上节内容

3.7　傅里叶变换的基本性质

3.7.1 线性

若 $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega),\ \mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega),$

则 $\mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$

3.7.2 对称性

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$

则 $\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$\frac{F(t)}{2\pi} \leftrightarrow f(\omega) \quad（f\text{为偶函数}）$$

$$\frac{-F(t)}{2\pi} \leftrightarrow f(\omega) \quad（f\text{为奇函数}）$$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega) \quad（f\text{为偶函数}）$$

$$F(t) \leftrightarrow -2\pi f(\omega) \quad（f\text{为奇函数}）$$

3.7.3 奇偶虚实性

1. 若 $f(t)$是实函数，或虚函数 $[f(t)=jg(t)]$，则 $|F(\omega)|$ 是偶函数，$\varphi(\omega)$ 是奇函数。
2. 若 $f(t)$是t的实偶函数，则 $F(\omega)$ 必为 ω 的实偶函数：

$$[F(\omega)=R(\omega)]$$

若 $f(t)$ 是t的实奇函数，则 $F(\omega)$ 必为 ω 的虚奇函数：

$$[F(\omega)=jX(\omega)]$$

例如：$f(t)=e^{-\alpha|t|}$ （实偶） $f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & t>0 \\ -e^{\alpha t} & t<0 \end{cases}$ （实奇）

$F(\omega)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$ （实偶） $F(\omega)=\dfrac{-2j\omega}{\alpha^2+\omega^2}$ （虚奇）

3.7.4 位移特性

（1）时移特性

若 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$

则 $$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega(t-t_0)}d(t-t_0)$$

$-j\omega t_0$

$$= F(\omega)e^{-j\omega t_0} = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}e^{-j\omega t_0}$$

幅度谱不变，相位谱产生附加相移$-\omega t_0$。

同理 $\mathcal{F}[f(t+t_0)] = F(\omega)e^{j\omega t_0}$

（2）频移特性（调制原理）

若 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$

则 $\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}]=F(\omega-\omega_0)$ $\mathcal{F}[f(t)e^{-j\omega_0 t}]=F(\omega+\omega_0)$

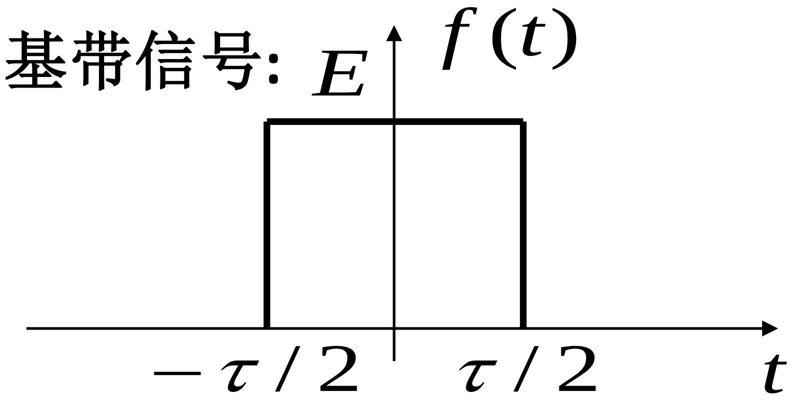
$\because \cos\omega_0 t=\frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}]$ $\sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}]$

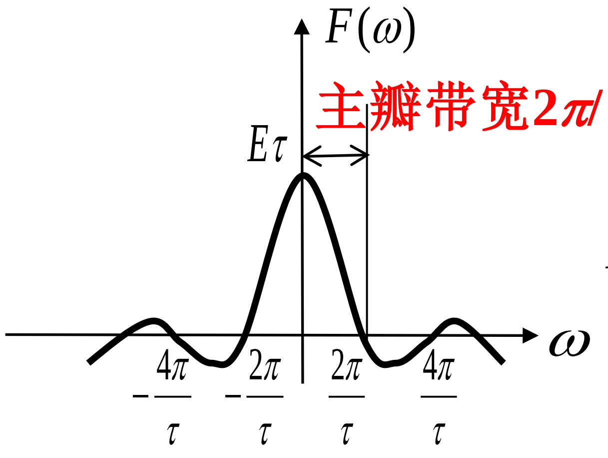
$\therefore \mathcal{F}[f(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$

$\mathcal{F}[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{j}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)]$

求矩形脉冲幅度键控（ASK）调制信号的频谱函数，已知矩形脉冲脉幅为E，脉宽为τ，载波信号的频率为ω_0。

基带信号:

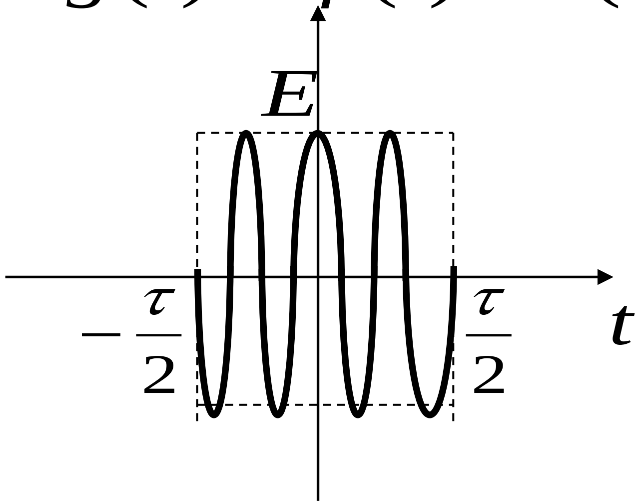


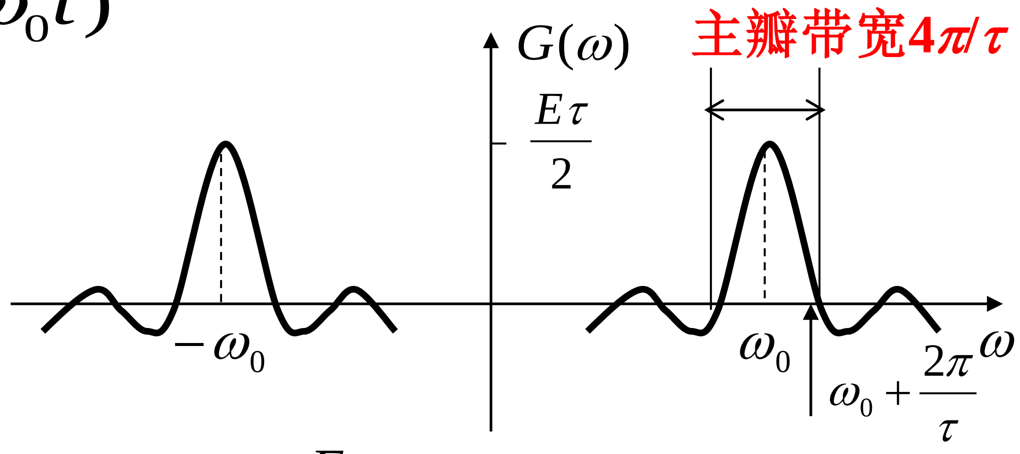


$$F(\omega)=E\tau \mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

ASK信号

$$g(t)=f(t)\cos(\omega_0 t)$$



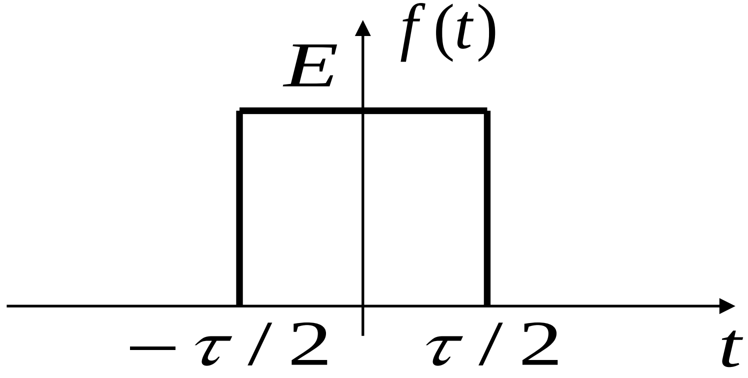


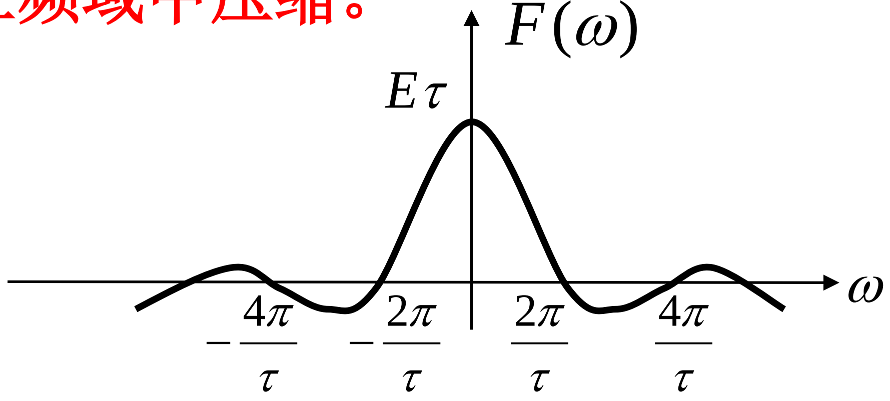
$$G(\omega)=\frac{E\tau}{2}\{\mathrm{Sa}[(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}]+\mathrm{Sa}[(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}]\}$$

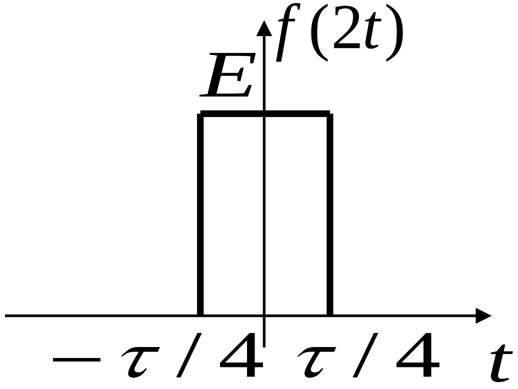
3.7.5 尺度变换特性

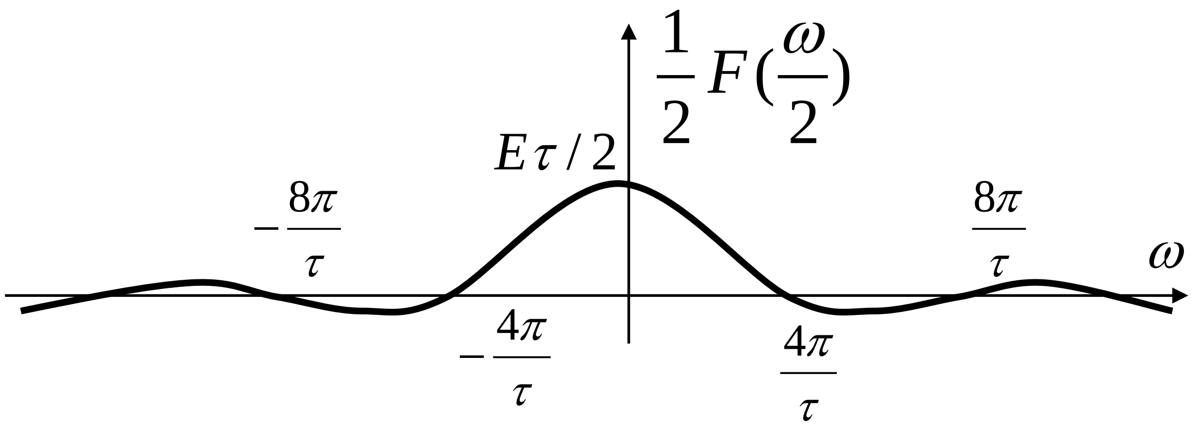
若 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$ 则 $\mathbf{F}[f(at)]=\dfrac{1}{|a|}F(\dfrac{\omega}{a})$

