6.1 引言

信号表示式（时间函数）与多维矢量之间存在许多形式上的类似，信号用多维矢量描述便于对信号的性能、信号分析与处理进行更深入的研究。

本章主要内容

- 利用矢量空间方法研究信号理论的基本概念；
- 信号的正交函数分解；
- 相关函数；
- 能量谱和功率谱；
- 匹配滤波器；
- 测不准原理。

6.2.1 线性空间

定义：是这样一种集合，其中任意两元素相加可构成此集合内的另一元素，任意元素与任意数（可以是实数也可以是复数）相乘后得到此集合内的另一元素。

例：N维实数空间$\mathbf{R}^N$　　N维复数空间$\mathbf{C}^N$

定义 1　设V是一个非空集合，R为实数域。如果对于任意两个元素$\alpha,\beta\in V$，总有唯一的一个元素$\gamma=\alpha+\beta$与之对应，称为α与β的和，记作:$\gamma\in\mathbf{V}$

若对于任一数 $\lambda\in R$与任一元素$\alpha\in V$，总有唯一的元素$\delta\in V$与之对应，称为α与λ 的积，记作：$\delta=\lambda\alpha$

6.2.2 范数

线性空间中元素**x**的范数以符号 $\|\mathbf{x}\|$表示，满足以下公理：

(1) 正定性 $\|\mathbf{x}\| \geq 0$,当且仅当$\mathbf{x}=0$时$\|\mathbf{x}\|=0$;

(2) 正齐性 对所有数量α,有$\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$;

(3) 三角形不等式 $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$。

1. R^N与C^N空间的范数：

令p为实数,$1\leq p \leq \infty$,在R^N与C^N空间元素$x=\left(x_1, x_2, \cdots, x_N\right)$

的p阶范数定义为

$$\|x\|_p \underline{\underline{\mathrm{def}}} \begin{cases} \left[\sum\limits_{i=1}^{N}|x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} & \text{对于} 1\leq p \leq \infty \\ \max\limits_{1\leq i\leq N}|x_i| & \text{对于} p\to\infty \end{cases}$$

常用范数：

若 $x=(1,j)$

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=1+1=2$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max(1,1)=1$$

在二维或三维实数矢量空间中，二阶范数的物理意义是矢量的长度。$\|\boldsymbol{x}\|_2$ 也称为欧氏(Euclidean)范数或欧氏距。

2. 连续时间信号空间*L*和离散时间信号空间*l*中的范数

“上确界”的概念是数学分析中最基本的概念。

考虑一个实数集合M，如果有一个实数S，使得M中任何数都不超过S, 就称S是M的一个上界。在所有那些上界中如果有一个最小的上界，就称为M的上确界。

一个有界数集有无数个上界和下界，但是上确界只有一个。

用sup表示信号的上确界，对于定义在闭区间内的信号，sup表示其幅度值。

(1)连续时间信号空间L中，元素$x(t)$的p阶范数$\|\mathbf{x}\|_p$的定义:

$$\|\mathbf{x}\|_p=\begin{cases}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{1/p} & 1\le p<\infty\\ \sup|x(t)| & p=\infty\end{cases}$$

(2)离散时间信号空间l中，元素$x(n)$的p阶范数$\|\mathbf{x}\|_p$的定义:

$$\|\mathbf{x}\|_p=\begin{cases}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(|x(n)|^p\right)\right]^{1/\mathrm{p}} & 1\le p<\infty\\ \sup|x(n)| & p=\infty\end{cases}$$

(3) 常用的范数

一阶范数表示信号作用的强度。

$$\|\mathbf{x}\|_1=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\mathrm{d}t \qquad \text{L空间}$$

$$\|\mathbf{x}\|_1=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)| \qquad l\text{空间}$$

二阶范数

L空间 $\|\mathbf{x}\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2}$ 即 $\|\mathbf{x}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$

*l*空间 $\|\mathbf{x}\|_2 = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2\right]^{1/2}$ 即 $\|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$

物理意义：二阶范数的平方表示信号的能量。

L空间 $\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \sup|x(t)|$

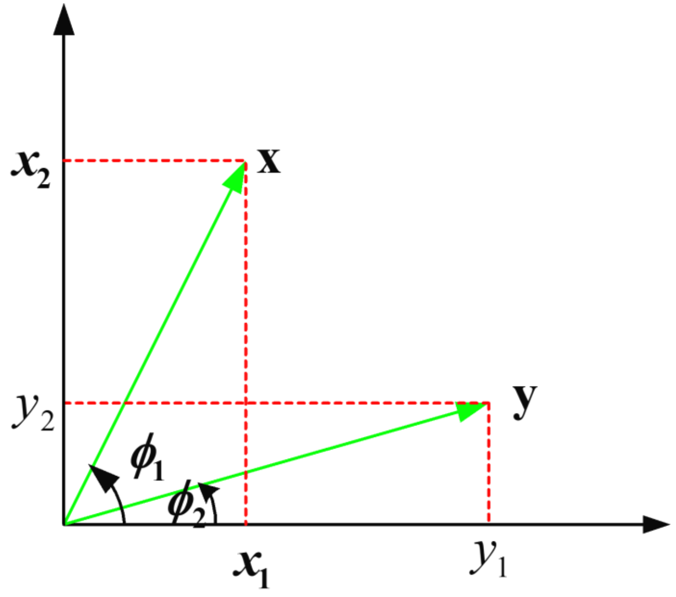
*l*空间 $\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \sup|x(n)|$

物理意义：对于定义在闭区间上的$x(t)$, $\|x\|_{\infty}$表示信号可测得的峰值，即信号的幅度。

6.2.3 内积

直角坐标平面内两矢量相对位置关系

$$\cos(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{x_1y_1+x_2y_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}\left(y_1^2+y_2^2\right)^{1/2}}$$



利用范数符号，将矢量长度分别写作

$$\|\mathbf{x}\|_2=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}$$

$$\|\mathbf{y}\|_2=\left(y_1^2+y_2^2\right)^{1/2}$$

于是：

$$x_1y_1+x_2y_2=\|\mathbf{x}\|_2\|\mathbf{y}\|_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

$x_1y_1+x_2y_2$对应于二维矢量空间的内积（点积）运算

$$x_1y_1 + x_2y_2 = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

上式表明：给定的矢量长度，标量乘积式反映了两矢量之间相对位置的“校准”情况。即

$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$,两矢量之夹角为$90^\circ$,标量乘积为零

$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$,两矢量夹角为$0^\circ$,标量乘积取最大值

推广：

三维 $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

多维 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$　　N维实线性空间

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i^*$　　N维复线性空间

信号空间 L内的两连续信号的内积

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t)^{*} \mathrm{d}t$$ 连续时间信号

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \sum_{n\in \mathrm{Z}} x(n)\, y(n)^{*}$$ 离散时间信号

对于L空间或l空间，信号x与其自身的内积运算为

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^{2} \mathrm{d}t = \|\mathbf{x}\|_2^2$$ 连续

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \sum_{n\in Z}^{\infty} |x(n)|^{2} = \|\mathbf{x}\|_2^2$$ 离散

6.2.4　柯西—施瓦茨不等式

柯西—施瓦茨（Cauchy-Schwarz）不等式：

$$\left|\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\right|^2 \le \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$$

证明：对于二维矢量空间，已知有如下关系

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

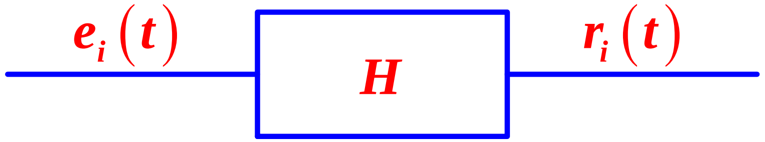
即 $\dfrac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2} = \cos(\phi_1 - \phi_2)$ 则有 $-1 \le \dfrac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2} \le 1$

$\dfrac{\left|\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\right|^2}{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle} \le 1$　所以 $\left|\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\right|^2 \le \langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle$

信号分解的目的

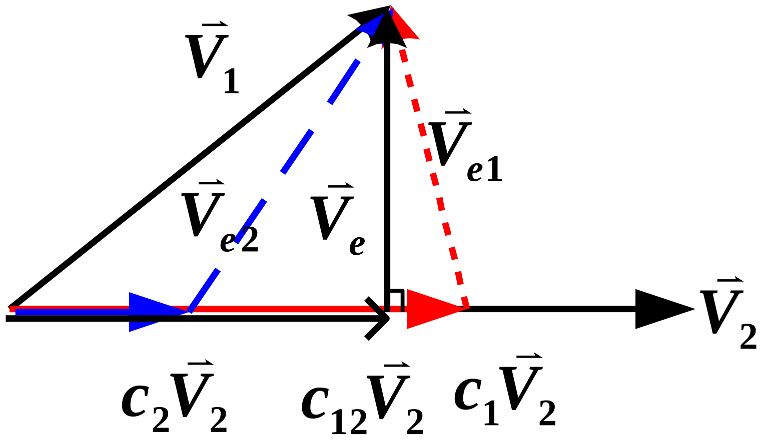
- 任意信号分解为单元信号之和，从而考查信号的特性。
- 简化系统分析与运算， 总响应=单元响应

$$e(t)=\sum_{i=0}^{n} e_i(t)$$



$$r(t)=H\left[e(t)\right]=H\left[\sum_{i=0}^{n} e_i(t)\right]=\sum_{i=0}^{n} r_i(t)$$

6.3.1 矢量的正交分解



$\vec{V}_1$用$\vec{V}_2$表示，方式不是惟一的：

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= c_1\vec{V}_2 + \vec{V}_{e1}\\ &= c_2\vec{V}_2 + \vec{V}_{e2}\\ &= c_{12}\vec{V}_2 + \vec{V}_e\end{aligned}$$

怎样分解，能得到最小的误差分量？

$\vec{V}_e \perp \vec{V}_2 \quad \vec{V}_1 = c_{12}\vec{V}_2 + \vec{V}_e$ 误差矢量

$$c_{12}V_2 = V_1\cos(\vec{V}_1\Lambda\vec{V}_2)$$

系数 $c_{12} = \dfrac{V_1\cos(\vec{V}_1\Lambda\vec{V}_2)}{V_2} = \dfrac{V_1V_2\cos(\vec{V}_1\Lambda\vec{V}_2)}{V_2V_2} = \dfrac{\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2}{\vec{V}_2\cdot\vec{V}_2}$

$\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2 = 0$ 即 $c_{12} = 0$ 两矢量正交

- 平面中任一矢量可分解为x, y二方向矢量。
- 空间中任一矢量可分解为x, y, z三方向矢量。
- 一个三维空间矢量$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{h}$，必须用三个正交的矢量来表示，如果用二维矢量表示就会出现误差：

$$\vec{V} \approx x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \vec{V}_e = z\vec{h} \neq 0$$

6.3.2　正交函数

在区间$(t_1 < t < t_2)$内，信号$f_1(t)$用$f_2(t)$表示，即

$$f_1(t) \approx c_{12} f_2(t)$$

误差 $\overline{\varepsilon}^2 = \overline{f_e^2(t)} = \dfrac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t) - c_{12} f_2(t)\right]^2 \mathrm{d}t$

为求使$\overline{\varepsilon^2}$最小的c_{12},必需使 $\dfrac{\mathrm{d}\overline{\varepsilon^2}}{\mathrm{d}c_{12}} = 0$,求得系数

$$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)\cdot f_2(t)\,\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t)\,\mathrm{d}t} = \frac{\langle f_1(t), f_2(t)\rangle}{\langle f_2(t), f_2(t)\rangle}$$

若$c_{12} = 0$,则$f_1(t), f_2(t)$称为正交函数，满足

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

6.3.3 相关系数

分解的原则：$f_e(t)$的方均值最小，即误差信号功率(能量)最小。

求系数c_{12}

令$\overline{\varepsilon^2} = \overline{f_e^2(t)} = \dfrac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f_e^2(t)\,\mathrm{d}t$，求$\overline{\varepsilon^2}$最小时的$c_{12}$，

即求出$\dfrac{\mathrm{d}\overline{\varepsilon^2}}{\mathrm{d}c_{12}} = 0$时的$c_{12}$，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c_{12}}\left\{\int_{t_1}^{t_2}[f_1(t) - c_{12} f_2(t)]^2\,\mathrm{d}t\right\} = 0$$

交换微积分次序

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c_{12}}\left[f_1^2(t) - 2c_{12} f_2(t) f_1(t) + f_2^2(t) c_{12}^2\right]\mathrm{d}t = 0$$

(1) (2) (3)

先微分

$$(1)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c_{12}} f_1^2(t) = 0 \qquad (\text{因为} f_1(t) \text{不含} c_{12})$$

$$(2)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c_{12}}\left[-2c_{12} f_1(t)\cdot f_2(t)\right] = -2 f_1(t)\cdot f_2(t)$$

$$(3)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c_{12}}\left[c_{12}^2 f_2^2(t)\right] = 2c_{12} f_2^2(t)$$

