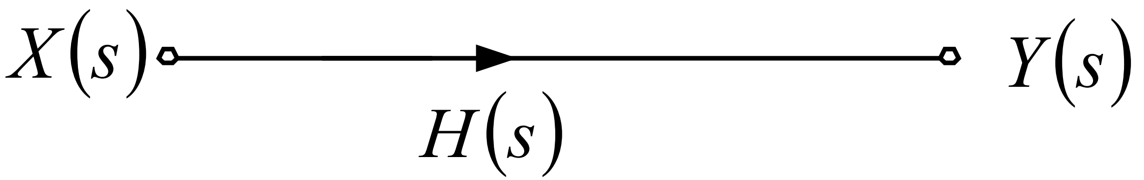
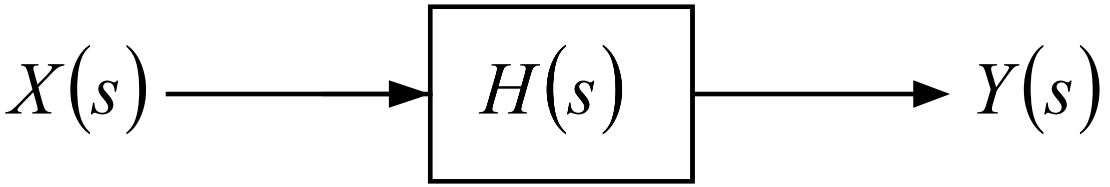
11.6 信号流图

2、系统的信号流图表示法

实际上是用一些点和支路来描述系统：



流图



方框图

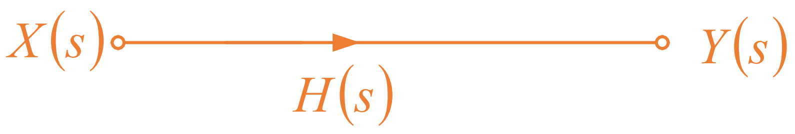
$X(s)$ 、$Y(s)$ 称为结点 。

线段表示信号传输的路径，称为支路 。

信号的传输方向用箭头表示，转移函数标在箭头附近，相当于乘法器 。

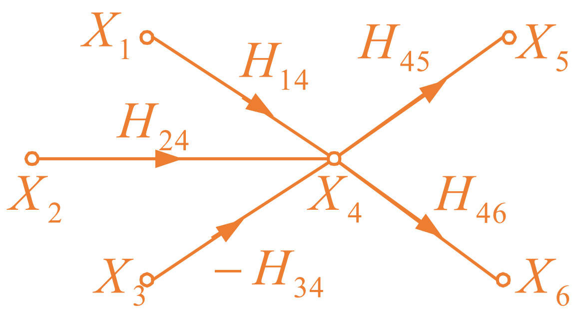
4、信号流图的性质

1）支路表示了一个信号与另一信号的函数关系，信号只能沿着支路上的箭头方向通过。



$$Y(s) = H(s)X(s)$$

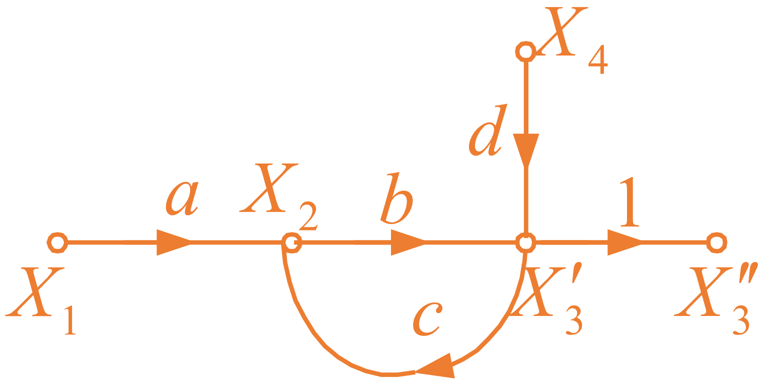
2）结点可以把所有输入支路的信号叠加，并把总和信号传送到所有输出支路。



例如结点 X_4

$$X_4 = H_{14}X_1 + H_{24}X_2 - H_{34}X_3$$

3）具有输入和输出支路的混合结点，通过增加一个具有单传输的支路，可以把它变成输出结点来处理。



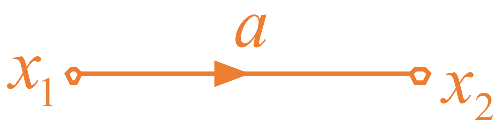
X_3'和X_3'' 实际上是一个结点。分成两个结点以后，X_3' 是既有输入又有输出的混合结点；X_3'' 是只有输入的输出结点 。

4）流图转置以后，其转移函数保持不变 。所谓转置就是把流图中各支路的信号传输方向调转，同时把输入输出结点对换 。

5）给定系统，信号流图形式并不是惟一的 。这是由于同一系统的方程可以表示成不同形式，因而可以画出不同的流图 。

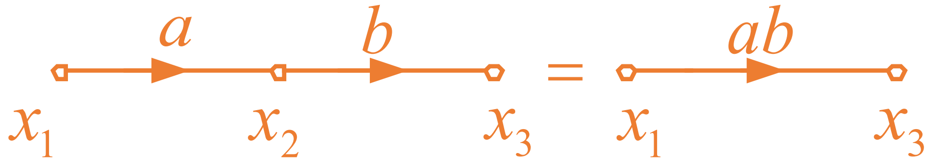
5. 信号流图的代数运算

1）有一个输入支路的结点值等于输入信号乘以支路增益 。

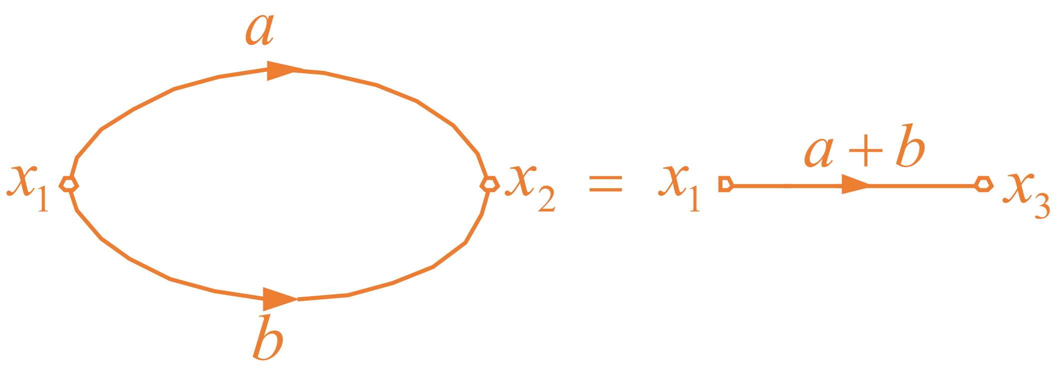


$x_2 = ax_1$

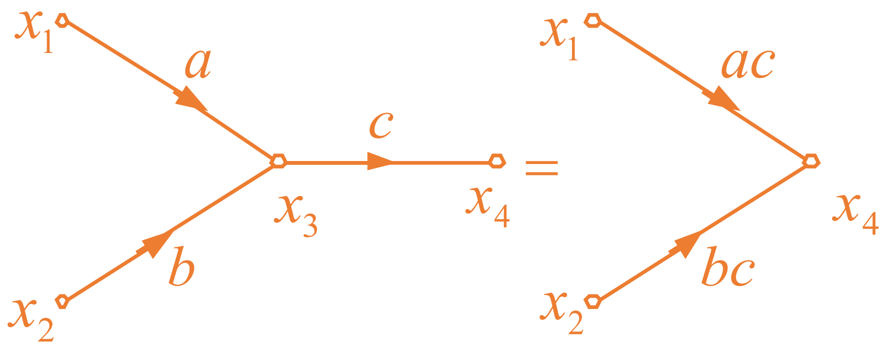
2）串联支路的合并：总增益等于各支路增益的乘积 。



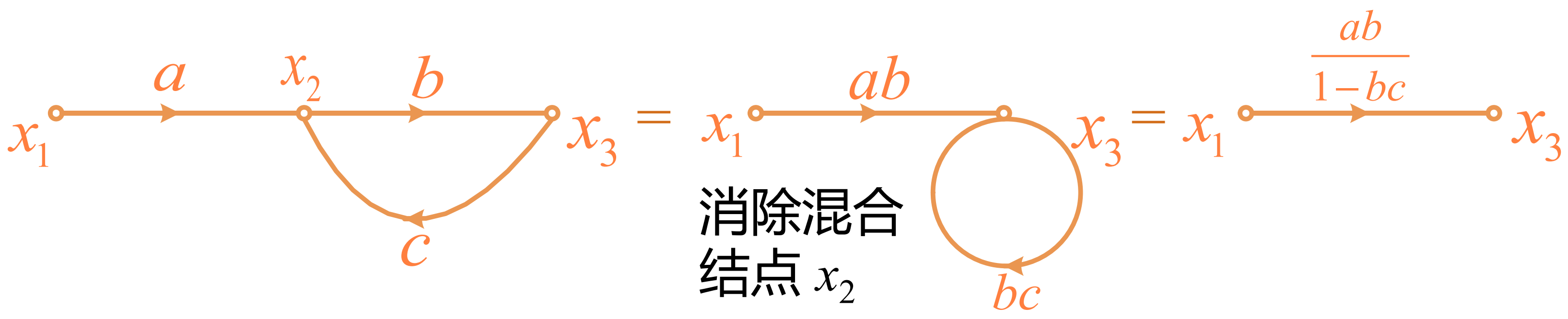
3）并联支路的合并：并联相加



4）混合结点的消除



5）环路的消除



$$\text{因为}\ \begin{cases} x_2 = ax_1 + cx_3 \\ x_3 = bx_2 \end{cases} \Rightarrow x_3 = abx_1 + bcx_3 \ \Rightarrow \ x_3 = \frac{ab}{1-bc}x_1$$

总结： 可以通过如下步骤简化信号流图，从而求得系统函数 。

① 串联支路合并，减少结点；② 并联支路合并，减少支路；③ 消除环路 。

6）信号流图的梅森增益公式

$$H=\frac{1}{\Delta}\sum_{k}g_k\Delta_k$$

式中：Δ——流图的特征行列式。

$$\Delta=1-(\text{所有不同环路增益之和})+(\text{每两个互不接触环路增益乘积之和})-(\text{每三个互不接触环路增益乘积之和})+\ldots\ldots$$

$$=1-\sum_{a}L_a+\sum_{b,c}L_bL_c-\sum_{d,e,f}L_dL_eL_f+\ldots\ldots$$

k——表示由源点到阱点之间第 k 条前向通路的标号 。

g_k——表示由源点到阱点之间的第 k 条前向通路的增益 。

Δ_k——称为对于第 k 条前向通路特征行列式的余因子。它是除去与 k 条前向通路相接触的环路外，余下的特征行列式。(在 Δ 式中只留下与该通路不接触者，如果该通路与各环路都接触则 $\Delta_k=1$ 。)

作 业

教材习题:

基础题：11-28，11-30

加强题：11-32

第十二章 系统的状态变量分析

12.1 引言

前面几章讨论的信号与系统的各种分析方法属于输入-输出描述法(**input-output description**)，又称端口分析法或外部法。它强调用系统的输入、输出变量之间的关系来描述系统的特性。

一旦系统的数学模型（n 阶微分或差分方程）建立以后，就不再关心系统内部的情况，而只考虑系统的时间特性和频率特性（系统函数）对输出物理量的影响。经典的线性系统理论不能全面揭示系统内部特性，也不易有效处理多输入-多输出系统。这种分析法适用于较为简单的系统（如单输入-单输出系统）。

要分析非线性、时变、多输入-多输出等复杂系统，可采用状态变量描述法（**state variable description**），或内部法。它用状态变量描述系统内部变量的特性，并通过状态变量将系统的输入和输出变量联系起来，用于描述系统的外部特性。

