

上节内容

7.4 常系数线性差分方程的求解

7.5 离散时间系统的单位样值响应

线性时不变离散系统由常系数线性差分方程来描述：

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

方程式的阶数等于未知序列变量序号的最高值与最低值之差。

求解方法：

- 迭代法
- 时域经典法：求齐次解和特解
- 卷积法：利用齐次解得零输入响应，再利用卷积和求零状态响应。
- 变换域法（z变换法，第八章）
- 状态变量分析法（第十二章）

时域经典法

1、求齐次解(系统固有的响应)

差分方程的齐次方程：
$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0$$

特征根	差分方程齐次解	微分方程齐次解
不等实根 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$	$\sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n$	$\sum_{k=1}^N A_k e^{\alpha_k t}$
k 重根 α_1	$\sum_{i=1}^k C_i n^{k-i} \alpha_1^n$	$\sum_{i=1}^k A_i t^{k-i} e^{\alpha_1 t}$
共轭复根 $\alpha \pm j\beta$	$\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)^n \left[P \cos(n\omega_0) + Q \sin(n\omega_0) \right]$	$e^{\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t)$

2、求特解：由激励信号的形式决定

自由项 (方程右端)	特解形式
α^n	$D\alpha^n$ (α 不是特征根) $Dn^r\alpha^n$ (α 是 r 重特征根)
n^k	$D_0n^k + \cdots + D_{k-1}n + D_k$ (1不是特征根) $n^r[D_0n^k + \cdots + D_{k-1}n + D_k]$ (1是 r 重特征根)
$\alpha^n n^k$	$[D_0n^k + \cdots + D_{k-1}n + D_k]\alpha^n$ (α 不是特征根) $n^r[D_0n^k + \cdots + D_{k-1}n + D_k]\alpha^n$ (α 是 r 重特征根)
$\cos(n\omega)$ 或 $\sin(n\omega)$	$D_1\cos(n\omega) + D_2\sin(n\omega)$ ($e^{\pm j\omega}$ 不是特征根)
$\alpha^n \cos(n\omega)$ 或 $\alpha^n \sin(n\omega)$	$\alpha^n [D_1\cos(n\omega) + D_2\sin(n\omega)]$ ($\alpha e^{\pm j\omega}$ 不是特征根)

- 通过观察方程右端自由项的函数形式，试选特解函数式。
- 将特解代入方程，利用待定系数法来确定 D_i 。

3、由边界条件确定齐次解待定系数

完全解的一般形式（无重根的情况）：

$$y(n) = C_1 \alpha_1^n + C_2 \alpha_2^n + \cdots + C_N \alpha_N^n + D(n) = \sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n + D(n)$$

C_i 须利用 N 个给定的边界条件来确定。例如，

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 + \cdots + C_N + D(0) \\ y(1) = C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_2 + \cdots + C_N \alpha_N + D(1) \\ \cdots \\ y(N-1) = C_1 \alpha_1^{N-1} + C_2 \alpha_2^{N-1} + \cdots + C_N \alpha_N^{N-1} + D(N-1) \end{array} \right.$$

完全响应=齐次解 + 特解



完全响应=自由响应+强迫响应

完全响应=零输入响应+零状态响应

$$y(n) = \sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n + D(n)$$



自由响应 强迫响应

$$= \sum_{k=1}^N C_{zik} \alpha_k^n + \sum_{k=1}^N C_{zsk} \alpha_k^n + D(n)$$



零输入响应 零状态响应

零输入响应和零状态响应

系统全响应=零输入响应+零状态响应

1、零输入响应

➤定义：输入信号为零，仅由系统的起始状态单独作用而产生的响应，用 $y_{zi}(n)$ 表示。

➤数学模型：

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0$$

➤求解方法：根据差分方程的特征根确定零输入响应的形式，再由**边界条件求齐次解待定系数**。

3、零状态响应

直接求解起始状态为零的差分方程，也可得零状态响应。

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=1}^N C_{zsk} \alpha_k^n + D(n)$$

对于因果系统（激励信号在 $n=0$ 时接入系统），常给出 $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ 作为边界条件。

零状态是指 $y(-1), y(-2), y(-3), \dots, y(-N)$ 都等于零。

$y(0), y(1), y(2), \dots, y(N-1)$ 可用迭代法求出。

对于 N 阶差分方程，激励在 $n=0$ 时加入，确定零输入响应或零状态响应的齐次解的系数，需利用边界条件-- N 个 $y(n)$ 值。

确定零输入响应的齐次解的系数：起始条件 $y(n)$ 中的 n 可正可负，且未必连续

（例如，教材例7-8中给出了 $y(1), y(2), y(3), y(5)$ ）。 $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ 或 $y(0), y(1), \dots, y(N-1)$ 作为边界条件均可。 $n \geq 0$ 时的 $y(n)$ 可利用 $n < 0$ 时的 $y(n)$ 迭代得到，迭代时须令差分方程右边等于零。

确定零状态响应的齐次解的系数：令 $y(-1)=y(-2)=\dots=y(-N+1)=0$ ，迭代求 $y(0), y(1), \dots$ 。假设激励在 $n = n_0$ 时加入，边界条件中需包含至少一个 $n \geq n_0$ 的 $y(n)$ ，且 $n < n_0$ 时的 n 需连续（确保可以迭代得到 $n \geq n_0$ 的 $y(n)$ ）。例如， $n_0 = 0$ 时， $y(0), y(-1), y(-N+1)$ 作为边界条件。

单位样值响应：是激励为 $\delta(n)$ 时产生的系统**零状态响应**，用 $h(n)$ 表示。

将单位样值激励信号转化为边界条件

将 $\delta(n)$ 转化为边界条件，于是求单位样值响应转化为求**齐次解**，即 **$n > 0$ 时的零输入响应**。

例：
$$y(n) - 0.5y(n-1) = x(n)$$

$$\alpha - 0.5 = 0 \quad \alpha = 0.5$$

齐次解为
$$h(n) = C(0.5)^n u(n)$$

$$h(-1) = 0 \quad h(0) = 0.5h(-1) + \delta(0) = 1$$

$$h(0) = C(0.5)^0 = 1 \quad C = 1$$

$$\therefore h(n) = (0.5)^n u(n)$$

利用线性时不变性求单位样值响应

在 $n \neq 0$ 时，接入激励 $\delta(n-1)$ ，用线性时不变性来计算 $h(n)$ 。

$$y(n) - 0.5y(n-1) = \delta(n-1)$$

$$x(n) = \delta(n) \quad h(n) = (0.5)^n u(n)$$

$$x(n) = \delta(n-1) \quad r(n) = h(n-1) = (0.5)^{n-1}$$

根据单位样值响应分析系统的因果性和稳定性

因果系统：输出变化不领先于输入变化的系统。即响应只取决于此时及以前的激励。

离散时间线性时不变系统是因果系统的充分必要条件：

$$n < 0 \quad h(n) = 0 \quad \text{或} \quad h(n) = h(n)u(n)$$

稳定系统：输入有界则输出必定有界。

离散实际线性时不变系统是稳定系统的充分必要条件：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leq M, M \text{ 为有界正值}$$