信号在时域中压缩等效于在频域中扩展（波形压缩a倍，信号随时间变化加快a倍，所包含的频率分量增加a倍，频谱展宽a倍。根据能量守恒定律，各频率分量的大小减小a倍）；在时域中扩展等效于在频域中压缩。









特例：$\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega)$　　（反褶， $a=-1$）

综合时移特性和尺度变换特性：

$$\boxed{\mathcal{F}[f(at-t_0)] = \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}}$$

证明：

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

先尺度变换

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$$

再时移

$$f\left[a(t-\frac{t_0}{a})\right] \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

先时移

$$f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

再尺度变换

$$f(at-t_0) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

3.7.6 微分与积分特性

（1）时域微分特性

若 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$

则 $\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=j\omega F(\omega)$, $\mathcal{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right]=(j\omega)^n F(\omega)$

（2）时域积分特性

若 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$

则 $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$

直流分量

（3）频域微分特性

若 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$

则 $\mathcal{F}[(-jt)f(t)]=\dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$，

$$\mathcal{F}[(-jt)^n f(t)]=\frac{d^nF(\omega)}{d\omega^n}$$

$$\boxed{\mathcal{F}[t^n f(t)]=j^n\frac{d^nF(\omega)}{d\omega^n}}$$

（4）频域积分特性

若 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$

则 $\mathcal{F}^{-1}[\int_{-\infty}^{\omega}F(u)du]=\dfrac{f(t)}{-jt}+\pi f(0)\delta(t)$

本次课内容

3.8 卷积定理

3.9 周期信号的傅里叶变换

3.10 抽样信号的傅里叶变换

3.11 抽样定理

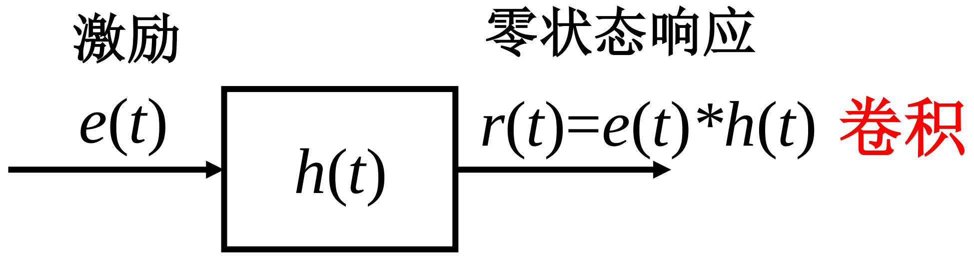
本次课目标

1. 熟练掌握时域卷积定理和频域卷积定理及其应用；

2. 熟悉周期信号的傅里叶变换与傅里叶级数的关系；

3. 熟练掌握抽样定理及其应用。

- 卷积是系统分析的核心技术。系统的零状态响应为激励与冲激响应的卷积。



- 卷积运算的四步曲：

1. 反褶：$h(\tau) \to h(-\tau)$

2. 时移：$h(-\tau) \to h(t-\tau)$ $\begin{cases} t<0, & 左移\ t \\ t>0, & 右移\ t \end{cases}$

3. 相乘：$e(\tau)h(t-\tau)$

4. 积分：$e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$

运算复杂！

- 卷积定理—将复杂的时域计算转换为简单的频域计算，反之亦然。
- 抽样定理—卷积定理的应用。

单选题 1分

设置

要将一首时间上连续的乐曲转换为CD中的数字音乐，需对模拟信号进行抽样（时间离散化），你认为下列哪个抽样频率（单位Hz代表每秒钟的抽样次数）获得的音乐质量最高？

A 5.5 kHz

B 11 kHz

C 22 kHz

D 44 kHz

提交

抽样频率的选取

要将一首时间上连续的乐曲转换为CD中的数字音乐，需对模拟信号进行抽样（时间离散化），你认为下列哪个抽样频率（单位Hz代表每秒钟的抽样次数）获得的音乐质量最高？

44 kHz抽样频率

22 kHz抽样频率

11 kHz抽样频率

5.5 kHz抽样频率

3.8 卷积定理

（1）时域卷积定理：两信号的时域卷积等效于在频域中频谱相乘。

若 $F_1(\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)],\qquad F_2(\omega)=\mathcal{F}[f_2(t)],$

则 $$\boxed{\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)F_2(\omega)}$$

（2）频域卷积定理：两信号的频域卷积等效于在时域中函数相乘（再除以2π）。

若 $F_1(\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)],\qquad F_2(\omega)=\mathcal{F}[f_2(t)],$

则 $$\boxed{\mathcal{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)}$$

其中： $$F_1(\omega)*F_2(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)F_2(\omega-u)du$$

例3-8：利用卷积定理证明傅里叶变换的时域积分特性。

解：$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau = f(t)*u(t)$

已知 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ ，

利用时域卷积定理，

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = F(\omega)\mathcal{F}[u(t)]$$

$$= F(\omega)\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right]$$

$$= \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

时域积分特性

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

直流分量

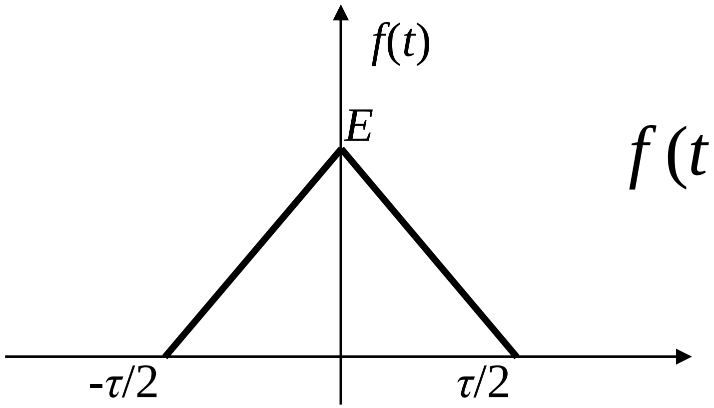
例3-9：利用时域卷积定理求三角脉冲的频谱

$$f(t)=\begin{cases}E\left(1-\dfrac{2|t|}{\tau}\right) & |t|\le\dfrac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

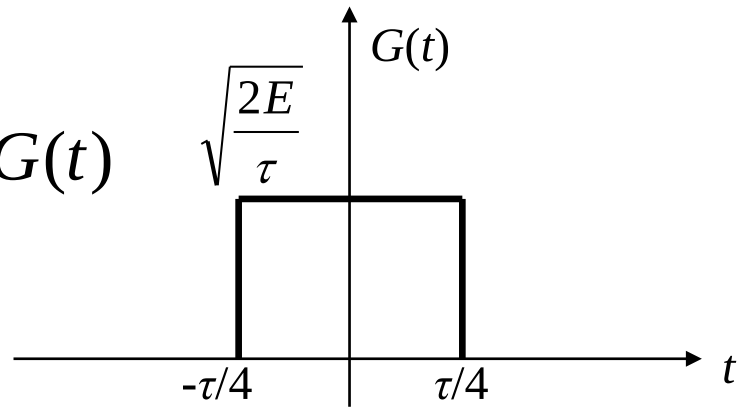
解：

第一步：将三角脉冲视为**两个矩形脉冲的卷积**。

三角脉冲的宽度为两个矩形脉冲的宽度之和，而三角脉冲的幅度峰值为两个矩形幅度的平方和宽度相乘的结果。因此，矩形脉冲的宽度、幅度分别为$\tau/2$及$\sqrt{2E/\tau}$ 。