- **状态** **(state)**：系统在初始时刻 t_0 的状态是最少数目的一组变量（状态变量）。只要知道 $t = t_0$ 时刻的这组变量和 $t \geq t_0$ 时的输入，就能完全确定系统在任何时间 $t \geq t_0$ 的状态和输出。例如，t_0 时刻的状态通常指电容元件上电压 $u_C(t_0)$ 和电感元件上电流 $i_L(t_0)$ 。n 阶系统有 n 个初始状态 。
- **状态变量** **(state variable)**：用来描述系统状态的数目最少的一组变量。状态变量实质上反映了系统内部储能状态的变化。
- **状态矢量** **(state vector)**：能够完全描述一个系统行为的 k 个状态变量，可以看成一个矢量的各个分量的坐标。
- **状态空间** **(state space)**：状态矢量所在的空间。状态矢量所包含的状态变量的个数就是状态空间的维数，也称系统的复杂度阶数（order of complexity），简称系统的阶数。
- **状态轨迹** **(state orbit)**：在状态空间中，系统在任意时刻的状态都可以用状态空间中的一点（端点）来表示。状态矢量的端点随时间变化而描述的路径，称为状态轨迹。

状态变量分析法的主要优点：

(1) 便于研究系统内部的物理量的变化规律，这些物理量可以用状态矢量的一个分量表示出来 。

(2) 适用于线性时不变的单输入-单输出系统，也适用于非线性、时变、多输入-多输出系统特性的描述 。

(3) 系统的状态变量分析法与系统的复杂程度没有关系，复杂系统和简单系统的数学模型相似，都表示为一些状态变量的线性组合 。

(4) 状态方程都是一阶微分或差分方程，便于计算机分析计算 。

(5) 状态方程的主要参数鲜明的表征了系统的关键性能，可用于分析系统的可控制性、可观测性、稳定性 。

12.2 连续时间系统状态方程的建立

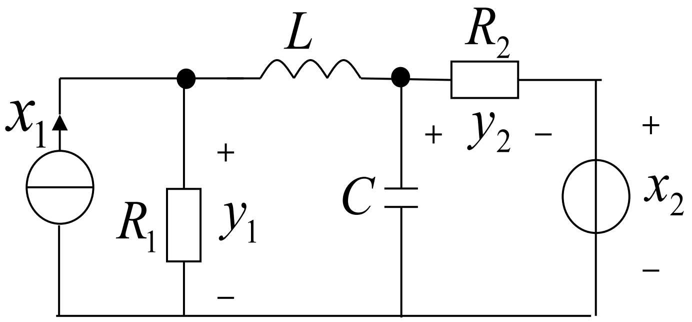
12.2.1 由电路直接列写状态方程

（1）选择状态变量。通常选择电路中独立的电感电流与独立的电容电压作为状态变量 。

（2）列方程。列含有独立电感支路的回路电压方程，含独立电容支路的节点电流方程 。

（3）整理方程。将所获方程整理成标准形式 。

例12-1：电路如图中所示，以两电阻上的电压为输出，试列出电路的状态方程与输出方程。



解：

（1）选择电感电流与电容电压为状态变量

$$\lambda_1(t) = i_L(t)$$
$$\lambda_2(t) = v_C(t)$$

（2）列状态方程。列包含电感支路的回路电压方程，

$$L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = [x_1(t) - i_L(t)]R_1 - v_C(t)$$

列包含电容支路的节点电流方程，

$$C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} = [x_2(t) - v_C(t)]/R_2 + i_L(t)$$

（3）整理方程。

$$L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=[x_1(t)-i_L(t)]R_1-v_C(t)=-R_1 i_L(t)-v_C(t)+R_1 x_1(t)$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{R_1}{L}i_L(t)-\frac{1}{L}v_c(t)+\frac{R_1}{L}x_1(t)$$

$$C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}=[x_2(t)-v_C(t)]/R_2+i_L(t)=i_L(t)-\frac{1}{R_2}v_C(t)+\frac{1}{R_2}x_2(t)$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{C}i_L(t)-\frac{1}{R_2 C}v_C(t)+\frac{1}{R_2 C}x_2(t)$$

写成标准形式：

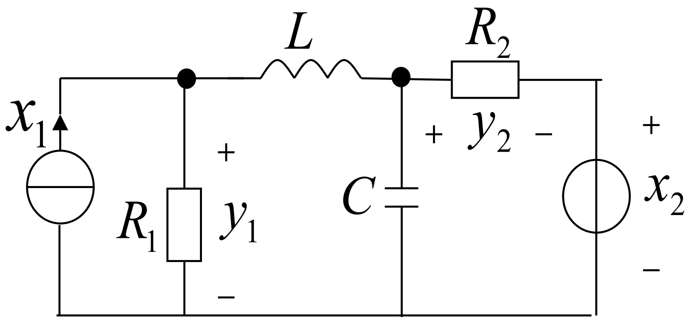
$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{R_1}{L}\lambda_1(t) - \frac{1}{L}\lambda_2(t) + \frac{R_1}{L}x_1(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}\lambda_1(t) - \frac{1}{R_2 C}\lambda_2(t) + \frac{1}{R_2 C}x_2(t)$$

写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{R_1}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{R_2 C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{R_1}{L} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{R_2 C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

（4）列写输出方程



$$y_1(t) = [x_1(t) - i_L(t)]R_1$$

$$y_2(t) = v_c(t) - x_2(t)$$

于是

$$y_1(t) = -R_1 i_L(t) + R_1 x_1(t) = -R_1 \lambda_1(t) + R_1 x_1(t)$$

$$y_2(t) = \lambda_2(t) - x_2(t)$$

写成矩阵式

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

12.2.2 由输入-输出描述列写状态方程

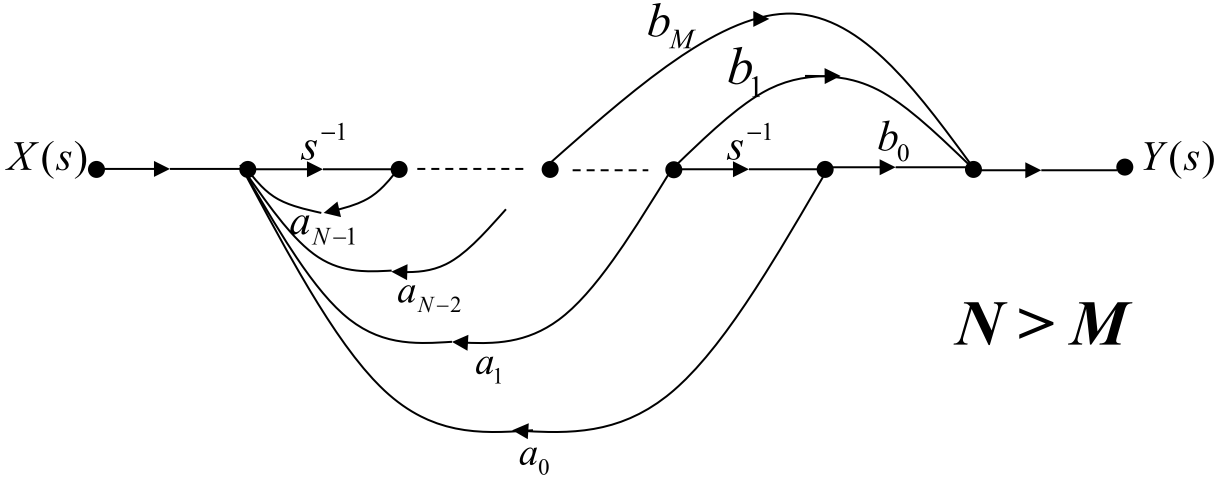
1、相变量法

此时系统的微分方程与系统函数形式如下：

$$\frac{\mathrm{d}^N y(t)}{\mathrm{d}t^N} - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \frac{\mathrm{d}^k y(t)}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{r=0}^{M} b_r \frac{\mathrm{d}^r x(t)}{\mathrm{d}t^r}$$

$$H(s) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r s^r}{s^N - \sum_{k=0}^{N-1} a_k s^k} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r s^{r-N}}{1 - \sum_{k=0}^{N-1} a_k s^{k-N}}$$

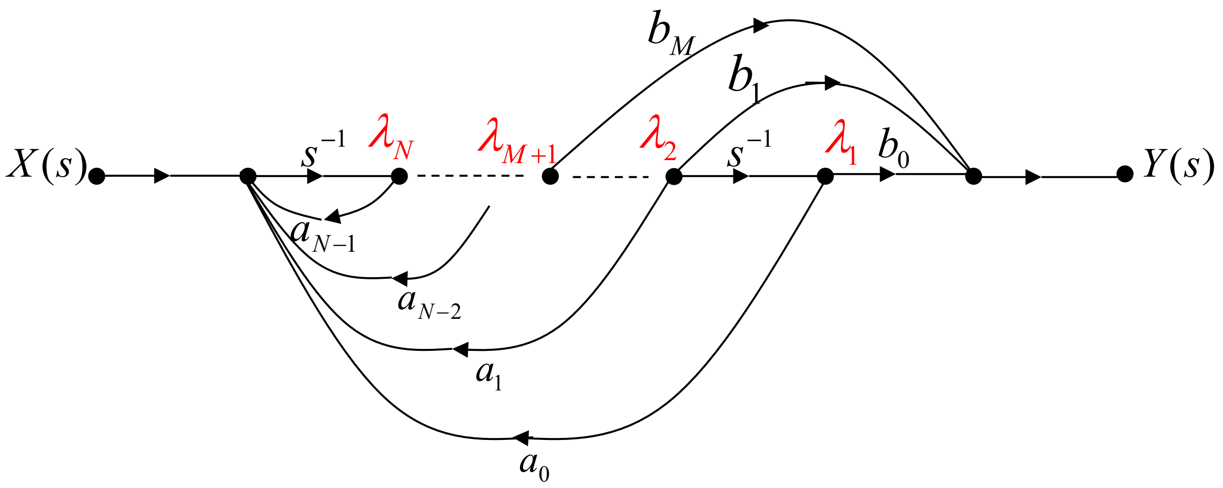
系统的信号流图形式：



$N > M$

（1）在信号流图中，由输出至输入方向，选择积分器的输出为状态变量；

（2）列写状态方程；



$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda_2(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda_3(t)$$

$$\cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_{k-1}(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda_k(t)$$

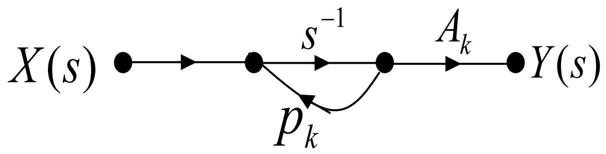
$$\cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_N(t)}{\mathrm{d}t}=a_0\lambda_1(t)+a_1\lambda_2(t)+\ldots+a_{N-1}\lambda_N(t)+x(t)$$

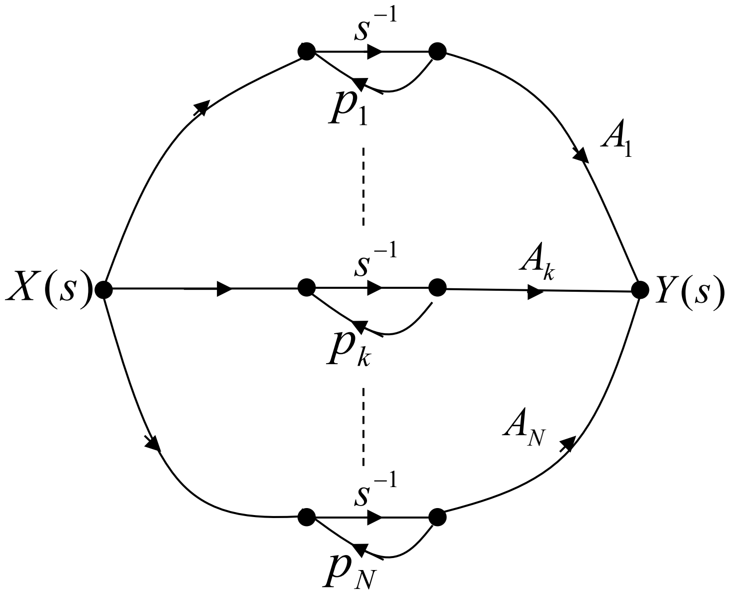
2、对角线法

将系统函数部分分式，表示成一阶分式之和 $H(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}=\sum_{k=1}^{N}\dfrac{A_k}{s-p_k}$

