

## 上节内容

- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性

$H(s) = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$  是因果系统单位冲激响应的拉氏变换，也称为系统函数。

连续时间信号 $x(t)$ ，作用于单位冲激响应为 $h(t)$ 线性时不变系统，其零状态响应 $y_{zs}(t)$ ，等于输入信号与单位冲激响应的卷积积分：

$$y_{zs}(t) = h(t) * x(t) \quad \begin{array}{c} x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y_{zs}(t) = h(t) * x(t) \end{array}$$

由时域卷积定理，零状态响应的拉氏变换等于输入信号与单位冲激响应拉氏变换的乘积：

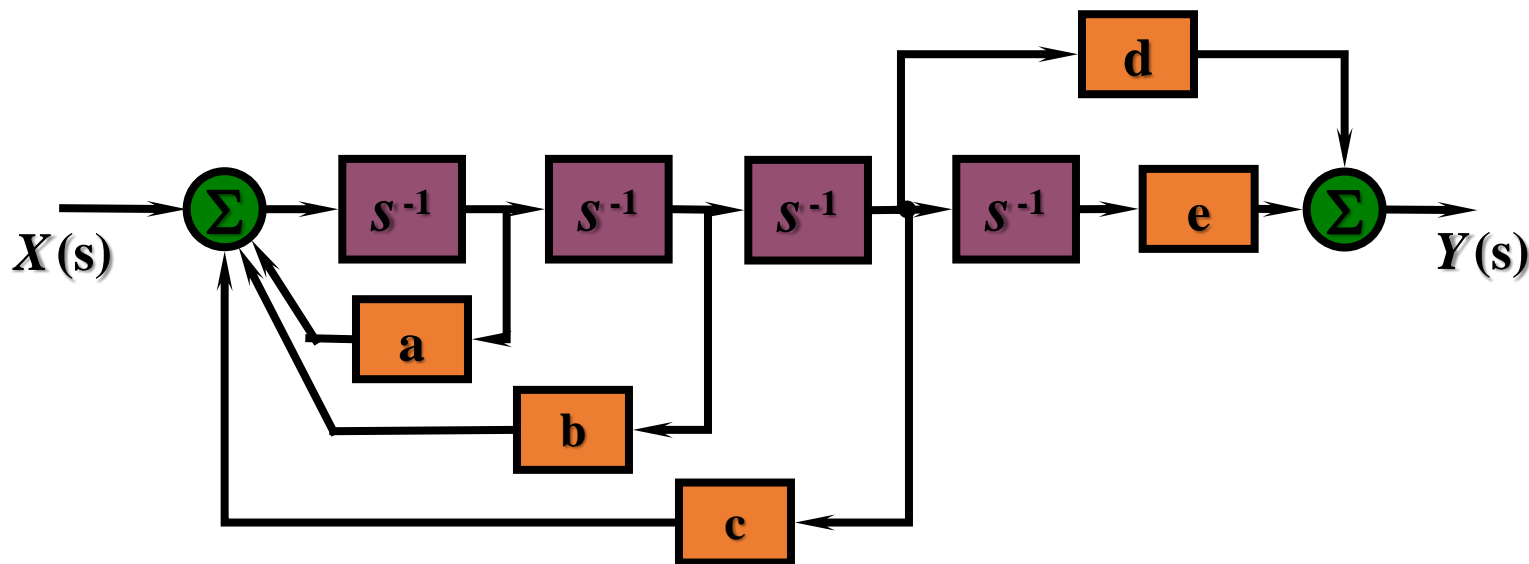
$$Y_{zs}(s) = H(s)X(s) \quad \begin{array}{c} X(s) \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow Y_{zs}(s) = H(s)X(s) \end{array}$$

系统函数等于零状态响应的拉氏变换与输入信号的拉氏变换的比值：

$$H(s) = Y_{zs}(s) / X(s)$$

已知  $H(s) = \frac{2s+3}{s(s+3)(s+2)^2}$  , 试给出 s 域模拟图中的参数:

a= [填空1] , b= [填空2] , c= [填空3] , d= [填空4] , e= [填空5] 。

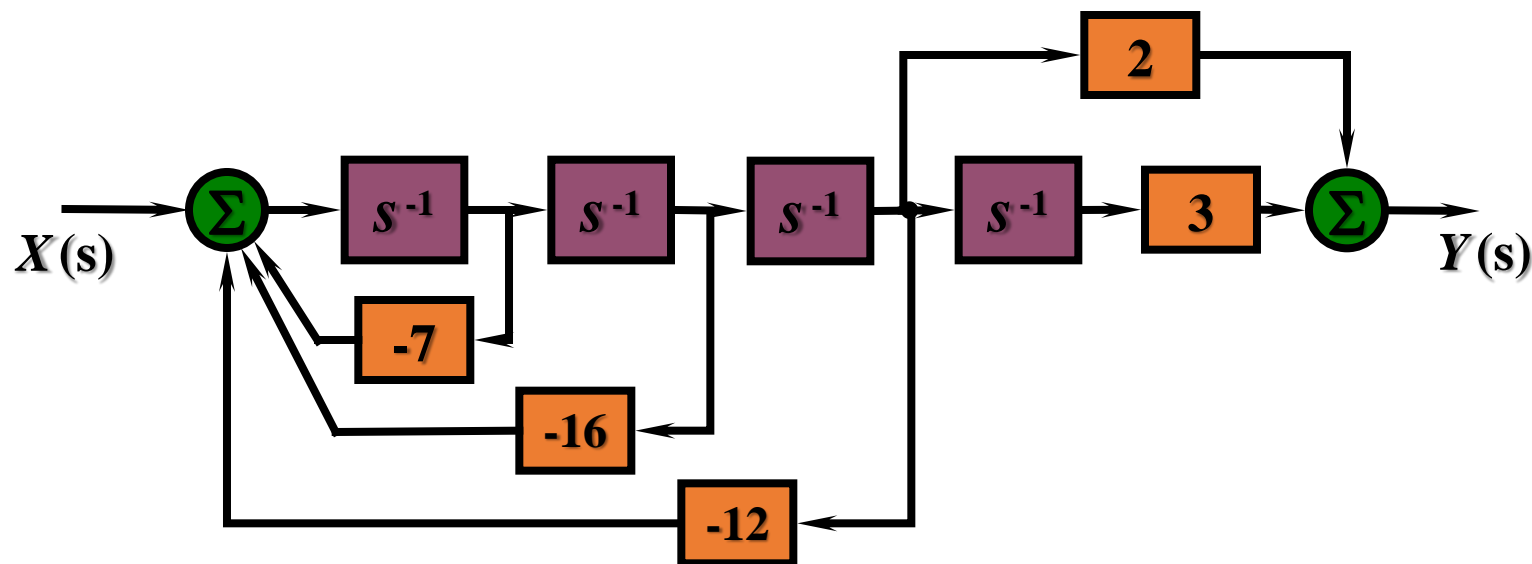


作答

已知  $H(s) = \frac{2s+3}{s(s+3)(s+2)^2}$  , 试给出 s 域模拟图中的参数。

解：系统函数可变为

$$H(s) = \frac{2s+3}{s(s+3)(s+2)^2} = \frac{2s+3}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s} = \frac{2s^{-3} + 3s^{-4}}{1 + 7s^{-1} + 16s^{-2} + 12s^{-3}}$$

