# 上节内容

8.1 z变换的定义

8.2 典型序列的z变换

8.3 z变换的收敛域

z变换是借助于抽样信号的拉氏变换引出。

连续因果信号$x(t)$经均匀冲激抽样，则抽样信号$x_s(t)$的表示式为

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$T$为抽样间隔。

单边拉氏变换

$$X_s(s) = \int_0^{\infty} x_s(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\int_0^{\infty} \delta(t-nT)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-snT}$$

令 $z = e^{sT}$ ，其中z为一个复变量，抽样信号的拉氏变换与序列的 z 变换的关系：

$$\boxed{X(z)\big|_{z=e^{sT}} = X_s(s)}$$

# 8.1 z变换的定义

$$z = e^{sT}\ ,\quad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}$$

通常令$T$=1，$z = e^{s}$

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}}$$

单边z变换

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}}$$

双边z变换

序列的z变换是**复变量** $z^{-1}$ **的幂级数**，其**系数是$x(n)$**。

下列说法正确的有

A z变换有助于求解差分方程

B 因果序列的单边z变换和双边z变换等同

C s平面的虚轴可映射为z平面的虚轴

D z变换的收敛域一定不包含极点

提交

# 8.2 典型序列的z变换

| 序列 | Z变换 | Z变换类别 |
|---|---|---|
| $\delta(n)$ | 1 (z全平面收敛) | 单边/双边z变换 |
| $\delta(n-1)$ | $z^{-1}\quad (\lvert z\rvert>0)$ | 单边/双边z变换 |
| $\delta(n+1)$ | 0<br>$z\quad (\lvert z\rvert<\infty)$ | 单边z变换<br>双边z变换 |
| $u(n)$ | $\dfrac{z}{z-1}\quad (\lvert z\rvert>1)$ | 单边/双边z变换 |
| $a^n u(n)$ | $\dfrac{z}{z-a}\quad (\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$ | 单边/双边z变换 |
| $nu(n)$ | $\dfrac{z}{(z-1)^2}\quad (\lvert z\rvert>1)$ | 单边/双边z变换 |

# 8.2 典型序列的z变换



| 序列 | Z变换 | Z变换类别 |
|---|---|---|
| $e^{-j\omega_0 n}u(n)$ | $\dfrac{z}{z-e^{-j\omega_0}} \quad (\lvert z\rvert>1)$ | 单边/双边z变换 |
| $\beta e^{-j\omega_0 n}u(n)$ | $\dfrac{z}{z-\beta e^{-j\omega_0}} \quad (\lvert z\rvert>\lvert\beta\rvert)$ | 单边/双边z变换 |
| $\cos(\omega_0 n)u(n)$ | $\dfrac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1} \quad (\lvert z\rvert>1)$ | 单边/双边z变换 |
| $\sin(\omega_0 n)u(n)$ | $\dfrac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1} \quad (\lvert z\rvert>1)$ | 单边/双边z变换 |
| $\beta^n\cos(\omega_0 n)u(n)$ | $\dfrac{z(z-\beta\cos\omega_0)}{z^2-2z\beta\cos\omega_0+\beta^2} \quad (\lvert z\rvert>\lvert\beta\rvert)$ | 单边/双边z变换 |
| $\beta^n\sin(\omega_0 n)u(n)$ | $\dfrac{z\beta\sin\omega_0}{z^2-2z\beta\cos\omega_0+\beta^2} \quad (\lvert z\rvert>\lvert\beta\rvert)$ | 单边/双边z变换 |

# 8.3 z变换的收敛域



$$X(z)=ZT[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

收敛域：当 $x(n)$ 为有界时，令上述级数收敛的所有z值的集合称为收敛域（region of convergence, ROC）。

级数收敛的充要条件是满足绝对可和条件。

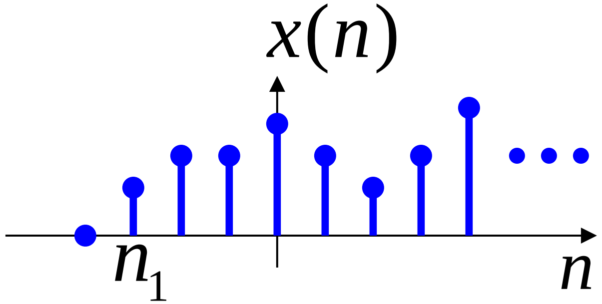
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right|<\infty$$

左边构成正项级数，可利用正项级数收敛的常用判定方法，

比值判定法： $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$

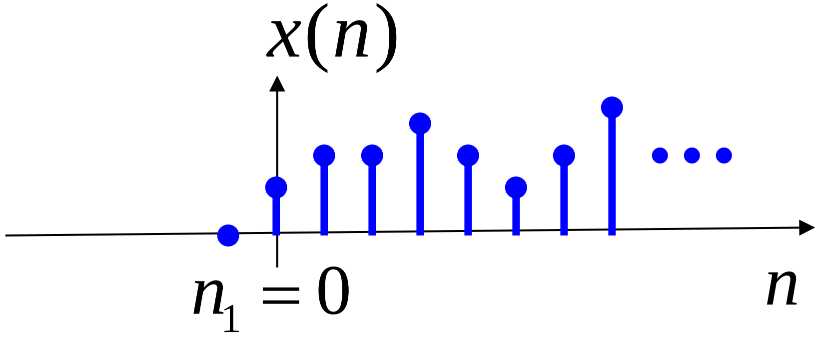
根值判定法： $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$