7.1 引言

7.2 离散时间信号一序列

7.3 离散时间系统的数学模型

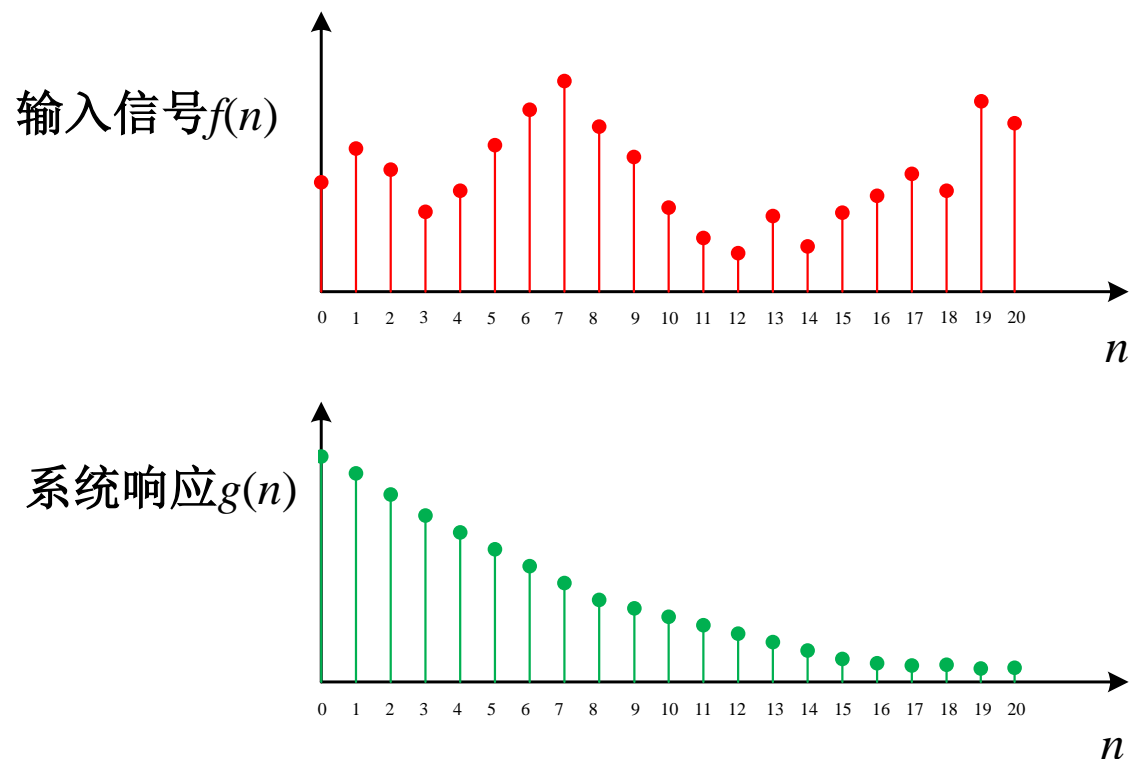
7.4 常系数线性差分方程的求解

7.5 离散时间系统的单位样值(冲激)响应

7.6 卷积和

7.6.1 卷积和的定义和物理意义

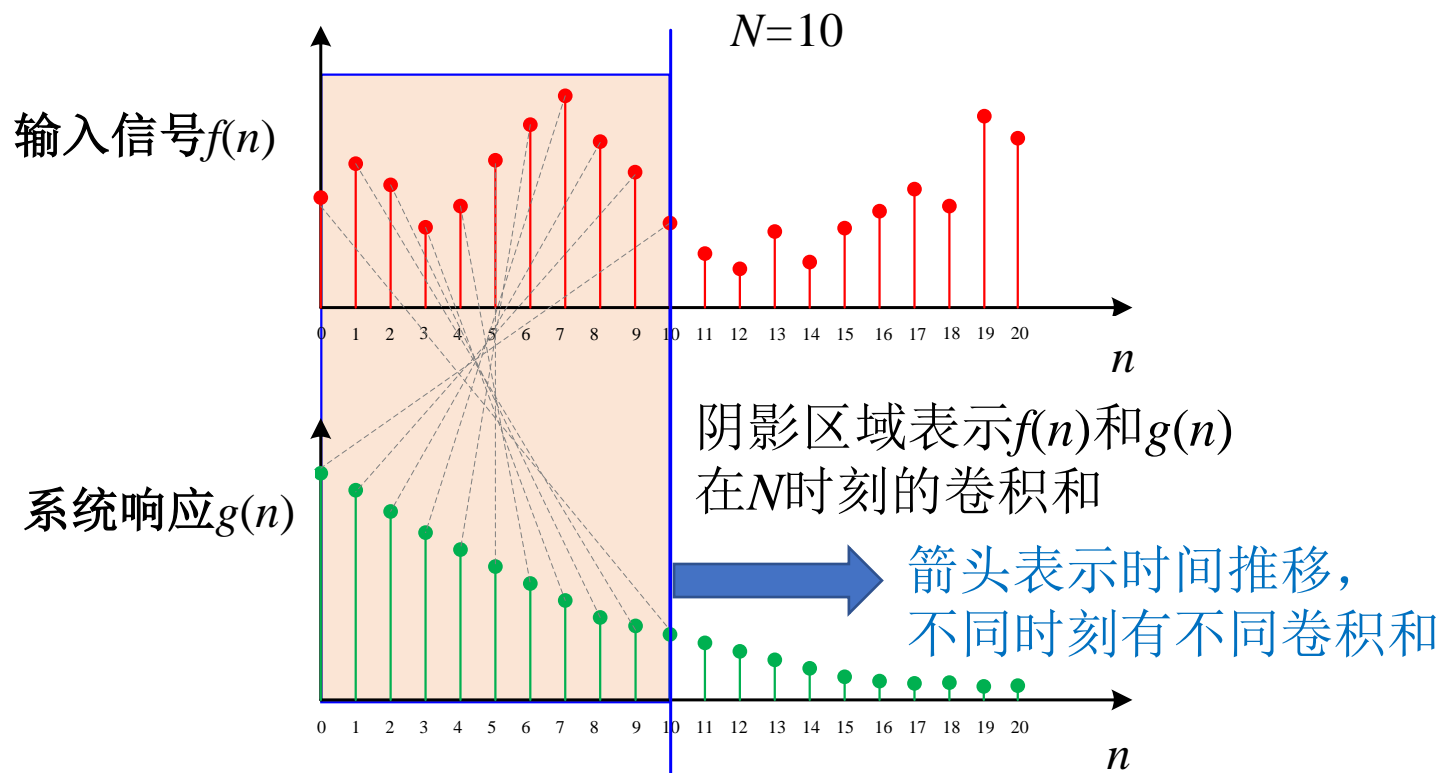
任意信号 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的卷积和 $x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$



