

## 上节内容

8.1  $z$ 变换的定义

8.2 典型序列的 $z$ 变换

8.3  $z$ 变换的收敛域

z变换是借助于抽样信号的拉氏变换引出。

连续因果信号 $x(t)$ 经均匀冲激抽样，则抽样信号 $x_s(t)$ 的表示式为

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

$T$ 为抽样间隔。

单边拉氏变换

$$X_s(s) = \int_0^{\infty} x_s(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \int_0^{\infty} \delta(t-nT)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-snT}$$

令  $z = e^{sT}$ ，其中 $z$ 为一个复变量，抽样信号的拉氏变换与序列的 $z$ 变换的关系：

$$X(z) \Big|_{z=e^{sT}} = X_s(s)$$

$$z = e^{sT}, \quad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

通常令 $T=1$ ,  $z = e^s$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

单边z变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

双边z变换

序列的z变换是复变量  $z^{-1}$  的幂级数，其系数是 $x(n)$ 。

下列说法正确的有

- ☒ A  $z$ 变换有助于求解差分方程
- ☒ B 因果序列的单边 $z$ 变换和双边 $z$ 变换等同
- ☐ C  $s$ 平面的虚轴可映射为 $z$ 平面的虚轴
- ☐ D  $z$ 变换的收敛域一定不包含极点

提交

序列	z变换	z变换类别
$\delta(n)$	1 (z全平面收敛)	单边/双边z变换
$\delta(n-1)$	$z^{-1}$ ( $ z  > 0$ )	单边/双边z变换
$\delta(n+1)$	$z$ ( $ z  < \infty$ )	单边z变换 双边z变换
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$ ( $ z  > 1$ )	单边/双边z变换
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$ ( $ z  >  a $ )	单边/双边z变换
$nu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$ ( $ z  > 1$ )	单边/双边z变换

序列	z变换	z变换类别
$e^{-j\omega_0 n} u(n)$	$\frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \quad ( z  > 1)$	单边/双边z变换
$\beta e^{-j\omega_0 n} u(n)$	$\frac{z}{z - \beta e^{-j\omega_0}} \quad ( z  >  \beta )$	单边/双边z变换
$\cos(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad ( z  > 1)$	单边/双边z变换
$\sin(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad ( z  > 1)$	单边/双边z变换
$\beta^n \cos(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{z(z - \beta \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \beta \cos \omega_0 + \beta^2} \quad ( z  >  \beta )$	单边/双边z变换
$\beta^n \sin(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{z \beta \sin \omega_0}{z^2 - 2z \beta \cos \omega_0 + \beta^2} \quad ( z  >  \beta )$	单边/双边z变换

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

**收敛域：**当  $x(n)$  为有界时，令上述级数收敛的所有  $z$  值的集合称为收敛域 (region of convergence, ROC)。

级数收敛的**充要条件**是满足**绝对可和**条件。

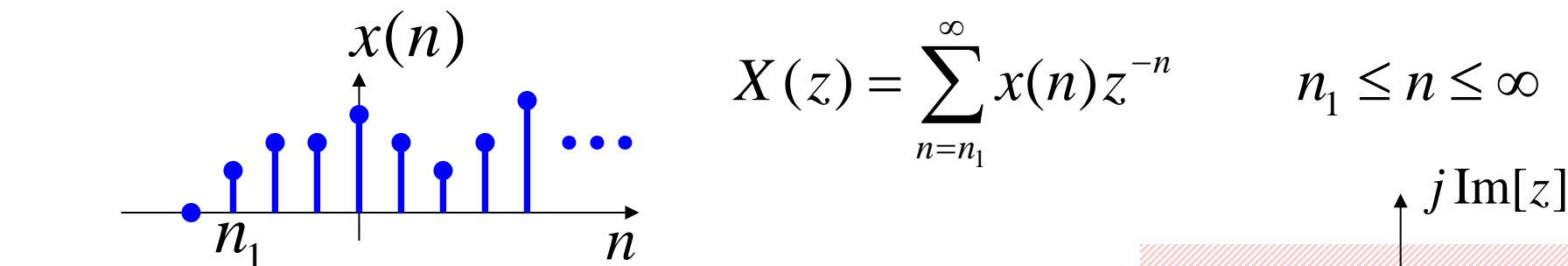
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty$$

左边构成正项级数，可利用正项级数收敛的常用判定方法，

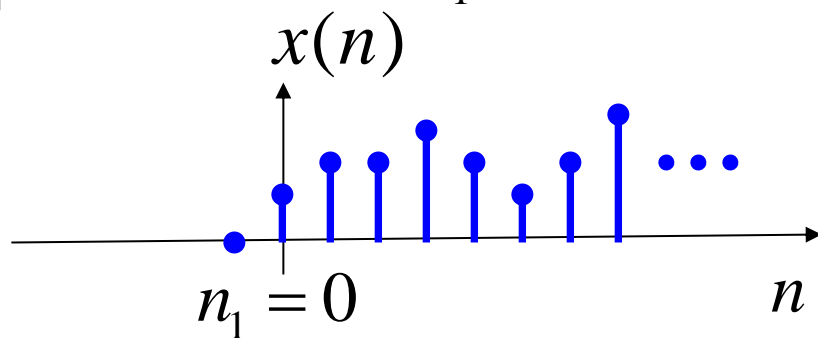
**比值判定法：**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

**根值判定法：**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

1、**右边序列**：只在  $n \geq n_1$  区间内，有非零的有限值的序列。

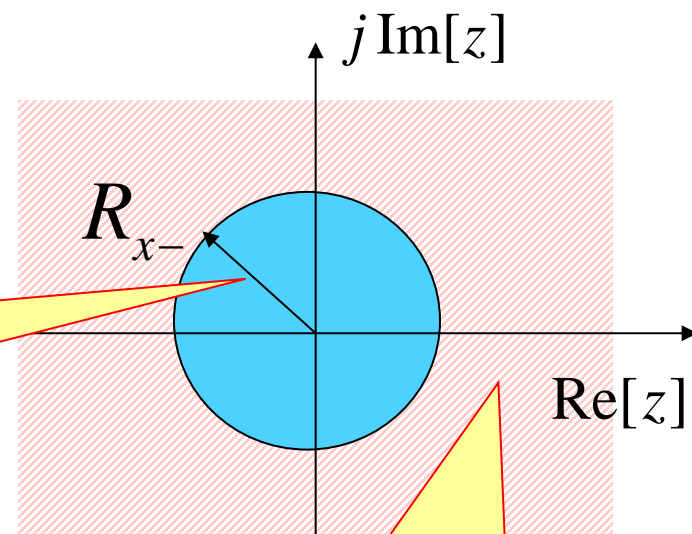


$n_1 < 0$ ,  $R_{x-} < |z| < \infty$  (收敛域不含  $|z| = \infty$ , 因  $\infty$  的  $-n_1$  次幂为无穷)