1、右边序列：只在 $n \ge n_1$ 区间内，有非零的有限值的序列。

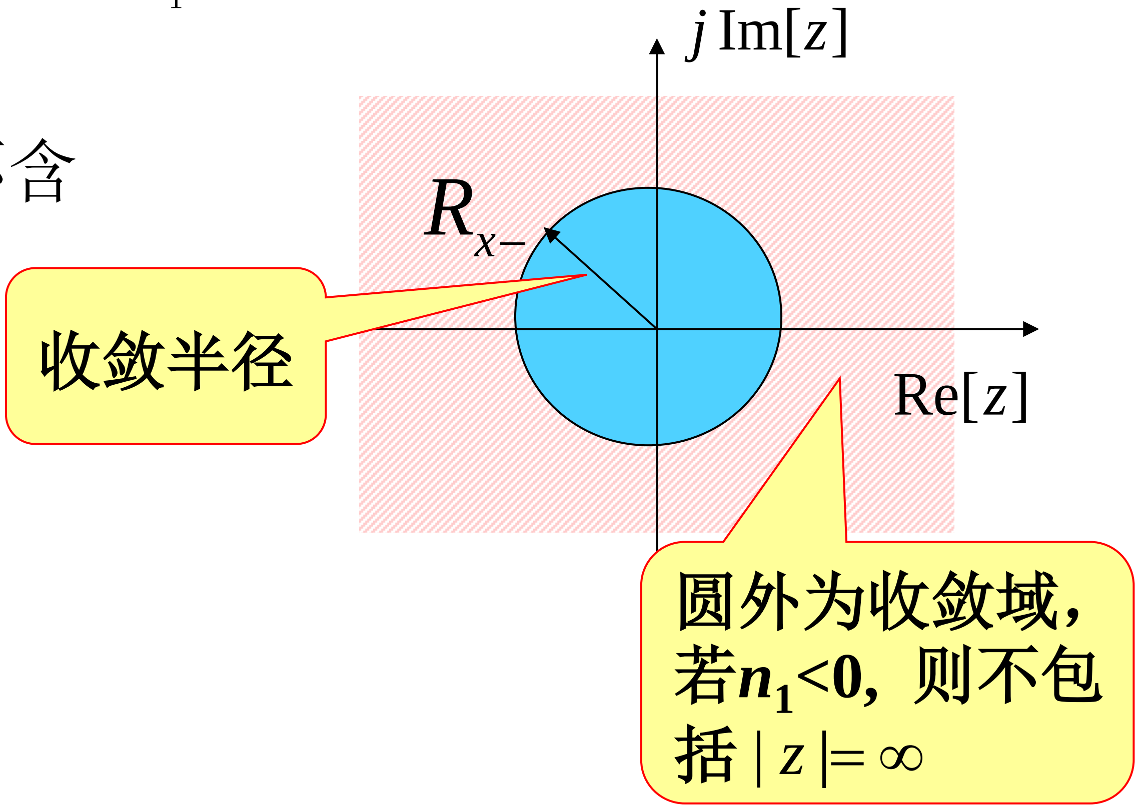



$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad n_1 \le n \le \infty$$

$n_1<0,\quad R_{x-}<|z|<\infty$（收敛域不含 $|z|=\infty$，因∞的$-n_1$次幂为无穷）



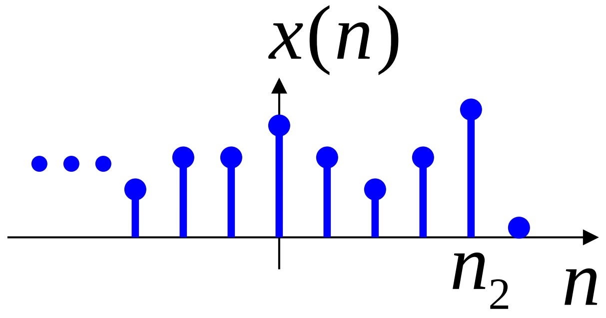

$n_1=0,\quad |z|>R_{x-}$




因果序列是右边序列的一种特殊情况，它的收敛域为 $|z|>R_{x-}$。

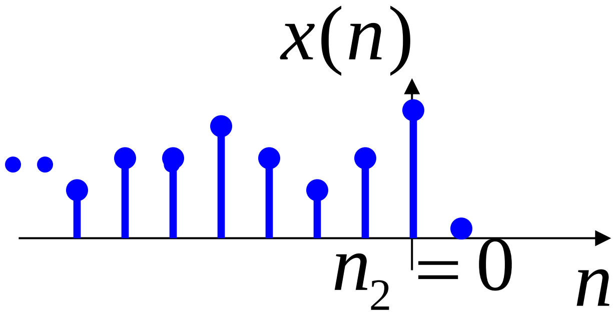
# 8.3 z变换的收敛域

**2、左边序列：** 只在 $n \le n_2$ 区间内，有非零的有限值的序列 $x(n)$。

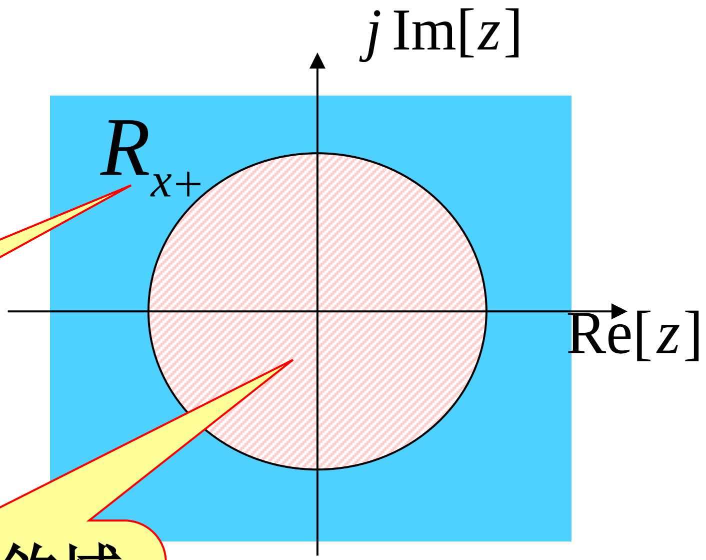



$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} \qquad -\infty \le n \le n_2$$