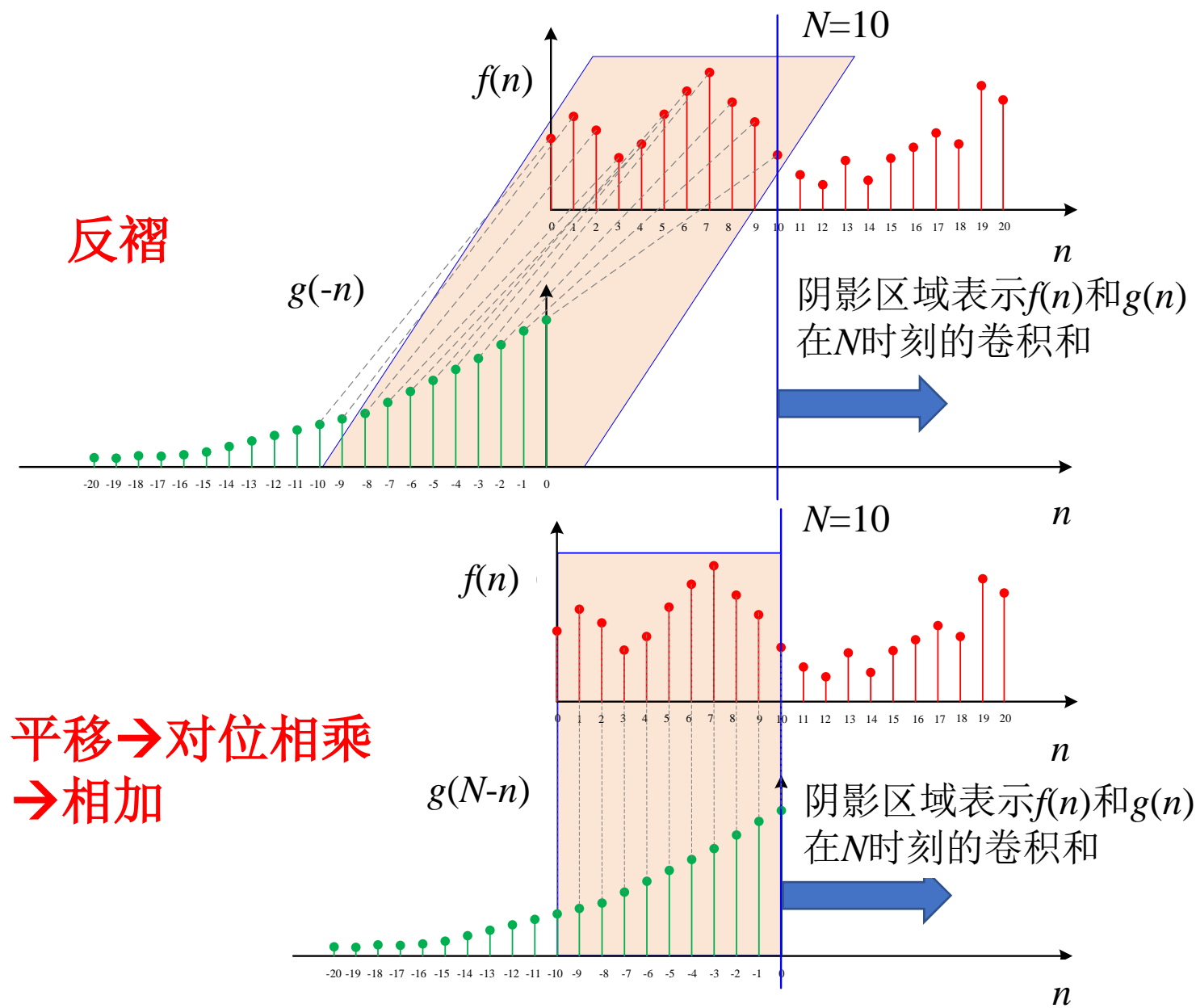
$f(n)$ —输入信号。

$g(n)$ —表示在某个时刻输入的
信号值的衰减趋势。

在 N 时刻，0时刻的输入 $f(0)$ 的值
衰减为 $f(0)g(N)$ 。



最终输出的是所有之前输入信号的**累积效应**。在 $N=10$ 时刻，输出结果跟图中**阴影区域整体**有关。因为 $f(10)$ 是刚输入的，所以其输出结果应为 $f(10)g(0)$ ；输入 $f(9)$ 只经过了1个时间单位的衰减，产生的输出为 $f(9)g(1)$ 。以此类推，即图中虚线所描述的关系。这些对应点相乘然后累加， $f(10)g(0)+f(9)g(1)+\dots+f(0)g(10)$ ，就是 $N=10$ 时刻的输出信号值，即为 $f(n)$ 和 $g(n)$ 两个函数在 $N=10$ 时刻的**卷积和**。



卷积和

“卷”--指函数的翻转，
从 $g(n)$ 变成 $g(-n)$ 的过程；
也包含滑动的意味
(N 变化使窗口平移)。
“积和”—指相乘求和。

7.6.2 用卷积和求零状态响应

将激励信号分解为单位样值序列的线性组合，利用线性时不变系统的特性，求每个样值序列单独作用在系统上的响应，把这些响应叠加即为系统在任意激励信号下的零状态响应。

任意激励信号表示为单位样值加权和的形式

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

$$\delta(n) \Rightarrow h(n) \quad \text{由时不变特性: } \delta(n-m) \Rightarrow h(n-m)$$

$$\begin{aligned} \text{由线性: } y(n) &= T \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = x(n) * h(n) \end{aligned}$$

离散时间系统的零状态响应等于激励信号与单位样值响应的卷积和。

7.6.3 卷积和运算的图解方法

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

卷积和图解法分为五个步骤：

- (1) **变量替换**：将 $x(n)$ 和 $h(n)$ 中的自变量由 n 改为 m ， m 变成函数的自变量；
- (2) **反褶**：把其中一个信号（一般选较简单的信号）反褶；

$$h(m) \xrightarrow{\text{翻转}} h(-m)$$

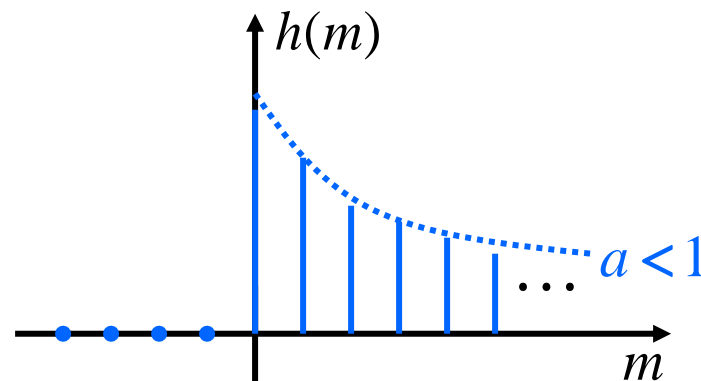
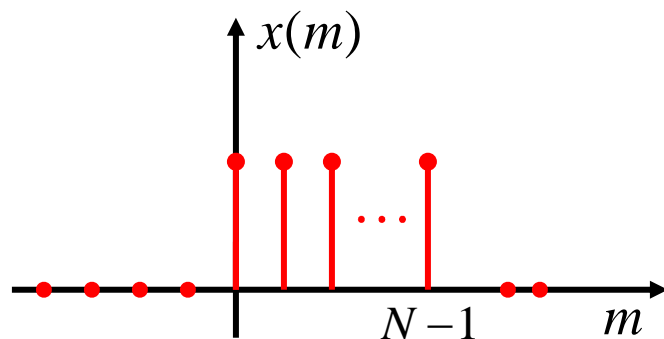
- (3) **平移**：把反褶后的信号平移；

$$h(-m) \xrightarrow{\text{平移}n} h(-(m-n)) = h(n-m)$$

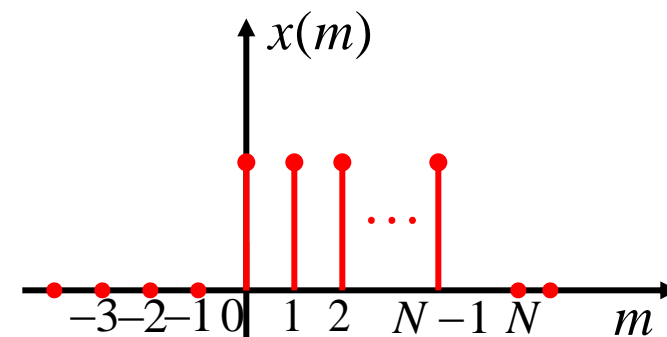
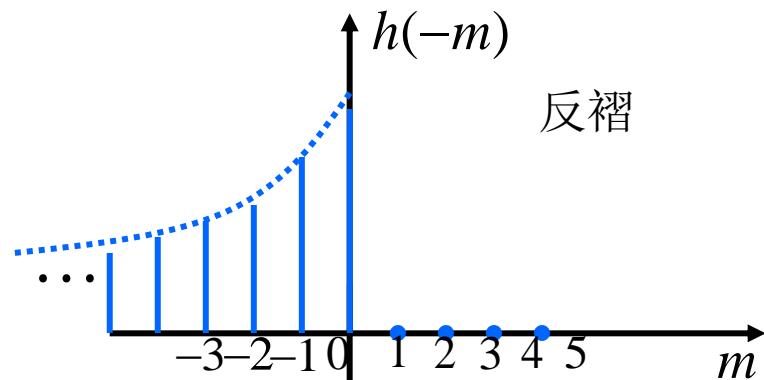
- (4) **相乘**：将 $x(m)$ 与 $h(n-m)$ 相乘；
- (5) **相加**：对乘积后的图形求和。

例7-17：已知某系统的单位样值响应为 $h(n) = a^n u(n)$ ，其中 $0 < a < 1$ ，若激励信号为 $x(n) = R_N(n) = u(n) - u(n - N)$ ，求零状态响应。

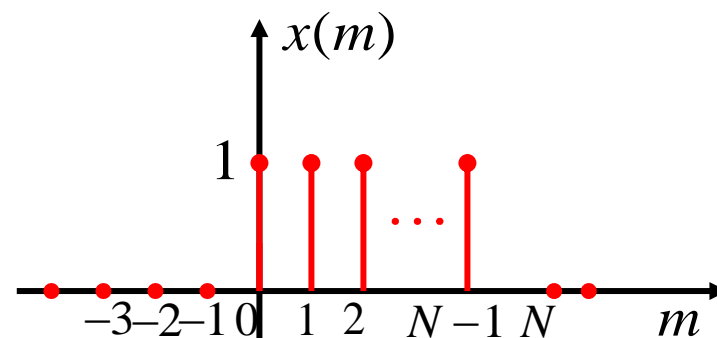
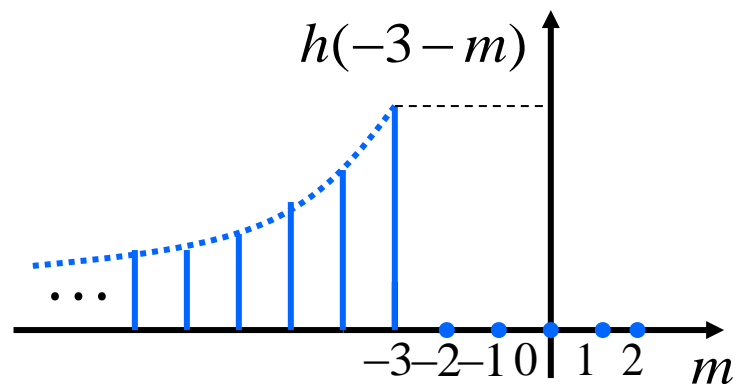
解：



$$y_{zs}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [u(m) - u(m-N)]a^{n-m}u(n-m)$$

