

本次课内容

- 3.1 引言
- 3.2 周期信号的傅里叶级数分析
- 3.3 典型周期信号的傅里叶级数

本次课目标

1. 了解频域分析法提出的背景、过程和新应用；
2. 熟练掌握周期信号的三角函数和指数形式的傅里叶级数分析方法；
3. 熟练运用波形的对称性与谐波特性的关系获得傅里叶级数；
4. 熟悉矩形波等典型周期信号的傅里叶级数的特性。

3.1 引言

3.2 周期信号的傅里叶级数分析

3.3 典型周期信号的傅里叶级数

3.4 傅里叶变换

3.5 典型非周期信号的傅里叶变换

3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换

3.7 傅里叶变换的基本性质

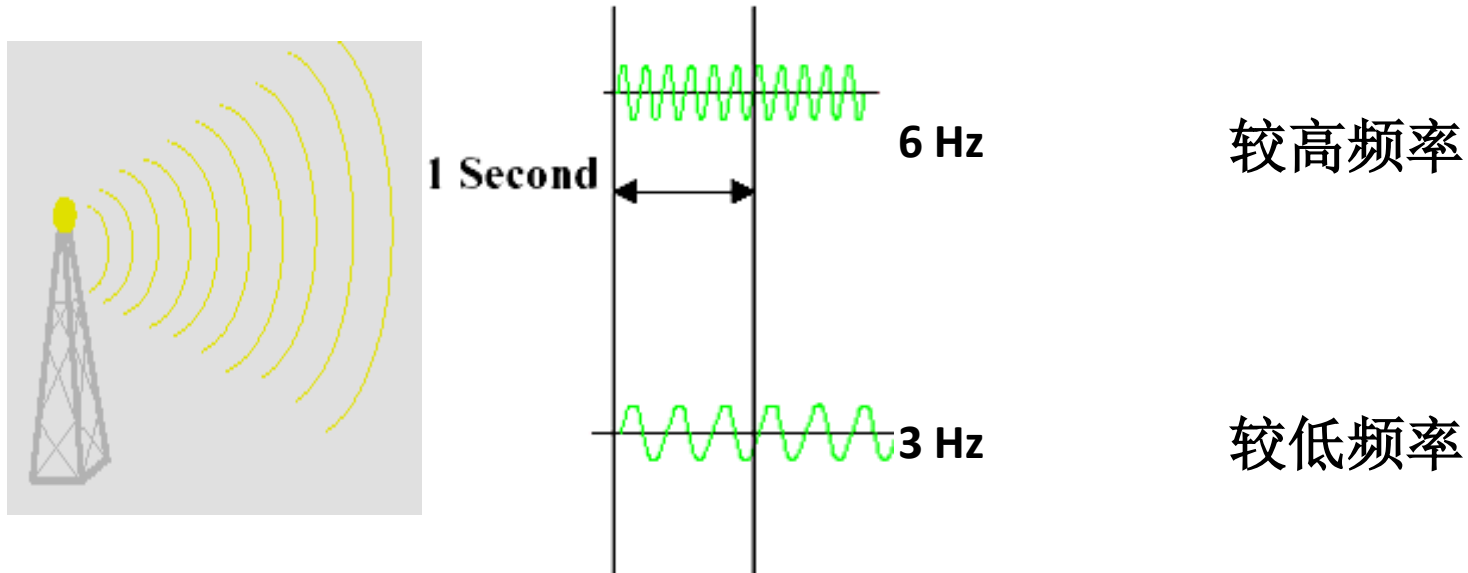
3.8 卷积特性

3.9 周期信号的傅里叶变换

3.10 抽样信号的傅里叶变换

3.11 抽样定理

- **时域**分析：信号或者系统模型的自变量为时间
- 变换域分析：自变量为其他物理量
 - **频域**分析：自变量为**频率**
 - **复频域**分析：自变量为**复频率**（第四章内容）
- **频率**是单位时间内完成周期性变化的次数（单位为周期/秒或赫兹Hz），**描述信号变换的快慢**。
- **正弦信号**的**频率**可以从**时域**直接观察到。

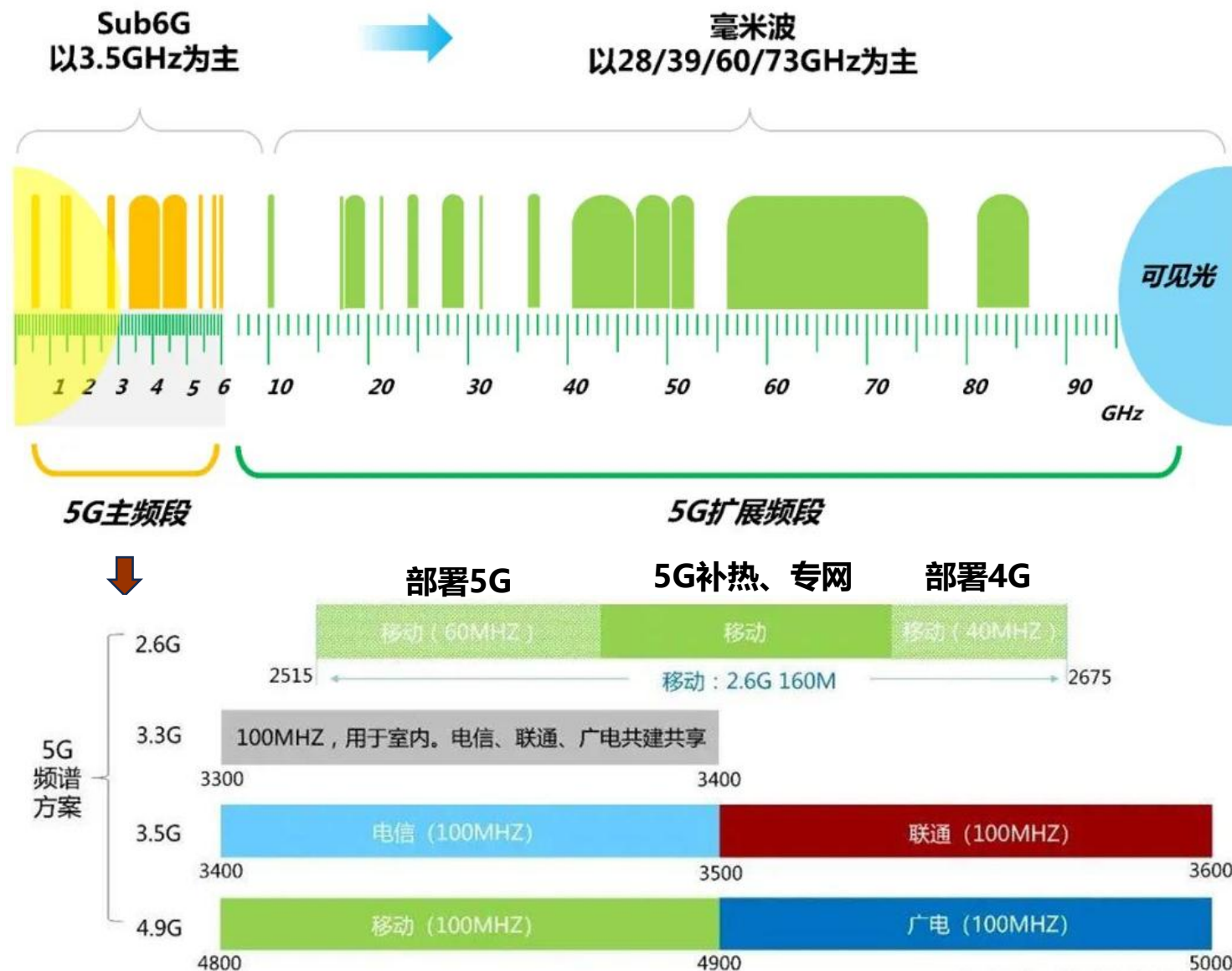


- 1807年，法国数学家和物理学家傅里叶（J. Fourier）在研究热传导理论时基于分析主义和还原主义思想，提出了将周期函数展开为正弦级数的原理，奠定了频域分析的基础。
- 泊松（Poisson）、高斯（Gauss）等人把这一成果应用到电学中。
- 19世纪末，人们制造出用于工程实际的电容器。
- 进入20世纪以后，谐振电路、滤波器、正弦振荡器等一系列具体问题的解决为正弦函数与傅里叶分析的进一步应用开辟了广阔的前景。
- 在通信与控制系统的理论研究和工程实际应用中，傅里叶变换法具有很多的优点。
- 快速傅里叶变换FFT为傅里叶分析法赋予了新的生命力。



傅里叶（1768–1830）

5G频谱分配



移动、广电共享2.6G频段5G网络

电信、联通共建共享5G接入网

- **频域分析**揭示了信号内在的频率特性以及信号时间特性与其频率特性之间的密切关系，从而导出了信号的频谱、带宽以及滤波、调制和频分复用等重要概念。
- 频域分析是通过**傅里叶变换**（**傅里叶分析**）进行的。将信号进行**正交分解**，即分解为**三角函数**或**复指数函数**的组合。

傅里叶分析

傅里叶级数展开：周期信号可以表示为成**谐波**关系的**正弦信号**的加权和。

傅里叶变换：非周期信号可以表示为在**0到无穷高**的所有频率分量上的**正弦信号**的加权积分。

任何周期信号都可以分解成正弦函数的线性叠加。此说法（ ）

☐ A 正确

☒ B 错误

提交

3.1 引言

3.2 周期信号的傅里叶级数分析

3.3 典型周期信号的傅里叶级数

3.4 傅里叶变换

3.5 典型非周期信号的傅里叶变换

3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换

3.7 傅里叶变换的基本性质

3.8 卷积特性

3.9 周期信号的傅里叶变换

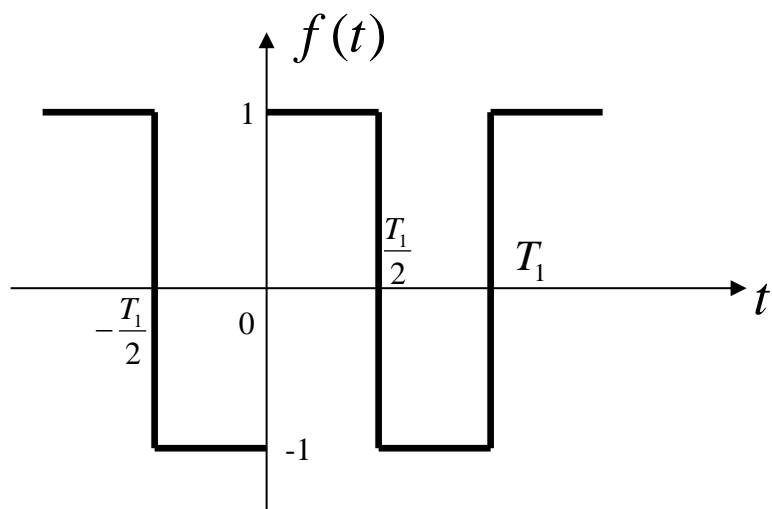
3.10 抽样信号的傅里叶变换

3.11 抽样定理

- 1807年，傅里叶提出，任何一个周期信号都可以展开成谐波关系的正弦函数的叠加。
- 拉格朗日认为此主张无意义，因为实际信号中存在断点。
- 1822年，傅里叶发表了《热的分析理论》。
- 1829年，狄里赫利（Dirichlet）证明只有在满足一定条件时，周期信号才能展开成傅里叶级数。
- **狄里赫利条件**（傅里叶级数存在的**充分不必要条件**）：
 - （1）在一个周期内，信号**连续**或只有**有限个第一类间断点**（函数在该间断点存在有限值的左极限和右极限，如函数 $x=|\sin(t)|/\sin(t)$ 在点 $t=0$ 处）。
 - （2）在一个周期内，**极大值和极小值的数目应为有限个**。
 - （3）在一个周期内，信号**绝对可积**，即 $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$ 。
- **工程中的信号都满足狄里赫利条件。**

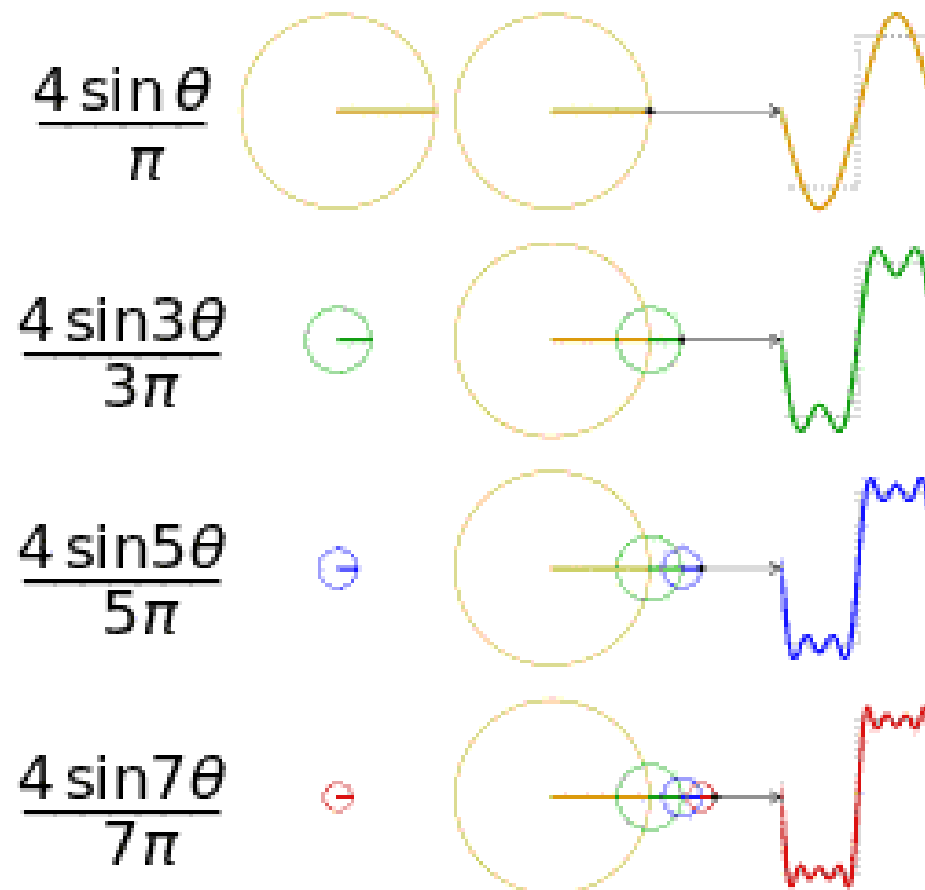
- 任何周期函数在满足狄里赫利条件下，可以展成正交函数线性组合的无穷级数。
- 如果正交函数集是三角函数集或指数函数集，此时周期函数所展成的级数就是“傅里叶级数”。
- 为什么选择三角函数（正弦波）作为傅里叶级数的基本信号？
 - 正弦曲线有保真度——一个正弦信号通过LTI系统后，输出的仍是正弦信号，只有幅度和相位可能发生变化，但频率和波形不变。
 - 三角（指数）函数的积分和求导仍为三角（指数）函数。

周期矩形信号的产生



多少个正弦波叠加可以构成矩形信号？

无数个。



3.2.1 三角形式的傅里叶级数

设周期信号为 $f(t)$, 其周期是 T_1 , 基波角频率 $\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (1)$$

直流分量: $a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) dt$

余弦分量的幅度: $a_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cos n\omega_1 t dt$

正弦分量的幅度: $b_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \sin n\omega_1 t dt$

以上各式中的积分限一般取: $0 \sim T_1$ 或 $-\frac{T_1}{2} \sim \frac{T_1}{2}$

三角形式的傅里叶级数也可表示成：

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (2)$$

$$\text{其中} \quad c_0 = a_0 \quad c_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \quad \varphi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\frac{a_n}{c_n} \cos(n\omega_1 t) + \frac{b_n}{c_n} \sin(n\omega_1 t) \right] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n [\cos(n\omega_1 t) \cos(-\varphi_n) + \sin(n\omega_1 t) \sin(-\varphi_n)] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \end{aligned}$$

3.2.2 指数形式的傅里叶级数

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

根据欧拉公式：

$$\cos(n\omega_1 t) = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}), \quad \sin(n\omega_1 t) = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t})$$

代入上式得：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right)$$

$$\text{令 } F(n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad \text{则 } F(-n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} F(-n\omega_1) e^{-jn\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

指数形式:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3)$$

其中

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad \text{----- 复振幅}$$

$$F_0 = a_0 = c_0$$

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

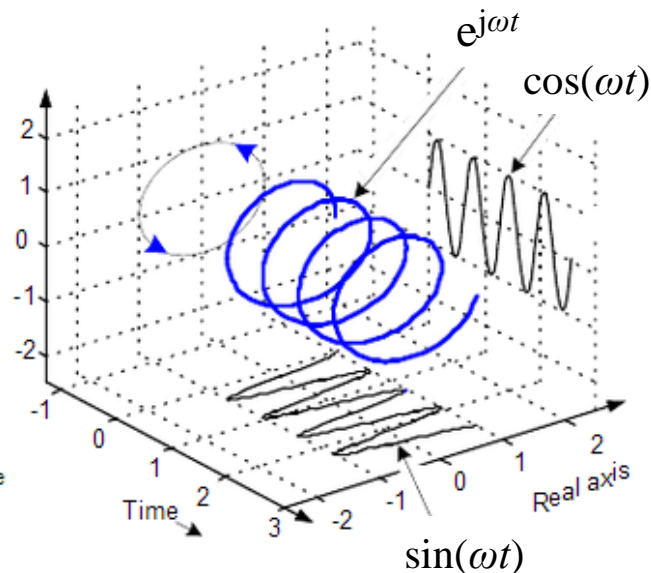
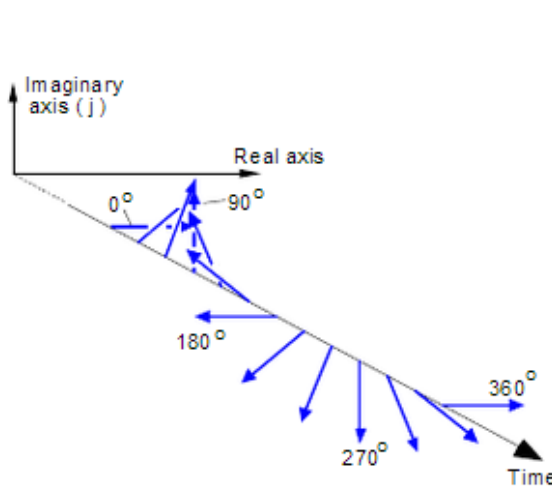
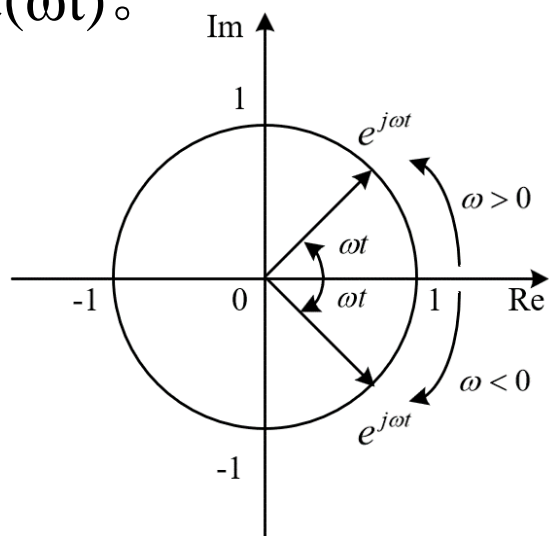
$$|F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} c_n \quad \varphi_n = \arctan \left(-\frac{b_n}{a_n} \right)$$

负频率的物理意义

负频率与我们观察所在的空间相关。我们直觉认为现实世界不存在负频率，是在二维空间即 x - t 平面观察的结果，频率定义为单位时间内信号重复出现的次数，不会出现负值，这相当于仅从实平面或虚平面看信号。

在三维空间，根据欧拉公式， $e^{j\theta}$ 表示复平面单位圆上的一点， θ 表示相角。令 $\theta=\omega t$ ，随时间变化， $e^{j\omega t}$ 即表示该复数沿着单位圆旋转。定义正频率即 $\omega>0$ 为逆时针旋转，负频率即 $\omega<0$ 为顺时针旋转。

$e^{j\omega t}$ 随时间变化的曲线为螺旋线，且其在实平面的投影为 $\cos(\omega t)$ ，在虚平面的投影为 $\sin(\omega t)$ 。



3.2.3 周期信号的频谱及其特点

1. 周期信号的频谱

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (1)$$

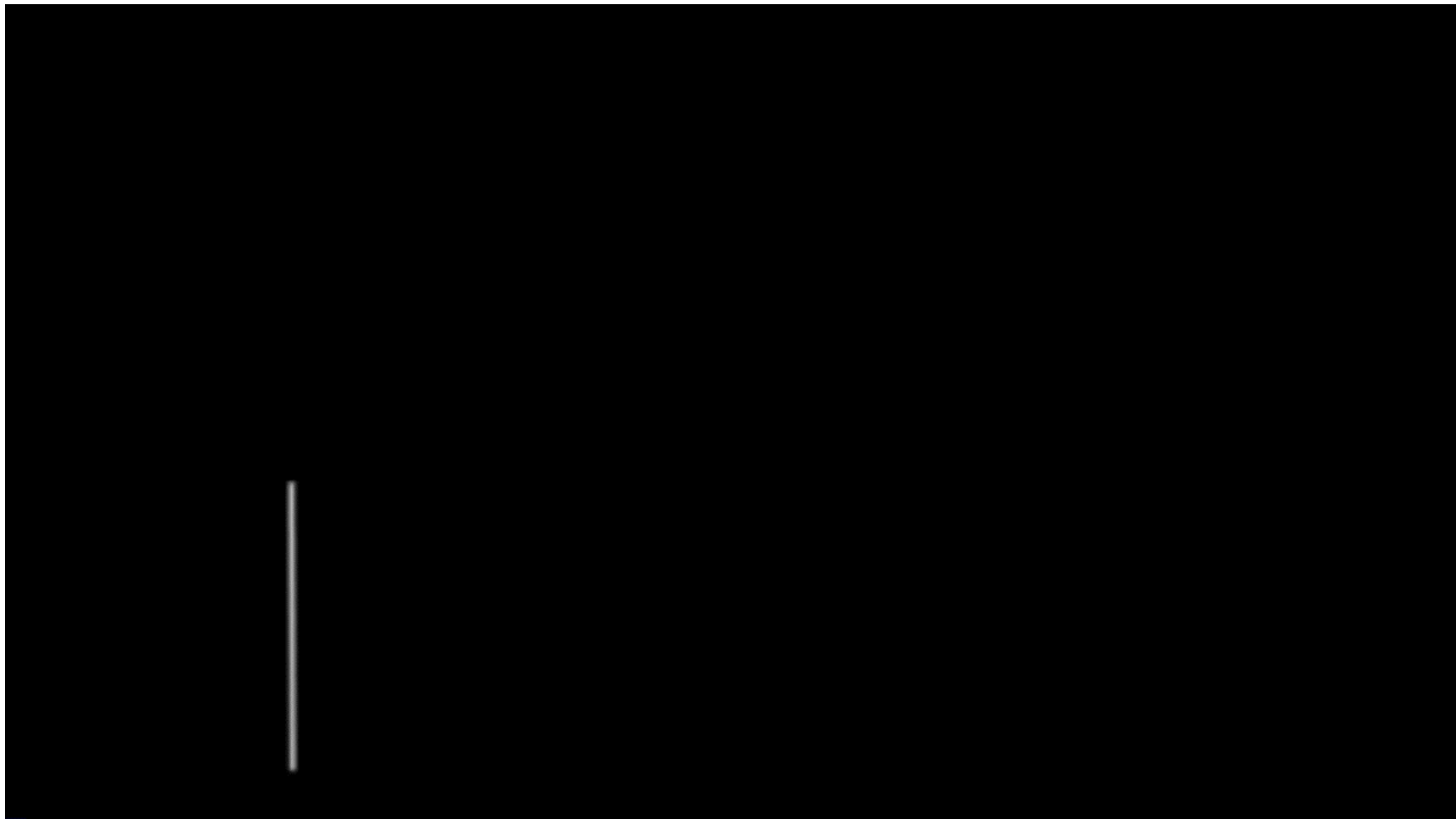
$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (2)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3)$$

为了能既方便又明确的表示一个信号中含有哪些频率分量，各频率分量所占的比重怎样，就可画出**频谱图**来直观的进行表示。

如果以频率为横轴，以幅度或相位为纵轴，便可直观的看出各频率分量的相对大小和相位情况，这样的图就称为三角形形式表示的信号的**幅度频谱**和**相位频谱**。

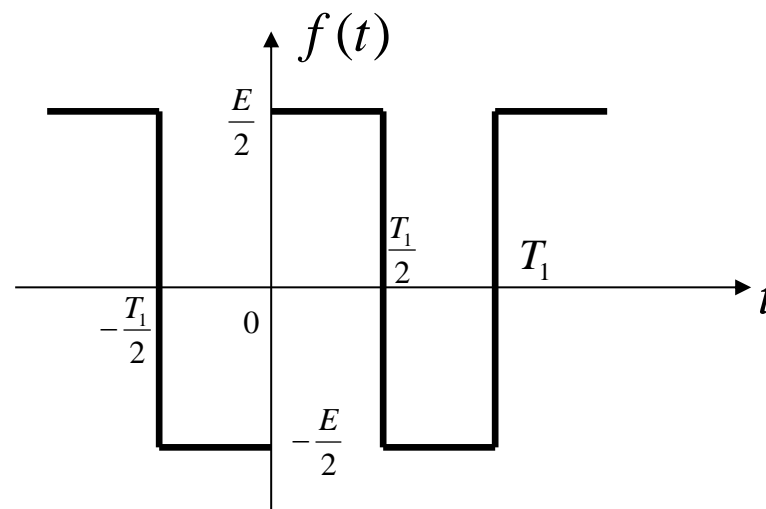
[周期矩形信号的频谱图（点击播放视频）](#)



例3-1：求题图所示的周期矩形信号的三角形式与指数形式的傅里叶级数，并画出各自的频谱图。

解：一个周期内 $f(t)$ 的表达式为：

$$f(t) = \begin{cases} \frac{E}{2} & 0 \leq t < \frac{T_1}{2} \\ -\frac{E}{2} & -\frac{T_1}{2} \leq t < 0 \end{cases} \quad (\text{奇函数})$$



$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \cos n\omega_1 t dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \sin n\omega_1 t dt = \frac{E}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] = \begin{cases} \frac{2E}{n\pi} & n = 1, 3, 5 \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6 \dots \end{cases}$$

$$c_0 = 0$$

$$c_n = b_n = \begin{cases} \frac{2E}{n\pi} & n = 1, 3, 5 \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6 \dots \end{cases}$$

$$\varphi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 3, 5 \dots)$$

因此

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_1 t \\ &= \frac{2E}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right) \end{aligned}$$

或

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\left(n\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = -j\frac{b_n}{2} = \begin{cases} -\frac{jE}{n\pi} & n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots \\ 0 & n = \pm 2, \pm 4, \pm 6 \dots \end{cases}$$

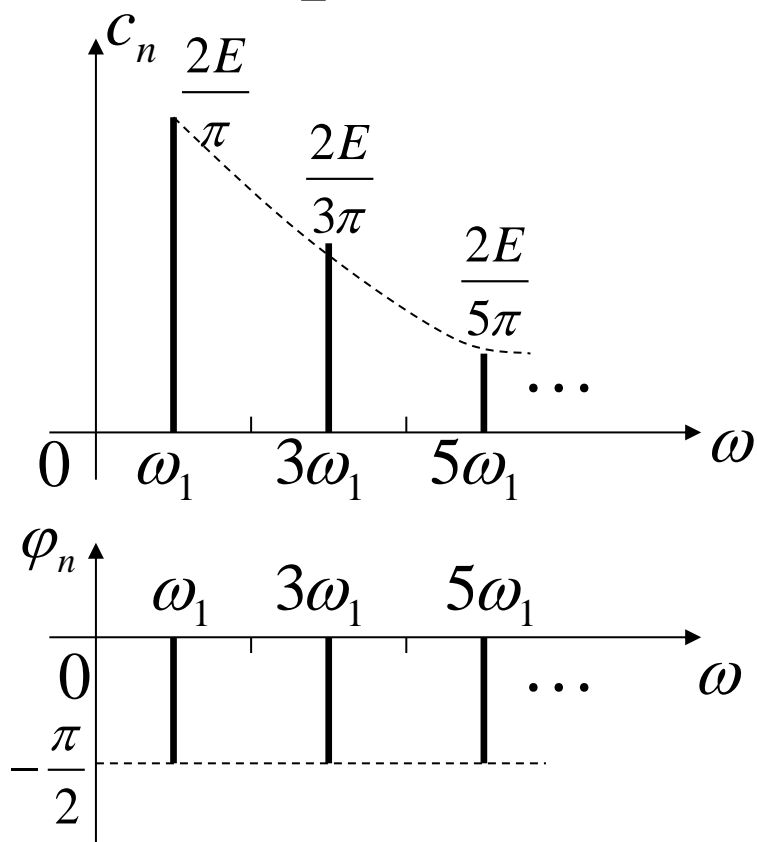
$$f(t) = \left(\frac{jE}{\pi} e^{-j\omega_1 t} - \frac{jE}{\pi} e^{j\omega_1 t} \right) + \left(\frac{jE}{3\pi} e^{-j3\omega_1 t} - \frac{jE}{3\pi} e^{j3\omega_1 t} \right) + \dots$$

$$|F_n| = \frac{E}{|n|\pi} \quad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots)$$

$$\varphi_n = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (n = 1, 3, 5 \dots) \\ \frac{\pi}{2} & (n = -1, -3, -5 \dots) \end{cases}$$

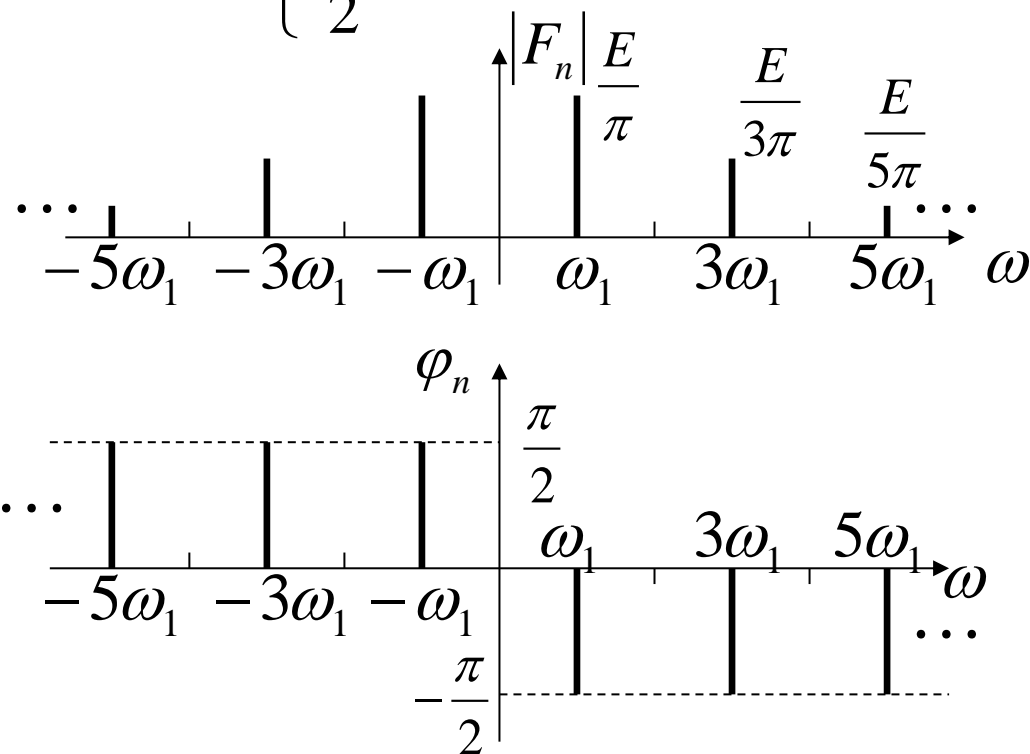
$$c_n = \begin{cases} \frac{2E}{n\pi} & n = 1, 3, 5 \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6 \dots \end{cases}$$

$$\varphi_n = -\frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 3, 5 \dots)$$



$$|F_n| = \frac{E}{|n|\pi} \quad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots)$$

$$\varphi_n = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (n = 1, 3, 5 \dots) \\ \frac{\pi}{2} & (n = -1, -3, -5 \dots) \end{cases}$$



