第二章 连续时间系统的时域分析

本次课内容

2.1 引言

2.2 系统数学模型（微分方程）的建立

2.3 用时域经典法求解微分方程

2.4 起始点的跳变-从0-到0+状态的转换

本次课目标

1. 熟悉建立系统微分方程的方法（如何消去中间变量）；
2. 熟练掌握经典法求系统的自由响应和强迫响应；
3. 熟练利用冲激函数匹配法确定起始点状态的跳变量。

第二章 连续时间系统的时域分析

2.1 引言

为什么要进行系统的时域分析？

LTI 系统的时域分析方法：

- 直观、物理概念清楚，是学习各种变换域分析法的基础；
- 计算过程复杂，但计算机和软件的发展使其求解更方便。

信号 → 分解 → 系统 → 叠加 → 响应

对于已知的信号　　**确定的系统**　　**如何得到系统响应?**

1. 系统的数学模型如何建立？	微分方程
2. 系统的响应如何分解？	自由+强迫，零输入+零状态
3. 不同的响应如何求解？	经典解法和卷积解法
4. 信号与系统如何应用？	模拟框图，计算机求解

第二章 连续时间系统的时域分析

2.2 系统数学模型（微分方程）的建立

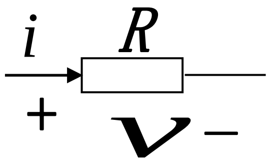
微分方程建立的目的：将系统的**物理特性**进行**数学建模**描述。

电路系统：元件约束特性→网络拓扑约束(方程) →微分方程

1) 元件约束特性

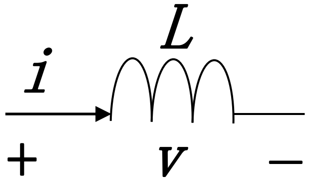
①电路元件

i) 电阻R:



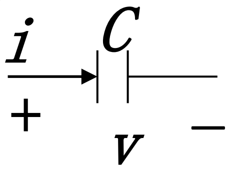
$$v = Ri$$

ii) 电感L:



$$i = \frac{1}{L}\int v\,dt \qquad v = L\,di/dt$$

iii) 电容C:



$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad v = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

2）各电路的电流、电压约束关系

基尔霍夫电流定律（KCL）：在任一瞬时，流向某一结点的电流之和恒等于该结点流出电流之和，即：

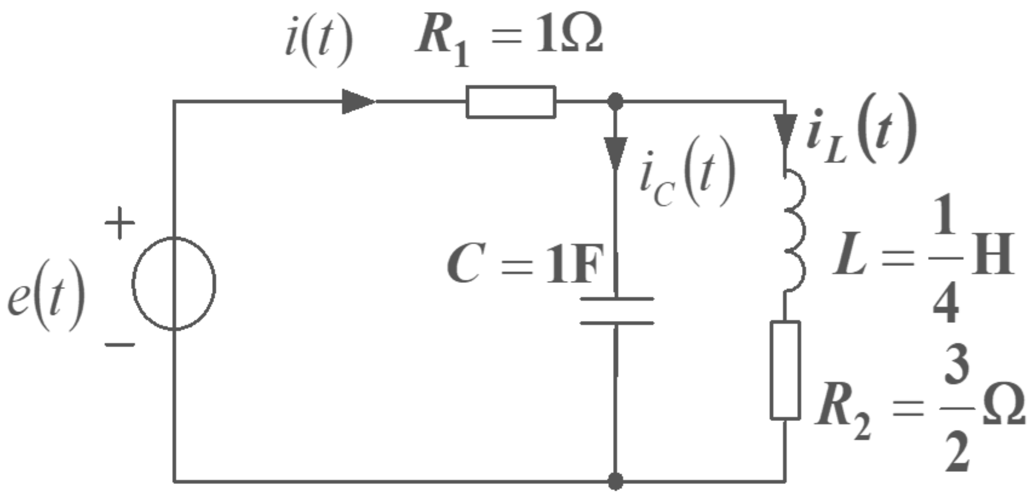
$$\sum I_{\text{入}} = \sum I_{\text{出}}$$

