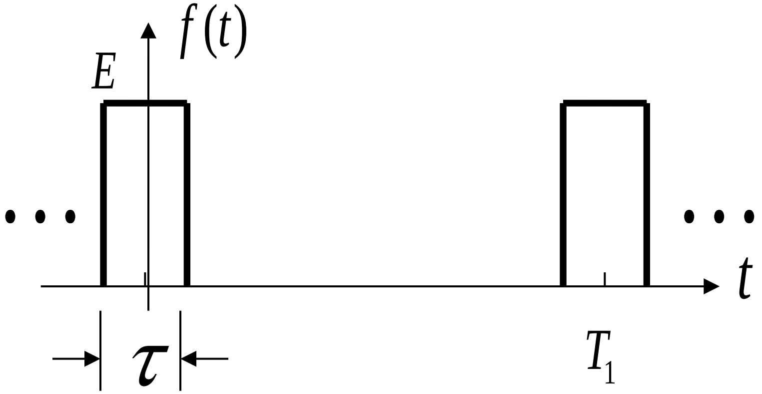
频谱结构与波形参数的关系 (T_1, τ)

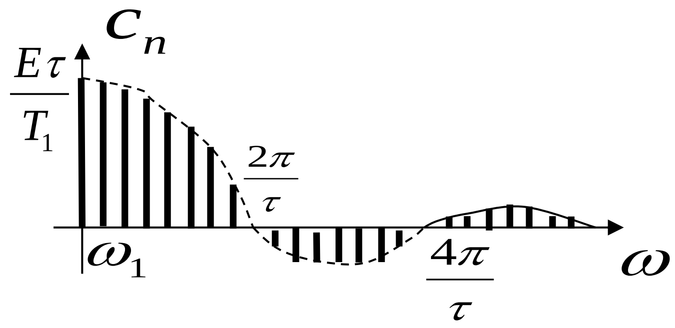
a) 若 τ 不变，T_1 扩大一倍，幅度谱的谱线间隔减半，幅度减半



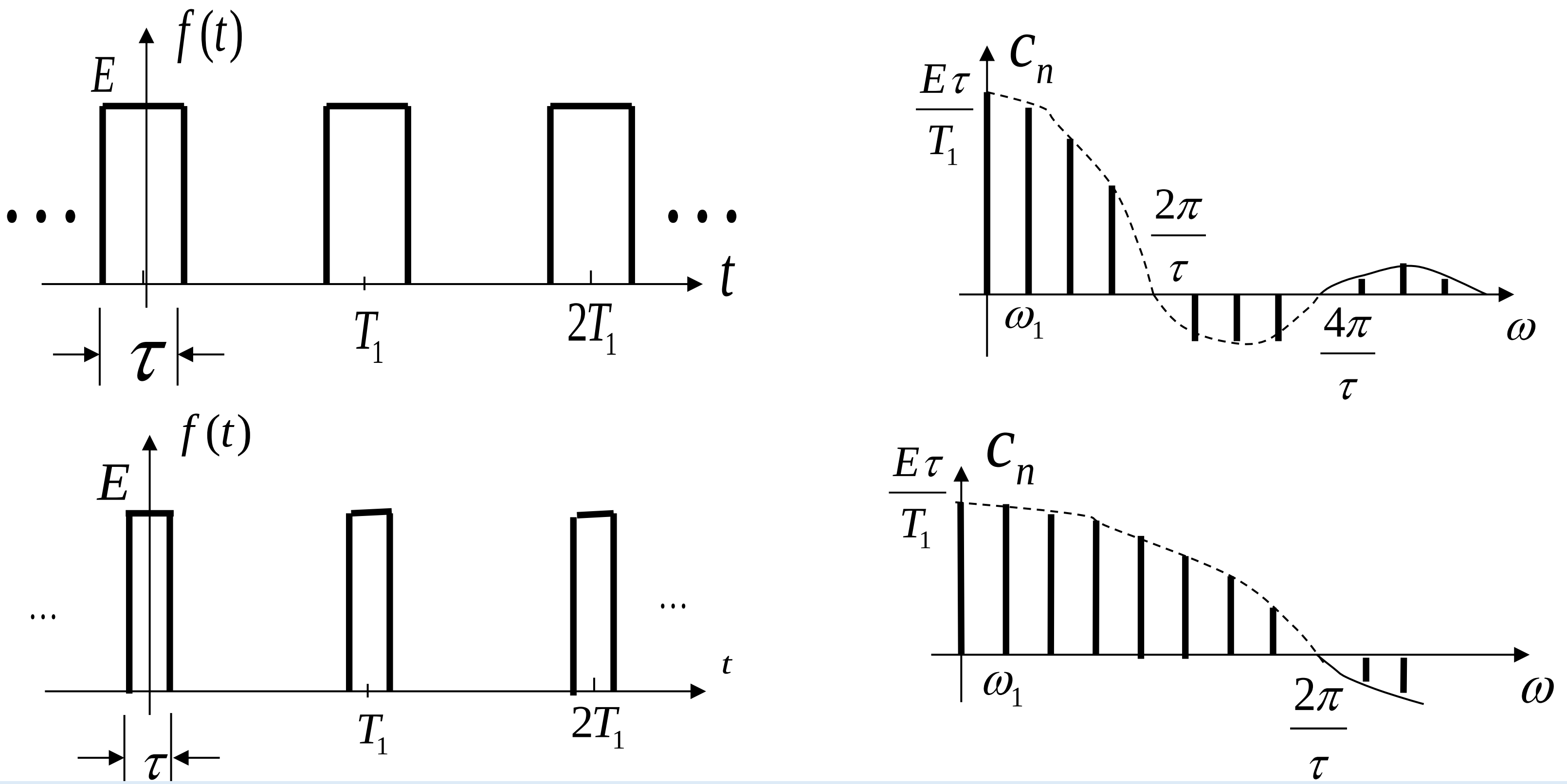


$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$





b）若 T_1 不变，τ 减小一半，信号带宽加倍，幅度谱的幅度减半



谱线间隔 $\omega_1(=\frac{2\pi}{T_1})$ 只与周期 T_1 有关，且与 T_1 成反比；

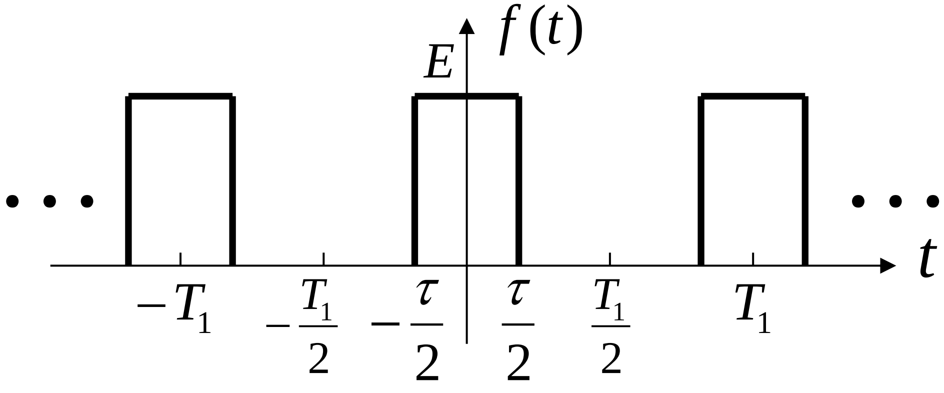
零值点频率只与 脉冲宽度τ有关，且与τ成反比；

谱线幅度与 T_1 和 τ 都有关系，且与 T_1 成反比，与 τ 成正比。

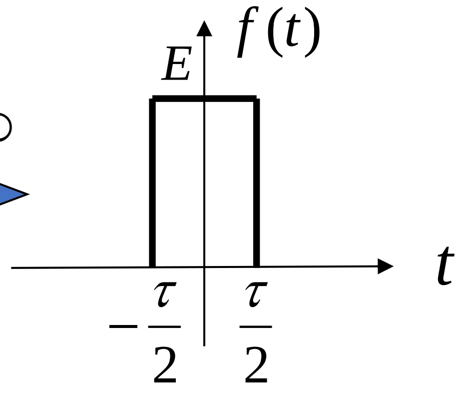
本次课内容

本次课目标

1. 深入了解傅里叶变换和傅里叶级数的关联和区别；
2. 熟练掌握典型非周期信号、冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换。