每一个部分分式对应着一个一阶系统。一阶系统的信号流图如下 。

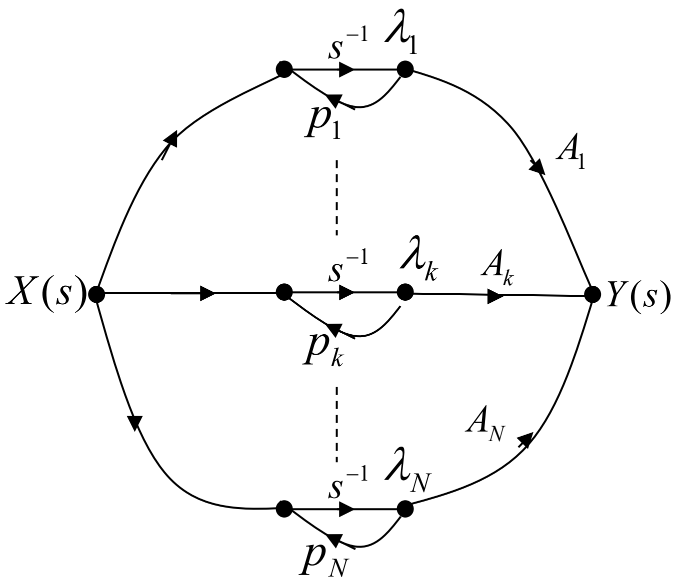


系统的信号流图就是这些一阶系统的并联 。



取各积分器的输出为状态变量，于是可列状态方程

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t}=p_1\lambda_1(t)+x(t)$$
$$\cdots$$
$$\frac{\mathrm{d}\lambda_N(t)}{\mathrm{d}t}=p_N\lambda_N(t)+x(t)$$



写成矩阵式

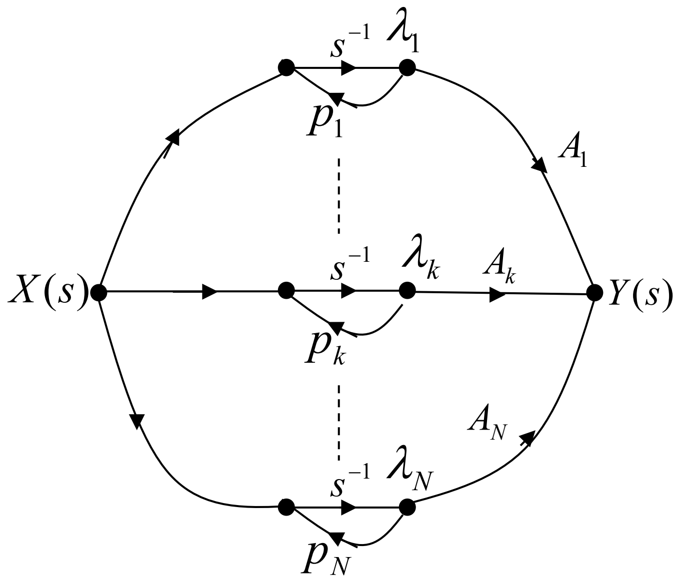
$$\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t}\\ \cdots\\ \frac{\mathrm{d}\lambda_{N-1}(t)}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}\lambda_N(t)}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1 & & & \\ & \cdots & & 0\\ & & p_k & \\ & 0 & & \cdots\\ & & & & p_N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ \cdots\\ \lambda_{N-1}(t)\\ \lambda_N(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\ \cdots\\1\\1\end{pmatrix}[x(t)]$$

A 矩阵为对角阵形式的状态方程在控制理论研究中有重要意义。

系统的输出方程为

$$y(t) = A_1\lambda_1(t) + \ldots + A_k\lambda_k(t) + \ldots + A_N\lambda_N(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_k & \ldots & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \ldots \\ \lambda_k(t) \\ \ldots \\ \lambda_N(t) \end{pmatrix}$$



例12-4：已知例12-2中的系统函数，试用对角线法列出系统的状态方程与输出方程。

$$H(s)=\frac{6s^2+22s+18}{s^3+6s^2+11s+6}$$

解：将系统函数部分分式 $H(s)=\dfrac{6s^2+22s+18}{s^3+6s^2+11s+6}=\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}+\dfrac{3}{s+3}$

于是，方程中的系数矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{D}=0$

状态方程: $\boldsymbol{\lambda}'(t)=\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{B}\mathbf{x}(t)$

输出方程: $\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{D}\mathbf{x}(t)$

12.3 连续时间系统状态方程的求解

12.3.1 矢量的微积分与拉氏变换

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ \cdots\\ \lambda_N(t)\end{pmatrix}\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\lambda}(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t}\\ \cdots\\ \dfrac{\mathrm{d}\lambda_N(t)}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}\qquad \int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{\lambda}(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{pmatrix}\int_{-\infty}^{t}\lambda_1(\tau)\mathrm{d}\tau\\ \int_{-\infty}^{t}\lambda_2(\tau)\mathrm{d}\tau\\ \cdots\\ \int_{-\infty}^{t}\lambda_N(\tau)\mathrm{d}\tau\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(s)=LT\{\boldsymbol{\lambda}(t)\}=\int_{0^-}^{\infty}\boldsymbol{\lambda}(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}\int_{0^-}^{\infty}\lambda_1(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\ \int_{0^-}^{\infty}\lambda_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\ \cdots\\ \int_{0^-}^{\infty}\lambda_N(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Lambda_1(s)\\ \Lambda_2(s)\\ \cdots\\ \Lambda_N(s)\end{pmatrix}$$

$$LT\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\lambda}(t)\right\}=s\boldsymbol{\Lambda}(s)-\boldsymbol{\lambda}(0^-)=s\begin{pmatrix}\Lambda_1(s)\\ \Lambda_2(s)\\ \cdots\\ \Lambda_N(s)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda_1(0^-)\\ \lambda_2(0^-)\\ \cdots\\ \lambda_N(0^-)\end{pmatrix}$$

12.3.2 状态方程的拉氏变换解法

1、状态方程与输出方程的解

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t)$$

方程两边同求拉氏变换

$$s\boldsymbol{\Lambda}(s) - \boldsymbol{\lambda}(0^-) = \mathbf{A}\boldsymbol{\Lambda}(s) + \mathbf{B}\mathbf{X}(s) \qquad \mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}(s) + \mathbf{D}\mathbf{X}(s)$$

其中状态变量的拉氏变换

$$s\boldsymbol{\Lambda}(s) - \mathbf{A}\boldsymbol{\Lambda}(s) = \boldsymbol{\lambda}(0^-) + \mathbf{B}\mathbf{X}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\boldsymbol{\Lambda}(s) = \boldsymbol{\lambda}(0^-) + \mathbf{B}\mathbf{X}(s)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Lambda}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(s)}$$

其中输出变量的拉氏变换

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}(s)+\mathbf{D}\mathbf{X}(s)\quad=\mathbf{C}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(s)]+\mathbf{D}\mathbf{X}(s)$$

$$\boxed{\mathbf{Y}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{X}(s)}$$

于是

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{\Lambda}(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(s)\right\}$$

$$=\boxed{\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)\right\}}_{\text{零输入分量}}+\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\right\}*\mathbf{x}(t)}_{\text{零状态分量}}}$$

$$\mathbf{y}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{Y}(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{X}(s)\right\}$$

$$=\boxed{\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)\right\}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}\right\}*\mathbf{x}(t)}_{\text{零状态响应}}}$$

$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ ---系统的特征矩阵　　$|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|$ ---系统的特征行列式

例12-5：已知系统状态方程的系数矩阵、起始条件和输入，试求状态变量 。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{\lambda}(0^-)=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\qquad x(t)=u(t)$$

解：先求特征矩阵

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\left[\begin{pmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix}s-1 & 0\\ -1 & s+3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}s+3 & 0\\ 1 & s-1\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}s-1 & 0\\ -1 & s+3\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\begin{pmatrix}s+3 & 0\\ 1 & s-1\end{pmatrix}}{(s-1)(s+3)}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s-1} & 0\\ \dfrac{1}{(s-1)(s+3)} & \dfrac{1}{s+3}\end{pmatrix}$$

状态变量的零输入分量

$$\boldsymbol{\Lambda}_{zi}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^-)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s-1} & 0\\ \dfrac{1}{(s-1)(s+3)} & \dfrac{1}{s+3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s-1}\\ \dfrac{2s-1}{(s-1)(s+3)}\end{pmatrix}$$

状态变量的零状态分量

$$\boldsymbol{\Lambda}_{zs}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s-1} & 0\\ \dfrac{1}{(s-1)(s+3)} & \dfrac{1}{s+3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{s}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s-1}\\ \dfrac{1}{(s-1)(s+3)}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{s}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s(s-1)}\\ \dfrac{1}{s(s-1)(s+3)}\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{\Lambda}(s)=\boldsymbol{\Lambda}_{zi}(s)+\boldsymbol{\Lambda}_{zs}(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s-1}\\ \dfrac{2s-1}{(s-1)(s+3)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s(s-1)}\\ \dfrac{1}{s(s-1)(s+3)}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s-1}\\ \dfrac{\frac{1}{4}}{s-1}+\dfrac{\frac{7}{4}}{s+3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{s}+\dfrac{1}{s-1}\\ \dfrac{-1}{s}+\dfrac{\frac{1}{4}}{s-1}+\dfrac{\frac{7}{4}}{s+3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-1}{s}+\dfrac{2}{s-1}\\ \dfrac{-\frac{1}{3}}{s}+\dfrac{\frac{2}{4}}{s-1}+\dfrac{\frac{11}{6}}{s+3}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\begin{pmatrix}-1+2\mathrm{e}^{t}\\ -\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t}+\dfrac{11}{6}\mathrm{e}^{-3t}\end{pmatrix}u(t)$$

2、状态转移矩阵（State Transition Matrix）

由前面的分析知道，系统的状态变量

$$\mathbf{\Lambda}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}[\boldsymbol{\lambda}(0^{-})+\mathbf{BX}(s)]$$

$$\therefore \boldsymbol{\lambda}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{\Lambda}(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}*\mathcal{L}^{-1}\{\boldsymbol{\lambda}(0^{-})+\mathbf{BX}(s)\}$$

状态转移（过渡）矩阵：

$$\boxed{\mathbf{\Phi}(t)=\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\}}$$

等于系统特征矩阵的拉氏逆变换。它把系统的起始状态和激励的作用，转换成系统在 $t>0$ 后的任意时刻的状态。

例12-6：已知系统的微分方程，试列出其状态方程和输出方程，并求其状态转移矩阵。

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2y(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+3x(t)$$

解：根据相变量法，可列出状态方程。方程中的系数矩阵为

$$\boldsymbol{\lambda}'(t)=\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{B}\mathbf{x}(t)\qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\therefore (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{pmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{vmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{pmatrix}}{s^2+3s+2}=\begin{pmatrix}\dfrac{s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2}\\ \dfrac{-2}{s^2+3s+2} & \dfrac{s}{s^2+3s+2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\\ \dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{pmatrix}$$

输出方程: $\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{D}\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}b_0 & b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}=0$$

状态转移矩阵: $\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}=\begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}u(t)$

比较以上系统方程与求解状态转移矩阵对应的特征行列式

$$\begin{vmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{vmatrix}=s^2+3s+2$$

这正好是系统方程对应的特征多项式，一般情况下也是系统函数的分母多项式，它的根是系统的特征根。

3、求系统（转移）函数

由前面分析知道，系统的输出矢量的拉氏变换为

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0^{-})+[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{X}(s)$$