基尔霍夫电压定律（KVL）：在任一瞬间，沿电路中的任一回路绕行一周，在该回路上电动势之和恒等于各电阻上的电压降之和，即：

$$\sum \mathrm{U}_{\text{电压升}} = \sum \mathrm{U}_{\text{电压降}}$$

2.2 系统数学模型（微分方程）的建立

例2-1：给定如图所示电路，建立电流 $i(t)$ 的微分方程。



解：根据电路形式，列回路电压方程

$$R_1 i(t)+v_C(t)=e(t) \qquad (1)$$

$$v_C(t)=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L(t)+i_L(t)R_2 \qquad (2)$$

列结点电流方程

$$i(t)=C\frac{d}{dt}v_C(t)+i_L(t) \qquad (3)$$

难点：如何将三个联立的微分方程变换为一个表征输入为**e(t)**、输出为**i(t)**的微分方程？

如何消去中间变量$v_C(t)$和$i_L(t)$？

$$R_1 i(t)+v_C(t)=e(t) \quad (1)$$

$\boxed{\text{最简单，包含}v_C(t)\text{，不包含}v_C(t)\text{的导数。}}$

$$v_C(t)=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L(t)+i_L(t)R_2 \quad (2)$$

包含$i_L(t)$的导数，与$v_C(t)$的二阶导数有关，最复杂。

$$i(t)=C\frac{d}{dt}v_C(t)+i_L(t) \quad (3)$$

不包含 $i_L(t)$的导数，包含$v_C(t)$的一阶导数。

由（1）可得 $$v_C(t)=e(t)-R_1 i(t) \quad (4)$$

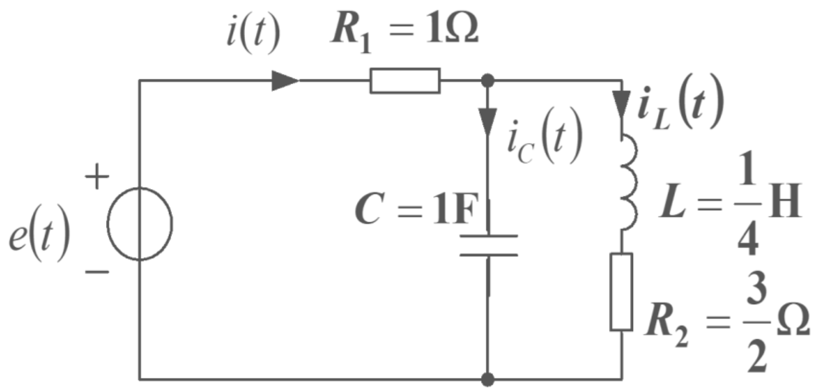
将（4）代入（3），可得 $$i_L(t)=i(t)+CR_1\frac{d}{dt}i(t)-C\frac{d}{dt}e(t) \quad (5)$$

将（4）和（5）代入（2），可得（6）（见下页）。

2.2 系统数学模型（微分方程）的建立

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+(\frac{1}{R_1C}+\frac{R_2}{L})\frac{d}{dt}i(t)+(\frac{1}{LC}+\frac{R_2}{R_1LC})i(t)$$

$$=\frac{1}{R_1}\frac{d^2}{dt^2}e(t)+\frac{R_2}{R_1L}\frac{d}{dt}e(t)+\frac{1}{R_1LC}e(t) \qquad (6)$$



再把电路参数代入（6），得

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t)$$

第二章 连续时间系统的时域分析

经典法求解微分方程

对于复杂系统，激励信号$x(t)$与响应函数$y(t)$之间的关系，可用下列形式的**常系数一元 n 阶线性微分方程**来描述

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)$$
$$=b_m\frac{d^m x(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t)$$