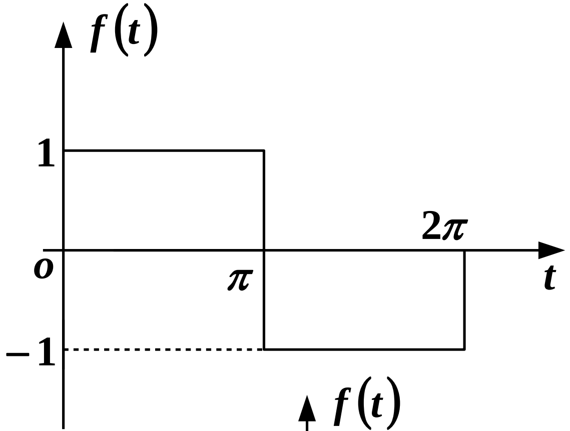
再积分

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[-2 f_1(t)\cdot f_2(t)\right]\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} 2c_{12} f_2^2(t)\mathrm{d}t = 0$$

可得系数为

$$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)\cdot f_2(t)\,\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t)\,\mathrm{d}t} \qquad c_{12} = \frac{\langle f_1(t), f_2(t)\rangle}{\langle f_2(t), f_2(t)\rangle}$$

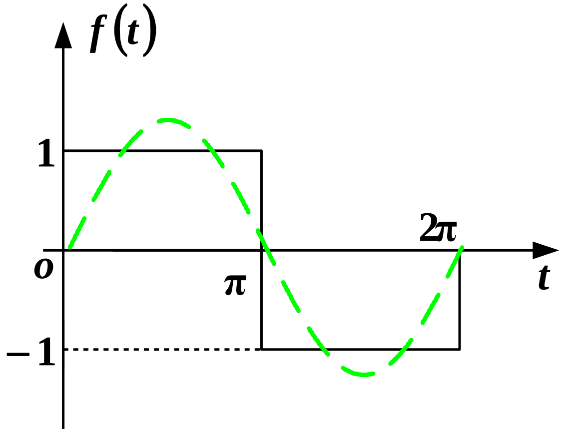
例6-2： 设矩阵脉冲 $f(t)$ 有如下定义，波形如图所示, 试用正弦波 $\sin t$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内近似表示此函数，使均方误差最小。



$$f(t)=\begin{cases}+1 & (0<t<\pi)\\ -1 & (\pi<t<2\pi)\end{cases}$$

解： 函数 $f(t)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内近似为 $f(t)\approx c_{12}\sin t$

$$c_{12}=\frac{\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t}{\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t}=\frac{4}{\pi}$$



所以 $f(t)\approx\frac{4}{\pi}\sin t$ 。近似波形是振幅为 $\frac{4}{\pi}$ 的正弦波 。

与傅里叶级数比较：$\omega_1=2\pi/(2\pi)=1$, 基波的正弦函数的系数为

$$b_1=\frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)\sin(\omega_1 t)dt=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin t dt-\int_{\pi}^{2\pi}\sin t dt\right)=\frac{4}{\pi}$$

例6-3：试用正弦函数$\sin t$在区间$(0,2\pi)$之内来近似表示余弦函数$\cos t$。

解：显然，由于$\int_0^{2\pi} \cos t \sin t \,\mathrm{d}t = 0$

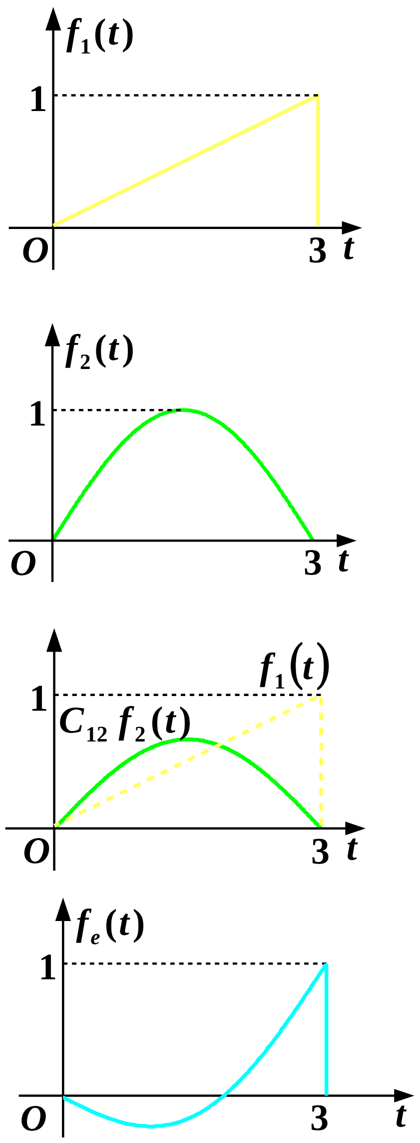
所以 $c_{12} = 0$

即余弦函数$\cos t$不包含正弦信号$\sin t$分量，或者说$\cos t$与 $\sin t$两函数正交。

例6-4：用正弦波逼近三角函数，$f_e(t)=?$

$$f_1(t)=\frac{t}{3},\quad 0\le t\le 3$$

$$f_2(t)=\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right),\quad 0\le t\le 3$$



解：

$$c_{12}=\frac{\int_0^3 f_1(t)\cdot f_2(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^3 f_2^{\,2}(t)\,\mathrm{d}t}=\frac{\int_0^3 \frac{t}{3}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\mathrm{d}t}{\int_0^3\left(\sin\frac{\pi}{3}t\right)^2\mathrm{d}t}=\frac{2}{\pi}$$

所以 $$f_1(t)\approx\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{3}t\qquad(0\le t\le 3)$$

$$f_e(t)=f_1(t)-c_{12}f_2(t)$$

6.3.4 正交函数集

任意信号$f(t)$可表示为n维正交函数之和：

$$\boxed{f(t) \doteq c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots c_r g_r(t) + \cdots + c_n g_n(t) = \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)}$$

原函数　　　　近似函数

$g_1(t), g_2(t) \cdots g_r(t)$相互正交：

$r = 0,1,2,\ldots n$

基底函数 (basis signal)

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) \cdot g_j(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i, & i = j \end{cases}$$

$g_1(t), g_2(t) \cdots g_r(t)$正交函数集

$$c_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t)\,\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} g^2{}_r(t)\,\mathrm{d}t} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t)\,\mathrm{d}t}{K_r} = \frac{< f(t), g_r(t) >}{< g_r(t), g_r(t) >}$$

6.3 信号的正交函数分解

分解原则是误差函数方均值最小

$$\overline{\varepsilon^2}=\overline{f_e^{\,2}(t)}=\underbrace{\frac{1}{t_1-t_2}\int_{t_1}^{t_2}\underbrace{[\underbrace{f(t)-\sum_{r=1}^{n}c_r g_r(t)}_{f_e}]^2\,\mathrm{d}t}_{\text{误差信号能量}}}_{\text{误差信号功率}}$$

令 $\dfrac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial C_1}=0,\dfrac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial C_2}=0,\cdots,\dfrac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial C_r}=0,\cdots,\dfrac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial C_n}=0$ 可得 c_r 表达式

理解:

$$c_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) \mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) \mathrm{d}t} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) \mathrm{d}t}{K_r}$$

• 此公式是个通式，适合于任何正交函数集。

• $c_1, c_2, \cdots c_n$ 是相互独立的，互不影响，计算时先抽取哪一个都可以，非正交函数就无此特性。

• 正交函数集规定：

所有函数应两两正交。

不能因一个函数集中某几个函数相互正交就说该函数集是正交函数。

总结：

- 两周期信号在同一周期内（同区间内）正交的条件是$c_{12}=0$，即：

$$\int_T f_1(t)\cdot f_2(t)\,\mathrm{d}t=0$$

- 对一般信号在给定区间正交，而在其他区间不一定满足正交。
- 两个信号不正交，就有相关关系，必能分解出另一信号。

6.3.5 复变函数的正交特性

两复变函数在区间(t_1,t_2)内相互正交的条件是

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)\cdot f_2^*(t)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2} f_2(t)\cdot f_1^*(t)\mathrm{d}t=0$$

若在区间(t_1,t_2)内，复变函数集$\{g_r(t)\}(r=1,2,\cdots,n)$满足关系

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t)g_i^*(t)\,\mathrm{d}\,t=<g_i(t),g_i(t)>=K_i$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t)g_j^*(t)\,\mathrm{d}\,t=<g_i(t),g_j(t)>=0 \qquad i\neq j$$

则此复变函数集为正交函数集。

用$\{g_r(t)\},(r=0,1,2\cdots,n)$表示$f(t)$,求系数

$$c_r=\frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_r^*(t)\,\mathrm{d}\,t}{\int_{t_1}^{t_2} g_r(t)g_r^*(t)\,\mathrm{d}\,t},$$

6.4.1 完备正交函数集

$$f(t) \doteq c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots c_r g_r(t) + \cdots + c_n g_n(t) = \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)$$

定义1：

当n增加时，$\overline{\varepsilon^2}$下降，若$n \to \infty$，则$\overline{\varepsilon^2} \to 0$，此时$g_1(t), g_2(t) \cdots$ $g_r(t) \cdots, g_n(t)$为完备的正交函数集。

定义2：

如果存在函数$x(t)$，有$\int_{t_1}^{t_2} g_r(t) \cdot x(t)\,\mathrm{d}t = 0$，则$x(t)$必属于此正交函数集，原函数集$g_1(t), g_2(t) \cdots g_r(t) \cdots g_n(t)$不完备。

6.4.2 帕塞瓦尔定理

设 $\{g_r(t)\}$ 为完备的正交函数集，即

误差函数 $\overline{f_e^2(t)} = \dfrac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t) - \sum_{r=1}^{\infty} c_r g_r(t)\right]^2 \mathrm{d}t = 0$

即 $\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\mathrm{d}t - 2\sum_{r=1}^{\infty} c_r \int_{t_1}^{t_2} g_r(t) f(t)\mathrm{d}t + \sum_{r=1}^{\infty} c_r^2 \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t)\mathrm{d}t = 0$

因为 $c_r = \dfrac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t)\mathrm{d}t} \Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t)\mathrm{d}t = c_r \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t)\mathrm{d}t$

代入 $\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\mathrm{d}t - 2\sum_{r=1}^{\infty} c_r c_r \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t)\mathrm{d}t + \sum_{r=1}^{\infty} c_r^2 \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t)\mathrm{d}t = 0$

即 $\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\mathrm{d}t = \sum_{r=1}^{\infty} c_r^2 \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t)\mathrm{d}t = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} [c_r g_r(t)]^2 \mathrm{d}t$

6.4 完备正交函数集、帕塞瓦尔定理

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\mathrm{d}t=\sum_{r=1}^{\infty}C_r^2\int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t)\mathrm{d}t=\sum_{r=1}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2}\left[C_r\, g_r(t)\right]^2\mathrm{d}t$$

信号的能量

基底信号的能量

各信号分量的能量

物理意义：一个信号所含有的能量（功率）恒等于此信号在完备正交函数集中各分量能量（功率）之和。

数学本质：矢量空间信号正交变换的范数（内积）不变性。

傅里叶分析的局限性

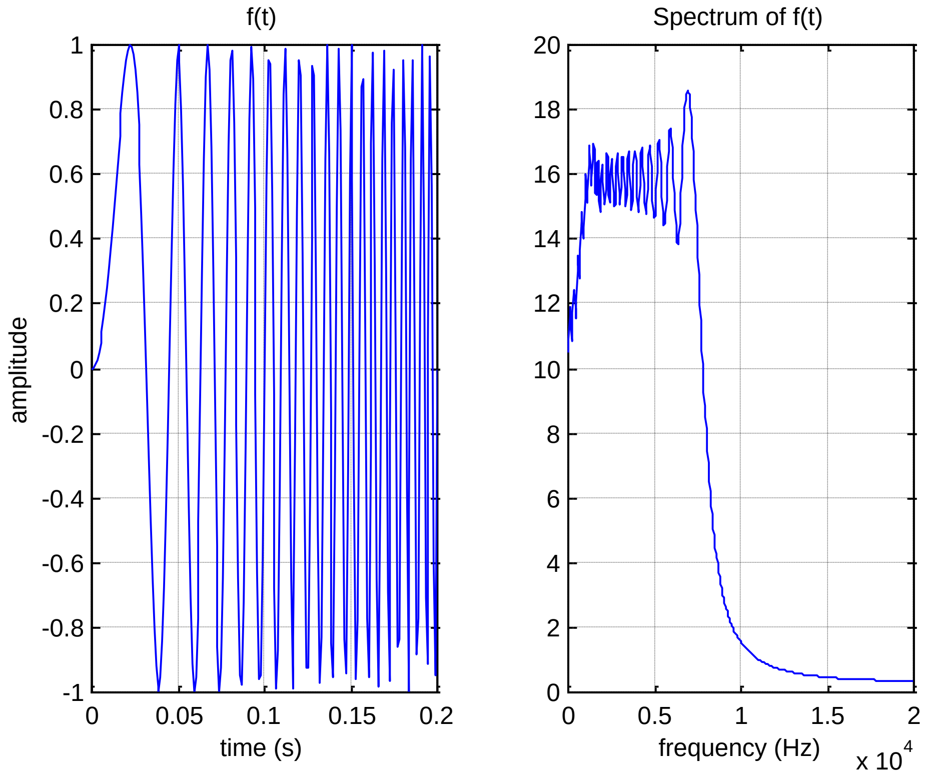
时间和频率是描述信号行为的两个最重要物理量。

傅里叶变换将信号分解成单个谐波频率分量，并建立了每个分量的相对强度。

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

傅里叶变换只能表示信号含有哪些频率成分，无法告诉我们这些频率在什么时候出现。它是一种全局变换，无法表达信号的时频局部性质。



线性调频信号（Chirp信号）的波形和频谱

平稳随机信号

- **狭义平稳随机过程**：随机过程的任何n维分布函数或概率密度函数与时间起点无关，统计特性不随时间的推移而不同。

  对任意正整数n和任意实数τ，n维概率密度函数满足：

$$f_n(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n)$$
$$=f_n(x_1,\cdots x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots t_n+\tau)$$