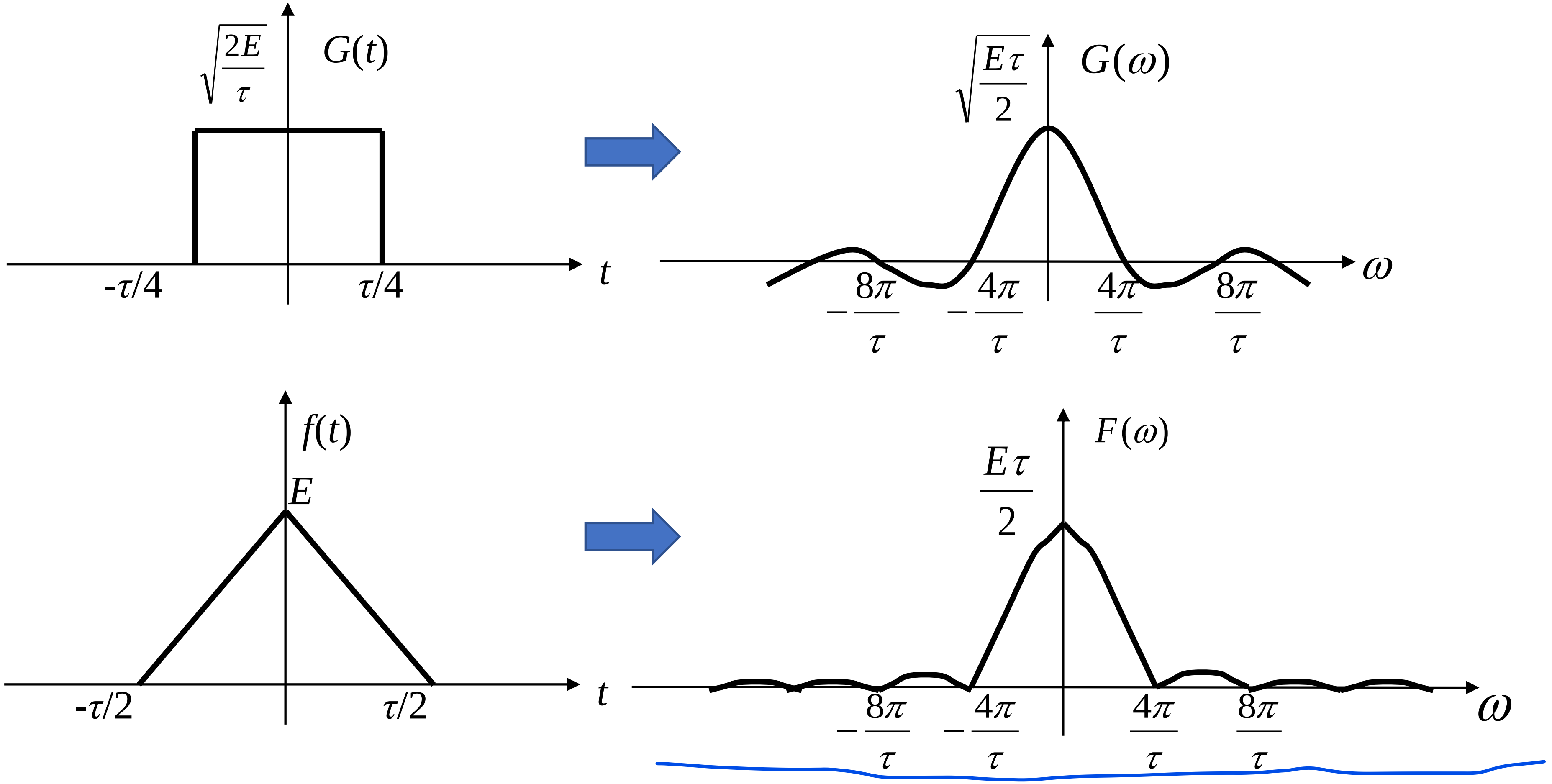


$$f(t)=G(t)*G(t)$$

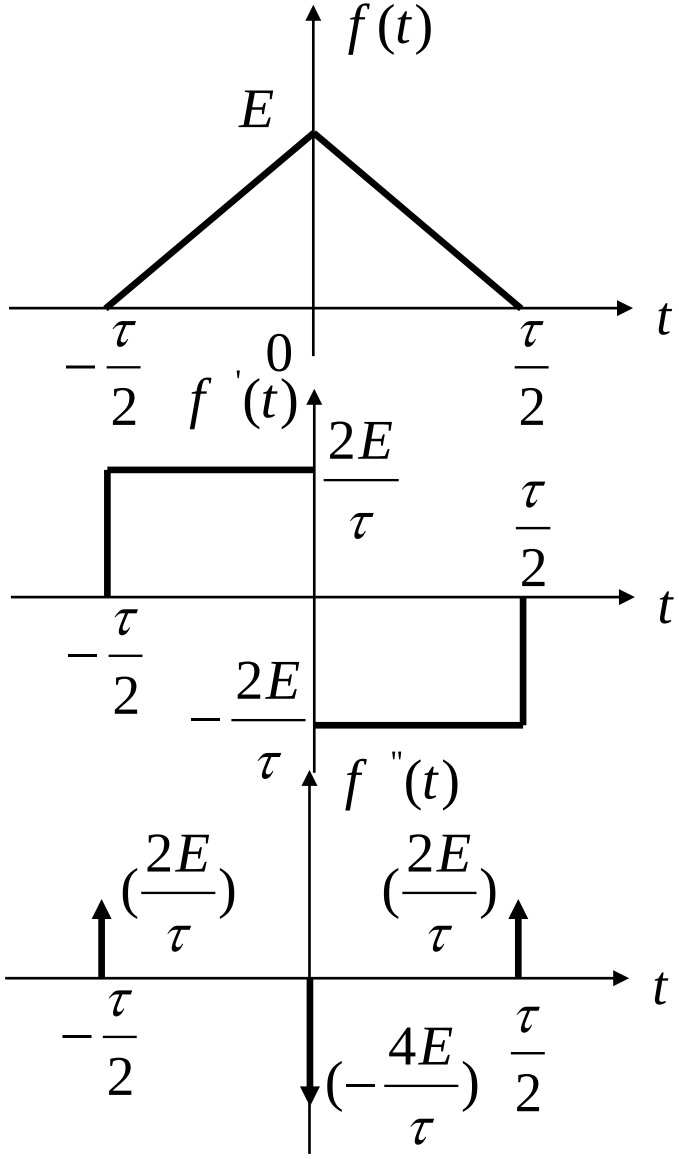


第二步：应用时域卷积定理。

$$G(\omega)=\sqrt{\frac{2E}{\tau}}\cdot\frac{\tau}{2}\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{4})=\sqrt{\frac{E\tau}{2}}\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{4})\qquad\therefore\quad F(\omega)=G^2(\omega)=\frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})$$



回顾例3-7：用时域微分性质求三角脉冲信号的傅里叶变换。



解：

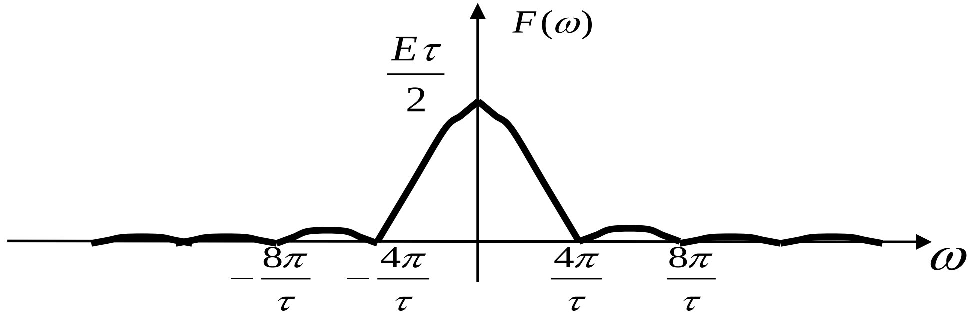
$$f''(t)=\frac{2E}{\tau}[\delta(t+\frac{\tau}{2})+\delta(t-\frac{\tau}{2})-2\delta(t)]$$

对上式两边取傅里叶变换：

$$(j\omega)^2F(\omega)=\frac{2E}{\tau}(e^{j\omega\frac{\tau}{2}}+e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-2)$$

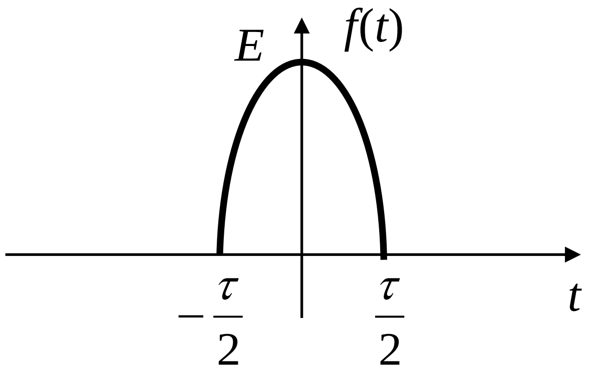
$$=-\frac{\omega^2E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

$$\therefore\quad F(\omega)=\frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})$$



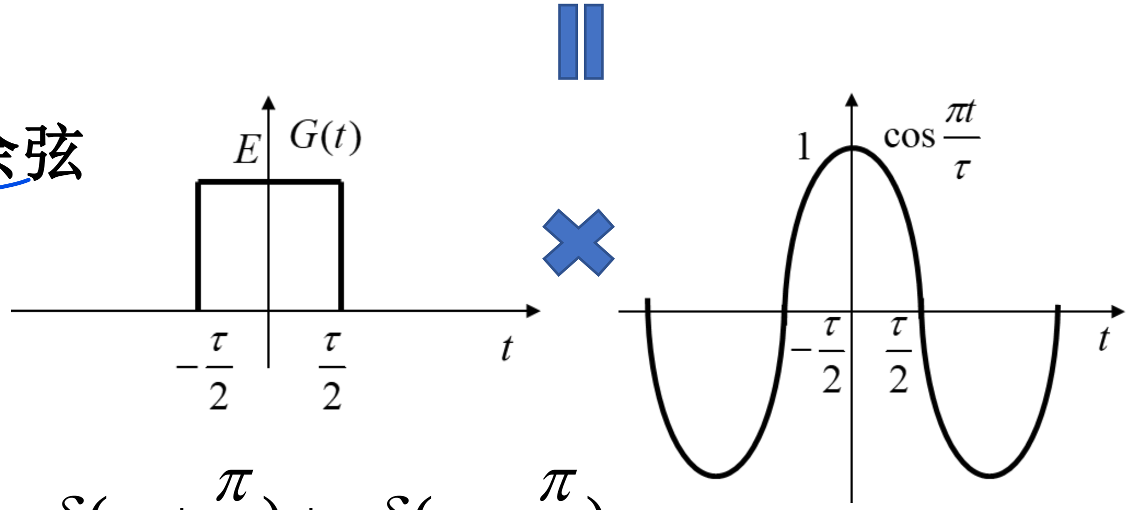
例3-10：利用频域卷积定理求余弦脉冲的频谱。

$$f(t)=\begin{cases}E\cos\dfrac{\pi t}{\tau} & |t|\le\dfrac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$



解：

第一步：把 $f(t)$ 看作是矩形脉冲 $G(t)$ 与余弦信号的乘积。

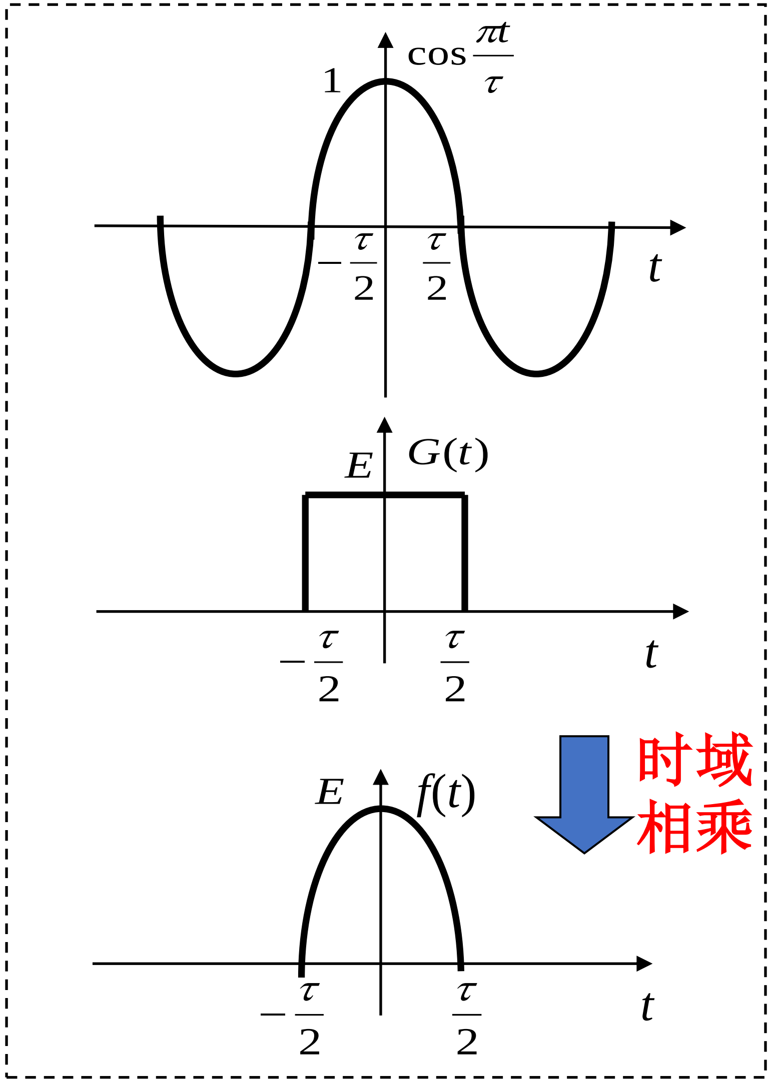


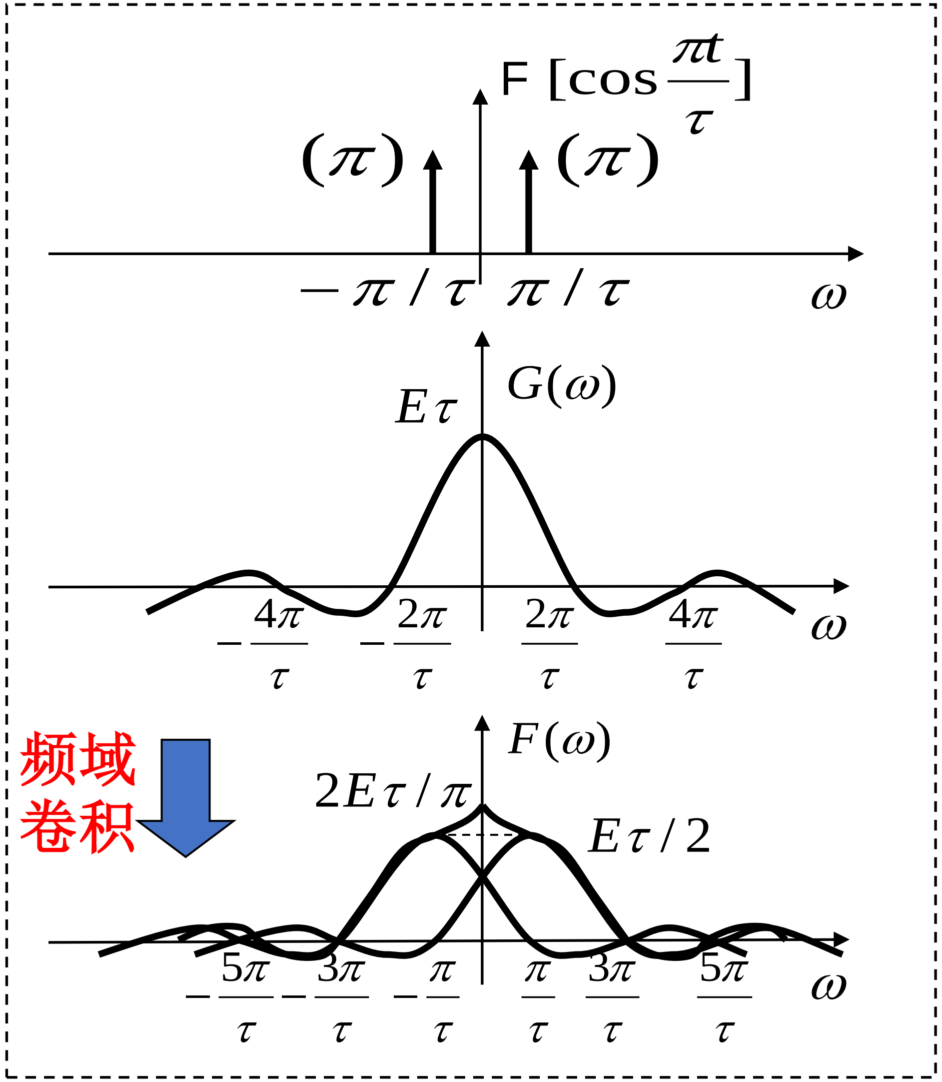
第二步：应用频域卷积定理。

$$G(\omega)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})\qquad \mathcal{F}[\cos\frac{\pi t}{\tau}]=\pi\delta(\omega+\frac{\pi}{\tau})+\pi\delta(\omega-\frac{\pi}{\tau})$$