此方程的**完全解**由**齐次解（自由响应或固有响应）**和**特解（强迫响应）**两部分组成。

齐次解应满足

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=0$$

齐次解特征方程为

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

特征根$\alpha_1 \ldots \alpha_n$是系统的“固有频率”。

1）特征根无重根，则微分方程的齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}$$

2）特征根有重根，假设α_1是特征方程的K重根，那么，在齐次解中对应于α_1的部分将有K项

$$(A_1 t^{K-1} + A_2 t^{K-2} + \ldots + A_{K-1} t + A_K) e^{\alpha_1 t}$$

3）若α_1、α_2 为共轭复根，即$\alpha_{1,2} = \alpha \pm j\beta$，那么，在齐次解中对应于$\alpha_1$、$\alpha_2$的部分为

$$e^{\alpha t}(A_1 \cos\beta t + A_2 \sin\beta t)$$

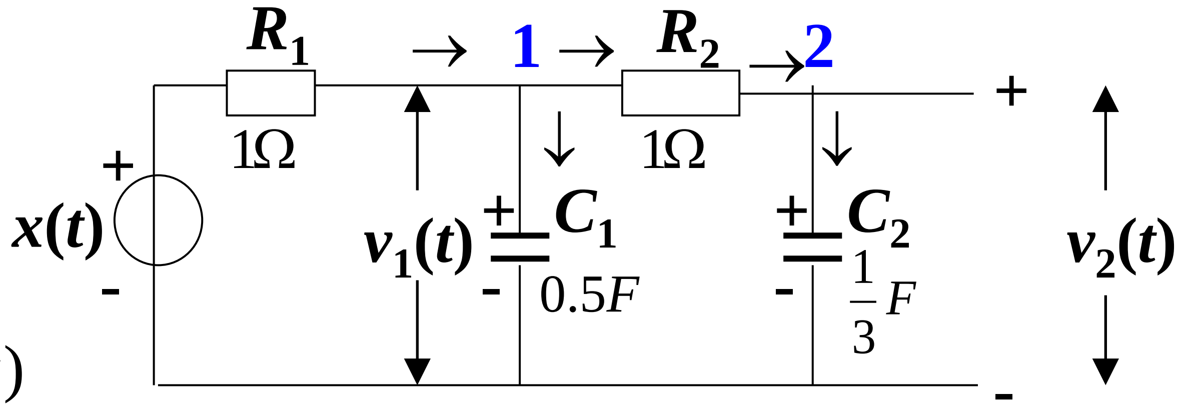
注意：这里只得到齐次解的形式，系数还未知！

2.3 用时域经典法求解微分方程

特解的函数形式与激励的函数形式有关。**将激励信号代入微分方程的右端得到的函数式称为“自由项”**。通常观察自由项，**查表选特解函数式，将其代入方程后求得特解函数式中的待定系数**，即可求出特解。

自由项	特解
E (常数)	B (常数)
t^p	$B_p t^p + B_{p-1} t^{p-1} + \ldots + B_1 t + B_0$
$e^{\alpha t}$	$\begin{cases} Be^{\alpha t} & (\alpha\text{不是特征根}) \\ Bte^{\alpha t} & (\alpha\text{是单特征根}) \\ Bt^2e^{\alpha t} & (\alpha\text{是二重特征根}) \end{cases}$
$\begin{cases} \cos\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t \end{cases}$	$B_1\cos\omega_0 t + B_2\sin\omega_0 t$

例2-2：如下图所示电路，已知激励信号$x(t)=\cos(2t)u(t)$, 两个电容上的初始电压均为零，求响应信号$v_2(t)$的表达式。



解:

（a）列写微分方程式为

$$\begin{cases} \text{结点1:} & \dfrac{x(t)-v_1(t)}{R_1}=C_1\dfrac{dv_1(t)}{dt}+\dfrac{v_1(t)-v_2(t)}{R_2} \quad (1) \\ \text{结点2:} & \dfrac{v_1(t)-v_2(t)}{R_2}=C_2\dfrac{dv_2(t)}{dt} \quad (2) \end{cases}$$