2. 周期信号频谱的特点

- (1) **离散性**——频谱是离散的而不是连续的，这种频谱称为离散频谱。
- (2) **谐波性**——谱线出现在基波频率 ω_1 的整数倍上。
- (3) **收敛性**——幅度谱的谱线幅度随着 $n \rightarrow \infty$ 而逐渐衰减到零。

3.2.4 波形的对称性与谐波特性的关系

已知信号 $f(t)$ 展为傅里叶级数的时候，如果 $f(t)$ 是实函数且它的波形满足某种对称性，则在傅里叶级数中有些项将不出现，留下的各项系数的表示式也将变得比较简单。

波形的对称性有两类，一类是对整周期对称；另一类是对半周期对称。

1. 偶函数 $f(t) = f(-t)$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt$$

在偶函数的傅里叶级数中不含正弦分量，只可能含有直流和余弦分量。

2. 奇函数 $f(t) = -f(-t)$

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt$$

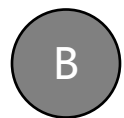
在奇函数的傅里叶级数中不含直流与余弦分量，只包含正弦分量。



奇函数加上直流分量后，傅里叶级数中仍含有正弦分量。此说法（）



正确

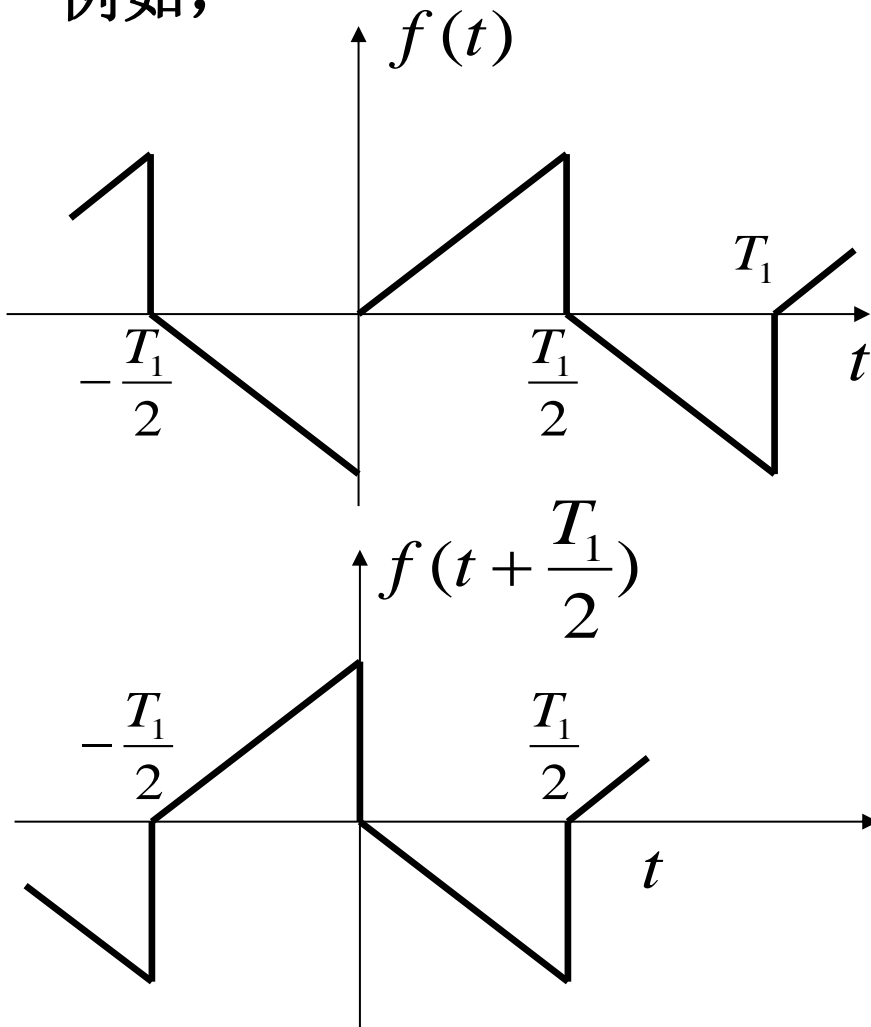


错误

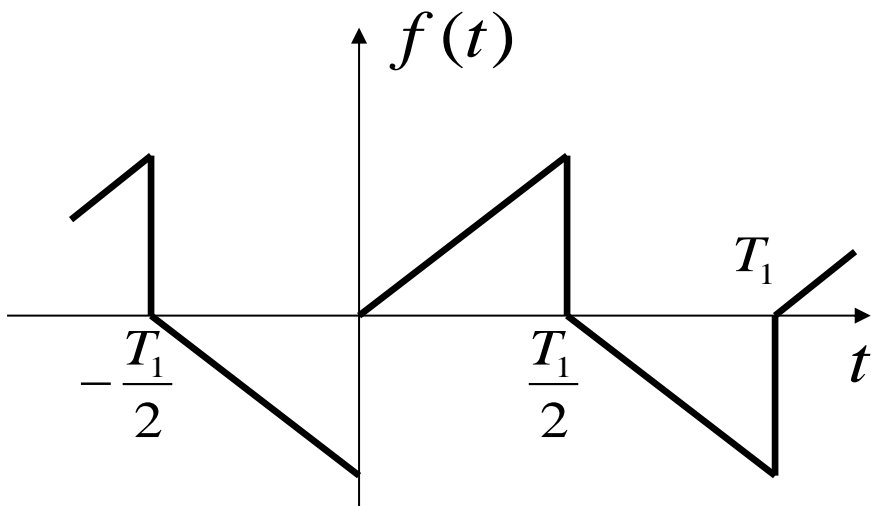
提交

3. 奇谐函数（半波奇对称） $f(t \pm \frac{T_1}{2}) = -f(t)$

例如，



$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \\
 &= \frac{2}{T_1} \left[\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt + \int_{-\frac{T_1}{2}}^0 f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \right] \\
 &= \frac{2}{T_1} \left[\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt - \int_{-\frac{T_1}{2}}^0 f(t + \frac{T_1}{2}) \cos(n\omega_1 t) dt \right] \\
 &= \frac{2}{T_1} \left[\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt - \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(\tau) \cos[n\omega_1(\tau - T_1/2)] d\tau \right] \\
 &= \frac{2}{T_1} \left[\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt - \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t - n\pi) dt \right] \\
 &= \begin{cases} 0 & (n = 0, 2, 4, 6 \dots) \\ \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt & (n = 1, 3, 5 \dots) \end{cases}
 \end{aligned}$$



$$a_0 = 0$$

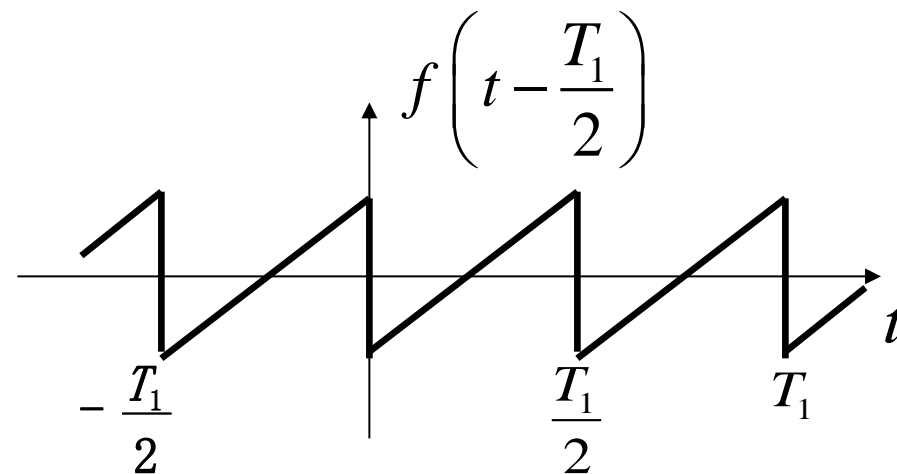
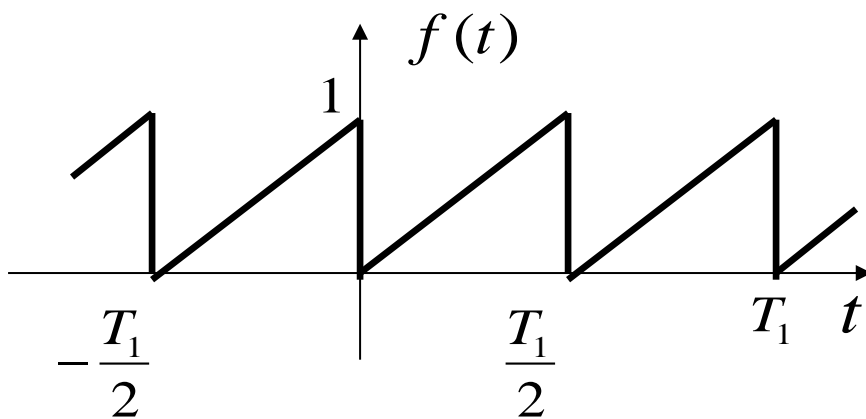
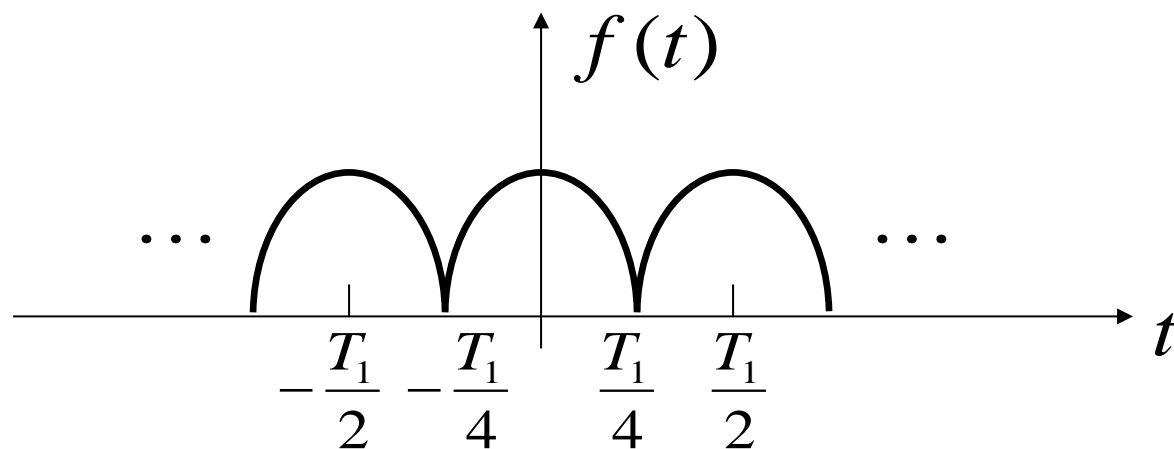
$$a_n = \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, 6 \dots) \\ \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt & (n = 1, 3, 5 \dots) \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, 6 \dots) \\ \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt & (n = 1, 3, 5 \dots) \end{cases}$$

在半波奇对称函数的傅里叶级数中，只含有基波和奇次谐波的正弦、余弦分量，不会包含直流分量和偶次谐波分量，所以称其为奇谐函数。

4. 偶谐函数（半波偶对称）

$$f\left(t \pm \frac{T_1}{2}\right) = f(t)$$



在半波偶对称的傅里叶级数中，只含有（直流与）偶次谐波的正弦、余弦分量，不包含奇次谐波分量，所以称其为偶谐函数。

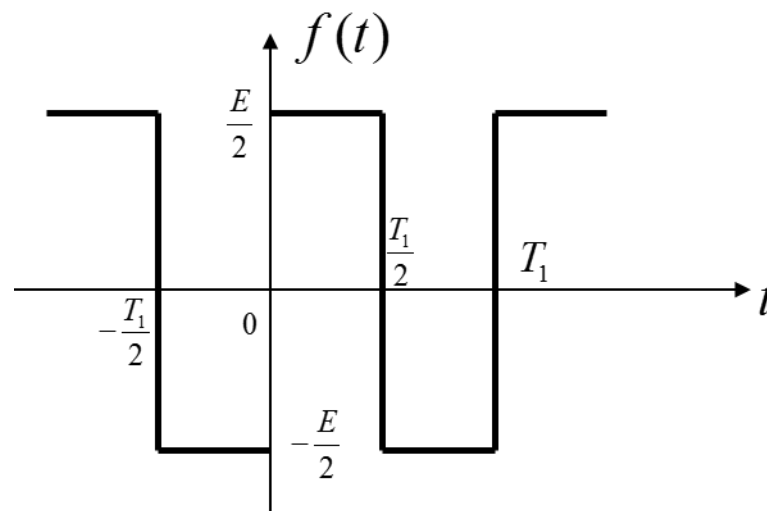
关于题图所示的周期矩形信号的三角形式傅里叶级数正确的参数包括 ()

☒ A $a_n = 0 \quad (n = 0, 2, 4 \dots)$

☒ B $a_n = 0 \quad (n = 1, 3, 5 \dots)$

☐ C $b_n = 0 \quad (n = 1, 3, 5 \dots)$

☒ D $b_n = 0 \quad (n = 2, 4, 6 \dots)$



提交

波形对称性与谐波特性的总结

$f(t)$ 的对称条件	展开式中系数特点
$f(t) = f(-t)$, 纵轴对称 (偶函数)	$b_n = 0, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_1 t dt$
$f(t) = -f(-t)$, 原点对称 (奇函数)	$a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_1 t dt$
$f(t) = f(t + \frac{T}{2})$, 半周重叠 (偶谐函数)	无奇次谐波, 只有直流和偶次谐波
$f(t) = -f(t + \frac{T}{2})$, 半周镜像 (奇谐函数)	无偶次谐波, 只有奇次谐波分量

3.2.5 吉布斯（Gibbs）现象

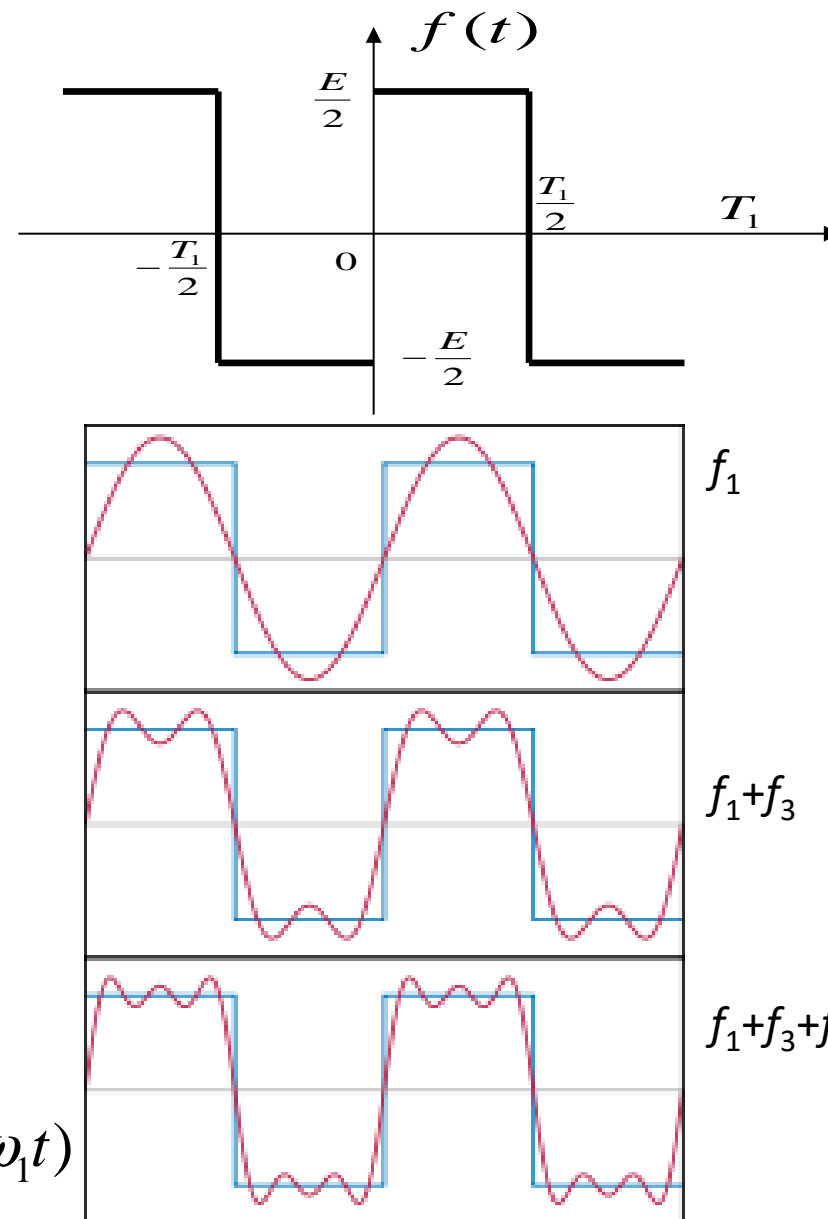
$n=1:$ $f(t) \approx \frac{2E}{\pi} \sin \omega_1 t$

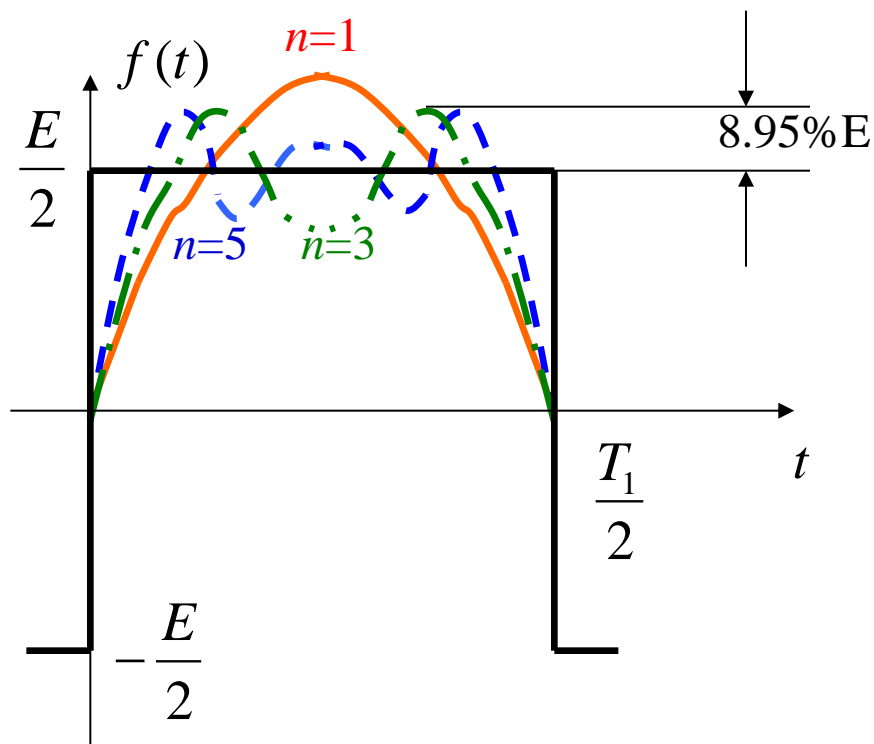
$n=3:$

$$f(t) \approx \frac{2E}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t \right)$$

$n=5:$

$$f(t) \approx \frac{2E}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t \right)$$





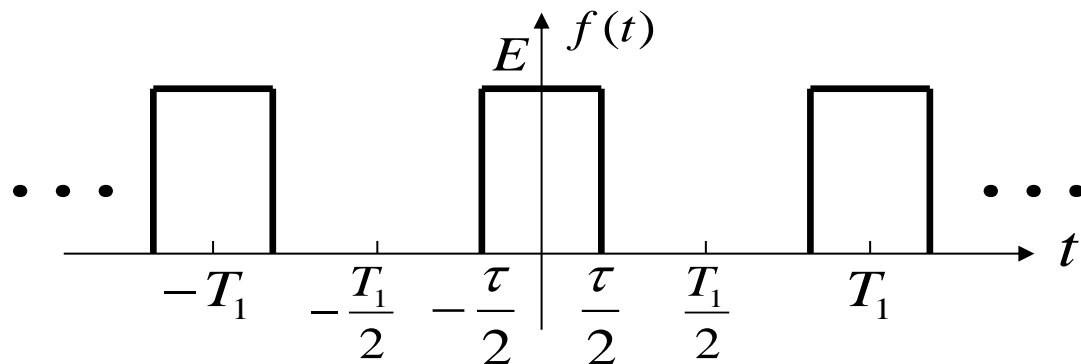
吉布斯现象：当选取的项数 N 很大时，**峰起值**趋于一个常数，**约等于总跳变值的9%**，并从不连续点开始以起伏振荡的形式逐渐衰减下去。

高频分量主要影响脉冲的跳变沿，**低频分量**主要影响脉冲的顶部。

$f(t)$ 波形变化越剧烈，所包含的高频分量越丰富；变化越缓慢，所包含的低频分量越丰富。

- 3.1 引言
- 3.2 周期信号的傅里叶级数分析
- 3.3 典型周期信号的傅里叶级数
- 3.4 傅里叶变换
- 3.5 典型非周期信号的傅里叶变换
- 3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换
- 3.7 傅里叶变换的基本性质
- 3.8 卷积特性
- 3.9 周期信号的傅里叶变换
- 3.10 抽样信号的傅里叶变换
- 3.11 抽样定理

周期矩形脉冲信号的傅里叶级数



$b_n = 0$ (在偶函数的傅里叶级数中不含正弦项)

$$a_0 = \frac{2}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T_1} \int_0^{\frac{\tau}{2}} E dt = \frac{E\tau}{T_1}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{\tau}{2}} E \cos n\omega_1 t dt = \frac{4E}{n\omega_1 T_1} \sin\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right) = \frac{2E\tau}{T_1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right)}{\frac{n\omega_1 \tau}{2}} \\ &= \frac{2E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right) = c_n \end{aligned}$$

周期矩形脉冲信号的三角形式傅里叶级数为

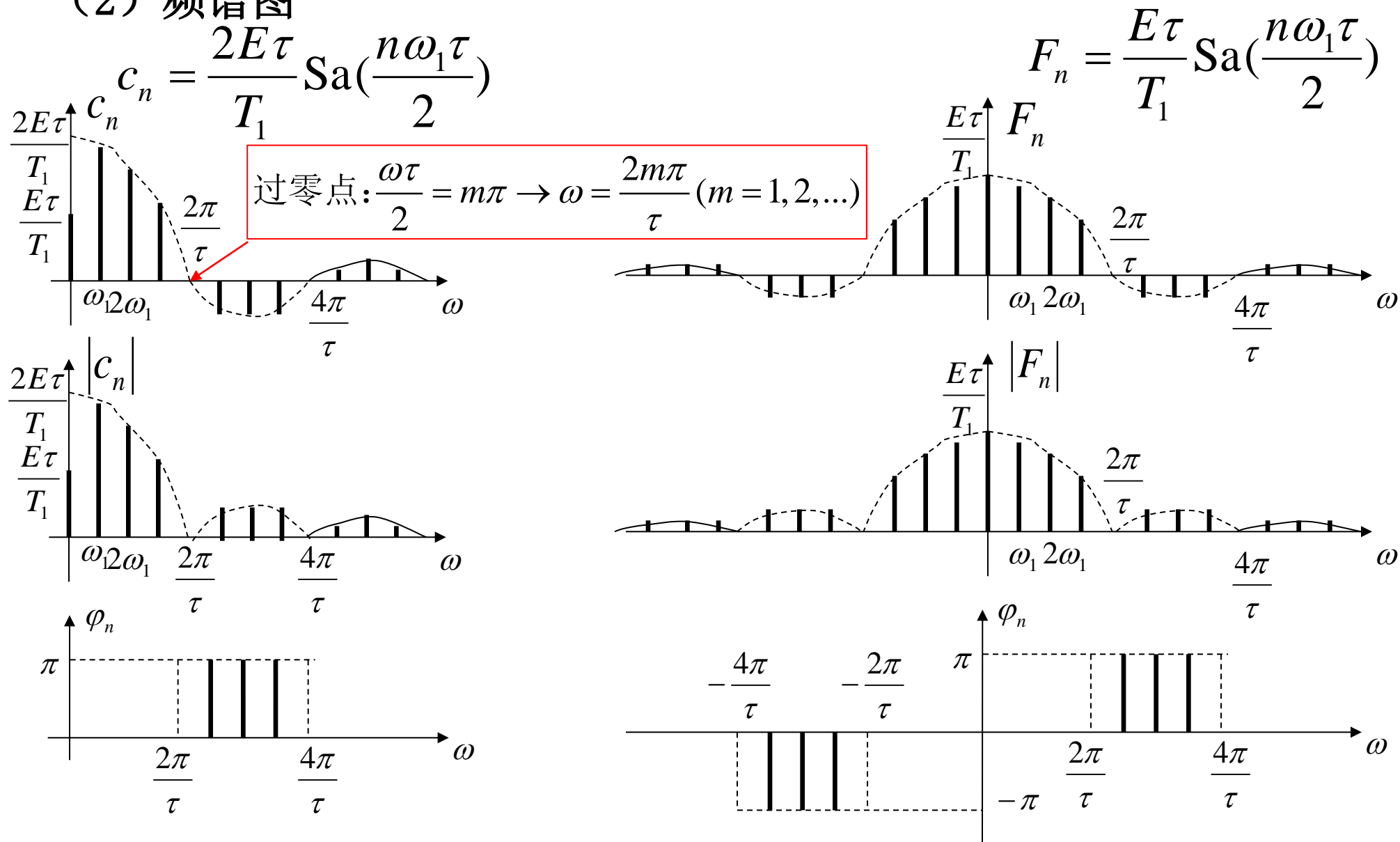
$$f(t) = \frac{E\tau}{T_1} + \frac{2E\tau}{T_1} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \cos n\omega_1 t$$

$$\text{因为 } F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2}a_n = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

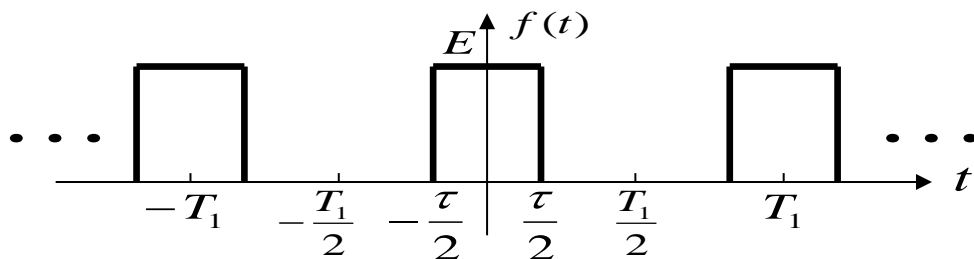
$f(t)$ 的指数形式的傅里叶级数为

$$f(t) = \frac{E\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) e^{jn\omega_1 t}$$

(2) 频谱图



周期矩形信号的波形如图所示，以下说法正确的是（ ）



A

若 T_1 加倍，信号频谱图的谱线间隔减半，幅度减半

B

若 T_1 加倍，信号的带宽减半，幅度加倍

C

若 τ 减半，信号频谱图的谱线间隔减半，幅度加倍

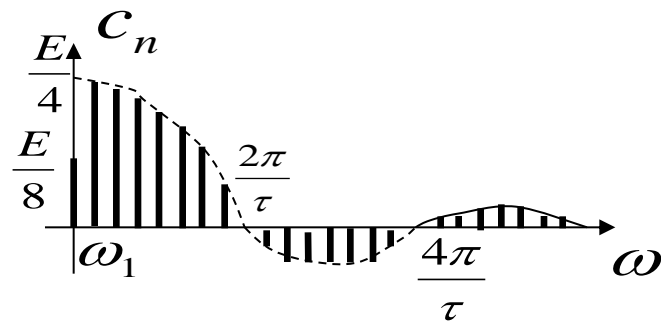
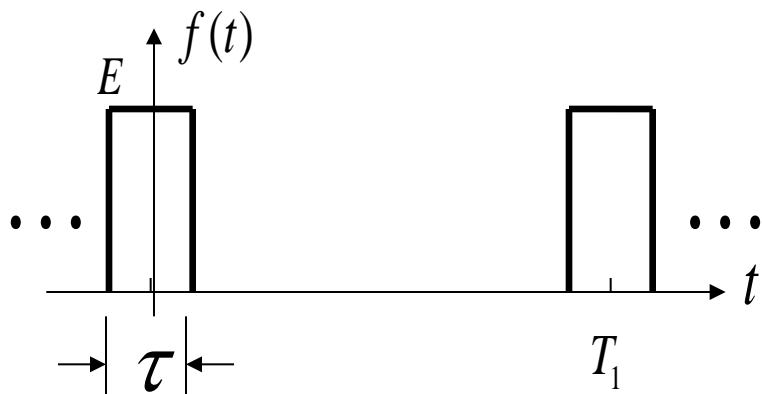
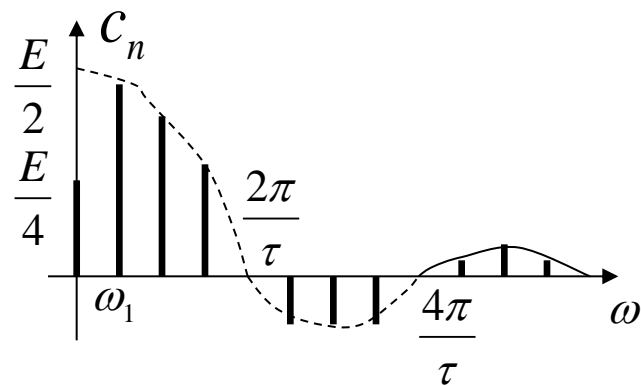
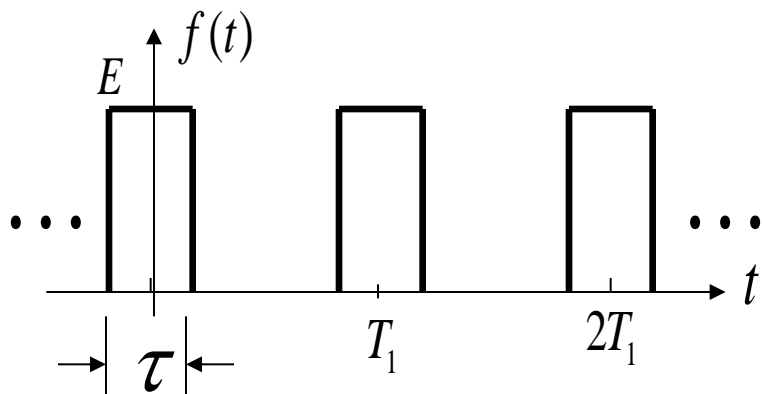
D