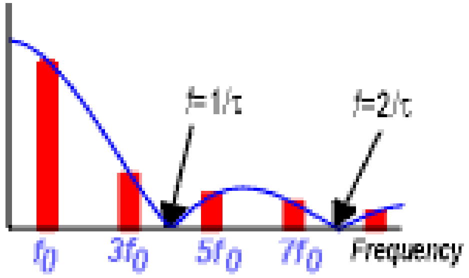
$$T_1 \to \infty$$

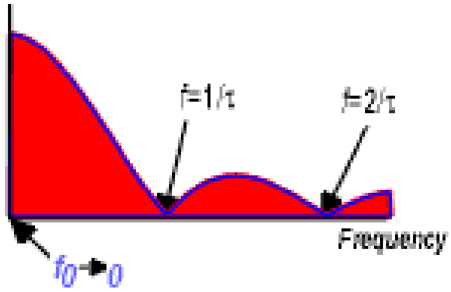


$$T_1 \uparrow \quad \Longrightarrow \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \downarrow \quad \Longrightarrow \quad \text{谱线间隔} \downarrow$$

$$T_1 \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{谱线间隔} \to 0$$

周期信号的离散谱 ⟹ **非周期信号的连续谱**





由于 $T_1 \to \infty$, $F_n = \dfrac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \to 0$

频谱密度函数: $\lim\limits_{T_1\to\infty} F_n T_1 = \lim\limits_{T_1\to\infty}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$

当$T_1 \to \infty$时，离散频率$n\omega_1 \to$连续频率ω

则 $\lim\limits_{T_1\to\infty} F_n T_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

记为 $$\boxed{F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt}$$

--非周期信号f(t)的傅里叶变换

$$\boxed{f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

--傅里叶逆变换

$F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

$|F(\omega)|$ **--幅度谱**

$\varphi(\omega)$ **--相位谱**

傅里叶变换的物理意义

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$F(\omega)=|F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

实函数

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}e^{j\omega t}\,d\omega$$

欧拉公式

$$=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|\cos\left[\omega t+\varphi(\omega)\right]d\omega}_{\text{偶函数}}+\underbrace{j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|\sin\left[\omega t+\varphi(\omega)\right]d\omega}_{\text{奇函数与偶函数乘积的积分为0}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}|F(\omega)|\cos\left[\omega t+\varphi(\omega)\right]d\omega$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{|F(\omega)|}{\pi}d\omega\cos\left[\omega t+\varphi(\omega)\right]$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \qquad f(t)=\int_0^{\infty}\underbrace{\frac{|F(\omega)|}{\pi}}_{\text{振幅}}d\omega\cos[\omega t+\varphi(\omega)]$$

$$=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{|F(n\Delta\omega)|}{\pi}\Delta\omega}_{\text{振幅}}\cos[n\Delta\omega t+\varphi(n\Delta\omega)]$$

$f(t)$为无穷多个振幅为$\left(\frac{1}{\pi}|F(\omega)|d\omega\right)$的无穷小的连续余弦信号之和，频谱范围0--∞。

非周期信号可表示为正弦信号的加权积分，包含了零到无限高的<u>所有连续频率分量</u>。

对于能量有限信号（如单脉冲信号），$\left(\frac{1}{\pi}|F(\omega)|d\omega\right)$趋于无限小，所以频谱不能再用幅度表示，而改用频谱密度函数表示。

单脉冲信号的傅里叶变换： $F_0(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f_0(t)e^{-j\omega t}dt$ ——连续谱

周期信号的傅里叶级数展开： $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$

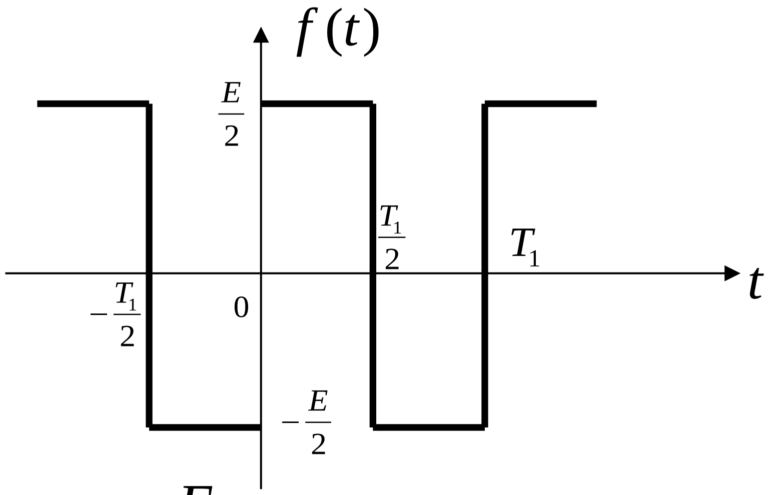
$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$ ——离散谱

F_n 与 $F_0(\omega)$ 的关系：

$$\boxed{F_n=\left.\frac{F_0(\omega)}{T_1}\right|_{\omega=n\omega_1}}$$

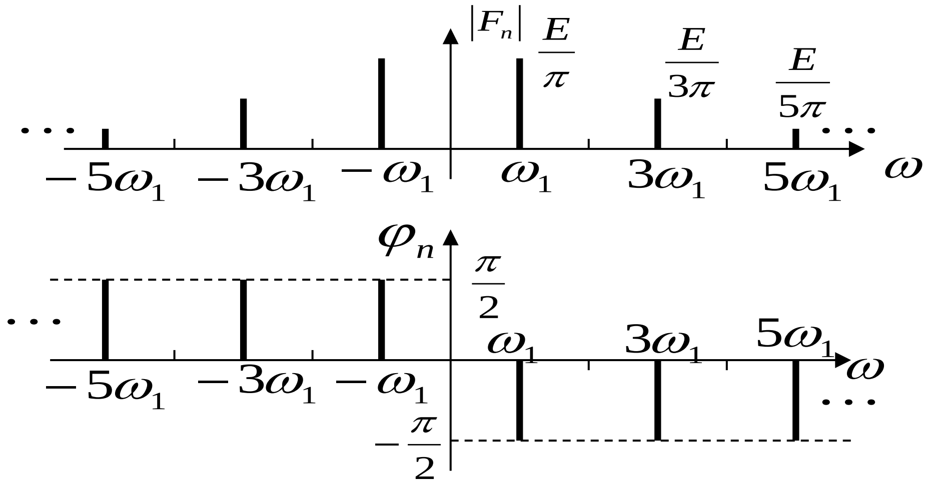
周期脉冲序列的傅里叶级数的系数F_n等于单脉冲的傅里叶变换$F_0(\omega)$在$n\omega_1$频率点的值乘以$1/T_1$或$\omega_1/2\pi$。