由（2）可得 $v_1(t)=R_2C_2\dfrac{dv_2(t)}{dt}+v_2(t)$ (3)

将（3）代入（1）可得 $\dfrac{d^2v_2(t)}{dt^2}+7\dfrac{dv_2(t)}{dt}+6v_2(t)=6\cos 2t\,u(t)$

（b）为求**齐次解**，写出特征方程 $\alpha^2+7\alpha+6=0$

特征根 $\alpha_1=-1,\alpha_2=-6$

齐次解 $A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}$ （A_1、A_2待定）

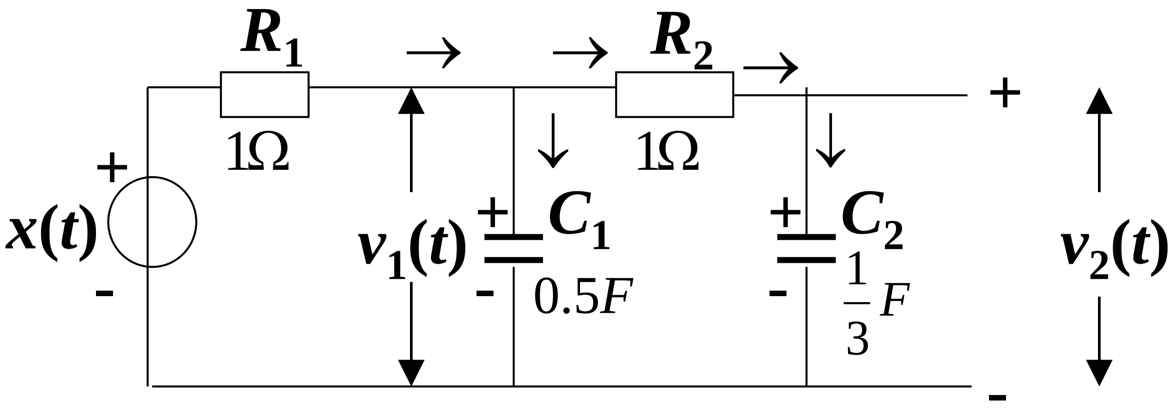
（c）查表，得**特解**为 $B_1\sin 2t+B_2\cos 2t$

代入原方程左边得 $(2B_1-14B_2)\sin 2t+(14B_1+2B_2)\cos 2t=6\cos 2t$

比较上述方程两边系数，得 $\begin{cases}2B_1-14B_2=0\\14B_1+2B_2=6\end{cases}\longrightarrow B_1=\dfrac{21}{50},B_2=\dfrac{3}{50}$

（d）**完全解**为（A_1、A_2待定）

$$v_2(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}+\frac{21}{50}\sin 2t+\frac{3}{50}\cos 2t \qquad (4)$$



（e）**由初始状态确定系数A**: 由于C_2初始端电压为0，在t=0加入激励时C_2电压不突变，即$v_2(0)=0$; 又因为电容C_1初始端电压为0，在t=0加入激励时C_1电压不突变，R_2、C_2两端的电压也不突变，于是通过R_2、C_2的初始电流也为0，即 $\frac{dv_2(0)}{dt}=0$ 。

$x(t)=\cos(2t)u(t)$

$$v_2(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}+\frac{21}{50}\sin 2t+\frac{3}{50}\cos 2t$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt}=-A_1e^{-t}-6A_2e^{-6t}+\frac{21}{25}\cos 2t-\frac{3}{25}\sin 2t$$

由$v_2(0)=0$得到 $A_1+A_2=-\frac{3}{50}$

由$\frac{dv_2(0)}{dt}=0$得到 $A_1+6A_2=\frac{21}{25}$

解得 $A_1=-\frac{6}{25},A_2=\frac{9}{50}$

（f）完全解为 $v_2(t)=-\frac{6}{25}e^{-t}+\frac{9}{50}e^{-6t}+\frac{21}{50}\sin(2t)+\frac{3}{50}\cos(2t)\quad (t\geq 0)$