$n_1 = 0$ ,  $|z| > R_{x-}$

收敛半径

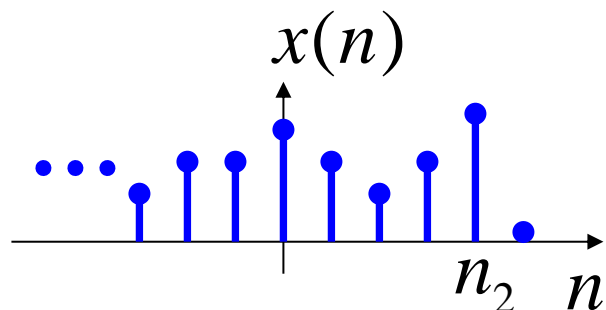


圆外为收敛域，若  $n_1 < 0$ ，则不包括  $|z| = \infty$

**因果序列**是右边序列的一种特殊情况，它的收敛域为  $|z| > R_{x-}$ 。

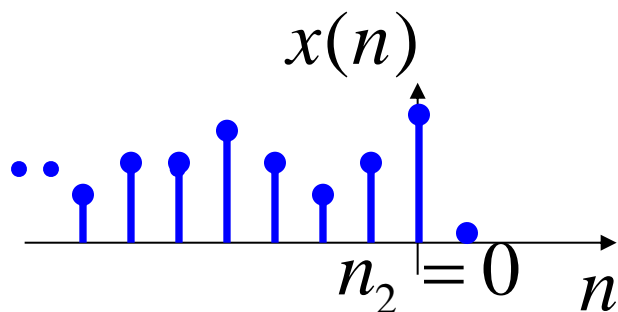


2、**左边序列**：只在  $n \leq n_2$  区间内，有非零的有限值的序列  $x(n)$ 。

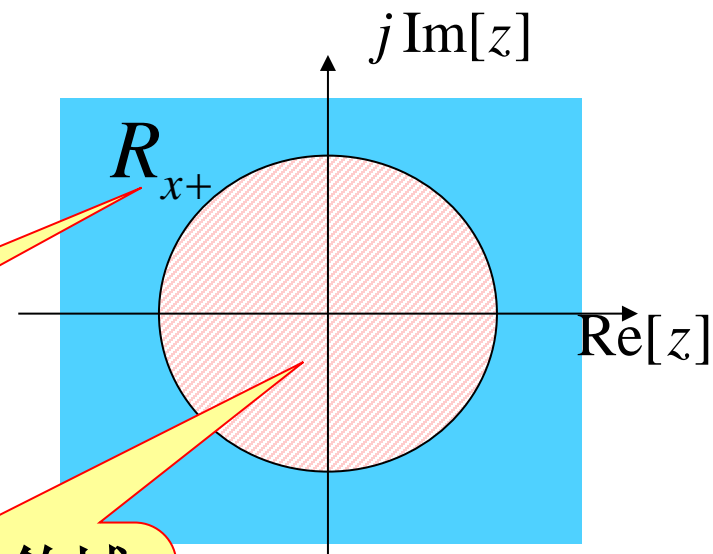


$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} \quad -\infty \leq n \leq n_2$$

$n_2 > 0$ ,  $0 < |z| < R_{x+}$  (收敛域不含  $z=0$ , 因0的负指数幂无意义)



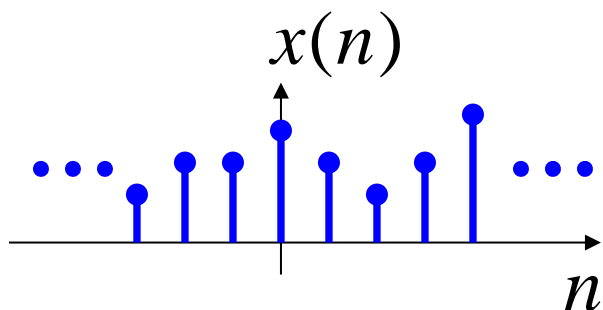
$n_2 = 0$ ,  $|z| < R_{x+}$



收敛半径

圆内为收敛域,  
若  $n_2 > 0$   
则不包括  $z=0$  点

3、双边序列：在  $-\infty \leq n \leq \infty$  区间内，有非零的有限值的序列



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad -\infty \leq n \leq \infty$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

圆内收敛

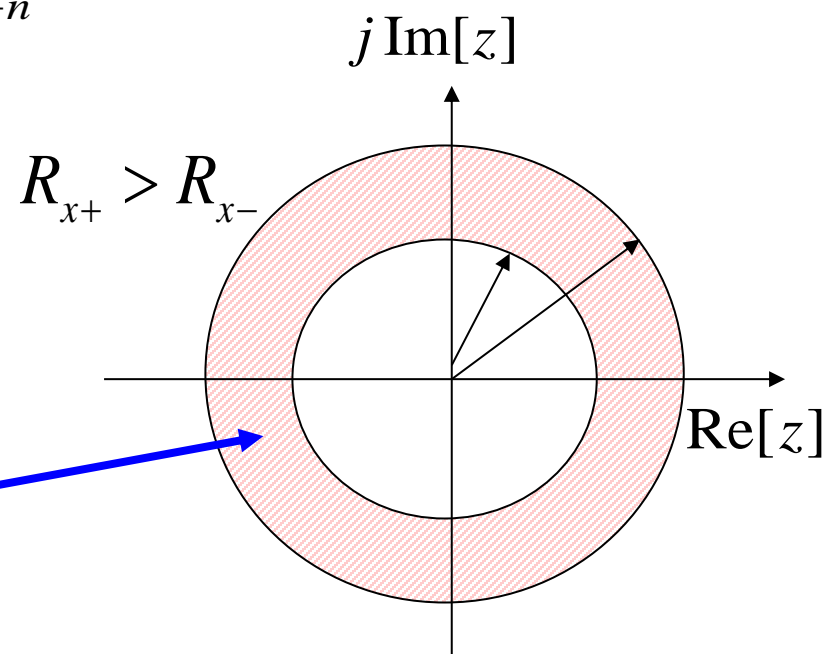
$$|z| < R_{x+}$$

圆外收敛

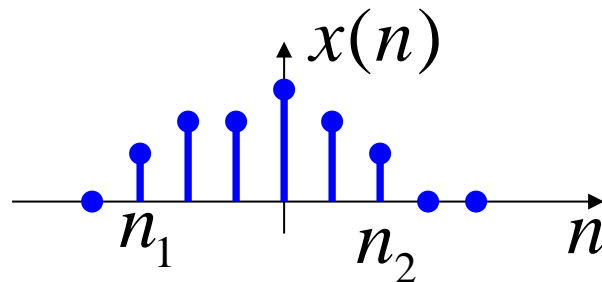
$$|z| > R_{x-}$$

$R_{x+} > R_{x-}$  有环状收敛域

$R_{x+} < R_{x-}$  没有收敛域



4、有限长序列：在有限区间  $n_1 \leq n \leq n_2$  内，有非零的有限值的序列



$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n} \quad n_1 \leq n \leq n_2$$