$n_2 > 0, \quad 0 < |z| < R_{x+}$ （收敛域不含 $z=0$，因0的负指数幂无意义）



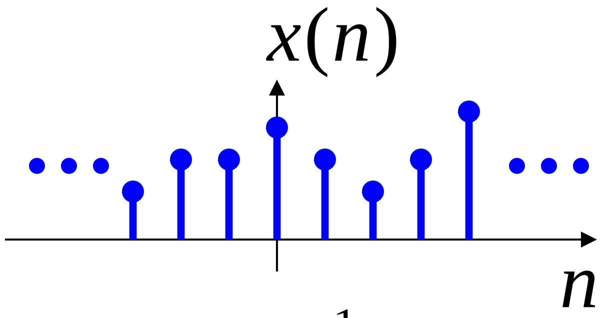

$n_2 = 0, \quad |z| < R_{x+}$




收敛半径

圆内为收敛域，若 $n_2 > 0$ 则不包括z=0点

**3、双边序列：**在 $-\infty \le n \le \infty$ 区间内，有非零的有限值的序列

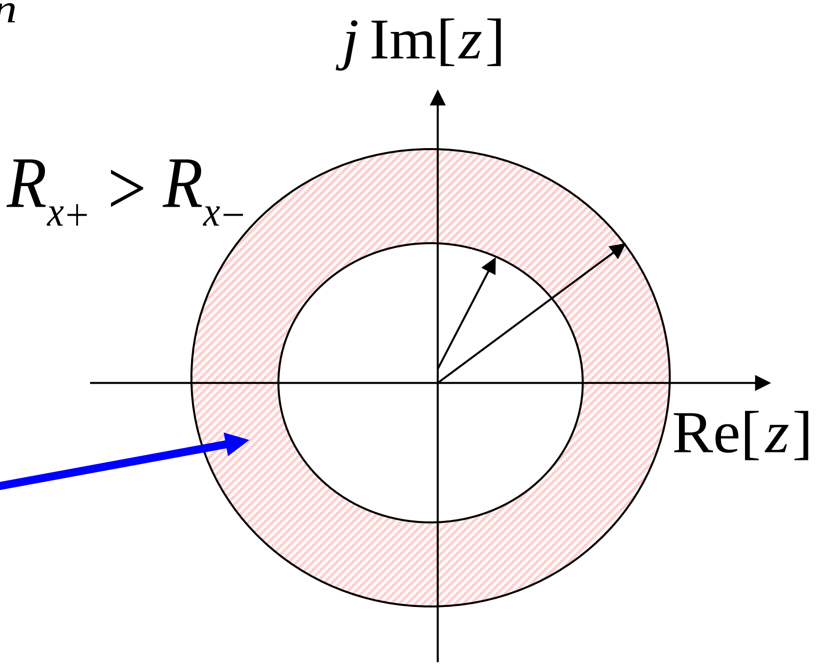



$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \qquad -\infty \le n \le \infty$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

圆内收敛
$|z|<R_{x+}$

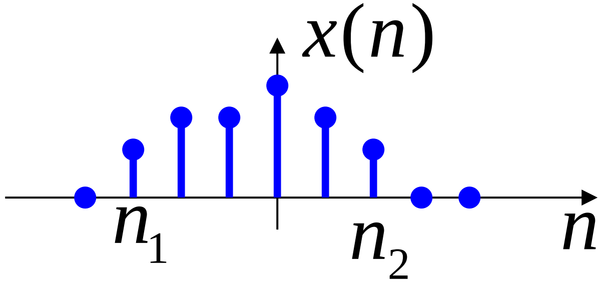
圆外收敛
$|z|>R_{x-}$




$R_{x+}>R_{x-}$ 有环状收敛域

$R_{x+}<R_{x-}$ 没有收敛域

4、有限长序列：在有限区间 $n_1 \le n \le n_2$ 内，有非零的有限值的序列




$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n} \qquad n_1 \le n \le n_2$$

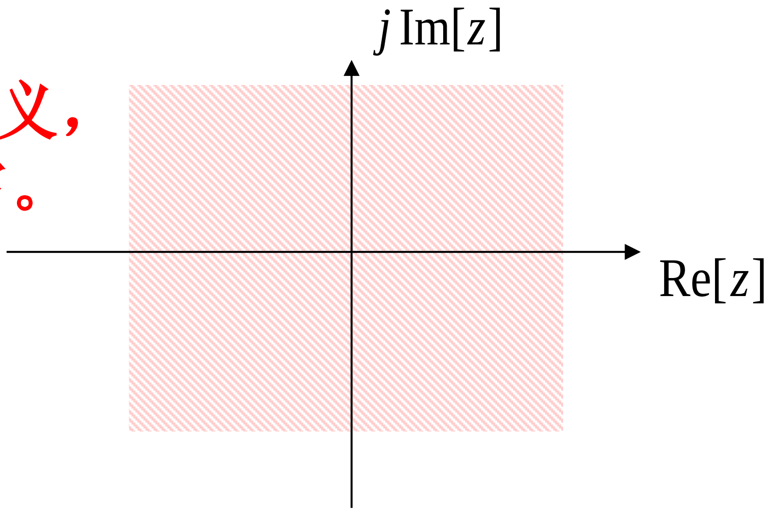
分为三种情况：

$n_1<0, n_2>0 \quad 0<|z|<\infty$

$n_1\ge 0, n_2>0 \quad 0<|z|\le\infty$

$n_1<0, n_2\le 0 \quad 0\le|z|<\infty$

$0^{-n}$在$n>0$时没有意义，
$\infty^{-n}$在$n<0$时为无穷。




收敛域至少为除了0和∞外的整个z平面（若零极点相消，收敛域扩大为整个z平面）。

对于单边z变换，序列与变换式唯一对应，且有唯一的收敛域。
对于双边z变换，不同的序列在不同的收敛域下可能映射同一变换式。

例如：

$$x_1(n) = a^n u(n)$$

$$X_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a|$$

$$x_2(n) = -a^n u(-n-1)$$

$$X_2(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n$$

$$= 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{z}{z-a} \qquad |z| < |a|$$

对于一个给定序列的z变换既要给出表达式，又要标出它的收敛域。

例8-1：求序列$x(n)=a^n u(n)-b^n u(-n-1)$的单边和双边z变换，并确定其收敛域（其中$b>a>0$）。

解：这是一个双边序列，单边z变换为：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n$$

如果 $|z|>a$，$X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}=\dfrac{z}{z-a}$

双边z变换：

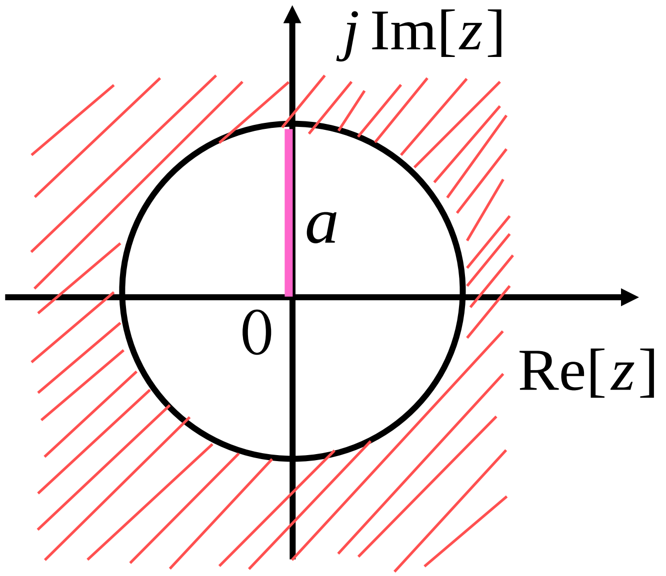
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[a^n u(n)-b^n u(-n-1)]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{-1}b^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}+1-\sum_{n=0}^{\infty}b^{-n}z^{n}$$