其中零状态分量是 $\mathbf{Y}_{zs}(s)=[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{X}(s)\ =\mathbf{H}(s)\mathbf{X}(s)$

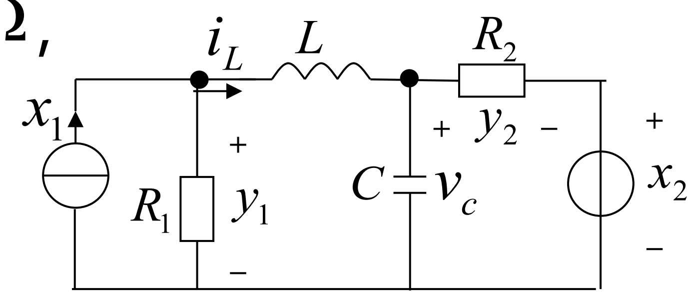
$$\mathbf{H}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$$ ⇐ 系统（转移）函数

对于单输入-单输出的系统， H (s) 是标量 。将例12-6中求得的矩阵 **A**，**B**，**C**，**D** 代入上述公式，可验证 H (s) 与直接从微分方程得到的系统函数相同 。

对于有 m 个输入，l 个输出的系统，H(s) 是一个 $l\times m$ 的矩阵。其第 i 行第 j 列表示

$$H_{ij}(s)=\left.\frac{\text{第}i\text{个输出对第}j\text{个输入的响应}}{\text{第}j\text{个输入}}\right|_{\text{其它输入为零}}$$

例12-7：例12-1所示电路如图，设 $L=1H, C=1F, R_1=R_2=1\Omega$，试求该 2×2 系统的转移函数矩阵。



解：由例12-1已知

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2C} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} \frac{R_1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2C} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}=\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

系统的特征矩阵

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{vmatrix}}=\begin{pmatrix} \frac{s+1}{s^2+2s+2} & \frac{-1}{s^2+2s+2} \\ \frac{1}{s^2+2s+2} & \frac{s+1}{s^2+2s+2} \end{pmatrix}$$

于是，系统转移函数矩阵

$$\mathbf{H}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{s+1}{s^2+2s+2} & \dfrac{-1}{s^2+2s+2}\\ \dfrac{1}{s^2+2s+2} & \dfrac{s+1}{s^2+2s+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{-(s+1)}{s^2+2s+2} & \dfrac{1}{s^2+2s+2}\\ \dfrac{1}{s^2+2s+2} & \dfrac{s+1}{s^2+2s+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{-(s+1)}{s^2+2s+2} & \dfrac{1}{s^2+2s+2}\\ \dfrac{1}{s^2+2s+2} & \dfrac{s+1}{s^2+2s+2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{s^2+s+1}{s^2+2s+2} & \dfrac{1}{s^2+2s+2}\\ \dfrac{1}{s^2+2s+2} & -\dfrac{s^2+s+1}{s^2+2s+2}\end{pmatrix}$$

※ 12.3.3 状态方程的时域解法

由前面拉氏变换解中已知，状态方程的解为

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}\mathbf{B}*\ \mathbf{x}(t)$$

式中的状态转移矩阵表示为矩阵指数 $\boxed{\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}=\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}}$

于是以上状态方程的解 $\boxed{\boldsymbol{\lambda}(t)=\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}*\mathbf{x}(t)}$

状态方程的解或输出方程的解都由零输入解和零状态解相加组成，两部分的变化规律都与矩阵 e^{At} 有关，因此 e^{At} 反映了系统状态变化的本质，称为状态转移矩阵。而状态转移矩阵可以由系统特征矩阵的拉氏逆变换求得，也可用时域求解方法。

※1、状态转移矩阵的时域求解

在标量情况下，以自然数为底的指数 $\mathrm{e}^{at}=1+(at)+\dfrac{1}{2!}(at)^2+\ldots+\dfrac{1}{k!}(at)^k+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}(at)^k$

在矢量情况下，定义矩阵指数。设矩阵 $\mathbf{A}$ 为方阵

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}=1+(\mathbf{A}t)+\frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2+\ldots+\frac{1}{k!}(\mathbf{A}t)^k+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k$$

矩阵指数有以下的性质：

(1) $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathrm{e}^{-\mathbf{A}t}=\mathbf{I}$ (2) $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}=[\mathrm{e}^{-\mathbf{A}t}]^{-1}$ (3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}=\mathbf{A}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}=\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$

根据凯莱—汉密尔顿定理，当 $\mathbf{A}$ 是一 N 阶方阵，则有

$$\mathbf{A}^k=b_0\mathbf{I}+b_1\mathbf{A}+b_2\mathbf{A}^2+\ldots+b_{N-1}\mathbf{A}^{N-1}=\sum_{i=0}^{N-1}b_i\mathbf{A}^i \quad (k\geq N)$$

对 N 阶方阵 $\mathbf{A}$，对应的指数矩阵 $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}=c_0\mathbf{I}+c_1\mathbf{A}+c_2\mathbf{A}^2+\ldots+c_{N-1}\mathbf{A}^{N-1}$

求解的方法与步骤:

(1) 解矩阵**A**的特征方程，求特征根；$\left|\alpha\mathbf{I}-\mathbf{A}\right|=0$

(2) 根据特征根，列方程组；若以上特征根均为单根，则

$$\mathrm{e}^{\alpha_i t}=c_0+c_1\alpha_i+c_2\alpha_i^2+\ldots+c_{N-1}\alpha_i^{N-1}$$

若有特征根 α_1 为 m 重根，则对应的 m 个方程为

$$\mathrm{e}^{\alpha_1 t}=c_0+c_1\alpha_1+c_2\alpha_1^2+\ldots+c_{N-1}\alpha_1^{N-1}\quad (i=1,2,\ldots N)$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\alpha t}}{\mathrm{d}\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_1}=t\mathrm{e}^{\alpha_1 t}=c_1+2c_2\alpha_1+\ldots+(N-1)c_{N-1}\alpha_1^{N-2}$$

$$\ldots$$

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}\mathrm{e}^{\alpha t}}{\mathrm{d}\alpha^{m-1}}\Big|_{\alpha=\alpha_1}=t^{m-1}\mathrm{e}^{\alpha_1 t}=(m-1)!c_{m-1}+m!c_m\alpha_1+\frac{(m+1)!}{2!}c_{m+1}\alpha_1^2+\ldots+\frac{(N-1)!}{(N-m)!}c_{N-1}\alpha_1^{N-m}$$

(3) 解方程，求出 c_i；

(4) 做矩阵运算，求出 $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}=c_0\mathbf{I}+c_1\mathbf{A}+c_2\mathbf{A}^2+\ldots+c_{N-1}\mathbf{A}^{N-1}$

例12-8：例12-6中已知矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$，试用时域法求状态转移矩阵。

解：（1）求矩阵的特征根：$|\alpha\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\left|\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\alpha & -1\\ 2 & \alpha+3\end{vmatrix}$

$$=\alpha^2+3\alpha+2=0 \quad \therefore \alpha_1=-1, \alpha_2=-2$$

（2）有以下方程：$e^{-2t}=c_0-2c_1 \qquad e^{-t}=c_0-c_1$

（3）解以上方程，得到：$c_0=2e^{-t}-e^{-2t} \qquad c_1=e^{-t}-e^{-2t}$

（4）状态转移矩阵为：

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}=c_0\mathbf{I}+c_1\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & 0\\ 0 & 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}+(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & 0\\ 0 & 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -3\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}u(t)$$

※ 2、输出方程的时域求解

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+\left[\mathbf{C}\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\}\mathbf{B}+\mathbf{D}\delta(t)\right]*\mathbf{x}(t)$$

$$=\underbrace{\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{\lambda}(0^-)}_{\text{零输入解}}+\underbrace{[\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}+\mathbf{D}\delta(t)]*\mathbf{x}(t)}_{\text{零状态解}}$$

例12-9：例12-6中，已知状态方程与输出方程的系数矩阵，以及初始条件，且输入 $x(t)=\delta(t)$，试解输出方程 。

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\quad \mathbf{D}=0\quad \boldsymbol{\lambda}(0^-)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

解：由上例已知系统的状态转移矩阵 $e^{\mathbf{A}t}=\begin{pmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{pmatrix}u(t)$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{\lambda}(0^-)+[\mathbf{C}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}+\mathbf{D}\delta(t)\mathbf{I}]*\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t)=\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]*\delta(t)$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\\ -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}\right]*\delta(t)$$

$$=(2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})+(2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})*\delta(t)$$

$$=2(2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})u(t)$$

作 业

教材习题：

基础题：12-1，12-5，12-6

加强题：12-7，12-10

第十二章 系统的状态变量分析

12.4 离散时间系统状态方程的建立

12.4.1 离散系统的状态变量

初始状态：设初始时刻为 $n_0=0$，N 阶系统的初始状态通常指

$$y(-1)\ ,\ y(-2)\ ,\ \cdots\ ,\ y(-N)\ 。$$

N 阶系统的状态变量表示为：

$$\lambda_1(n)\ ,\ \lambda_2(n)\ ,\ \cdots\ ,\ \lambda_N(n)\ 。$$

状态矢量：

$$\boldsymbol{\lambda}(n)=\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\\ \vdots\\ \lambda_N(n)\end{bmatrix}$$

12.4.2 离散系统的状态方程和输出方程

1、由系统差分方程直接列写状态方程和输出方程

例12-10：已知系统的差分方程如下，列出系统的状态方程和输出方程 。

$$y(n)-a_1y(n-1)-a_0y(n-2)=b_0x(n)$$

解： 设状态变量为 $\lambda_1(n)=y(n-2)$ ， $\lambda_2(n)=y(n-1)$

可推出状态方程：
$$\begin{cases}\lambda_1(n+1)=\lambda_2(n)\\ \lambda_2(n+1)=a_0\lambda_1(n)+a_1\lambda_2(n)+b_0x(n)\end{cases}$$

矩阵形式：
$$\begin{bmatrix}\lambda_1(n+1)\\ \lambda_2(n+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ a_0 & a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ b_0\end{bmatrix}x(n)$$

输出方程:

$$y(n)=a_0\lambda_1(n)+a_1\lambda_2(n)+b_0x(n)$$

矩阵形式:

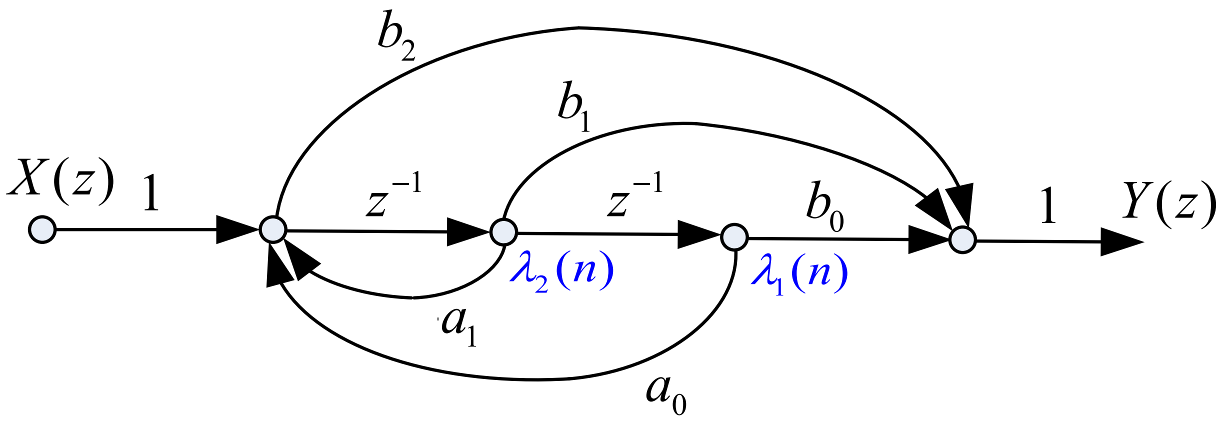
$$y(n)=\begin{bmatrix}a_0 & a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\end{bmatrix}+b_0x(n)$$