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}G(\omega)*\pi[\delta(\omega+\frac{\pi}{\tau})+\delta(\omega-\frac{\pi}{\tau})]=\frac{E\tau}{2}\{\mathrm{Sa}[(\omega+\frac{\pi}{\tau})\frac{\tau}{2}]+\mathrm{Sa}[(\omega-\frac{\pi}{\tau})\frac{\tau}{2}]\}$$

$$F(\omega)=\frac{E\tau}{2}\{\mathrm{Sa}[(\omega+\frac{\pi}{\tau})\frac{\tau}{2}]+\mathrm{Sa}[(\omega-\frac{\pi}{\tau})\frac{\tau}{2}]\}=2E\tau\cos(\frac{\omega\tau}{2})\Big/\left[\pi\left(1-\frac{\tau^2\omega^2}{\pi^2}\right)\right]$$





3.8 卷积定理

当一复指数时间信号作为激励作用于线性时不变系统时，其稳态响应是同频率的复指数时间信号，只是幅度与相位被改变。

$$e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = e^{j\omega_0 t} * h(t)$$

$$y(t) = h(t) * e^{j\omega_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0 (t-\tau)} d\tau = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau$$

$$= H(\omega_0) e^{j\omega_0 t} = \left| H(\omega_0) \right| e^{j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]}$$

$$e^{-j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = e^{-j\omega_0 t} * h(t)$$

$$y(t) = h(t) * e^{-j\omega_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 (t-\tau)} d\tau = e^{-j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0 \tau} d\tau$$

$$= H^*(\omega_0) e^{-j\omega_0 t} = \left| H(\omega_0) \right| e^{-j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]}$$

当一个三角函数作为激励作用于线性时不变系统时，其稳态响应是同频率的三角函数，只是幅度与相位被改变。

$$\cos(\omega_0 t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = \cos(\omega_0 t) * h(t)$$

$$y(t) = h(t) * \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} h(t) * (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$= \frac{1}{2}\left|H(\omega_0)\right|\left(e^{j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} + e^{-j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]}\right) = \left|H(\omega_0)\right| \cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]$$

$$\sin(\omega_0 t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = \sin(\omega_0 t) * h(t)$$

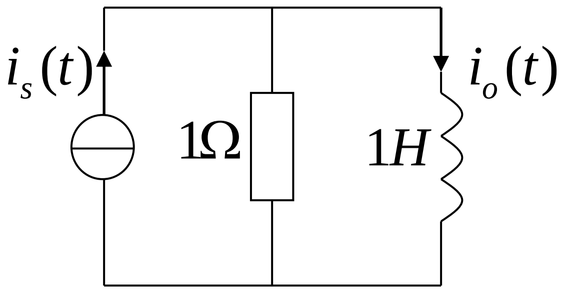
$$y(t) = h(t) * \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} h(t) * (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

$$= \frac{1}{2j}\left|H(\omega_0)\right|\left(e^{j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} - e^{-j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]}\right) = \left|H(\omega_0)\right| \sin[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]$$

如一时间信号作用于系统，其输出仍是此时间信号，只是幅度与相位被改变，称此时间信号为系统的特征信号，表征被改变的幅度和相位的函数，称为系统的特征值或系统函数。

所以信号$e^{j\omega_0 t}$，$\cos(\omega_0 t)$和 $\sin(\omega_0 t)$是系统的特征信号，函数 $H(\omega)$（系统单位冲激响应**$h(t)$**的傅里叶变换）是系统的特征值或系统函数，也称为系统的频率响应。

例3-11：一*RL*电路如图所示，激励为电流源$i_s(t)$，响应是电感中的电流$i_o(t)$。列出电路的输入-输出微分方程，求出其频率响应。若激励$i_s(t)=\cos t$，求正弦稳态响应$i_o(t)$。



解：系统方程为 $i_R(t)+i_o(t)=i_s(t)$

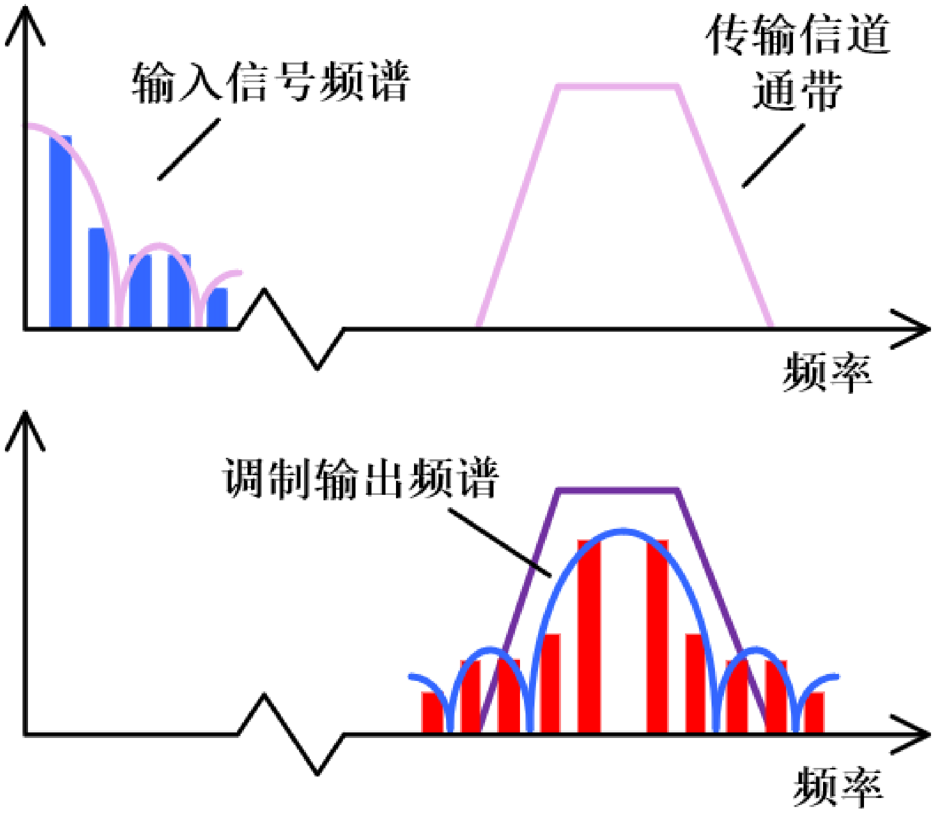
$$\therefore \frac{L}{R}\frac{di_o(t)}{dt}+i_o(t)=i_s(t) \qquad \frac{di_o(t)}{dt}+i_o(t)=i_s(t)$$

两边同求傅里叶变换 $(j\omega+1)I_o(\omega)=I_s(\omega)$

所以 $H(\omega)=\dfrac{I_o(\omega)}{I_s(\omega)}=\dfrac{1}{j\omega+1}$ $\qquad H(1)=H(\omega)\big|_{\omega=1}=\dfrac{1}{j+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}}$

$$i_o(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t-\frac{\pi}{4})$$

卷积定理的应用：通信中的带宽效应



$$x(t)*h(t) \xrightarrow{F} X(\omega)H(\omega)$$

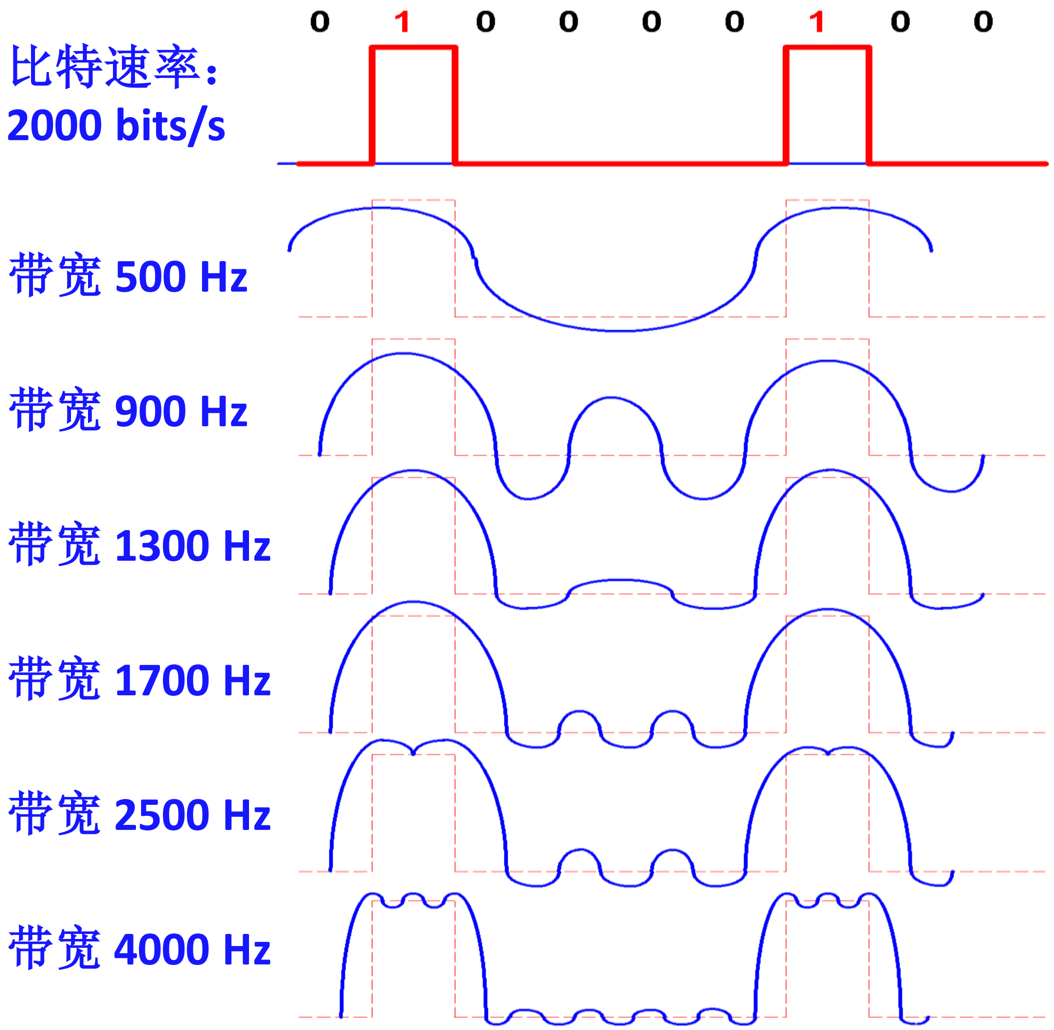
时域卷积定理

- 信道带宽是有限的。
- 如果信号的一些主要频率分量落在信道带宽之外，则信道输出的信号失真。

卷积定理的应用：通信中的带宽效应

- 信号带宽：2000 Hz

- 信道在不同带宽情况下的输出信号



3.9 周期信号的傅里叶变换

$$
\begin{tikzcd}
\text{周期信号} \arrow[r] \arrow[d, "T_1 \to \infty"] \arrow[dr, "?"] & \text{傅里叶级数} \arrow[d, "T_1 \to \infty,\ \times T_1"] \\
\text{非周期信号} \arrow[r] & \text{傅里叶变换（表示频谱密度）}
\end{tikzcd}
$$