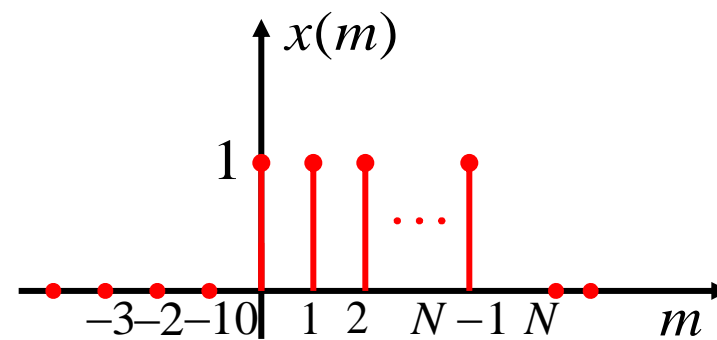
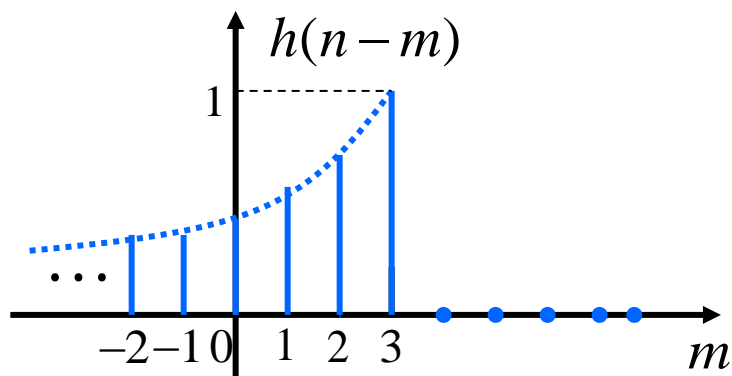


(1) 当 $n < 0$ 时, $x(m)$ 与 $h(n-m)$ 无交叠, 即 $y_{zs}(n) = 0$ ($n < 0$)



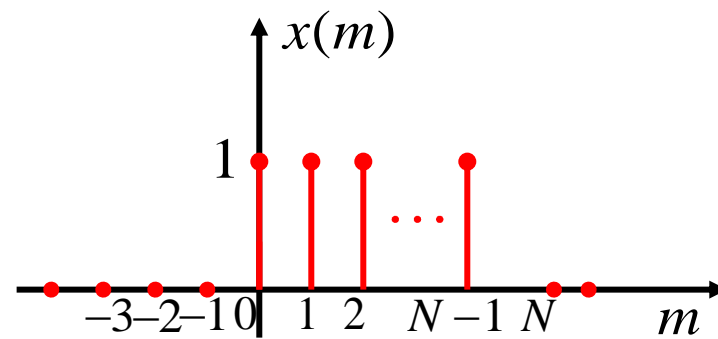
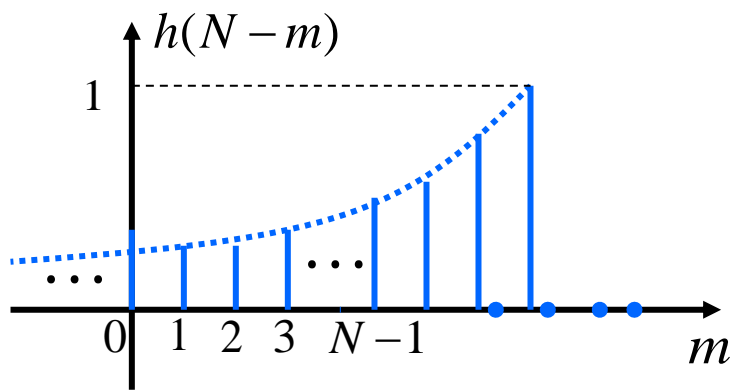
(2) 当 $0 \leq n < N-1$ 时, $x(m)$ 与 $h(n-m)$ 在 $0 \sim n$ 有交叠

$$y_{zs}(n) = \sum_{m=0}^n a^{n-m} = a^n \sum_{m=0}^n a^{-m} = a^n \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}} \quad (0 \leq n < N-1)$$

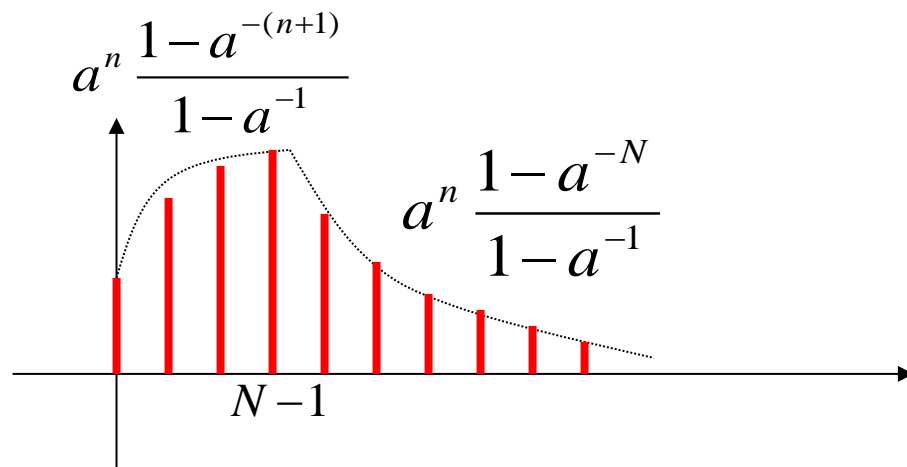


(3) 当 $n \geq N-1$ 时, $x(m)$ 与 $h(n-m)$ 在 $0 \sim (N-1)$ 有交叠

$$y_{zs}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} a^{n-m} = a^n \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}} \quad (n \geq N-1)$$



卷积和的结果

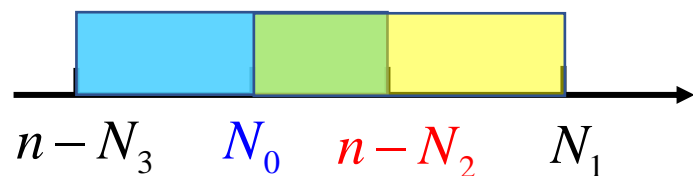


例7-18: 已知一线性时不变系统的单位样值响应 $h(n)$ 只在 $N_0 \leq n \leq N_1$ 区间内有非零值。而输入 $x(n)$ 只在 $N_2 \leq n \leq N_3$ 区间内有非零值。零状态响应 $y(n)$ 只在 $N_4 \leq n \leq N_5$ 之内有非零值。试用 N_0, N_1, N_2, N_3 来表示 N_4 与 N_5 。

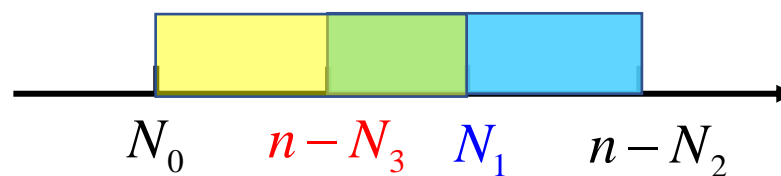
解法一: 令 $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$

当 $n - N_2 \geq N_0$ ，即 $n \geq N_0 + N_2$ 时， $y(n)$ 有非零值，如图(a)所示。

当 $n - N_3 \leq N_1$ ，即 $n \leq N_1 + N_3$ 时， $y(n)$ 也有非零值，如图(b)所示。



图(a)



图(b)

综上:

$$N_4 = N_0 + N_2 \quad N_5 = N_1 + N_3$$

解法二:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

$$N_0 \leq m \leq N_1$$

$$N_2 \leq n-m \leq N_3$$

上面两式相加,

$$N_0 + N_2 \leq n \leq N_1 + N_3$$

$$N_4 = N_0 + N_2 \quad N_5 = N_1 + N_3$$

已知一线性时不变系统的单位样值响应 $h(n)$ 的序列长度为 L_1 ，输入 $x(n)$ 的序列长度为 L_2 。零状态响应 $y(n)$ 的序列长度为 L_3 与 L_1 和 L_2 之间满足()关系。