如果 $a<|z|<b$，$X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}+1+\dfrac{b}{1-bz^{-1}}=\dfrac{z}{z-a}+\dfrac{z}{z-b}$

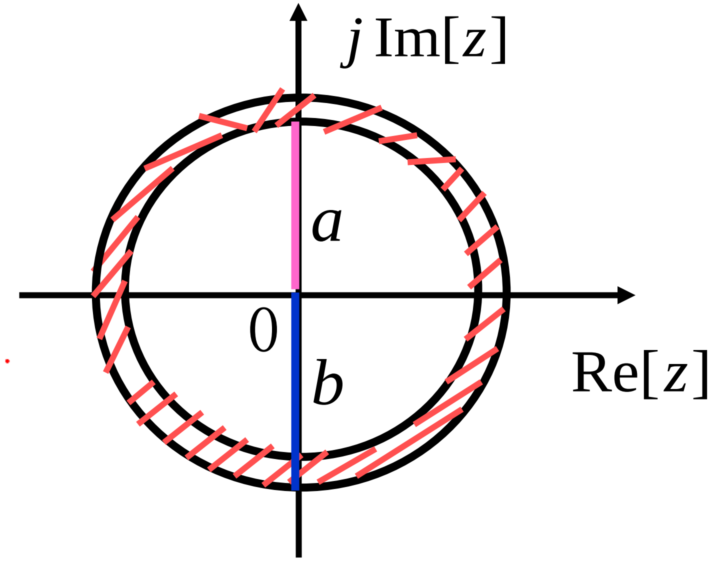
# 8.3 z变换的收敛域






序列单边z变换的收敛域

$$X(z)=\frac{z}{z-a}\quad(|z|>a)$$




序列双边z变换的收敛域

$$X(z)=\frac{z}{z-a}+\frac{z}{z-b}\quad(a<|z|<b)$$

收敛域内通常不包含任何极点（除非出现零点和极点相抵消的情况），收敛域通常以极点为边界。右边序列的收敛域是从$X(z)$最外面（最大值）的极点向外延伸至z→∞（可能包括∞）；左边序列的收敛域是从$X(z)$最里面（最小值）的极点向内延伸至z→0（可能包括0）。

## 本次课内容

8.4 逆z变换

8.5 z变换的基本性质

## 本次课目标

1. 熟练掌握用部分分式法求逆z变换；
2. 熟练掌握z变换的基本性质；
3. 会分析利用z变换的基本性质时对收敛域的影响。

$$X(z)=ZT[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$x(n)=ZT^{-1}[X(z)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

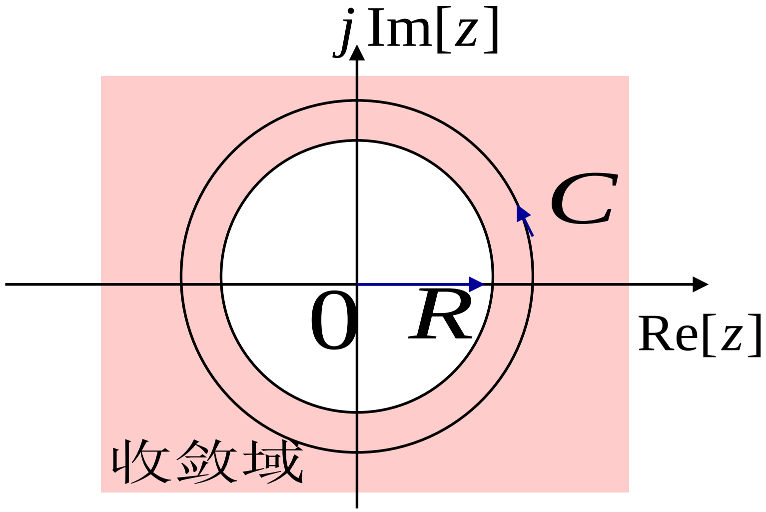
*C*是包围$X(z)z^{n-1}$所有极点的逆时针闭合积分路线，一般取z平面收敛域内以原点为中心的圆。

（1）留数法

（2）幂级数展开法（长除法，按z升幂排列或$z^{-1}$降幂排列）

（3）部分分式展开法

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z+\cdots b_{r-1}z^{r-1}+b_rz^r}{a_0+a_1z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1}+a_kz^k}$$



## 1、 *X(z)*只有一阶极点

$$X(z)=A_0+\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m z}{z-z_m}=A_0+\frac{A_1 z}{z-z_1}+\cdots+\frac{A_M z}{z-z_M} \qquad A_0=X(z)\big|_{z=0}=\frac{b_0}{a_0}$$

$z_m$为$X(z)$的一阶极点， $A_m=\left[(z-z_m)\dfrac{X(z)}{z}\right]_{z=z_m}$

$$X(z)=A_0+\sum_{m=1}^{M}\frac{zA_m}{z-z_m}$$

或 $$X(z)=A_0+\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m}{1-z_m z^{-1}}=A_0+\frac{A_1}{1-z_1 z^{-1}}+\cdots+\frac{A_M}{1-z_M z^{-1}}$$

$$A_m=\left[\left(1-z_m z^{-1}\right)X(z)\right]_{z=z_m}$$

**逆变换：** $$x(n)=A_0\delta(n)+\sum_{m=1}^{M}A_m z_m^n=A_0\delta(n)+A_1 z_1^n+\cdots+A_M z_M^n$$

$$X(z)=\frac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$$ (|z|>1) 的逆变换$x(n)$为（）

A $(1-0.5^n)u(n)$

B $(2-0.5^n)u(n)$

C $2(1-0.5^n)u(n)$

D $2(1+0.5^n)u(n)$

提交

例8-2：求 $X(z)=\dfrac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$ 的逆变换**$x(n)$** （|z|>1）。