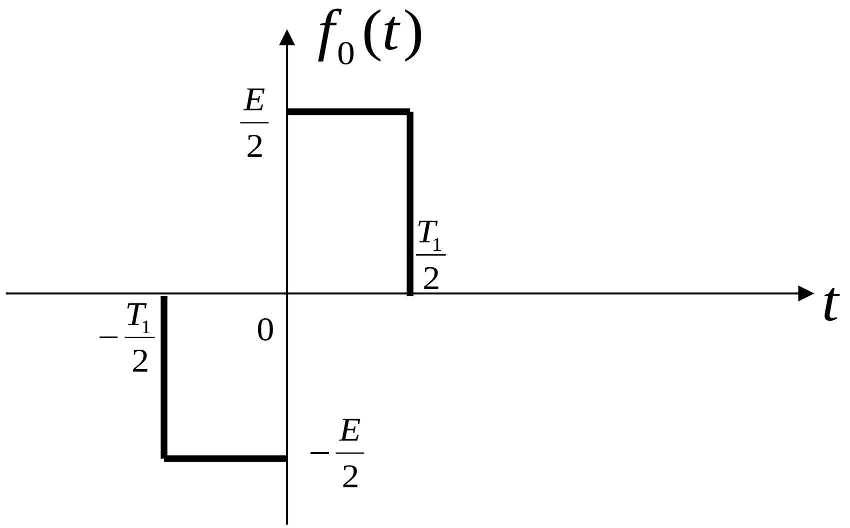
3.4 傅里叶变换



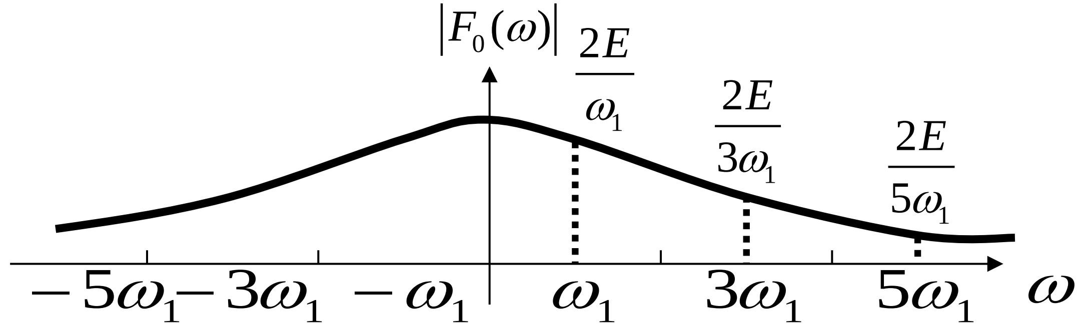
$$\left|F_n\right| = \frac{E}{|n|\pi} \qquad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \cdots)$$

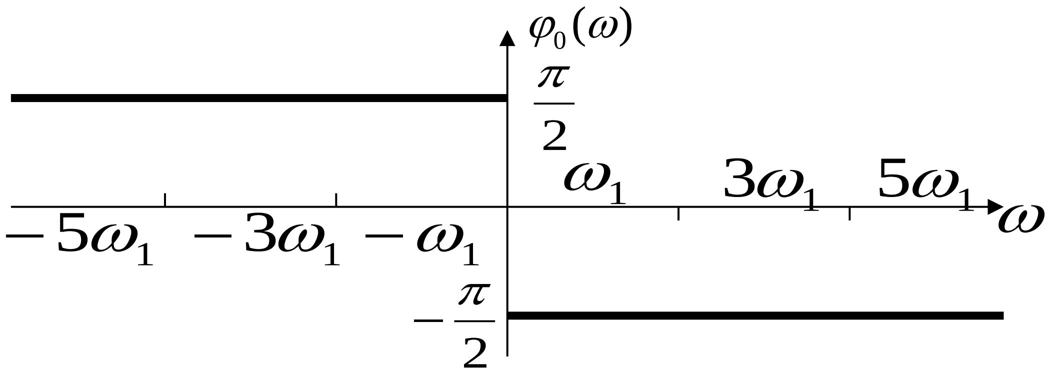
$$\varphi_n = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & (n = 1,3,5\cdots) \\ \dfrac{\pi}{2} & (n = -1,-3,-5\cdots) \end{cases}$$





$$F_n = \left.\frac{F_0(\omega)}{T_1}\right|_{\omega=n\omega_1} = \left.\frac{\omega_1 F_0(\omega)}{2\pi}\right|_{\omega=n\omega_1}$$





傅里叶变换存在的充分不必要条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|\mathrm{d}t = \text{有限值（充分条件）}$$

即$f(t)$绝对可积

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)e^{-j\omega t}\right|\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|\mathrm{d}t < \infty$$

绝大多数**能量信号**均满足此条件。

当引入$\delta(\omega)$函数的概念后，允许做傅立叶变换的函数类型大大扩展了。

傅里叶级数与傅里叶变换的关系：

傅里叶级数

$$\boxed{f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}}$$

$$\boxed{F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt}$$

频谱（离散）

$$\boxed{F_n=\left|F_n\right|e^{j\varphi_n}}$$

在一个周期内满足狄里赫利条件

傅里叶变换

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

$$\boxed{F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt}$$

频谱密度（连续）

$$\boxed{F(\omega)=\left|F(\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)}}$$

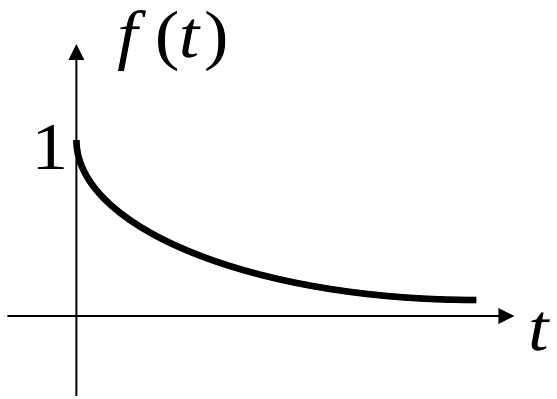
在(-∞ , +∞)内满足狄里赫利条件

$$F_n=\frac{1}{T_1}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$$

量纲不同

1. 单边指数信号

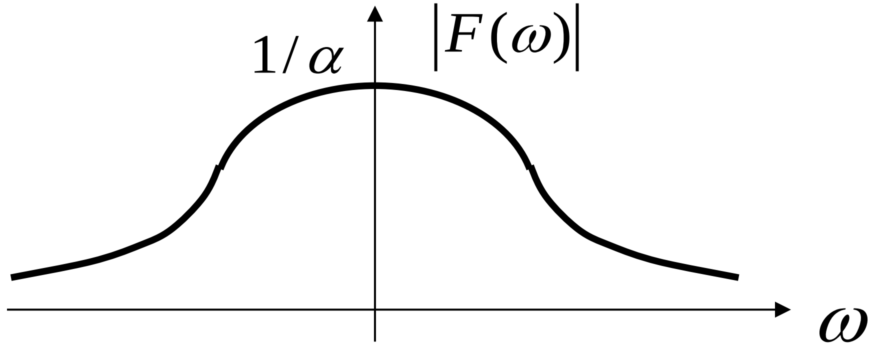
$$f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} = e^{-\alpha t}u(t)$$