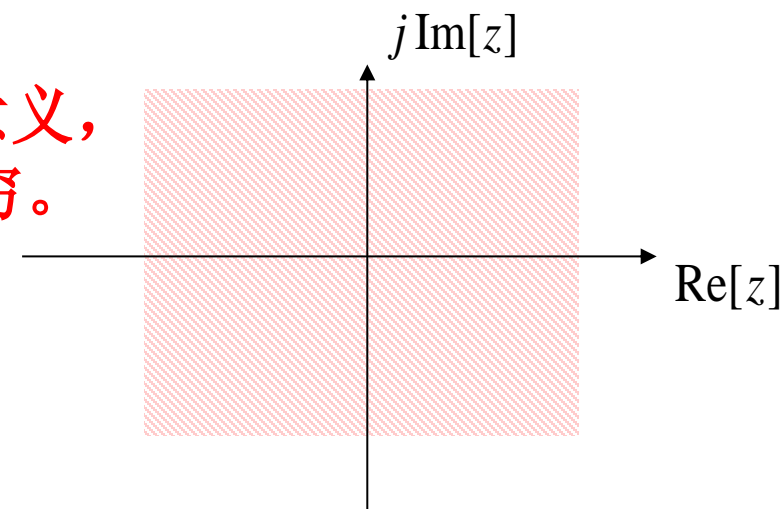
分为三种情况：

$$n_1 < 0, n_2 > 0 \quad 0 < |z| < \infty$$

$$n_1 \geq 0, n_2 > 0 \quad 0 < |z| \leq \infty$$

$$n_1 < 0, n_2 \leq 0 \quad 0 \leq |z| < \infty$$

$0^{-n}$ 在 $n > 0$ 时没有意义，  
 $\infty^{-n}$ 在 $n < 0$ 时为无穷。



收敛域至少为除了0和 $\infty$ 外的整个z平面（若零极点相消，收敛域扩大为整个z平面）。

对于单边z变换，序列与变换式唯一对应，且有唯一的收敛域。  
对于双边z变换，不同的序列在不同的收敛域下可能映射同一变换式。

例如：

$$x_1(n) = a^n u(n)$$

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad |z| > |a|$$

$$x_2(n) = -a^n u(-n-1)$$

$$\begin{aligned} X_2(z) &= - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n \\ &= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{z}{z - a} \quad |z| < |a| \end{aligned}$$

对于一个给定序列的z变换既要给出表达式，又要标出它的收敛域。

**例8-1:** 求序列 $x(n)=a^n u(n)-b^n u(-n-1)$ 的单边和双边z变换, 并确定其收敛域 (其中 $b>a>0$ )。

**解:** 这是一个双边序列, **单边z变换**为:

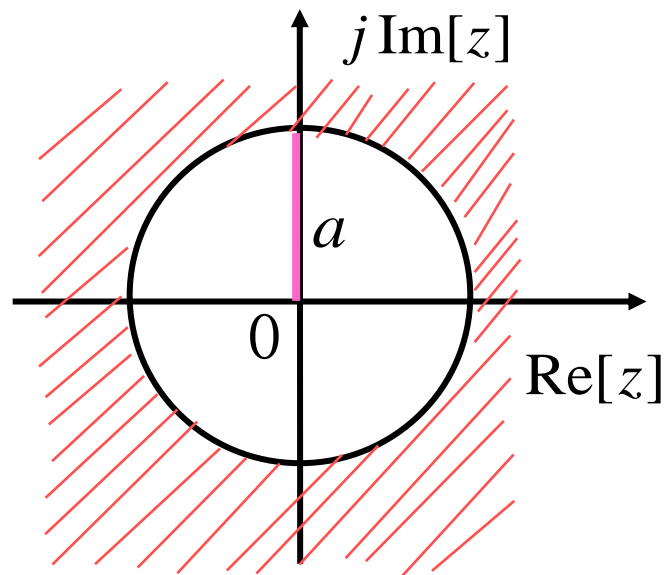
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n$$

$$\text{如果 } |z| > a, \quad X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

**双边z变换:**

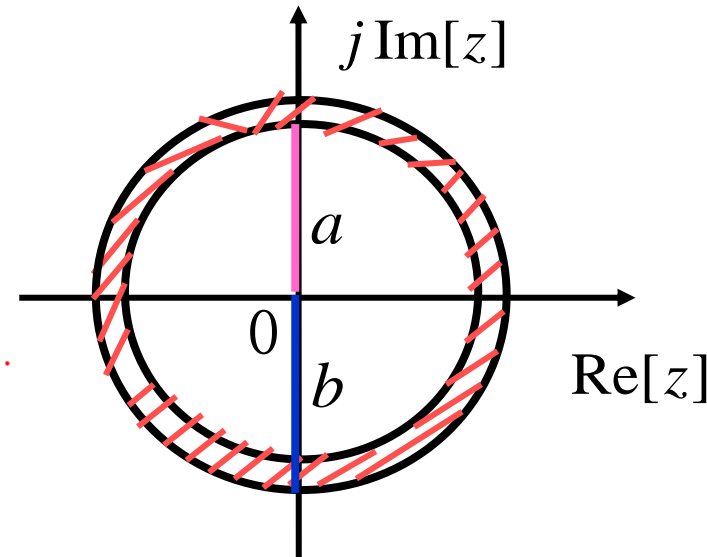
$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a^n u(n) - b^n u(-n-1)] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} + 1 - \sum_{n=0}^{\infty} b^{-n} z^n \end{aligned}$$

$$\text{如果 } a < |z| < b, \quad X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} + 1 + \frac{b}{1 - b z^{-1}} = \frac{z}{z - a} + \frac{z}{z - b}$$



序列单边z变换的收敛域

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \quad (|z| > a)$$



序列双边z变换的收敛域

$$X(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b} \quad (a < |z| < b)$$

收敛域内通常不包含任何极点（除非出现零点和极点相抵消的情况），收敛域通常以极点为边界。右边序列的收敛域是从 $X(z)$ 最外面（最大值）的极点向外延伸至 $z \rightarrow \infty$ （可能包括 $\infty$ ）；左边序列的收敛域是从 $X(z)$ 最里面（最小值）的极点向内延伸至 $z \rightarrow 0$ （可能包括0）。