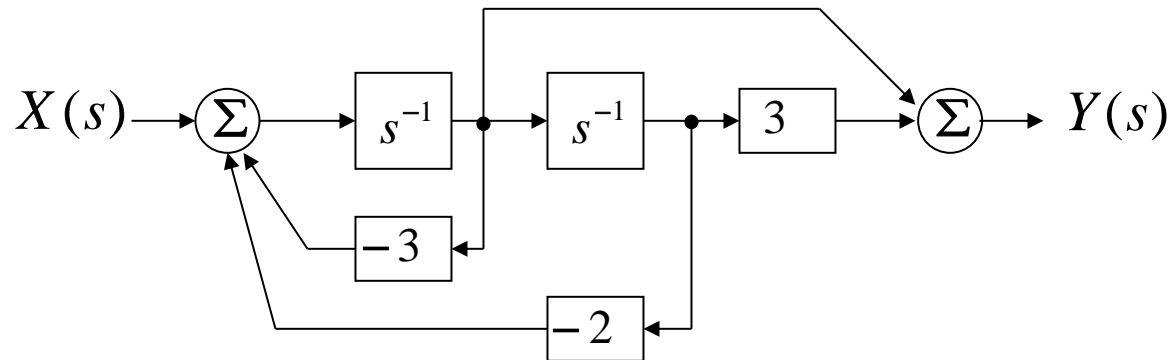


## 系统函数的作用

1. 求系统的**零状态响应**:  $Y_{zs}(s) = H(s)X(s)$      $y_{zs}(t) = \text{LT}^{-1}[Y_{zs}(s)]$

2. 将系统函数与系统的**微分方程**和**模拟框图**相关联

$$H(s) = \frac{s^{-1} + 3s^{-2}}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

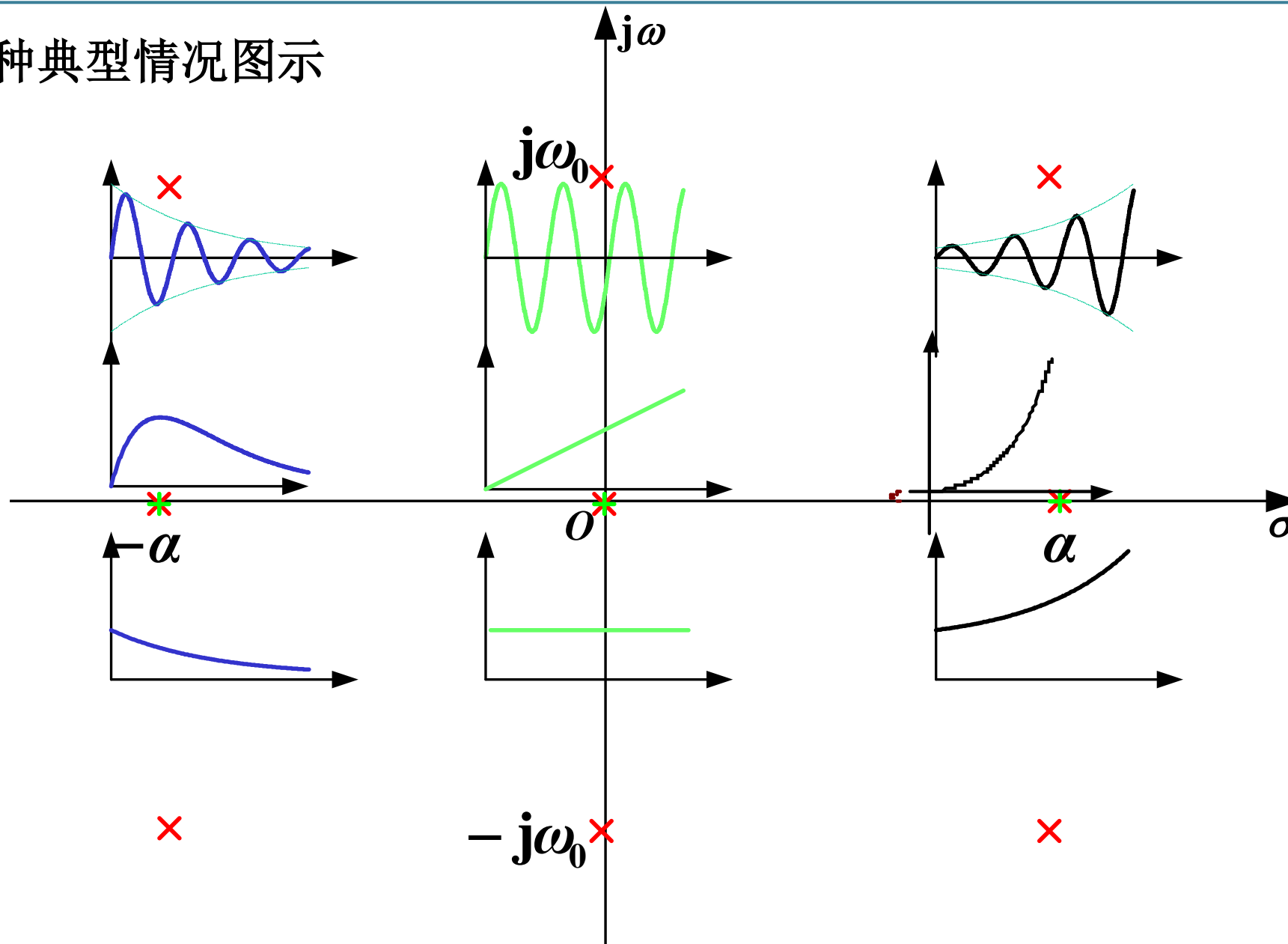


3. 由系统函数的零、极点分布决定**冲激响应**和**响应分量**特性

4. 由系统函数的零、极点分布决定系统**频响特性**

## 4.7 由系统函数的零、极点分布决定时域特性

几种典型情况图示



$H(s)$ 极点与 $h(t)$ 波形特征的对应关系:

极点于s平面左半平面

$h(t)$ 呈衰减形式

极点于s平面右半平面

$h(t)$ 呈增长形式

极点于s平面虚轴上（不含原点）

$h(t)$ 等幅振荡（一阶极点）  
或增长振荡（多阶极点）

极点于s平面实轴上（不含原点）

$h(t)$ 呈现与指数相关的变化  
（一阶或多阶极点）

极点于s平面原点

$h(t)$ 等值 $u(t)$ （一阶极点）或  
增长 $t^n$ （多阶极点）

### 系统函数和激励的零、极点分布与响应的各分量

系统函数与激励的极点共同决定响应的波形。

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

系统函数的极点对应自由响应分量；激励的极点对应强迫响应分量。

如果系统函数与激励函数有零极点相互抵消，响应中将不出现对应的时间分量。

例：系统的零状态响应的拉氏变换

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1}{s+3} \cdot \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