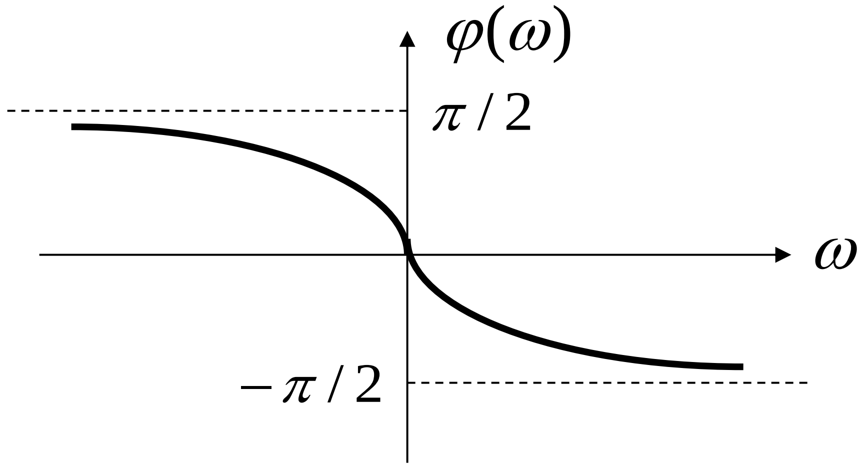


$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

$$|F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan(\frac{\omega}{\alpha})$$





频谱函数 $X(\omega)=\dfrac{1}{j\omega+2}$ 的傅里叶逆变换为:

A $e^{-2t}u(t)$

B $te^{-2t}u(t)$

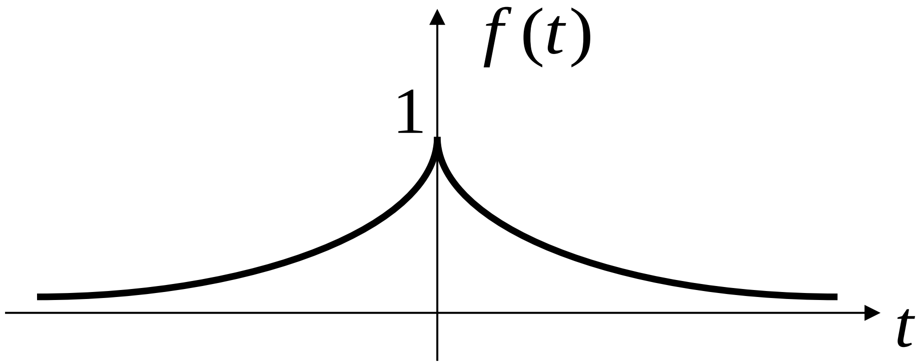
C $e^{-0.5t}u(t)$

D $te^{2t}u(t)$

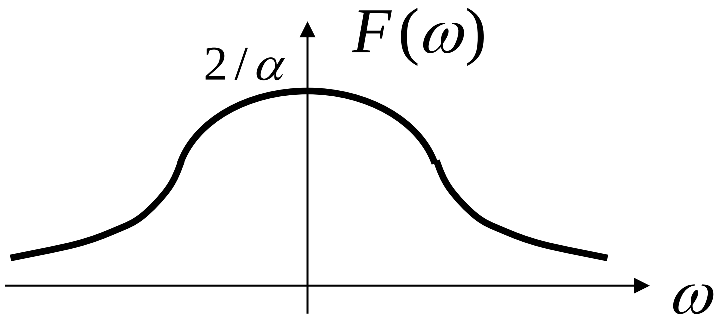
提交

2. 双边指数信号

$$f(t)=e^{-\alpha|t|}\quad(\alpha>0)$$



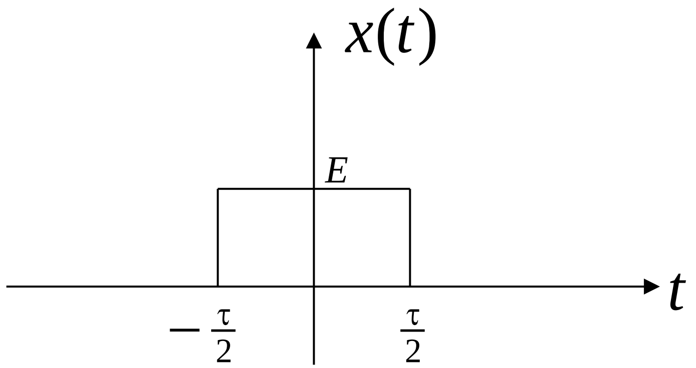
$$F(\omega)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$



$$|F(\omega)|=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\qquad \varphi(\omega)=0$$

3. 矩形脉冲信号

$$x(t)=E[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]$$



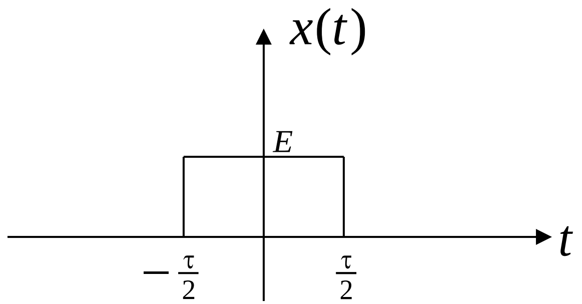
如图所示，矩形脉冲信号满足绝对可积，可直接通过积分变换公式求得其傅里叶变换。

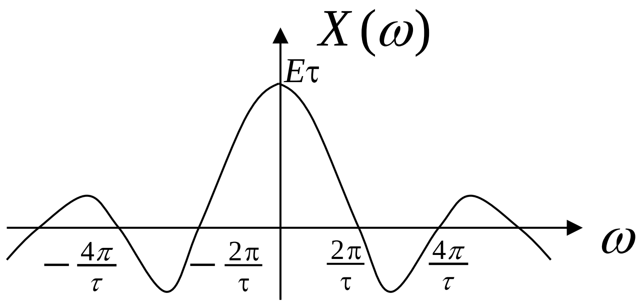
$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}Ee^{-j\omega t}dt=E\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$=E\frac{e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{j\omega\frac{\tau}{2}}}{-j\omega}=2E\frac{\sin\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)}{\omega}=E\tau Sa\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)$$

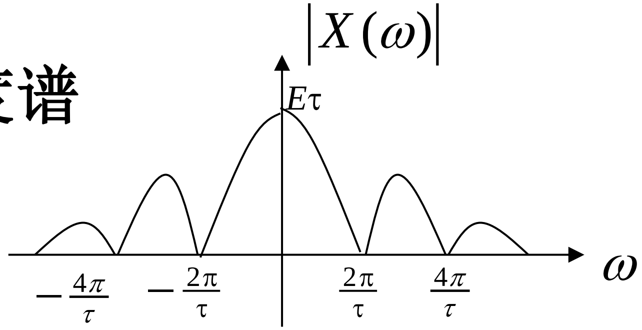
3.5 典型非周期信号的傅里叶变换

$$E[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})] \xleftrightarrow{FT} E\tau \mathrm{Sa}(\omega\frac{\tau}{2})$$