试求信号 $f(t) = 1 + 2\cos t$ 的傅里叶变换。

A $F(\omega) = \delta(\omega) + 2\pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$

B $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)$

C $F(\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)$

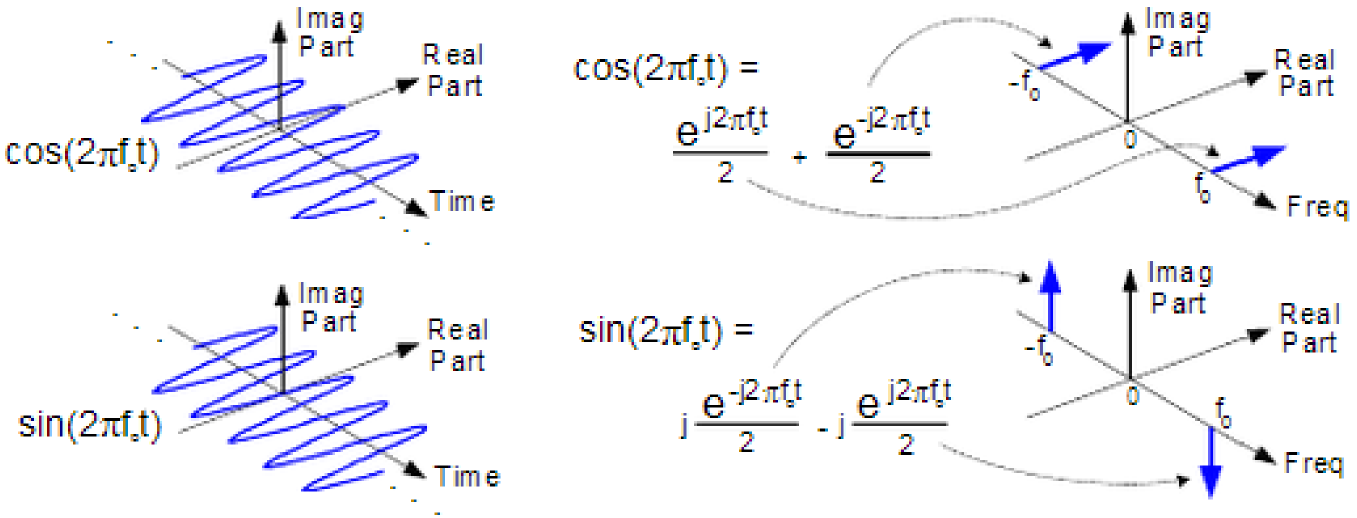
D $F(\omega) = 2\pi[\delta(\omega) + \delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$

提交

3.9.1 正弦、余弦信号的傅里叶变换

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$$



$$\mathrm{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\mathrm{F}[e^{-j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$\mathrm{F}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\mathrm{F}[\sin\omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

3.9.2 一般周期信号的傅里叶变换

令周期信号$f(t)$的周期为T_1，角频率为$\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi/T_1$。它的傅里叶级数为

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \qquad (1)$$

其中：$$F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

对式(1)两边取傅里叶变换

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathcal{F}\left[e^{jn\omega_1 t}\right] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

利用频移性质

即：$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

周期信号$f(t)$的傅里叶变换是由一系列冲激函数所组成，这些冲激位于信号的谐频处$(0, \pm\omega_1, \pm 2\omega_1, \cdots\cdots)$，每个冲激的强度等于$f(t)$的傅里叶级数相应系数$F_n$的$2\pi$倍。

3.9 周期信号的傅里叶变换

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \qquad (1)$$

求傅里叶级数的系数也可由 $F_0(\omega)=\lim_{T_1\to\infty} T_1 F_n$ 得到：

$$F_n=\frac{1}{T_1}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}=\frac{1}{T_1}\left[\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-j\omega t}dt\right]_{\omega=n\omega_1}$$

$F_0(\omega)$ ：单脉冲信号的傅里叶变换

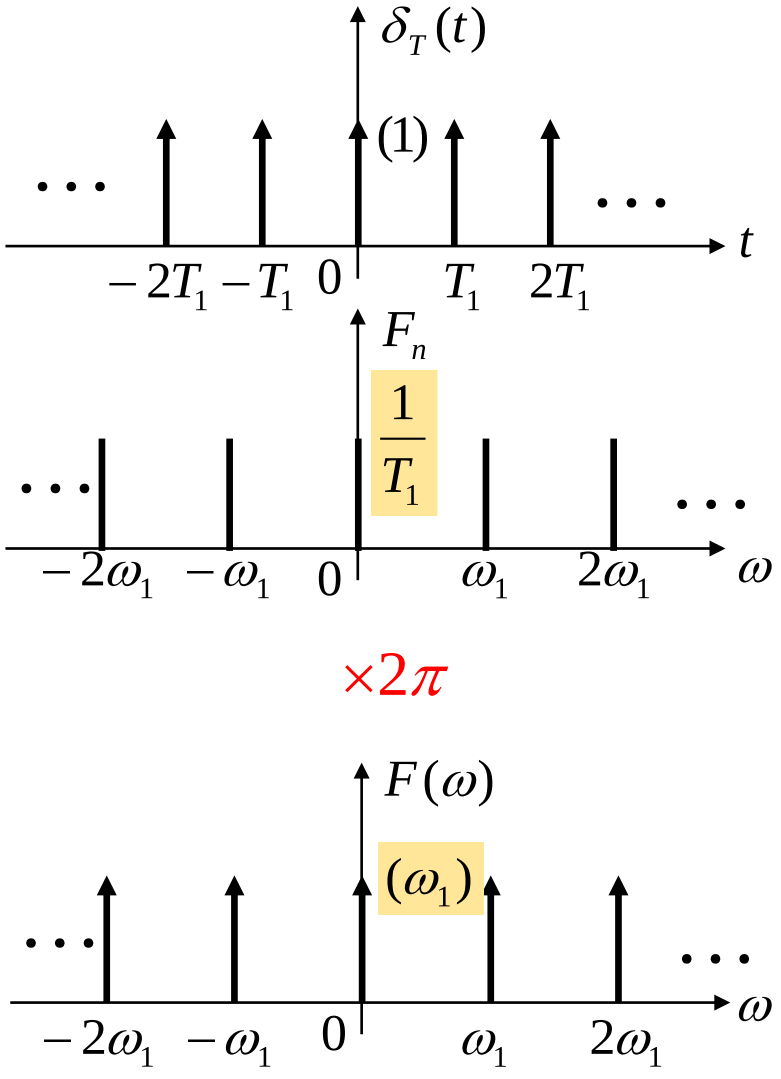
对式(1)两边取傅里叶变换

$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\mathcal{F}\left[e^{jn\omega_1 t}\right]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\delta(\omega-n\omega_1)$$

$$=\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}\delta(\omega-n\omega_1)$$

常数

例3-12：求周期单位冲激序列的傅里叶变换。



$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)$$

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\delta(t)e^{-jn\omega_1 t}dt=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\delta(t)dt=\frac{1}{T_1}$$

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}=\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\omega_1 t}$$

$$F(\omega)=\frac{2\pi}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1)=\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1) \qquad (2)$$

同学们的常用解法：用傅里叶变换定义的积分式推导

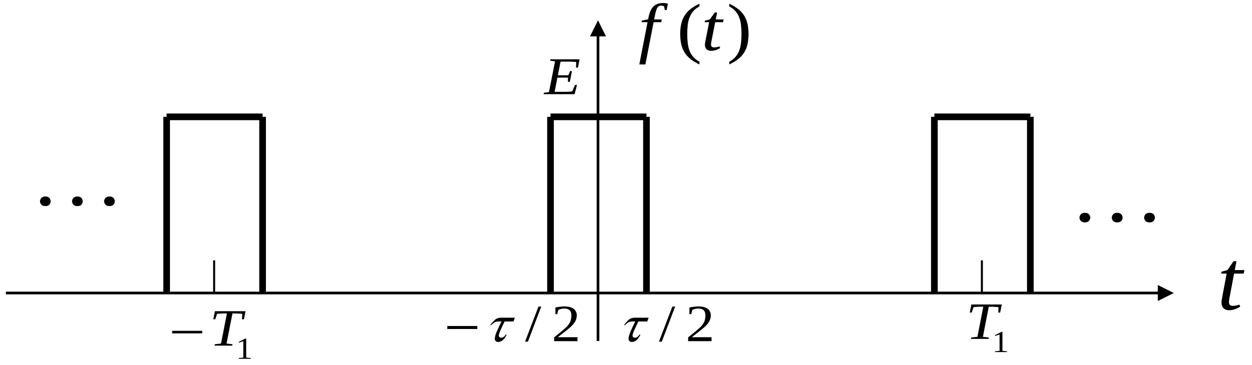
$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)\right]e^{-j\omega t}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{F}[\delta(t-nT_1)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-jnT_1\omega}$$

课后思考题：用几何级数求值证明上述傅里叶变换与（2）等效。

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-jnT_1\omega}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}e^{-jnT_1\omega}$$

例3-13：求周期矩形脉冲信号的傅里叶级数及傅里叶变换。已知周期矩形脉冲信号$f(t)$的幅度为E，脉宽为τ，周期为T_1，角频率为$\omega_1=2\pi/T_1$。



解：已知单矩形脉冲$f_0(t)$ 的傅里叶变换 $F_0(\omega)$ 为

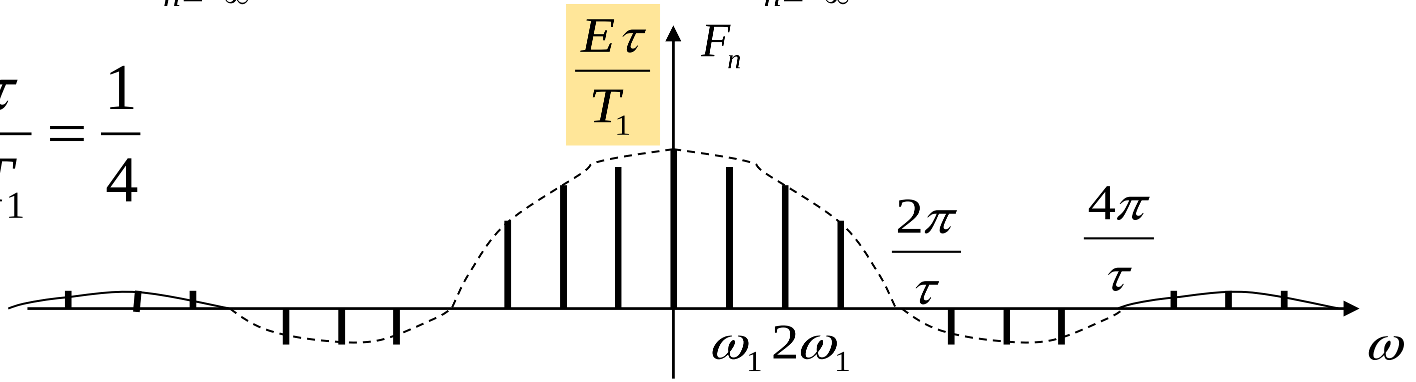
$$F_0(\omega)=E\tau\cdot \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$F_n=\frac{1}{T_1}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