系统的零状态响应是  $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

响应中只有自由响应分量，强迫响应分量等于零，因为系统函数与激励函数有零极点相互抵消。

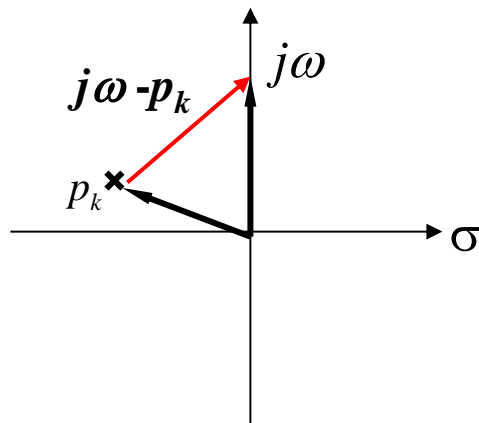


系统的频率响应一般可写为（条件参见教材4.13节）

$$H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{G \prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \bigg|_{s=j\omega} = \frac{G \prod_{k=1}^M (j\omega - z_k)}{\prod_{k=1}^N (j\omega - p_k)} = \frac{G \prod_{k=1}^M B_k}{\prod_{k=1}^N A_k} e^{j(\sum_{k=1}^M \beta_k - \sum_{k=1}^N \theta_k)} = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(\omega)| = \frac{G \prod_{k=1}^M B_k}{\prod_{k=1}^N A_k}$$

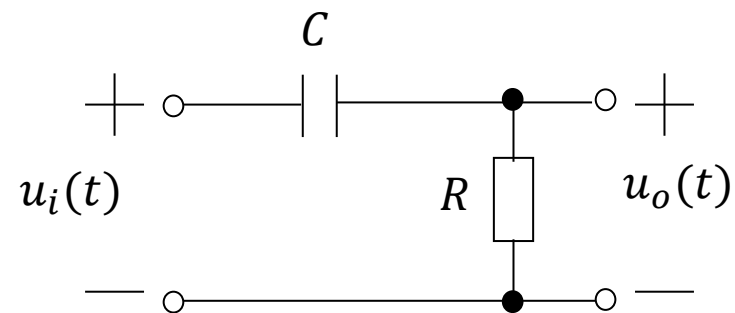
$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^M \beta_k - \sum_{k=1}^N \theta_k$$



系统的幅频响应等于零点矢量的模之积与极点矢量的模之积的比值。

系统的相频响应等于零点矢量相角之和减去极点矢量相角之和。

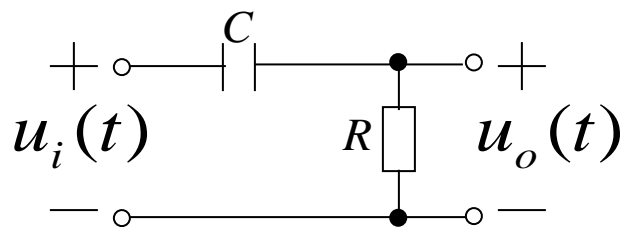
某RC电路如图所示，这表示一个（ ）



- ☐ A 低通滤波器
- ☒ B 高通滤波器
- ☐ C 带通滤波器
- ☐ D 全通滤波器

提交

**例4-35：**如图所示RC电路，试求其系统函数，作出其零极图，求其频率响应，并粗略的画出其频响曲线。

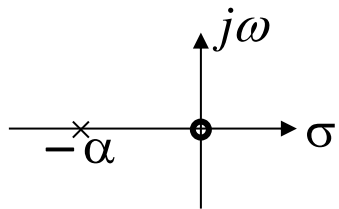


**解：** 电路的系统函数

$$H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{RCs}{RCs + 1}$$

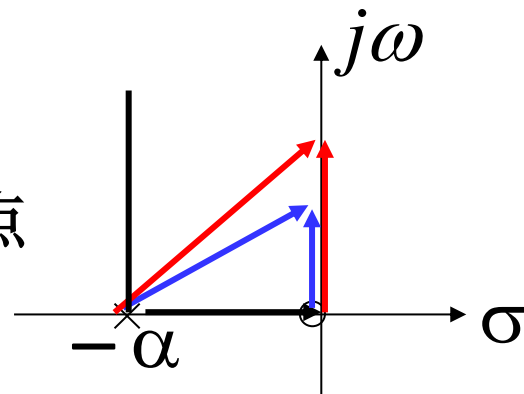
$$= \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{s}{s + \alpha} \quad \left( \alpha = \frac{1}{RC} \right)$$

$$H(\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \alpha}$$



由系统函数  $H(s) = \frac{s}{s + \alpha}$  粗略画出频率响应:

(1) 当  $\omega = 0$  时, 极点矢量指向原点, 其模长为  $\alpha$ , 相角为  $0$ ; 零点矢量长度为  $0$ , 相角等于  $\pi/2$ ; 于是  $|H(\omega)| = 0$ ,  $\varphi(\omega) = \pi/2$ 。



(2) 当  $\omega \uparrow$ , 极点矢量模  $\uparrow$ , 相角  $\uparrow$ ; 零点矢量的模  $\uparrow$ , 且增大的速率比极点矢量的高, 相角等于  $\pi/2$ ;  $|H(\omega)| \uparrow$ ,  $\varphi(\omega) \downarrow = (\pi/2) - \arctg(\omega/\alpha)$ 。

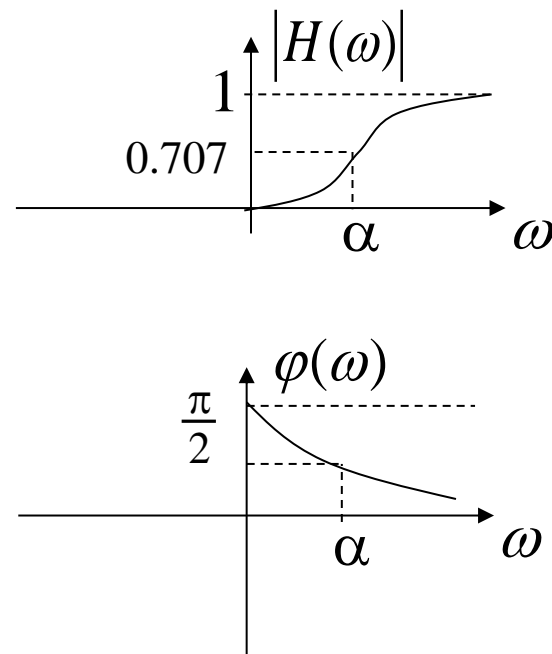
例如, 相角为  $\pi/6$  时, 零点矢量的模为  $\sqrt{3}\alpha/3$ , 极点矢量的模为  $2\sqrt{3}\alpha/3$ ,  $|H(\omega)| = 1/2$ ; 相角趋近  $\pi/4$  时, 零点矢量的模趋近  $\alpha$ , 极点矢量的模趋近  $\sqrt{2}\alpha$ ,  $|H(\omega)| \rightarrow 0.707$ 。

(3) 当  $\omega = \alpha$ ,  $|H(\omega)| \approx 0.707$ ,  $\varphi(\omega) = \pi/4$ 。

(4) 当  $\omega \rightarrow \infty$ , 零点矢量与极点矢量均垂直于实轴指向无穷远, 幅度均为无穷, 相角均为  $\pi/2$ 。  $|H(\omega)| \rightarrow 1$ ,  $\varphi(\omega) \rightarrow 0$ 。

$$|H(\omega)| = \frac{|\omega|}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) & \omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) & \omega < 0 \end{cases}$$