- ☐ A $L_3 = L_1 + L_2$
- ☒ B $L_3 = L_1 + L_2 - 1$
- ☐ C $L_3 = L_1 + L_2 + 1$
- ☐ D $L_3 = L_1 + L_2 + 2$

提交

假设单位样值响应 $h(n)$ 只在 $N_0 \leq n \leq N_1$ 区间内有非零值，序列长度为 $L_1 = N_1 - N_0 + 1$ 。

输入 $x(n)$ 只在 $N_2 \leq n \leq N_3$ 区间内有非零值，序列长度为 $L_2 = N_3 - N_2 + 1$ 。

零状态响应 $y(n)$ 只在 $N_0 + N_2 \leq n \leq N_1 + N_3$ 内有非零值，序列长度为

$$\begin{aligned} L_3 &= (N_1 + N_3) - (N_0 + N_2) + 1 \\ &= (N_1 - N_0) + (N_3 - N_2) + 1 \\ &= (N_1 - N_0 + 1) + (N_3 - N_2 + 1) - 1 \end{aligned}$$

$$L_3 = L_1 + L_2 - 1$$

连续时间信号的卷积长度为 $L_3 = L_1 + L_2$ 。

例7-19: 已知 $x_1(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1) + 4\delta(n-2) + \delta(n-3)$

$$x_2(n) = 3\delta(n) + \delta(n-1) + 5\delta(n-2)$$

求卷积 $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ 。

解: $\{x_1(n)\} = \{ \overset{\downarrow}{2} \quad 1 \quad 4 \quad 1 \}$ $\{x_2(n)\} = \{ \overset{\downarrow}{3} \quad 1 \quad 5 \}$

$$x_1(n): 2 \quad 1 \quad 4 \quad 1$$

$$x_2(n): \quad 3 \quad 1 \quad 5$$

对位相乘求和

相乘求和时不进位

$$10 \quad 5 \quad 20 \quad 5$$

$$2 \quad 1 \quad 4 \quad 1$$

$$6 \quad 3 \quad 12 \quad 3$$

$$y(n): 6 \quad 5 \quad 23 \quad 12 \quad 21 \quad 5$$

$$\{y(n)\} = \{ \overset{\downarrow}{6} \quad 5 \quad 23 \quad 12 \quad 21 \quad 5 \}$$



计算 $x(n) = \{1, 2, \overset{\downarrow}{0}, 3, 2\}$ 与 $h(n) = \{1, \overset{\downarrow}{4}, 2, 3\}$ 的卷积和。

☐ A $y(n) = \{1, 6, \overset{\downarrow}{10}, 10, 20, 14, 13, 6\}$

☐ B $y(n) = \{1, 8, \overset{\downarrow}{10}, 10, 21, 14, 13, 6\}$

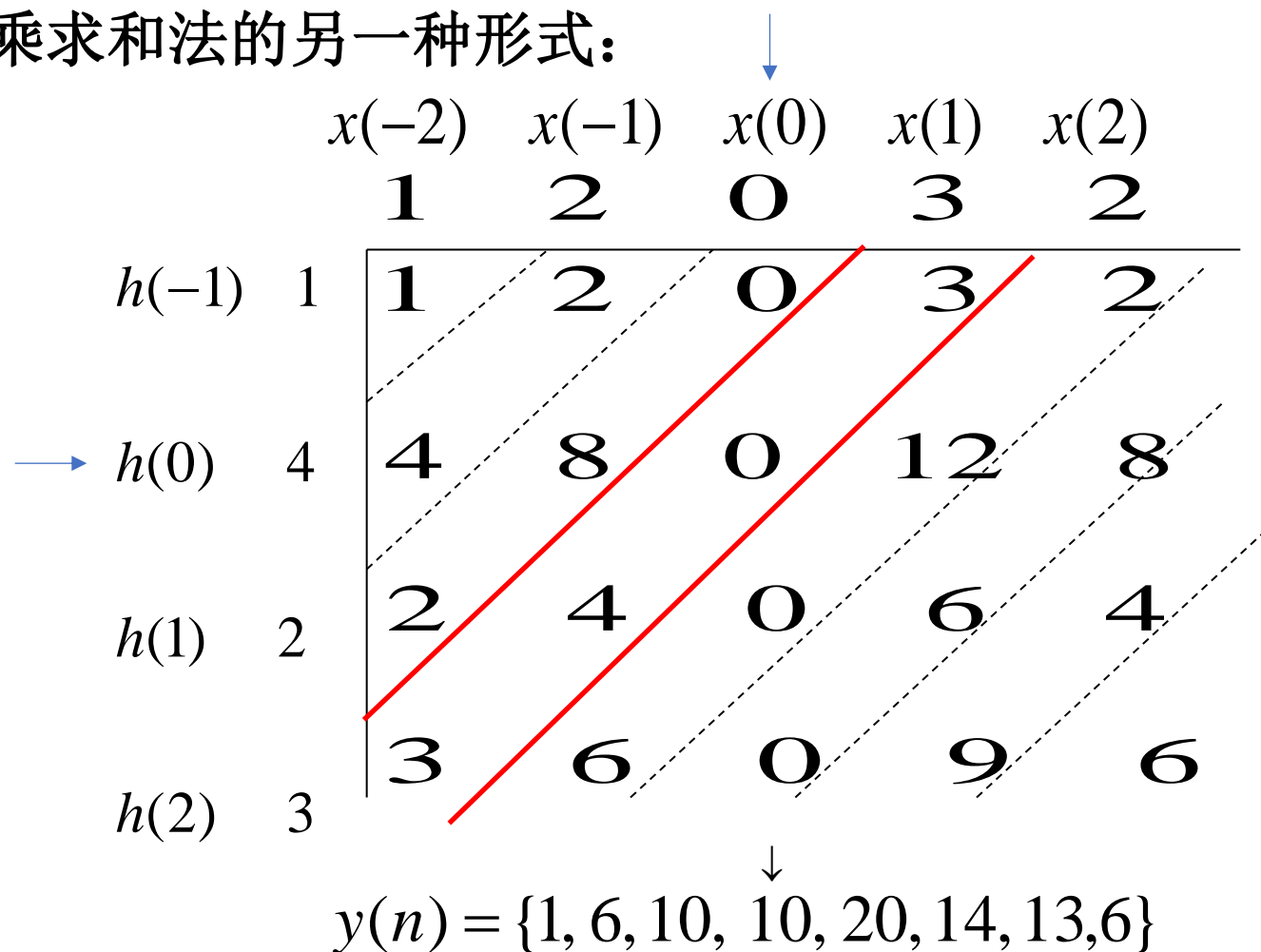
☒ C $y(n) = \{1, 6, 10, \overset{\downarrow}{10}, 20, 14, 13, 6\}$

☐ D $y(n) = \{1, 8, 10, \overset{\downarrow}{10}, 21, 14, 13, 6\}$

提交

例7-20: 计算 $x(n] = \{1, 2, 0, 3, 2\}$ 与 $h(n] = \{1, 4, 2, 3\}$ 的卷积和。

解: 对位相乘求和法的另一种形式:



每一条斜线
上的数相加

7.6.4 卷积和的性质

交换律 $x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n)$

分配律

$$x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] = x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n)$$

结合律 $x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)] = [x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n)$

与单位样值序列的卷积和 $x(n) * \delta(n) = x(n)$

$$x(n) * \delta(n - n_0) = x(n - n_0)$$

与阶跃序列的卷积和

$$x(n) * u(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$$

7.6.5 利用卷积和求系统的零状态响应

步骤:

- 1、先求系统的单位样值响应。
- 2、求激励信号与单位样值响应的卷积和，结果就为系统的零状态响应。

例7-21：若描述某离散系统的差分方程为

$$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$$

已知激励 $x(n) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ ，求系统的零状态响应 $y_{zs}(n)$ 。

解：步骤1：求系统的单位样值响应。

$$h(n) + 3h(n-1) + 2h(n-2) = \delta(n)$$

$$\text{特征根为}-1, -2, \therefore h(n) = \left[C_1(-1)^n + C_2(-2)^n \right] u(n)$$