解：此为右边序列。

方法一： $X(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$  $\dfrac{X(z)}{z}=\dfrac{A_1}{z-0.5}+\dfrac{A_2}{z-1}$

其中 $A_1=\left[\dfrac{X(z)}{z}(z-0.5)\right]_{z=0.5}=-1$， $A_2=\left[\dfrac{X(z)}{z}(z-1)\right]_{z=1}=2$

则$X(z)=\dfrac{2z}{z-1}-\dfrac{z}{z-0.5}$

$x(n)=(2\text{-}0.5^n)u(n)$

方法二：

$$X(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}=\frac{1}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$$

$$X(z)=\frac{A_1}{1-0.5z^{-1}}+\frac{A_2}{1-z^{-1}}$$

其中$A_1=\left[X(z)(1-0.5z^{-1})\right]_{z=0.5}=-1$，$A_2=\left[X(z)(1-z^{-1})\right]_{z=1}=2$

则$X(z)=\dfrac{2}{1-z^{-1}}-\dfrac{1}{1-0.5z^{-1}}$

$x(n)=(2-0.5^n)u(n)$

**2、$X(z)$除含有$M$个一阶极点外，在$z=z_i$处还含有一个$N$阶极点**

$$X(z)=A_0+\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m z}{z-z_m}+\sum_{j=1}^{N}\frac{B_j z}{(z-z_i)^j}\quad (|z|>\max\{z_1,\ldots z_M, z_i\})$$

令$X_1(z)=(z-z_i)^N\dfrac{X(z)}{z}$

$$B_N=X_1(z)\big|_{z=z_i}$$

$$B_j=\frac{1}{(N-j)!}\left[\frac{d^{N-j}}{dz^{N-j}}X_1(z)\right]_{z=z_i}\quad (j=1,\ldots,N-1)$$

**逆变换：** $x(n)=A_0\delta(n)+\sum_{m=1}^{M}A_m z_m^n u(n)+\left(B_1 z_i^n+\sum_{j=2}^{N}\frac{B_j n(n-1)\cdots(n-j+2)}{(j-1)!}z_i^{n-j+1}\right)u(n)$

若为二阶极点$N=2$: $X_1(z)=(z-z_i)^2\dfrac{X(z)}{z}$

$$B_2=X_1(z)\big|_{z=z_i} \qquad B_1=\left[\frac{d}{dz}X_1(z)\right]_{z=z_i}$$

**逆变换：** $x(n)=A_0\delta(n)+(A_1z_1^n+\cdots+A_Mz_M^n+B_1z_i^n+B_2nz_i^{n-1})u(n)$

若为三阶极点$N=3$: $X_1(z)=(z-z_i)^3\dfrac{X(z)}{z}$

$$B_3=X_1(z)\big|_{z=z_i} \qquad B_2=\left[\frac{d}{dz}X_1(z)\right]_{z=z_i} \qquad B_1=\frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{dz^2}X_1(z)\right]_{z=z_i}$$

**逆变换：** $x(n)=A_0\delta(n)+\left[A_1z_1^n+\cdots+A_Mz_M^n+B_1z_i^n+B_2nz_i^{n-1}+\dfrac{B_3n(n-1)}{2}z_i^{n-2}\right]u(n)$

例8-3：求 $X(z)=\dfrac{z^2}{z^2-4z+4}$ 的逆变换 $x(n)$ $(|z|>2)$。

解：此为右边序列。

$$X(z)=\frac{z^2}{(z-2)^2} \qquad \frac{X(z)}{z}=\frac{B_1}{z-2}+\frac{B_2}{(z-2)^2}$$

其中

$$B_2=\left[(z-2)^2\frac{X(z)}{z}\right]_{z=2}=[z]_{z=2}=2，\quad B_1=\left\{\frac{d}{dz}\left[(z-2)^2\frac{X(z)}{z}\right]\right\}_{z=2}=1$$

则 $X(z)=\dfrac{z}{z-2}+\dfrac{2z}{(z-2)^2}$

$$x(n)=2^n u(n)+n2^n u(n)=(n+1)2^n u(n)$$

一般情况下，$X(z)$的表达式为

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z+\cdots b_{r-1}z^{r-1}+b_rz^r}{a_0+a_1z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1}+a_kz^k}$$

利用部分分式展开法求逆变换时，要掌握基本形式的逆变换。

注意：逆变换与收敛域有关。

$$\frac{z}{z-z_m}(|z|>|z_m|)\Leftrightarrow z_m{}^n u(n) \qquad \frac{z}{z-z_m}(|z|<|z_m|)\Leftrightarrow -z_m{}^n u(-n-1)$$

讨论：只有真分式才可进行部分分式展开，但展开的形式乘以z才具备上述逆z变换的基本形式。

对 $\frac{X(z)}{z}$ 进行部分分式展开，要求 $\frac{X(z)}{z}$ 是真分式，即需要$k\geq r$保证$X(z)$在$z=\infty$处收敛。

因果序列的z变换收敛域为$|z|>R_x$， $k\geq r$是满足收敛的充分必要条件。

例8-4： $X(z)=\dfrac{-5z}{3z^2-7z+2}\quad (\dfrac{1}{3}<|z|<2)$，　求$x(n)$。

双边序列

解： $\dfrac{X(z)}{z}=\dfrac{-\dfrac{5}{3}}{z^2-\dfrac{7}{3}z+\dfrac{2}{3}}=\dfrac{-\dfrac{5}{3}}{\left(z-\dfrac{1}{3}\right)(z-2)}=\dfrac{1}{z-\dfrac{1}{3}}-\dfrac{1}{z-2}$

$$X(z)=\frac{z}{z-\dfrac{1}{3}}-\frac{z}{z-2}$$

右边序列　　左边序列

$$x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)+2^n u(-n-1)$$

分析：同一个z变换的表达式如果收敛域不同，序列也不同。

$$X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}-\frac{z}{z-2}$$

若 $|z|<\frac{1}{3}$　　$x(n)=-\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)+2^n u(-n-1)$