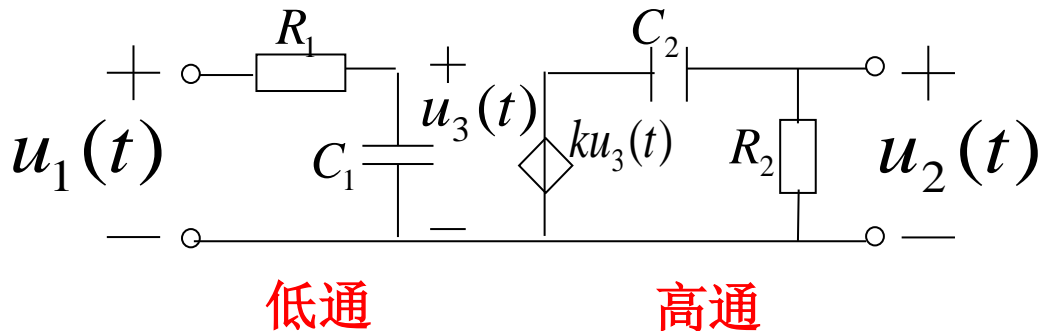


由其幅频响应曲线可见，这是一**高通滤波器**。

$$H_{HP}(\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \alpha}, \quad H_{LP}(\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha}$$

$$H_{HP}(\omega) = 1 - H_{LP}(\omega)$$

例4-36：如图所示二阶RC电路，试求其系统函数，设 $R_2C_2 \gg R_1C_1$ ，作出其零极图，并粗略的画出其频响曲线。



解：电路的系统函数为

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{U_2(s)}{kU_3(s)} \cdot \frac{kU_3(s)}{U_1(s)}$$

由前两例可知

$$\frac{U_3(s)}{U_1(s)} = \frac{\alpha_1}{s + \alpha_1} \quad \frac{U_2(s)}{kU_3(s)} = \frac{s}{s + \alpha_2} \quad (\alpha_1 = \frac{1}{R_1C_1} \gg \frac{1}{R_2C_2} = \alpha_2)$$

所以

$$H(s) = \frac{ks\alpha_1}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)}$$

$$H(\omega) = \frac{j\omega k\alpha_1}{(j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2)}$$

(1) 当  $\omega = 0$ ，零点矢量的模等于0，相角等于  $\pi/2$ ，极点矢量的相角均等于零，幅频响应  $|H(\omega)| = 0$ ， $\varphi(\omega) = \pi/2$ 。

(2) 当  $\omega$  较小时，主要的变化是零点矢量与极点  $-\alpha_2$  对应的矢量， $|j\omega + \alpha_1| \approx \alpha_1$ ，此时

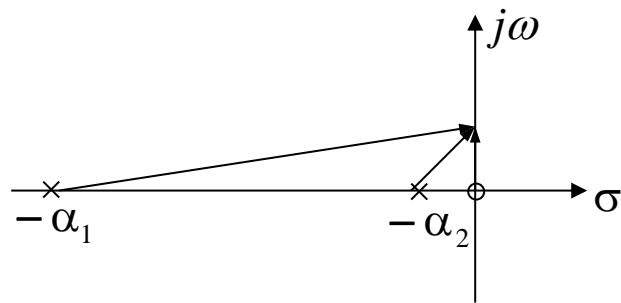
$$H(\omega) = \frac{kj\omega\alpha_1}{(j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2)} \approx \frac{kj\omega}{j\omega + \alpha_2}$$

相当于截止频率等于  $\alpha_2$  的高通滤波器。

说明在低频段，主要是电路2的高通特性在起作用。

$$H(\omega) = \frac{kj\omega\alpha_1}{(j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2)}$$

系统函数的零极图

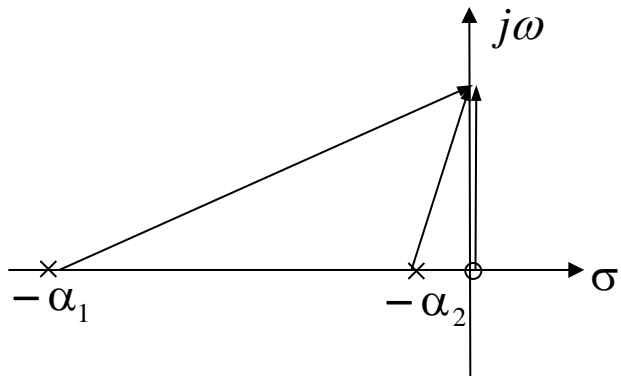


## 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性

(3) 当  $\alpha_2 < \omega < \alpha_1$  时,  $|j\omega + \alpha_1| \approx \alpha_1$ ,  $j\omega + \alpha_2 \approx j\omega$ , 此时

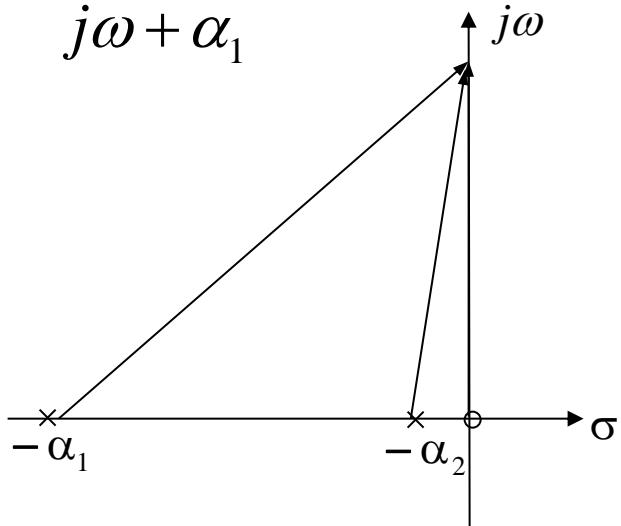
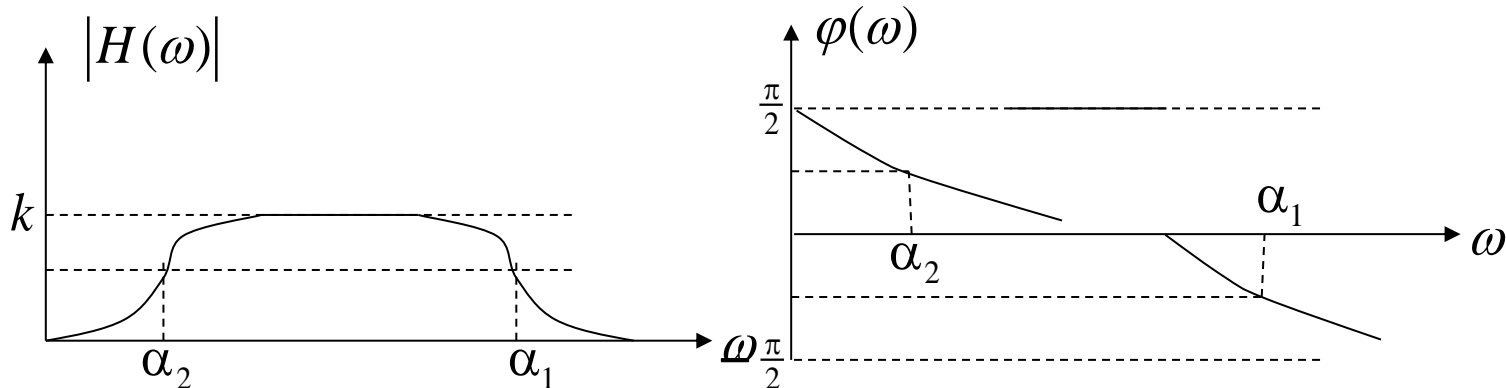
$H(\omega) \approx k$ , 相当于截止频率为  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  的**带通滤波器**。