- **广义平稳随机过程**：信号的均值与方差均与时间无关；自相关函数只与时间间隔有关。

  自相关函数的傅里叶变换是功率谱密度，为一确定函数。

非平稳随机信号：统计特性（均值、方差及自相关函数等）及频谱随时间变化。例如：光谱、音乐、语音、心脏跳动。

傅里叶变换反映不出信号频率随时间变化的行为，因此，它**只适合于分析平稳信号，即时不变信号，而对频率随时间变化的非平稳信号，即时变信号，它只能给出一个总的平均效果。**

时频分析法可将一个信号（一维时间函数）映射成一个时间和频率的二维函数，构成信号的时频谱，描述观察信号的时频联合特征。

常用时频分析法：短时傅里叶变换、小波变换、希尔伯特-黄变换等。

定义一个双参数的基函数 $\psi_{t,\alpha}(\tau)$

τ－运行时间。t－延迟时间。

α取决于所考虑的时频分析的特定类型：

在短时傅里叶变换中，α等于频率ω；

在小波变换中，α等于支配频率成分的缩放参数a。

基函数的性质：

1）标准化：基函数能量为1，即$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi_{t,\alpha}(\tau)\right|^2 d\tau=1$。

2）正交性：$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{t,\alpha}(\tau)\psi_{t',\alpha'}^{*}(\tau)d\tau=0$

从一个受限的可能值集中选择参数t，α和t'，α'，使其满足正交条件。

6.9 测不准(不定度)原理

- 分辨率（resolution）是信号处理中的基本概念，它包括时间分辨率和频率分辨率，其含义是指对信号能作出辨别的时域或频域的最小间隔。
- 时间分辨率和频率分辨率分别是通过一个时域或频域的窗函数来观察信号时所看到的时间和频率的宽度。窗函数越窄，相应的分辨率就越好。
- 对在时域具有瞬变的信号，我们希望时域的分辨率要好（即时域的观察间隔尽量短），以保证能观察到该瞬变信号发生的时刻及瞬变的形态。
- 分辨能力的好坏一是取决于信号的特点，二是取决于信号的长度，三是取决于所用的算法。
- 信号的时间中心，时间宽度，频率中心，频率宽度是非常重要的概念。它们分别说明了信号在时域和频域的中心位置以及在两个域内的扩展情况。是讨论各种信号处理算法的基础。

6.9 测不准(不定度)原理

信号能量： $E = \| x(t) \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | x(t) |^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} | X(\omega) |^2 \, d\omega < \infty$

时域能量密度： $\left| x(t) \right|^2 / E$

频域能量密度： $\left| X(\omega) \right|^2 / E$

时间中心： $\mu(t) = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t \, | x(t) |^2 \, dt = t_0$ 时间均值

频率中心： $\mu(\omega) = \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \, | X(\omega) |^2 \, d\omega = \omega_0$ 频率均值

时间宽度（ time-duration ）: Δ_t

$$\Delta_t^2 = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}(t-t_0)^2 \,|x(t)|^2\, dt$$

$$= \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \,|x(t)|^2\, dt - \frac{2t_0}{E}\int_{-\infty}^{\infty} t\,|x(t)|^2\, dt + \frac{t_0^2}{E}\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt$$

$$= \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \,|x(t)|^2\, dt - t_0^2$$

***t*较大时*x*(*t*)值也较大的信号持续时间较长。**

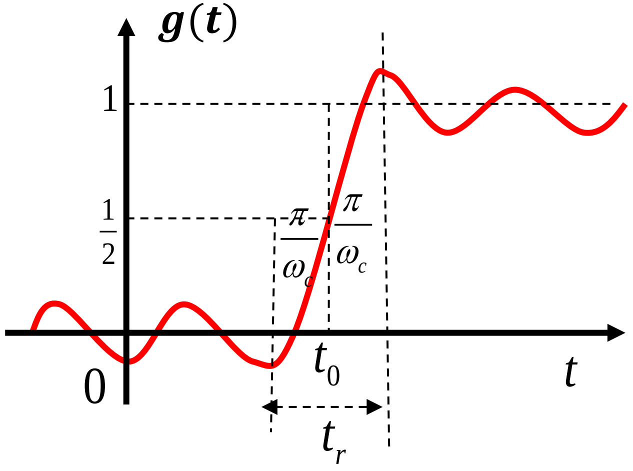
频率宽度（frequency-bandwidth）： Δ_ω

$$\Delta_\omega^2 = \frac{1}{2\pi E}\int_{-\infty}^{\infty}(\omega-\omega_0)^2 \,|X(\omega)|^2\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi E}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2 \,|X(\omega)|^2\, d\omega - \omega_0^2$$

时宽一带宽积： $\Delta_t\Delta_\omega$

由5.5节可知，理想低通滤波器阶跃响应的上升时间t_r与系统带宽B之间存在一种约束关系，即：$t_r B$ =常数。



$$g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si[\omega_c(t-t_0)]$$

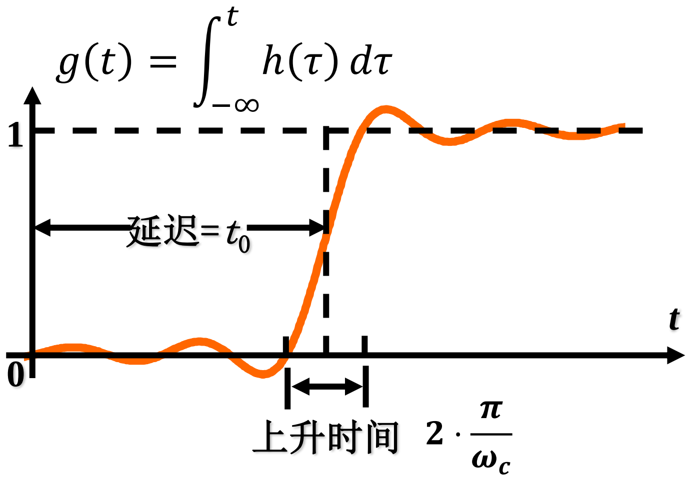
上升时间t_r：输出由最小值到最大值所需要的时间。

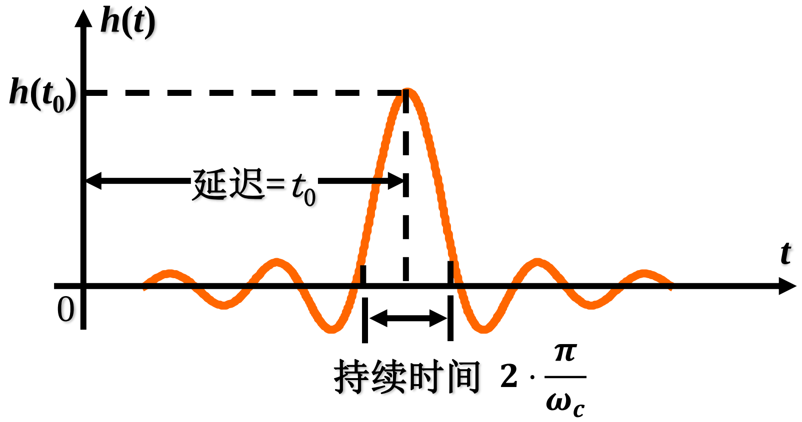
$$t_r=2\cdot\frac{\pi}{\omega_c}$$

其中ω_c为系统的截止频率（带宽）。

$$t_r\omega_c=2\pi$$

滤波器阶跃响应$g(t)$ 的上升时间对应冲激响应$h(t)$ 的脉冲宽度。冲激响应的时宽与频宽乘积也为常数$t_r\omega_c=2\pi$。





系统的时间分辨率和频率分辨率不可能同时达到最好，即时宽与带宽不可能同时趋于无限小。

测不准(不定度)原理

给定信号$x(t)$，若$\lim_{t\to\infty}\sqrt{t}\,x(t)=0$，则其时宽频宽积$\Delta_t\Delta_\omega\geq\frac{1}{2}$。
当且仅当$x(t)$为高斯信号时，即$x(t)=Ae^{-\alpha t^2}$，等号成立。

证明：利用Schwarz不等式，详见教材6.10节。

在测不准(不定度)原理制约下，人们在竭力探索既能得到好的时间分辨率（或窄的时宽）又能得到好的频率分辨率（或窄的带宽）的信号分析方法，也可根据信号的特点及信号处理任务的需要选取不同的时间分辨率和频率分辨率。

在物理中，微观粒子的位置与动量、时间与能量等各组成对量之间也存在不定度关系。成对量之间一个量测量越精准，另一个测量误差就越大。

连续时间信号：

$f(t)$是连续变化的t的函数，除若干不连续点之外对于任意时间值都可以给出确定的函数值。函数的波形都是具有平滑曲线的形状，一般也称模拟信号。

连续时间系统：

系统的输入、输出都是连续时间信号。如物理学、近代电路理论、模拟通信系统等。

判断正误：对连续时间信号抽样所得的信号为数字信号。

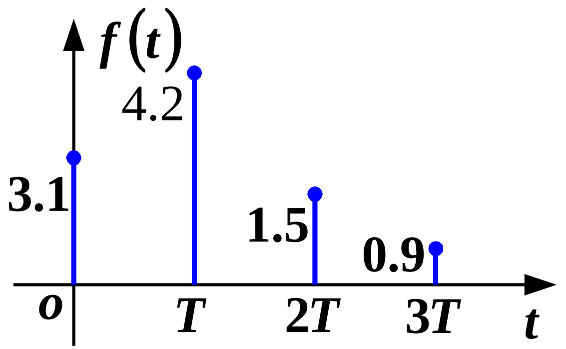
A 正确

B 错误

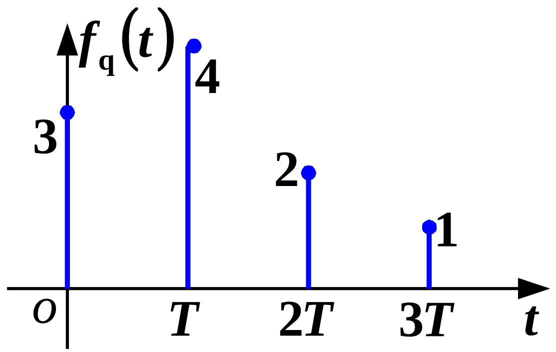
提交

离散时间信号：时间变量是离散的，函数只在某些规定的时刻有确定的值，在其他时间没有定义。

离散时间信号可以由模拟信号采样而得，也可以由实际系统生成。



抽样过程——得到离散时间信号。



幅值量化——幅值只能分级变化。

数字信号：离散时间信号在各离散点的幅值被量化的信号。

离散时间系统： 系统的输入、输出都是离散的时间信号。如计算机、数值分析、统计学、经济学等。

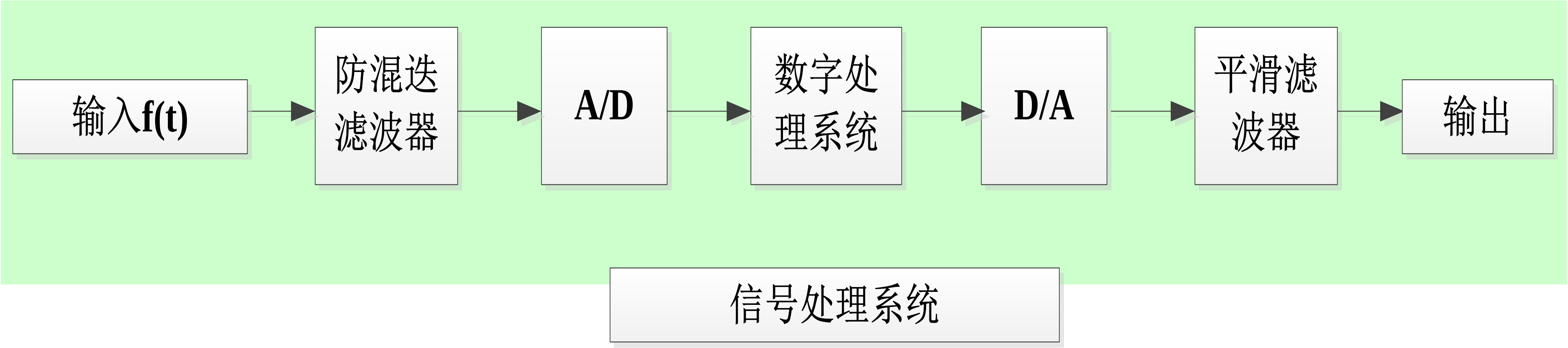
离散时间系统的优点：
1、便于实现大规模集成，体积小、重量轻、低功耗；
2、可靠性高、精度高（取决于二进制数的位数）；
3、利用存储器存储信息，功能灵活；
4、易消除噪声，易处理低频信号；
5、处理多维信号；
6、可编程技术提高灵活性和通用性。