若 τ 减半，信号的带宽加倍，幅度减半

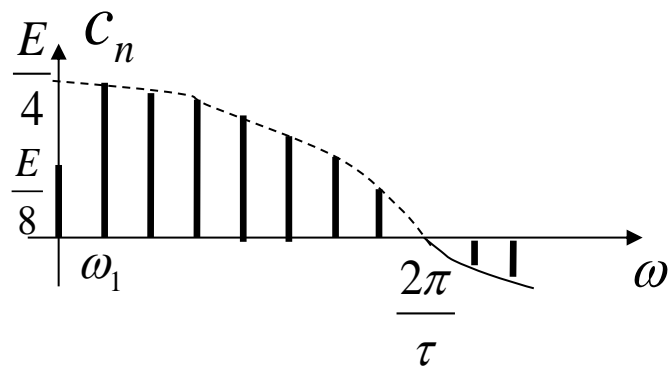
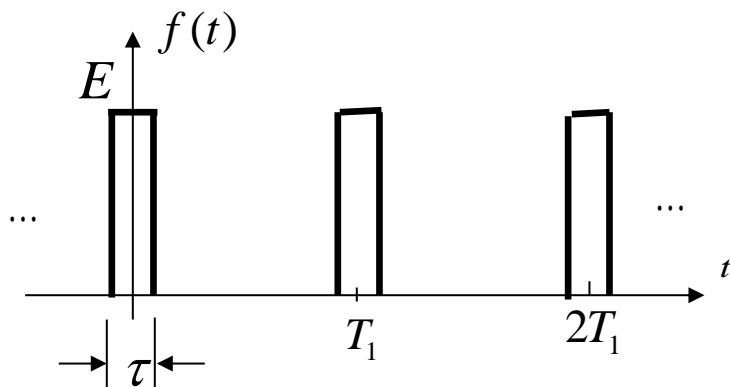
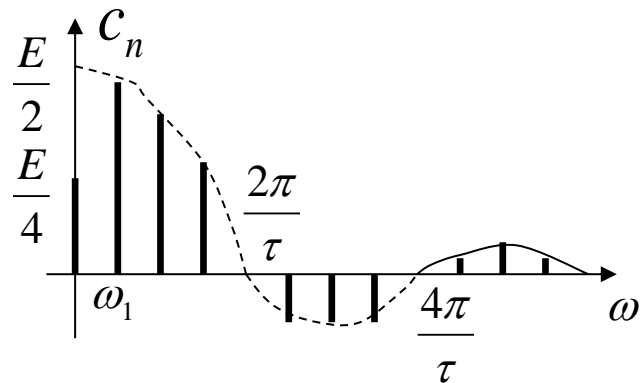
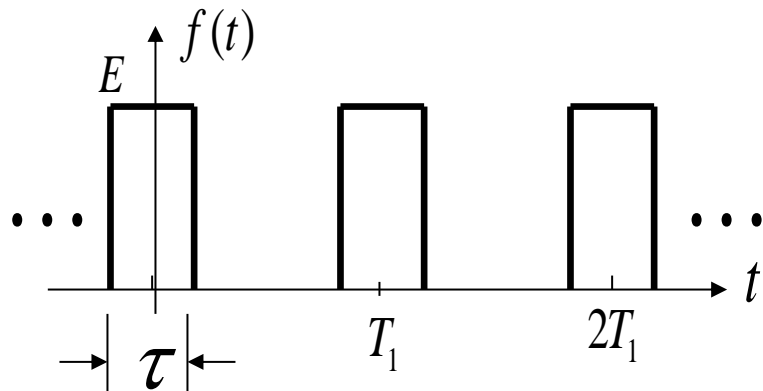
提交

(3) 频谱结构与波形参数的关系 (T_1, τ)

a) 若 τ 不变, T_1 扩大一倍, 即 $T_1 = 4\tau \rightarrow T_1 = 8\tau$



b) 若 T_1 不变, τ 减小一半, 即 $T_1 = 4\tau \rightarrow T_1 = 8\tau$



谱线间隔 $\omega_1 (= \frac{2\pi}{T_1})$ 只与周期 T_1 有关, 且与 T_1 成反比;

零值点频率只与脉冲宽度 τ 有关, 且与 τ 成反比;

谱线幅度与 T_1 和 τ 都有关系, 且与 T_1 成反比, 与 τ 成正比。

作业

基础题（需提交）：3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-7(a) (c) (e),
3-10(1) (3) (5)

加强题（选做，不提交）：3-7(b) (d) (f), 3-10(2) (4) (6),
3-11(a), 3-12

本次课内容

3.4 傅里叶变换

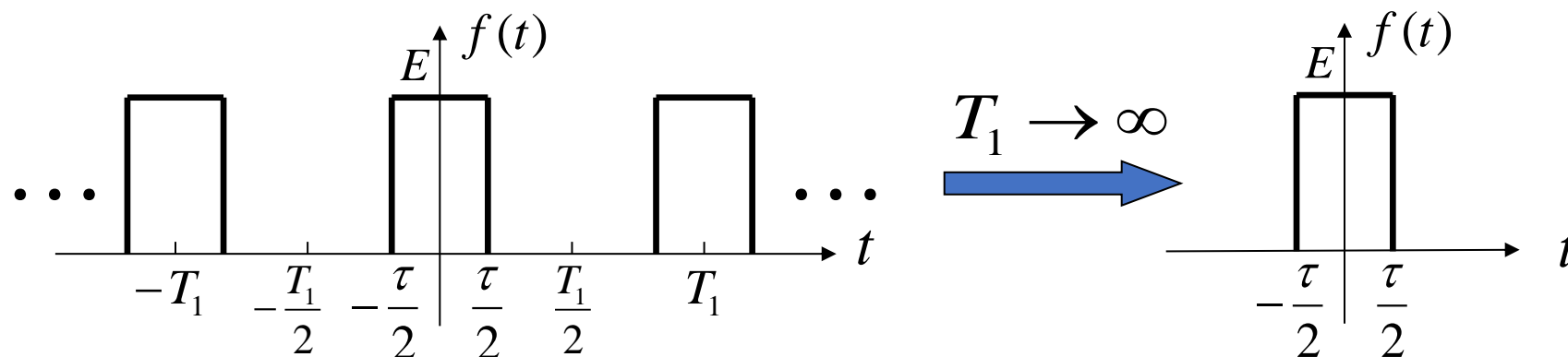
3.5 典型非周期信号的傅里叶变换

3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换

本次课目标

1. 深入了解傅里叶变换和傅里叶级数的关联和区别；
2. 熟练掌握典型非周期信号、冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换。

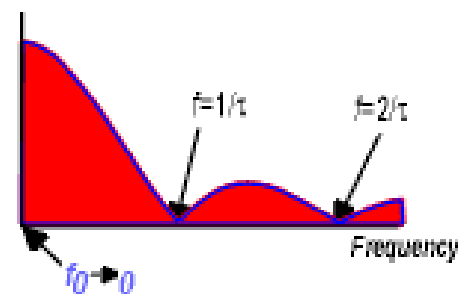
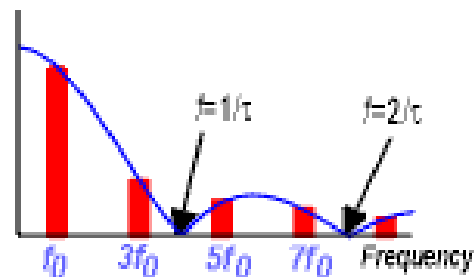
- 3.1 引言
- 3.2 周期信号的傅里叶级数分析
- 3.3 典型周期信号的傅里叶级数
- 3.4 傅里叶变换
- 3.5 典型非周期信号的傅里叶变换
- 3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换
- 3.7 傅里叶变换的基本性质
- 3.8 卷积特性
- 3.9 周期信号的傅里叶变换
- 3.10 抽样信号的傅里叶变换
- 3.11 抽样定理



$$T_1 \uparrow \longrightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \downarrow \longrightarrow \text{谱线间隔} \downarrow$$

$$T_1 \rightarrow \infty \longrightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow 0 \longrightarrow \text{谱线间隔} \rightarrow 0$$

周期信号的离散谱 \longrightarrow 非周期信号的连续谱



由于 $T_1 \rightarrow \infty$, $F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \rightarrow 0$

频谱密度函数: $\lim_{T_1 \rightarrow \infty} F_n T_1 = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$

当 $T_1 \rightarrow \infty$ 时, 离散频率 $n\omega_1 \rightarrow$ 连续频率 ω

则 $\lim_{T_1 \rightarrow \infty} F_n T_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$

记为

$$F(\omega) = \mathbf{F} [f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

--非周期信号 $f(t)$ 的傅里叶变换

$$f(t) = \mathbf{F}^{-1} [F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

--傅里叶逆变换

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$|F(\omega)|$ --幅度谱

$\varphi(\omega)$ --相位谱

傅里叶变换的物理意义

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

实函数

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t} d\omega$$

欧拉公式

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$$

偶函数

奇函数与偶函数乘积的积分为0

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{|F(\omega)|}{\pi} d\omega \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{|F(\omega)|}{\pi}}_{\text{振幅}} d\omega \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$$

$$= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{|F(n\Delta\omega)|}{\pi}}_{\text{振幅}} \Delta\omega \cos[n\Delta\omega t + \varphi(n\Delta\omega)]$$

$f(t)$ 为无穷多个振幅为 $\left(\frac{1}{\pi}|F(\omega)|d\omega\right)$ 的无穷小的连续余弦信号之和，频谱范围 $0 \sim \infty$ 。

非周期信号可表示为正弦信号的加权积分，包含了零到无限高的所有连续频率分量。

对于能量有限信号（如单脉冲信号）， $\left(\frac{1}{\pi}|F(\omega)|d\omega\right)$ 趋于无限小，所以频谱不能再幅度表示，而改用频谱密度函数表示。

单脉冲信号的傅里叶变换: $F_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t)e^{-j\omega t} dt$ --连续谱

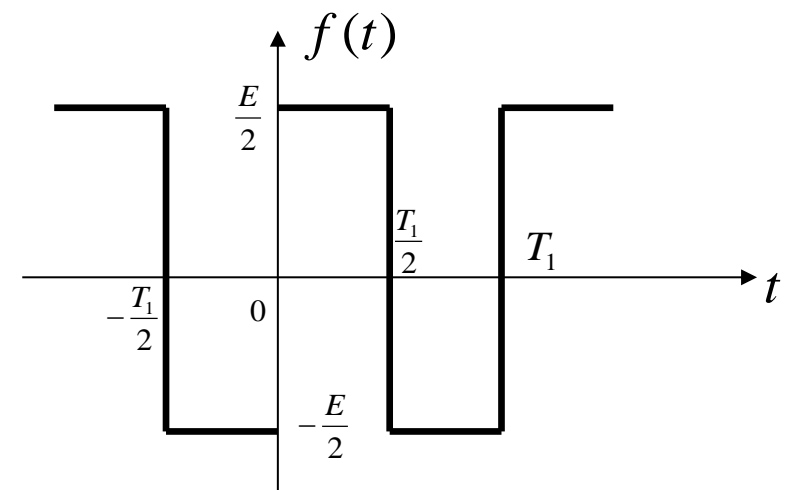
周期信号的傅里叶级数展开: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t} dt \quad \text{--离散谱}$$

F_n 与 $F_0(\omega)$ 的关系:

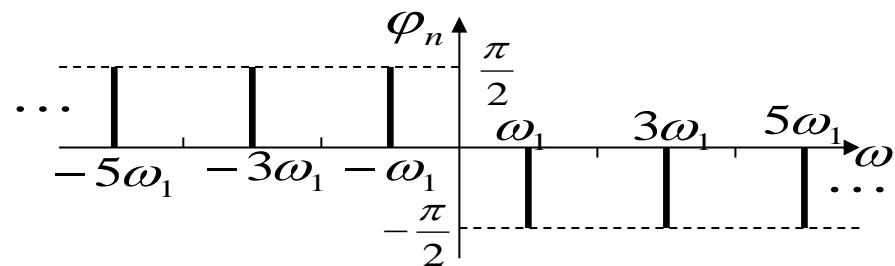
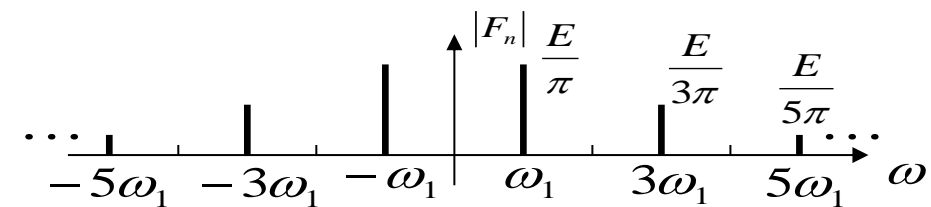
$$F_n = \left. \frac{F_0(\omega)}{T_1} \right|_{\omega=n\omega_1}$$

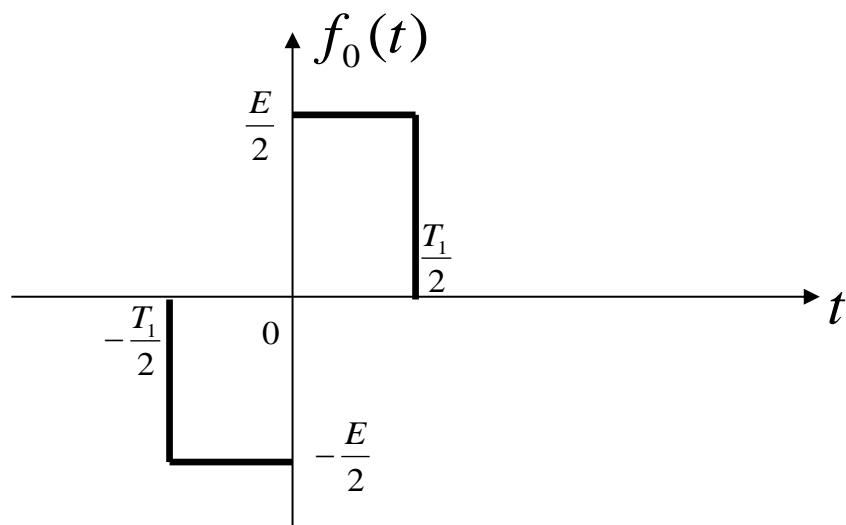
周期脉冲序列的傅里叶级数的系数 F_n 等于单脉冲的傅里叶变换 $F_0(\omega)$ 在 $n\omega_1$ 频率点的值乘以 $1/T_1$ 或 $\omega_1/2\pi$ 。



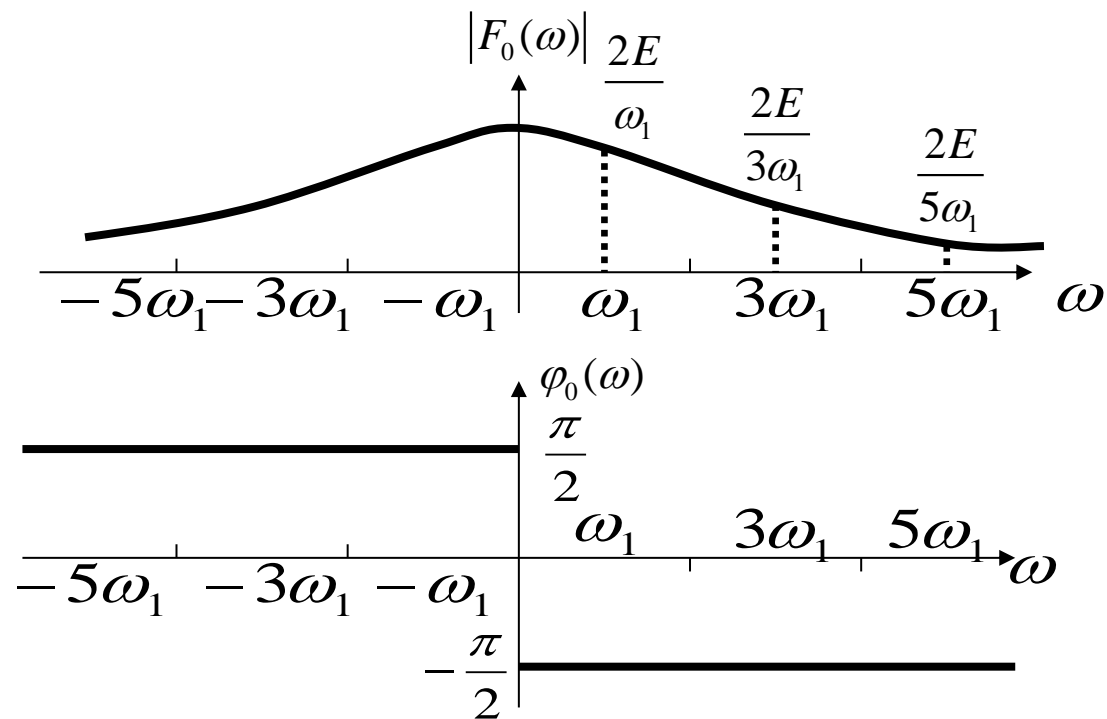
$$|F_n| = \frac{E}{|n|\pi} \quad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots)$$

$$\varphi_n = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (n = 1, 3, 5 \dots) \\ \frac{\pi}{2} & (n = -1, -3, -5 \dots) \end{cases}$$





$$F_n = \frac{F_0(\omega)}{T_1} \Big|_{\omega=n\omega_1} = \frac{\omega_1 F_0(\omega)}{2\pi} \Big|_{\omega=n\omega_1}$$



傅里叶变换存在的充分不必要条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \text{有限值 (充分条件)}$$

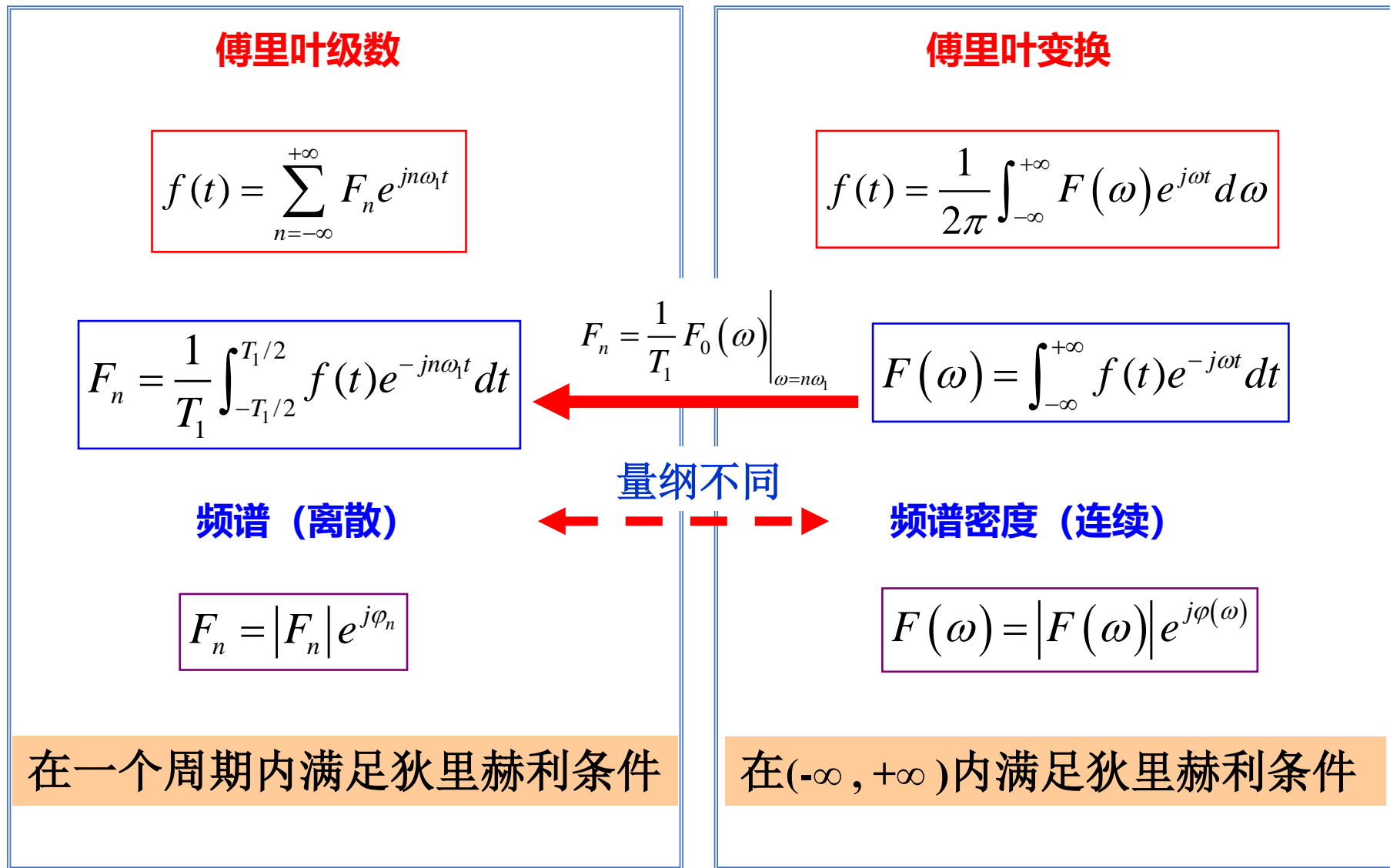
即 $f(t)$ 绝对可积

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

绝大多数能量信号均满足此条件。

当引入 $\delta(\omega)$ 函数的概念后，允许做傅立叶变换的函数类型大大扩展了。

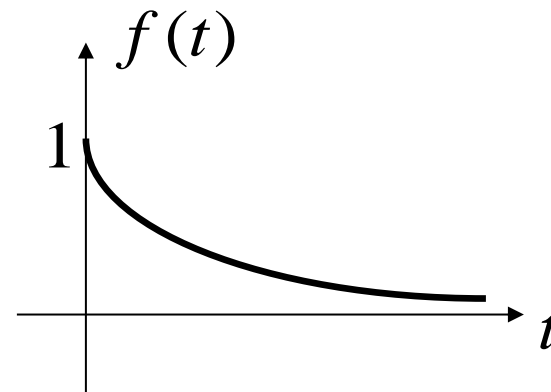
傅里叶级数与傅里叶变换的关系：



- 3.1 引言
- 3.2 周期信号的傅里叶级数分析
- 3.3 典型周期信号的傅里叶级数
- 3.4 傅里叶变换
- 3.5 典型非周期信号的傅里叶变换**
- 3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换
- 3.7 傅里叶变换的基本性质
- 3.8 卷积特性
- 3.9 周期信号的傅里叶变换
- 3.10 抽样信号的傅里叶变换
- 3.11 抽样定理

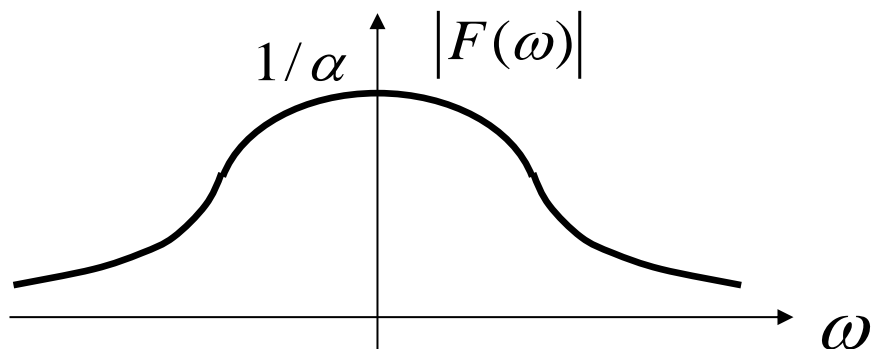
1. 单边指数信号

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = e^{-\alpha t} u(t)$$

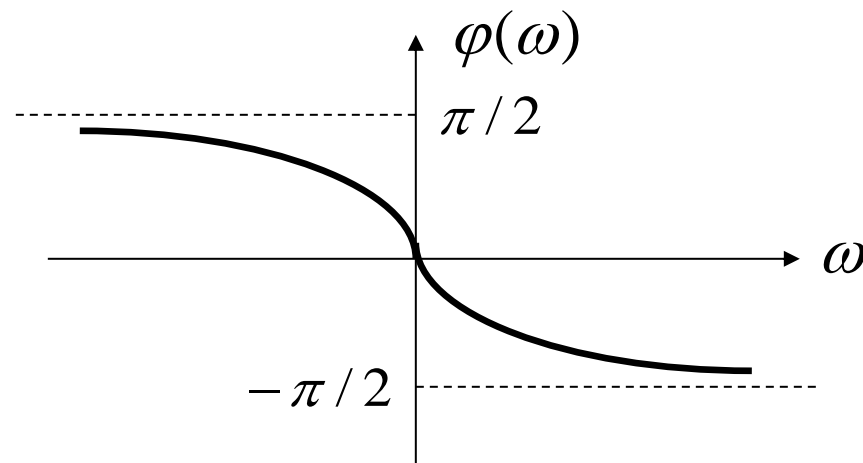


$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$



$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$





频谱函数 $X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$ 的傅里叶逆变换为：

☒ A $e^{-2t}u(t)$

☐ B $te^{-2t}u(t)$

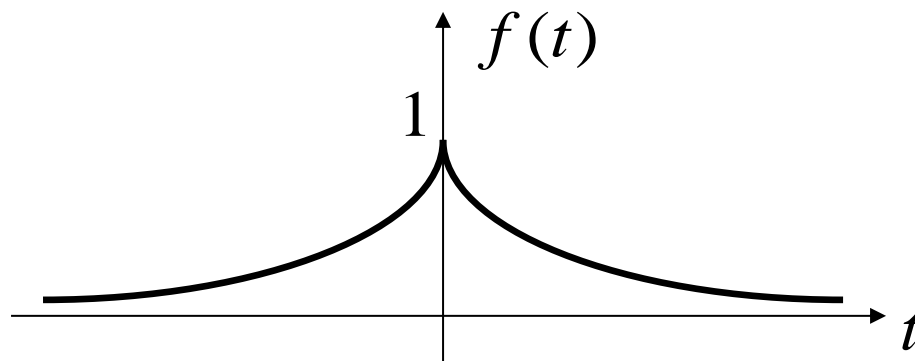
☐ C $e^{-0.5t}u(t)$

☐ D $te^{2t}u(t)$

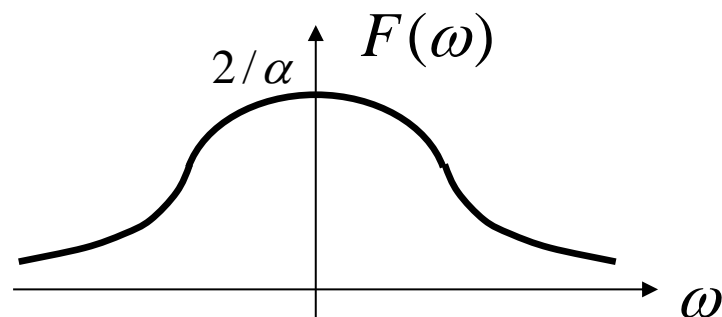
提交

2. 双边指数信号

$$f(t) = e^{-\alpha|t|} \quad (\alpha > 0)$$



$$F(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

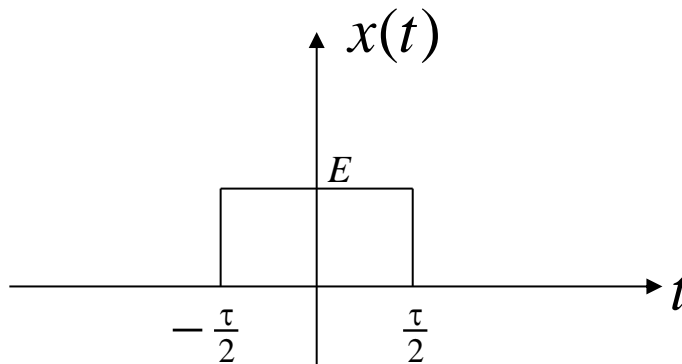


$$|F(\omega)| = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = 0$$

3. 矩形脉冲信号

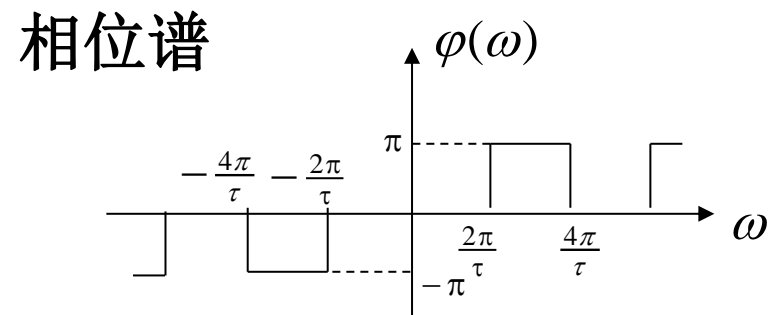
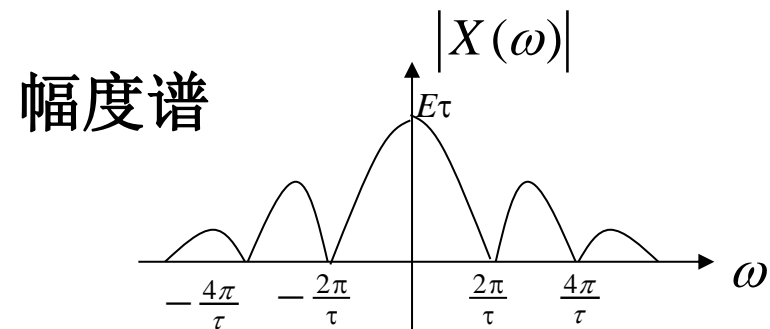
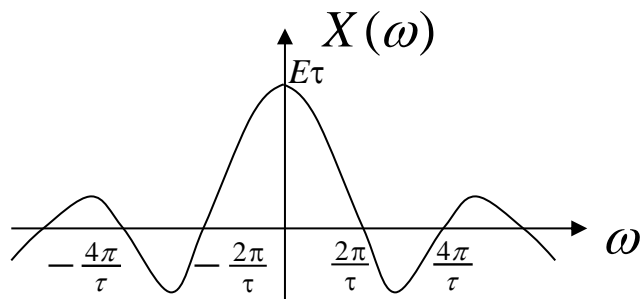
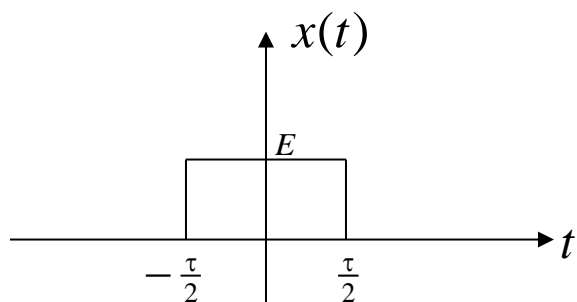
$$x(t) = E[u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})]$$



如图所示，矩形脉冲信号满足**绝对可积**，可直接通过积分变换公式求得其傅里叶变换。

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-j\omega t} dt = E \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ &= E \frac{e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{j\omega \frac{\tau}{2}}}{-j\omega} = 2E \frac{\sin\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)}{\omega} = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

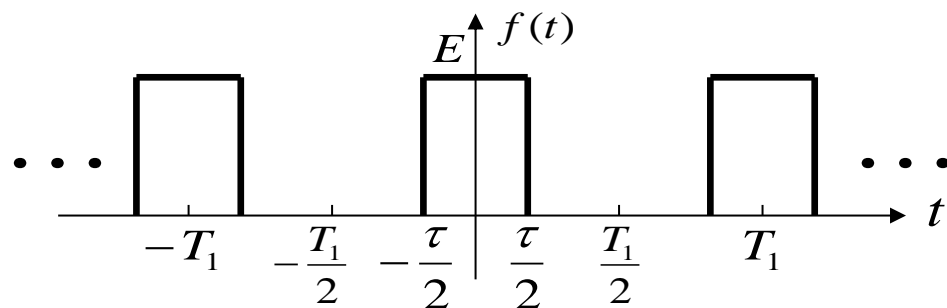
$$E[u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})] \xleftrightarrow{FT} E\tau \text{Sa}(\omega \frac{\tau}{2})$$