2、由信号流图列写状态方程和输出方程

例12-11：根据下列系统差分方程画出信号流图，列写状态方程和输出方程。

$$y(n)-a_1y(n-1)-a_0y(n-2)=b_2x(n)+b_1x(n-1)+b_0x(n-2)$$

解：画信号流图，选延时器输出为状态变量：



状态方程：

$$\begin{cases}\lambda_1(n+1)=\lambda_2(n)\\ \lambda_2(n+1)=a_0\lambda_1(n)+a_1\lambda_2(n)+x(n)\end{cases}$$

输出方程：

$$\begin{aligned} y(n) &= b_0\lambda_1(n) + b_1\lambda_2(n) + b_2[a_0\lambda_1(n) + a_1\lambda_2(n) + x(n)] \\ &= (b_0 + a_0 b_2)\lambda_1(n) + (b_1 + a_1 b_2)\lambda_2(n) + b_2 x(n) \end{aligned}$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

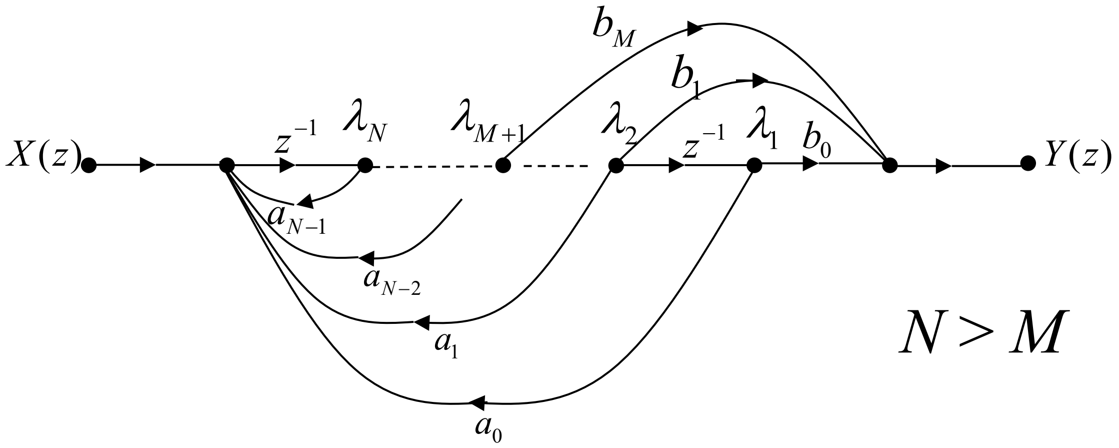
$$y(n) = \begin{bmatrix} b_0 + a_0 b_2 & b_1 + a_1 b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix} + b_2 x(n)$$

一个单输入单输出系统的差分方程与系统函数形式如下：

$$y(n)-\sum_{k=0}^{N-1}a_k y(n-(N-k))=\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-(M-r))$$

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_r z^{-(M-r)}}{1-\sum_{k=0}^{N-1}a_k z^{-(N-k)}}$$

（1）画系统信号流图，在图中由输出至输入方向，选择延时器的输出为状态变量；



$N>M$

（2）列写状态方程

$$\lambda_1(n+1)=\lambda_2(n)$$
$$\lambda_2(n+1)=\lambda_3(n)$$
$$\vdots$$
$$\lambda_{N-1}(n+1)=\lambda_{N-2}(n)$$
$$\lambda_N(n+1)=a_0\lambda_1(n)+a_1\lambda_2(n)+\ldots+a_{N-1}\lambda_N(n)+x(n)$$

写成矩阵式

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1(n+1)\\ \lambda_2(n+1)\\ \vdots\\ \lambda_{N-1}(n+1)\\ \lambda_N(n+1)\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\lambda}(n+1)}=\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \cdots & & \cdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{N-2} & a_{N-1}\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\\ \vdots\\ \lambda_{N-1}(n)\\ \lambda_N(n)\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\lambda}(n)}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{\mathbf{B}}x(n)$$

状态方程: $\boldsymbol{\lambda}(n+1)=\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(n)+\mathbf{B}x(n)$

A , B 矩阵与连续时间系统状态方程的系数矩阵相同 。

输出方程: $y(n)=\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(n)+\mathbf{D}x(n)$

如果 $N>M$，$y(n)=b_0\lambda_1(n)+b_1\lambda_2(n)+\ldots+b_{M-1}\lambda_M(n)+b_M\lambda_{M+1}(n)$

$$\mathbf{C}=[b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{M-1} \quad b_M \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

$$\mathbf{D}=0$$

如果 $N=M$，$y(n)=(b_0+b_Na_0)\lambda_1(n)+(b_1+b_Na_1)\lambda_2(n)+\ldots+(b_{N-1}+b_Na_{N-1})\lambda_N(n)+b_Nx(n)$

$$\mathbf{C}=\left[(b_0+b_Na_0) \quad (b_1+b_Na_1) \quad \ldots \quad (b_k+b_Na_k) \quad \ldots \quad (b_{N-1}+b_Na_{N-1})\right]$$

$$\mathbf{D}=b_N$$

C, D 矩阵与连续时间系统输出方程的系数矩阵相同 。

单选题 1分

设置

已知某线性时不变因果系统的差分方程如下，假设系统的初始状态为零。系统的状态方程和输出方程中的矩阵为（ ）

$$y(n)-\frac{1}{4}y(n-1)-\frac{1}{8}y(n-2)=x(n-1)$$

A $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8}\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=[0\quad -1],\ \mathbf{D}=0$

B $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8}\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=[0\quad 1],\ \mathbf{D}=0$

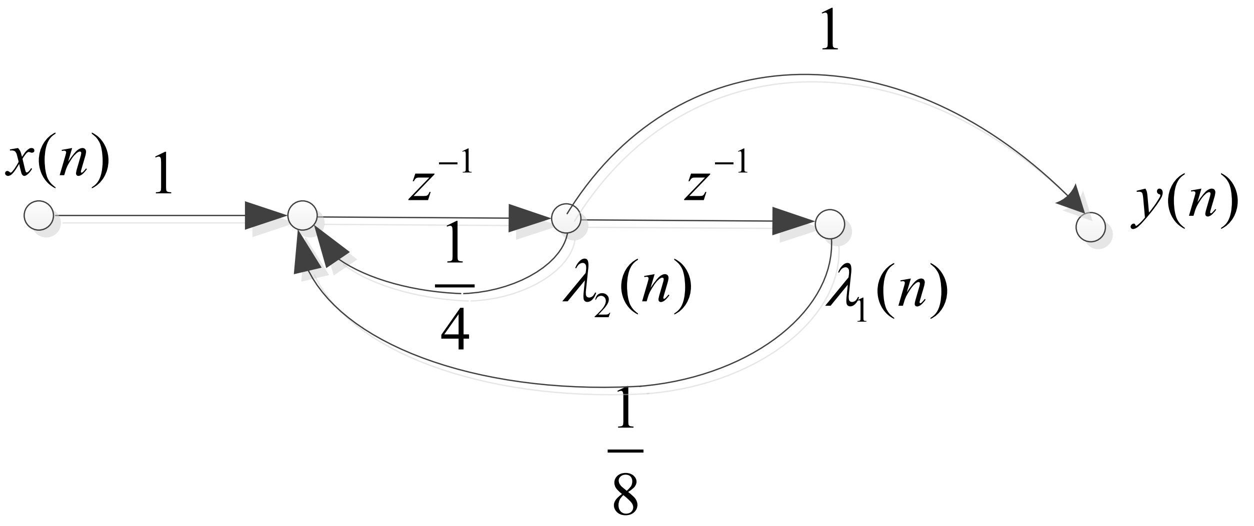
C $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4}\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=[0\quad 1],\ \mathbf{D}=0$

提交

例12-12：已知某线性时不变因果系统的差分方程如下，画出信号流图，列写状态方程和输出方程。假设系统的初始状态为零。

$$y(n)-\frac{1}{4}y(n-1)-\frac{1}{8}y(n-2)=x(n-1)$$

解： 信号流图为



由信号流图可知，选延时器输出为状态变量，则状态方程和输出方程为：

$$\lambda_1(n+1)=\lambda_2(n)$$

$$\lambda_2(n+1)=\frac{1}{4}\lambda_2(n)+\frac{1}{8}\lambda_1(n)+x(n)$$

$$y(n)=\lambda_2(n)$$

矩阵的形式为：

$$\begin{bmatrix}\lambda_1(n+1)\\ \lambda_2(n+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}x(n)$$

$$y(n)=[0 \quad 1]\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\end{bmatrix}$$

多输入-多输出离散系统状态方程和输出方程的一般形式

假设一个N阶系统有p个输入，q个输出。

状态方程:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \\ \vdots \\ \lambda_N(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \\ \vdots \\ \lambda_N(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \cdots & b_{Np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\boldsymbol{\lambda}(n+1) \qquad \mathbf{A} \qquad \boldsymbol{\lambda}(n) \qquad \mathbf{B} \qquad \mathbf{x}(n)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(n+1) = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(n) + \mathbf{B}\mathbf{x}(n)$$

输出方程：

$$
\begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \\ \vdots \\ y_q(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \\ \vdots \\ \lambda_N(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}
$$

$$
\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow
$$

$$
\mathbf{Y}(n) \qquad \mathbf{C} \qquad \boldsymbol{\lambda}(n) \qquad \mathbf{D} \qquad \mathbf{x}(n)
$$

$$
\mathbf{Y}(n) = \mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(n) + \mathbf{D}\mathbf{x}(n)
$$

12.5 离散系统状态方程的求解

※ 12.5.1 状态方程、输出方程的时域解

1、状态方程的解: 假设 N 阶系统, p 个输入

状态方程: $\boldsymbol{\lambda}(n+1)=\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(n)+\mathbf{B}\mathbf{x}(n)$

设初始时刻 $n_0=0$,初始状态 $\boldsymbol{\lambda}(0)=[\lambda_1(0),\lambda_2(0),\cdots,\lambda_N(0)]$。

用迭代法得:

$$\boldsymbol{\lambda}(1)=\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(0)+\mathbf{B}\mathbf{x}(0)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}(2)&=\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(1)+\mathbf{B}\mathbf{x}(1)=\mathbf{A}[\boldsymbol{\lambda}(0)+\mathbf{B}\mathbf{x}(0)]+\mathbf{B}\mathbf{x}(1)\\&=\mathbf{A}^2\boldsymbol{\lambda}(0)+\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}(0)+\mathbf{B}\mathbf{x}(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}(3)&=\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(2)+\mathbf{B}\mathbf{x}(2)\\&=\mathbf{A}^3\boldsymbol{\lambda}(0)+\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{x}(0)+\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}(1)+\mathbf{B}\mathbf{x}(2)\end{aligned}$$

$\cdots$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}(n) &= \mathbf{A}^{n}\boldsymbol{\lambda}(0)+\mathbf{A}^{n\text{-}1}\mathbf{Bx}(0)+\mathbf{A}^{n\text{-}2}\mathbf{Bx}(1)+\cdots+\mathbf{ABx}(n-2)+\mathbf{Bx}(n-1)\\ &= \mathbf{A}^{n}\boldsymbol{\lambda}(0)+\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{A}^{n\text{-}1\text{-}i}\mathbf{Bx}(i)\\ &= \mathbf{A}^{n}\boldsymbol{\lambda}(0)+\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}*\mathbf{x}(n)\end{aligned}$$

设 $\boldsymbol{\Phi}(n)=\mathbf{A}^{n}$ ⟵ 状态转移矩阵: 描述从初始 0 时刻到 n 时刻的状态转移

$$\boldsymbol{\lambda}(n)=\underbrace{\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{\lambda}(0)}_{\boldsymbol{\lambda}_{zi}(n)}+\underbrace{\boldsymbol{\Phi}(n-1)\mathbf{B}*\mathbf{x}(n)}_{\boldsymbol{\lambda}_{zs}(n)}$$