$h(-1) = 0, h(-2) = 0$, 迭代求得 $h(0) = 1$ 。

用 $h(0), h(-1)$ 求得 $C_1 = -1, C_2 = 2$ 。

$$\therefore h(n) = \left[-(-1)^n + 2(-2)^n \right] u(n)$$

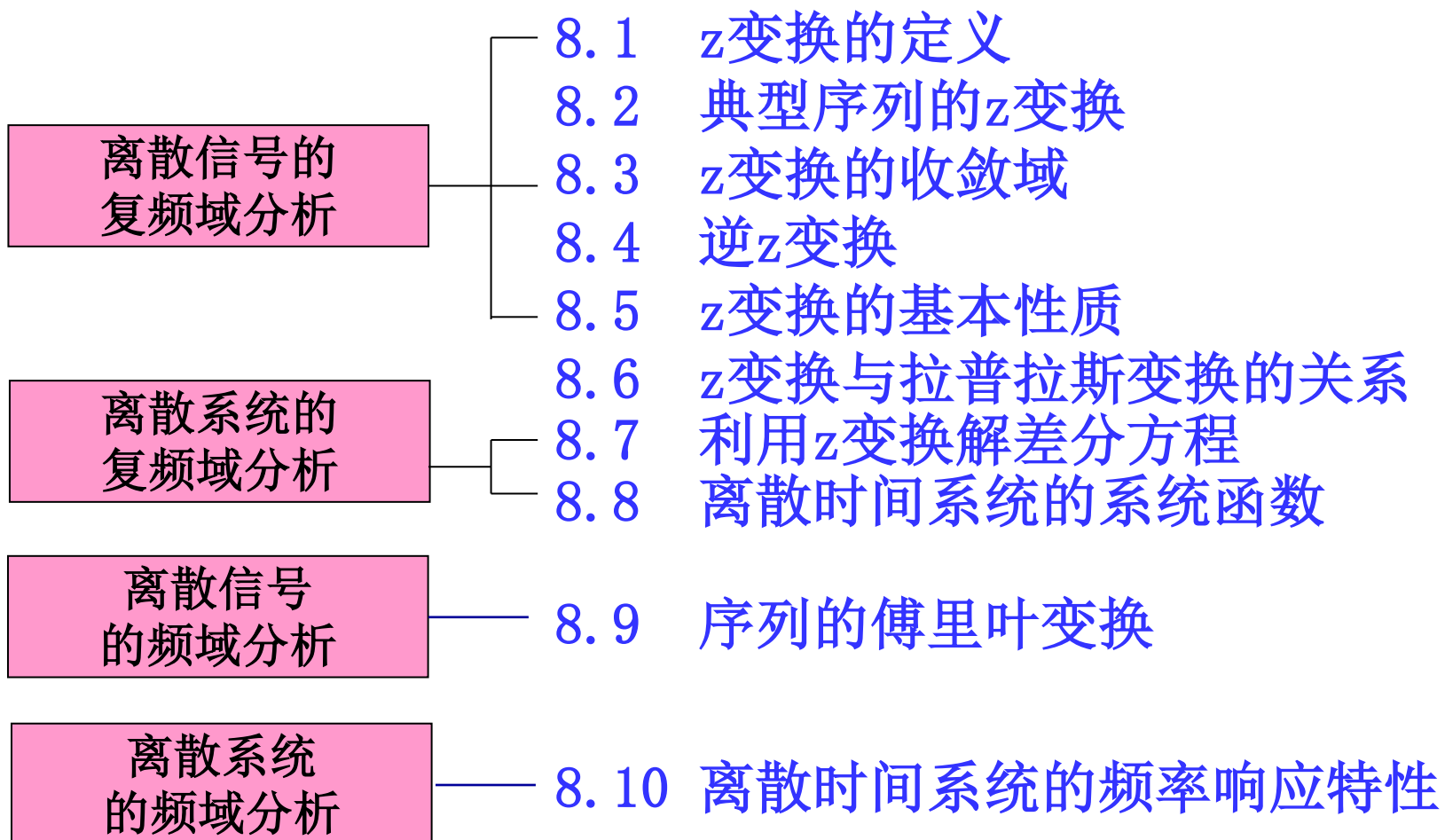
步骤2：求激励信号与单位样值响应的卷积和，得到零状态响应。

$$\begin{aligned}y_{zs}(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \\&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^m u(m) \cdot [-(-1)^{n-m} + 2(-2)^{n-m}] u(n-m) \\&= \begin{cases} -3(-1)^n \sum_{m=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^m + 6(-2)^n \sum_{m=0}^n \left(-\frac{1}{4}\right)^m, & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \\&= [-2(-1)^n + \frac{24}{5}(-2)^n + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n] u(n)\end{aligned}$$

作业

基础题：7-26，7-30，7-32。

加强题：7-22，7-35。



本次课内容

- 8.1 z 变换的定义
- 8.2 典型序列的 z 变换
- 8.3 z 变换的收敛域

本次课目标

- 1. 了解 z 变换与拉氏变换的关联；
- 2. 熟悉常见序列的 z 变换及其收敛域；
- 3. 会分析各种类型序列的收敛域。

离散信号的 复频域分析	8.1	z 变换的定义
	8.2	典型序列的 z 变换
	8.3	z 变换的收敛域
	8.4	逆 z 变换
	8.5	z 变换的基本性质
离散系统的 复频域分析	8.6	z 变换与拉普拉斯变换的关系
	8.7	利用 z 变换解差分方程
	8.8	离散时间系统的系统函数
离散信号 的频域分析	8.9	序列的傅里叶变换
离散系统 的频域分析	8.10	离散时间系统的频率响应特性

为什么引入z变换？

- z变换是求解差分方程的有力工具（把差分方程转换成代数方程），类似于连续时间系统中的拉普拉斯变换。
- z变换还用于数字滤波器的分析与设计，及各种类型的数字信号处理问题。

z变换的产生和发展：

- 18世纪有初步认识
- 20世纪50—60年代进一步发展和应用

z变换是借助于抽样信号的拉氏变换引出。

连续因果信号 $x(t)$ 经均匀冲激抽样，则抽样信号 $x_s(t)$ 的表示式为

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

T 为抽样间隔。

单边拉氏变换

$$X_s(s) = \int_0^{\infty} x_s(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \int_0^{\infty} \delta(t-nT)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-snT}$$

令 $z = e^{sT}$ ，其中 z 为一个复变量，抽样信号的拉氏变换与序列的 z 变换的关系：

$$X(z) \Big|_{z=e^{sT}} = X_s(s)$$

$$z = e^{sT}, \quad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

通常令 $T=1$, $z = e^s$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

单边z变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

双边z变换

序列的z变换是复变量 z^{-1} 的幂级数，其系数是 $x(n)$ 。

因果序列的单边和双边z变换等同。

着重单边，兼顾双边！

在任何条件下，序列的 z 变换都有意义。此说法（）

☐ A 正确

☒ B 错误

提交

离散信号的 复频域分析	8.1	z 变换的定义
	8.2	典型序列的 z 变换
	8.3	z 变换的收敛域
	8.4	逆 z 变换
	8.5	z 变换的基本性质
离散系统的 复频域分析	8.6	z 变换与拉普拉斯变换的关系
	8.7	利用 z 变换解差分方程
	8.8	离散时间系统的系统函数
离散信号 的频域分析	8.9	序列的傅里叶变换
离散系统 的频域分析	8.10	离散时间系统的频率响应特性

1、单位样值序列的 z 变换

$$ZT[\delta(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1 \quad (0 \leq |z| \leq \infty, \text{全平面收敛})$$

单边（双边）z变换

$$ZT[\delta(n-1)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n-1) z^{-n} = z^{-1} \quad (|z| > 0)$$

单边（双边）z变换

$$ZT[\delta(n+1)] = \sum_{n=-\infty}^{-1} \delta(n+1) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n+1) z^{-n} = z^1 + 0 = z \quad (|z| < \infty)$$

双边z变换

2、单位阶跃序列的 z 变换

$$ZT[u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (|z^{-1}| < 1 \rightarrow |z| > 1)$$

单边（双边）z变换

序列 $a^n u(n)$ ($|a| \neq 1$) 的 z 变换为

- ☐ A $\frac{z}{a-z} \quad (|z| < |a|)$
- ☐ B $\frac{z}{a-z} \quad (|z| > |a|)$
- ☐ C $\frac{z}{z-a} \quad (|z| < |a|)$
- ☒ D $\frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|)$