2.3 用时域经典法求解微分方程

时域经典法分析电路系统的流程

优点：物理意义清楚；
缺点：过程复杂。

1. 根据基尔霍夫定律列写电路的微分方程
2. 将联立的微分方程化为一元微分方程
3. 求齐次解（系数待定）
4. 查表求特解
5. 完全解 = 齐次解 + 特解, 将完全解代入微分方程求齐次解的系数

初始状态

6. 已定系数的完全解—系统的全响应

完全响应的分解：

$$v_2(t) = \underbrace{-\frac{6}{25}e^{-t} + \frac{9}{50}e^{-6t}}_{\text{自由响应（齐次解）}} + \underbrace{\frac{21}{50}\sin(2t) + \frac{3}{50}\cos(2t)}_{\text{强迫响应（特解）}}$$

当输入信号为阶跃信号或有始周期信号时，稳定系统的全响应可以分为暂态响应和稳态响应。暂态响应是指激励接入后，全响应中暂时出现的响应，随时间增长逐渐消失。稳态响应通常由阶跃函数和周期函数组成。

$$v_2(t) = \underbrace{-\frac{6}{25}e^{-t} + \frac{9}{50}e^{-6t}}_{\text{暂态响应}} + \underbrace{\frac{21}{50}\sin(2t) + \frac{3}{50}\cos(2t)}_{\text{稳态响应}}$$

第二章 连续时间系统的时域分析

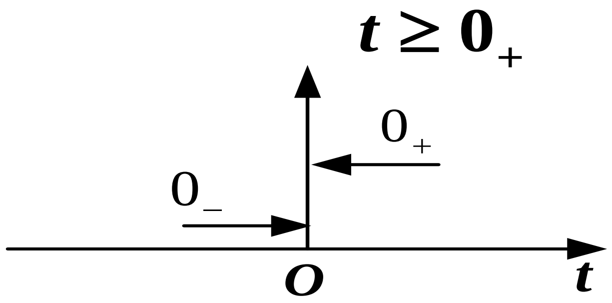
2.4 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换

在系统分析问题中，初始条件要根据激励接入瞬时**系统的状态**决定。

系统在t_0时的状态是一组必须知道的**最少数据量**，根据这组数据、系统的数学模型以及t_0时接入的激励信号，就能够完全确定在t_0以后任意时刻的响应。***n*阶微分方程的状态是响应的0—(*n*-1)阶导数。**（详见第十二章）

0_-状态，**起始状态**（激励接入之前的瞬间）

$$r^{(k)}(0_-)=\left[r(0_-),\frac{\mathrm{d}\,r(0_-)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2\,r(0_-)}{\mathrm{d}t^2},\cdots\frac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0_-)}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right]$$



0_+状态，**初始条件**，导出的起始状态（激励接入之后的瞬间）

$$r^{(k)}(0_+)=\left[r(0_+),\frac{\mathrm{d}\,r(0_+)}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2\,r(0_+)}{\mathrm{d}t^2},\cdots\frac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0_+)}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right]$$