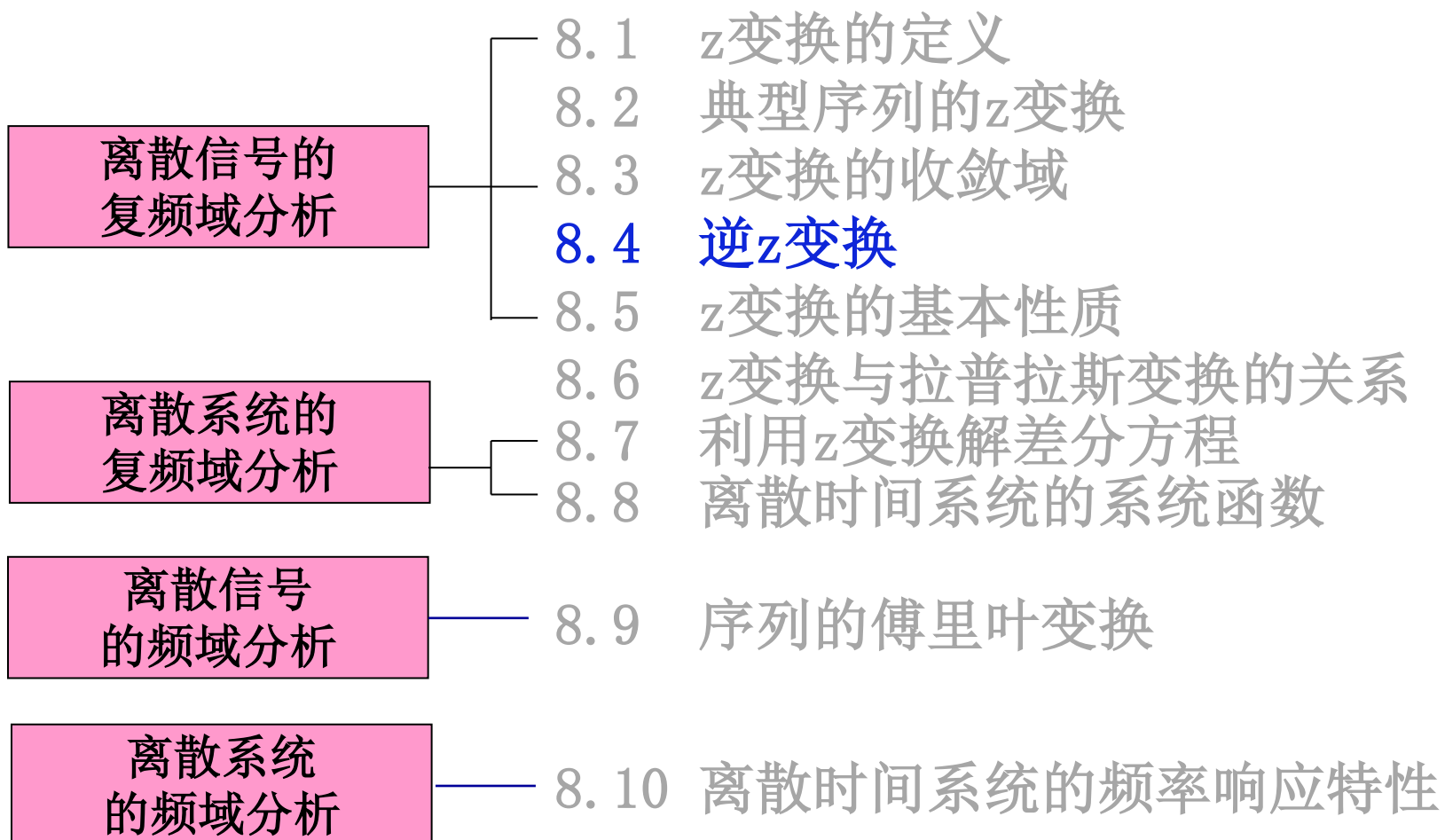
## 本次课内容

8.4 逆 $z$ 变换

8.5  $z$ 变换的基本性质

## 本次课目标

1. 熟练掌握用部分分式法求逆 $z$ 变换；
2. 熟练掌握 $z$ 变换的基本性质；
3. 会分析利用 $z$ 变换的基本性质时对收敛域的影响。





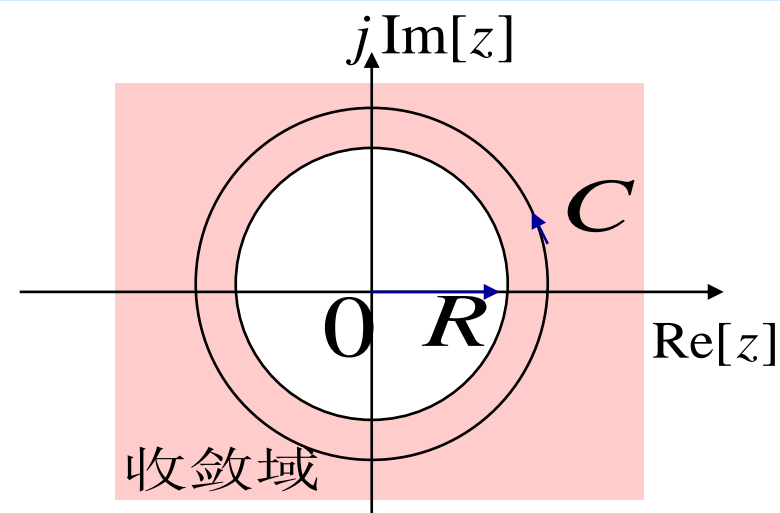
$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$x(n) = ZT^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

$C$ 是包围 $X(z)z^{n-1}$ 所有极点的逆时针闭合积分路线，一般取 $z$ 平面收敛域内以原点为中心的圆。

- (1) 留数法
- (2) 幂级数展开法（长除法，按 $z$ 升幂排列或 $z^{-1}$ 降幂排列）
- (3) 部分分式展开法

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1z + \cdots + b_{r-1}z^{r-1} + b_rz^r}{a_0 + a_1z + \cdots + a_{k-1}z^{k-1} + a_kz^k}$$



1、 $X(z)$ 只有一阶极点

$$X(z) = A_0 + \sum_{m=1}^M \frac{A_m z}{z - z_m} = A_0 + \frac{A_1 z}{z - z_1} + \cdots + \frac{A_M z}{z - z_M} \quad A_0 = X(z) \Big|_{z=0} = \frac{b_0}{a_0}$$

$$z_m \text{ 为 } X(z) \text{ 的一阶极点, } A_m = \left[ (z - z_m) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=z_m}$$

$$X(z) = A_0 + \sum_{m=1}^M \frac{z A_m}{z - z_m}$$

$$\text{或} \quad X(z) = A_0 + \sum_{m=1}^M \frac{A_m}{1 - z_m z^{-1}} = A_0 + \frac{A_1}{1 - z_1 z^{-1}} + \cdots + \frac{A_M}{1 - z_M z^{-1}}$$

$$A_m = \left[ (1 - z_m z^{-1}) X(z) \right]_{z=z_m}$$

$$\text{逆变换: } x(n) = A_0 \delta(n) + \sum_{m=1}^M A_m z_m^n = A_0 \delta(n) + A_1 z_1^n + \cdots + A_M z_M^n$$

$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5}$  ( $|z| > 1$ ) 的逆变换  $x(n)$  为 ( )

- ☐ A  $(1-0.5^n)u(n)$
- ☒ B  $(2-0.5^n)u(n)$
- ☐ C  $2(1-0.5^n)u(n)$
- ☐ D  $2(1+0.5^n)u(n)$

提交

例8-2：求  $X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5}$  的逆变换  $x(n)$  ( $|z| > 1$ )。

解：此为右边序列。

方法一：  $X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$        $\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z-0.5} + \frac{A_2}{z-1}$

$$\text{其中 } A_1 = \left[ \frac{X(z)}{z} (z-0.5) \right]_{z=0.5} = -1, \quad A_2 = \left[ \frac{X(z)}{z} (z-1) \right]_{z=1} = 2$$

$$\text{则 } X(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5}$$

$$x(n) = (2 - 0.5^n)u(n)$$

方法二:

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{A_1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{A_2}{1-z^{-1}}$$

$$\text{其中 } A_1 = \left[ X(z)(1-0.5z^{-1}) \right]_{z=0.5} = -1, \quad A_2 = \left[ X(z)(1-z^{-1}) \right]_{z=1} = 2$$

$$\text{则 } X(z) = \frac{2}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$$x(n) = (2-0.5^n)u(n)$$

2、 $X(z)$ 除含有 $M$ 个一阶极点外，在 $z=z_i$ 处还含有一个 $N$ 阶极点

$$X(z) = A_0 + \sum_{m=1}^M \frac{A_m z}{z - z_m} + \sum_{j=1}^N \frac{B_j z}{(z - z_i)^j} \quad (|z| > \max\{z_1, \dots, z_M, z_i\})$$

$$\text{令 } X_1(z) = (z - z_i)^N \frac{X(z)}{z}$$

$$B_N = X_1(z) \Big|_{z=z_i}$$

$$B_j = \frac{1}{(N-j)!} \left[ \frac{d^{N-j}}{dz^{N-j}} X_1(z) \right]_{z=z_i} \quad (j = 1, \dots, N-1)$$

逆变换：

$$x(n) = A_0 \delta(n) + \sum_{m=1}^M A_m z_m^n u(n) + \left( B_1 z_i^n + \sum_{j=2}^N \frac{B_j n(n-1) \cdots (n-j+2)}{(j-1)!} z_i^{n-j+1} \right) u(n)$$

若为二阶极点  $N = 2$ :  $X_1(z) = (z - z_i)^2 \frac{X(z)}{z}$

$$B_2 = X_1(z) \Big|_{z=z_i} \quad B_1 = \left[ \frac{d}{dz} X_1(z) \right]_{z=z_i}$$

**逆变换:**  $x(n) = A_0 \delta(n) + (A_1 z_1^n + \cdots + A_M z_M^n + B_1 z_i^n + B_2 n z_i^{n-1}) u(n)$

若为三阶极点  $N = 3$ :  $X_1(z) = (z - z_i)^3 \frac{X(z)}{z}$

$$B_3 = X_1(z) \Big|_{z=z_i} \quad B_2 = \left[ \frac{d}{dz} X_1(z) \right]_{z=z_i} \quad B_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2}{dz^2} X_1(z) \right]_{z=z_i}$$

**逆变换:**  $x(n) = A_0 \delta(n) + \left[ A_1 z_1^n + \cdots + A_M z_M^n + B_1 z_i^n + B_2 n z_i^{n-1} + \frac{B_3 n(n-1)}{2} z_i^{n-2} \right] u(n)$

**例8-3:** 求  $X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 4z + 4}$  的逆变换  $x(n)$  ( $|z| > 2$ )。

**解:** 此为右边序列。

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-2)^2} \qquad \frac{X(z)}{z} = \frac{B_1}{z-2} + \frac{B_2}{(z-2)^2}$$

其中

$$B_2 = \left[ (z-2)^2 \frac{X(z)}{z} \right]_{z=2} = [z]_{z=2} = 2, \quad B_1 = \left\{ \frac{d}{dz} \left[ (z-2)^2 \frac{X(z)}{z} \right] \right\}_{z=2} = 1$$

则 
$$X(z) = \frac{z}{z-2} + \frac{2z}{(z-2)^2}$$

$$x(n) = 2^n u(n) + n2^n u(n) = (n+1)2^n u(n)$$



一般情况下， $X(z)$ 的表达式为

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \cdots + b_{r-1} z^{r-1} + b_r z^r}{a_0 + a_1 z + \cdots + a_{k-1} z^{k-1} + a_k z^k}$$

利用部分分式展开法求逆变换时，要掌握基本形式的逆变换。

注意：逆变换与收敛域有关。

$$\frac{z}{z - z_m} (|z| > |z_m|) \Leftrightarrow z_m^n u(n)$$

$$\frac{z}{z - z_m} (|z| < |z_m|) \Leftrightarrow -z_m^n u(-n-1)$$

讨论：只有真分式才可进行部分分式展开，但展开的形式乘以 $z$ 才具备上述逆z变换的基本形式。

对  $\frac{X(z)}{z}$  进行部分分式展开，要求  $\frac{X(z)}{z}$  是真分式，即需要  $k \geq r$  保证  $X(z)$  在  $z=\infty$  处收敛。

因果序列的z变换收敛域为  $|z| > R_x$ ， $k \geq r$  是满足收敛的充分必要条件。

例8-4:  $X(z) = \frac{-5z}{3z^2 - 7z + 2} \quad (\frac{1}{3} < |z| < 2),$  求  $x(n)$ 。

双边序列

解: 
$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-\frac{5}{3}}{z^2 - \frac{7}{3}z + \frac{2}{3}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\left(z - \frac{1}{3}\right)(z - 2)} = \frac{1}{z - \frac{1}{3}} - \frac{1}{z - 2}$$

$$X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{3}} - \frac{z}{z - 2}$$

右边序列

左边序列

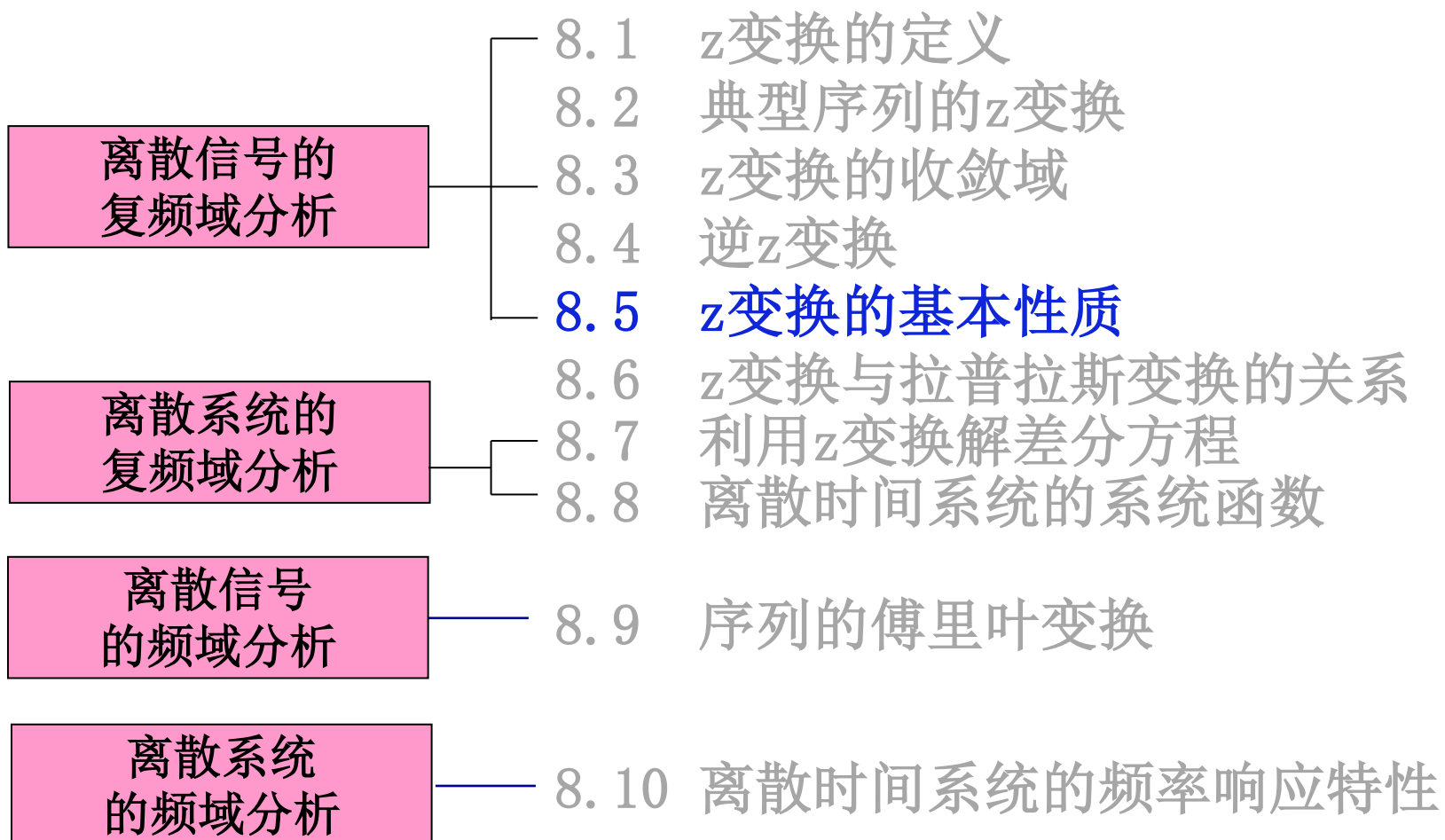
$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + 2^n u(-n-1)$$