提交

3、单边指数序列的 z 变换

$$ZT[a^n u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad (|az^{-1}| < 1 \rightarrow |z| > |a|)$$

4、斜变序列的 z 变换

$$ZT[nu(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} nu(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$$

$$\text{由 } \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (|z| > 1) \quad (1)$$

$$(1) \text{ 两边对 } z^{-1} \text{ 求导, } \sum_{n=0}^{\infty} n(z^{-1})^{n-1} = \frac{1}{(1 - z^{-1})^2} \quad (2)$$

$$(2) \text{ 两边乘以 } z^{-1}, ZT[nu(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} = \frac{z}{(z - 1)^2} \quad (|z| > 1)$$

5、单边复指数序列的 z 变换

$$ZT[e^{j\omega_0 n} u(n)] = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} \quad |z| > |e^{j\omega_0}| = 1$$

$$ZT[e^{-j\omega_0 n} u(n)] = \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \quad |z| > |e^{-j\omega_0}| = 1$$

$$ZT[\beta^n e^{j\omega_0 n} u(n)] = \frac{z}{z - \beta e^{j\omega_0}} \quad |z| > |\beta e^{j\omega_0}| = |\beta|$$

$$ZT[\beta^n e^{-j\omega_0 n} u(n)] = \frac{z}{z - \beta e^{-j\omega_0}} \quad |z| > |\beta e^{-j\omega_0}| = |\beta|$$

6、单边正（余）弦序列的z变换

$$ZT[\cos(\omega_0 n)u(n)] = ZT[(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}) / 2 \cdot u(n)]$$

$$= \left(\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \right) / 2$$

$$= \frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad (|z| > 1)$$

$$ZT[\sin(\omega_0 n)u(n)] = ZT[(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}) / (2j) \cdot u(n)]$$

$$= \left(\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \right) / 2j$$

$$= \frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad (|z| > 1)$$

7、单边指数正（余）弦序列的z变换

$$\begin{aligned} ZT[\beta^n \cos(\omega_0 n)u(n)] &= ZT[\beta^n (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}) / 2] \\ &= \left(\frac{z}{z - \beta e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - \beta e^{-j\omega_0}} \right) / 2 \\ &= \frac{z(z - \beta \cos \omega_0)}{z^2 - 2z\beta \cos \omega_0 + \beta^2} \quad (|z| > |\beta|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ZT[\beta^n \sin(\omega_0 n)u(n)] &= ZT[\beta^n (e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}) / 2j] \\ &= \left(\frac{z}{z - \beta e^{j\omega_0}} - \frac{z}{z - \beta e^{-j\omega_0}} \right) / 2j \\ &= \frac{z\beta \sin \omega_0}{z^2 - 2z\beta \cos \omega_0 + \beta^2} \quad (|z| > |\beta|) \end{aligned}$$

其他典型序列的单边z变换见教材附录五。

离散信号的复频域分析	8.1 z 变换的定义
	8.2 典型序列的 z 变换
	8.3 z 变换的收敛域
	8.4 逆 z 变换
	8.5 z 变换的基本性质
离散系统的复频域分析	8.6 z 变换与拉普拉斯变换的关系
	8.7 利用 z 变换解差分方程
	8.8 离散时间系统的系统函数
离散信号的频域分析	8.9 序列的傅里叶变换
离散系统的频域分析	8.10 离散时间系统的频率响应特性

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

当 $x(n)$ 为有界时，令上述级数收敛的所有 z 值的集合称为收敛域 (region of convergence, ROC)。

级数收敛的充要条件是满足绝对可和条件。

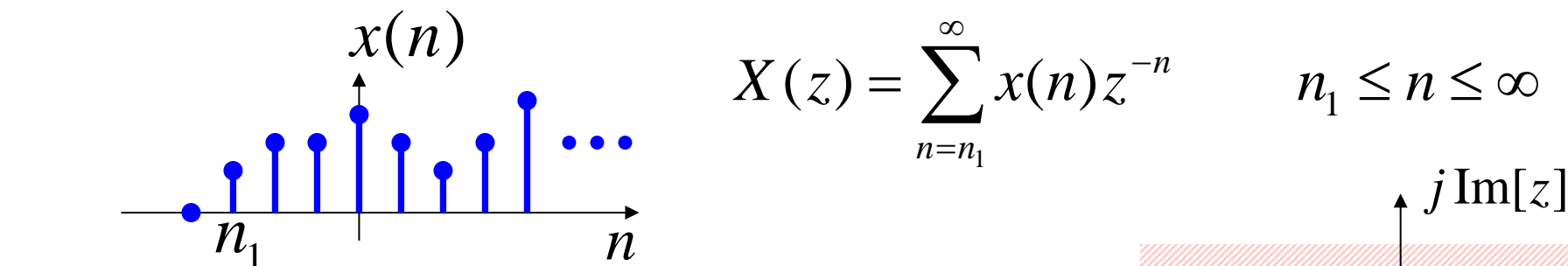
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$$

左边构成正项级数，可利用正项级数收敛的常用判定方法，

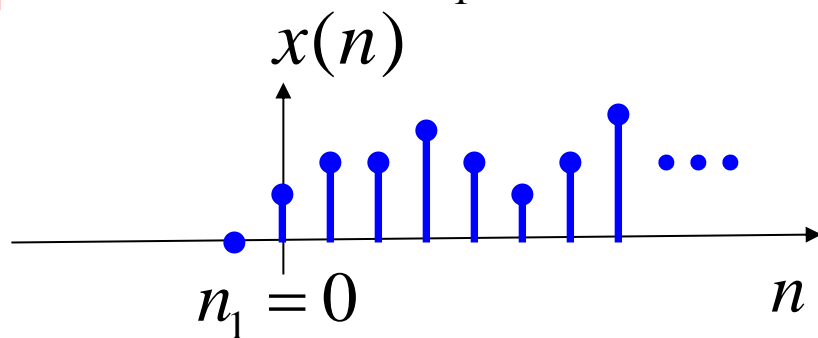
比值判定法: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

根值判定法: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

1、**右边序列**：只在 $n \geq n_1$ 区间内，有非零的有限值的序列。

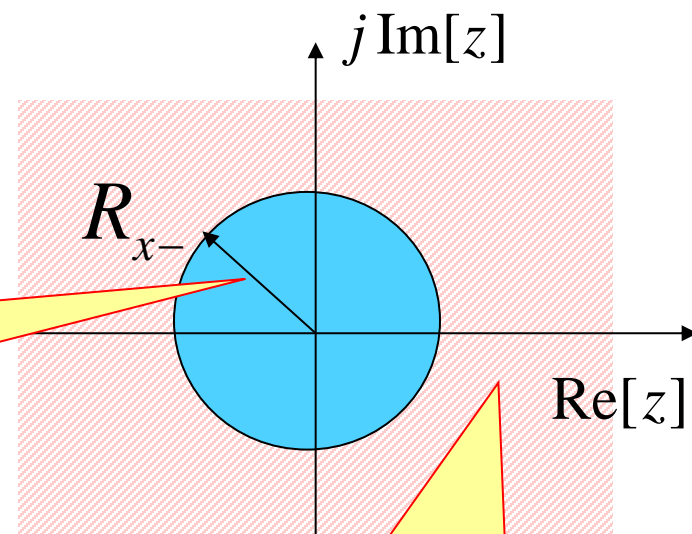


$n_1 < 0$, $R_{x-} < |z| < \infty$ (收敛域不含 $|z| = \infty$, 因 ∞ 的 $-n_1$ 次幂为无穷)



$n_1 = 0$, $|z| > R_{x-}$

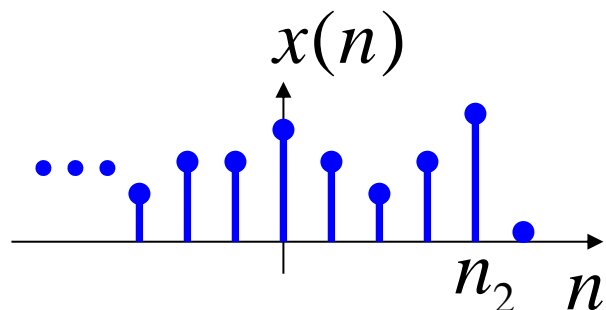
收敛半径



圆外为收敛域，若 $n_1 < 0$ ，则不包括 $|z| = \infty$

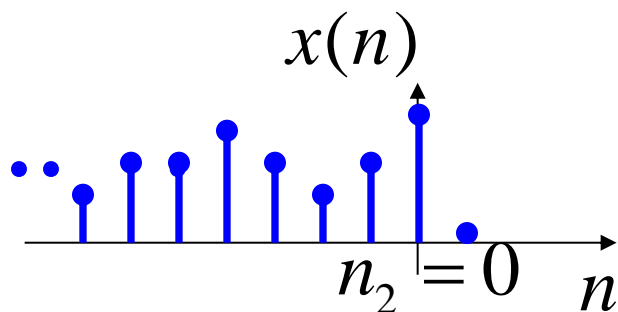
因果序列是右边序列的一种特殊情况，它的收敛域为 $|z| > R_{x-}$ 。