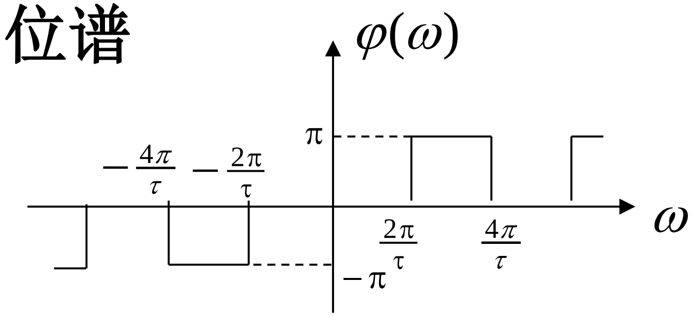




幅度谱



相位谱

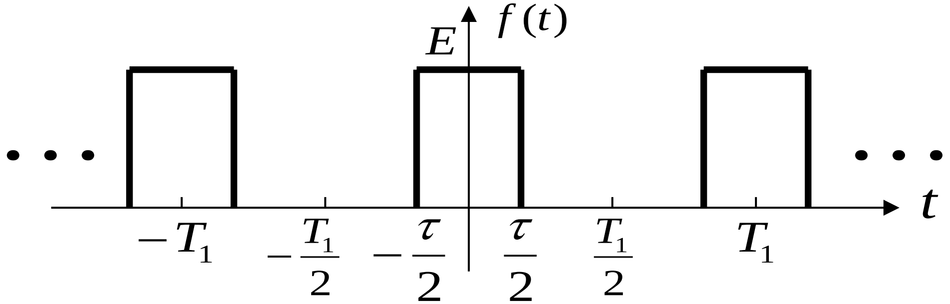


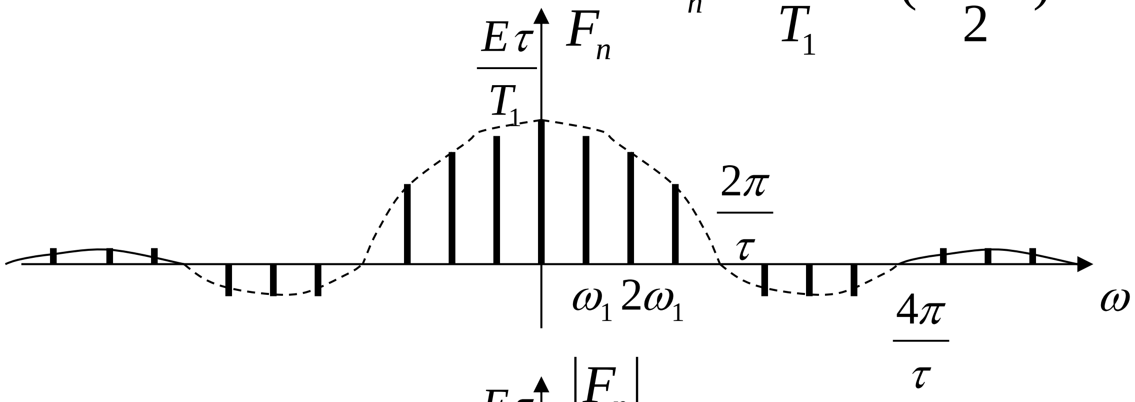
由以上矩形波的频谱图可见，信号的能量主要集中在主瓣所包含的频率范围之内：$0\sim 2\pi/\tau$，所以习惯上称此频段范围是矩形波的等效带宽 B_ω。

$$B_\omega = \frac{2\pi}{\tau}\ \text{(rad/s) 或 } \frac{1}{\tau}\ \text{(Hz)}$$

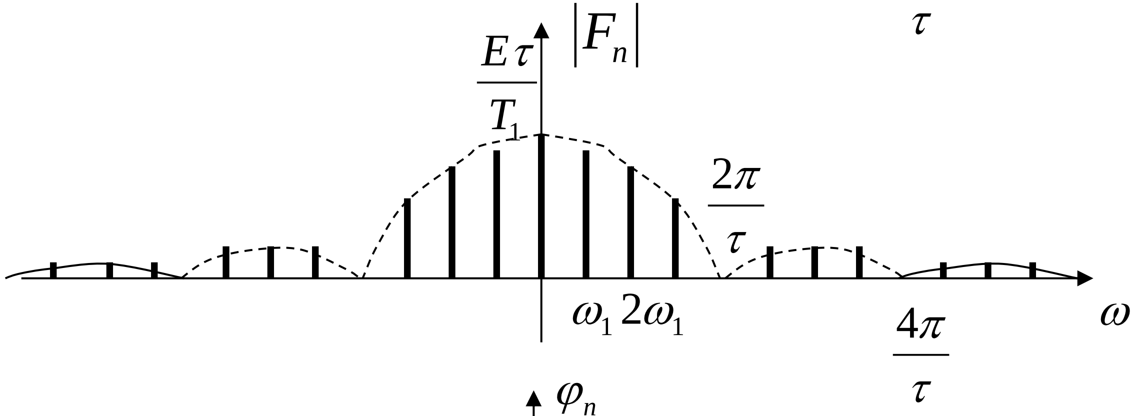
回顾周期矩形脉冲的频谱

$$F_n = \frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

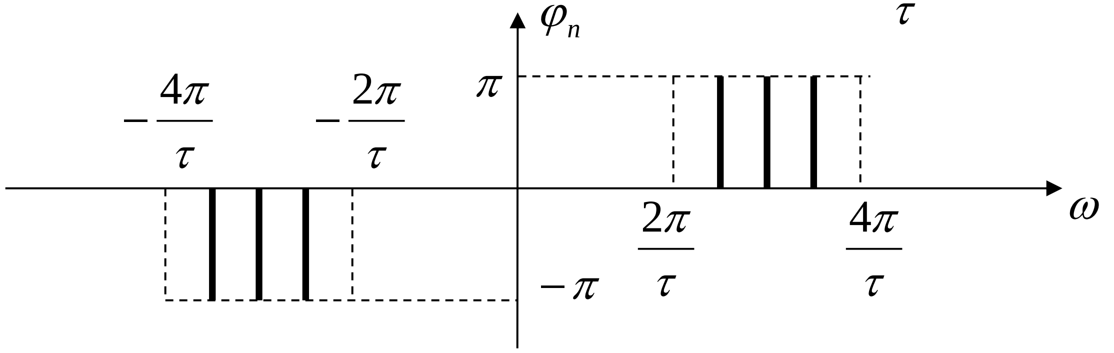




幅度谱



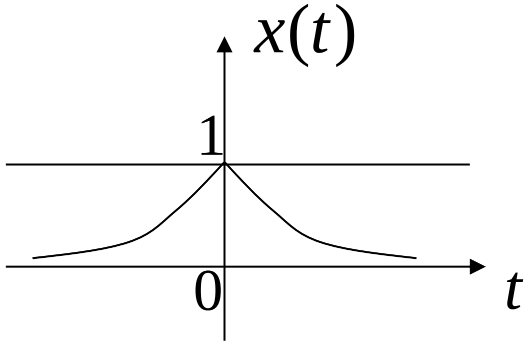
相位谱



4. 直流信号

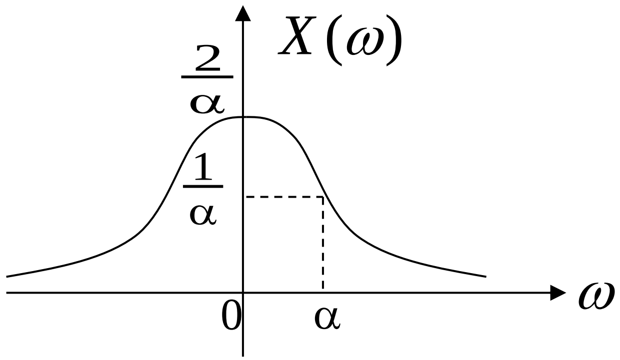
表示直流信号的函数是一常量，这里设常量为1。显然，它不满足绝对可积的条件，不能由积分直接求得其傅里叶变换，可以利用$\delta(\omega)$求傅里叶变换。