分析：同一个z变换的表达式如果收敛域不同，序列也不同。

$$X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{3}} - \frac{z}{z - 2}$$

$$\text{若 } |z| < \frac{1}{3} \quad x(n) = -\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1) + 2^n u(-n-1)$$

$$\text{若 } |z| > 2 \quad x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - 2^n u(n)$$



### 8.5.1 线性

$$\text{若 } ZT[x(n)] = X(z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2}),$$

$$ZT[y(n)] = Y(z) \quad (R_{y1} < |z| < R_{y2})$$

$$\text{则 } ZT[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z)$$

$$\max(R_{x1}, R_{y1}) < |z| < \min(R_{x2}, R_{y2})$$

收敛域为重叠部分。

注：如果线性组合中某些零点与极点相抵消，收敛域可能扩大。

### 8.5.2 位移性

#### 1、双边序列移位后的双边z变换

$$ZT[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$ZT[x(n-m)] = z^{-m} X(z)$$

$$ZT[x(n+m)] = z^m X(z)$$

$m$ 为任意正整数。



若 $x(n)$ 是双边序列，其双边 $z$ 变换为 $X(z)$ ，对序列 $x(n)$ 进行位移会使 $X(z)$ 的收敛域发生变化。此说法（ ）。

☐ A 正确

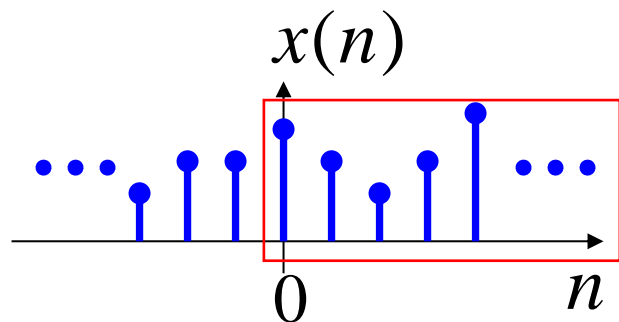
☒ B 错误

提交

## 2、双边序列左移的单边z变换

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)u(n)z^{-n}$$

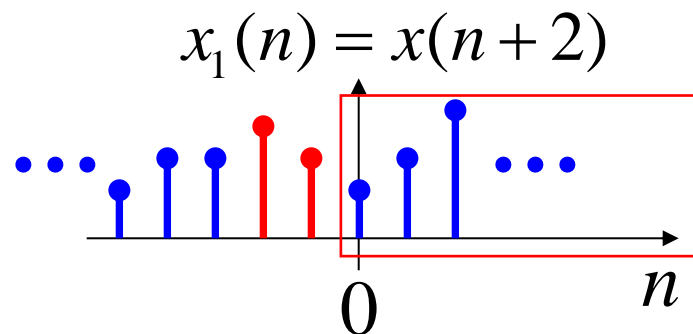
$$ZT[x(n+m)u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m)z^{-n}$$



$$= z^m \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m)z^{-(n+m)} = z^m \sum_{k=m}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

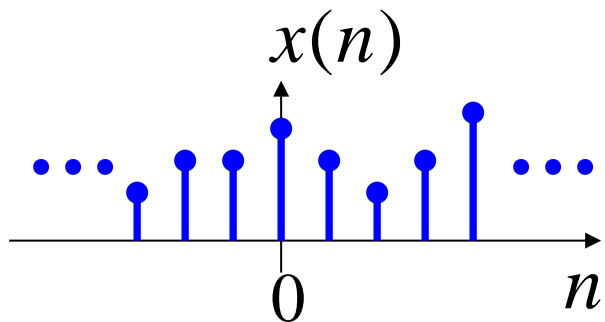
$$= z^m \left[ \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k} \right]$$

$$= z^m \left[ X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k} \right]$$