不能认为数字技术将取代一切连续时间系统的应用。

- 人类在自然界中遇到的待处理信号相当多的是连续时间信号，需经A/D（模/数）、D/A（数/模）转换。
- 当频率较高时，直接采用数字集成器件尚有一些困难，有时，用连续时间系统处理或许比较简便。

7.1 引言

混合系统：连续时间系统与离散时间系统联合应用。如自控系统、数字通信系统。



最佳的协调模拟与数字部件已成为系统设计师的首要职责。

7.1 引言

连续时间系统	vs.	离散时间系统
• 微分方程		• 差分方程
• 卷积积分		• 卷积和
• 拉氏变换		• z变换
• 傅里叶变换		• 离散时间傅里叶变换、离散傅里叶变换
• 系统函数		• 系统函数
• 卷积定理		• 卷积定理

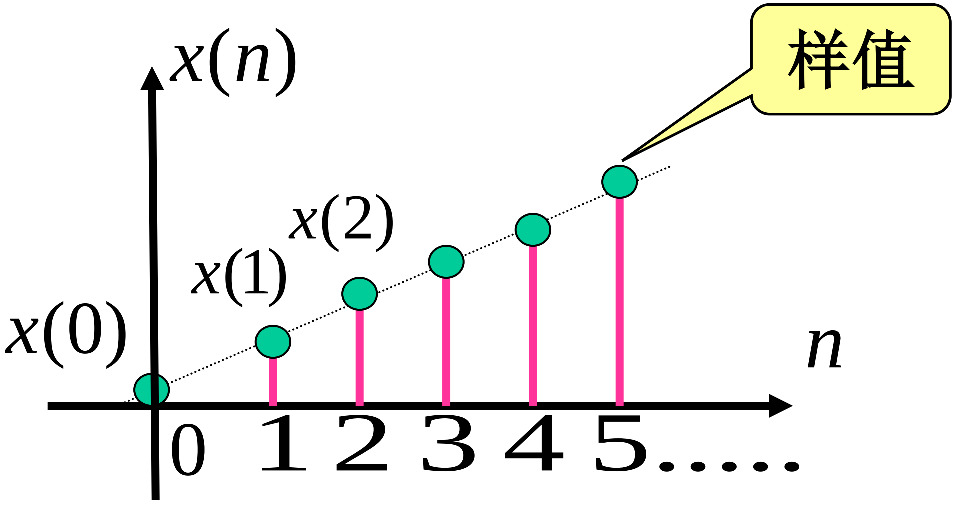
离散时间信号（序列）： 在时间上是离散的，只在某些不连续的规定时刻给出函数值，在其他时间没有定义。

离散时刻的间隔是均匀的，设为T

离散时间信号表示 $\{x(nT)\}$ 或 $\{x(n)\}$，$n\in Z, -\infty<n<\infty$

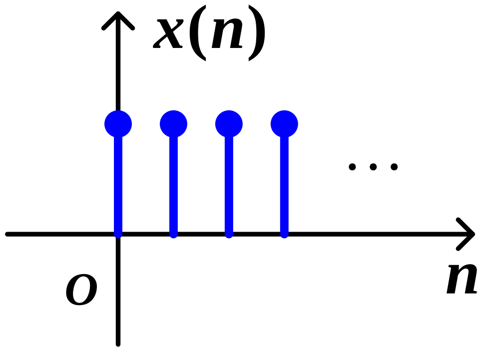
为了简便，以$x(n)$表示序列。

- 列出值，如$x(n)=\{1,2,3\}$
- 闭合解，如$x(n)=a^n u(n)$
- 图解表示，如图

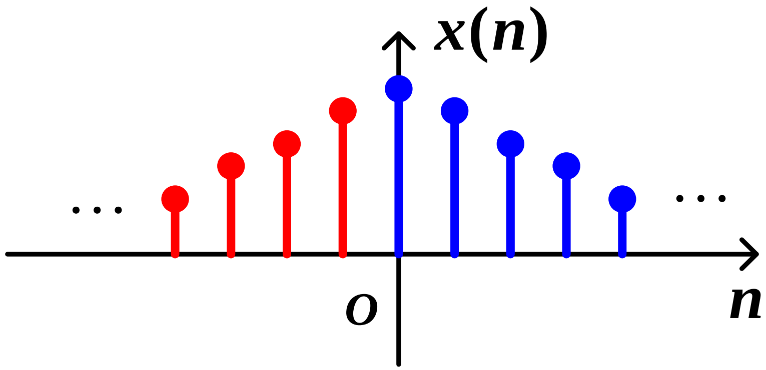


序列的三种形式：

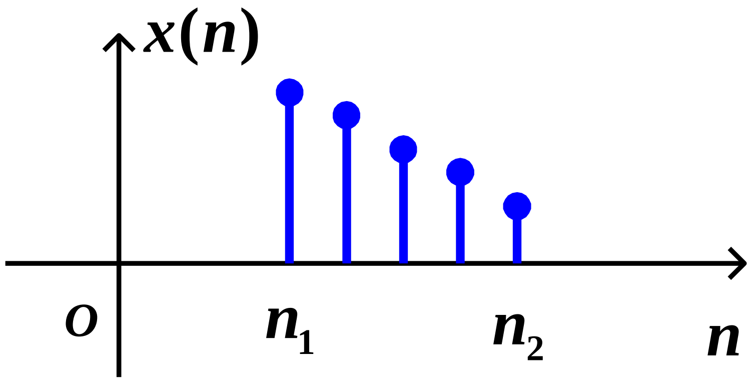
单边序列：$n \geq 0$;



双边序列:$-\infty \leq n \leq \infty$;



有限长序列：$n_1 \leq n \leq n_2$;

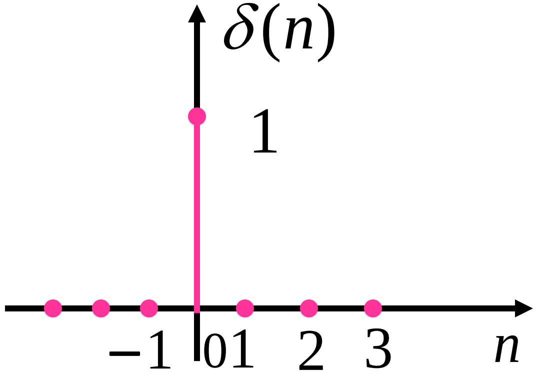


7.2 离散时间信号–序列

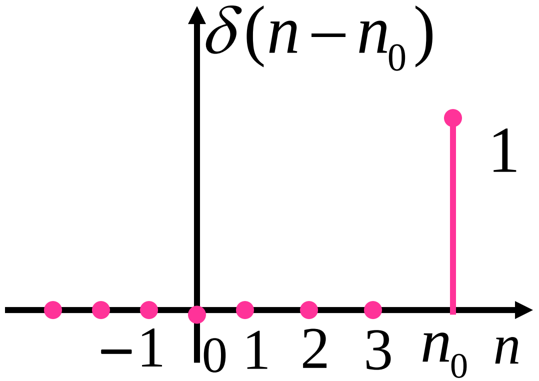
7.2.1 常用的典型序列

1、单位样值信号（Unit Sample/ Unit Impulse）

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 0 & (n\neq 0)\end{cases}$$



$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1 & (n=n_0)\\ 0 & (n\neq n_0)\end{cases}$$



注意：$\delta(t)$ 用面积（强度）表示，（ $t\to 0$，幅度为 ∞）；
$\delta(n)$ 在n=0取有限幅值为1（不是面积）。

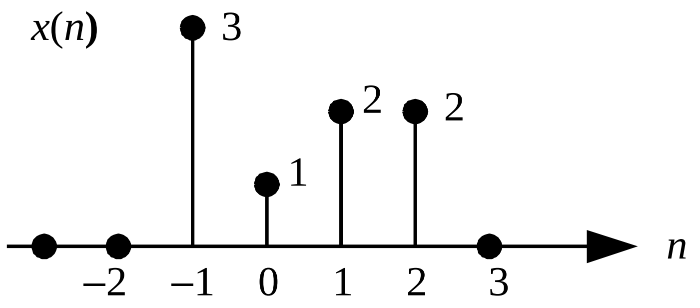
7.2 离散时间信号–序列

利用单位样值序列表示任意离散时间信号

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

其中 $x(m)\delta(n-m)=\begin{cases}x(n) & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}$

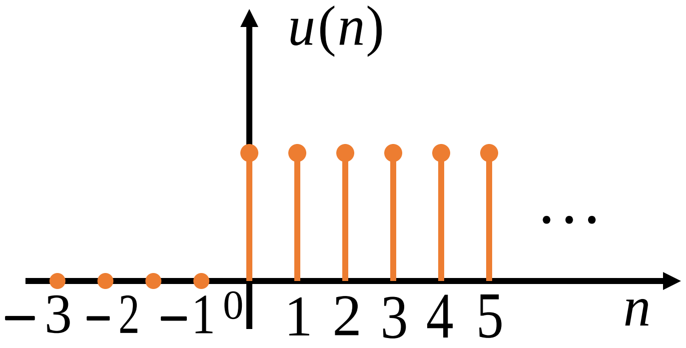
任意序列为加权、延迟的单位样值信号之和。



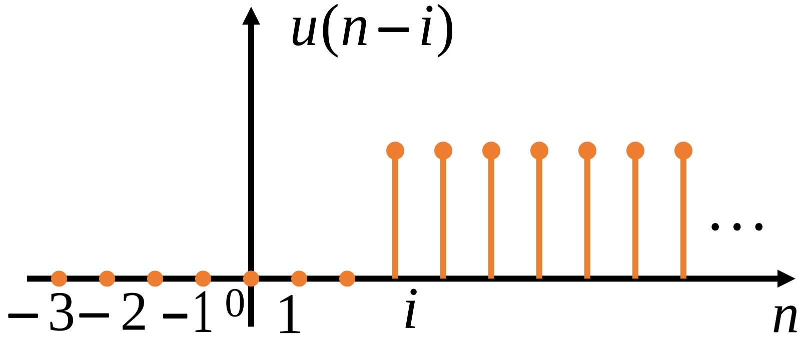
$$x(n)=3\delta(n+1)+\delta(n)+2\delta(n-1)+2\delta(n-2)$$

2、单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1 & (n\geq 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$$



$$u(n-i)=\begin{cases}1 & (n\geq i)\\ 0 & (n<i)\end{cases}$$

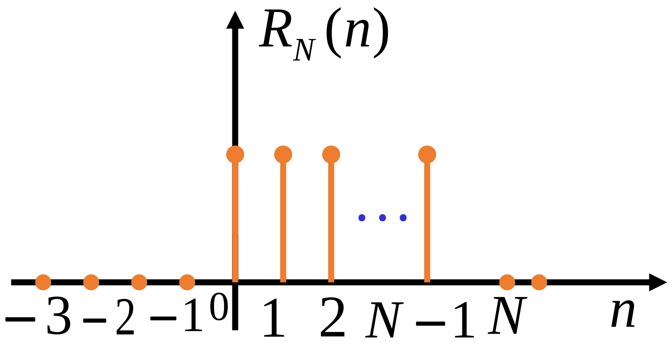


$$\begin{cases}u(n)=\sum_{K=0}^{\infty}\delta(n-K)\\ \delta(n)=u(n)-u(n-1)\end{cases}$$