说明在中频段,  $C_1$  近似于开路,  $C_2$  近似于短路, 等效于信号  $u_1$  经受控源的  $k$  倍放大送往输出端。  $u_2(t) \approx ku_1(t)$ 。



(4) 当  $\omega \approx \alpha_1$  时,  $j\omega + \alpha_2 \approx j\omega$ , 此时  $H(\omega) = \frac{j\omega k \alpha_1}{(j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2)} \approx \frac{k \alpha_1}{j\omega + \alpha_1}$ ,

相当于截止频率为  $\alpha_1$  的**低通滤波器**。





## 本次课内容

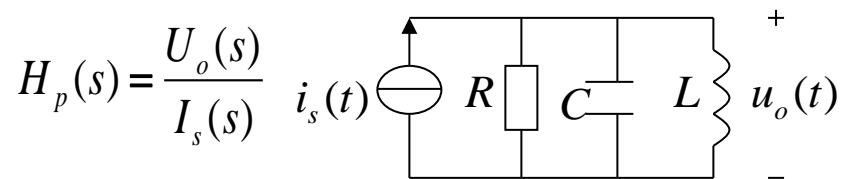
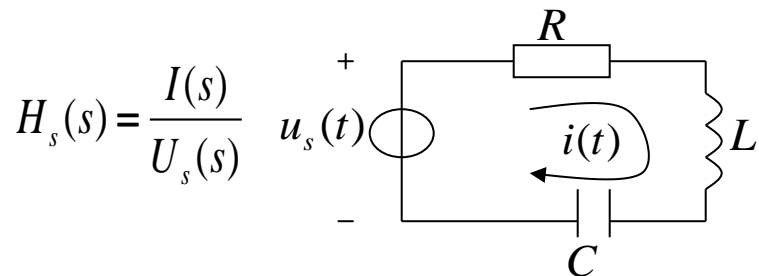
- 4.9 二阶谐振系统的S平面分析
- 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布
- 4.11 线性系统的稳定性

## 本次课目标

1. 巩固运用系统函数零、极点分布分析频响特性的能力；
2. 了解全通函数与最小相移函数的零、极点分布特点；
3. 熟练运用系统函数判断系统的稳定性。

- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性
- 4.9 二阶谐振系统的S平面分析
- 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布
- 4.11 线性系统的稳定性
- 4.12 双边拉普拉斯变换
- 4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

含有电容、电感两类储能元件的二阶系统可以具有谐振特性，常可利用这一性能构成**带通**、带阻滤波器。



**串、并联RLC回路的对偶性：系统函数中的L和C可互换。**

以并联RLC回路为例作分析。先求系统函数

$$H_p(s) = \frac{U_o(s)}{I_s(s)} = \frac{R \frac{L}{C}}{R s L + \frac{R}{s C} + \frac{L}{C}} = \frac{R L s}{R L C s^2 + R + s L} = \frac{1}{C} \frac{s}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{C} \frac{s}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

当  $R > \frac{1}{2} \sqrt{L/C}$ ，极点为共轭复根。

$$p_{1,2} = \frac{-\frac{1}{RC} \pm j\sqrt{\frac{4}{LC} - (\frac{1}{RC})^2}}{2} = -\frac{1}{2RC} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{1}{2RC})^2} = -\alpha \pm j\Omega_d$$

$$\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

谐振频率

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

衰减因子

$$\Omega_d = \sqrt{\Omega_0^2 - \alpha^2}$$

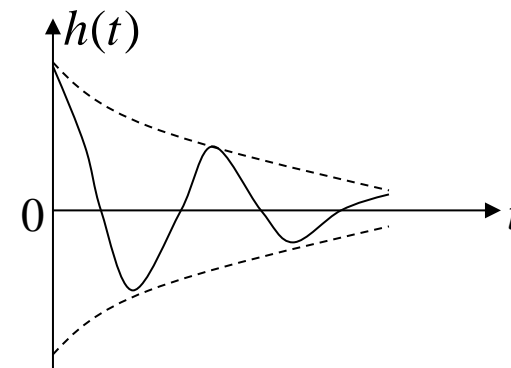
系统函数:

$$H_p(s) = \frac{1}{C} \frac{s}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{1}{C} \frac{s}{(s+\alpha-j\Omega_d)(s+\alpha+j\Omega_d)} = \frac{1}{C} \frac{s}{(s+\alpha)^2 + \Omega_d^2}$$

$$= \frac{1}{C} \left[ \frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2 + \Omega_d^2} - \frac{\alpha}{\Omega_d} \cdot \frac{\Omega_d}{(s+\alpha)^2 + \Omega_d^2} \right]$$

单位冲激响应:

$$h_p(t) = \frac{1}{C} e^{-\alpha t} (\cos \Omega_d t - \frac{\alpha}{\Omega_d} \sin \Omega_d t) u(t)$$

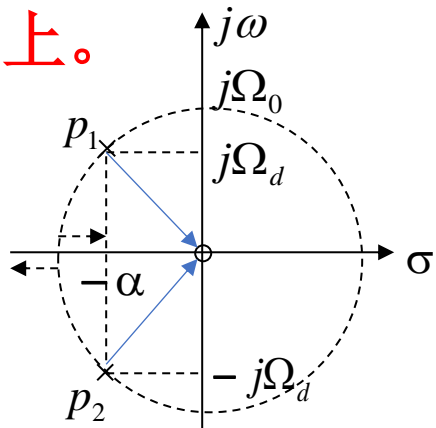


1) 如果保持 $LC$ 不变, 即 $\Omega_0$ 不变, 两个极点在以 $\Omega_0$ 为半径的左半圆上。

$$\Omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \alpha = \frac{1}{2RC}$$

$$\Omega_d = \sqrt{\Omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\Omega_d$$



系统函数的零极图

a) 若 $R$ 减小, 则 $\alpha$ 增加,  $\Omega_d$ 减小, 两极点就沿着以 $\Omega_0$ 为半径的左半圆向实轴靠拢。

b) 当  $R = \frac{1}{2}\sqrt{L/C}$  ( $\alpha = \Omega_0$ ) 时,  $\Omega_d = 0$ , 极点变成了在实轴上 $-\alpha$ 处的二阶极点。系统函数与单位冲激响应分别为:

$$H_p(s) = \frac{1}{C} \frac{s}{(s + \alpha)^2}$$

$$h_p(t) = \frac{1}{C} (1 - \alpha t) e^{-\alpha t} u(t)$$

c) 若 $R$ 继续减小, 即  $R < \frac{1}{2}\sqrt{L/C}$  ( $\alpha > \Omega_0$ ),  $\Omega_d$ 为虚数, 两极点变为实数, 在实轴上向正负方向分开, 类似于例4-36中二阶RC电路的情况。