利用偶对称双边指数信号的极限表征直流信号：



$$x(t)=1=\lim_{\alpha\to 0} e^{-\alpha|t|}$$

由双边指数信号的傅里叶变换

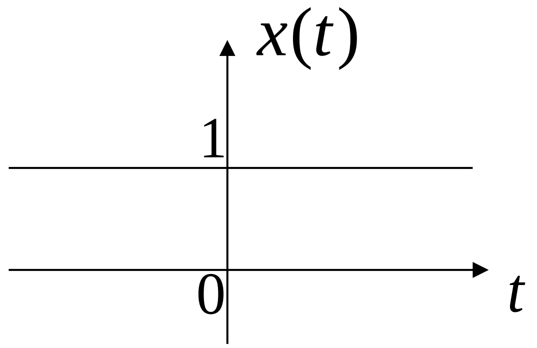


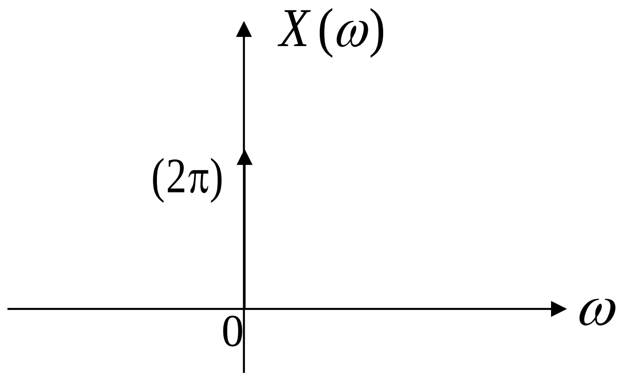
$$X(\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

当$\alpha\to 0$，此频谱函数的宽度趋于无穷小，幅度趋于无穷大，是一个冲激函数$A\delta(\omega)$。幅度A等于$X(\omega)$所占的面积。

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=4\int_{0}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=4[\arctan(\infty)-\arctan(0)]=2\pi$$

$$X(\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}=2\pi\delta(\omega)$$

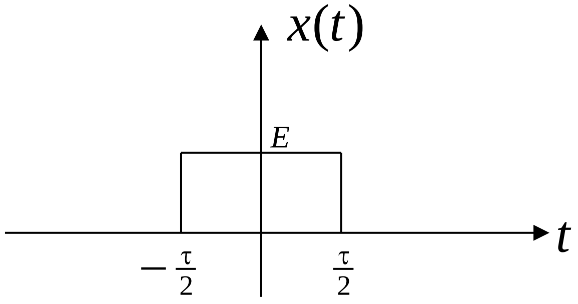




此结果也可通过幅度为1，宽度为 τ 的矩形脉冲的傅里叶变换，取 $\tau\to\infty$ 得到。

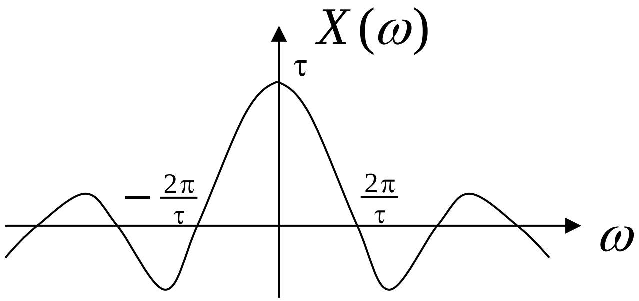
$$X(\omega)=\lim_{\tau\to\infty}\tau Sa\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}Sa(x)dx=\pi$$



所以

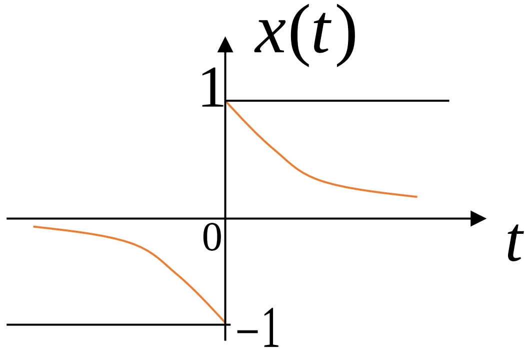
$$\int_{-\infty}^{\infty}\tau Sa\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)d\omega=2\int_{-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)d\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)=2\pi$$



于是 $\boxed{1\xleftrightarrow{FT}2\pi\delta(\omega)}$

若用公式表示即是 $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta(\omega)}$

5. 符号函数信号



$$x(t)=\mathrm{sgn}(t)$$

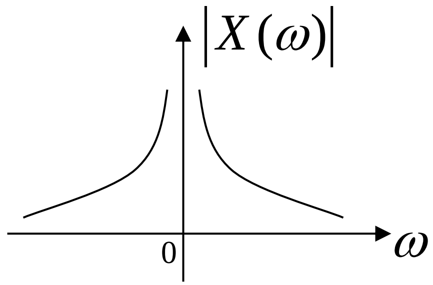
符号函数信号**不满足绝对可积**的条件，不能由积分直接求得其傅里叶变换。但可以由奇对称双边指数信号的傅里叶变换，取 $\alpha\to 0$求得。

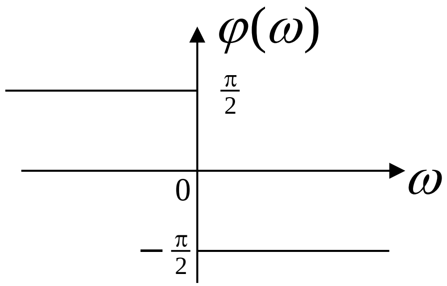
$$x(t)=\mathrm{sgn}(t)\;=\lim_{\alpha\to 0}[-e^{\alpha t}u(-t)+e^{-\alpha t}u(t)]$$

于是

$$X(\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-2j\omega}{\alpha^2+\omega^2}\;=-j\frac{2}{\omega}\;=\frac{2}{j\omega}$$

$$|X(\omega)|=\frac{2}{|\omega|},\quad \varphi(\omega)=\begin{cases}\pi/2 & \omega<0\\ -\pi/2 & \omega>0\end{cases}$$