$\delta(n)$与$u(n)$是差和关系，不再是微积分关系。

3、矩形序列

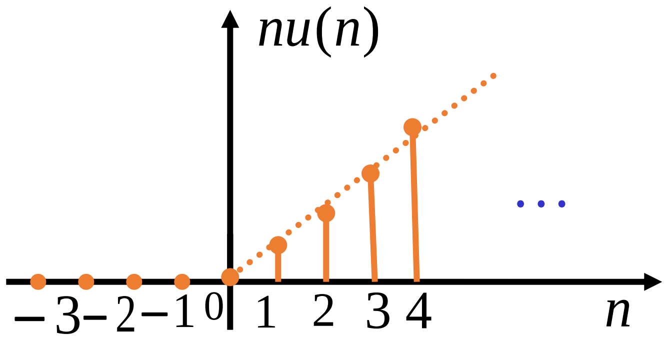
$$R_N(n)=\begin{cases}1 & (0\le n\le N-1)\\ 0 & (n<0\,,n\ge N)\end{cases}$$



$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)=\sum_{k=0}^{N-1}\delta(n-k)$$

4、斜变序列

$$x(n)=nu(n)$$

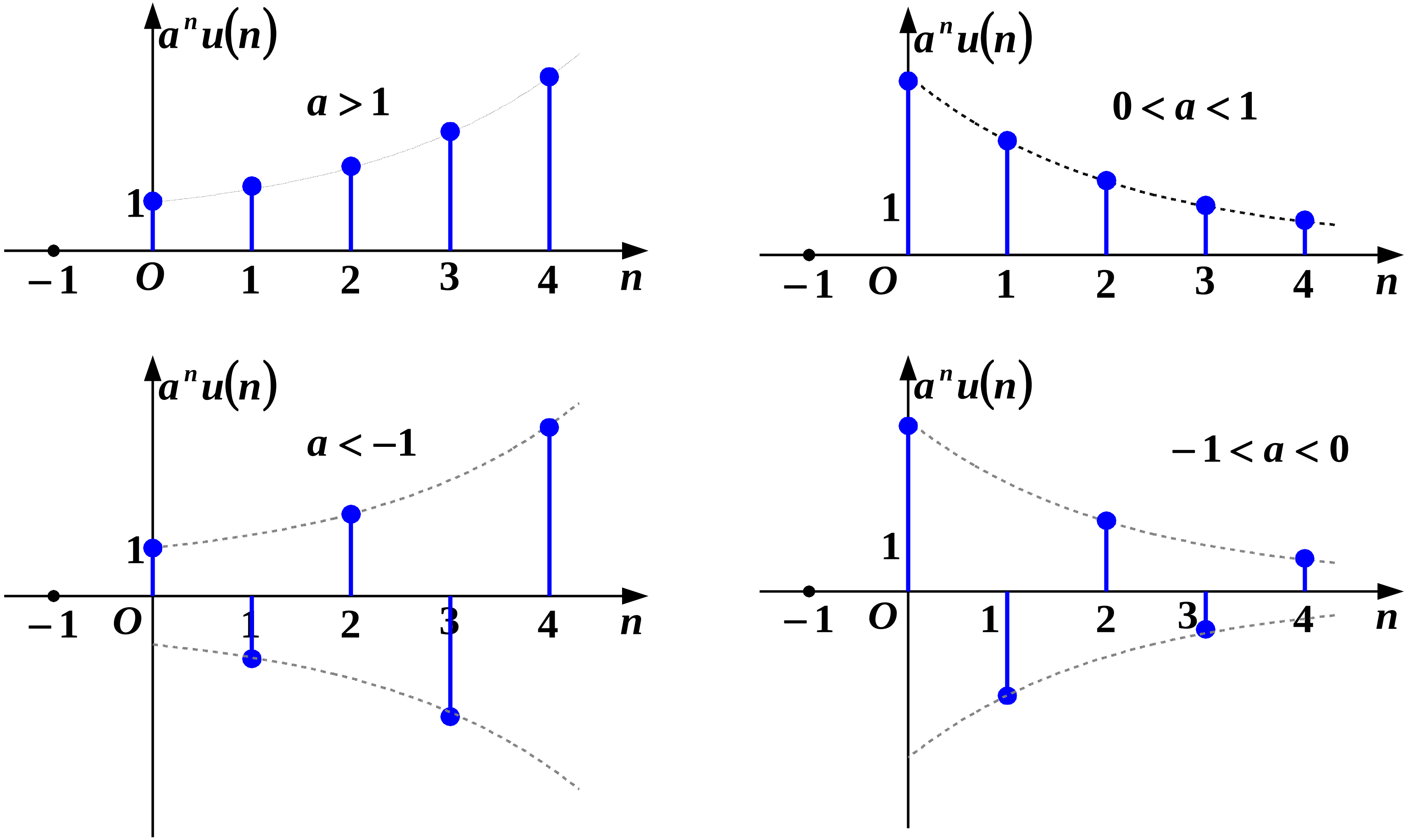


5、实指数序列

$$x(n)=a^n u(n)$$

当 $|a|>1$ 时序列是发散的；

当 $|a|<1$ 时序列是收敛的。

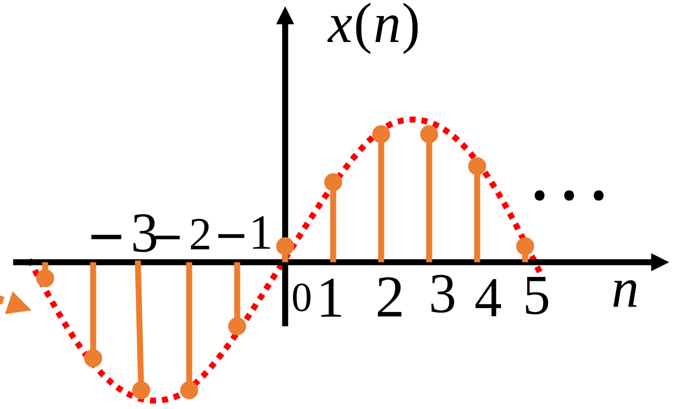


6、正弦序列

$$f(t)=\sin\Omega_0 t$$

$$x(n)=f(nT)$$

$$=\sin(\Omega_0 nT)=\sin(n\omega_0)$$



其中ω_0是正弦序列的频率，反映序列值依次周期性重复的速率。例如，$\omega_0=2\pi/10$。

$$\omega_0=\Omega_0 T=\frac{\Omega_0}{f_s}$$

ω_0是Ω_0对于f_s取归一化值

设置

单选题 1分

序列 $\sin\frac{4\pi}{11}n$ 和 $x(n)=\sin(0.4n)$ 是否为周期信号？若是，其周期分别为多少？

A 是，**11/2**；是，5π

B 是，**11/2**；否

C 否；是，5π

D 是，**11**；否

提交

正弦序列周期性的判别：

① $\dfrac{2\pi}{\omega_0}=N$，N 是正整数

$$\sin\left[\omega_0\left(n+N\right)\right]=\sin\left[\omega_0\left(n+\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right]=\sin\left(\omega_0 n+2\pi\right)=\sin\left(\omega_0 n\right)$$

正弦序列是周期的，周期为**N**。

② $\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{N}{m},\dfrac{N}{m}$ 为有理数

$$\sin\left[\omega_0\left(n+N\right)\right]=\sin\left[\omega_0\left(n+m\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right]=\sin\left(\omega_0 n+m\cdot 2\pi\right)=\sin\left(\omega_0 n\right)$$

$\sin\left(\omega_0 n\right)$ 仍为周期的。 周期：$m\dfrac{2\pi}{\omega_0}=N$

③ $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数

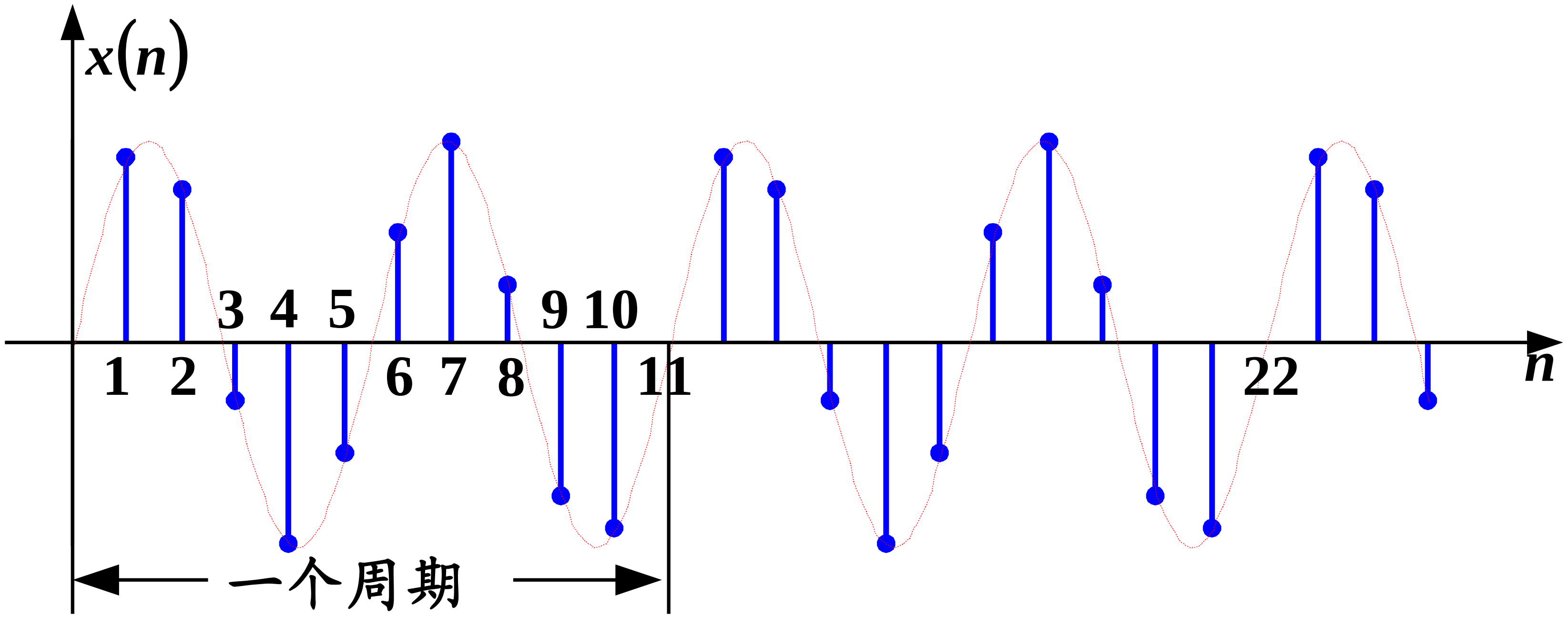
找不到满足 $x\left(n+N\right)=x\left(n\right)$的**N**值，序列为非周期。

例7-1：已知 $\sin\frac{4\pi}{11}n$，求其周期。

解：

$$\omega_0=\frac{4\pi}{11}\text{，则有：}\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\frac{11}{4\pi}=\frac{11}{2}=\frac{N}{m}$$

所以 $N=11$，即周期为11。（2π 中有5.5个ω_0）



7、复指数序列

$$x(n)=e^{j\omega_0 n}=\cos(\omega_0 n)+j\sin(\omega_0 n)$$

复序列可用极坐标表示：

$$x(n)=|x(n)|e^{j\arg[x(n)]}$$

$$|x(n)|=1 \qquad \arg[x(n)]=\omega_0 n$$

一般复指数序列

$$x(n)=Ae^{(\sigma+j\omega_0)n}=Ae^{\sigma n}e^{j\omega_0 n}$$

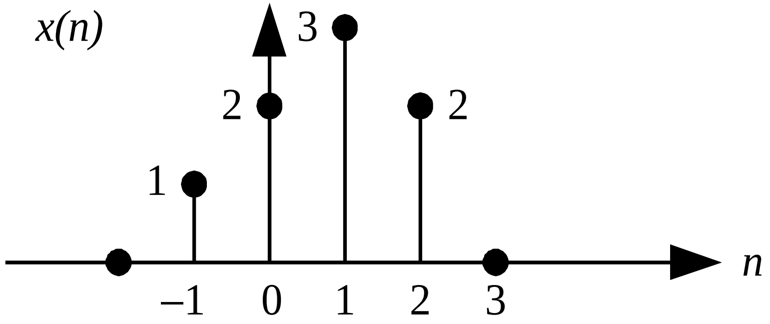
$$|x(n)|=Ae^{\sigma n} \qquad \arg[x(n)]=\omega_0 n$$