（零输入分量）（零状态分量）

2、输出方程的解: 假设 N 阶系统, p 个输入, q 个输出。

输出方程: $\mathbf{y}(n)=\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(n)+\mathbf{Dx}(n)$

把 $\boldsymbol{\lambda}(n)$ 代入输出方程,得:

$$\mathbf{y}(n)=\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}(n)\boldsymbol{\lambda}(0)+\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}(n-1)\mathbf{B}*\mathbf{x}(n)+\mathbf{Dx}(n)$$

引入 $\boldsymbol{\delta}(n)$:

$$\boldsymbol{\delta}(n)=\begin{bmatrix}\delta(n) & & & 0\\ & \delta(n) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \delta(n)\end{bmatrix}_{p\times p}$$

则 $\mathbf{Dx}(n)=\mathbf{D}\boldsymbol{\delta}(n)*\mathbf{x}(n)$

$$\mathbf{y}(n)=\mathbf{C\Phi}(n)\boldsymbol{\lambda}(0)+[\mathbf{C\Phi}(n-1)\mathbf{B}+\mathbf{D}\boldsymbol{\delta}(n)]*\mathbf{x}(n)$$

$$=\underbrace{\mathbf{C\Phi}(n)\boldsymbol{\lambda}(0)}_{\mathbf{y}_{zi}(n)}+\underbrace{\mathbf{h}(n)*\mathbf{x}(n)}_{\mathbf{y}_{zs}(n)}$$

$$\mathbf{h}(n)=\mathbf{C\Phi}(n-1)\mathbf{B}+\mathbf{D}\boldsymbol{\delta}(n)$$ —— 单位样值响应矩阵$(q\times p)$

$$=\begin{bmatrix}h_{11}(n) & h_{12}(n) & \cdots & h_{1p}(n)\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ h_{q1}(n) & h_{q2}(n) & \cdots & h_{qp}(n)\end{bmatrix}_{q\times p}$$

$h_{ij}(n)$:

$x_j(n)$ 单独作用时,输出

$y_i(n)$ 的单位脉冲响应。

3、状态转移矩阵 $\mathbf{\Phi}(n)=\mathbf{A}^n$ 的计算

1) $\mathbf{A}^n$的计算方法

设$\mathbf{A}$为N阶方阵，λ_i为$\mathbf{A}$的特征根，$i=1,2,\cdots,N$

由$\mathbf{A}$的特征方程和凯莱—汉密尔顿定理可以证明：

$$\lambda^n=\alpha_0+\alpha_1\lambda_i+\alpha_2\lambda_i^{\ 2}+\cdots+\alpha_{N-1}\lambda_i^{\ N-1}$$

$$\mathbf{A}^n=\alpha_0\mathbf{I}+\alpha_1\mathbf{A}+\alpha_2\mathbf{A}^2+\cdots+\alpha_{N-1}\mathbf{A}^{N-1}\quad(n\geq N)$$

$\mathbf{A}$ 的 n ($n\geq N$) 次幂可以表示为 $\mathbf{A}$ 的 N-1 阶多项式。

由$\mathbf{A}$的 N 个特征根和λ_i^n的展开式确定系数α_i，代入 $\mathbf{A}^n$ 的展开式，就可求得 $\mathbf{A}^n$。

2) $\mathbf{A}^n$的计算步骤

① $\mathbf{A}$的特征根为单根：

第一步：求 N 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征根 λ_i， i=1 ,2 , … ,N。

第二步：由N个特征根建立以下N个方程：

$$\begin{cases} \lambda_1^n = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^{\ 2} + \cdots + \alpha_{N-1}\lambda_1^{\ N-1} \\ \lambda_2^n = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_2^{\ 2} + \cdots + \alpha_{N-1}\lambda_2^{\ N-1} \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \lambda_N^n = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_N + \alpha_2\lambda_N^{\ 2} + \cdots + \alpha_{N-1}\lambda_N^{\ N-1} \end{cases}$$

第三步：解上面方程组，求 α_i ，$i = 0,1,2,\cdots,N-1$

第四步： 把α_i代入下式，求$\mathbf{A}^n$

$$\mathbf{A}^n = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_2\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{N-1}\mathbf{A}^{n-1}$$

② **A** 的特征根有重根：设 λ_1 为 m 重根，另有 N-m 个单根 。

第一步：求 N 阶方阵A的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$

$$q = N - m + 1$$

第二步：由特征根 λ_i 建立以下 N 个方程：

$$\begin{cases} \lambda_1^n = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^{\ 2} + \cdots + \alpha_{N-1}\lambda_1^{\ N-1} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_1}(\lambda_1^n) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_1}(\alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^{\ 2} + \cdots + \alpha_{N-1}\lambda_1^{\ N-1}) \\ \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda_1^{\ 2}}(\lambda_1^n) = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda_1^{\ 2}}(\alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^{\ 2} + \cdots + \alpha_{N-1}\lambda_1^{\ N-1}) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\lambda_1^{\ m-1}}(\lambda_1^n) = \dfrac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}\lambda_1^{\ m-1}}(\alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^{\ 2} + \cdots + \alpha_{N-1}\lambda_1^{\ N-1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2^n = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_2^{\ 2} + \cdots + \alpha_{N-1}\lambda_2^{\ N-1} \\ \lambda_3^n = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_3 + \alpha_2\lambda_3^{\ 2} + \cdots + \alpha_{N-1}\lambda_3^{\ N-1} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \lambda_q^n = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_q + \alpha_2\lambda_q^{\ 2} + \cdots + \alpha_{N-1}\lambda_q^{\ N-1} \end{cases}$$

第三步：解上面方程组，求 α_i ，$i = 0,1,2,\cdots,N-1$

第四步：把α_i代入下式，求$\mathbf{A}^n$：$\mathbf{A}^n = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_2\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{N-1}\mathbf{A}^{N-1}$

例12-13：已知$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，求状态转移矩阵$\mathbf{\Phi}(n)=\mathbf{A}^n$。

解： 1）求 $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$：

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ 2 & 1-\lambda\end{bmatrix}$$

2）求A的特征根：

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=(\lambda+1)(\lambda-2)=0\Rightarrow\quad \lambda_1=-1,\quad \lambda_2=2$$

3）建立求α_i的方程，求α_i：

$$\begin{cases}\lambda_1^n=\alpha_0+\alpha_1\lambda_1\\ \lambda_2^n=\alpha_0+\alpha_1\lambda_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-1)^n=\alpha_0-\alpha_1\\ 2^n=\alpha_0+2\alpha_1\end{cases}$$

解方程组,得: $\alpha_0=\dfrac{1}{3}[2^n+2(-1)^n]$，$\alpha_1=\dfrac{1}{3}[2^n-(-1)^n]$。

4）求 $\mathbf{A}^n$：

$$\mathbf{A}^n = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A}$$

$$= \frac{1}{3}[2^n + 2(-1)^n]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}[2^n - (-1)^n]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}[2^n + 2(-1)^n] & \frac{1}{3}[2^n - (-1)^n] \\ \frac{2}{3}[2^n - (-1)^n] & \frac{1}{3}[2^{n+1} + (-1)^n] \end{bmatrix}$$

12.5.2 状态方程、输出方程的 z 域解

1、状态方程的 z 域解

设初始时刻 $n_0=0$

状态方程：$\boldsymbol{\lambda}(n+1)=\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(n)+\mathbf{B}\mathbf{x}(n)$

单边z变换的左移性质：$x(n+m)\longleftrightarrow z^m X(z)-\sum_{n=0}^{m}x(n)z^{m-n}$

由左移性质，对状态方程两边取 z 变换，得：

$$z\boldsymbol{\Lambda}(z)-z\boldsymbol{\lambda}(0)=\mathbf{A}\boldsymbol{\Lambda}(z)+\mathbf{B}\mathbf{X}(z)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z\boldsymbol{\lambda}(0)+(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(z)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z=(\mathbf{I}-z^{-1}\mathbf{A})^{-1}$$

系统的特征矩阵（状态转移矩阵的 z 变换）

则 $$\boldsymbol{\Lambda}(z)=\underbrace{\boldsymbol{\Phi}(z)\boldsymbol{\lambda}(0)}_{\boldsymbol{\Lambda}_{zi}(z)}+\underbrace{z^{-1}\boldsymbol{\Phi}(z)\mathbf{B}\mathbf{X}(z)}_{\boldsymbol{\Lambda}_{zs}(z)}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(n)=Z^{-1}[\boldsymbol{\Lambda}(z)]=Z^{-1}[\boldsymbol{\Lambda}_{zi}(z)]+Z^{-1}[\boldsymbol{\Lambda}_{zs}(z)]=\boldsymbol{\lambda}_{zi}(n)+\boldsymbol{\lambda}_{zs}(n)$$

2、输出方程的 z 域解

设初始时刻 $n_0 = 0$

输出方程： $\mathbf{Y}(n) = \mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(n) + \mathbf{D}\mathbf{x}(n)$

方程两边取单边z变换，得： $\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}(z) + \mathbf{D}\mathbf{X}(z)$

把 $\boldsymbol{\Lambda}(z)$代入上式,得：

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}(z)\boldsymbol{\lambda}(0) + [\mathbf{C}z^{-1}\boldsymbol{\Phi}(z)\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{X}(z)$$

$$= \underbrace{\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}(z)\boldsymbol{\lambda}(0)}_{\mathbf{Y}_{zi}(z)} + \underbrace{\mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z)}_{\mathbf{Y}_{zs}(z)}$$

$$\boxed{\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}z^{-1}\boldsymbol{\Phi}(z)\mathbf{B} + \mathbf{D} = Z[\mathbf{h}(n)]} \longleftarrow \text{系统函数矩阵}$$

$$\mathbf{y}(n) = Z^{-1}[\mathbf{Y}(z)] = Z^{-1}[\mathbf{Y}_{zi}(z)] + Z^{-1}[\mathbf{Y}_{zs}(z)] = \mathbf{y}_{zi}(n) + \mathbf{y}_{zs}(n)$$

例12-14：用逆 z 变换的方法求例12-13中的状态转移矩阵。

解：

$$\boldsymbol{\Phi}(z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z=\begin{pmatrix} z & -1 \\ -2 & z-1 \end{pmatrix}^{-1}z=\frac{z}{z^2-z-2}\begin{pmatrix} z-1 & 1 \\ 2 & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1-z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1+z^{-1})} & \dfrac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1+z^{-1})} \\ \dfrac{2z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1+z^{-1})} & \dfrac{1}{(1-2z^{-1})(1+z^{-1})} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{1/3}{1-2z^{-1}}+\dfrac{2/3}{1+z^{-1}} & \dfrac{1/3}{1-2z^{-1}}-\dfrac{1/3}{1+z^{-1}} \\ \dfrac{2/3}{1-2z^{-1}}-\dfrac{2/3}{1+z^{-1}} & \dfrac{2/3}{1-2z^{-1}}+\dfrac{1/3}{1+z^{-1}} \end{pmatrix} \quad (|z|>2)$$

$$\mathbf{A}^n=\boldsymbol{\Phi}(n)=Z^{-1}[\boldsymbol{\Phi}(z)]=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{3}[2^n+2(-1)^n] & \dfrac{1}{3}[2^n-(-1)^n] \\ \dfrac{2}{3}[2^n-(-1)^n] & \dfrac{1}{3}[2^{n+1}-(-1)^n] \end{pmatrix} \quad (n\ge 0)$$

例12-15：已知一离散系统的状态方程和输出方程表示为：

$$\begin{bmatrix}\lambda_1(n+1)\\ \lambda_2(n+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}x(n) \qquad y(n)=[1,1]\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\end{bmatrix}$$

给定当 $n\geq 0$ 时 $x(n)=0$ 和 $y(n)=8(-1)^n-5(-2)^n$，求：

零输入响应

1) 常数 a,b；

2) $\lambda_1(n)$和$\lambda_2(n)$的闭式解。

解法一: z 域法

1) 由状态方程可得 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ a & b\end{bmatrix}$