2) 若保持 $RLC$ 不变，即系统零极点的位置不变，零点矢量的相角始终等于 $\pi/2$ 。

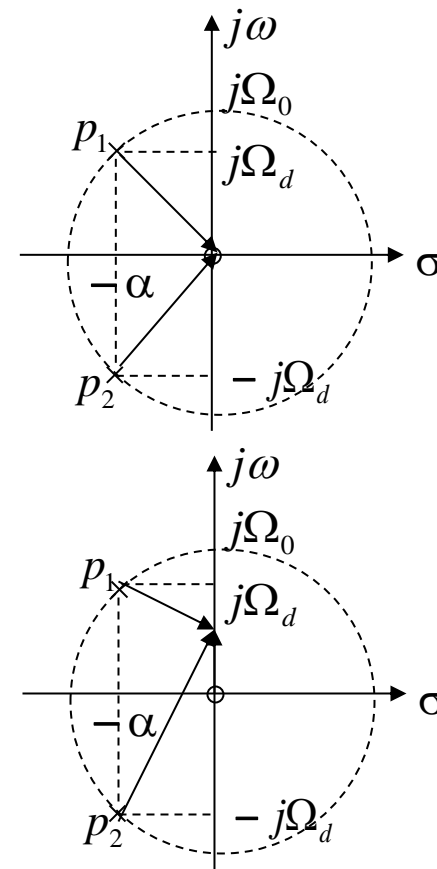
$$H_p(s) = \frac{1}{C} \frac{s}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

a) 当 $\omega=0$ ，零点矢量的模等于0，因此幅频响应 $|H(\omega)|=0$ ；

相频响应因为两极点矢量的相角正负相等抵消，只有零点矢量的相角，所以 $\varphi(\omega)=\pi/2$ 。

b) 当 $0 < \omega < \Omega_0$ ，随着 $\omega \uparrow$ ，零点矢量的模 $\uparrow$ ，极点矢量的模变化较小，幅频响应 $|H(\omega)| \uparrow$ ；

因为两极点矢量的相角正的增加，负的减小，总体增加，而零点矢量的相角恒等于 $\pi/2$ ，所以相频响应 $\varphi(\omega) \downarrow$ 。



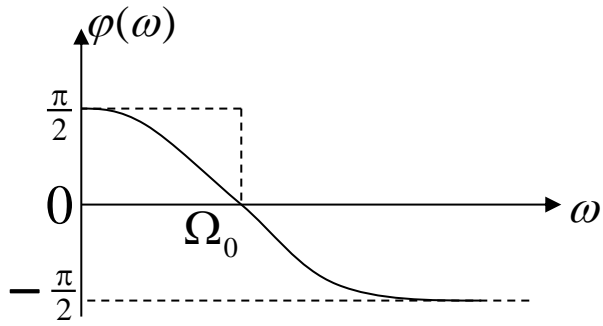
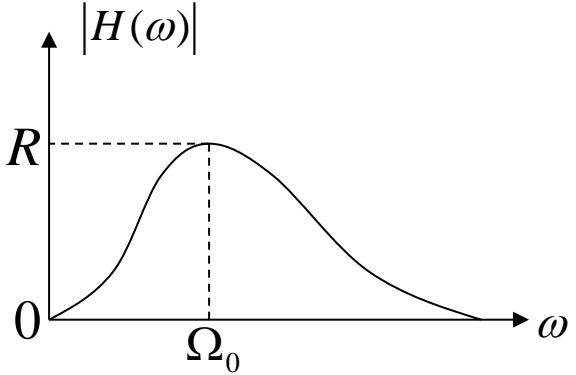
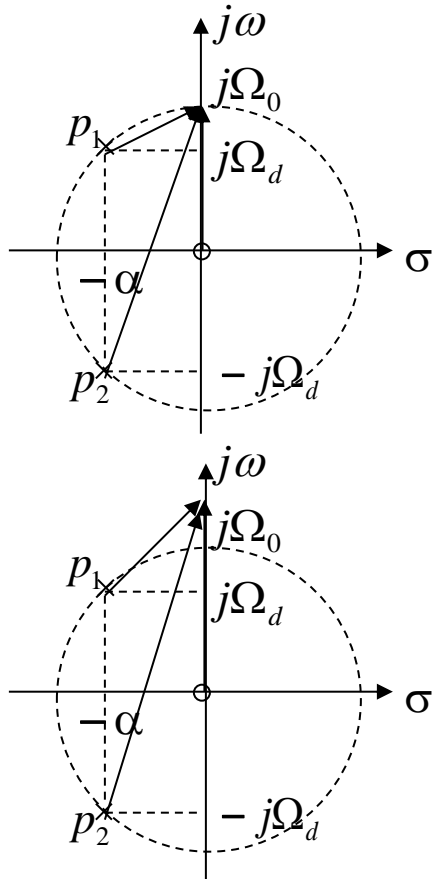
# 4.9 二阶谐振系统的S平面分析

c) 当 $\omega=\Omega_0$ （谐振），零点矢量的模为 $\Omega_0$ ，可证明此时幅频响应是极大值；两极点矢量的相角之和为 $\pi/2$ ，相频响应 $\varphi(\omega)=0$ 。

$$|H(\Omega_0)| = \frac{1}{C} \frac{\Omega_0}{|P_1||P_2|} = \frac{1}{C} \frac{1}{2\alpha} = R$$

d) 当 $\omega > \Omega_0$ 且继续增加，两极点矢量的模均增加，零点矢量的模也增加，幅频响应减小；相频响应因为两极点矢量的相角均正向增加而 $\varphi(\omega) < 0 \downarrow$ 。

e) 当 $\omega \rightarrow \infty$ ，两极点矢量的模与零点矢量的模均 $\rightarrow \infty$ ，幅频响应 $|H(\omega)| \rightarrow 0$ ；相频响应 $\varphi(\omega)$ 因为两极点矢量的幅角均趋于 $\pi/2$ 而趋于 $-\pi/2$ 。



当系统函数有一对靠近虚轴的极点  $p = \alpha_i \pm j\Omega_i$  ( $\alpha_i \ll \Omega_0$ ),  $\Omega_i \approx \Omega_0$ , 系统的幅频响应在  $\omega = \Omega_i$  附近会有一个峰值点 (谐振), 相频响应负向变化;

当系统函数有一对靠近虚轴的零点  $z = \alpha_j \pm j\Omega_j$  ( $\alpha_j \ll \Omega_0$ ), 系统的幅频响应在  $\omega = \Omega_j$  附近会有一个谷值点, 相频响应正向变化。

若系统函数有远离虚轴的零点和极点, 那它们对系统的频响曲线的形状影响较小, 只是对总的幅频响应与相频响应的大小有所影响。



- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性
- 4.9 二阶谐振系统的S平面分析
- 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布**
- 4.11 线性系统的稳定性
- 4.12 双边拉普拉斯变换
- 4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