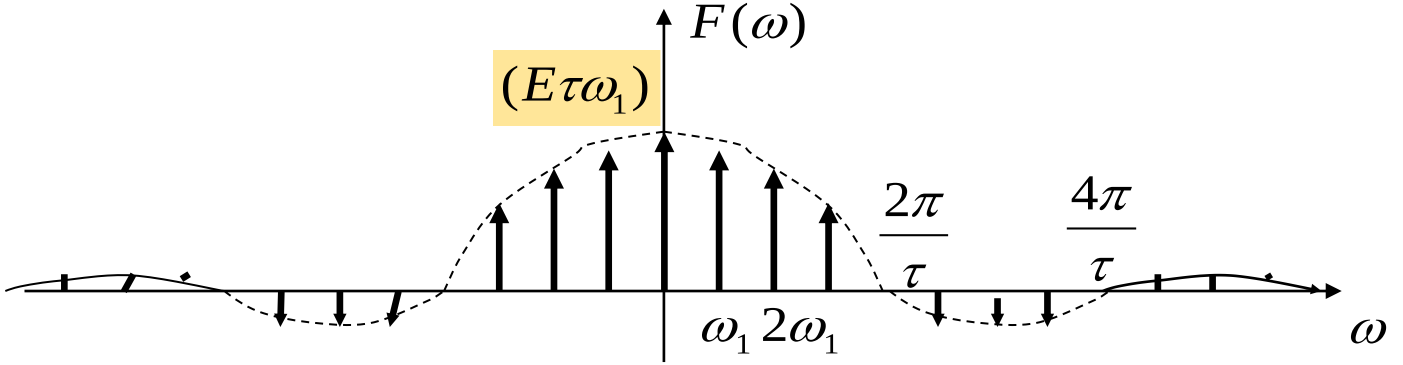
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}=\frac{E\tau}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)e^{jn\omega_1 t}$$

$$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)=E\tau\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\omega_1)$$

设：$\frac{\tau}{T_1}=\frac{1}{4}$



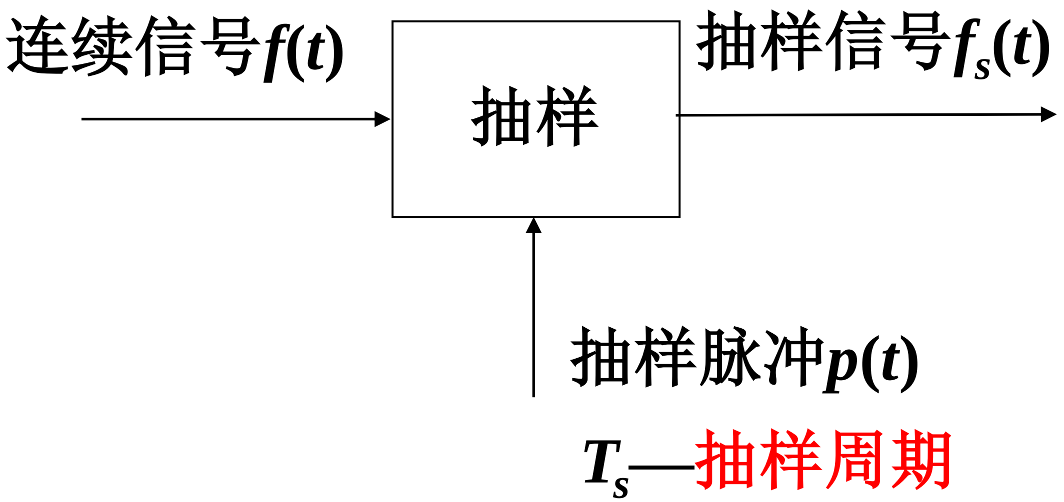
$\times 2\pi$

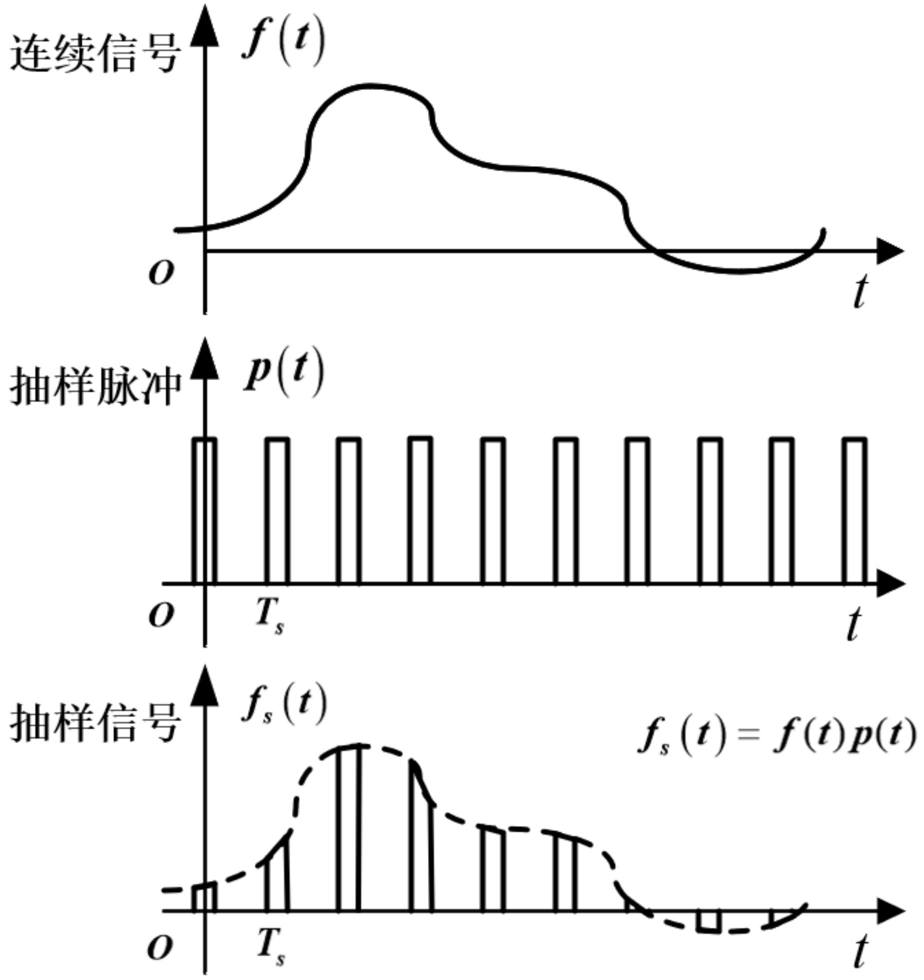


3.10.1 信号的抽样

抽样--利用抽样脉冲序列从连续信号中“抽样”一系列的离散样值。

这种离散信号通常称为“抽样信号”。



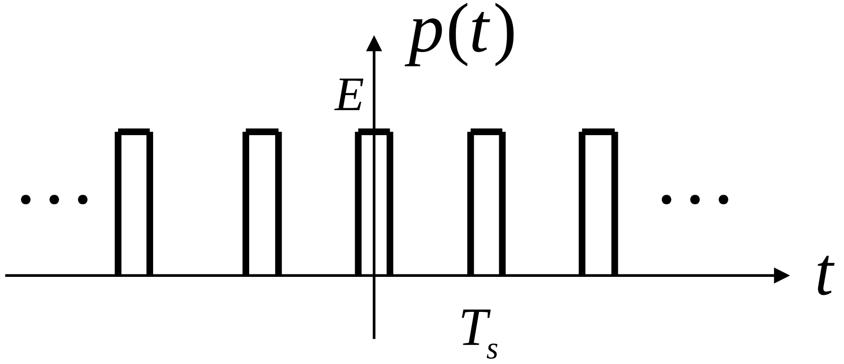


3.10.2 抽样信号的傅里叶变换

令连续信号$f(t)$的傅里叶变换为 $F(\omega)$

抽样脉冲$p(t)$的傅里叶变换为 $P(\omega)$

抽样后信号$f_s(t)$的傅里叶变换为 $F_s(\omega)$



$$P(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\delta(\omega-n\omega_s)$$

其中：$P_n=\dfrac{1}{T_s}\displaystyle\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}p(t)e^{-jn\omega_s t}dt$

$$\omega_s=2\pi f_s=\frac{2\pi}{T_s}$$

抽样角频率　抽样频率

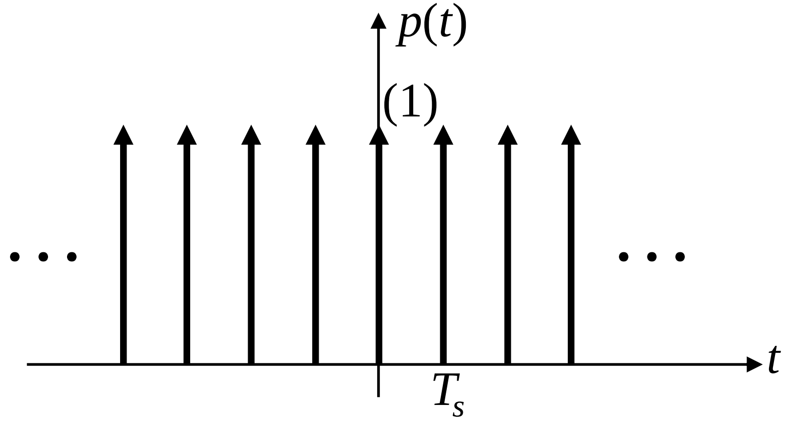
$$f_s(t)=f(t)p(t)$$

$$F_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*P(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\delta(\omega-n\omega_s)$$ 频域卷积定理

所以 $F_s(\omega)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\cdot F[(\omega-n\omega_s)]$