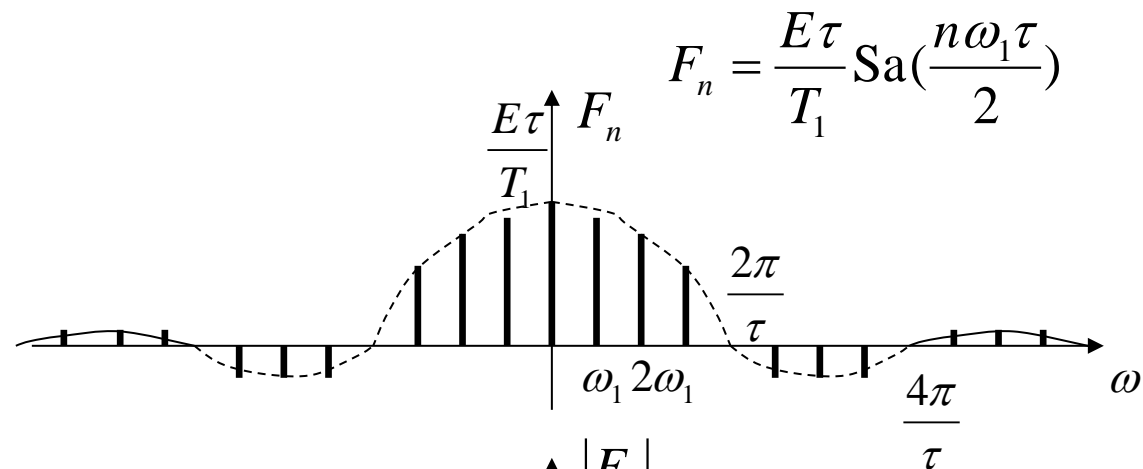
由以上矩形波的频谱图可见，信号的能量主要集中在主瓣所包含的频率范围之内： $0 \sim 2\pi / \tau$ ，所以习惯上称此频段范围是矩形波的**等效带宽** B_ω 。

$$B_\omega = \frac{2\pi}{\tau} \text{ (rad/s) 或 } \frac{1}{\tau} \text{ (Hz)}$$

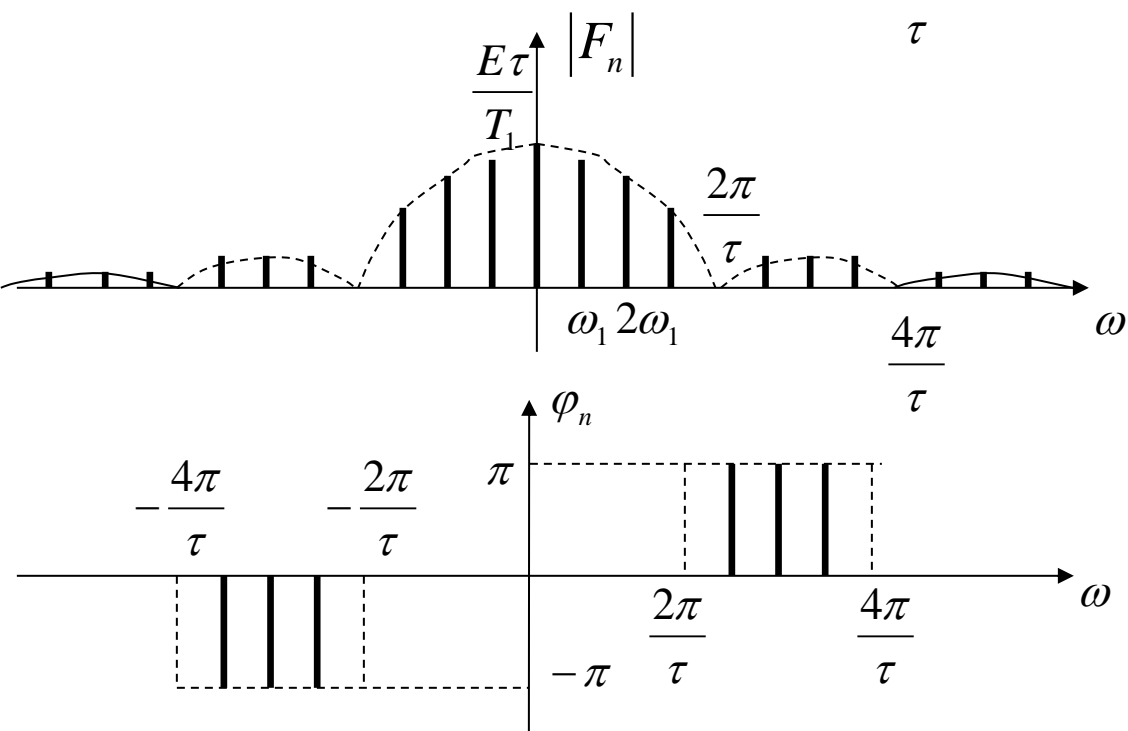
回顾周期矩形脉冲的频谱



幅度谱



相位谱

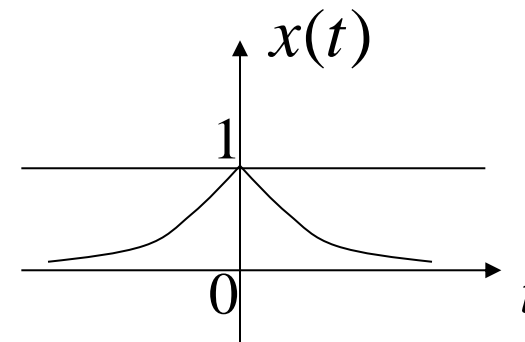


4. 直流信号

表示直流信号的函数是一常量，这里设常量为1。显然，它**不满足绝对可积**的条件，不能由积分直接求得其傅里叶变换，可以利用 **$\delta(\omega)$** 求傅里叶变换。

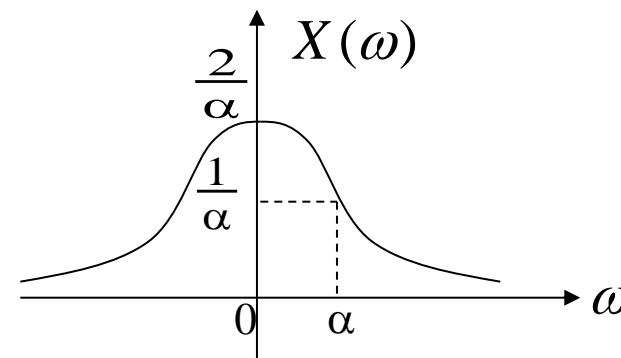
利用**偶对称双边指数**信号的极限表征直流信号：

$$x(t) = 1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha|t|}$$



由双边指数信号的傅里叶变换

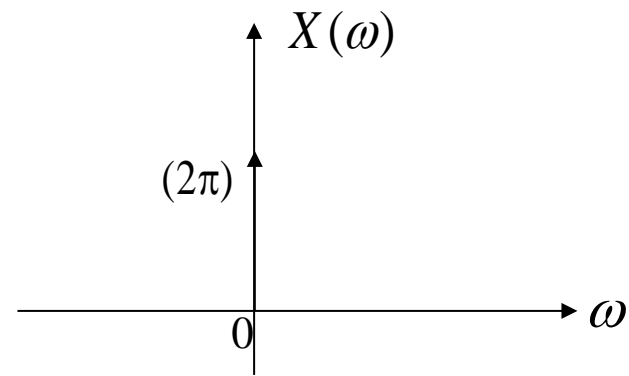
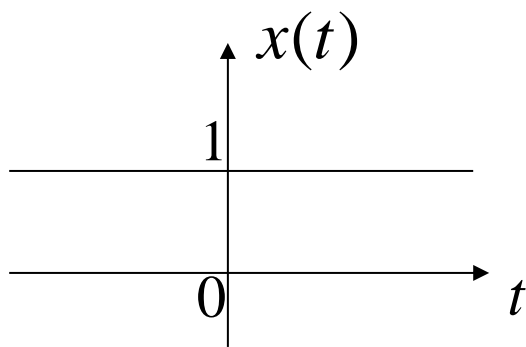
$$X(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$



当 $\alpha \rightarrow 0$ ，此频谱函数的宽度趋于无穷小，幅度趋于无穷大，是一个冲激函数 $A\delta(\omega)$ 。**幅度A等于X(omega)所占的面积。**

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = 4 \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = 4[\arctan(\infty) - \arctan(0)] = 2\pi$$

$$X(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = 2\pi\delta(\omega)$$



此结果也可通过幅度为1，宽度为 τ 的矩形脉冲的傅里叶变换，取 $\tau \rightarrow \infty$ 得到。

$$X(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \text{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(x) dx = \pi$$

所以

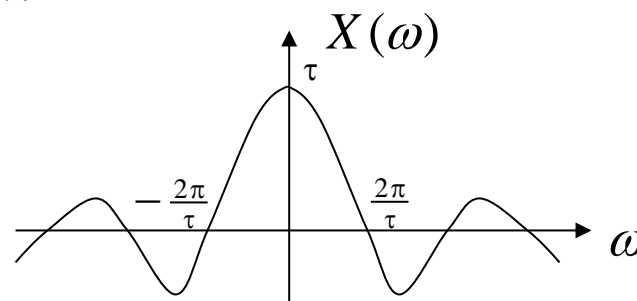
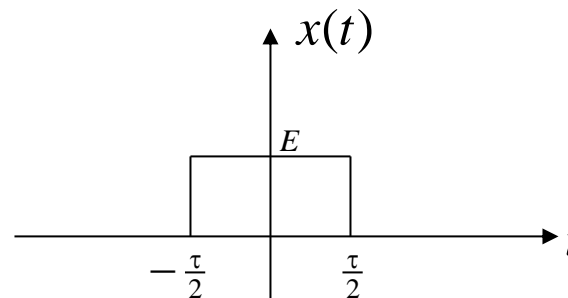
$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau \text{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right) d\omega = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right) d\left(\frac{\tau\omega}{2}\right) = 2\pi$$

于是

$$1 \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega)$$

若用公式表示即是

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$$



5. 符号函数信号

$$x(t) = \text{sgn}(t)$$

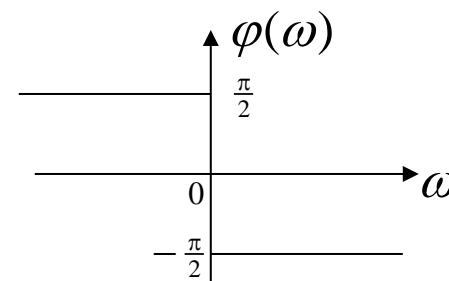
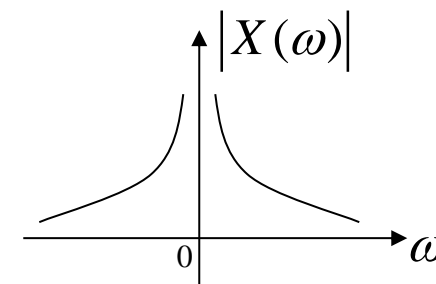
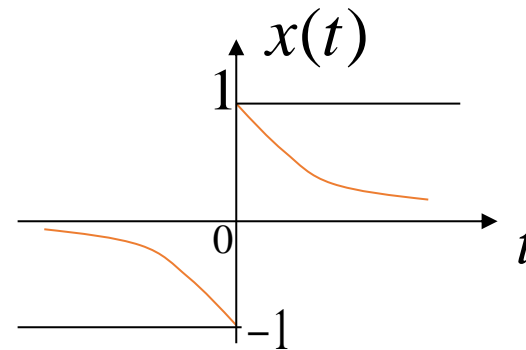
符号函数信号**不满足绝对可积**的条件，不能由积分直接求得其傅里叶变换。但可以由奇对称双边指数信号的傅里叶变换，取 $\alpha \rightarrow 0$ 求得。

$$x(t) = \text{sgn}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [-e^{-\alpha t} u(-t) + e^{-\alpha t} u(t)]$$

于是

$$X(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = -j \frac{2}{\omega} = \frac{2}{j\omega}$$

$$|X(\omega)| = \frac{2}{|\omega|}, \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} \pi/2 & \omega < 0 \\ -\pi/2 & \omega > 0 \end{cases}$$



几种常用函数及其傅里叶变换

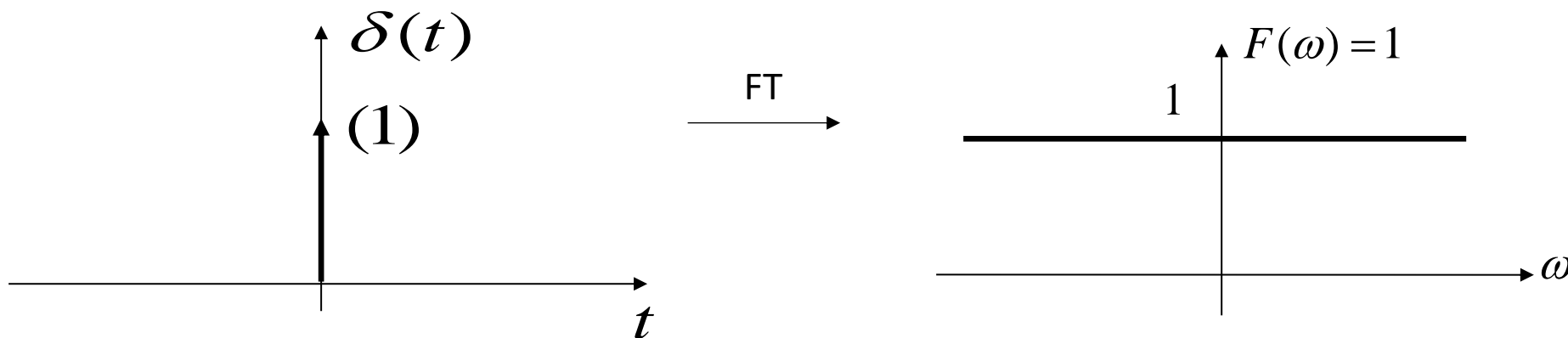
名称	时间函数	频谱函数
单位冲激	$\delta(t)$	1
单位阶跃	$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+1/j\omega$
符号函数	$\text{sgn } t = u(t)-u(-t)$	$2/(j\omega)$
单位直流	1	$2\pi\delta(\omega)$
单边指数函数	$e^{-\alpha t}u(t)$	$1/(\alpha+j\omega)$
双边指数函数	$e^{-\alpha t }$	$2\alpha/(\alpha^2+\omega^2)$
单位余弦	$\cos \omega_c t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]$
单位正弦	$\sin \omega_c t$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)]$
矩形脉冲 (门函数)	$G_r(t)=u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$	$\tau Sa\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)=\tau\frac{\sin(\tau\omega/2)}{\tau\omega/2}$
抽样函数	$Sa\left(\frac{\Omega t}{2}\right)=\frac{\sin(\Omega t/2)}{\Omega t/2}$	$G_\Omega(\omega)=\frac{2\pi}{\Omega}\left[u\left(\omega+\frac{\Omega}{2}\right)-u\left(\omega-\frac{\Omega}{2}\right)\right]$

- 3.1 引言
- 3.2 周期信号的傅里叶级数分析
- 3.3 典型周期信号的傅里叶级数
- 3.4 傅里叶变换
- 3.5 典型非周期信号的傅里叶变换
- 3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换
- 3.7 傅里叶变换的基本性质
- 3.8 卷积特性
- 3.9 周期信号的傅里叶变换
- 3.10 抽样信号的傅里叶变换
- 3.11 抽样定理

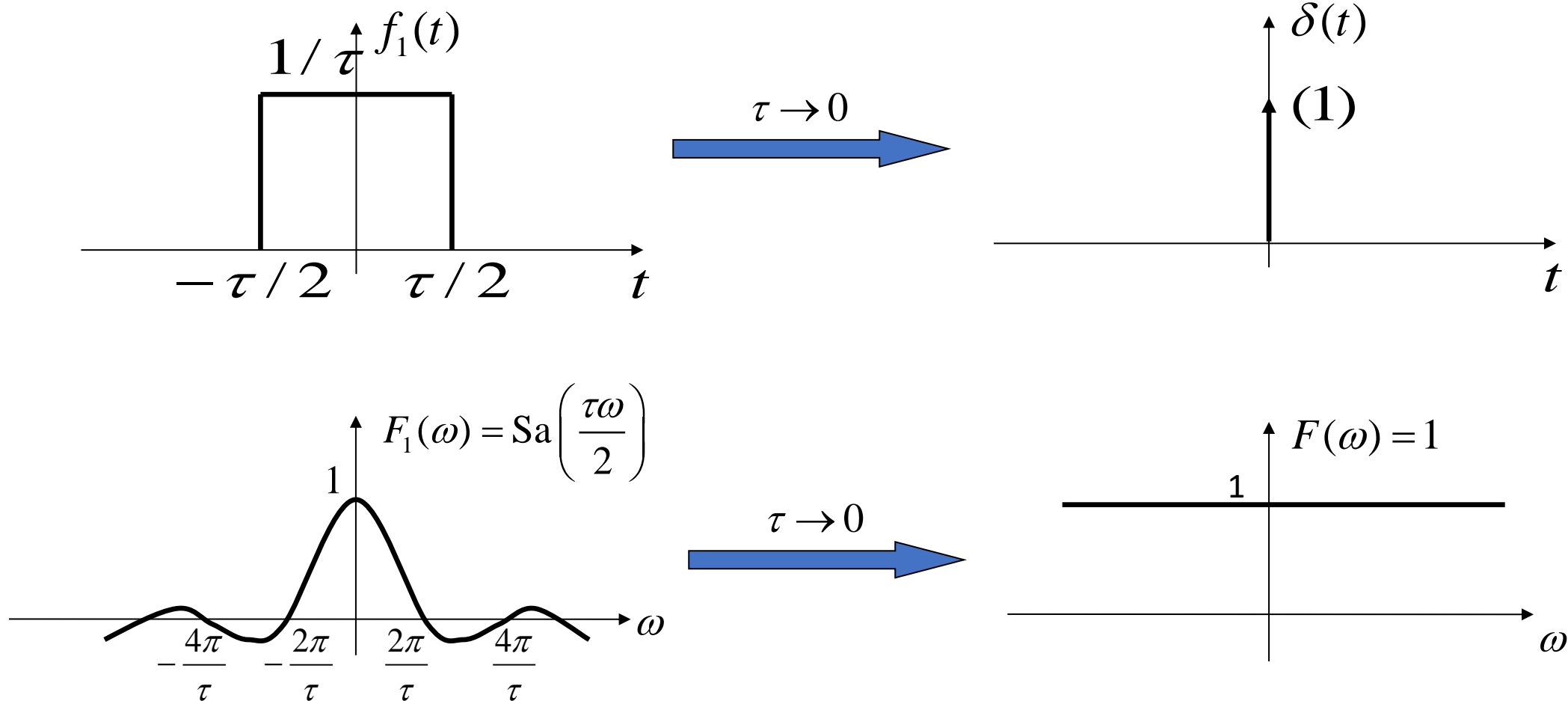
1. 冲激函数的傅里叶变换

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

单位冲激函数的频谱等于常数，即在整个频率范围内频谱是均匀的。
这种频谱常被叫做“均匀谱”或“白色频谱”。



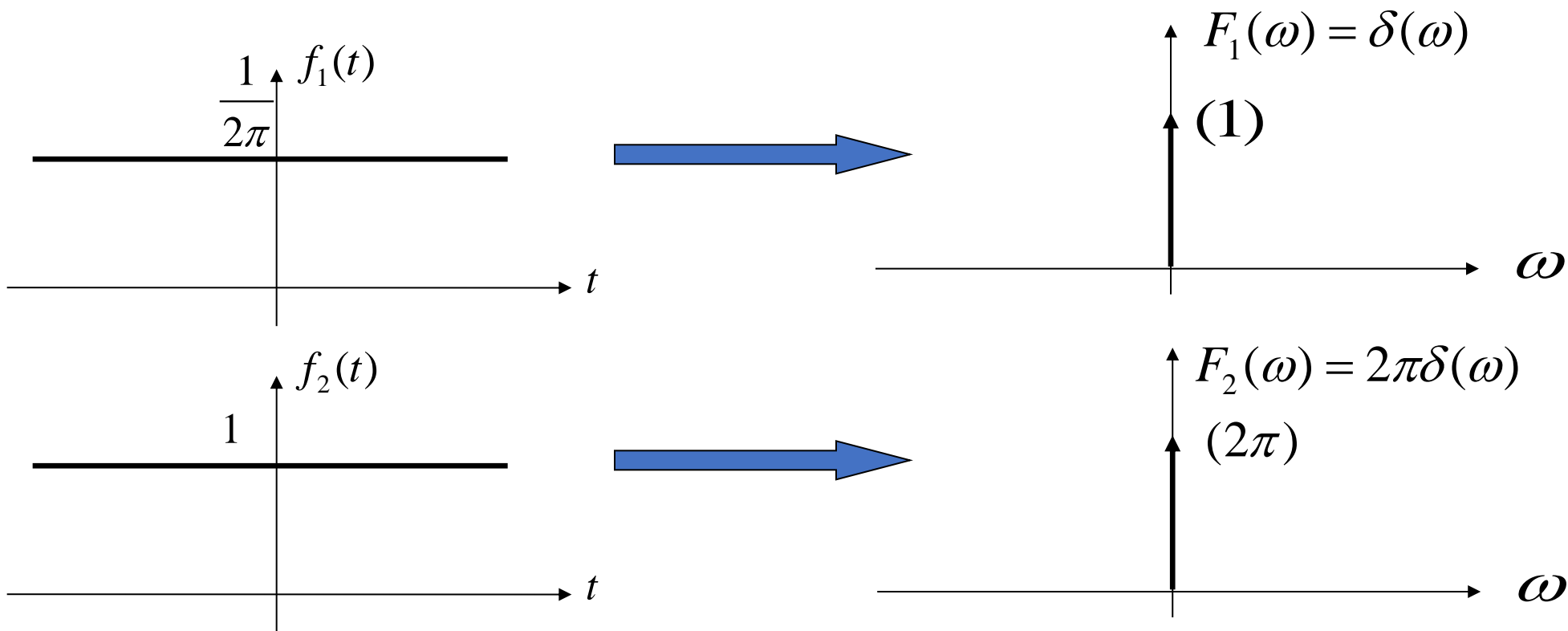
由矩形脉冲的傅里叶变换求冲激函数的傅里叶变换



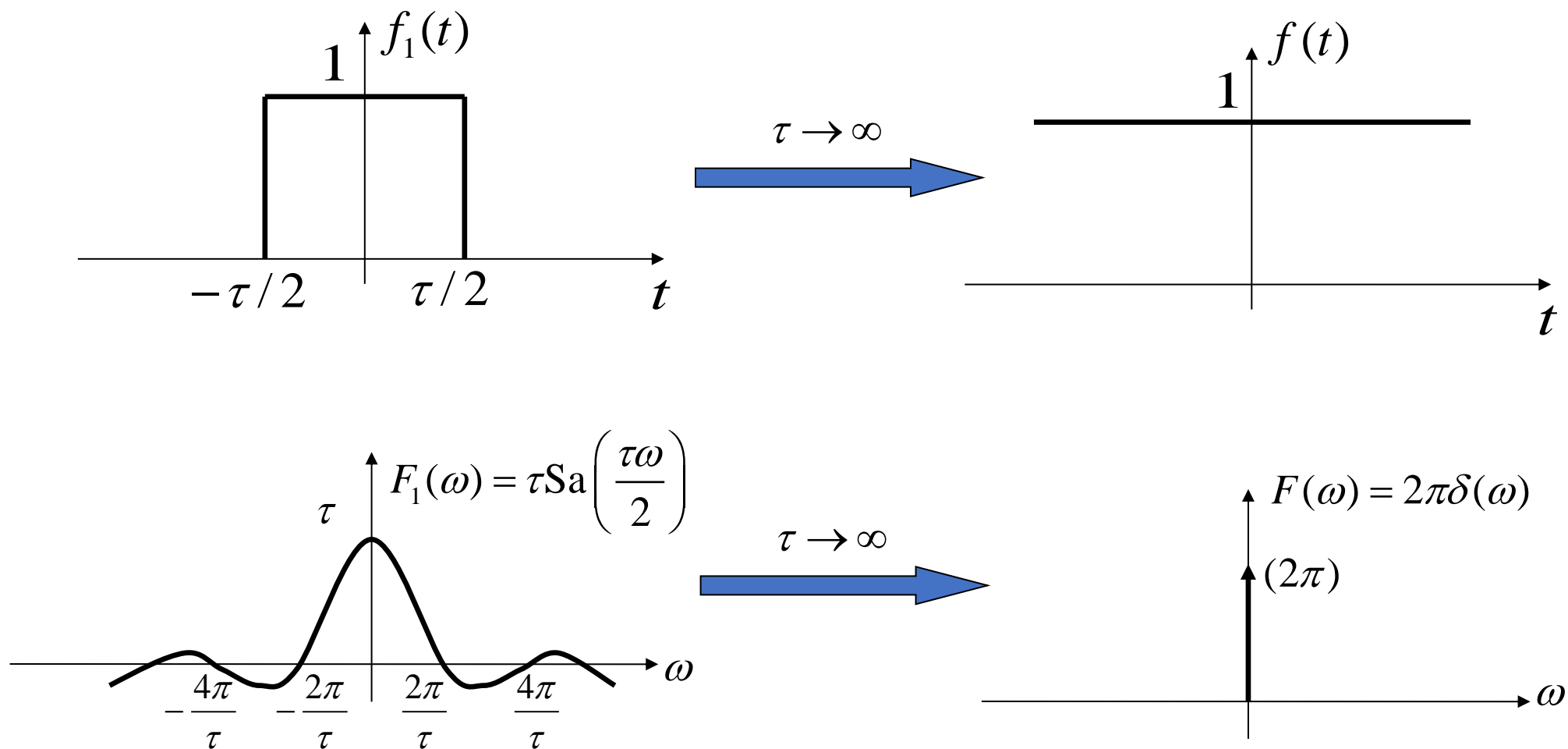
2. 冲激函数的傅里叶逆变换

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

$$\text{或 } \mathcal{F}\left[\frac{1}{2\pi}\right] = \delta(\omega), \quad \mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$$



3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换



3. 冲激偶的傅里叶变换

$$\because \mathbf{F}[\delta(t)] = 1, \quad \text{即: } \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

上式两边对 t 求导得:

$$\frac{d}{dt} \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\therefore \mathbf{F}[\delta'(t)] = j\omega$$

同理:

$$\mathbf{F}[\delta^{(n)}(t)] = (j\omega)^n$$

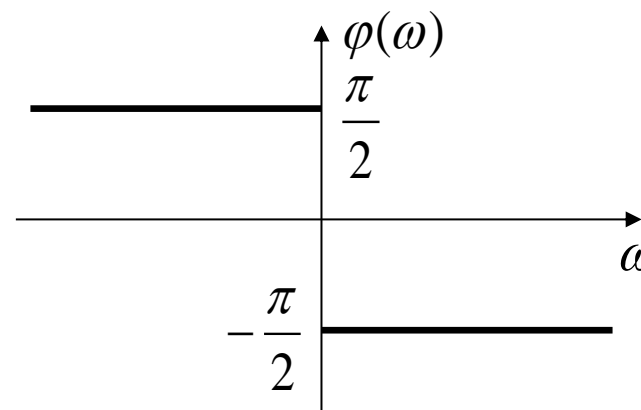
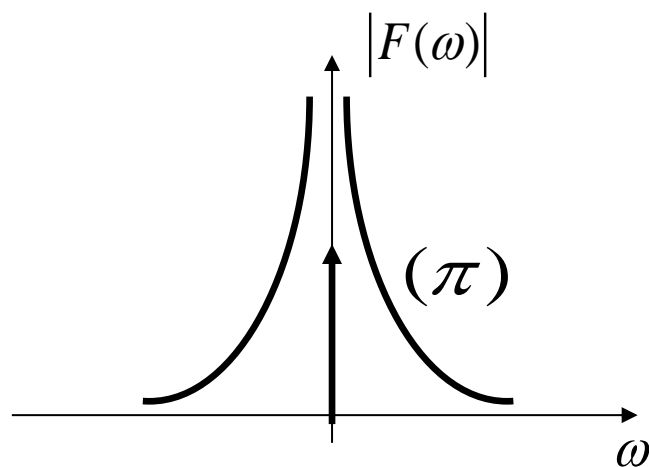
4. 阶跃信号

$$\because u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

$$\begin{aligned} \therefore F(\omega) &= \mathcal{F}[u(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\right] + \mathcal{F}\left[\frac{1}{2} \text{sgn}(t)\right] \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$

对应直流分量

0时刻跳变引起的其他频率分量



作业

基础题（需提交）：3-15，3-16。

加强题（选做，不提交）：3-14。

本次课内容

3.7 傅里叶变换的基本性质

本次课目标

熟练运用傅里叶变换的各种性质求复杂信号的傅里叶变换（重要！）

- 3.1 引言
- 3.2 周期信号的傅里叶级数分析
- 3.3 典型周期信号的傅里叶级数
- 3.4 傅里叶变换
- 3.5 典型非周期信号的傅里叶变换
- 3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换
- 3.7 傅里叶变换的基本性质**
- 3.8 卷积特性
- 3.9 周期信号的傅里叶变换
- 3.10 抽样信号的傅里叶变换
- 3.11 抽样定理

- 一个时间函数与它的频谱函数（若存在）具有**唯一对应**的关系。
- 傅里叶变换的基本性质使我们可以通过典型信号的傅里叶变换得到一些时域较为复杂的信号的傅里叶变换。
- 反之，也可以从频域的运算推测时域的变化。
- 注意：
 - **傅里叶变换存在的必要条件缺失。狄里赫利条件是充分不必要条件。**
 - 任意给定一个信号 $f(t)$ ，无论它是否满足绝对可积条件，傅里叶分析理论都未有限制人们采用任何方法求得一个表面形式上的变换式 $F(\omega)$ 。但某些变换未必有物理意义。
 - 工程实践表明：**绝大多数能量信号的傅里叶变换存在；绝大多数功率有限信号（阶跃信号、符号信号等）的广义傅里叶变换存在；非功率非能量信号的广义傅里叶变换可能不存在。**

$$\text{能量信号: } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad \text{功率信号: } \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} |f(t)|^2 dt < \infty$$