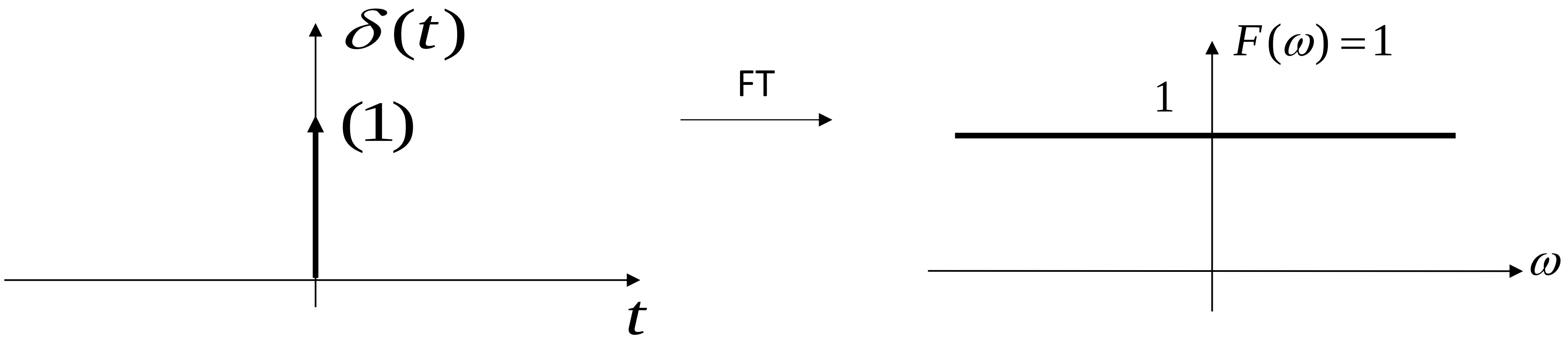
几种常用函数及其傅里叶变换

名称	时间函数	频谱函数
单位冲激	$\delta(t)$	1
单位阶跃	$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+1/j\omega$
符号函数	$\operatorname{sgn} t=u(t)-u(-t)$	$2/(j\omega)$
单位直流	1	$2\pi\delta(\omega)$
单边指数函数	$e^{-\alpha t}u(t)$	$1/(\alpha+j\omega)$
双边指数函数	$e^{-\alpha\|t\|}$	$2\alpha/(\alpha^2+\omega^2)$
单位余弦	$\cos\omega_c t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]$
单位正弦	$\sin\omega_c t$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)]$
矩形脉冲（门函数）	$G_\tau(t)=u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$	$\tau Sa\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)=\tau\frac{\sin(\tau\omega/2)}{\tau\omega/2}$
抽样函数	$Sa\left(\frac{\Omega t}{2}\right)=\frac{\sin(\Omega t/2)}{\Omega t/2}$	$G_\Omega(\omega)=\frac{2\pi}{\Omega}\left[u\left(\omega+\frac{\Omega}{2}\right)-u\left(\omega-\frac{\Omega}{2}\right)\right]$