冲激抽样

若抽样脉冲 $p(t)$是冲激序列，此时称为“冲激抽样”或“理想抽样”。



$$p(t)=\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

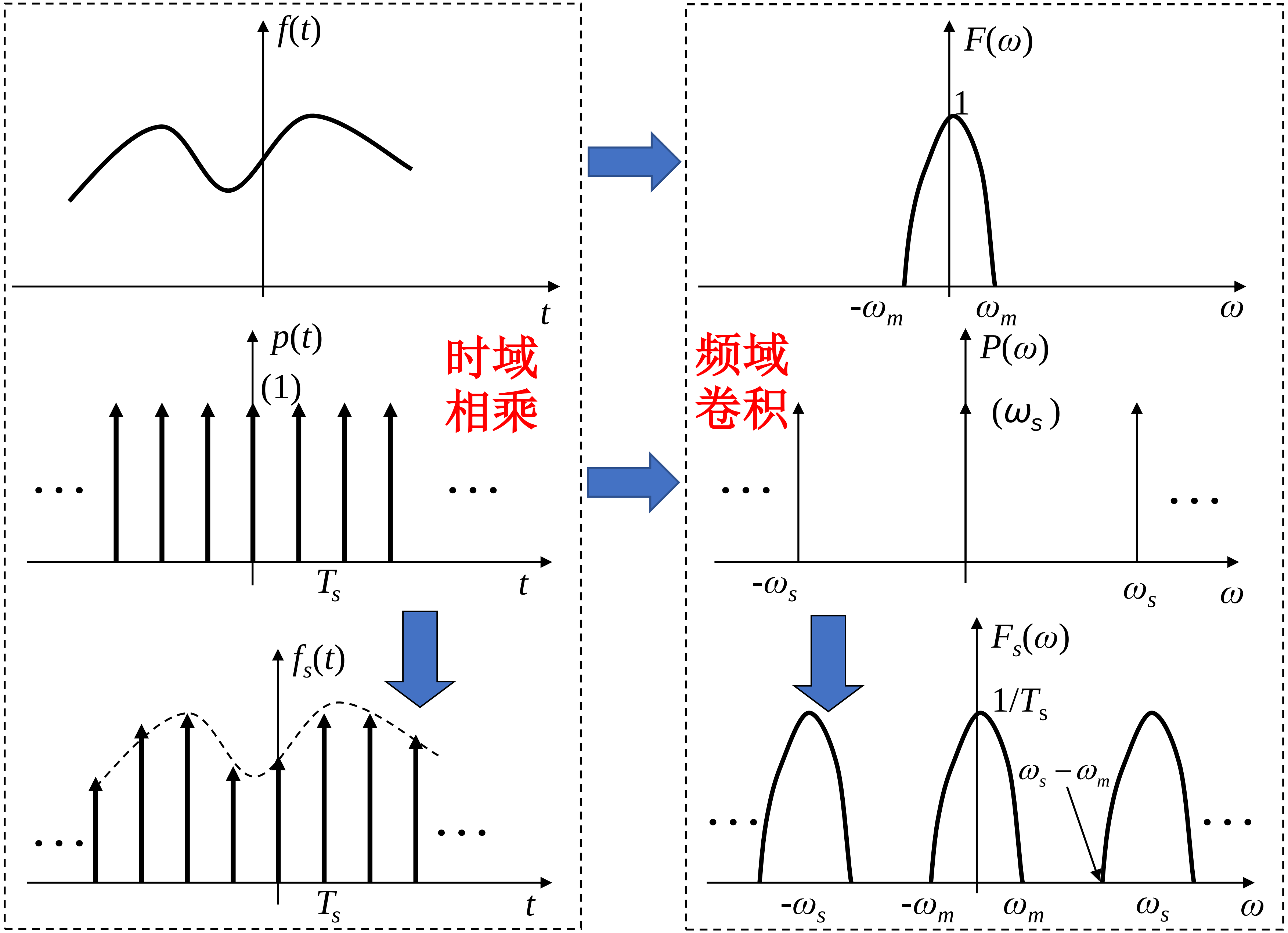
$$F_s(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\cdot F(\omega-n\omega_s)$$

$$\boxed{=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)}$$

在频域以ω_s为周期延拓

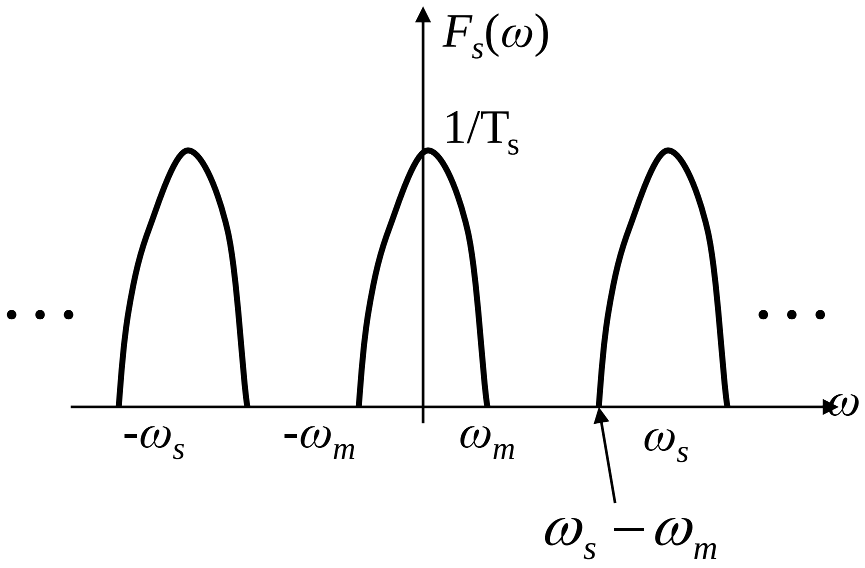
其中：$P_n=\dfrac{1}{T_s}\displaystyle\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}\delta(t)e^{-jn\omega_s t}dt=\dfrac{1}{T_s}$

3.10 抽样信号的傅里叶变换



用抽样脉冲对连续信号进行抽样，**如何选取抽样频率和抽样周期?**

并且**如何从抽样信号中恢复原连续信号?**



从上图可知，只有满足 $\omega_s \geq 2\omega_m$, $F_s(\omega)$ 才不会产生频谱混叠，即 $f_s(t)$ 保留了原连续时间信号的全部信息。

这时只要将$f_s(t)$ 施加于 **"理想低通滤波器"**，就可恢复原信号 $f(t)$。

3.11 抽样定理

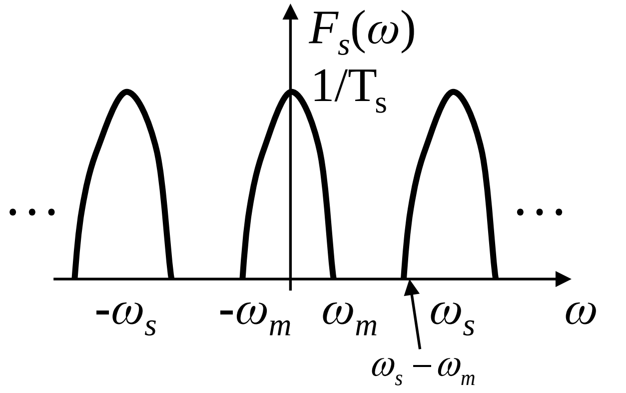
时域抽样定理： 一个频谱受限的信号$f(t)$，如果频谱只占据$-\omega_m \sim \omega_m$的范围，在抽样间隔不大于$\frac{1}{2f_m}$（其中$\omega_m = 2\pi f_m$）或者抽样频率大于等于$2f_m$时，信号$f(t)$可以用等间隔的抽样值唯一的表示。

奈奎斯特抽样频率： 最低允许的抽样频率。

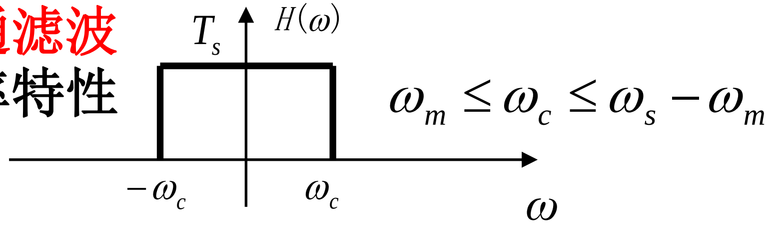
$$\boxed{f_{s\min} = 2f_m}$$

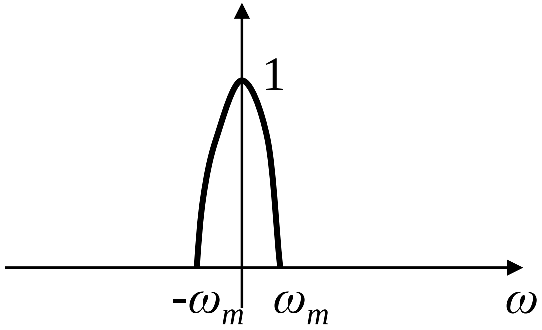
奈奎斯特抽样间隔： 最大允许的抽样间隔。

$$\boxed{T_{s\max} = \frac{1}{f_{s\min}} = \frac{1}{2f_m}}$$

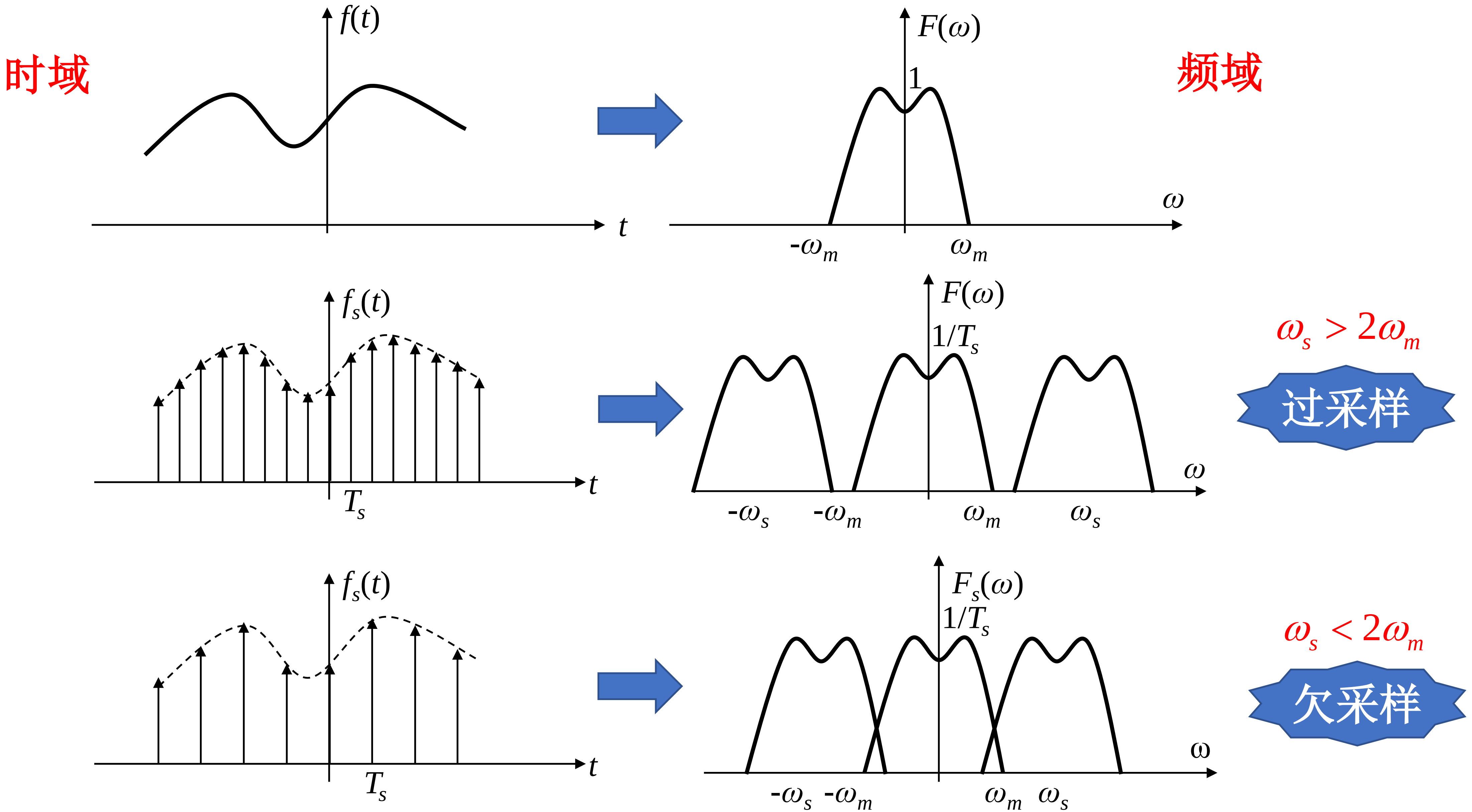


理想低通滤波器的频率特性



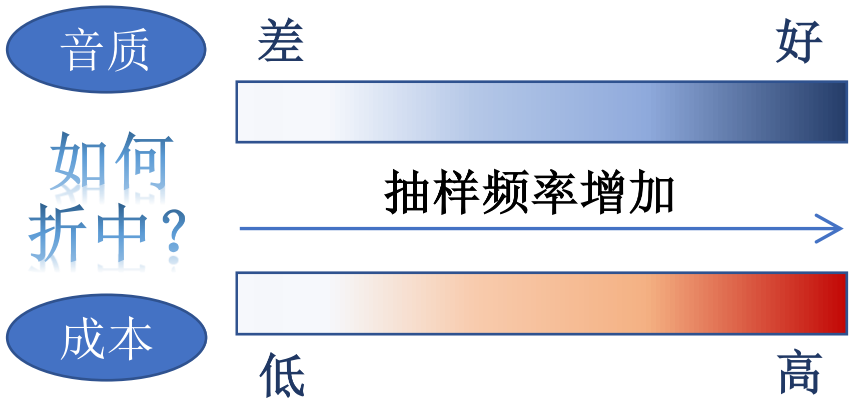


3.11 抽样定理



例3-14：CD的抽样频率通常采用44 kHz，请解释原因。抽样频率是否越高越好？

- 多数人耳可以听到20 Hz--16 kHz的频率。测试可听到的频率范围可访问：https://www.bilibili.com/video/av40724545/
- 对应的奈奎斯特抽样频率为32 kHz。
- 可以用抗混(pre-alias)滤波器对16 kHz以上的频率分量进行移除。
- 对高质量的音频信号，我们一般采用比奈奎斯特抽样频率更高的抽样频率，如44 kHz, 48 kHz, 96 kHz 或128 kHz。
- 抽样频率的选取需在音质和成本之间取得折中。