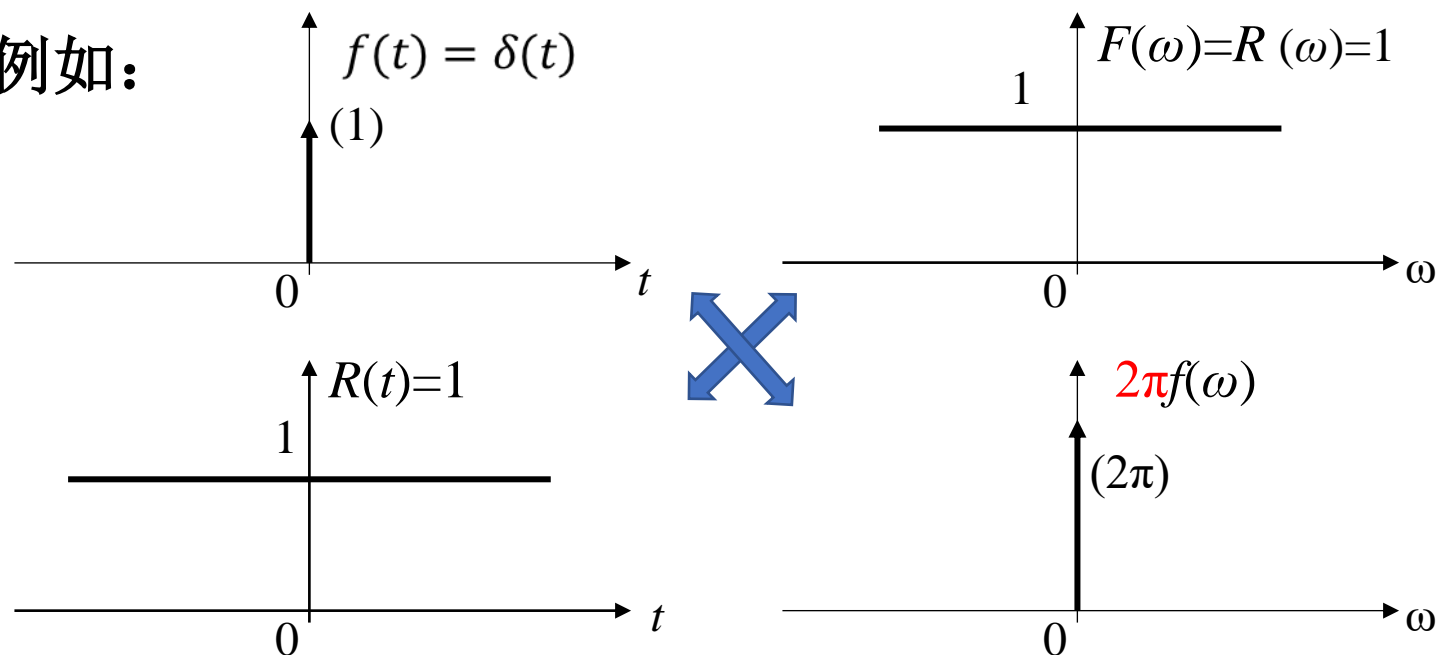
3.7.1 线性

若 $F[f_1(t)] = F_1(\omega)$, $F[f_2(t)] = F_2(\omega)$,

则 $F[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$

3.7.2 对称性

例如:



利用傅里叶变换的对称性，可将求傅里叶逆变换的问题转化为求傅里叶变换来进行。

$$\text{若 } \mathbf{F}[f(t)] = F(\omega)$$

$$\text{则 } \mathbf{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$$

$$\text{证明: } F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)e^{-j\lambda t} d\lambda$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}[F(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)e^{-j\lambda t} d\lambda \right] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\lambda+\omega)t} dt \right] f(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\lambda+\omega) f(\lambda) d\lambda = 2\pi f(-\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda+\omega) d\lambda \\ &= 2\pi f(-\omega) \end{aligned}$$

$$\text{即 } f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{F}[F(t)], \quad \omega \text{ 换为 } -t, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{F}[F(t)] \Big|_{\omega=-t}$$

$$\text{若 } \mathbf{F}[f(t)] = F(\omega)$$

$$\text{则 } \mathbf{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$\frac{F(t)}{2\pi} \leftrightarrow f(\omega) \quad (f \text{ 为偶函数})$$

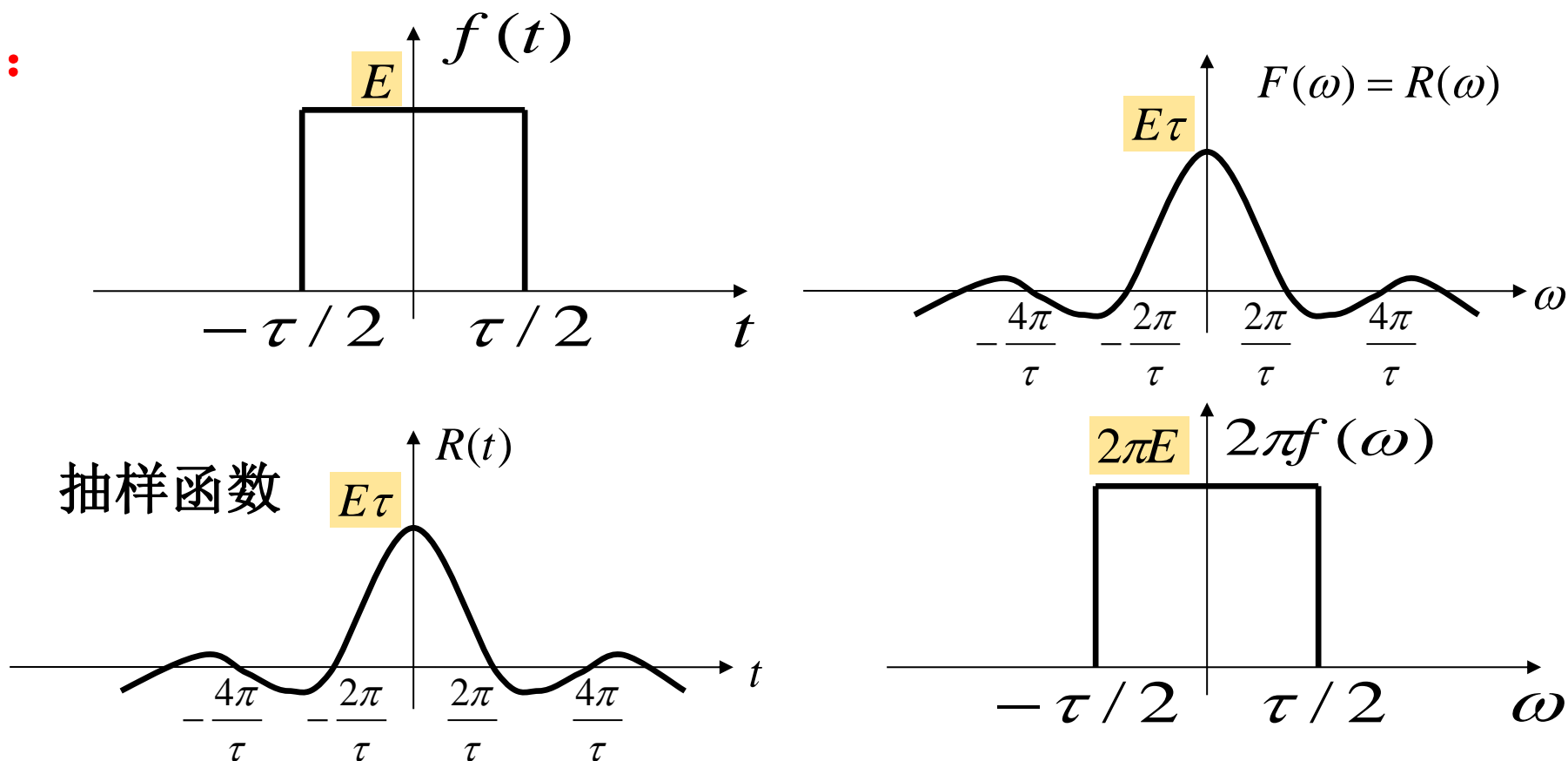
$$\frac{-F(t)}{2\pi} \leftrightarrow f(\omega) \quad (f \text{ 为奇函数})$$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega) \quad (f \text{ 为偶函数})$$

$$F(t) \leftrightarrow -2\pi f(\omega) \quad (f \text{ 为奇函数})$$

例如：



$$f(t) = E[u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})] \rightarrow R(\omega) = E\tau \text{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$R(t) = E\tau \text{Sa}(\frac{t\tau}{2}) \rightarrow F[R(t)] = 2\pi E[u(\omega + \frac{\tau}{2}) - u(\omega - \frac{\tau}{2})]$$



已知 $F[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega}$ ，求 $F^{-1}[j\pi \text{sgn}(\omega)]$ 。

A $\frac{1}{t}$

B $\frac{2\pi}{t}$

C $-\frac{2\pi}{t}$

D $-\frac{1}{t}$

提交

例3-2: 求 $\mathbf{F}^{-1}[j\pi \operatorname{sgn}(\omega)]$ 。

解: $\because F(t) = j\pi \operatorname{sgn}(t)$

$$\mathbf{F}[F(t)] = j\pi \frac{2}{j\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\therefore \mathbf{F}^{-1}[j\pi \operatorname{sgn}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \mathbf{F}[F(t)] \Big|_{\omega=-t} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2\pi}{\omega} \right] \Big|_{\omega=-t} = -\frac{1}{t}$$

$$j\pi \operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\frac{-1}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{t} \right) \leftrightarrow j\pi \operatorname{sgn}(\omega)$$

$$-\frac{1}{t} \leftrightarrow j\pi \operatorname{sgn}(\omega)$$

$\operatorname{sgn}(t)$ 是奇函数

例3-3: 设 $y(t)=x(t)\cos t$, 且已知 $Y(\omega)=u(\omega+2)-u(\omega-2)$, 求 $x(t)$ 。

解: 利用时域和频域的对称性,

$$u(t+2)-u(t-2) \xleftrightarrow{FT} 4Sa(2\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi} 4Sa(2t) \xleftrightarrow{FT} [u(\omega+2)-u(\omega-2)] \quad (\text{偶函数})$$

$$\therefore y(t) = \frac{2}{\pi} Sa(2t) = \frac{\sin(2t)}{\pi t} = \frac{2\sin(t)\cos(t)}{\pi t} = x(t)\cos(t)$$

$$\therefore x(t) = \frac{2\sin(t)}{\pi t} = \frac{2}{\pi} Sa(t)$$

3.7.3 奇偶虚实性

设 $F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$

其中 $|F(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$, $\varphi(\omega) = \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$

因为 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$

所以 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt$

则
$$\begin{cases} R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt \\ X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)dt \end{cases}$$

若 $f(t)$ 为实函数, $R(\omega)$ 为偶函数,
 $X(\omega)$ 为奇函数。

两种特定关系：

1. 若 $f(t)$ 是实函数，或虚函数 $[f(t) = jg(t)]$ ，则 $|F(\omega)|$ 是偶函数， $\varphi(\omega)$ 是奇函数。

2. 若 $f(t)$ 是 t 的实偶函数，则 $F(\omega)$ 必为 ω 的实偶函数：

$$[F(\omega) = R(\omega)]$$

若 $f(t)$ 是 t 的实奇函数，则 $F(\omega)$ 必为 ω 的虚奇函数：

$$[F(\omega) = jX(\omega)]$$

例如： $f(t) = e^{-\alpha|t|}$ (实偶) $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ -e^{\alpha t} & t < 0 \end{cases}$ (实奇)

$$F(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\text{实偶}) \quad \quad F(\omega) = \frac{-2j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\text{虚奇})$$

3.7.4 位移特性

(1) 时移特性

若 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

$$\text{则 } \mathcal{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega(t-t_0)} d(t-t_0)$$

$$= F(\omega)e^{-j\omega t_0} = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}e^{-j\omega t_0}$$

幅度谱不变，相位谱产生附加相移 $-\omega t_0$ 。

同理 $\mathcal{F}[f(t+t_0)] = F(\omega)e^{j\omega t_0}$

例3-4：求下图所示的单边矩形脉冲信号的频谱函数。

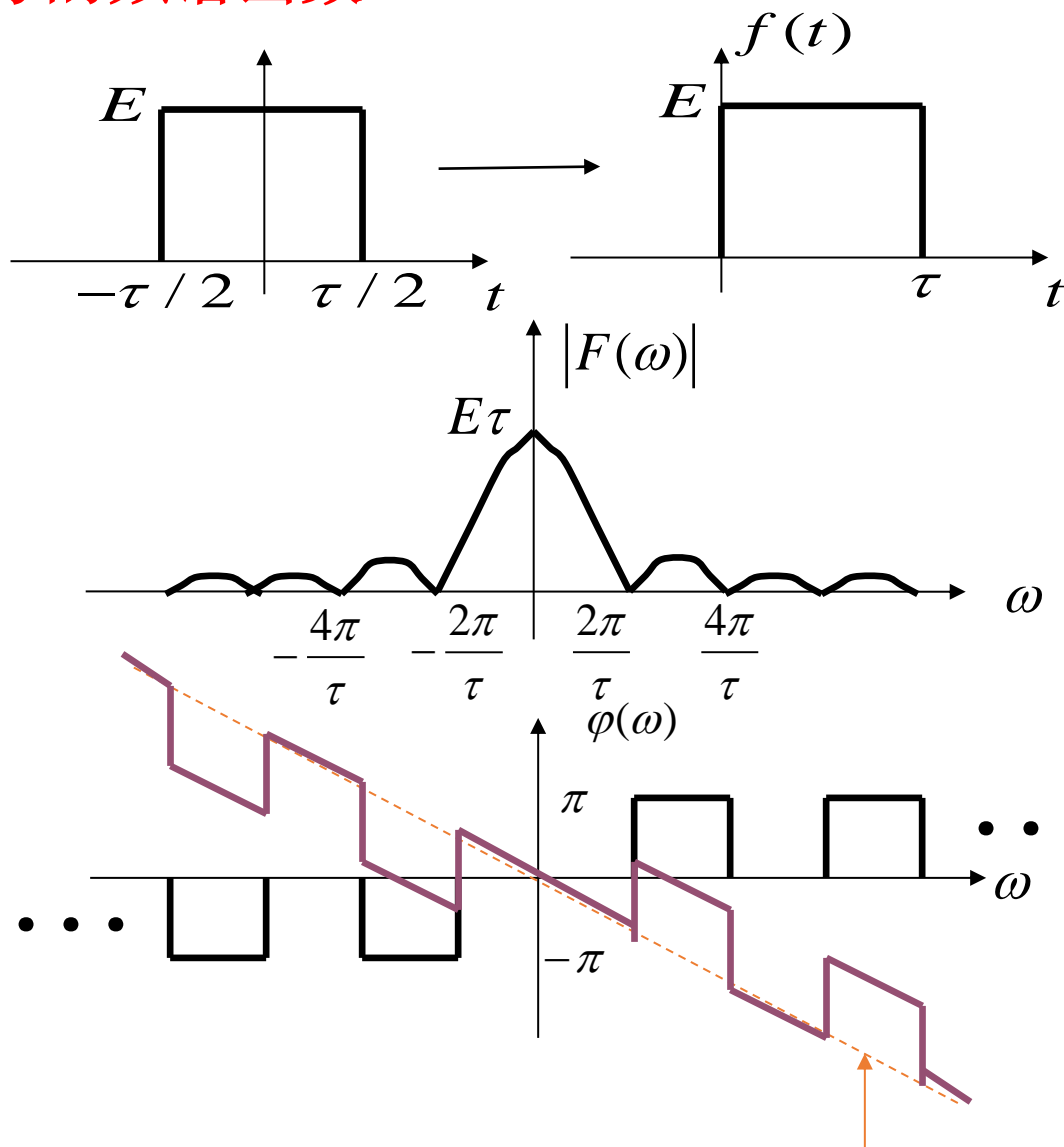
解：因为对称矩形脉冲信号 $EG_{\tau}(t)$ 的傅里叶变换为

$$F[EG_{\tau}(t)] = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

根据时移特性

$$F[f(t)] = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$

幅度谱保持不变，相位谱产生附加相移 $-\omega\tau/2$ 。





信号 $x(t) = e^{-t+2}u(t-2)$ 的傅里叶变换为

A $e^{-j2\omega} \frac{1}{1+j2\omega}$

B $e^{-j2\omega} \frac{1}{1+j\omega}$

C $e^{-j\omega} \frac{1}{1+j2\omega}$

D $2e^{-j\omega} \frac{1}{1+j\omega}$

提交

(2) 频移特性（调制原理）

若 $F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)]$

则 $\mathbf{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$

$$\mathbf{F}[f(t)e^{-j\omega_0 t}] = F(\omega + \omega_0)$$

例3-5：利用频移特性求 $e^{j\omega_0 t}$, $\cos \omega_0 t$, $\sin \omega_0 t$ 的频谱。

解： $\mathbf{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$ $\mathbf{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

$$\because \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] \quad \therefore \mathbf{F}[\cos \omega_0 t] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\because \sin \omega_0 t = \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] \quad \therefore \mathbf{F}[\sin \omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

调制原理

若 $F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)]$

则 $\mathbf{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$ $\mathbf{F}[f(t)e^{-j\omega_0 t}] = F(\omega + \omega_0)$

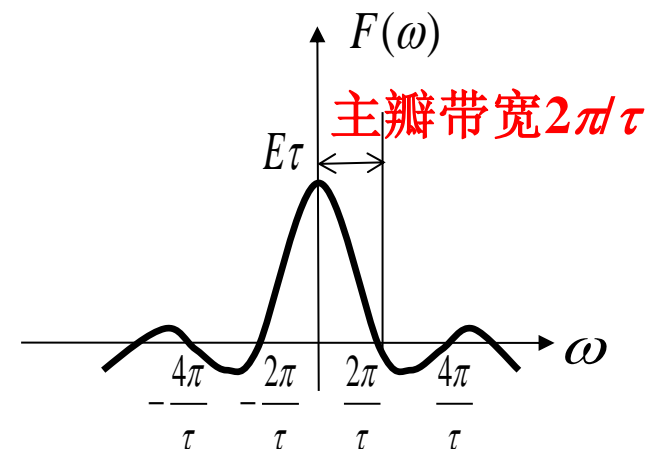
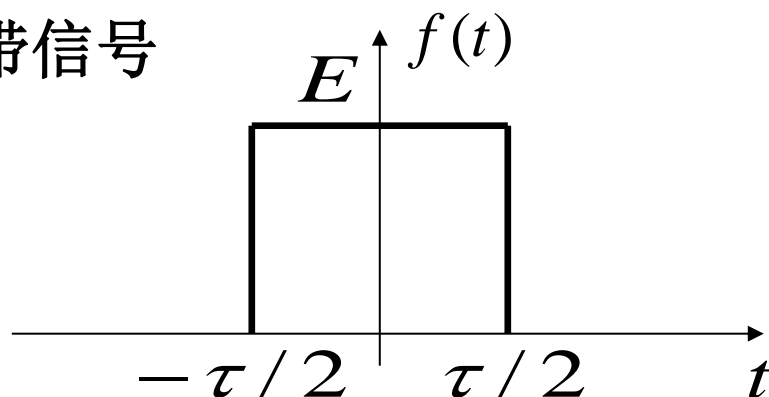
$$\because \cos \omega_0 t = \frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] \quad \sin \omega_0 t = \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}]$$

$$\therefore \mathbf{F}[f(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2}[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$$

$$\mathbf{F}[f(t) \sin \omega_0 t] = \frac{j}{2}[F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)]$$

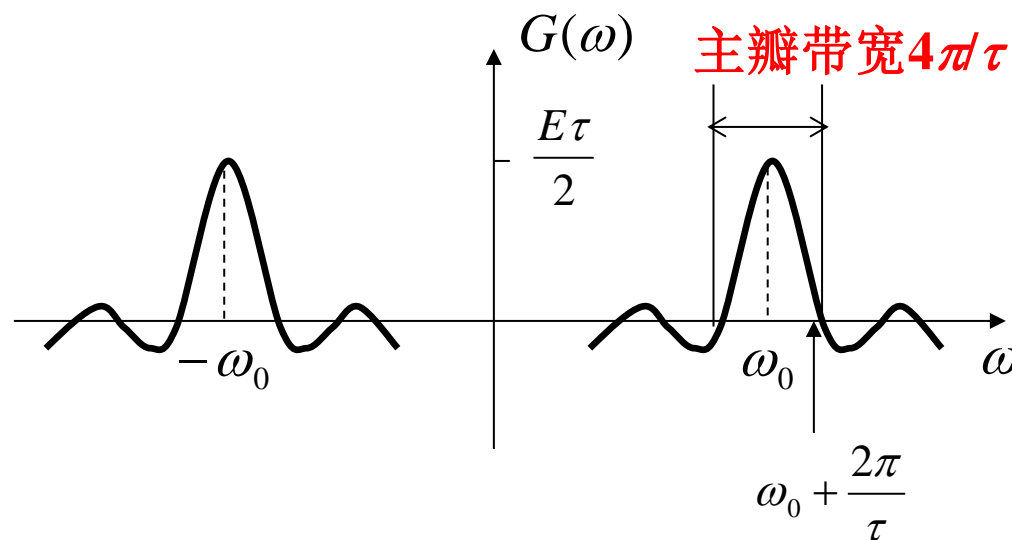
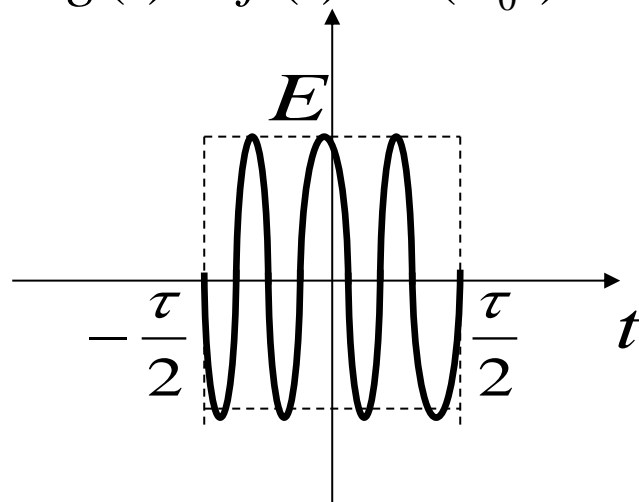
例3-6: 求矩形脉冲幅度键控 (ASK) 调制信号的频谱函数, 已知矩形脉冲脉幅为 E , 脉宽为 τ , 载波信号的频率为 ω_0 。

基带信号



调制信号

$$g(t) = f(t) \cos(\omega_0 t)$$



$$F(\omega) = E\tau \text{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{1}{2}[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{E\tau}{2} \{ \text{Sa}[(\omega + \omega_0)\frac{\tau}{2}] + \text{Sa}[(\omega - \omega_0)\frac{\tau}{2}] \} \end{aligned}$$

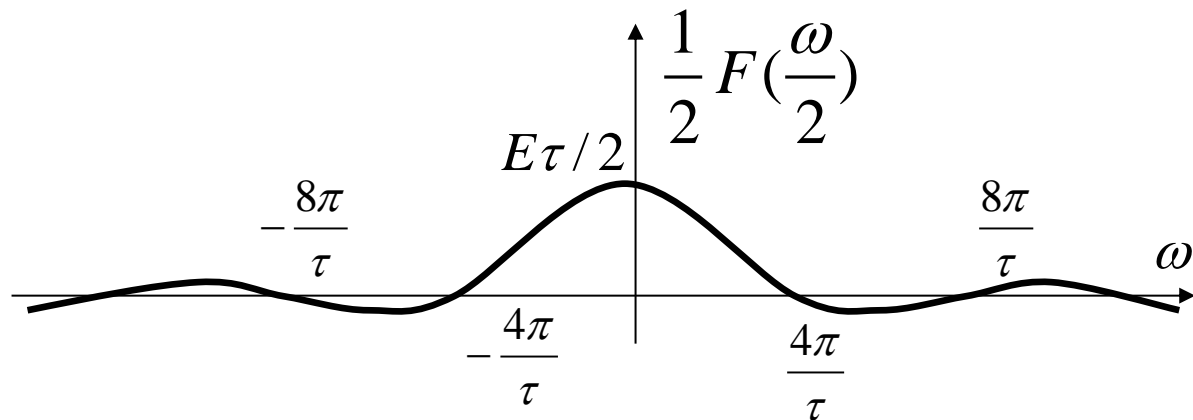
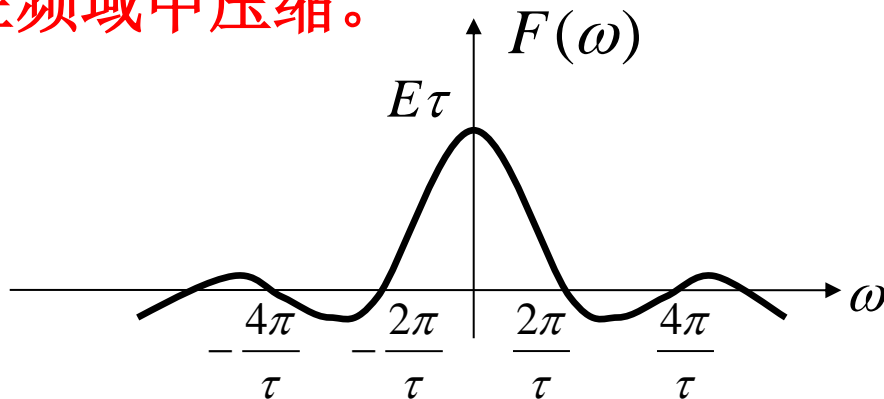
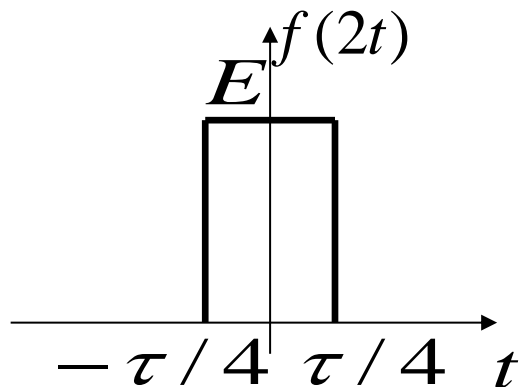
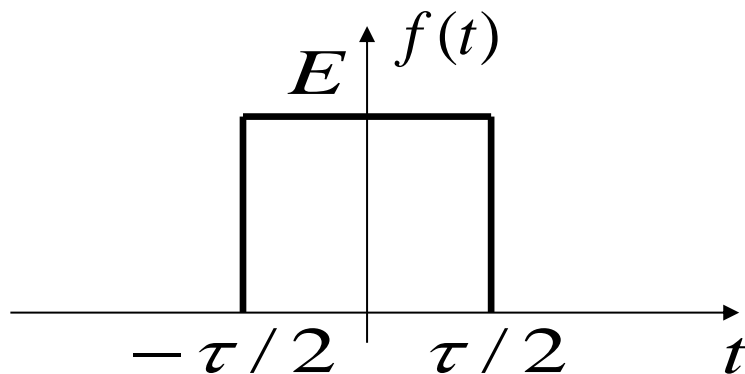
在调制过程中带宽增加一倍，频谱密度减小一半。

3.7.5 尺度变换特性

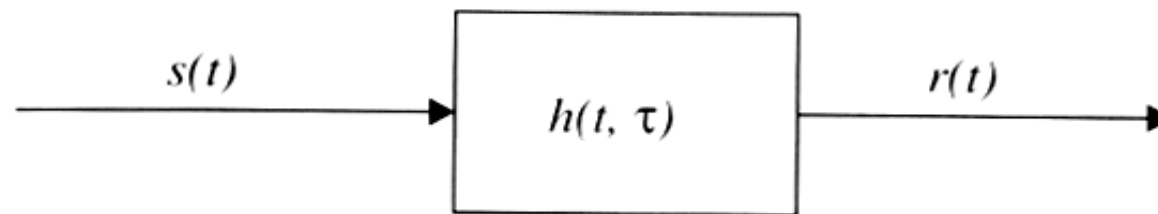
若 $F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)]$

$$\text{则 } \mathbf{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

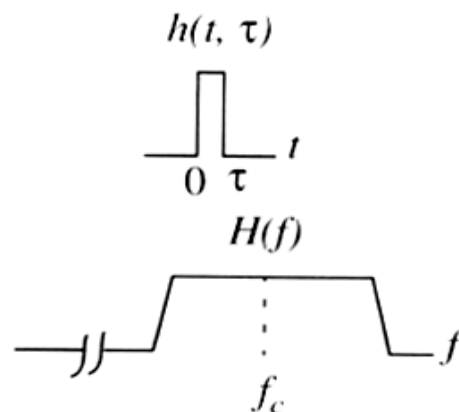
信号在**时域中压缩**等效于在**频域中扩展**（波形压缩 a 倍，信号随时间变化加快 a 倍，所包含的频率分量增加 a 倍，频谱展宽 a 倍。根据能量守恒定律，各频率分量的大小减小 a 倍）；**在时域中扩展**等效于在**频域中压缩**。



信道的时延-频率压缩与扩展

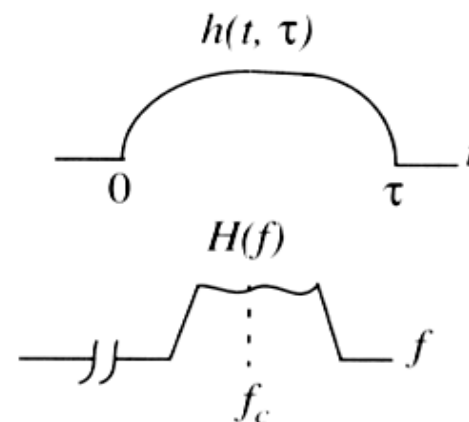


信道时延较小



信道带宽较大

信道时延较大



信道带宽较小

特例： $\mathbf{F}[f(-t)] = F(-\omega)$ (反褶, $\mathbf{a=-1}$)

综合**时移**特性和**尺度变换**特性：

$$\mathbf{F}[f(at - t_0)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

证明：

先尺度变换

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

再时移

$$f\left[a\left(t - \frac{t_0}{a}\right)\right] \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

先时移

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

再尺度变换

$$f(at - t_0) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

3.7.6 微分与积分特性

(1) 时域微分特性

若 $F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)]$

则 $\mathbf{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(\omega), \quad \mathbf{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (j\omega)^n F(\omega)$

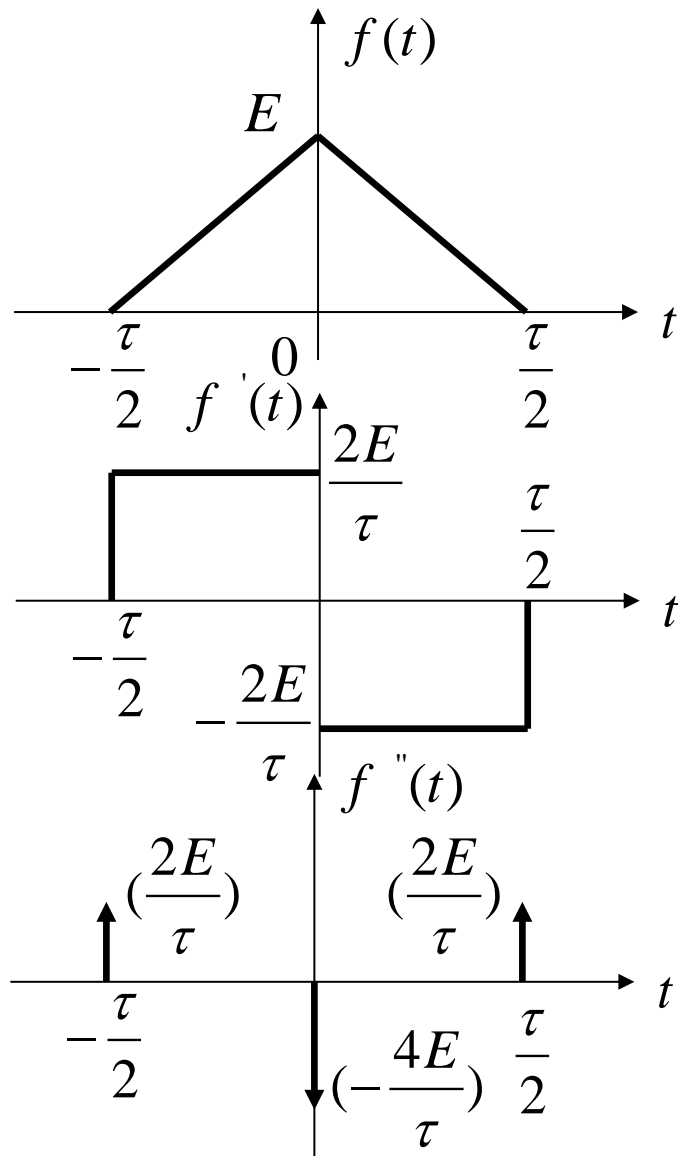
证明:
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