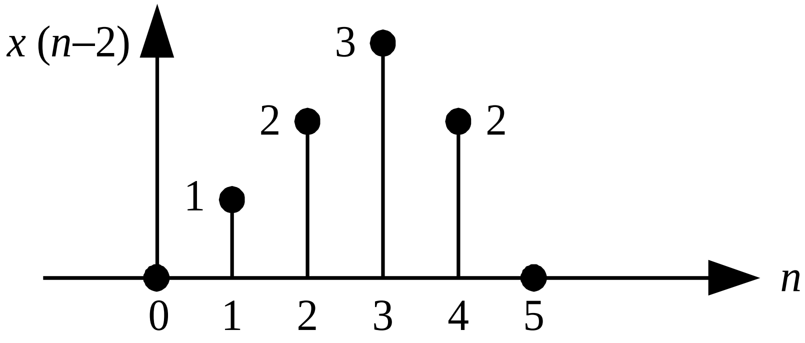
$$x(n)=Ae^{\sigma n}e^{j\omega_0 n}=Ae^{\sigma n}\cos(\omega_0 n)+jAe^{\sigma n}\sin(\omega_0 n)$$

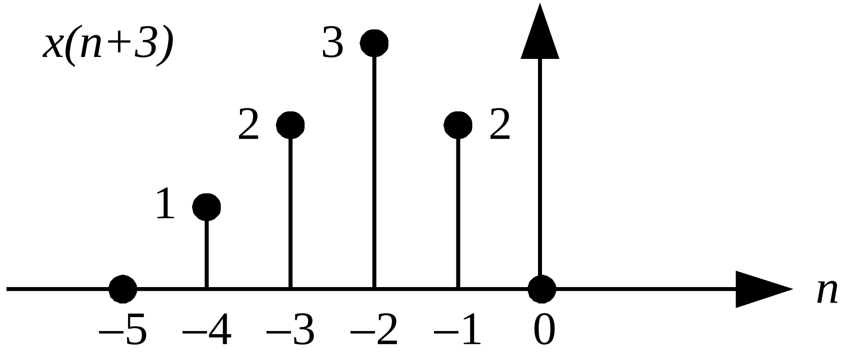
7.2.2 离散时间信号的运算

1、序列的平移

$\left.\begin{array}{l}\textbf{x(n-m) 表示将 x(n)右移m个单位。}\\ \textbf{x(n+m) 表示将 x(n)左移m个单位。}\end{array}\right\} m>0$

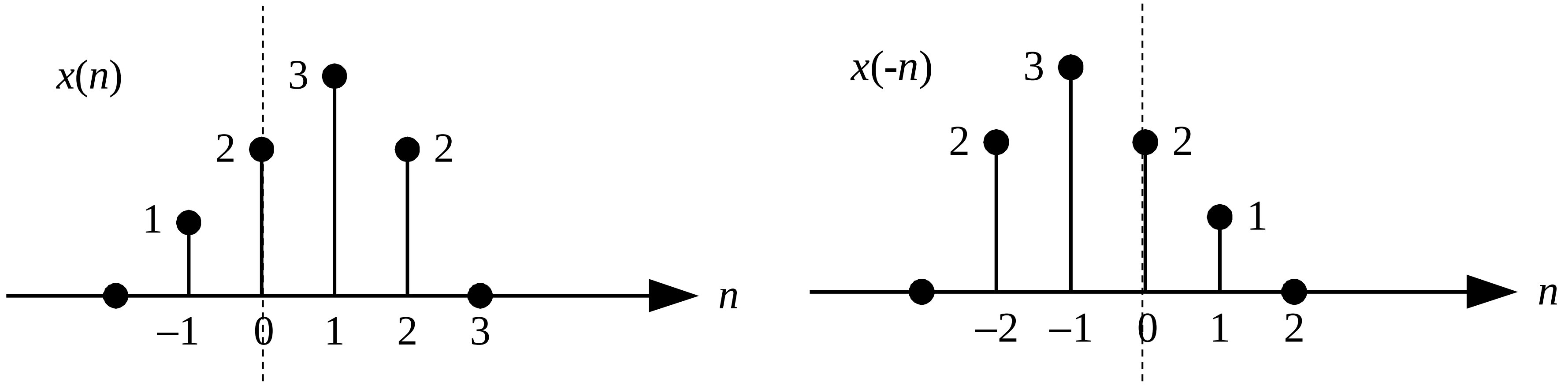






2、序列的反褶

$$x(n) \to x(-n)$$

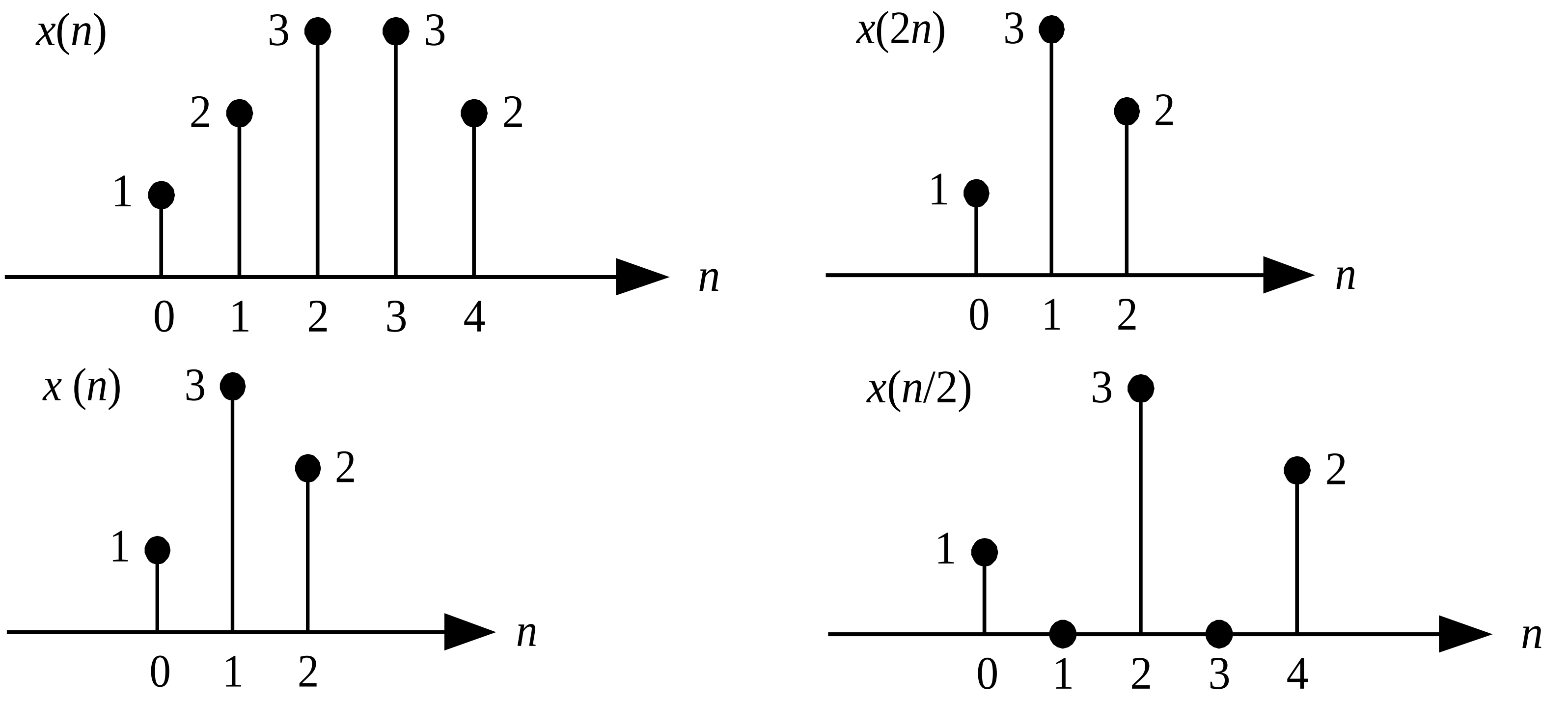


3、序列的尺度变换

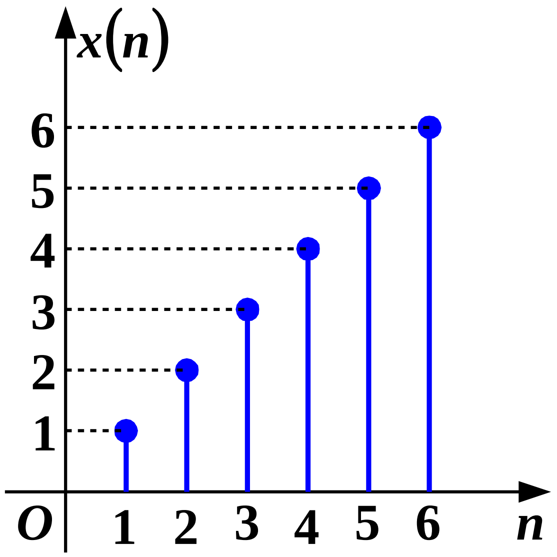
a为正整数

$x(n) \to x(an)$　压缩：原点左右每隔(a-1)点抽取一点

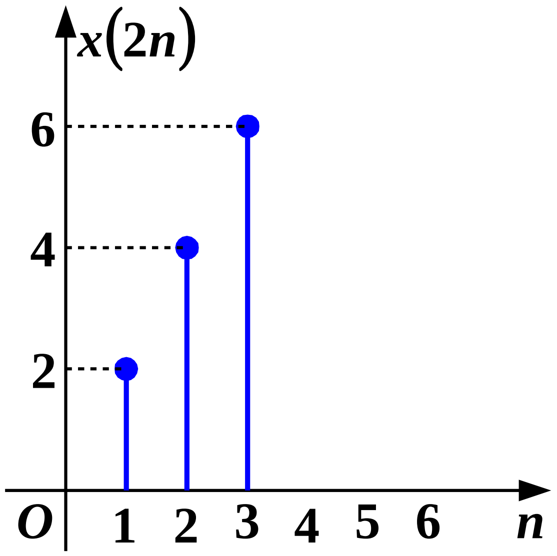
$x(n) \to x\left(\dfrac{n}{a}\right)$　扩展：相邻两点之间插入(a-1)个零值点