若 $|z|>2$　　$x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)-2^n u(n)$

离散信号的复频域分析

- 8.1 z变换的定义
- 8.2 典型序列的z变换
- 8.3 z变换的收敛域
- 8.4 逆z变换
- 8.5 z变换的基本性质

8.6 z变换与拉普拉斯变换的关系

离散系统的复频域分析

- 8.7 利用z变换解差分方程
- 8.8 离散时间系统的系统函数

离散信号的频域分析

- 8.9 序列的傅里叶变换

离散系统的频域分析

- 8.10 离散时间系统的频率响应特性

## 8.5.1 线性

若 $ZT[x(n)] = X(z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$,

$ZT[y(n)] = Y(z) \quad (R_{y1} < |z| < R_{y2})$

则 $ZT\left[ax(n) + by(n)\right] = aX(z) + bY(z)$

$\max(R_{x1}, R_{y1}) < |z| < \min(R_{x2}, R_{y2})$ 收敛域为重叠部分。

注：如果线性组合中某些零点与极点相抵消，收敛域可能扩大。

## 8.5.2 位移性

### 1、双边序列移位后的双边z变换

$$ZT[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$ZT[x(n-m)] = z^{-m} X(z)$$

$$ZT[x(n+m)] = z^{m} X(z)$$

***m*为任意正整数。**

若$x(n)$是双边序列，其双边$z$变换为$X(z)$，对序列$x(n)$ 进行位移会使$X(z)$的收敛域发生变化。此说法（）。

A 正确

B 错误

提交

## 2、双边序列左移的单边z变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)u(n)z^{-n}$$

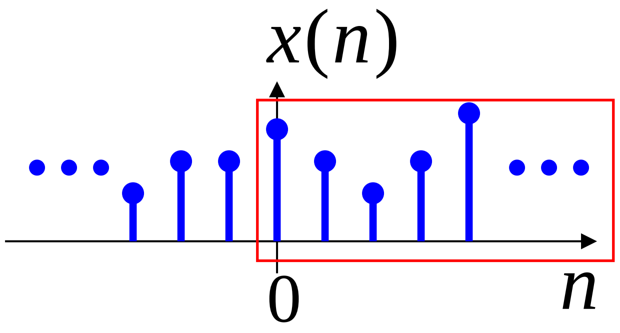
$$ZT[x(n+m)u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n+m)z^{-n}$$

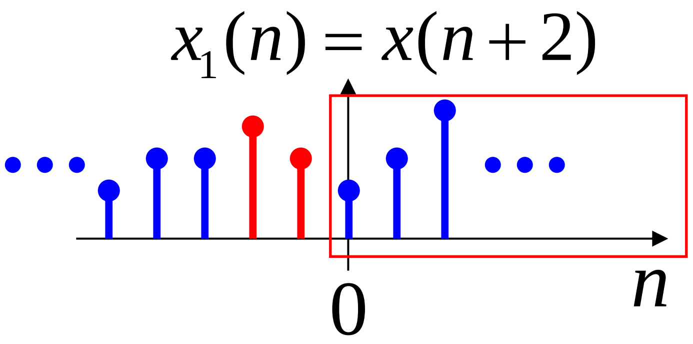
$$=z^{m}\sum_{n=0}^{\infty}x(n+m)z^{-(n+m)}=z^{m}\sum_{k=m}^{\infty}x(k)z^{-k}$$

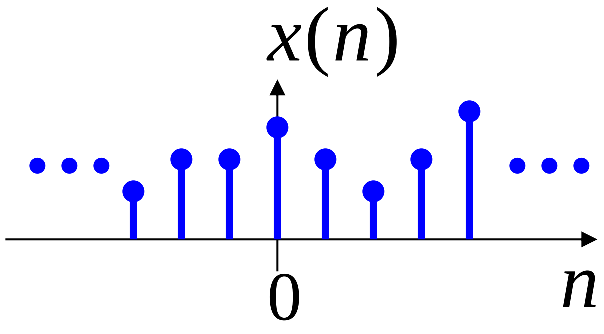
$$=z^{m}\left[\sum_{k=0}^{\infty}x(k)z^{-k}-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$$

$$=z^{m}\left[X(z)-\underline{\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}}\right]$$

减少一些点的贡献

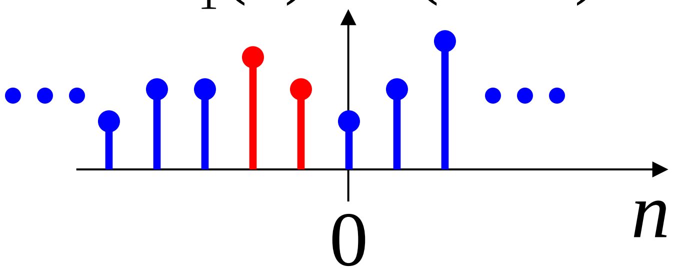





$$X(z)=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

$$z^2X(z)=x(0)z^2+x(1)z+x(2)+x(3)z^{-1}+\cdots$$




$$X_1(z)=x_1(0)+x_1(1)z^{-1}+x_1(2)z^{-2}+\cdots$$

$$=x(2)+x(3)z^{-1}+x(4)z^{-2}+\cdots$$

$$=z^2X(z)-x(0)z^2-x(1)z$$

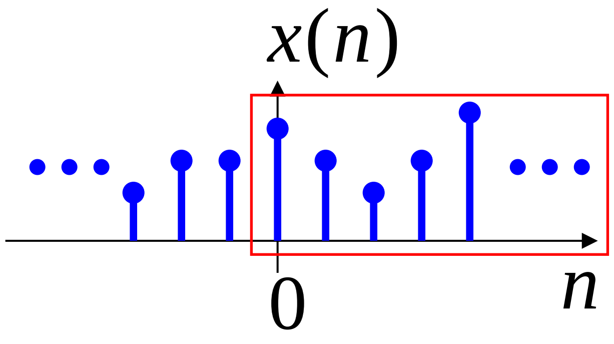
$$=z^2\left[X(z)-x(0)-x(1)z^{-1}\right]$$

## 3、双边序列右移的单边z变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)u(n)z^{-n}$$

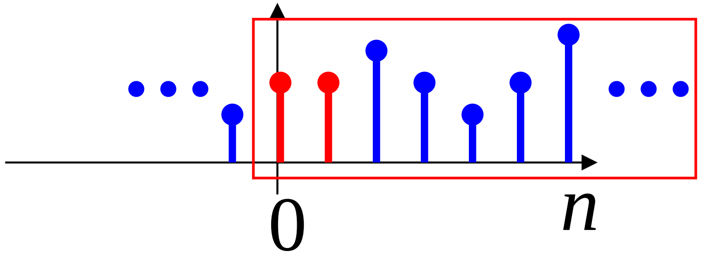
$$ZT[x(n-m)u(n)]=z^{-m}\left[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$$