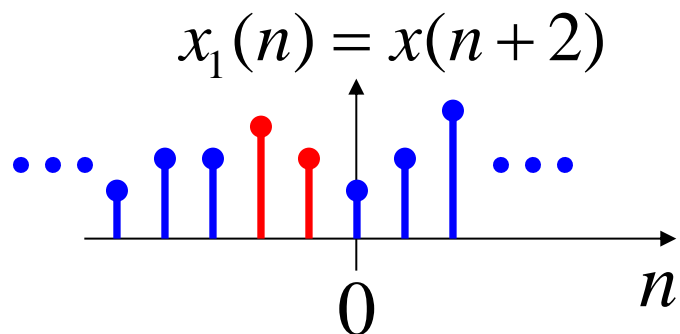
减少一些点的贡献





$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

$$z^2 X(z) = x(0)z^2 + x(1)z + x(2) + x(3)z^{-1} + \dots$$



$$X_1(z) = x_1(0) + x_1(1)z^{-1} + x_1(2)z^{-2} + \dots$$

$$= x(2) + x(3)z^{-1} + x(4)z^{-2} + \dots$$

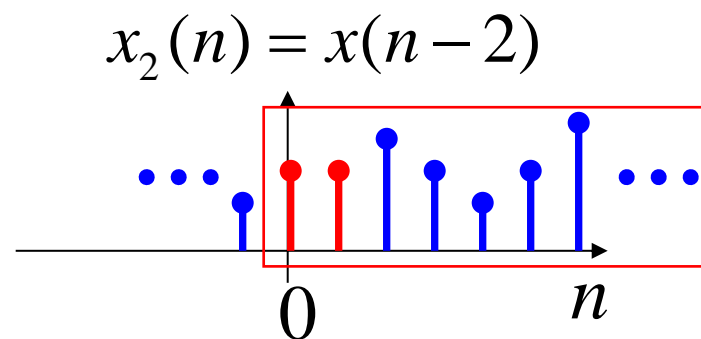
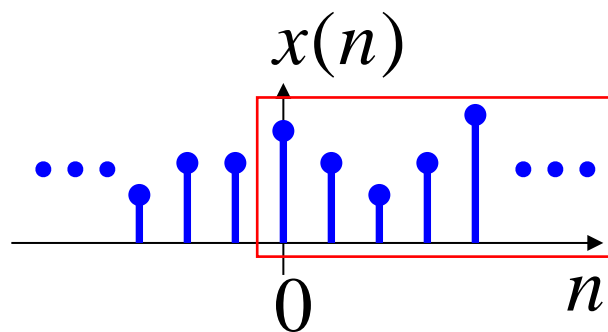
$$= z^2 X(z) - x(0)z^2 - x(1)z$$

$$= z^2 [X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}]$$

## 3、双边序列右移的单边z变换

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)u(n)z^{-n}$$

$$ZT[x(n-m)u(n)] = z^{-m} \left[ X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} \right] \leftarrow \text{增加一些点的贡献}$$



$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

$$X_2(z) = x_2(0) + x_2(1)z^{-1} + x_2(2)z^{-2} + \dots$$

$$= x(-2) + x(-1)z^{-1} + x(0)z^{-2} + \dots$$

$$= z^{-2}X(z) + x(-2) + x(-1)z^{-1}$$

$$= z^{-2} \left[ X(z) + x(-2)z^2 + x(-1)z \right]$$

4、因果序列 $x(n)$ 位移的单边z变换

$$\because \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} = 0$$

$$ZT[x(n-m)u(n)] = z^{-m} X(z)$$

$$ZT[x(n+m)u(n)] = z^m \left[ X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k} \right]$$

序列位移只会使z变换在 $z=0$ 或 $\infty$ 处的零极点情况发生变化。



已知序列  $x(n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n [u(n) - u(n - 8)]$ ，其收敛域为 ( )

☐ A  $0 < |z| < \frac{1}{3}$

☐ B  $|z| > \frac{1}{3}$

☒ C  $|z| > 0$

☐ D  $z$ 全平面

提交

**例8-5:** 求  $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n [u(n) - u(n-8)]$  的z变换和收敛域。

**解:** 序列为有限长序列。

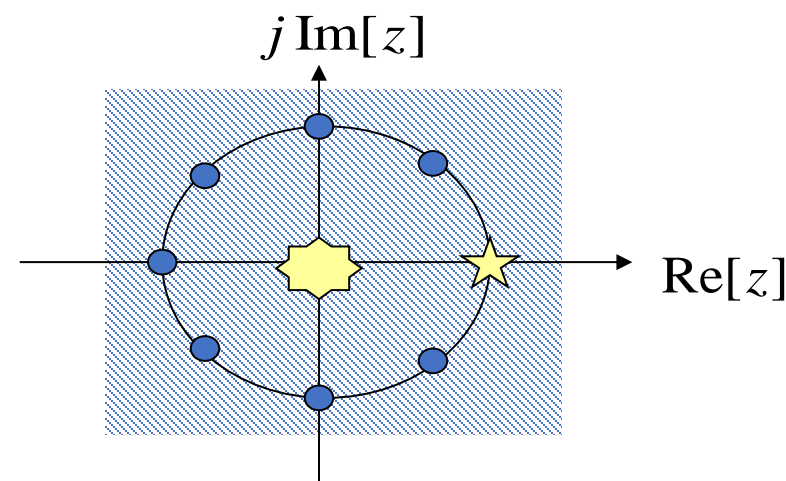
$$X(z) = \sum_{n=0}^7 \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^7 \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^8}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{z^8 - \left(\frac{1}{3}\right)^8}{z^7 \left(z - \frac{1}{3}\right)}$$

$z^8 = \left(\frac{1}{3}\right)^8 \quad z = \frac{1}{3} e^{j\frac{2k\pi}{8}} \quad (k = 0, \dots, 7) \longrightarrow$  八个零点

$z = 0 \longrightarrow$  七阶极点

$z = 1/3 \longrightarrow$  一阶极点，与一个零点抵消，使收敛域比  $|z| > 1/3$  扩大了

$$\therefore |z| > 0$$



**例8-6:** 求  $x(n) = a^n[u(n) - u(n - m)]$  ( $a$ 为实数,  $m > 0$ ) 的z变换及其收敛域。

**解:** 利用线性特性求这个有限长序列的z变换。

$$ZT[a^n u(n)] = \frac{z}{z - a} \quad (|z| > |a|)$$

若  $m > 1$ ,  $ZT[a^n u(n - m)] = ZT[a^m \boxed{a^{n-m} u(n - m)}] = a^m z^{-m} \frac{z}{z - a} \quad (|z| > |a|)$

$$X(z) = \frac{(1 - a^m z^{-m})z}{z - a} = \frac{z^m - a^m}{z^{m-1}(z - a)}$$

$$z^m = a^m \quad z = ae^{j\frac{2k\pi}{m}} \quad (k = 0, \dots, m-1) \longrightarrow m \text{ 个零点, 均匀分布在半径为 } |a| \text{ 的圆上。}$$

$z = a \longrightarrow$  一阶极点, 与零点  $z = a$  相抵消, 导致收敛域扩大。

$z = 0 \longrightarrow m-1$  阶极点。

所以, 收敛域为  $|z| > 0$ 。

若  $m = 1$ ,  $x(n) = \delta(n)$ ,  $X(z) = 1$ , 收敛域为z全平面。

利用z变换的线性和位移性可解差分方程

$$\begin{aligned} ZT[x(n+1)u(n)] &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n+1)z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)z^{-(n-1)} = z \sum_{n=1}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ &= z[X(z) - x(0)] = zX(z) - zx(0) \end{aligned}$$

$$ZT[x(n+2)u(n)] = z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$$

$$ZT[x(n-1)u(n)] = z^{-1} X(z) + x(-1)$$

$$ZT[x(n-2)u(n)] = z^{-2} X(z) + z^{-1} x(-1) + x(-2)$$

**例8-7：** 已知差分方程表示式  $y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n)$ ，边界条件  $y(-1)=0$ ，用逆z变换法求系统响应  $y(n)$ 。

**解：** 此为求零状态响应。对方程式两端分别取z变换：

$$\begin{aligned} Y(z) - 0.9z^{-1}Y(z) &= \frac{0.05z}{z-1} && \text{利用线性与位移性} \\ Y(z) &= \frac{0.05z^2}{(z-0.9)(z-1)} && \frac{Y(z)}{z} = \frac{A_1}{z-0.9} + \frac{A_2}{z-1} \\ A_1 &= \left. \frac{0.05z}{z-1} \right|_{z=0.9} = -0.45 && A_2 = \left. \frac{0.05z}{z-0.9} \right|_{z=1} = 0.5 \\ Y(z) &= -\frac{0.45z}{z-0.9} + \frac{0.5z}{z-1} \quad (|z| > 1) \\ y(n) &= [-0.45(0.9)^n + 0.5]u(n) \end{aligned}$$