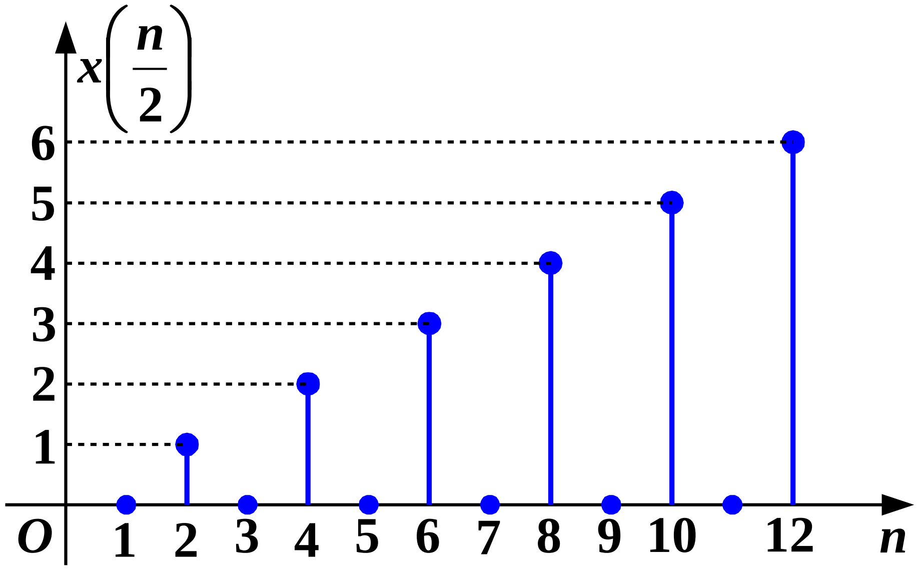


例7-2： 已知$x(n)$波形，请画出$x(2n)$和$x(n/2)$的波形。



解：

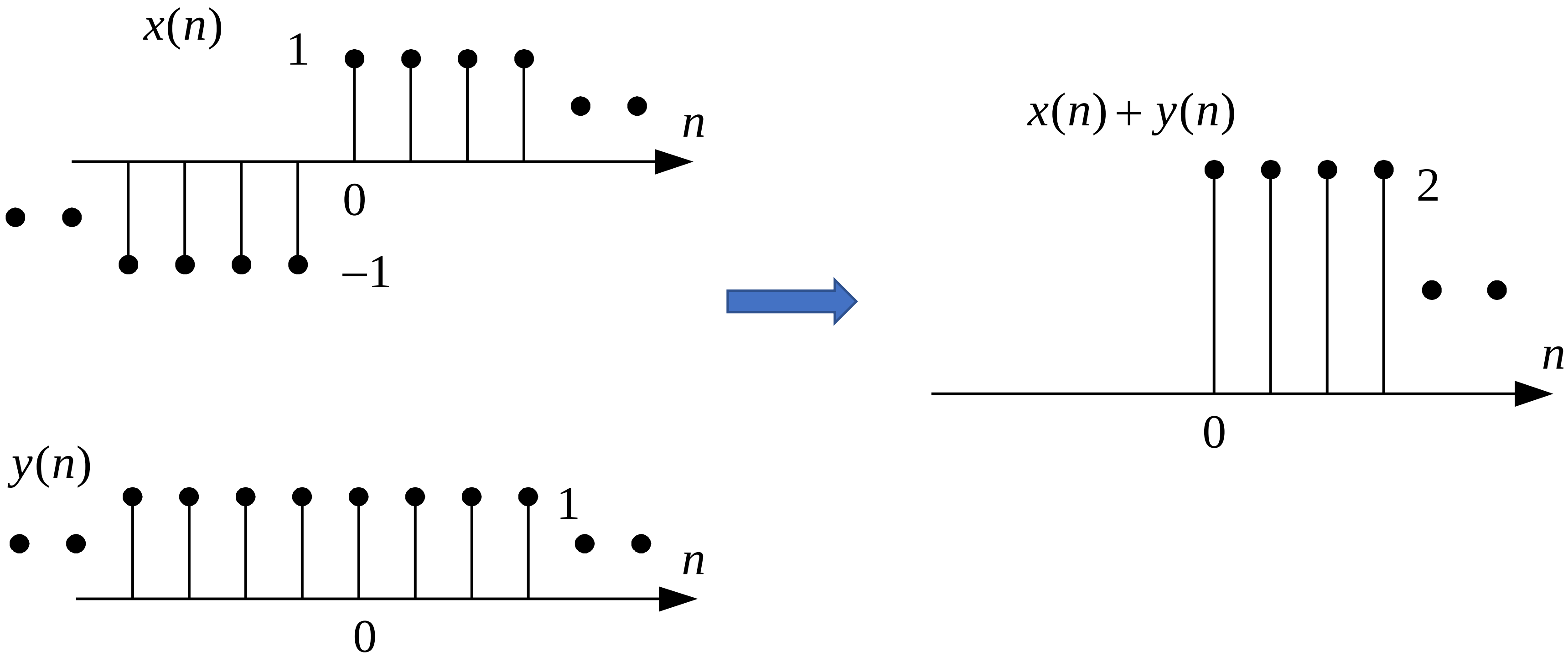




4、序列的相加

$$z(n) = x(n) + y(n)$$

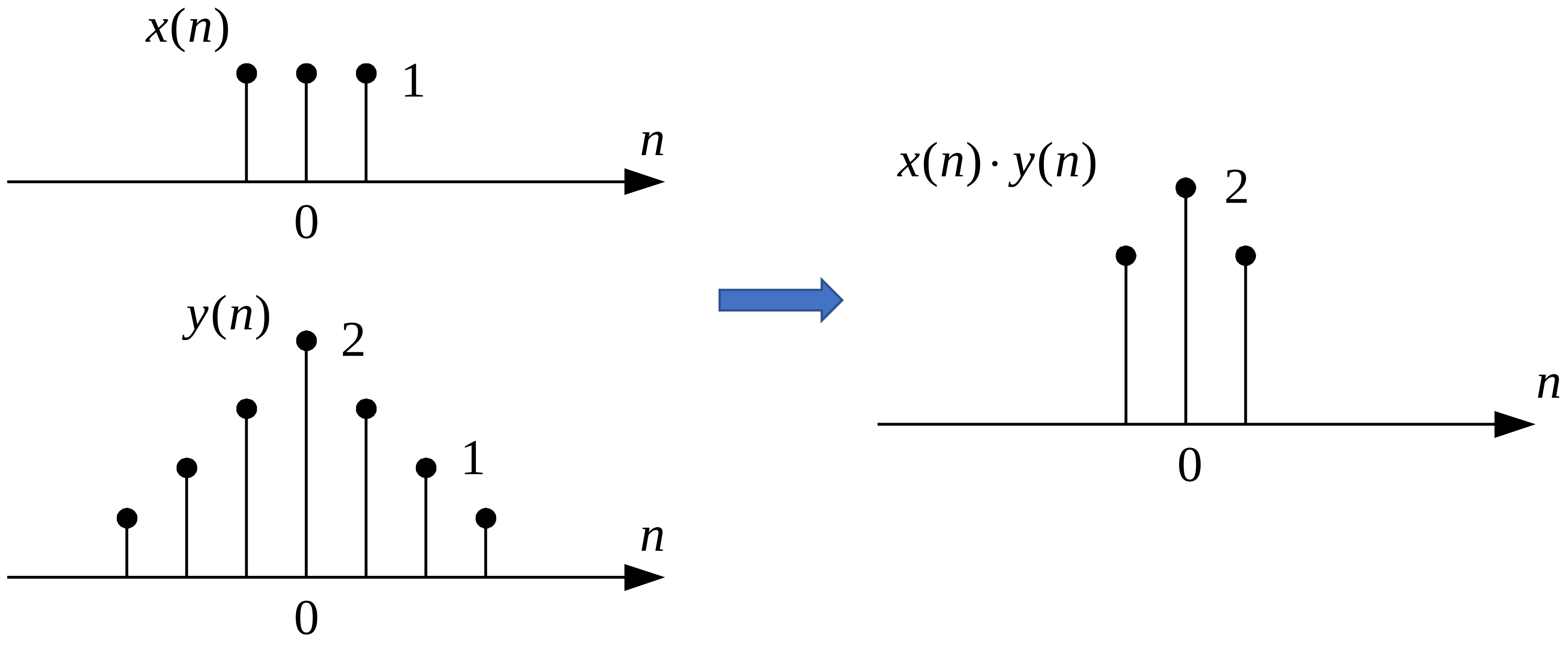
逐项对应相加



5、序列的相乘

$$z(n) = x(n) \cdot y(n)$$

逐项对应相乘



6、序列的差分

后向差分：当前与过去相减

一阶后向差分 $\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$

二阶后向差分
$$\begin{aligned}\nabla^2 x(n) &= \nabla\{\nabla x(n)\} \\ &= [x(n) - x(n-1)] - [x(n-1) - x(n-2)] \\ &= x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)\end{aligned}$$

前向差分：未来与当前相减

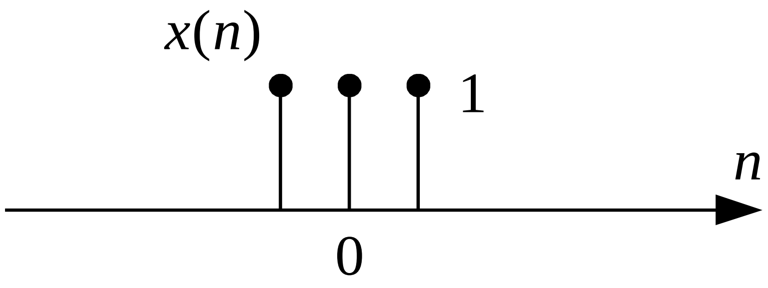
一阶前向差分 $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$

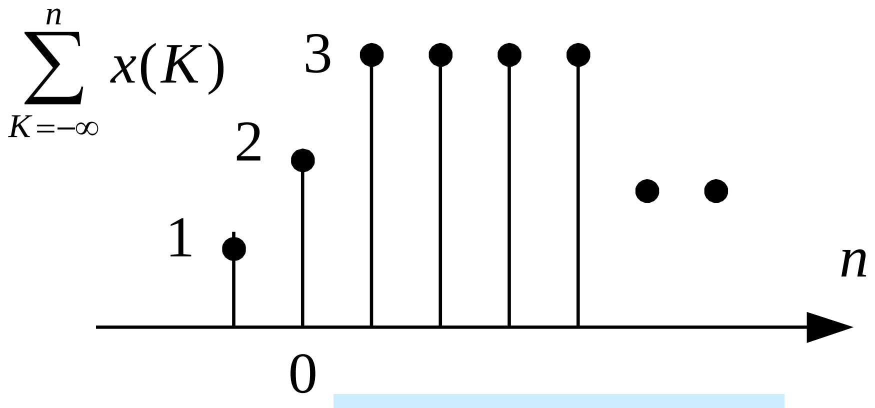
二阶前向差分 $\Delta^2 x(n) = \Delta\{\Delta x(n)\} = x(n+2) - 2x(n+1) + x(n)$

单位样值序列可用单位阶跃序列的差分表示：$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

7、序列的累加

$$z(n)=\sum_{K=-\infty}^{n}x(K)$$





单位阶跃序列可用单位样值序列的求和表示：$u(n)=\sum_{K=-\infty}^{n}\delta(K)$

8、序列的能量

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^{2}$$

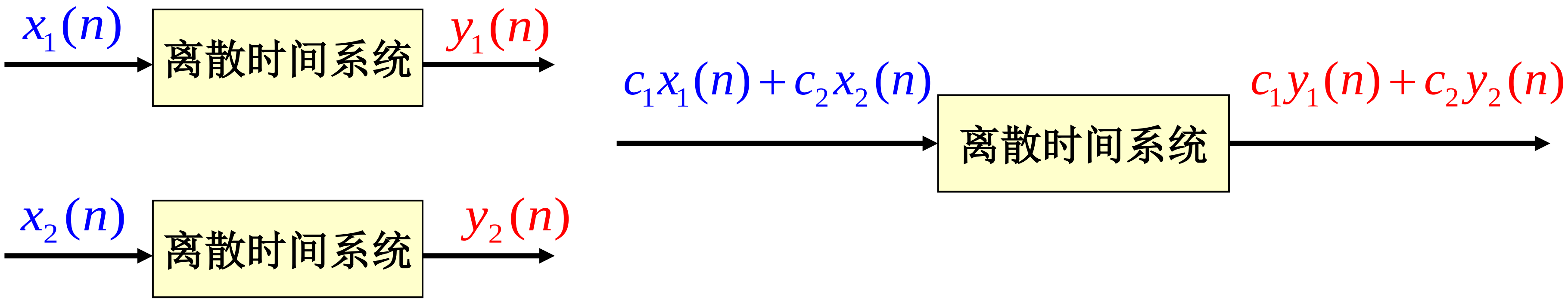
7.3.1 离散线性时不变系统

1、均匀性和叠加性

线性：设两对激励与响应

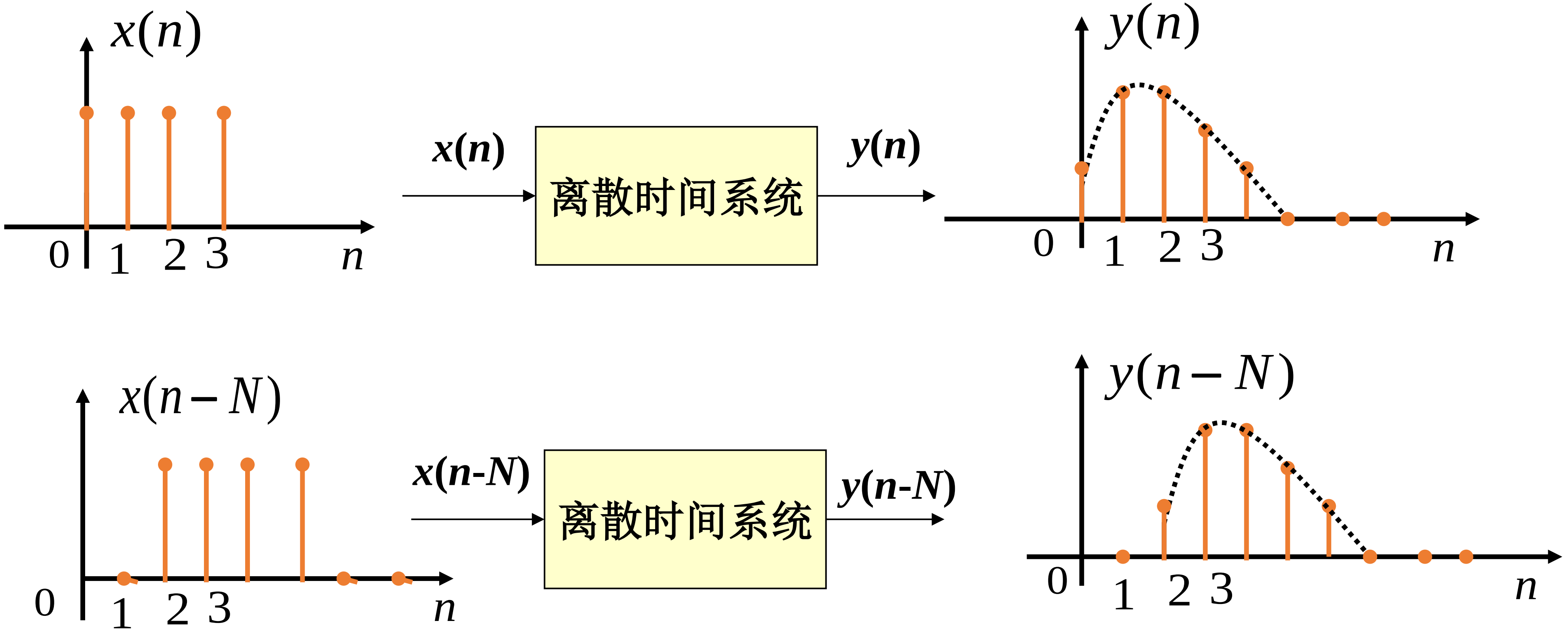
$$x_1(n) \to y_1(n),\ x_2(n) \to y_2(n)$$

$$\text{则} c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) \to c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n)$$