增加一些点的贡献




$$X(z)=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

$$x_2(n)=x(n-2)$$




$$X_2(z)=x_2(0)+x_2(1)z^{-1}+x_2(2)z^{-2}+\cdots$$
$$=x(-2)+x(-1)z^{-1}+x(0)z^{-2}+\cdots$$
$$=z^{-2}X(z)+x(-2)+x(-1)z^{-1}$$
$$=z^{-2}\left[X(z)+x(-2)z^{2}+x(-1)z\right]$$

## 4、因果序列x(n)位移的单边z变换

$$\because \quad \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} = 0$$

$$ZT[x(n-m)u(n)] = z^{-m}X(z)$$

$$ZT[x(n+m)u(n)] = z^{m}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}\right]$$

序列位移只会使z变换在z=0或∞处的零极点情况发生变化。

已知序列$x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n[u(n)-u(n-8)]$，其收敛域为（ ）

A $0<|z|<\frac{1}{3}$

B $|z|>\frac{1}{3}$

C $|z|>0$

D $z$全平面

提交

**例8-5：** 求 $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n[u(n)-u(n-8)]$ 的z变换和收敛域。

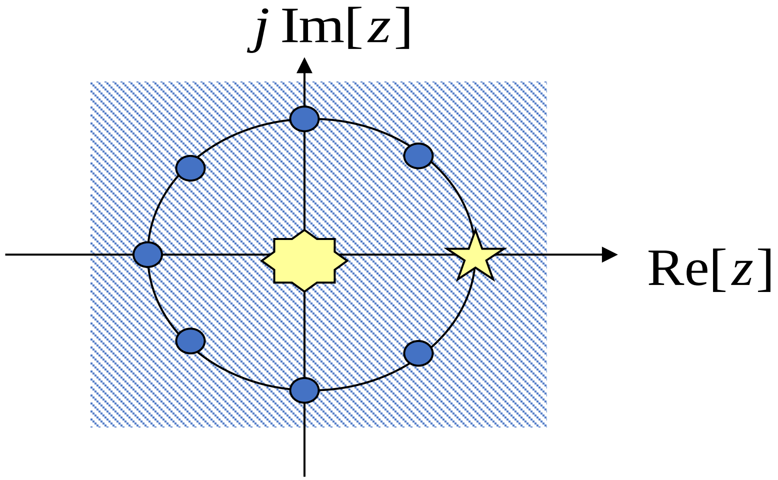
**解：** 序列为有限长序列。

$$X(z)=\sum_{n=0}^{7}\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{7}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n=\frac{1-(\frac{1}{3}z^{-1})^8}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z^8-(\frac{1}{3})^8}{z^7(z-\frac{1}{3})}$$

$z^8=(\frac{1}{3})^8 \quad z=\frac{1}{3}e^{j\frac{2k\pi}{8}}\ (k=0,\ldots,7)$ → 八个零点

$z=0$ → 七阶极点

$z=1/3$ → 一阶极点，与一个零点抵消，使收敛域比|z|>1/3扩大了




$\therefore |z|>0$

**例8-6：** 求$x(n) = a^n[u(n) - u(n - m)]$（$a$为实数, $m$>0）的z变换及其收敛域。

**解：** 利用线性特性求这个有限长序列的z变换。

$$ZT\left[a^n u(n)\right] = \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|)$$

**若m>1，** $ZT\left[a^n u(n-m)\right] = ZT\left[a^m \boxed{a^{n-m} u(n-m)}\right] = a^m z^{-m} \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|)$

$$X(z) = \frac{(1 - a^m z^{-m})z}{z-a} = \frac{z^m - a^m}{z^{m-1}(z-a)}$$

$z^m = a^m \quad z = ae^{j\frac{2k\pi}{m}} \quad (k = 0, \ldots, m-1) \longrightarrow$ $m$个零点，均匀分布在半径为$|a|$的圆上。

$z = a \longrightarrow$ 一阶极点，与零点z=$a$相抵消，导致收敛域扩大。

$z = 0 \longrightarrow$ $m$-1阶极点。

所以，收敛域为 $|z| > 0$ 。

**若m=1,** $x(n) = \delta(n)$, $X(z)$=1，收敛域为z全平面。

利用z变换的线性和位移性可解差分方程

$$ZT[x(n+1)u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+1)z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)z^{-(n-1)} = z\sum_{n=1}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$= z[X(z) - x(0)] = zX(z) - zx(0)$$

$$ZT[x(n+2)u(n)] = z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$$

$$ZT[x(n-1)u(n)] = z^{-1} X(z) + x(-1)$$

$$ZT[x(n-2)u(n)] = z^{-2} X(z) + z^{-1} x(-1) + x(-2)$$

例8-7：已知差分方程表示式$y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n)$，边界条件y(-1)=0，用逆z变换法求系统响应y(n)。

解：此为求零状态响应。对方程式两端分别取z变换：

$$Y(z)-0.9z^{-1}Y(z)=\frac{0.05z}{z-1}$$ 利用线性与位移性

$$Y(z)=\frac{0.05z^2}{(z-0.9)(z-1)}\qquad \frac{Y(z)}{z}=\frac{A_1}{z-0.9}+\frac{A_2}{z-1}$$

$$A_1=\left.\frac{0.05z}{z-1}\right|_{z=0.9}=-0.45\quad A_2=\left.\frac{0.05z}{z-0.9}\right|_{z=1}=0.5$$

$$Y(z)=-\frac{0.45z}{z-0.9}+\frac{0.5z}{z-1}\quad(|z|>1)$$

$$y(n)=[-0.45(0.9)^n+0.5]u(n)$$

## 8.5.3 z域微分（时域线性加权）

若 $ZT[x(n)]=X(z)$

$$ZT[nx(n)]=-z\frac{d}{dz}X(z)$$

**时域序列乘以*n*等效于z域中求导且乘以(-z)。**

$$ZT[n^2x(n)]=-z\frac{d}{dz}\left[-z\frac{dX(z)}{dz}\right]=\left[-z\frac{d}{dz}\right]^2X(z)$$

$$ZT[n^mx(n)]=\left[-z\frac{d}{dz}\right]^mX(z)$$

**例8–8：** 求斜变序列$nu(n)$和序列$n^2u(n)$的$z$变换。

**解：**

$$u(n) \xrightarrow{z} \frac{z}{z-1} \quad (|z|>1)$$

$$nu(n) \xrightarrow{z} -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (|z|>1)$$

$$n^2u(n) \xrightarrow{z} \left[-z\frac{d}{dz}\right]^2\left(\frac{z}{z-1}\right) = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right]$$

$$= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \quad (|z|>1)$$

**例8–9：** 求斜变序列$(n+1)a^n u(n)$的$z$变换。

**解：**

$$a^n u(n) \xrightarrow{z} \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$$

$$na^n u(n) \xrightarrow{z} -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right) = \frac{az}{(z-a)^2}, |z| > |a|$$

$$(n+1)a^n u(n) \xrightarrow{z} \frac{az}{(z-a)^2} + \frac{z}{z-a} = \frac{z^2}{(z-a)^2}, |z| > |a|$$