又已知 $n\geq 0$时，$x(n)=0$和$y(n)=8(-1)^n-5(-2)^n$

（零输入响应）

$$\mathbf{Y}_{zi}(z)=\frac{8z}{z+1}-\frac{5z}{z+2}=\frac{3z^2+11z}{z^2+3z+2}$$

$$\mathbf{\Phi}(z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z=\begin{bmatrix} z-1 & 2 \\ -a & z-b \end{bmatrix}^{-1} z=\frac{1}{(z-1)(z-b)+2a}\begin{bmatrix} z(z-b) & -2z \\ az & z(z-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{zi}(z)=\mathbf{C}\mathbf{\Phi}(z)\boldsymbol{\lambda}(0)$$

$$=\frac{1}{(z-1)(z-b)+2a}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(z-b) & -2z \\ az & z(z-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1(0) \\ \lambda_2(0) \end{bmatrix}$$

$$=\frac{(z^2+7z)\lambda_1(0)+(z^2-3z)\lambda_2(0)}{z^2-(b+1)z+b+2a}$$

$$=\frac{(\lambda_1(0)+\lambda_2(0))z^2+(7\lambda_1(0)-3\lambda_2(0))z}{z^2-(b+1)z+b+2a}$$

$$=\frac{3z^2+11z}{z^2+3z+2}$$

解得$a=3, b=-4, \lambda_1(0)=2, \lambda_2(0)=1$

2） $\mathbf{\Phi}(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}\begin{bmatrix} z(z+4) & -2z \\ 3z & z(z-1) \end{bmatrix}$

则 $\mathbf{\Lambda}_{zi}(z)=\mathbf{\Phi}(z)\boldsymbol{\lambda}(0)$

$$=\frac{1}{(z+1)(z+2)}\begin{bmatrix} z(z+4) & -2z \\ 3z & z(z-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(z+1)(z+2)}\begin{bmatrix} z(2z+6) \\ z(z+5) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{4z}{z+1}-\dfrac{2z}{z+2} \\ \dfrac{4z}{z+1}-\dfrac{3z}{z+2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{zi}(n)=\begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4(-1)^n-2(-2)^n \\ 4(-1)^n-3(-2)^n \end{bmatrix} \quad (n\ge 0)$$

解法二: 时域法

1) 已知 $n \geq 0$时，$x(n)=0$和$y(n)=8(-1)^n-5(-2)^n$ （零输入响应）

故$y(n)$是系统的齐次解，并且特征根为 $\alpha_1=-1, \alpha_2=-2$

$\mathbf{A}$ 的特征方程为$|\alpha\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\alpha-1 & 2 \\ -a & \alpha-b\end{vmatrix}=(\alpha-1)(\alpha-b)+2a=0$

将$\alpha_1=-1, \alpha_2=-2$代入得

$$\begin{cases}-2(-1-b)+2a=0 \\ -3(-2-b)+2a=0\end{cases}$$

解得$a=3, b=-4$

2) 因为特征根 $\alpha_1=-1, \alpha_2=-2$ ，故可设

$$\begin{cases}\lambda_1(n)=A_1(-1)^n+B_1(-2)^n \\ \lambda_2(n)=A_2(-1)^n+B_2(-2)^n\end{cases}$$

状态方程为

$$\begin{bmatrix}\lambda_1(n+1)\\ \lambda_2(n+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}x(n)$$

因为$n\geq 0$时，$x(n)=0$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1(n+1)\\ \lambda_2(n+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\end{bmatrix}$$

故有 $$\begin{bmatrix}A_1(-1)^{n+1}+B_1(-2)^{n+1}\\ A_2(-1)^{n+1}+B_2(-2)^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1(-1)^{n}+B_1(-2)^{n}\\ A_2(-1)^{n}+B_2(-2)^{n}\end{bmatrix}$$

于是 $\begin{cases}-A_1=A_1-2A_2\\ -2B_1=B_1-2B_2\end{cases}$ $\begin{cases}-A_2=3A_1-4A_2\\ -2B_2=3B_1-4B_2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A_1=A_2\\ B_1=\dfrac{2}{3}B_2\end{cases}$

又由 $y(n)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\end{bmatrix}=(A_1+A_2)(-1)^n+(B_1+B_2)(-2)^n$

$$=2A_2(-1)^n+\frac{5}{3}B_2(-2)^n=8(-1)^n-5(-2)^n$$

得$A_2=4, B_2=-3$

所以$A_1=4, B_1=-2$

$\lambda_1(n)$和$\lambda_2(n)$的闭式解分别为

$$\lambda_1(n)=4(-1)^n-2(-2)^n$$

$$\lambda_2(n)=4(-1)^n-3(-2)^n\,(n\geq 0)$$

※ 12.6 状态矢量的线性变换

12.6.1 线性变换下状态方程的特性

按线性空间不同基底的变换关系，设一组状态变量 $\boldsymbol{\lambda}$ 与另一组状态变量 $\boldsymbol{\gamma}$ 之间有

$$\begin{cases} \gamma_1 = p_{11}\lambda_1 + p_{12}\lambda_2 + \cdots + p_{1k}\lambda_k \\ \gamma_2 = p_{21}\lambda_1 + p_{22}\lambda_2 + \cdots + p_{2k}\lambda_k \\ \cdots \\ \gamma_k = p_{k1}\lambda_1 + p_{k2}\lambda_2 + \cdots + p_{kk}\lambda_k \end{cases}$$

矢量形式

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \xrightarrow{\text{线性变换}} \boldsymbol{\gamma}$$

其中$\boldsymbol{\gamma}$和$\boldsymbol{\lambda}$为列矢量

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix}$$

设原基底下状态方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\lambda}(t)=\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{B}\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{P}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\gamma}(t)=\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\gamma}(t)+\mathbf{B}\mathbf{x}(t)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\gamma}(t)=\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\gamma}(t)+\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{x}(t)=\hat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma}(t)+\hat{\mathbf{B}}\mathbf{x}(t)\\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{D}\mathbf{x}(t)=\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\gamma}(t)+\mathbf{D}\mathbf{x}(t)=\hat{\mathbf{C}}\boldsymbol{\gamma}(t)+\hat{\mathbf{D}}\mathbf{x}(t)\end{cases}$$

原矩阵系数 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}$

新矩阵系数 $\hat{\mathbf{A}},\hat{\mathbf{B}},\hat{\mathbf{C}},\hat{\mathbf{D}}$

$$\begin{cases}\hat{\mathbf{A}}=\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\\ \hat{\mathbf{B}}=\mathbf{P}\mathbf{B}\\ \hat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\\ \hat{\mathbf{D}}=\mathbf{D}\end{cases}$$

12.6.2 系统转移函数阵在线性变换下的不变性

状态方程和系统转移函数是描述系统的两种方法。当状态矢量用不同基底表示时，并不影响系统的物理本质，因此对同一系统不同状态变量的选择，系统转移函数不变：

$$\hat{\mathbf{H}}(s)=\hat{\mathbf{C}}\left(s\mathbf{I}-\hat{\mathbf{A}}\right)^{-1}\hat{\mathbf{B}}+\hat{\mathbf{D}}=\mathbf{C}\left(s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$$

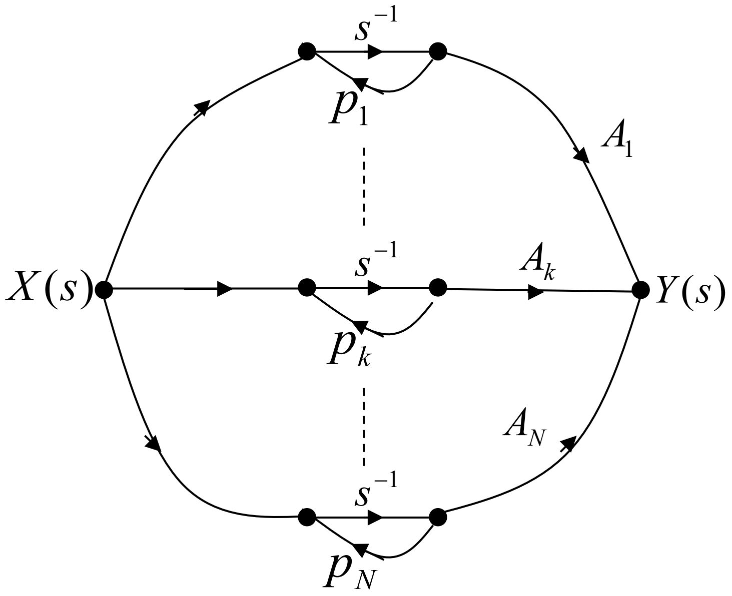
状态矢量线性变换的特性同样适用于离散系统。

12.6.3 A 矩阵的对角化

在线性变换中，使A矩阵对角化是很有用的变换。A矩阵的对角化，说明系统结构变换成并联结构形式。这种结构形式的每一状态变量之间互不影响，因而可以独立研究系统参数对状态变量的影响。

由线性代数的分析可知，A 矩阵的对角化实际上就是以 A 矩阵的特征矢量作为基底的变换。因而把 A 矩阵对角化所需要的线性变换就是寻求 A 矩阵的特征矢量，以此构作变换阵 P，即可把状态变量相互之间分离开。

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-p_k}$$



12.6.4 由状态方程判断系统的稳定性

用系统转移函数来描述系统时，系统的转移函数由转移函数的分母特征根位置来定出。如果给定状态方程，A矩阵对角化后其对角元素是A矩阵的特征值，特征值决定了系统的自由运动情况。因此可根据A矩阵的特征值来判断系统的稳定情况。

1、连续系统稳定性的判断

稳定系统：$\mathbf{A}$的特征值 $\mathrm{Re}\left[\alpha_i\right]<0$

这需要解方程 $\left|a\mathbf{I}-\mathbf{A}\right|=0$

而转移函数分母的特征多项式为 $\left|s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right|=0$

此方程的根在s平面上的位置决定了系统的稳定情况，当特征根落在s平面的左半平面，可确定系统为稳定的。

2、离散系统稳定性的判断

对于离散系统，要求系统稳定，则要求 **A** 矩阵的特征根位于单位圆内，即

$$|a_i| < 1$$

和连续系统相似，**A** 矩阵的特征值和离散系统转移函数特征多项式的根位置相同，所以它们的判定准则也相同。

※ 12.7 系统的可控制性与可观测性

可控制性与可观测性是线性系统的两个基本问题，它们与系统的稳定性一样，从不同侧面反映系统的特性。

12.7.1 系统的可控制性

系统的可控制性，是指输入信号对系统内部状态的控制能力。

当系统用状态方程描述时，给定系统的初始状态值，若可以找到输入矢量(即控制矢量)能在有限的时间内把系统的所有状态引向状态空间的原点(即零状态)，则称该系统是完全可控系统。如果只对部分状态变量做到这一点，则称此系统是不完全可控系统。