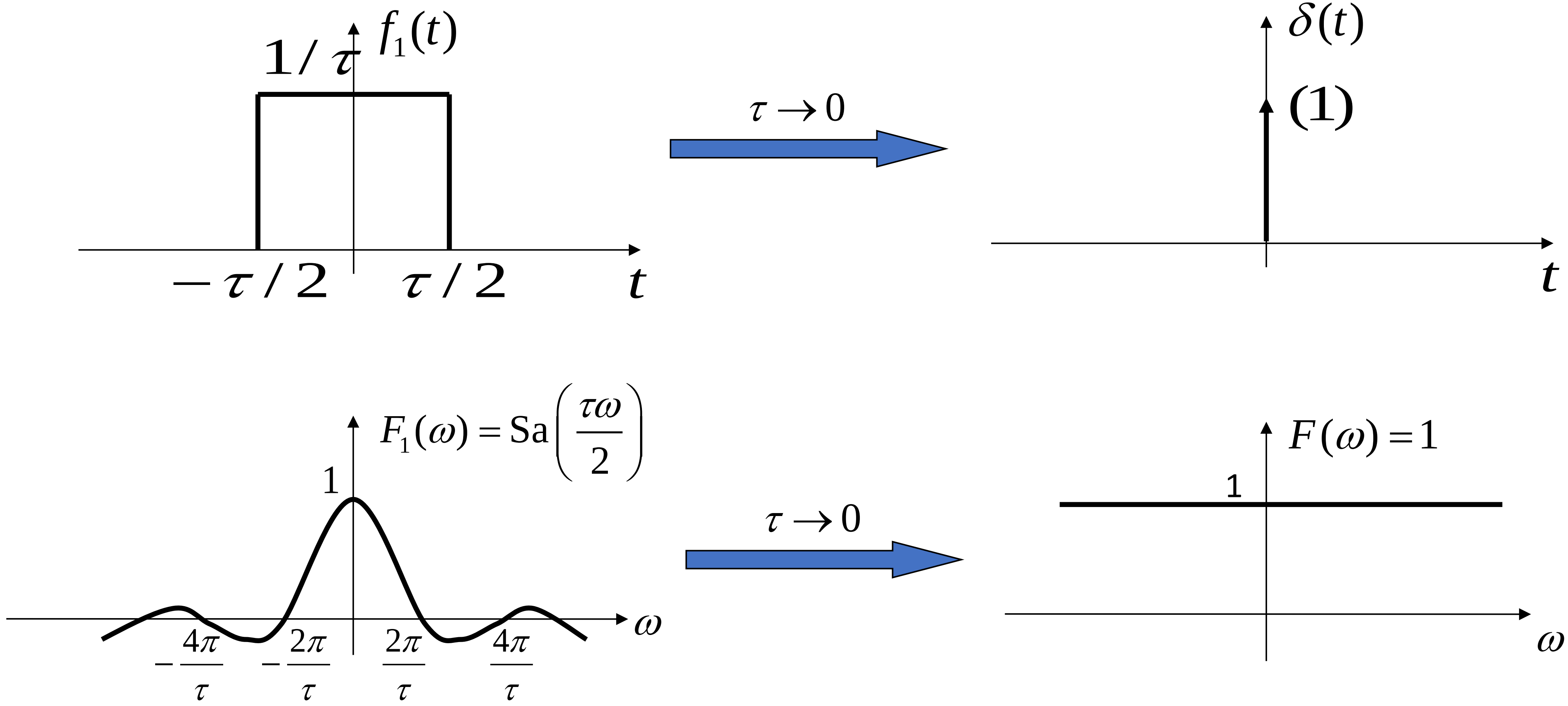
1. 冲激函数的傅里叶变换

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

单位冲激函数的频谱等于常数，即在整个频率范围内频谱是均匀的。这种频谱常被叫做“均匀谱”或“白色频谱”。



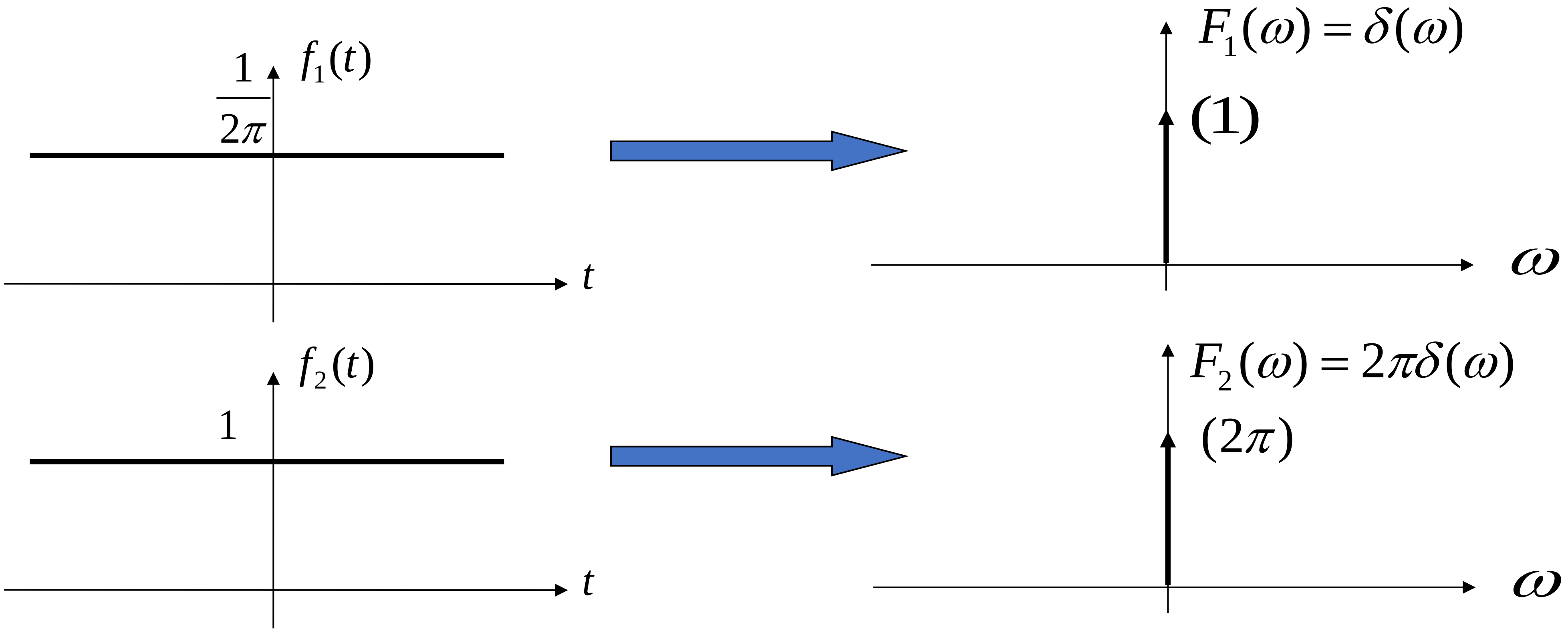
由矩形脉冲的傅里叶变换求冲激函数的傅里叶变换



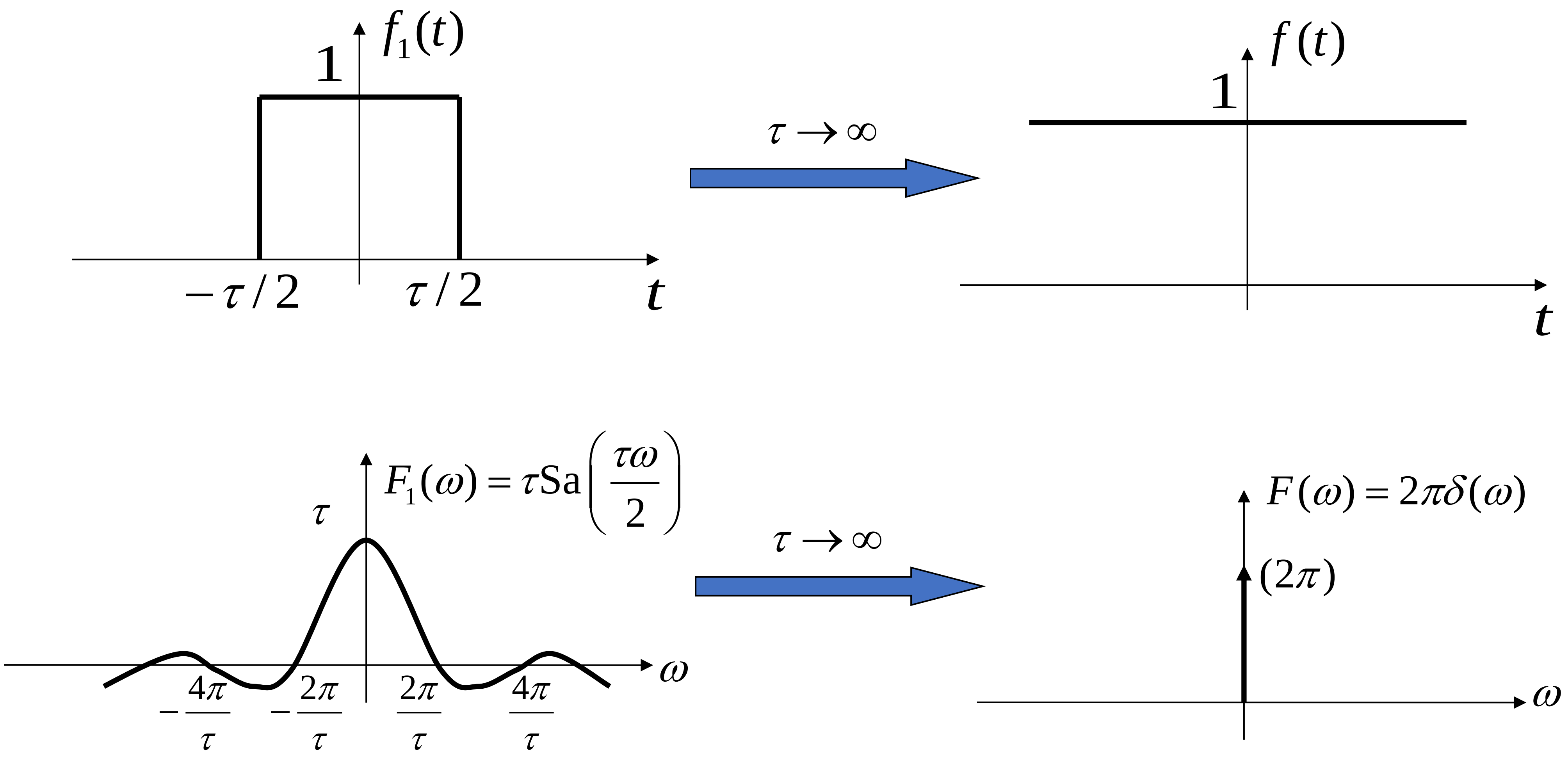
2. 冲激函数的傅里叶逆变换

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

或 $\mathcal{F}[\frac{1}{2\pi}] = \delta(\omega)$, $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$



3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换



3. 冲激偶的傅里叶变换

$$\because \ \mathcal{F}[\delta(t)] = 1, \qquad 即：\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

上式两边对t求导得：

$$\frac{d}{dt}\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\therefore \mathcal{F}[\delta'(t)] = j\omega$$

同理：

$$\mathcal{F}[\delta^{(n)}(t)] = (j\omega)^n$$

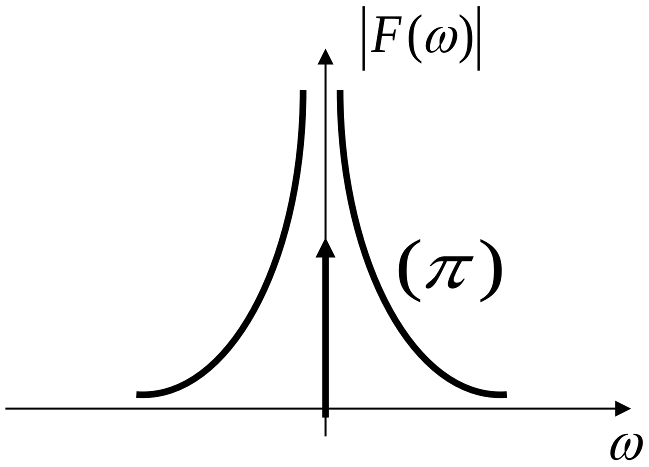
4. 阶跃信号

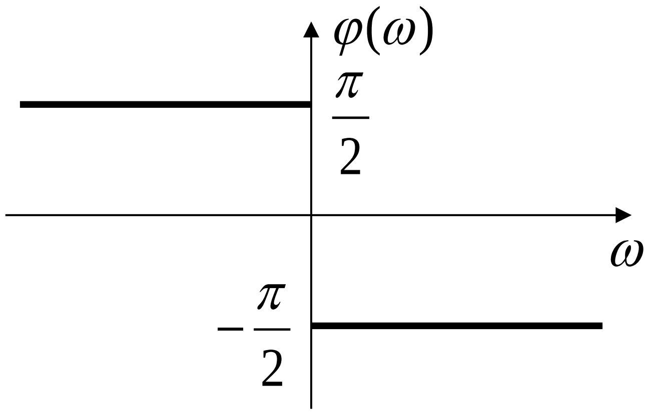
$$\because u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$

$$\therefore\ F(\omega)=\mathcal{F}[u(t)]=\mathcal{F}[\frac{1}{2}]+\mathcal{F}[\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)]$$

$$=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

对应直流分量　　0时刻跳变引起的其他频率分量





作业

基础题（需提交）：3-15，3-16。

加强题（选做，不提交）：3-14。