2、时不变性

时不变性：设激励与响应$x(n) \to y(n)$，则$x(n-N) \to y(n-N)$。



7.3.2 离散时间系统的数学模型

连续系统的数学模型--微分方程

$$C_0\frac{d^n r(t)}{dt^n}+C_1\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+C_n r(t)=E_0\frac{d^m e(t)}{dt^m}+E_1\frac{d^{m-1}e(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+E_m e(t)$$

基本运算：微分，乘系数，相加

离散系统的数学模型--差分方程

$$y(n)=-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r)$$

输入是离散序列**x(n)**及其时移函数 $x(n),x(n-1),x(n-2),\ldots.$

输出是离散序列**y(n)**及其时移函数 $y(n),y(n-1),y(n-2),\ldots.$

基本运算：延时，乘系数，相加

由实际问题直接得到差分方程。

例7-3：

$y(n)$表示一个国家在第n年的人口数

a(常数)：出生率

b(常数)：死亡率

设$x(n)$是国外移民的净增数

则该国在第$n+1$年的人口总数为：

$$y(n+1)=y(n)+ay(n)-by(n)+x(n)$$
$$=(a-b+1)y(n)+x(n)$$

7.3.3 离散系统的基本运算单元

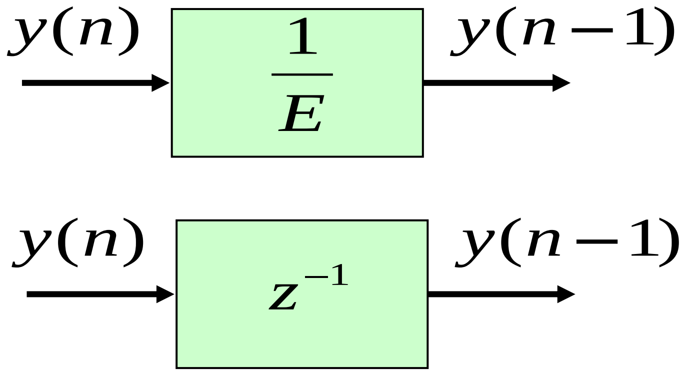
延时元件（单位延时）

对于线性时不变系统，可以借助算子符号、传输算子等概念来表示或求解系统的数学模型。对于离散时间系统，**用算子符号“E”表示将序列超前一个单位时间的运算**。E也称为时移算子，利用移序算子可写出：

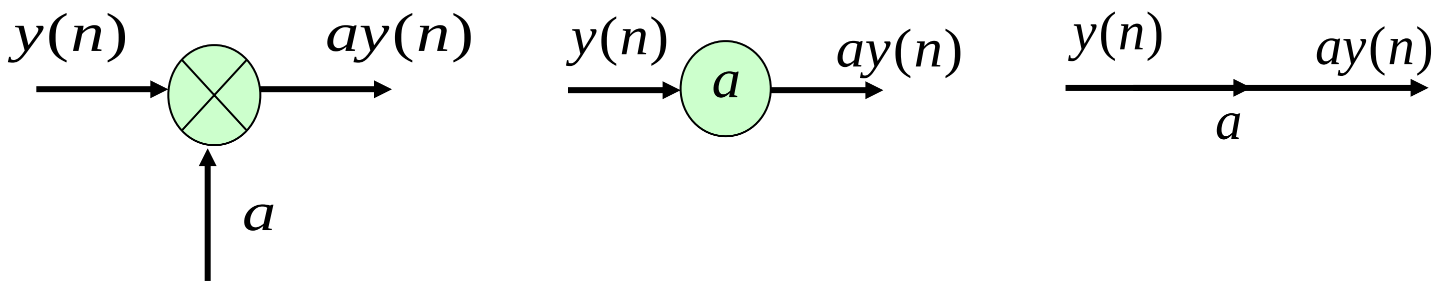
$$y(n+1)=Ey(n) \qquad y(n-1)=\frac{1}{E}y(n)$$

以上分析看出，算子$\frac{1}{E}$表示延迟单位时间的作用，即$y(n)$经$\frac{1}{E}$运算给出$y(n-1)$。规定以$\frac{1}{E}$作为**延时元件**符号。

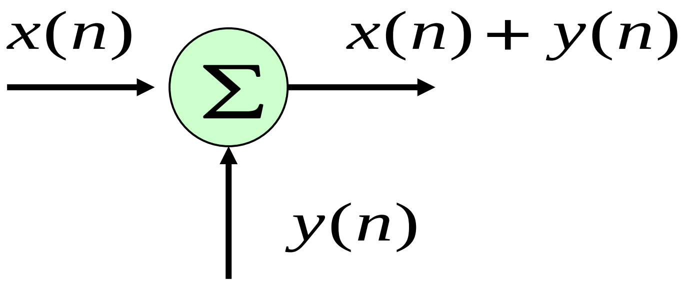
单位延时实际是一个**移位寄存器**，把前一个离散值顶出来，递补。



乘法器



相加器



7.3.4 由微分方程导出差分方程

$$\frac{dy(t)}{dt}=ay(t)+f(t)$$

$y(t)$：输出

$f(t)$：输入

时间间隔：T

后向差分 $$\frac{dy(t)}{dt}\approx\frac{y(t)-y(t-T)}{T}$$

或前向差分 $$\frac{dy(t)}{dt}\approx\frac{y(t+T)-y(t)}{T}$$

列差分方程

若用后向差分形式

$$\frac{y(t)-y(t-T)}{T}=ay(t)+f(t)$$

若在***t=nT*** 各点取得样值

$$y(t)=y(nT)\to y(n)$$

n代表序号

$$f(t)=f(nT)\to f(n)$$

$$\frac{y(n)-y(n-1)}{T}=ay(n)+f(n)$$

$$y(n)=\frac{1}{1-aT}y(n-1)+\frac{T}{1-aT}f(n)$$

当前输出　　前一个输出　　输入

7.3.5 差分方程的特点

1、输出序列的第n个值不仅决定于同一瞬间的输入样值，而且还与前面输出值有关，每个输出值必须依次保留。

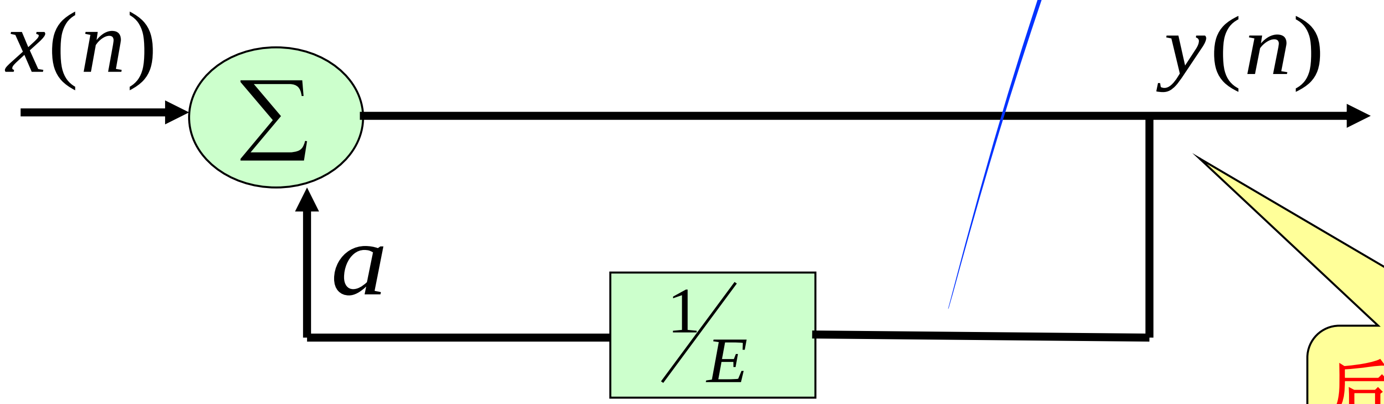
2、差分方程的阶数：差分方程中变量的最高和最低序号差数为阶数。如果一个系统的第n个输出决定于刚过去的几个输出值及输入值，那么描述它的差分方程就是几阶的。

通式：$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

3、微分方程可以用差分方程来逼近，微分方程解是精确解，差分方程解是近似解，两者有许多类似之处。

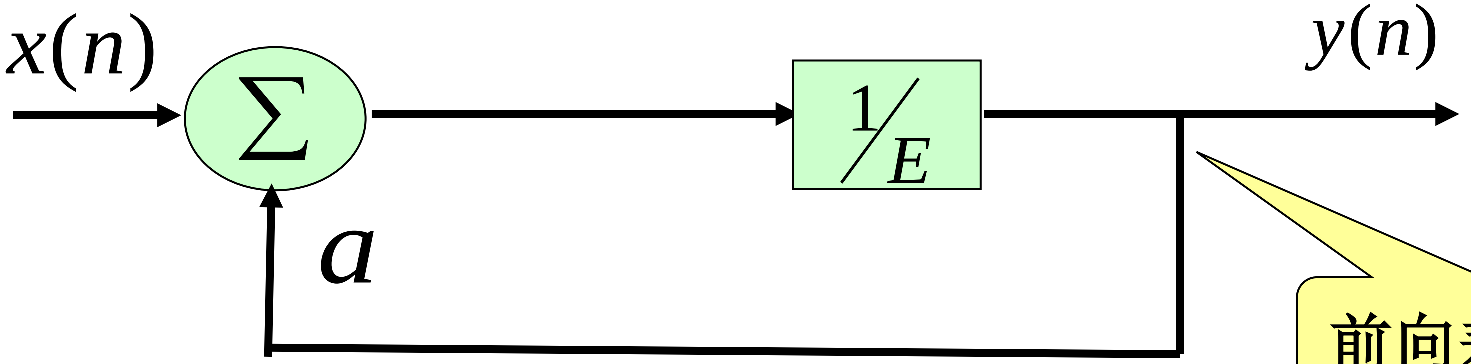
4、差分方程描述离散时间系统，输入序列与输出序列间的运算关系与系统模拟框图有对应关系，应该会写会画。

两个系统无本质差别！



后向差分方程（常用）

$$y(n)=x(n)+ay(n-1)$$

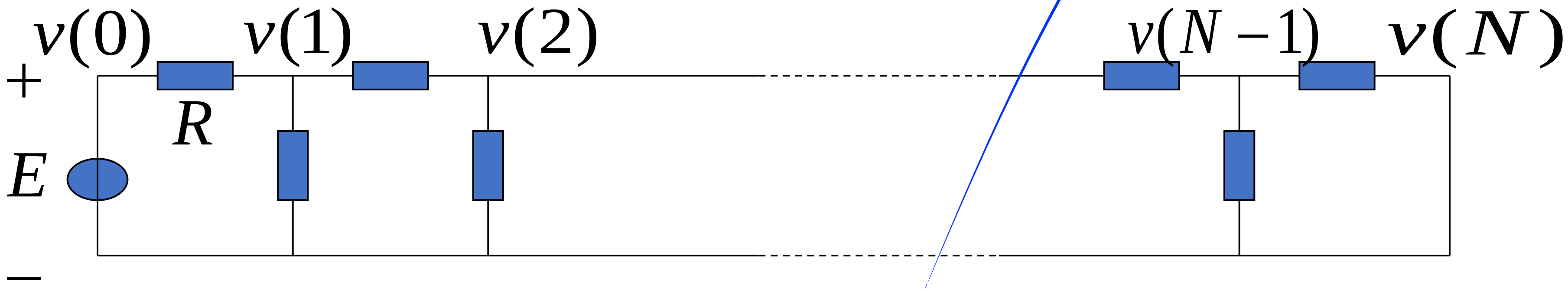


前向差分方程

$$y(n+1)=ay(n)+x(n)$$

7.3 离散时间系统的数学模型

例7-4：电阻梯形网络，其各支路电阻都为R，每个结点对地的电压为$v(n)$，n=0，1，2，…，N。已知两边界结点电压为$v(0)=E$，$v(N)=0$。求$v(n)$的差分方程式。



作业

基础题：7-1，7-4，7-9。

加强题：7-10。