例3-15：若$f(t)$的最高角频率为ω_m，则对$f(t/4)$抽样允许的最大时间间隔为多少？

解：根据傅里叶变换的尺度变换特性可知信号 $f(t/4)$ 的时域

扩展4倍，频域压缩4倍，最高角频率为 $\omega_m/4$ 。

再根据抽样定理，可得频谱不混叠的最小抽样频率为

$$\omega_s = 2(\omega_m/4) = \omega_m/2$$

最大抽样间隔为

$$T_{\max} = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{4\pi}{\omega_m}$$

工程中抽样频率的选取

若信号最高频率ω_m已知，一般取 $\omega_s \geq (5\sim10)\omega_m$

若信号的带宽ω_B已知，一般取 $\omega_s \geq (5\sim10)\omega_B$

若干扰信号的最高频率为ω_f，应满足 $\omega_s \geq 2\omega_f$

在工业控制系统中，抽样周期的经验数据如下：

流量信号：$T_s = 1\sim5$秒；压力信号：$T_s = 3\sim10$秒

液位信号：$T_s = 6\sim8$秒；温度信号：$T_s = 15\sim20$秒

成分信号：$T_s = 15\sim20$秒

频域抽样定理：若信号 $f(t)$ 是时间受限信号，它集中在$-t_m \sim +t_m$ 的时间范围内，若在频域中以不大于$\frac{1}{2t_m}$ 的频率间隔对 $f(t)$的频谱$F(\omega)$ 进行抽样，则抽样后的频谱 $F_s(\omega)$ 可以唯一的表示原信号。

例3-16： 已知信号 $f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$，用 $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$ 对其进行抽样，

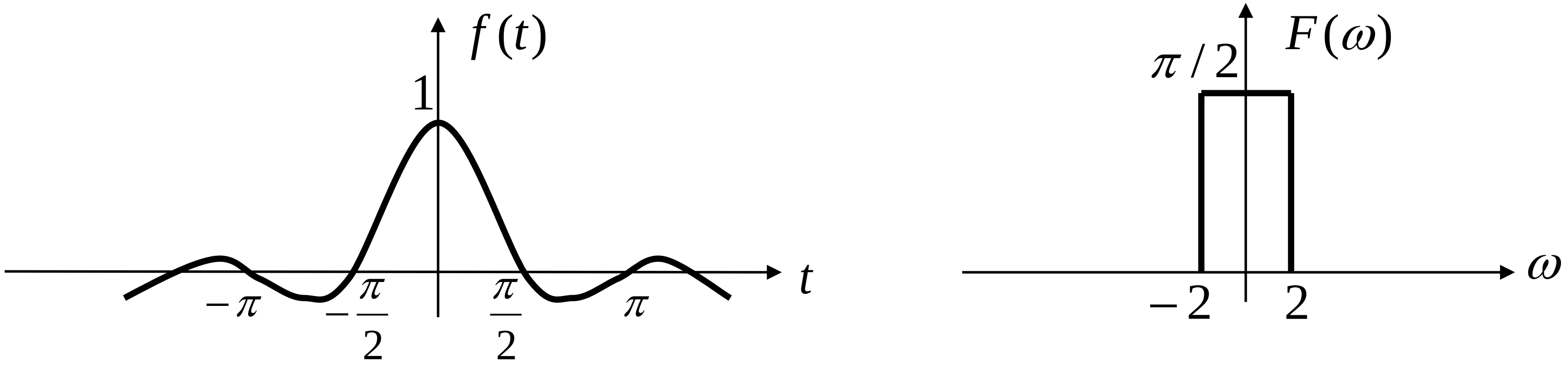
（1）确定奈奎斯特抽样频率；

（2）若取 $\omega_s=6\omega_m$，求抽样信号 $f_s(t)=f(t)\delta_T(t)$，并画出波形图；

（3）求 $F_s(\omega)=\mathcal{F}[f_s(t)]$，并画出频谱图；

（4）确定低通滤波器的截止频率 ω_c。

解：（1）$\because f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$　　$\therefore F(\omega)=\dfrac{\pi}{2}[u(\omega+2)-u(\omega-2)]$

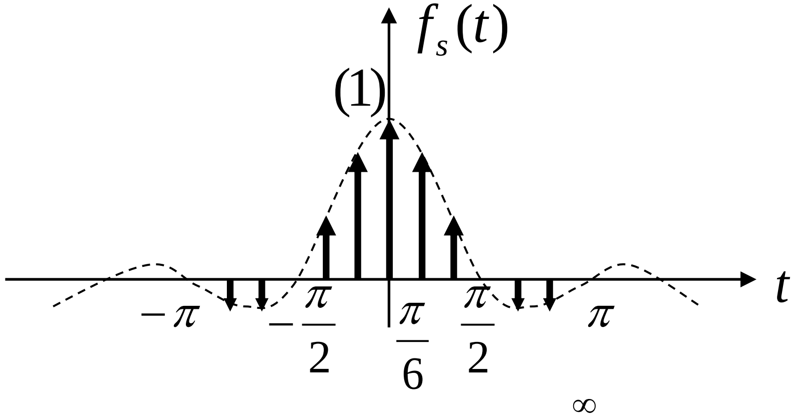


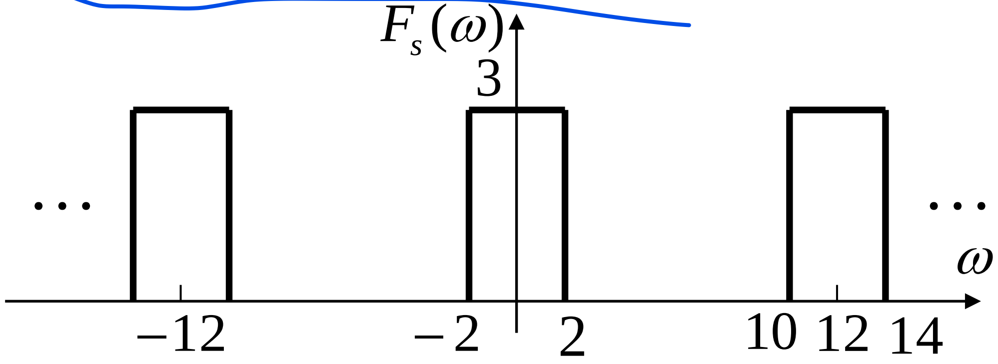
奈奎斯特抽样频率为：

$$f_{s\ \min}=2f_m=2\times\frac{2}{2\pi}=\frac{2}{\pi}\ \mathrm{Hz}$$

3.11 抽样定理

（2）$\because \omega_s = 6\omega_m = 12\ \text{rad/s} \qquad \therefore T_s = \dfrac{2\pi}{\omega_s} = \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}\ \text{s}$





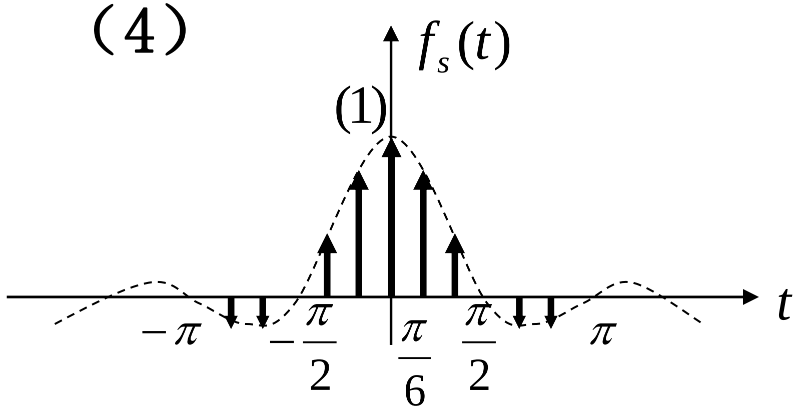
$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

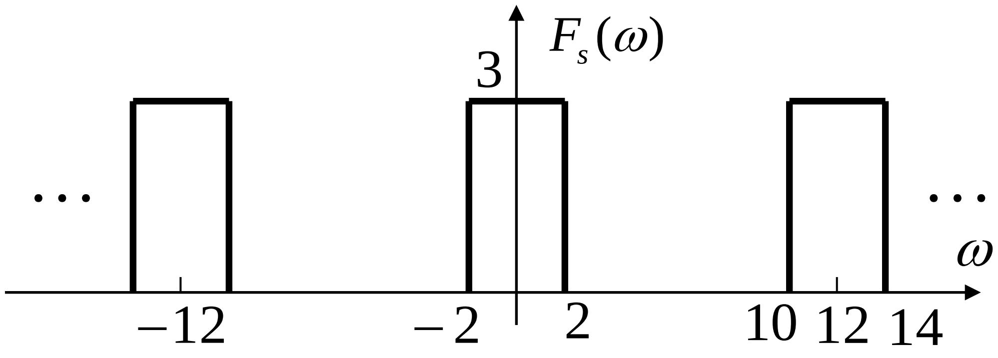
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(2t)\Big|_{t=nT_s}\delta(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}(\frac{n\pi}{3})\delta(t-nT_s)$$

（3） $$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega-n\omega_s) = \frac{6}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega-12n)$$

$$= 3\sum_{n=-\infty}^{\infty}[u(\omega+2-12n)-u(\omega-2-12n)]$$

（4）

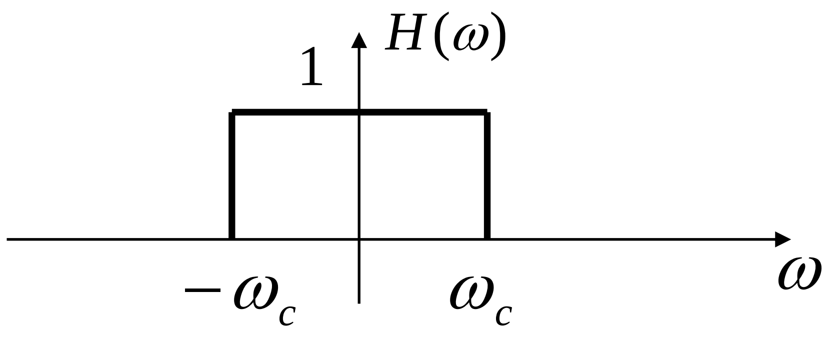




低通滤波器的截止频率 ω_c 应满足下式：

$$\omega_m \le \omega_c \le \omega_s - \omega_m$$

即 $$2 \le \omega_c \le 10$$



作业

基础题（需提交）：3-31，3-32，3-34，3-37（a）（b），3-39。

加强题（选做，不提交）：3-37（d）。