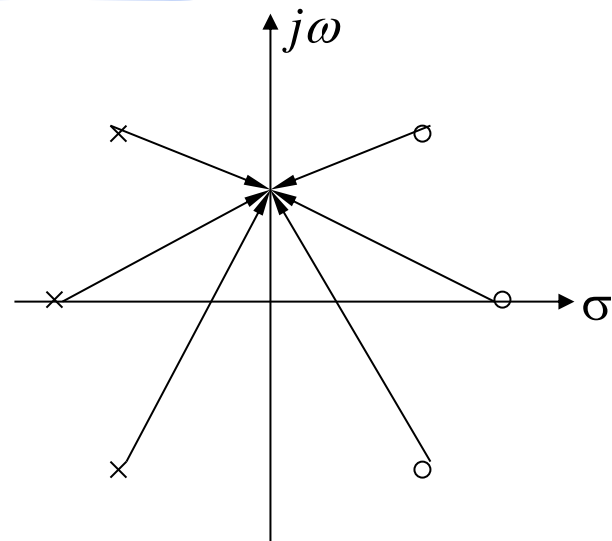
### 4.10.1 全通系统的零极点分布

全通系统的幅频响应在所有频率上均为一常数。

全通系统的相频响应没有受到限制，会改变输入信号的相频特性，可以在传输系统中作相位均衡器或移相器。

全通系统函数的零点矢量的模之积与极点矢量的模之积，在所有频率上均相等。要做到这一点，零点与极点应该以虚轴为镜像对称分布。

$$|H(\omega)| = \frac{G \prod_{k=1}^N B_k}{\prod_{k=1}^N A_k} = G$$



## 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布

**例4-37:** 如图所示RC电桥, 求其传输函数 $H(s)$ , 并说明当 $R_1C_1=R_2C_2$ 时电路是全通网络。

**解:** 画出s域等效电路, 输出电压的拉氏变换为

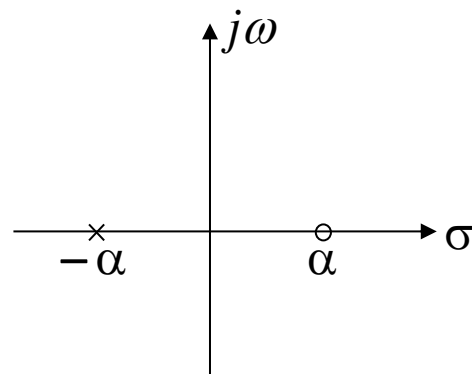
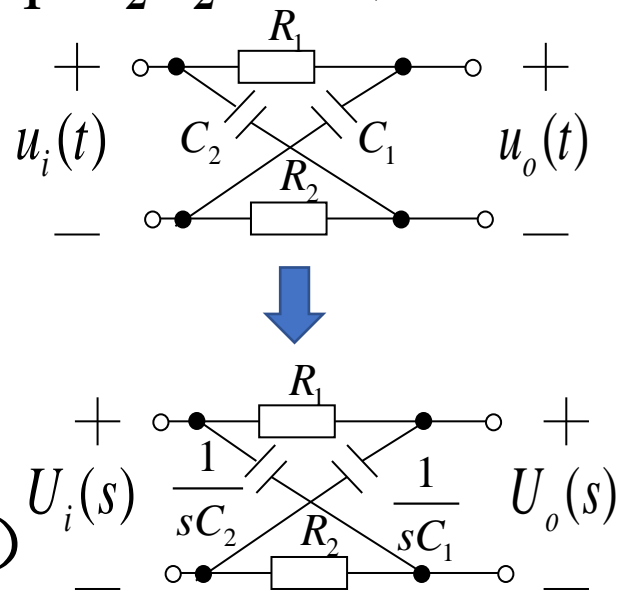
$$U_o(s) = U_{C_1}(s) - U_{R_2}(s) = U_i(s) \cdot \frac{1}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} - U_i(s) \cdot \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{sC_2}}$$

( $U_{C_1}$ 可由 $R_1$ 和 $C_1$ 串联电路得到,  $U_{R_2}$ 可由 $R_2$ 和 $C_2$ 串联电路得到)

系统的传输函数 (传输电压比) 为

$$H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} - \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{1}{s + \frac{1}{R_1C_1}} - \frac{s}{s + \frac{1}{R_2C_2}}$$

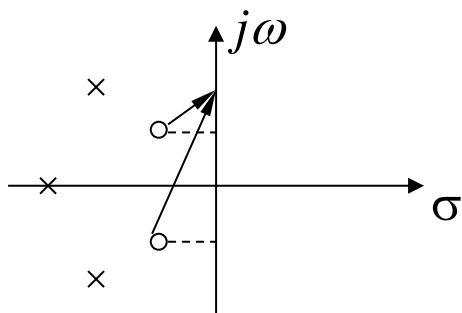
当 $R_1C_1=R_2C_2=1/\alpha$ 时,  $H(s) = -\frac{s-\alpha}{s+\alpha}$ , 零极点以虚轴镜像对称, 电路为全通网络。



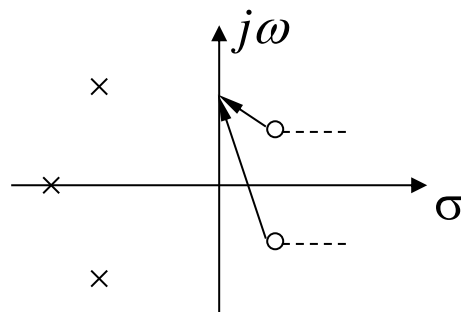
### 4.10.2 最小相移系统的零极点分布

注意是零点

**最小相移系统：**系统函数的零点均分布在 $s$ 平面的左半平面或虚轴上。若有一个或多个零点分布在右半平面，就是非最小相移系统。



最小相移系统零极图



非最小相移系统零极图

比较以上两零极图，极点分布相同，零点的虚部相等，实部符号相反。显然，**两图幅频响应相同**；对于所有的频率上，左图中零点的相角均小于右图中零点的相角，而两图中极点的相角相同，所以就相移的绝对值而言，**左图的相移更小**。