上式两边对 t 求导得,
$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) (j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\mathbf{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega)$$

例如, $\mathbf{F}[\delta(t)] = 1 \quad \mathbf{F}[\delta'(t)] = j\omega \quad \mathbf{F}[\delta^{(n)}(t)] = (j\omega)^n$

例3-7：求下图所示三角脉冲信号的傅里叶变换。



解：

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{2E}{\tau} & -\frac{\tau}{2} < t < 0 \\ -\frac{2E}{\tau} & 0 < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

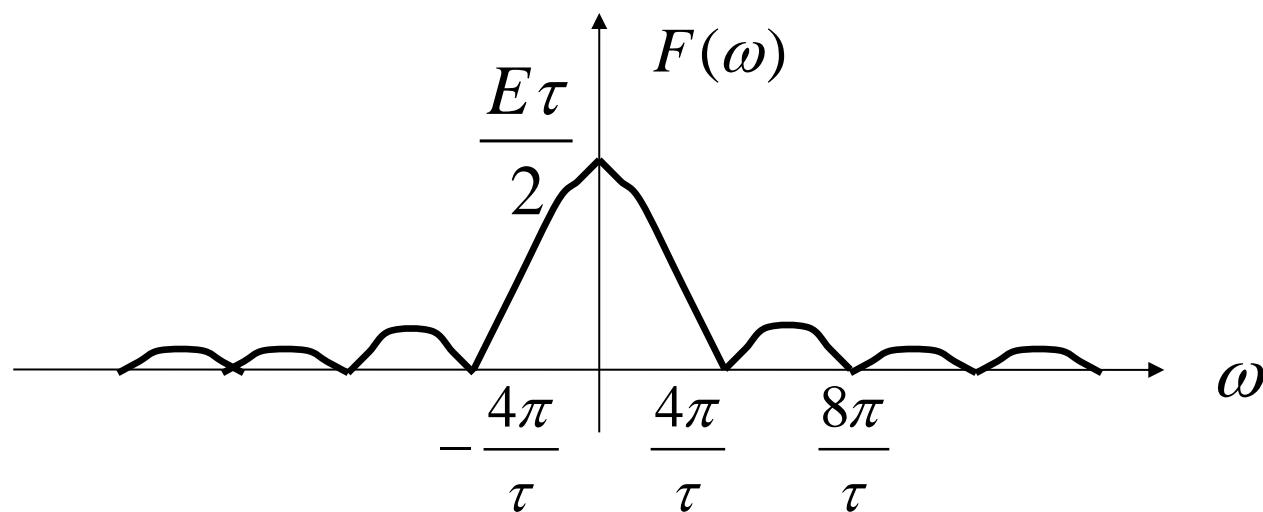
$$f''(t) = \frac{2E}{\tau} \left[\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - 2\delta(t) \right]$$

对上式两边取傅里叶变换：

$$\begin{aligned} (j\omega)^2 F(\omega) &= \frac{2E}{\tau} (e^{j\omega\frac{\tau}{2}} + e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} - 2) = \frac{4E}{\tau} \left[\cos\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) - 1 \right] \\ &= -\frac{\omega^2 E \tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \end{aligned}$$

$$(j\omega)^2 F(\omega) = -\frac{\omega^2 E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$$\therefore F(\omega) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$



(2) 时域积分特性

若 $F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)]$

$$\text{则 } \mathbf{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

其中 $F(0) = F(\omega)|_{\omega=0}$ 直流分量

若 $F(0) = 0$

$$\text{则 } \mathbf{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

(3) 频域微分特性

若 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

则 $\mathcal{F}[(-jt)f(t)] = \frac{dF(\omega)}{d\omega}$,

$\mathcal{F}[(-jt)^n f(t)] = \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$

$$\mathcal{F}[t^n f(t)] = j^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

例： $\because \mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$

$\therefore \mathcal{F}[t] = j2\pi\delta'(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n] = 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega)$

(4) 频域积分特性

若 $F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)]$

则 $\mathbf{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\omega} F(u)du\right] = \frac{f(t)}{-jt} + \pi f(0)\delta(t)$

若 $f(0) = 0$

则 $\mathbf{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\omega} F(u)du\right] = \frac{f(t)}{-jt}$

作业

基础题（需提交）：3-17（a）（d）（f），3-21，3-22（3），3-25（1）（2），3-29（3）（4）（6）（7）。

加强题（选做，不提交）：3-17（b）（c）（e），3-20，3-25（3）（4），3-26，3-28，3-33。

本次课内容

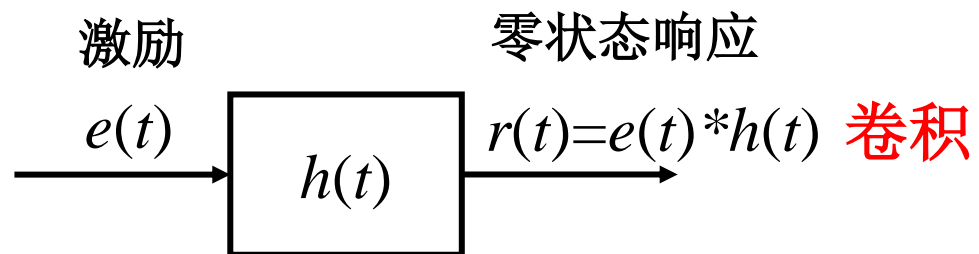
- 3.8 卷积定理
- 3.9 周期信号的傅里叶变换
- 3.10 抽样信号的傅里叶变换
- 3.11 抽样定理

本次课目标

1. 熟练掌握时域卷积定理和频域卷积定理及其应用；
2. 熟悉周期信号的傅里叶变换与傅里叶级数的关系；
3. 熟练掌握抽样定理及其应用。

- 3.1 引言
- 3.2 周期信号的傅里叶级数分析
- 3.3 典型周期信号的傅里叶级数
- 3.4 傅里叶变换
- 3.5 典型非周期信号的傅里叶变换
- 3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换
- 3.7 傅里叶变换的基本性质
- 3.8 卷积定理**
- 3.9 周期信号的傅里叶变换
- 3.10 抽样信号的傅里叶变换
- 3.11 抽样定理

- 卷积是系统分析的核心技术。系统的零状态响应为激励与冲激响应的卷积。



- 卷积运算的**四步曲**:

1. **反褶**: $h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$
2. **时移**: $h(-\tau) \rightarrow h(t - \tau) \begin{cases} t < 0, & \text{左移 } t \\ t > 0, & \text{右移 } t \end{cases}$
3. **相乘**: $e(\tau)h(t - \tau)$
4. **积分**: $e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t - \tau)d\tau$

运算复杂!

- 卷积定理**—将复杂的时域计算转换为简单的频域计算，反之亦然。
- 抽样定理**—卷积定理的应用。

要将一首时间上连续的乐曲转换为CD中的数字音乐，需对模拟信号进行抽样（时间离散化），你认为下列哪个抽样频率（单位Hz代表每秒钟的抽样次数）获得的音乐质量最高？

- ☐ A 5.5 kHz
- ☐ B 11 kHz
- ☐ C 22 kHz
- ☒ D 44 kHz

提交

要将一首时间上连续的乐曲转换为CD中的数字音乐，需对模拟信号进行抽样（时间离散化），你认为下列哪个抽样频率（单位Hz代表每秒钟的抽样次数）获得的音乐质量最高？

44 kHz抽样频率



22 kHz抽样频率



11 kHz抽样频率



5.5 kHz抽样频率



(1) 时域卷积定理：两信号的时域卷积等效于在频域中频谱相乘。

$$\text{若 } F_1(\omega) = \mathbf{F}[f_1(t)], \quad F_2(\omega) = \mathbf{F}[f_2(t)],$$

$$\text{则 } \mathbf{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

(2) 频域卷积定理：两信号的频域卷积等效于在时域中函数相乘（再除以 2π ）。

$$\text{若 } F_1(\omega) = \mathbf{F}[f_1(t)], \quad F_2(\omega) = \mathbf{F}[f_2(t)],$$

$$\text{则 } \mathbf{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

$$\text{其中: } F_1(\omega) * F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(\omega - u) du$$



例3-8： 利用卷积定理证明傅里叶变换的时域积分特性。

解： $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) u(t-\tau) d\tau = f(t) * u(t)$

已知 $F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)]$,

利用时域卷积定理,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] &= F(\omega) \mathbf{F}[u(t)] \\ &= F(\omega) \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] \\ &= \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)\end{aligned}$$

时域积分特性

$$\mathbf{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

直流分量

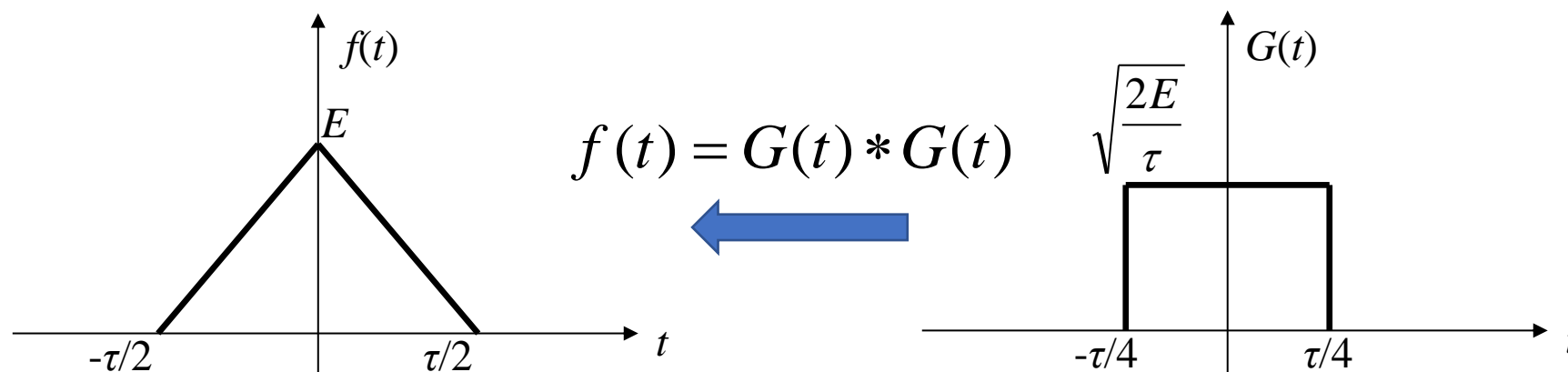
例3-9：利用时域卷积定理求三角脉冲的频谱

$$f(t) = \begin{cases} E(1 - \frac{2|t|}{\tau}) & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

解：

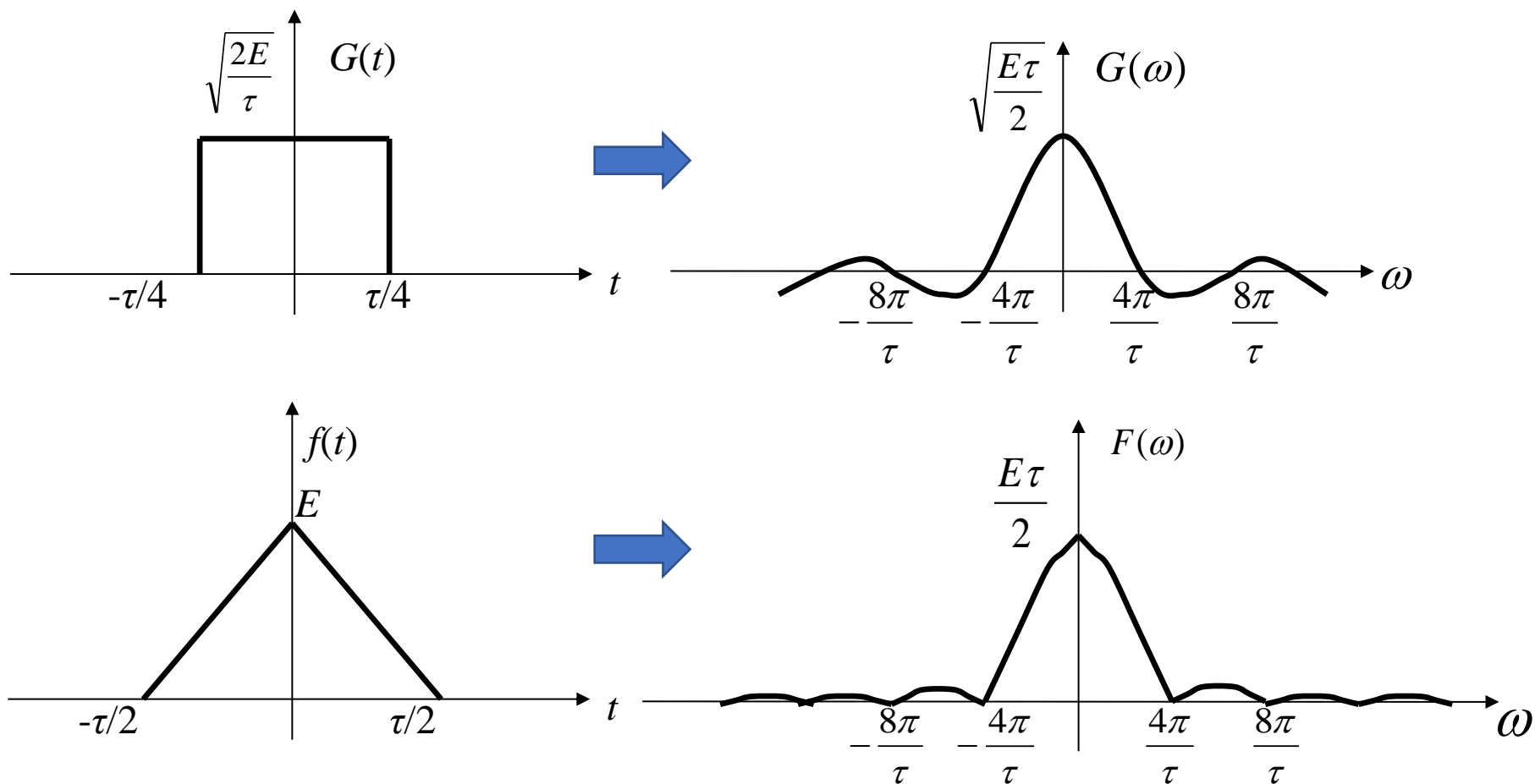
第一步：将三角脉冲视为**两个矩形脉冲的卷积**。

三角脉冲的宽度为两个矩形脉冲的宽度之和，而三角脉冲的幅度峰值为两个矩形幅度的平方和宽度相乘的结果。因此，矩形脉冲的宽度、幅度分别为 $\tau/2$ 及 $\sqrt{2E/\tau}$ 。

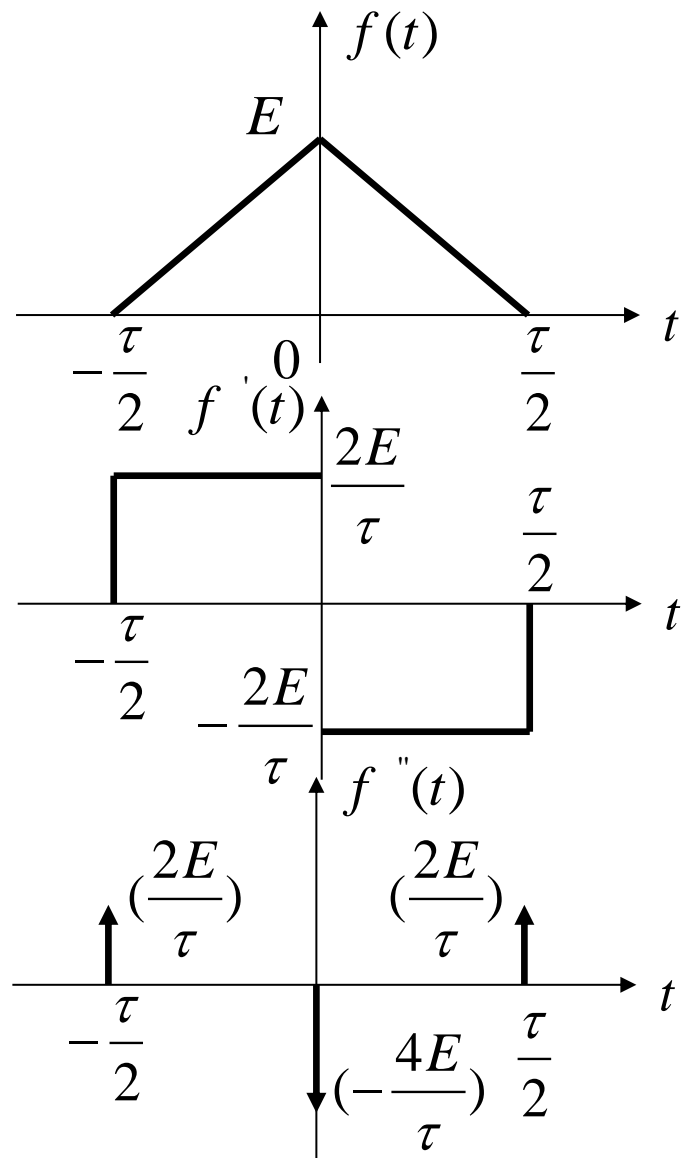


第二步：应用时域卷积定理。

$$G(\omega) = \sqrt{\frac{2E}{\tau}} \cdot \frac{\tau}{2} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) = \sqrt{\frac{E\tau}{2}} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \quad \therefore F(\omega) = G^2(\omega) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$



回顾例3-7：用时域微分性质求三角脉冲信号的傅里叶变换。

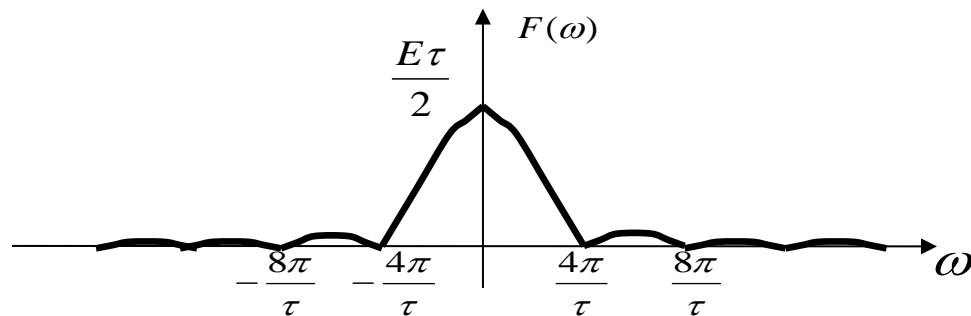


解：
$$f''(t) = \frac{2E}{\tau} \left[\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - 2\delta(t) \right]$$

对上式两边取傅里叶变换：

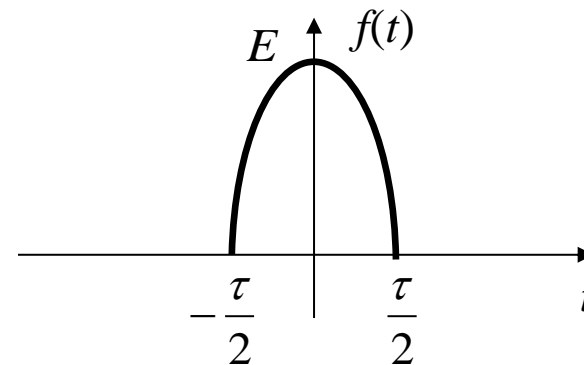
$$\begin{aligned} (j\omega)^2 F(\omega) &= \frac{2E}{\tau} (e^{j\omega\frac{\tau}{2}} + e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} - 2) \\ &= -\frac{\omega^2 E \tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore F(\omega) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$



例3-10： 利用频域卷积定理求余弦脉冲的频谱。

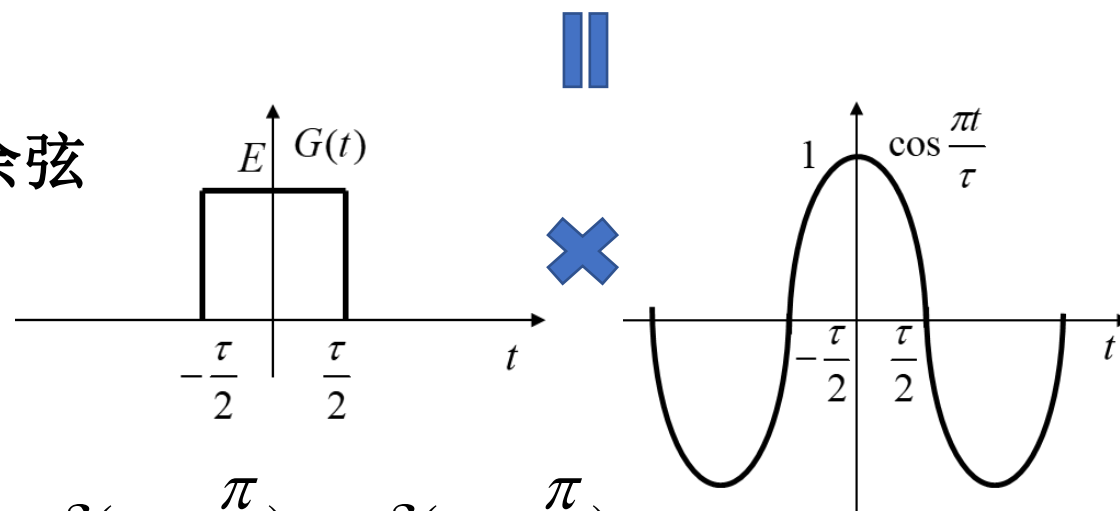
$$f(t) = \begin{cases} E \cos \frac{\pi t}{\tau} & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



解：

第一步： 把 $f(t)$ 看作是矩形脉冲 $G(t)$ 与余弦信号的乘积。

第二步： 应用频域卷积定理。

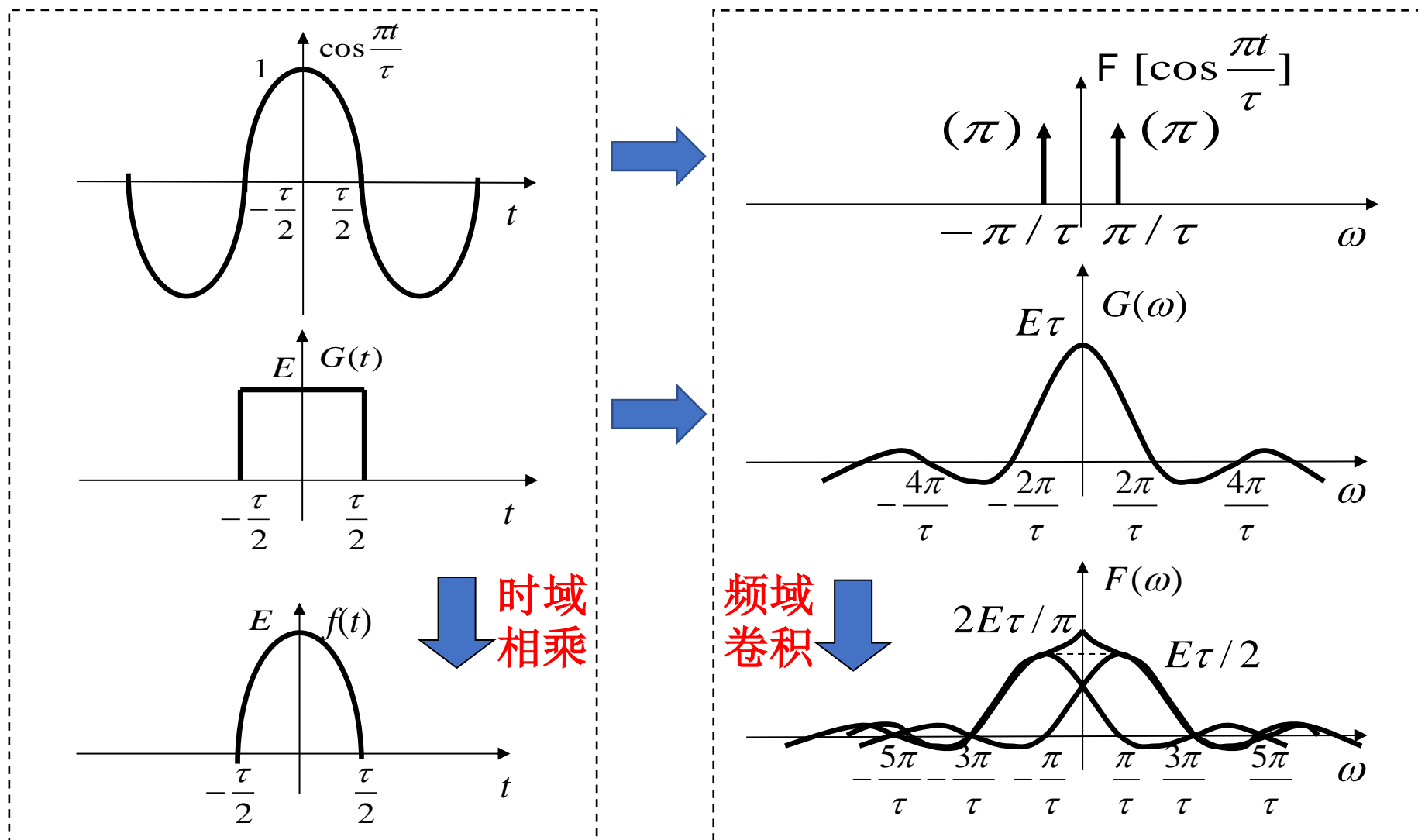


$$G(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

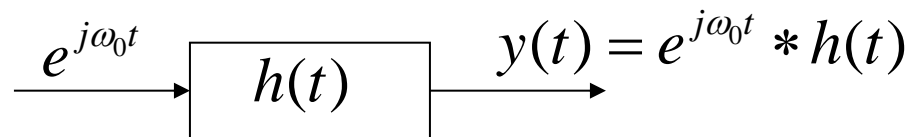
$$\mathbf{F}\left[\cos \frac{\pi t}{\tau}\right] = \pi\delta\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right) + \pi\delta\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} G(\omega) * \pi\left[\delta\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right) + \delta\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right)\right] = \frac{E\tau}{2} \left\{ \text{Sa}\left[\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right) \frac{\tau}{2}\right] + \text{Sa}\left[\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right) \frac{\tau}{2}\right] \right\}$$

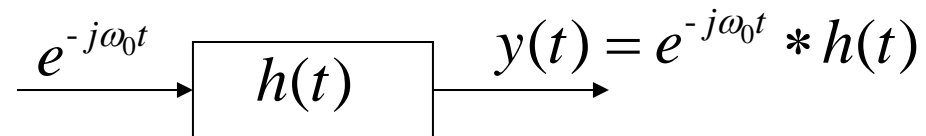
$$F(\omega) = \frac{E\tau}{2} \left\{ \text{Sa}\left[\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right)\frac{\tau}{2}\right] + \text{Sa}\left[\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right)\frac{\tau}{2}\right] \right\} = 2E\tau \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) / \left[\pi \left(1 - \frac{\tau^2\omega^2}{\pi^2}\right) \right]$$



当一复指数时间信号作为激励作用于线性时不变系统时，其**稳态响应**是同频率的复指数时间信号，只是幅度与相位被改变。



$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * e^{j\omega_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \\ &= H(\omega_0) e^{j\omega_0 t} = |H(\omega_0)| e^{j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * e^{-j\omega_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0(t-\tau)} d\tau = e^{-j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0 \tau} d\tau \\ &= H^*(\omega_0) e^{-j\omega_0 t} = |H(\omega_0)| e^{-j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} \end{aligned}$$

当一个三角函数作为激励作用于线性时不变系统时，其稳态响应是同频率的三角函数，只是幅度与相位被改变。

$$\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{\quad} \boxed{h(t)} \xrightarrow{\quad} y(t) = \cos(\omega_0 t) * h(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} h(t) * (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \\ &= \frac{1}{2} |H(\omega_0)| \left(e^{j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} + e^{-j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} \right) = |H(\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] \end{aligned}$$

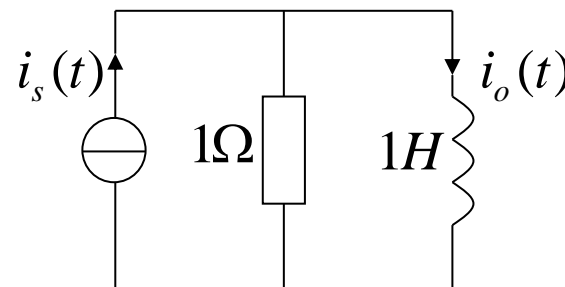
$$\sin(\omega_0 t) \xrightarrow{\quad} \boxed{h(t)} \xrightarrow{\quad} y(t) = \sin(\omega_0 t) * h(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} h(t) * (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \\ &= \frac{1}{2j} |H(\omega_0)| \left(e^{j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} - e^{-j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} \right) = |H(\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] \end{aligned}$$

如一时间信号作用于系统，其输出仍是此时间信号，只是幅度与相位被改变，称此时间信号为系统的特征信号，表征被改变的幅度和相位的函数，称为系统的特征值或系统函数。

所以信号 $e^{j\omega_0 t}$ ， $\cos(\omega_0 t)$ 和 $\sin(\omega_0 t)$ 是系统的特征信号，函数 $H(\omega)$ （系统单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换）是系统的特征值或系统函数，也称为系统的频率响应。

例3-11: 一 RL 电路如图所示, 激励为电流源 $i_s(t)$, 响应是电感中的电流 $i_o(t)$ 。列出电路的输入-输出微分方程, 求出其频率响应。若激励 $i_s(t)=\cos t$, 求正弦稳态响应 $i_o(t)$ 。



解: 系统方程为 $i_R(t) + i_o(t) = i_s(t)$

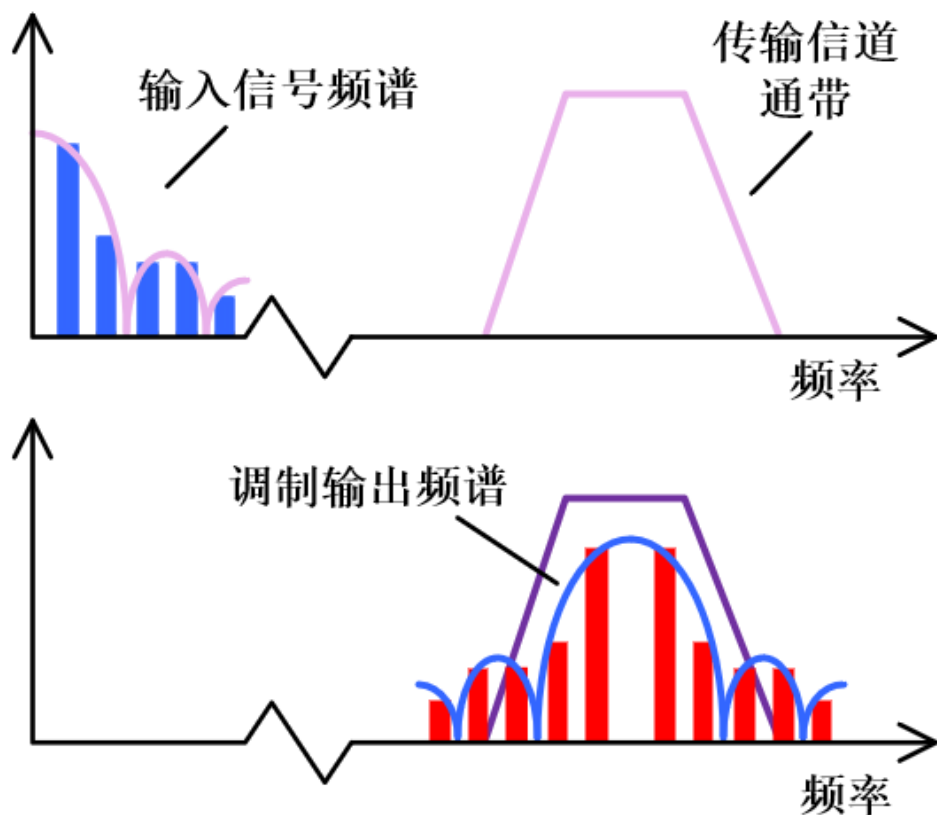
$$\therefore \frac{L}{R} \frac{di_o(t)}{dt} + i_o(t) = i_s(t) \quad \frac{di_o(t)}{dt} + i_o(t) = i_s(t)$$