如果在有限时间内能把系统从状态空间的原点(零状态)引向预先指定的状态，则称该系统是完全可达的系统。

对于线性时不变系统来说，可控性和可达性是一致的。

多选题 1分

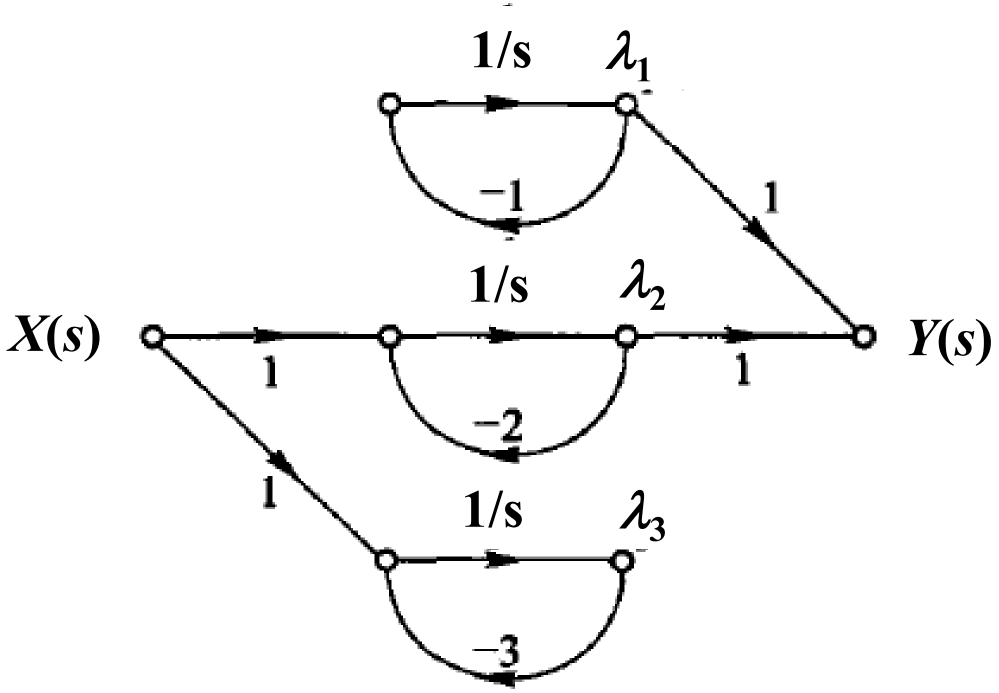
设置

已知一个系统的信号流图由下图所示，输入变量可控制的状态变量有（　）

A λ_1

B λ_2

C λ_3



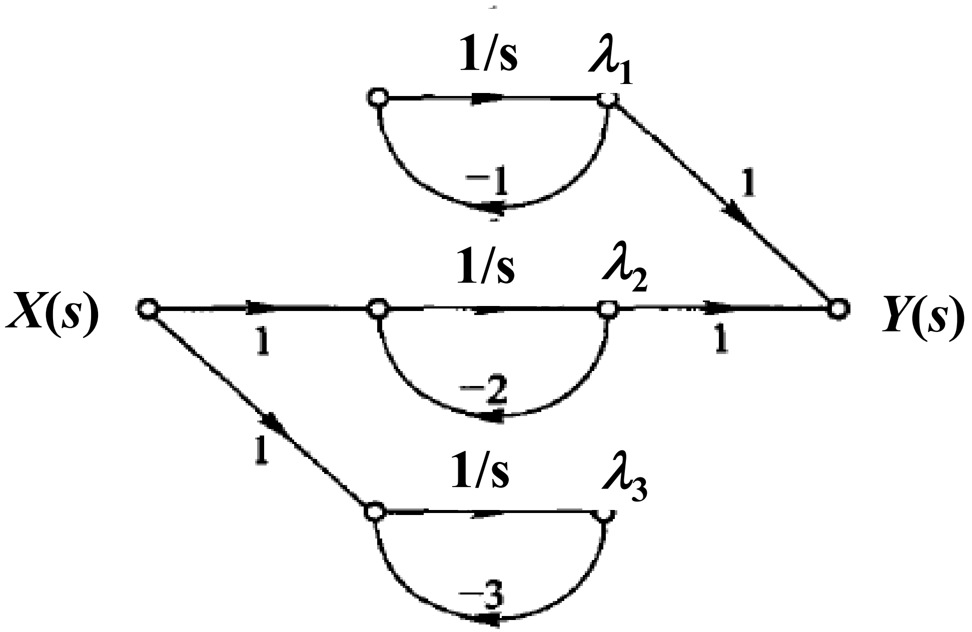
提交

状态变量λ_1 不可控。

状态变量λ_2和λ_3 可控。

此系统不完全可控。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$



当 A 矩阵为对角阵时，B 矩阵中的 0 元素对应不可控因素。

1) 可控性判则一

若给定系统的状态方程，系数矩阵A为对角阵，或能通过非奇异矩阵P(模态矩阵)将它化为对角阵，如果这时控制矩阵 $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{PB}$ 中没有任何一行元素全部为零，则该系统是完全可控制的。

2)可控性判则二

若连续系统有 k 个状态变量，其状态方程为 $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Bx}$

定义可控矩阵为 $\mathbf{M} = [\mathbf{B} \vdots \mathbf{AB} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{B} \vdots \cdots \vdots \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}]$

欲使方程组存在k个唯一的确定解，系数矩阵 M 中 k 个列矢量必须线性无关，即 M 的秩为 k 。因此，连续系统可控的充要条件是 M 满秩，即

$$\operatorname{rank} \mathbf{M} = k$$

12.7.2 系统的可观测性

系统的可观测性是指根据系统的输出量来确定系统状态的能力。即通过观察有限时间内的输出量，能否识别(或确定)系统的初始状态。

在给定有限时间$(0, t_1)$内可根据系统的输出唯一确定出系统的所有初始状态，则称系统完全可观测；若只能确定部分初始状态，则此系统不完全可观测。

1) 可观测性判则一

若连续系统具有各不相同的特征根，给定系统的状态方程中系数矩阵A为对角阵，或能通过非奇异矩阵P将它化为对角阵(此时各状态变量间没有任何联系)，此系统完全可观测的充要条件是矩阵 $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}$ 中没有任何一列元素全部为零。

多选题 1分

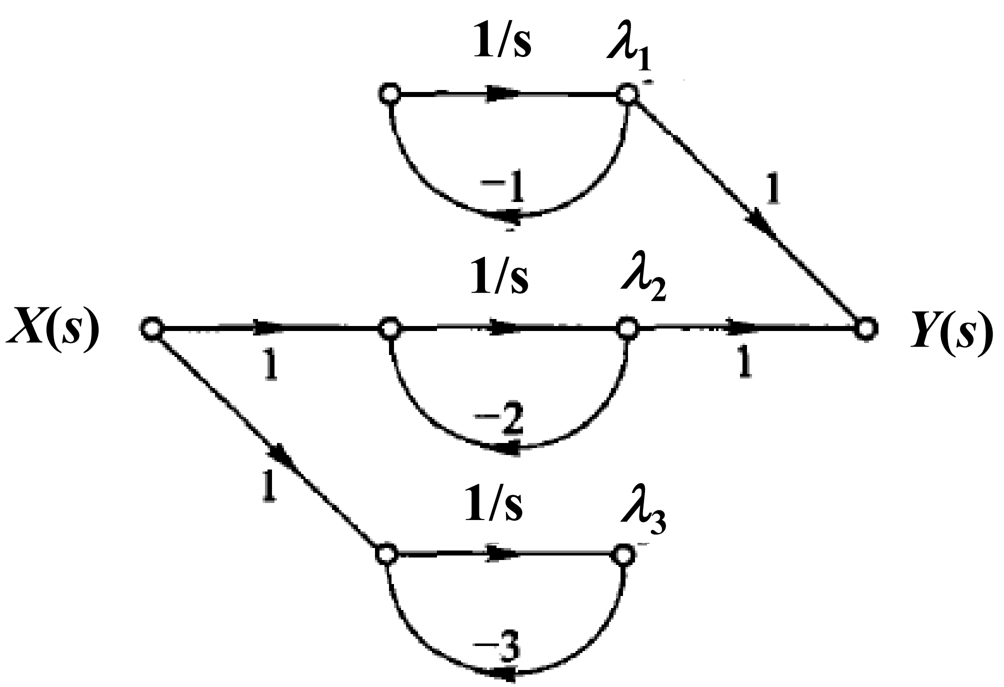
设置

已知一个系统的信号流图由下图所示，可观测的状态变量有（ ）

A λ_1

B λ_2

C λ_3



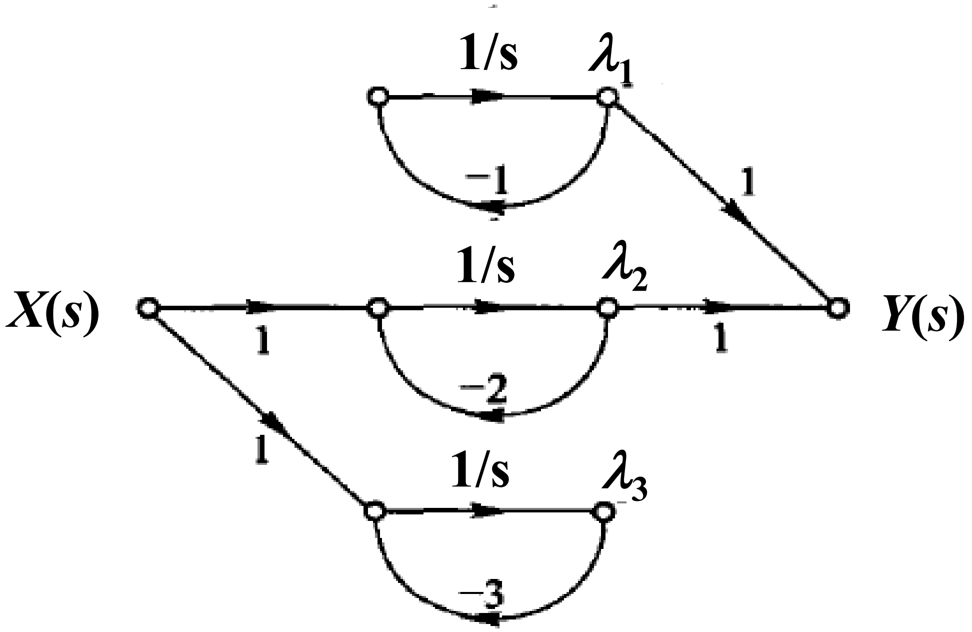
提交

状态变量λ_1 可观不可控。

状态变量λ_3 可控不可观。

状态变量λ_2 可控可观。

此系统不完全可控，不完全可观。



$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}=0$$

当 **A** 矩阵为对角阵时，**B** 矩阵中的 0 元素对应不可控因素， **C** 矩阵中的 0 元素对应不可观因素。

2) 可观测性判则二

定义可观测矩阵

$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\\ \mathbf{CA}^2\\ \vdots\\ \mathbf{CA}^{k\text{-}1}\end{bmatrix}$$

系统完全可观测的充要条件是N满秩,即

$$\operatorname{rank}\mathbf{N}=k$$

上述判则对离散系统同样有效。

12.7.3 系统函数与可控制性、可观测性

在采用输入-输出描述法描述系统时，输出量通过微分方程(或差分方程)直接与输入量相联系，系统函数表征了在这种描述时的系统特性。

应用系统函数考虑系统的可控制性和可观测性的主要步骤：

1) 检查系统的可控制性和可观测性；

2) 求可控与可观测的状态变量的个数；

3) 求系统的系统函数。

如果系统函数有零极点相消现象，消去的部分必定是不可控或不可观部分，留下的部分是可控或可观的部分。所以转移函数只反映了系统中可控可观那部分的运动规律，对系统的描述不全面。用状态方程和输出方程描述系统的运动更全面、详尽。

例12-16：给定线性时不变系统的状态方程和输出方程

$$\begin{cases}\dot{\lambda}(t)=\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(t)+\mathbf{B}e(t)\\ r(t)=\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(t)\end{cases}\quad \text{其中}\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\quad \mathbf{C}=[1\quad 0\quad 0]$$

1) 检查该系统的可控性和可观性；2) 求系统的转移函数。

解：1) $\mathbf{M}=(\mathbf{B}\vdots\mathbf{AB}\vdots\mathbf{A}^2\mathbf{B})$

$$=\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\vdots\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\vdots\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 4\\ 1 & -4 & 9\end{bmatrix}$$

M满秩，故系统可控

$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \cdots\\ \mathbf{CA}\\ \cdots\\ \mathbf{CA}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&2&-1\\3&-4&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\3&-4&2\\3&-4&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\3&-4&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

N的秩为2，不满秩，故系统不可观。

2）由状态方程可得

$$H(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+2&-2&1\\0&s+2&0\\-1&4&s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\frac{1}{(s+2)(s+1)^2}\begin{bmatrix}s(s+2)&2(s+2)&-(s+2)\\0&(s+1)^2&0\\s+2&-(4s+6)&(s+2)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)^2}$$