2、**左边序列**：只在 $n \leq n_2$ 区间内，有非零的有限值的序列 $x(n)$ 。

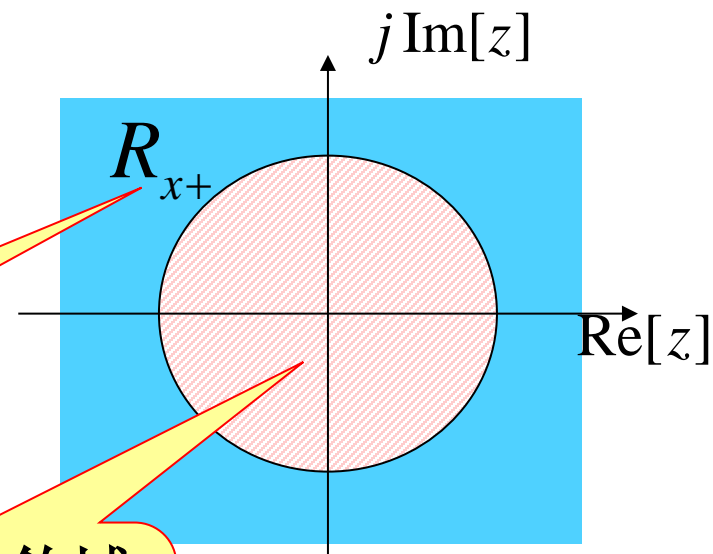


$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} \quad -\infty \leq n \leq n_2$$

$n_2 > 0$, $0 < |z| < R_{x+}$ (收敛域不含 $z=0$, 因0的负指数幂无意义)



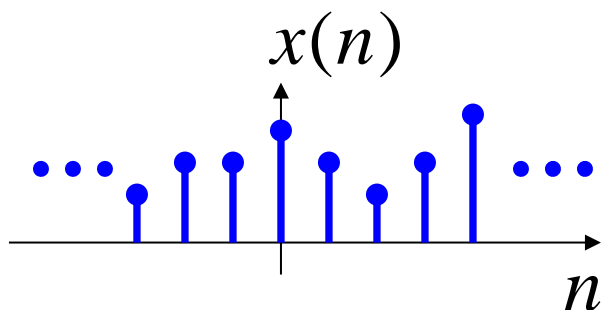
$n_2 = 0$, $|z| < R_{x+}$



收敛半径

圆内为收敛域，
若 $n_2 > 0$
则不包括 $z=0$ 点

3、双边序列：在 $-\infty \leq n \leq \infty$ 区间内，有非零的有限值的序列



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad -\infty \leq n \leq \infty$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

圆内收敛

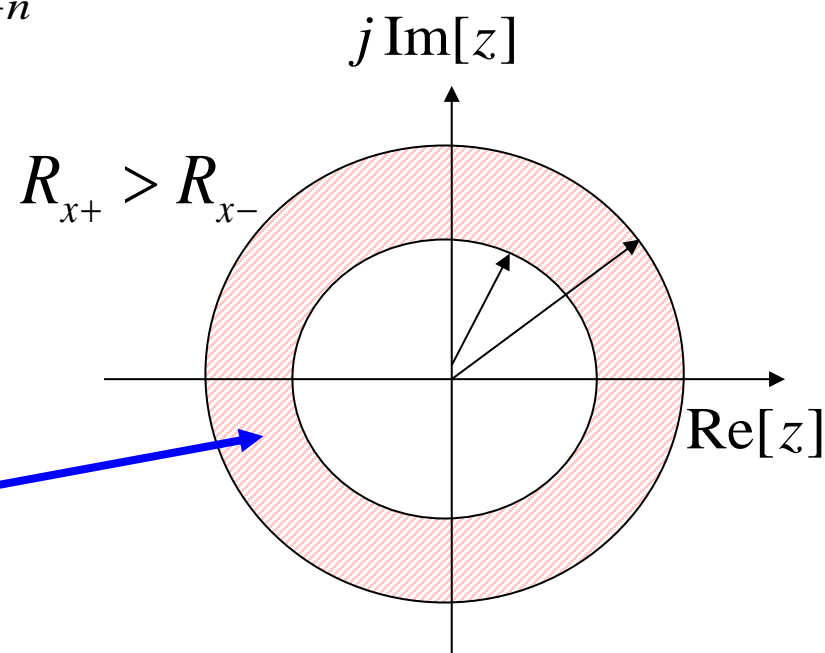
$$|z| < R_{x+}$$

圆外收敛

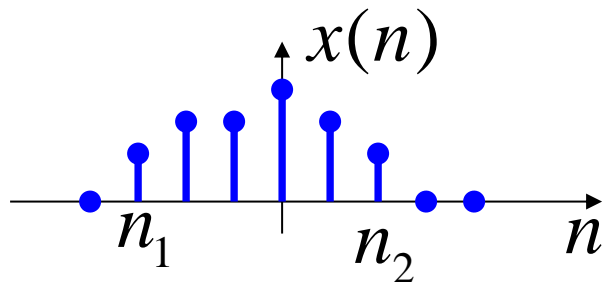
$$|z| > R_{x-}$$

$R_{x+} > R_{x-}$ 有环状收敛域

$R_{x+} < R_{x-}$ 没有收敛域



4、有限长序列：在有限区间 $n_1 \leq n \leq n_2$ 内，有非零的有限值的序列



$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n} \quad n_1 \leq n \leq n_2$$

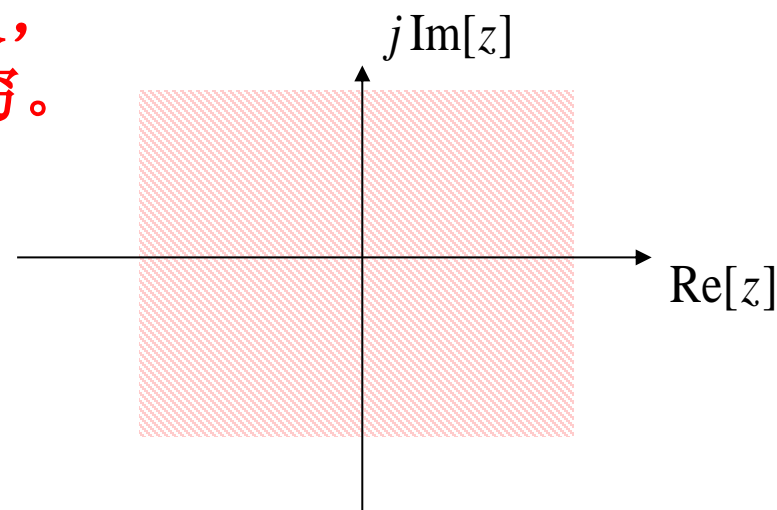
分为三种情况：

$$n_1 < 0, n_2 > 0 \quad 0 < |z| < \infty$$

$$n_1 \geq 0, n_2 > 0 \quad 0 < |z| \leq \infty$$

$$n_1 < 0, n_2 \leq 0 \quad 0 \leq |z| < \infty$$

0^{-n} 在 $n > 0$ 时无意义，
 ∞^{-n} 在 $n < 0$ 时为无穷。



收敛域至少为除了0和 ∞ 外的整个z平面（若零极点相消，收敛域扩大为整个z平面）。

下列说法正确的有（ ）

☒ A

单边 z 变换的变换式与序列唯一对应。

☒ B

单边 z 变换的变换式有唯一的收敛域。

☐ C

双边 z 变换的变换式与序列唯一对应。

☒ D

双边 z 变换的变换式可能对应不同的序列。

提交

作业

基础题：8-1, 8-3, 8-7

加强题：无