两边同求傅里叶变换 $(j\omega + 1)I_o(\omega) = I_s(\omega)$

$$\text{所以 } H(\omega) = \frac{I_o(\omega)}{I_s(\omega)} = \frac{1}{j\omega + 1} \quad H(1) = H(\omega) \Big|_{\omega=1} = \frac{1}{j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$i_o(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

卷积定理的应用：通信中的带宽效应



$$x(t) * h(t) \xrightarrow{F} X(\omega)H(\omega)$$

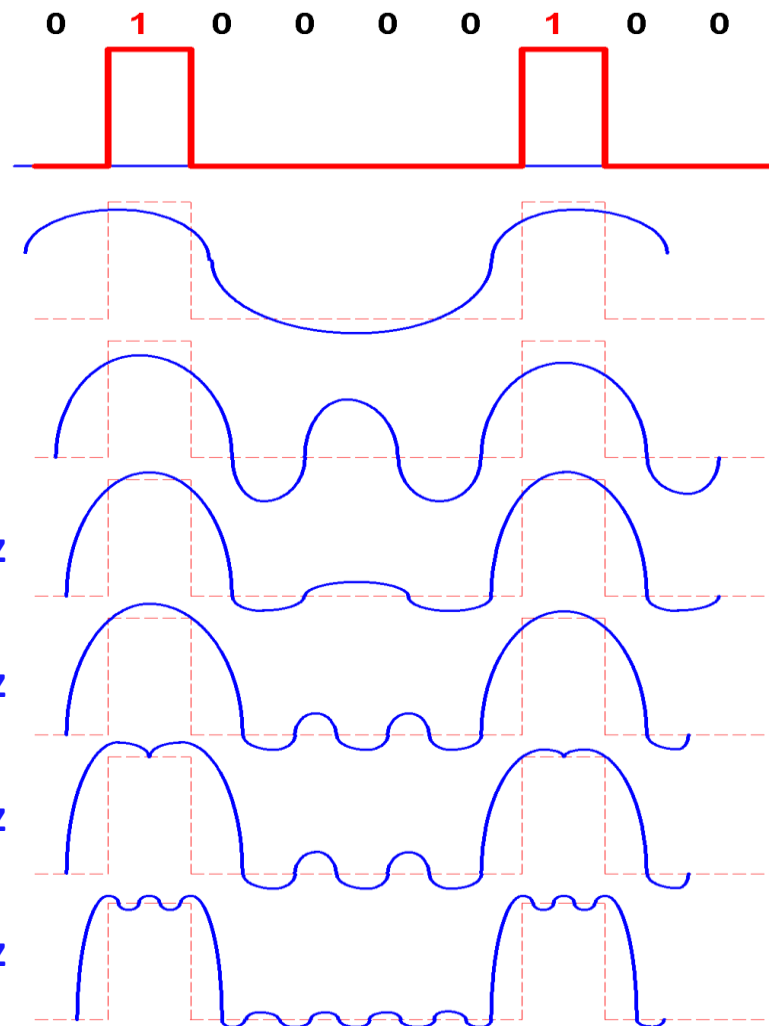
时域卷积定理

- 信道带宽是有限的。
- 如果信号的一些主要频率分量落在信道带宽之外，则信道输出的信号失真。

卷积定理的应用：通信中的带宽效应

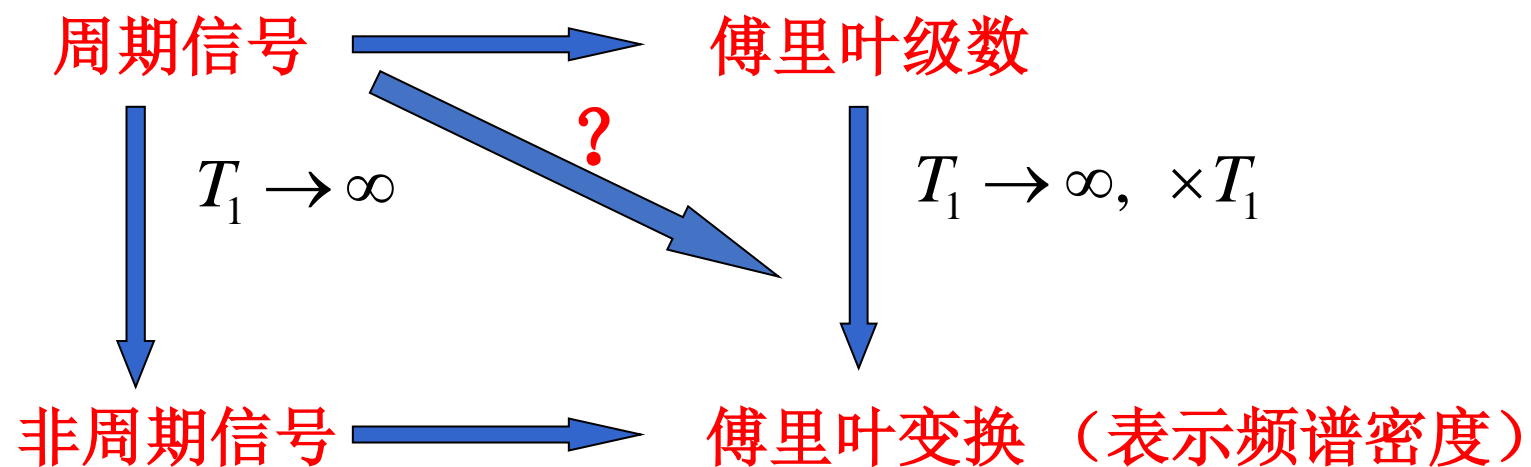
- 信号带宽：2000 Hz

比特速率：
2000 bits/s



- 信道在不同带宽情况下的输出信号

- 3.1 引言
- 3.2 周期信号的傅里叶级数分析
- 3.3 典型周期信号的傅里叶级数
- 3.4 傅里叶变换
- 3.5 典型非周期信号的傅里叶变换
- 3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换
- 3.7 傅里叶变换的基本性质
- 3.8 卷积定理
- 3.9 周期信号的傅里叶变换
- 3.10 抽样信号的傅里叶变换
- 3.11 抽样定理





试求信号 $f(t) = 1 + 2\cos t$ 的傅里叶变换。

- ☐ A $F(\omega) = \delta(\omega) + 2\pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$
- ☐ B $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)$
- ☐ C $F(\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)$
- ☒ D $F(\omega) = 2\pi[\delta(\omega) + \delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$

提交

3.9.1 正弦、余弦信号的傅里叶变换

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

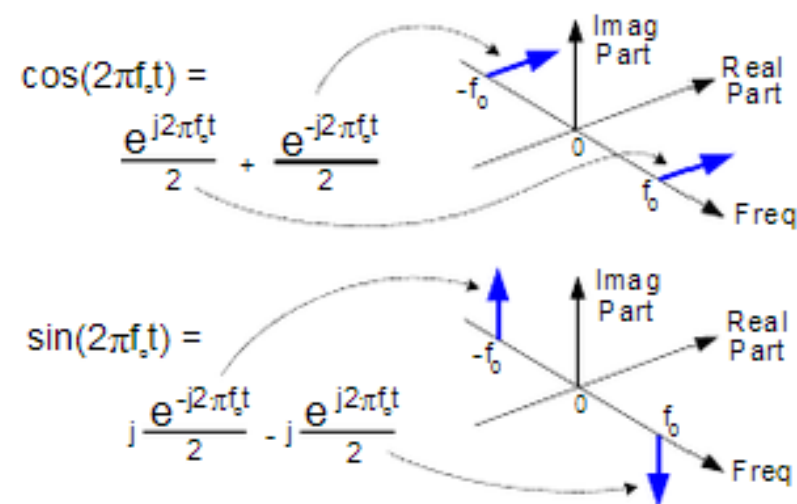
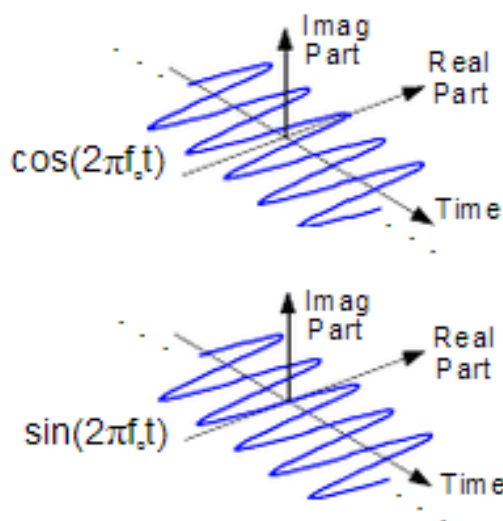
$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

$$F[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$F[e^{-j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$F[\cos \omega_0 t] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$F[\sin \omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$



3.9.2 一般周期信号的傅里叶变换

令周期信号 $f(t)$ 的周期为 T_1 ，角频率为 $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi/T_1$ 。它的傅里叶级数为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (1)$$

其中：
$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

对式(1)两边取傅里叶变换

$$F(\omega) = \mathbf{F}[f(t)] = \mathbf{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathbf{F}\left[e^{jn\omega_1 t}\right] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

利用频移性质

即：
$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

周期信号 $f(t)$ 的傅里叶变换是由一系列冲激函数所组成，这些冲激位于信号的谐频处 $(0, \pm\omega_1, \pm2\omega_1, \dots)$ ，每个冲激的强度等于 $f(t)$ 的傅里叶级数相应系数 F_n 的 2π 倍。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (1)$$

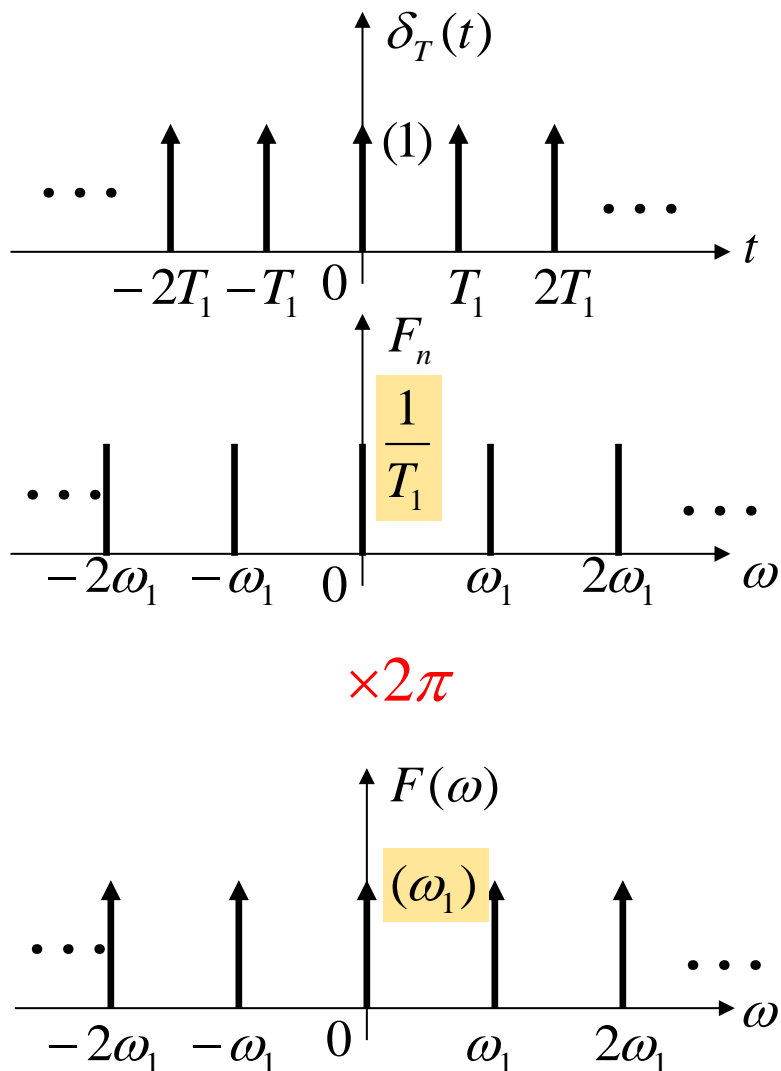
求傅里叶级数的系数也可由 $F_0(\omega) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} T_1 F_n$ 得到:

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1} = \frac{1}{T_1} \left[\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt \right]_{\omega=n\omega_1} \longleftarrow F_0(\omega) : \text{单脉冲信号的傅里叶变换}$$

对式(1)两边取傅里叶变换

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathbf{F}[f(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathbf{F}[e^{jn\omega_1 t}] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1) \\ &= \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1} \delta(\omega - n\omega_1) \end{aligned}$$

例3-12: 求周期单位冲激序列的傅里叶变换。



$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$$

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \delta(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T_1}$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_1 t}$$

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1) = \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1) \quad (2)$$

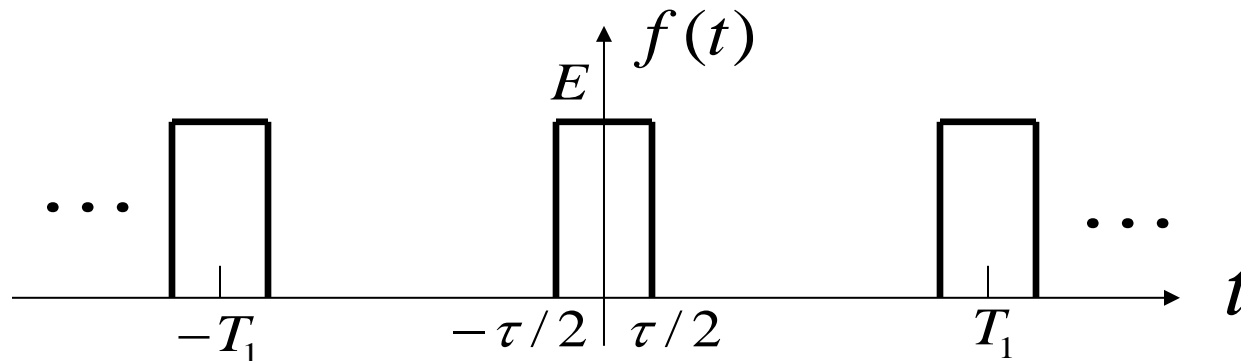
同学们的常用解法：用傅里叶变换定义积分式推导

$$\begin{aligned}\delta_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \right] e^{-j\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[\delta(t - nT_1)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jnT_1\omega}\end{aligned}$$

课后思考题：用几何级数求值证明上述傅里叶变换与（2）等效。

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jnT_1\omega} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N e^{-jnT_1\omega}$$

例3-13：求周期矩形脉冲信号的傅里叶级数及傅里叶变换。已知周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的幅度为 E ，脉宽为 τ ，周期为 T_1 ，角频率为 $\omega_1=2\pi/T_1$ 。



解：已知单矩形脉冲 $f_0(t)$ 的傅里叶变换 $F_0(\omega)$ 为

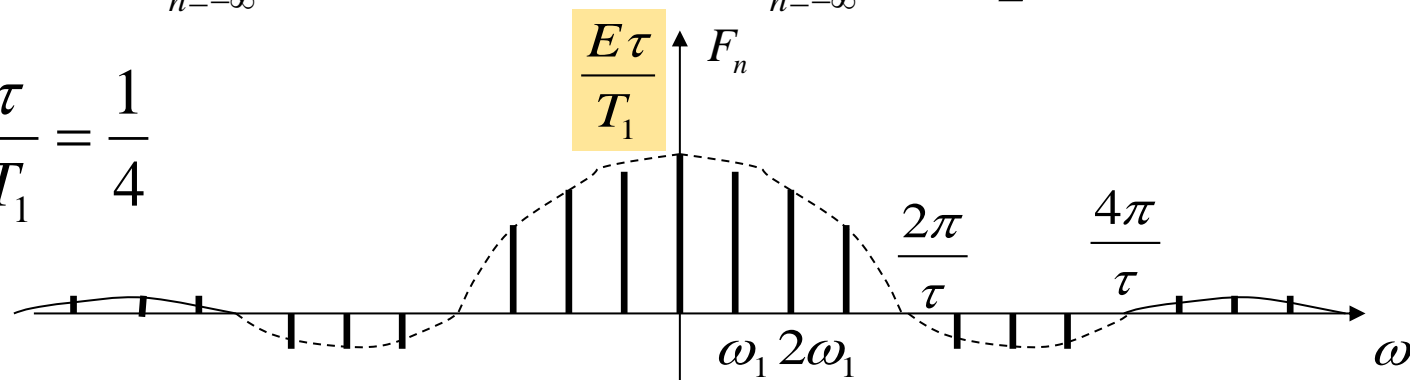
$$F_0(\omega) = E\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1} = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

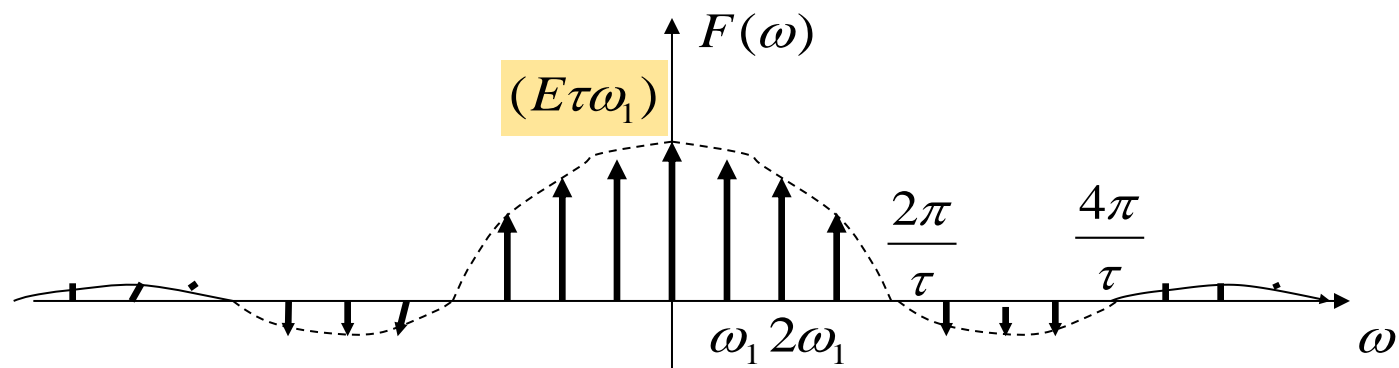
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} = \frac{E\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) e^{jn\omega_1 t}$$

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1) = E\tau\omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_1)$$

设: $\frac{\tau}{T_1} = \frac{1}{4}$



$\times 2\pi$

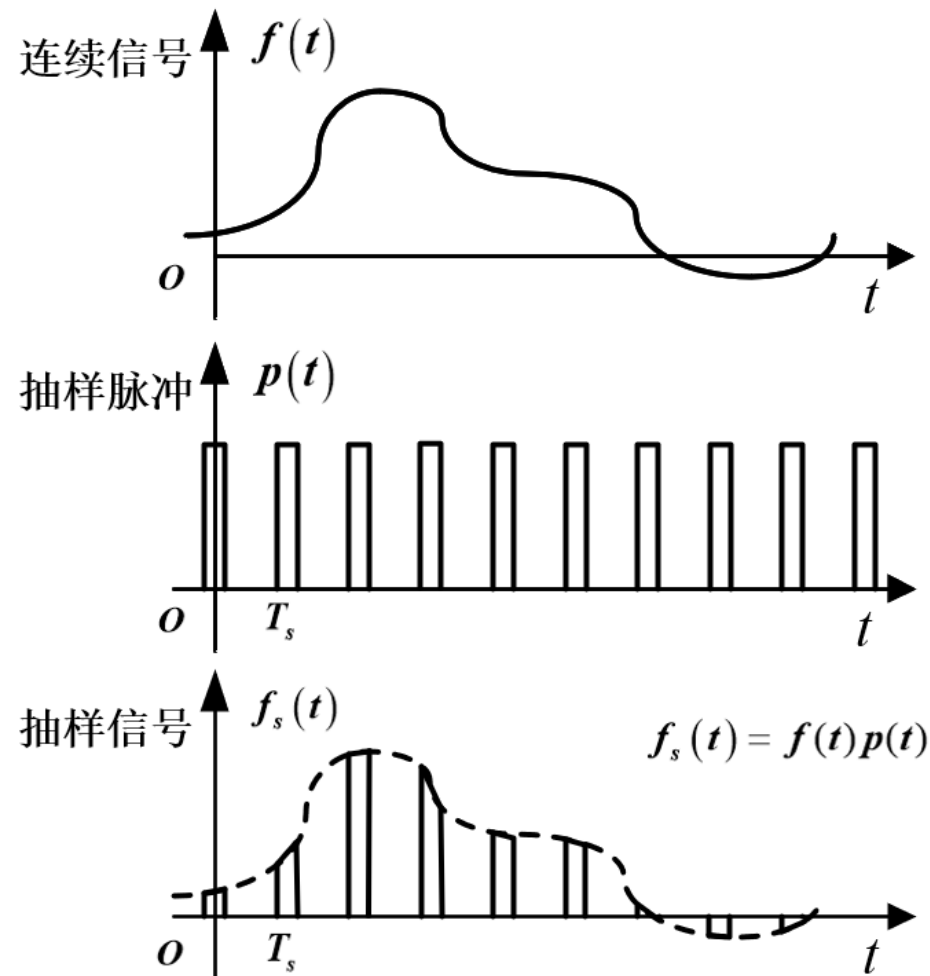
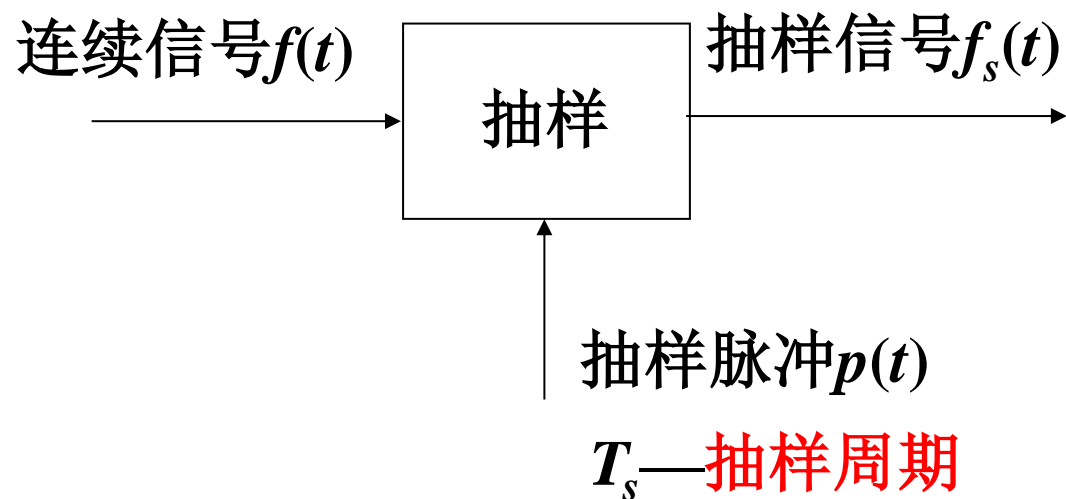


- 3.1 引言
- 3.2 周期信号的傅里叶级数分析
- 3.3 典型周期信号的傅里叶级数
- 3.4 傅里叶变换
- 3.5 典型非周期信号的傅里叶变换
- 3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换
- 3.7 傅里叶变换的基本性质
- 3.8 卷积定理
- 3.9 周期信号的傅里叶变换
- 3.10 抽样信号的傅里叶变换
- 3.11 抽样定理

3.10.1 信号的抽样

抽样--利用抽样脉冲序列从连续信号中“抽样”一系列的离散样值。

这种离散信号通常称为“**抽样信号**”。



3.10.2 抽样信号的傅里叶变换

令连续信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为

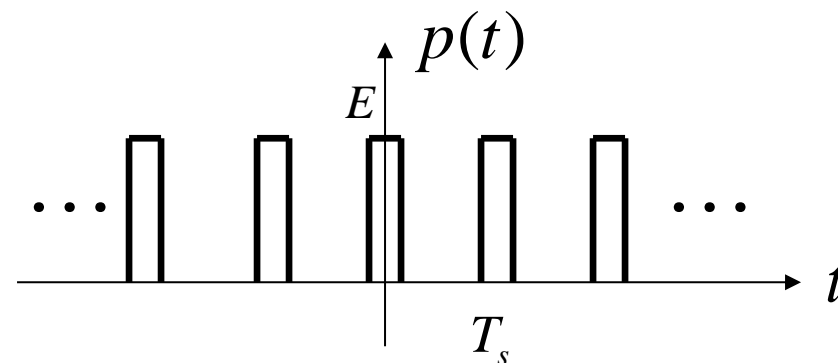
$$F(\omega)$$

抽样脉冲 $p(t)$ 的傅里叶变换为

$$P(\omega)$$

抽样后信号 $f_s(t)$ 的傅里叶变换为

$$F_s(\omega)$$



$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$\text{其中: } P_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt$$

$$f_s(t) = f(t)p(t)$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

频域卷积定理

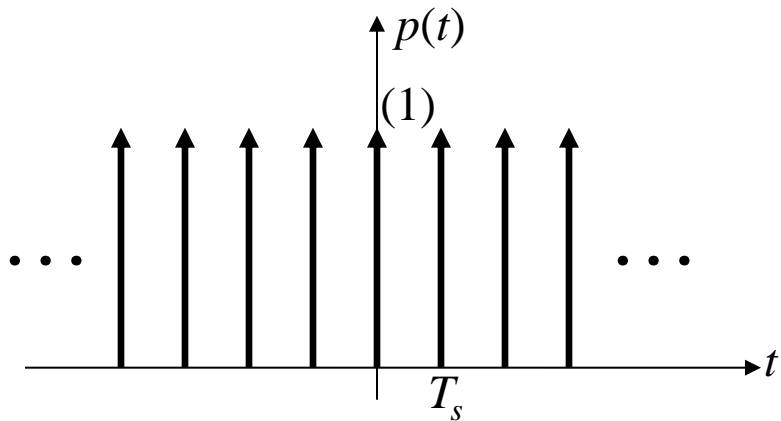
$$\text{所以 } F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \cdot F[(\omega - n\omega_s)]$$

$$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

抽样角频率 抽样频率

冲激抽样

若抽样脉冲 $p(t)$ 是冲激序列，此时称为“冲激抽样”或“理想抽样”。

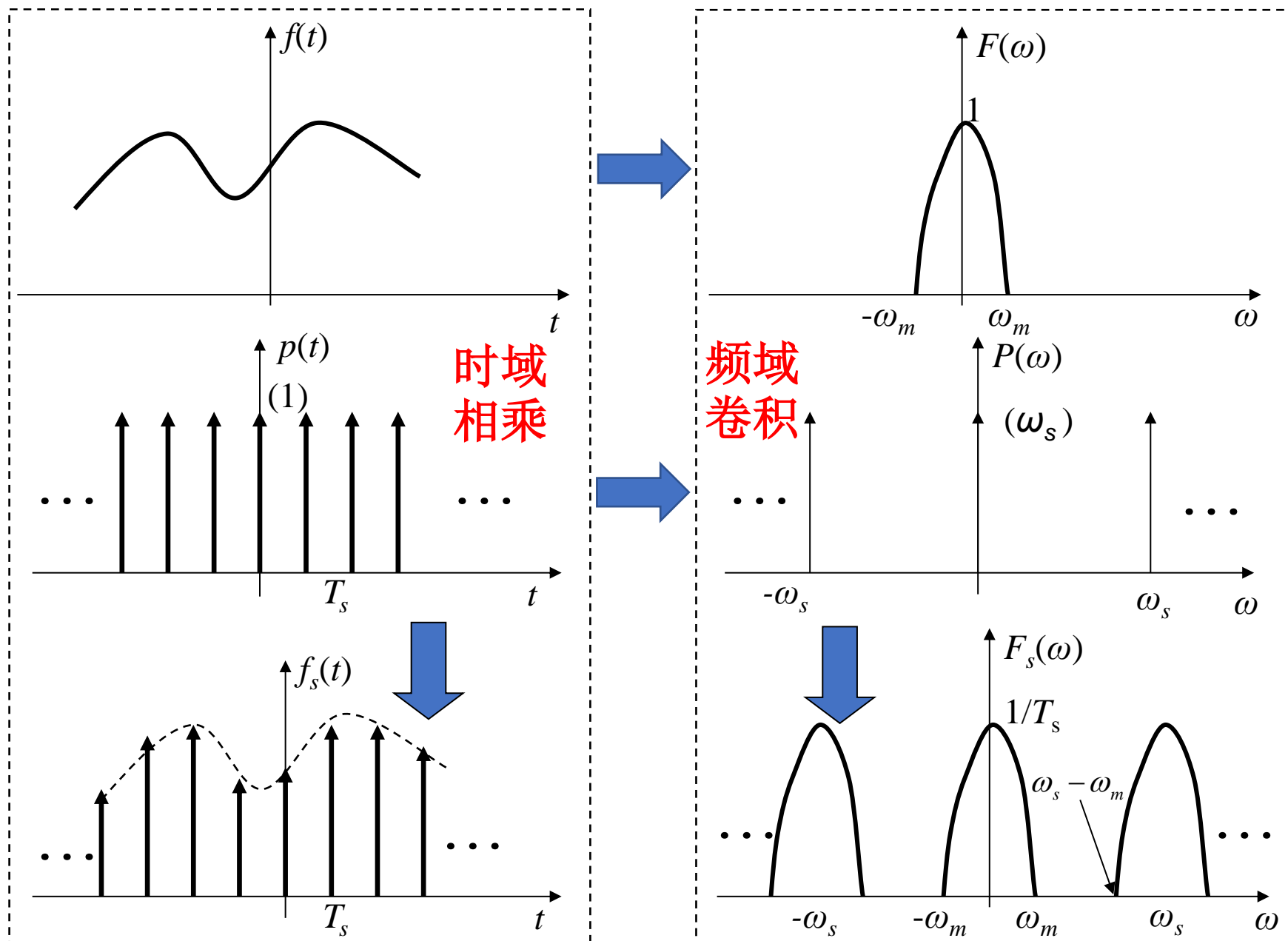


$$p(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \cdot F(\omega - n\omega_s)$$
$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$