### 8.5.3 z域微分（时域线性加权）

若  $ZT[x(n)] = X(z)$

$$ZT[nx(n)] = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

时域序列乘以 $n$ 等效于 $z$ 域中求导且乘以 $(-z)$ 。

$$ZT[n^2 x(n)] = -z \frac{d}{dz} \left[ -z \frac{dX(z)}{dz} \right] = \left[ -z \frac{d}{dz} \right]^2 X(z)$$

$$ZT[n^m x(n)] = \left[ -z \frac{d}{dz} \right]^m X(z)$$

**例8-8：** 求斜变序列 $nu(n)$ 和序列 $n^2u(n)$ 的z变换。

**解：**  $u(n) \xrightarrow{z} \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1)$

$$nu(n) \xrightarrow{z} -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (|z| > 1)$$

$$\begin{aligned} n^2u(n) \xrightarrow{z} \left[ -z \frac{d}{dz} \right]^2 \left( \frac{z}{z-1} \right) &= -z \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{(z-1)^2} \right] \\ &= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \quad (|z| > 1) \end{aligned}$$

**例8-9：** 求斜变序列 $(n + 1)a^n u(n)$ 的z变换。

**解：**  $a^n u(n) \xrightarrow{z} \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$

$$na^n u(n) \xrightarrow{z} -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-a} \right) = \frac{az}{(z-a)^2}, |z| > |a|$$

$$(n+1)a^n u(n) \xrightarrow{z} \frac{az}{(z-a)^2} + \frac{z}{z-a} = \frac{z^2}{(z-a)^2}, |z| > |a|$$

利用z域微分特性求得的常见序列z变换

z变换	因果序列	z变换	因果序列
$\frac{z}{z-1} \quad ( z  > 1)$	$u(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2} \quad ( z  > 1)$	$nu(n)$
$\frac{z}{z-a} \quad ( z  >  a )$	$a^n u(n)$	$\frac{az}{(z-a)^2} \quad ( z  >  a )$	$na^n u(n)$
$\frac{z^2}{(z-a)^2} \quad ( z  >  a )$	$(n+1)a^n u(n)$	$\frac{a^2 z}{(z-a)^3} \quad ( z  >  a )$	$\frac{n(n-1)}{2!} a^n u(n)$
$\frac{z^3}{(z-a)^3} \quad ( z  >  a )$	$\frac{(n+1)(n+2)}{2!} a^n u(n)$		

序列右移1  
乘以系数a

序列右移2  
乘以系数a<sup>2</sup>

注:  $(n+1)a^n u(n)$  右移1, 乘以a, 变为  
 $na^n u(n-1) = 0 \cdot a^0 \delta(n) + 1 \cdot a \delta(n-1) + 2a^2 \delta(n-2) + \cdots = na^n u(n)$

若z变换的收敛域为  $|z| < |a|$ , 逆变换为反因果序列, 上述表格中的序列前面添加负号,  $u(n)$  替换为  $u(-n-1)$ 。

### 8.5.4 z域尺度变换（时域指数加权）

$$ZT[x(n)] = X(z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

$$ZT[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right) \quad (R_{x1} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x2} \Rightarrow |a|R_{x1} < |z| < |a|R_{x2}) \quad |a| > 1$$

$$ZT[a^{-n} x(n)] = X(az) \quad (R_{x1} < |az| < R_{x2} \Rightarrow \frac{R_{x1}}{|a|} < |z| < \frac{R_{x2}}{|a|}) \quad |a| > 1$$

$$ZT[(-1)^n x(n)] = X(-z) \quad (R_{x1} < |z| < R_{x2})$$

$$ZT[(-1)^n u(n)] = z/(z+1) \quad (|z| > 1)$$

**例8-10:** 求序列 $\beta^n \cos(n\omega_0)u(n)$ 的z变换。

**解:**  $\cos(n\omega_0)u(n) \xrightarrow{z} \frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$

可得

$$\begin{aligned} \beta^n \cos(\omega_0 n)u(n) &\xrightarrow{z} \frac{\frac{z}{\beta}(\frac{z}{\beta} - \cos \omega_0)}{(\frac{z}{\beta})^2 - 2\frac{z}{\beta} \cos \omega_0 + 1} \\ &\rightarrow \frac{z(z - \beta \cos \omega_0)}{z^2 - 2z\beta \cos \omega_0 + \beta^2} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{z}{\beta} \right| > 1 \quad \text{即} |z| > |\beta|$$

### 8.5.5 初值定理

若 $x(n)$ 是因果序列, 已知  $ZT[x(n)] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$

则  $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$  ( $n=0$ 的信号突变对应高频分量)

### 8.5.6 终值定理

若 $x(n)$ 是因果序列, 已知  $ZT[x(n)] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$  ( $n \rightarrow \infty$ 对应直流分量, 即 $s=0$ ,  $z=e^s=1$ )

要求当  $n \rightarrow \infty$  时 $x(n)$ 收敛, 即 $X(z)$ 极点必须在单位圆内 (若在单位圆上只能位于 $z=1$ 处且为一阶极点)。

注意和系统稳定性条件区别, 因果系统稳定性的条件是系统函数的极点必须位于单位圆内。

终值定理的使用条件是收敛域包括单位圆或在 $z=1$ 处有一阶极点。

$x(n)$	终值 ( $n \rightarrow \infty$ )	$X(z)$	收敛域
$(2)^n$	无终值	$\frac{z}{z-2}$	$ z  > 2$
$(1)^n$	终值为1	$\frac{z}{z-1}$	$ z  > 1$
$(-1)^n$	无终值	$\frac{z}{z+1}$	$ z  > 1$
$(0.5)^n$	终值为0	$\frac{z}{z-0.5}$	$ z  > 0.5$



**例8-11:** 已知某因果序列的z变换 $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ ,  $|z| > |a|$ , 式中 $a$ 为实数, 分别利用初值定理和终值定理求序列的初值 $x(0)$ 和终值 $x(\infty)$ , 并推导 $x(1)$ 。

**解:** 由初值定理和终值定理可得,

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{1-az^{-1}} = 1$$

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{1-az^{-1}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z(z-1)}{z-a} = \begin{cases} 1, & a = 1 \\ 0, & |a| < 1 \end{cases}$$

$|a| > 1$ 或 $a = -1$ 时终值不存在。

因为  $x(1) = x(n+1)|_{n=0}$  且  $x(n+1) \leftrightarrow z[X(z) - x(0)]$  (单边z变换的位移特性)

$$\text{所以 } x(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[X(z) - x(0)] = \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \frac{z}{1-az^{-1}} - z \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{1-az^{-1}} \right) = a$$

## 作业

基础题：8-5, 8-10, 8-11, 8-12, 8-13, 8-17

加强题：8-16, 8-18