# 8.5 z变换的基本性质

## 利用z域微分特性求得的常见序列z变换

| z变换 | 因果序列 |
|---|---|
| $\dfrac{z}{z-1}\ (\lvert z\rvert>1)$ | $u(n)$ |
| $\dfrac{z}{z-a}\ (\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$ | $a^n u(n)$ |
| $\dfrac{z^2}{(z-a)^2}\ (\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$ | $(n+1)a^n u(n)$ |
| $\dfrac{z^3}{(z-a)^3}\ (\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$ | $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2!}a^n u(n)$ |

序列右移1 乘以系数$a$

序列右移2 乘以系数$a^2$

| z变换 | 因果序列 |
|---|---|
| $\dfrac{z}{(z-1)^2}\ (\lvert z\rvert>1)$ | $nu(n)$ |
| $\dfrac{az}{(z-a)^2}\ (\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$ | $na^n u(n)$ |
| $\dfrac{a^2 z}{(z-a)^3}\ (\lvert z\rvert>\lvert a\rvert)$ | $\dfrac{n(n-1)}{2!}a^n u(n)$ |

注:$(n+1)a^n u(n)$右移1，乘以$a$, 变为

$na^n u(n-1)=0\cdot a^0\delta(n)+1\cdot a\delta(n-1)+2a^2\delta(n-2)+\cdots=na^n u(n)$

若z变换的收敛域为$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$，逆变换为反因果序列，上述表格中的序列前面添加负号，$u(n)$替换为$u(-n-1)$。

## 8.5.4 z域尺度变换（时域指数加权）

$$ZT[x(n)] = X(z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

$$ZT[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right) \quad (R_{x1} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x2} \Rightarrow |a| R_{x1} < |z| < |a| R_{x2}) \qquad |a| > 1$$

$$ZT[a^{-n} x(n)] = X(az) \quad (R_{x1} < |az| < R_{x2} \Rightarrow \frac{R_{x1}}{|a|} < |z| < \frac{R_{x2}}{|a|}) \qquad |a| > 1$$

$$ZT[(-1)^n x(n)] = X(-z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

$$ZT[(-1)^n u(n)] = z/(z+1) \quad (|z| > 1)$$

**例8-10：**求序列$\beta^n\cos(n\omega_0)u(n)$的z变换。

**解：** $\cos(n\omega_0)u(n)\xrightarrow{z}\dfrac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$

**可得**

$$\beta^n\cos(\omega_0 n)u(n)\xrightarrow{z}\frac{\frac{z}{\beta}(\frac{z}{\beta}-\cos\omega_0)}{(\frac{z}{\beta})^2-2\frac{z}{\beta}\cos\omega_0+1}$$

$$\to\frac{z(z-\beta\cos\omega_0)}{z^2-2z\beta\cos\omega_0+\beta^2}$$

$\left|\dfrac{z}{\beta}\right|>1$　　即$|z|>|\beta|$

## 8.5.5 初值定理

若**x(n)**是因果序列，已知 $ZT[x(n)]=X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$

则 $x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$ （**n=0**的信号突变对应高频分量）

## 8.5.6 终值定理

若**x(n)**是因果序列，已知 $ZT[x(n)]=X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$

则 $\lim_{n\to\infty}x(n)=\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$ （$n\to\infty$对应直流分量，即$s=0$，$z=e^{s}=1$）

要求当 $n\to\infty$ 时**x(n)**收敛，即**X(z)**极点必须在单位圆内（若在单位圆上只能位于**z=1**处且为一阶极点）。

注意和系统稳定性条件区别，因果系统稳定性的条件是系统函数的极点必须位于单位圆内。

# 8.5 z变换的基本性质

终值定理的使用条件是收敛域包括单位圆或在z=1处有一阶极点。

| $x(n)$ | 终值（$n\to\infty$） | $X(z)$ | 收敛域 |
|---|---|---|---|
| $(2)^n$ | 无终值 | $\frac{z}{z-2}$ | $\|z\|>2$ |
| $(1)^n$ | 终值为1 | $\frac{z}{z-1}$ | $\|z\|>1$ |
| $(-1)^n$ | 无终值 | $\frac{z}{z+1}$ | $\|z\|>1$ |
| $(0.5)^n$ | 终值为0 | $\frac{z}{z-0.5}$ | $\|z\|>0.5$ |

**例8-11**：已知某因果序列的z变换$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}, |z|>|a|$，式中$a$为实数，分别利用初值定理和终值定理求序列的初值x(0)和终值x(∞)，并推导x(1)。

**解**：由初值定理和终值定理可得，

$$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{1-az^{-1}}=1$$

$$x(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)X(z)=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{1-az^{-1}}=\lim_{z\to1}\frac{z(z-1)}{z-a}=\begin{cases}1, & a=1\\ 0, & |a|<1\end{cases}$$

$|a|>1$或$a=-1$时终值不存在。

因为　$x(1)=x(n+1)\big|_{n=0}$　且$x(n+1)\leftrightarrow z\left[X(z)-x(0)\right]$　（单边z变换的位移特性）

所以　$$x(1)=\lim_{z\to\infty}z\left[X(z)-x(0)\right]=\lim_{z\to\infty}\left(\frac{z}{1-az^{-1}}-z\right)=\lim_{z\to\infty}\left(\frac{a}{1-az^{-1}}\right)=a$$

# 作业

基础题：8-5，8-10，8-11，8-12，8-13，8-17

加强题：8-16，8-18