在频域以 ω_s 为周期延拓

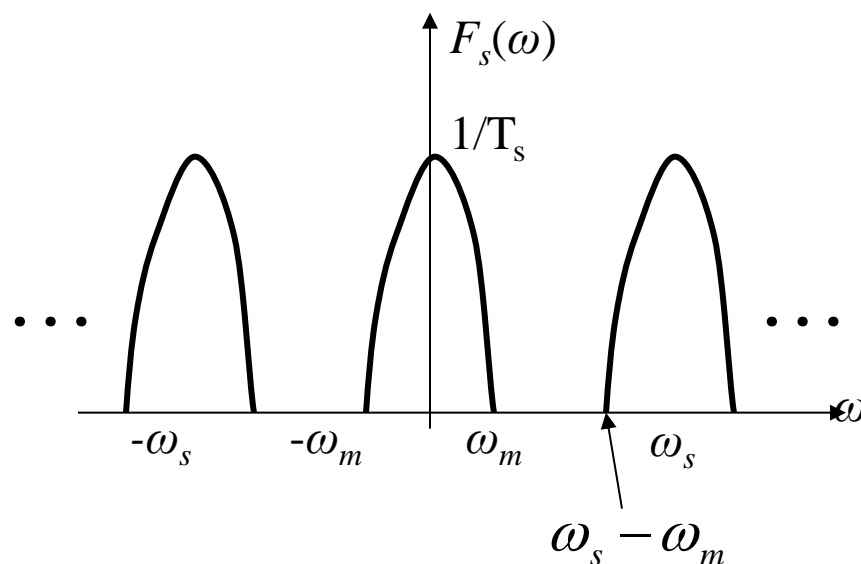
$$\text{其中: } P_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s}$$



- 3.1 引言
- 3.2 周期信号的傅里叶级数分析
- 3.3 典型周期信号的傅里叶级数
- 3.4 傅里叶变换
- 3.5 典型非周期信号的傅里叶变换
- 3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换
- 3.7 傅里叶变换的基本性质
- 3.8 卷积定理
- 3.9 周期信号的傅里叶变换
- 3.10 抽样信号的傅里叶变换
- 3.11 抽样定理

用抽样脉冲对连续信号进行抽样，**如何选取抽样频率和抽样周期？**

并且**如何从抽样信号中恢复原连续信号？**



从上图可知，只有满足 $\omega_s \geq 2\omega_m$, $F_s(\omega)$ 才不会产生频谱混叠，即 $f_s(t)$ 保留了原连续时间信号的全部信息。

这时只要将 $f_s(t)$ 施加于“**理想低通滤波器**”，就可恢复原信号 $f(t)$ 。

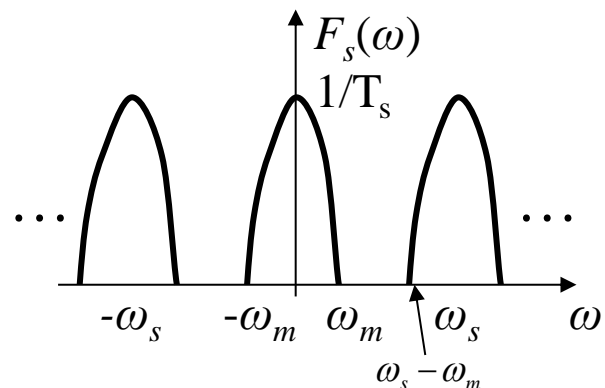
时域抽样定理： 一个频谱受限的信号 $f(t)$ ，如果频谱只占据 $-\omega_m \sim \omega_m$ 的范围，在抽样间隔不大于 $\frac{1}{2f_m}$ （其中 $\omega_m = 2\pi f_m$ ）或者抽样频率大于等于 $2f_m$ 时，信号 $f(t)$ 可以用等间隔的抽样值唯一的表示。

奈奎斯特抽样频率： 最低允许的抽样频率。

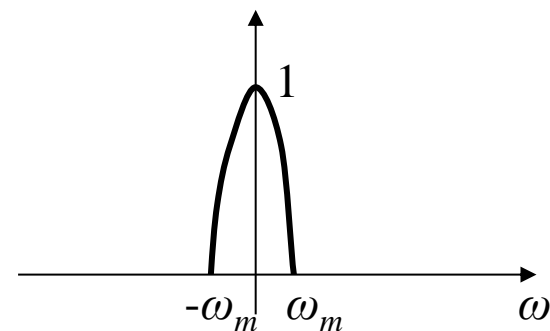
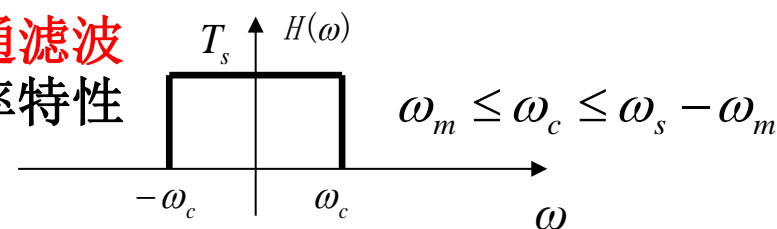
$$f_{s \min} = 2f_m$$

奈奎斯特抽样间隔： 最大允许的抽样间隔。

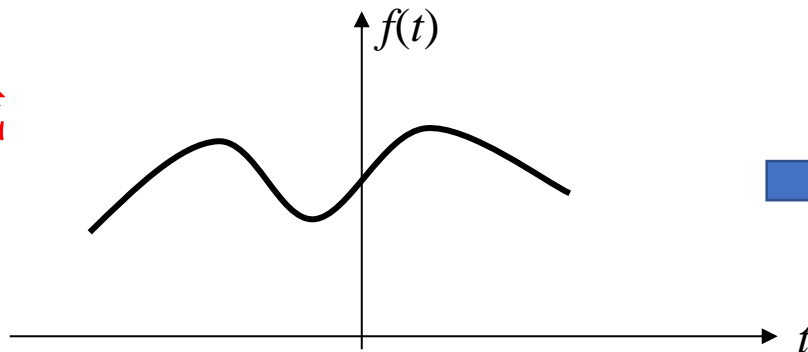
$$T_{s \max} = \frac{1}{f_{s \min}} = \frac{1}{2f_m}$$



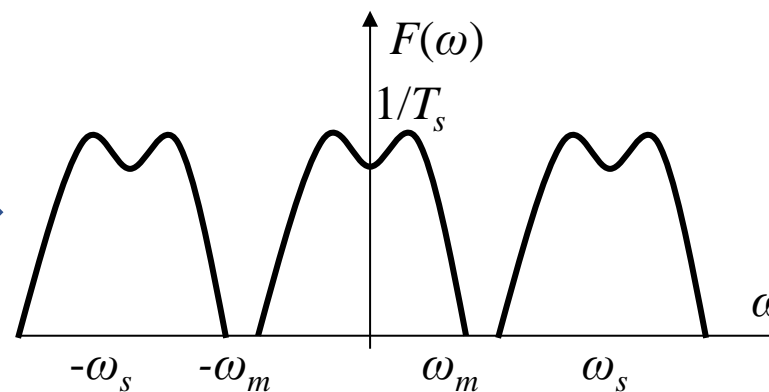
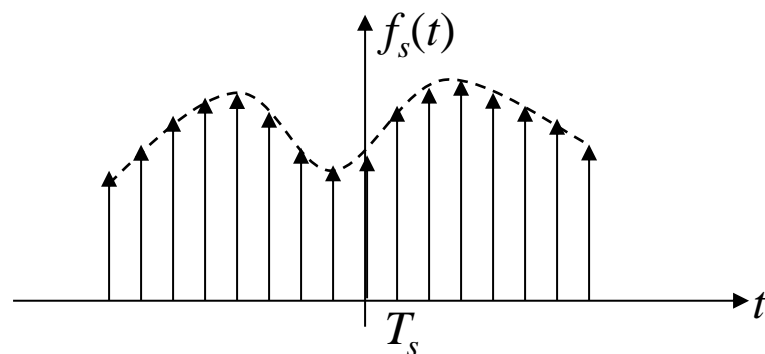
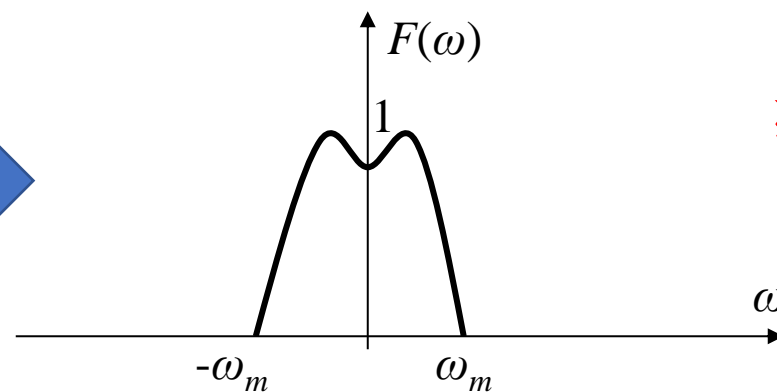
理想低通滤波器
的频率特性



时域

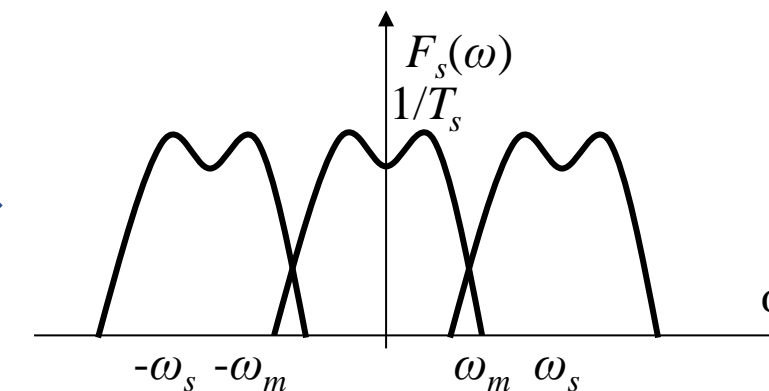
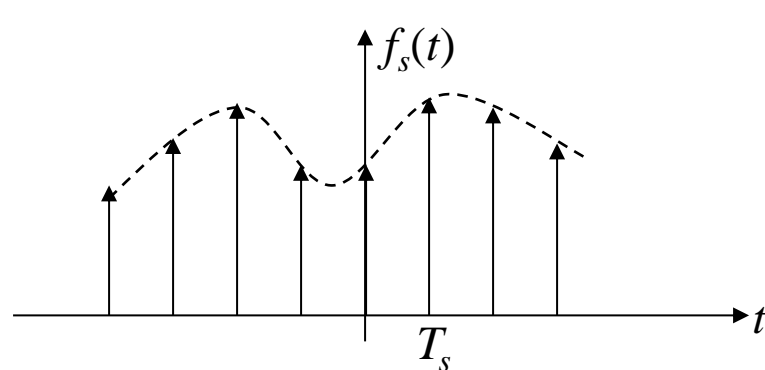


频域



$$\omega_s > 2\omega_m$$

过采样

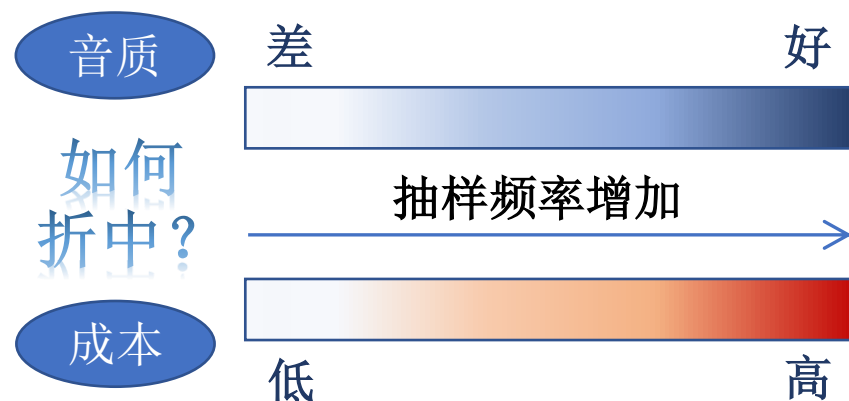


$$\omega_s < 2\omega_m$$

欠采样

例3-14：CD的抽样频率通常采用44 kHz，请解释原因。抽样频率是否越高越好？

- 多数人耳可以听到20 Hz--16 kHz的频率。测试可听到的频率范围可访问：
<https://www.bilibili.com/video/av40724545/>
- 对应的奈奎斯特抽样频率为32 kHz。
- 可以用抗混(pre-alias)滤波器对16 kHz以上的频率分量进行移除。
- 对高质量的音频信号，我们一般采用比奈奎斯特抽样频率更高的抽样频率，如44 kHz, 48 kHz, 96 kHz 或128 kHz。
- 抽样频率的选取需在音质和成本之间取得折中。



例3-15: 若 $f(t)$ 的最高角频率为 ω_m ，则对 $f(t/4)$ 抽样允许的最大时间间隔为多少？

解: 根据傅里叶变换的尺度变换特性可知信号 $f(t/4)$ 的时域扩展4倍，频域压缩4倍，最高角频率为 $\omega_m/4$ 。

再根据抽样定理，可得频谱不混叠的最小抽样频率为

$$\omega_s = 2(\omega_m/4) = \omega_m/2$$

最大抽样间隔为

$$T_{\max} = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{4\pi}{\omega_m}$$

工程中抽样频率的选取

若信号最高频率 ω_m 已知，一般取 $\omega_s \geq (5 \sim 10)\omega_m$

若信号的带宽 ω_B 已知，一般取 $\omega_s \geq (5 \sim 10)\omega_B$

若干扰信号的最高频率为 ω_f ，应满足 $\omega_s \geq 2\omega_f$

在工业控制系统中，抽样周期的经验数据如下：

流量信号： $T_s = 1 \sim 5$ 秒；压力信号： $T_s = 3 \sim 10$ 秒

液位信号： $T_s = 6 \sim 8$ 秒；温度信号： $T_s = 15 \sim 20$ 秒

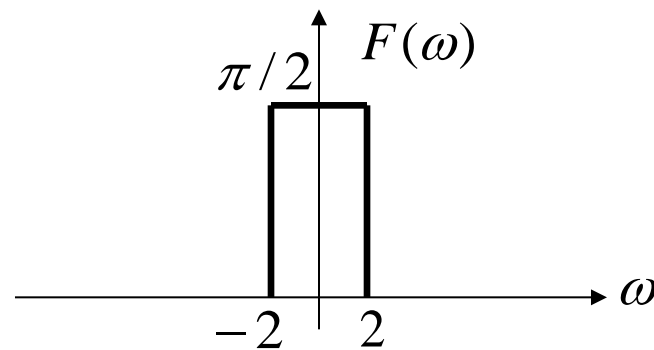
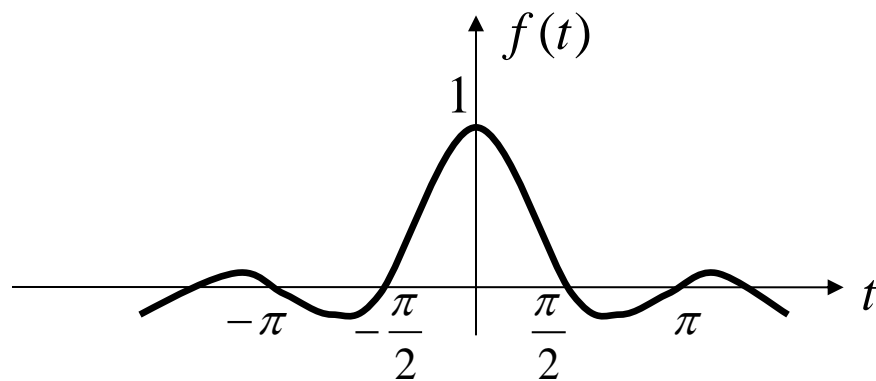
成分信号： $T_s = 15 \sim 20$ 秒

频域抽样定理：若信号 $f(t)$ 是时间受限信号，它集中在 $-t_m \sim +t_m$ 的时间范围内，若在频域中以不大于 $\frac{1}{2t_m}$ 的频率间隔对 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 进行抽样，则抽样后的频谱 $F_s(\omega)$ 可以唯一的表示原信号。

例3-16: 已知信号 $f(t) = \text{Sa}(2t)$, 用 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$ 对其进行抽样,

- (1) 确定奈奎斯特抽样频率;
- (2) 若取 $\omega_s = 6\omega_m$, 求抽样信号 $f_s(t) = f(t)\delta_T(t)$, 并画出波形图;
- (3) 求 $F_s(\omega) = \mathcal{F}[f_s(t)]$, 并画出频谱图;
- (4) 确定低通滤波器的截止频率 ω_c .

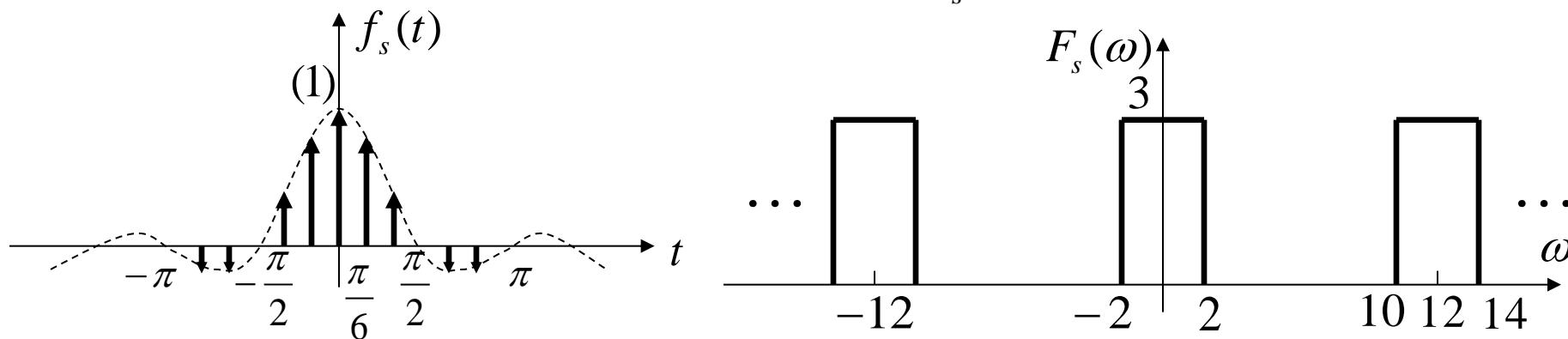
解: (1) $\because f(t) = \text{Sa}(2t) \quad \therefore F(\omega) = \frac{\pi}{2} [u(\omega + 2) - u(\omega - 2)]$



奈奎斯特抽样频率为:

$$f_{s \min} = 2f_m = 2 \times \frac{2}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \text{ Hz}$$

$$(2) \because \omega_s = 6\omega_m = 12 \text{ rad/s} \quad \therefore T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ s}$$

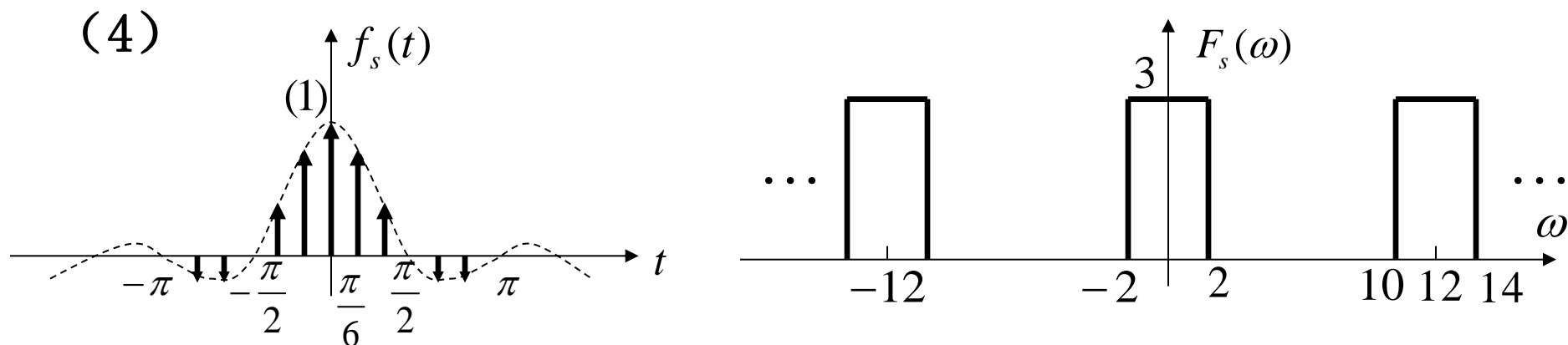


$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(2t)\big|_{t=nT_s} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{3}\right) \delta(t - nT_s)$$

$$(3) \quad F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - 12n)$$

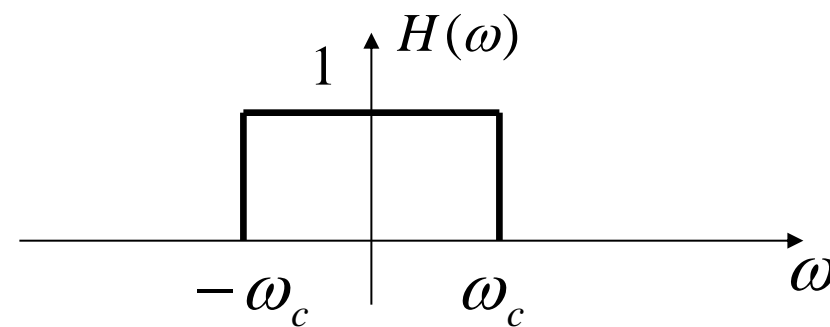
$$= 3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [u(\omega + 2 - 12n) - u(\omega - 2 - 12n)]$$



低通滤波器的截止频率 ω_c 应满足下式:

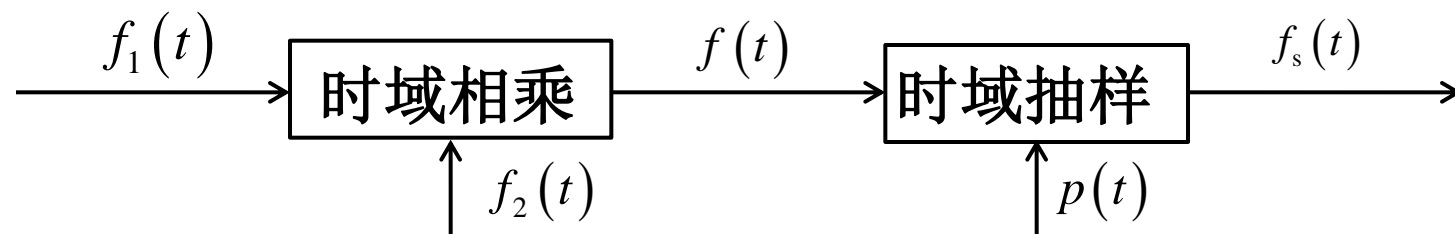
$$\omega_m \leq \omega_c \leq \omega_s - \omega_m$$

即 $2 \leq \omega_c \leq 10$



例3-17: 如图所示, $f_1(t) = Sa(1000\pi t)$, $f_2(t) = Sa(2000\pi t)$,

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \circ f(t) = f_1(t) f_2(t), f_s(t) = f(t) p(t)。$$



- (1) 为从 $f_s(t)$ 无失真恢复 $f(t)$, 求最大抽样间隔 T_{\max} 。
- (2) 当 $T = T_{\max}$ 时, 画出 $f_s(t)$ 的幅度谱 $|F_s(\omega)|$ 。

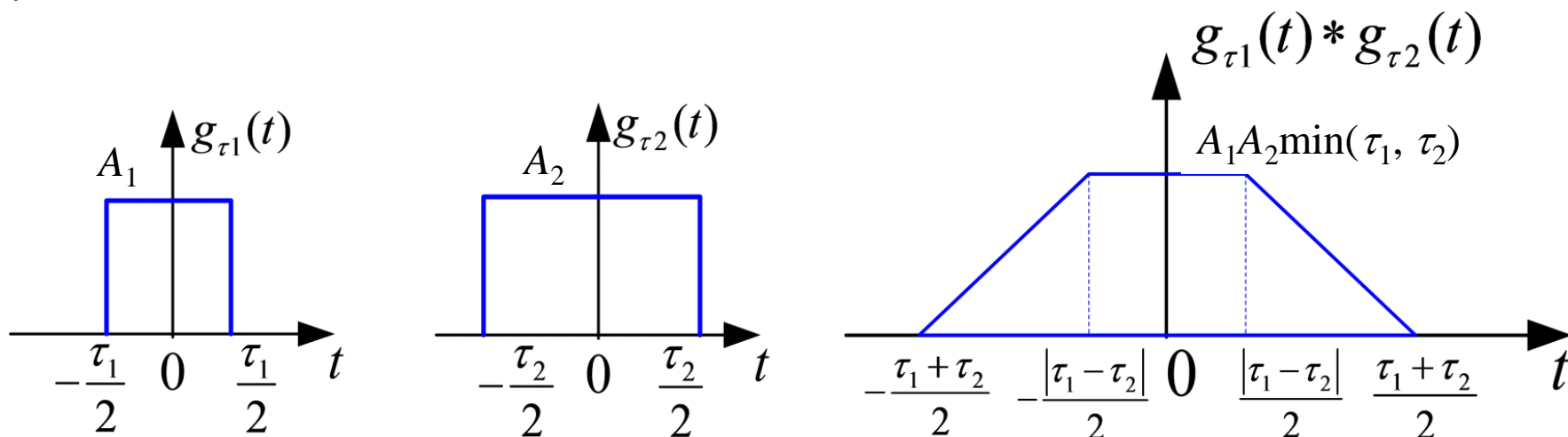
解: (1) 由于

$$f_1(t) = Sa(1000\pi t) \leftrightarrow 10^{-3} [u(\omega + 1000\pi) - u(\omega - 1000\pi)] = F_1(\omega)$$

$$f_2(t) = Sa(2000\pi t) \leftrightarrow \frac{1}{2} 10^{-3} [u(\omega + 2000\pi) - u(\omega - 2000\pi)] = F_2(\omega)$$

回顾：矩形脉冲卷积产生梯形脉冲

两个矩形脉冲 $g_{\tau_1}(t)$ 和 $g_{\tau_2}(t)$ ，脉冲宽度分别为 τ_1 和 τ_2 ，幅度分别为 A_1 和 A_2 ，求卷积 $g_{\tau_1}(t)*g_{\tau_2}(t)$ 。

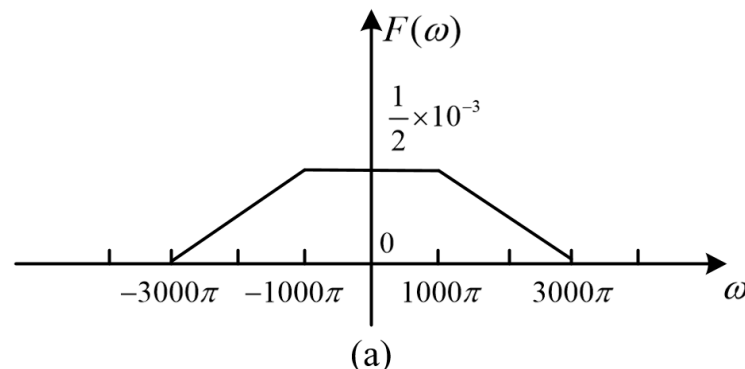


- 两个不等宽的矩形脉冲卷积的结果为梯形函数，梯形函数的高度为两个矩形高度和较窄矩形宽度三者的乘积，其上底为两个矩形宽度之差的绝对值，下底为两个矩形宽度之和。

$$\begin{aligned}
 \text{则 } F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_1(\omega) \\
 F(\omega) &= \frac{10^{-6}}{4\pi} [u(\omega + 1000\pi) - u(\omega - 1000\pi)] * [u(\omega + 2000\pi) - u(\omega - 2000\pi)] \\
 &= \frac{10^{-6}}{4\pi} \{u(\omega) * [\delta(\omega + 1000\pi) - \delta(\omega - 1000\pi)] * u(\omega) * [\delta(\omega + 2000\pi) - \delta(\omega - 2000\pi)]\} \\
 &= \frac{10^{-6}}{4\pi} [u(\omega) * u(\omega)] * [\delta(\omega + 1000\pi) - \delta(\omega - 1000\pi)] * [\delta(\omega + 2000\pi) - \delta(\omega - 2000\pi)] \\
 &= \frac{10^{-6}}{4\pi} \{\omega u(\omega) * [\delta(\omega + 3000\pi) - \delta(\omega - 1000\pi) - \delta(\omega + 1000\pi) + \delta(\omega - 3000\pi)]\} \\
 &= \frac{10^{-6}}{4\pi} [(\omega + 3000\pi)u(\omega + 3000\pi) - (\omega - 1000\pi)u(\omega - 1000\pi) - (\omega + 1000\pi)u(\omega + 1000\pi) + (\omega - 3000\pi)u(\omega - 3000\pi)] \\
 &= \frac{10^{-6}}{4\pi} \{(\omega + 3000\pi)[u(\omega + 3000\pi) - u(\omega + 1000\pi)] + 2000\pi[u(\omega + 1000\pi) - u(\omega - 1000\pi)] \\
 &\quad + (-\omega + 3000\pi)[u(\omega - 1000\pi) - u(\omega - 3000\pi)]\}
 \end{aligned}$$

从图可见 $\omega_m = 3000\pi$

$$T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{1}{3000} \text{ s}$$

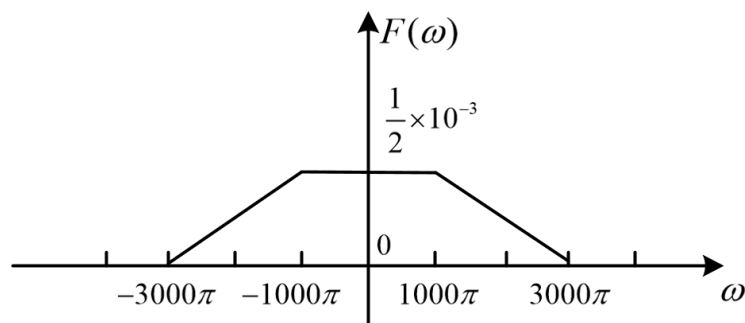


(2) 对于冲激抽样，抽样信号的频谱

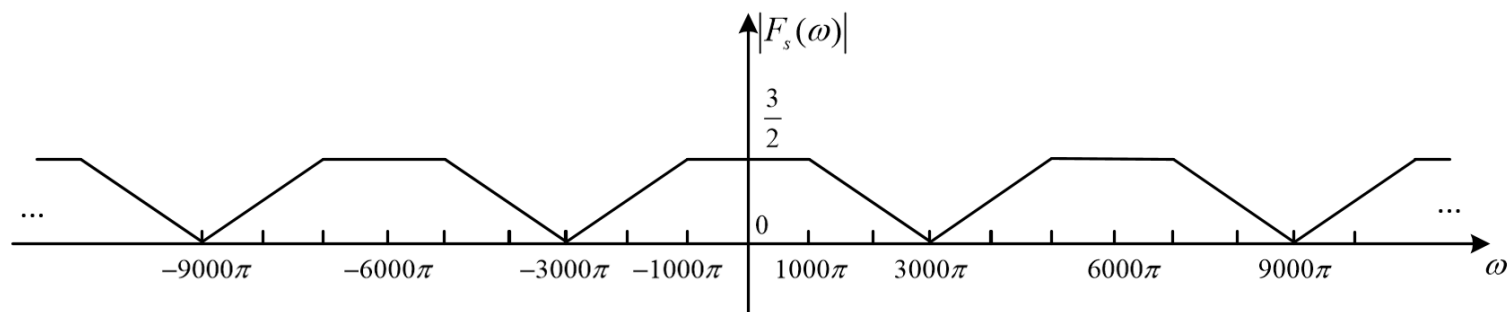
$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$

当 $T_s = T_{\max}$ 时

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_{\max}} = 2\omega_m = 6000\pi$$



(a)



(b)

作业

基础题（需提交）：3-31，3-32，3-34，3-37（a）（b），3-39。

加强题（选做，不提交）：3-37（d）。