下列系统函数中，属于最小相移系统的是（ ）

A  $H(s) = \frac{(s-2)^2+6}{(s+1)(s+5)^2}$

B  $H(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{s(s+1)^2}$

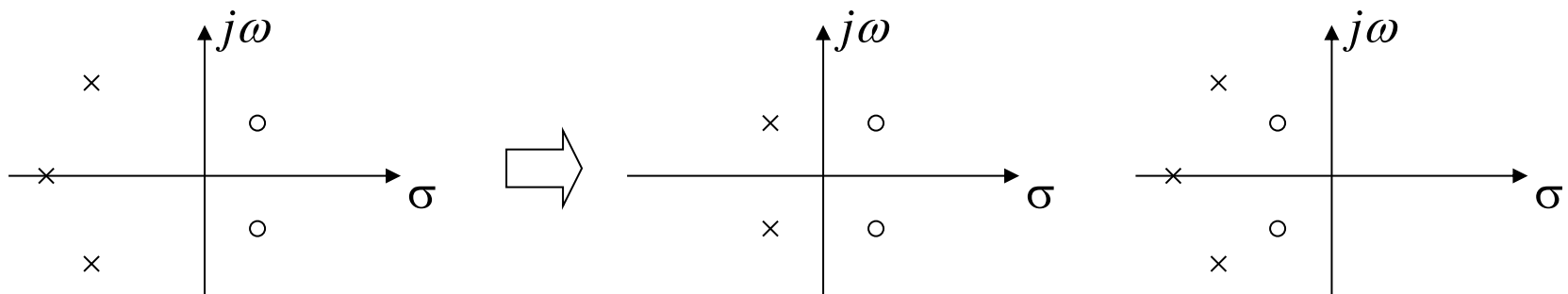
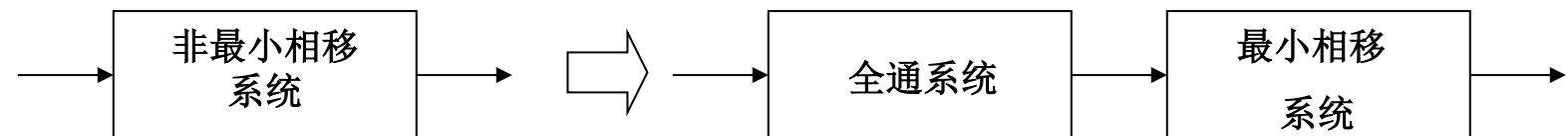
**C**  $H(s) = \frac{(s+2)^2+6}{(s+1)(s+5)^2}$

D  $H(s) = \frac{(s-3)^2}{s^3+5s+7}$

提交

任何一个非最小相移系统均可表示为**一全通系统与一最小相移系统的级联**。

$$H(s) = H_{AP}(s) \cdot H_{\min}(s)$$



全通系统的**极点**  
和最小相移系统的**零点相消**

例如：

$$H(s) = \frac{(s - \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}{(s + \alpha_0)[(s + \alpha_1)^2 + \Omega_1^2]} = \frac{(s + \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}{(s + \alpha_0)[(s + \alpha_1)^2 + \Omega_1^2]} \cdot \frac{(s - \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}{(s + \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}$$

$$H_{AP}(s) = \frac{(s - \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}{(s + \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}$$

$$H_{\min}(s) = \frac{(s + \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}{(s + \alpha_0)[(s + \alpha_1)^2 + \Omega_1^2]}$$

- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性
- 4.9 二阶谐振系统的S平面分析
- 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布
- 4.11 线性系统的稳定性
- 4.12 双边拉普拉斯变换
- 4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

### 4.11.1 系统的因果性与稳定性

系统的**稳定性**指**幅度有限的输入**只能产生**幅度有限的输出**的系统，即当输入 $|x(\cdot)| < \infty$ ，输出 $|y(\cdot)| < \infty$ ，系统必定是稳定的。即**输出不能包含冲激函数及其导数**。

线性时不变系统的稳定性指单位冲激响应满足绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

系统的**因果性**指在初始状态为零时，输出不会发生在输入作用于系统之前，即当 $t < t_0$ ， $x(t)=0$ ，必定有 $t < t_0$ ， $y(t)=0$ 。

线性系统的因果性指其单位冲激响应满足：

$$h(t) = h(t)u(t)$$

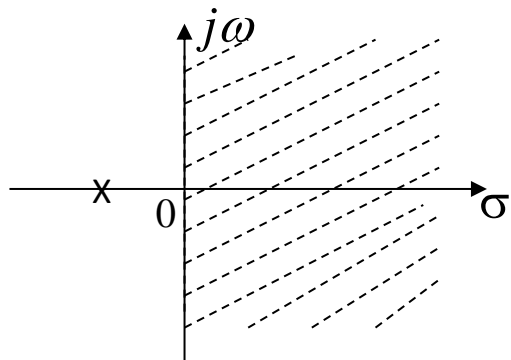


当系统是因果稳定的，其单位冲激响应应该满足在 $0^-$ 到 $\infty$ 绝对可积：

$$\int_{0^-}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (1)$$

$$\text{因为 } H(s) = \int_{0^-}^{\infty} h(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} h(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \quad (2)$$

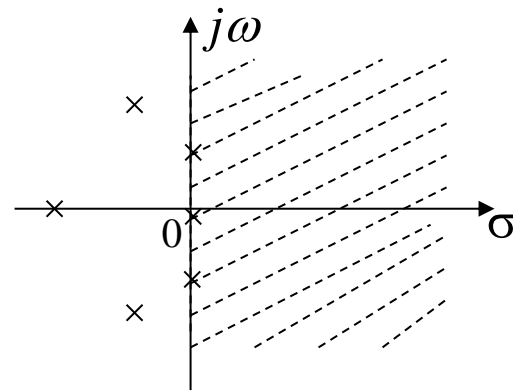
$$\text{若使 (2) 绝对可积, } \int_{0^-}^{\infty} |h(t) e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (3)$$
$$\left( |e^{-j\omega t}| = 1 \right)$$



比较 (1) 和 (3) 可知，线性因果稳定系统的系统函数的最小收敛域是 $\sigma = \text{Re}\{s\} > 0$ 。也即，因果稳定系统的系统函数的极点只能分布在s平面虚轴的左半平面上。

如果系统函数的极点分布在s平面虚轴上呢？

例如原点上一阶极点，对应的因式是  $\frac{1}{s}$ ，逆变换是单位阶跃信号  $u(t)$ ，不满足绝对可积。但其在  $t>0$  时，稳定不变。



例如虚轴上的一对共轭极点，对应的因式是  $\frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2}$  或  $\frac{s}{s^2 + \Omega_0^2}$  的形式，对应的逆变换是等幅的正余弦信号，也不满足绝对可积。但是在  $t>0$  时，其最大幅度稳定不变。

如果在虚轴上的极点是多重的，对应的时间信号将不满足绝对可积，且在  $t>0$  时，其幅度是逐渐增加的。

显然，虚轴上的极点无论是单阶还是多阶的，都使系统不稳定。也有称虚轴上一阶极点的情况为临界稳定的。

一个稳定系统的系统函数对零点的个数也有要求。

设系统函数为：

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = s + \frac{A(s)}{D(s)}$$

$A(s)/D(s)$ 是有理真分式。当输入一有界的 $x(t)=u(t)$ ，拉氏变换为 $1/s$ ，输出的拉氏变换中就会出现1，对应的输出中会出现冲激函数 $\delta(t)$ ，幅度无界。可见以上系统是不稳定的。 $h(t)$ 可以包含冲激函数，但不能包含冲激函数的导数。

综上，从s域判断线性系统的稳定条件应该是：

- (1) 系统函数的极点均应分布在s平面虚轴的左半平面上；即系统函数分母多项式的根如果是实数，则应该是负实数；如果是复数，则应具有负实部。
- (2) 系统函数的分子多项式的阶次不应高于分母多项式的阶次（零点个数不应多于极点个数）。

已知一个系统的系统函数为  $H(s) = \frac{s}{s^2 - s - 6}$ ，该系统：

- ☐ A 稳定
- ☒ B 不稳定

提交

## 作业

基础题：4-38，4-39 (a) (b) (c) (e) (g)，4-42，4-47。

加强题：4-39 (d) (f) (h)，4-41，4-48。