用时域经典法求得的微分方程的解在$t\geq 0_+$的时间范围内，因而不能以0_-状态作为初始条件，而应以0_+状态作为初始条件。

2.4 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换

对于具体的电网络，系统的**起始状态就是系统中储能元件的储能情况**。

一般情况下换路期间**电容两端的电压**和流过**电感中的电流不会发生突变**。这就是在电路分析中的换路定则：

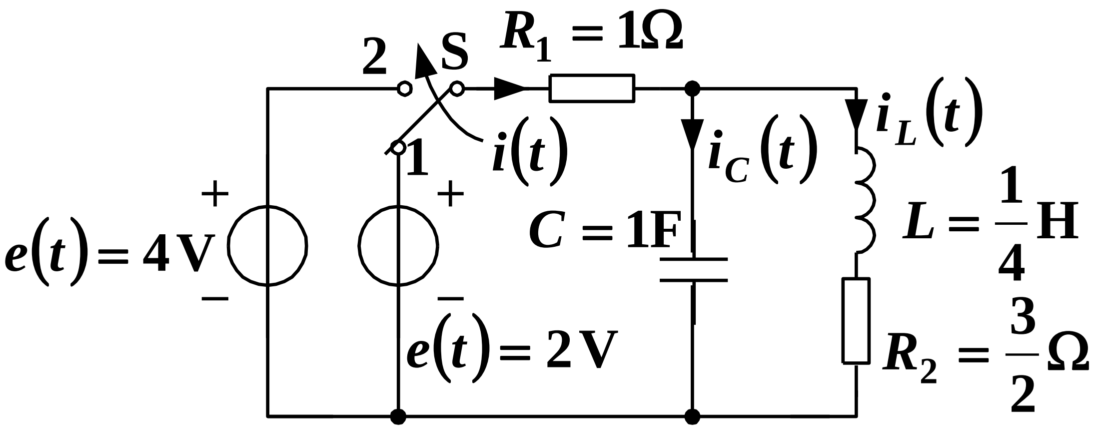
$$v_C(0_-) = v_C(0_+), \quad i_L(0_-) = i_L(0_+)$$

根据上述定则，在例2-2中，从0_-到0_+状态没有发生跳变。

当有冲激电流强迫作用于电容或有冲激电压强迫作用于电感，从0_-到0_+状态就会发生跳变。

重点和难点：如何确定从0_-到0_+状态的跳变量？

例2-3： 给定如图所示电路，$t<0$ 开关S处于1的位置而且已经达到稳态。当 $t=0$ 时由1转向2。建立电流$i(t)$的微分方程并分解 $i(t)$ 在 $t\geq 0$ 时的变化。

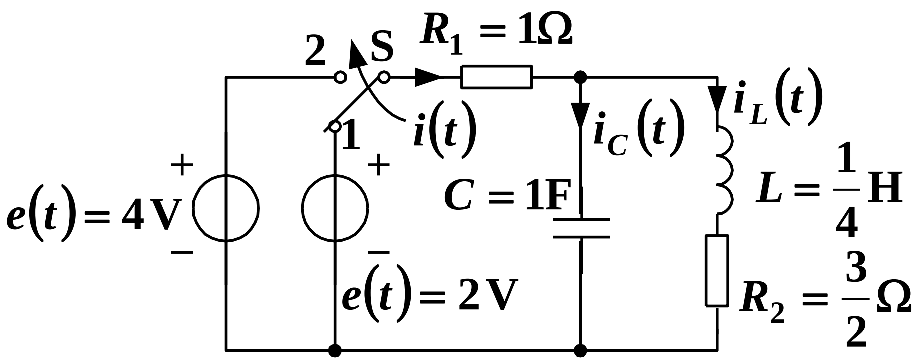


解： （a）列写电路的微分方程

在 $t\geq 0$ 时此电路与例2-1的电路相同，因此电路微分方程相同：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+10i(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t)+6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+4e(t) \qquad (1)$$

（b）　求系统的完全响应



系统的特征方程 $\alpha^2 + 7\alpha + 10 = 0$ 即 $(\alpha + 2)(\alpha + 5) = 0$

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t) + 7\frac{d}{dt}i(t) + 10i(t) = \frac{d^2}{dt^2}e(t) + 6\frac{d}{dt}e(t) + 4e(t)$$

特征根　$\alpha_1 = -2,\quad \alpha_2 = -5$

齐次解　$i_h(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} \quad (t \ge 0_+)$

特解：　由于 $t \ge 0_+$ 时　$e(t) = 4\mathrm{V}$

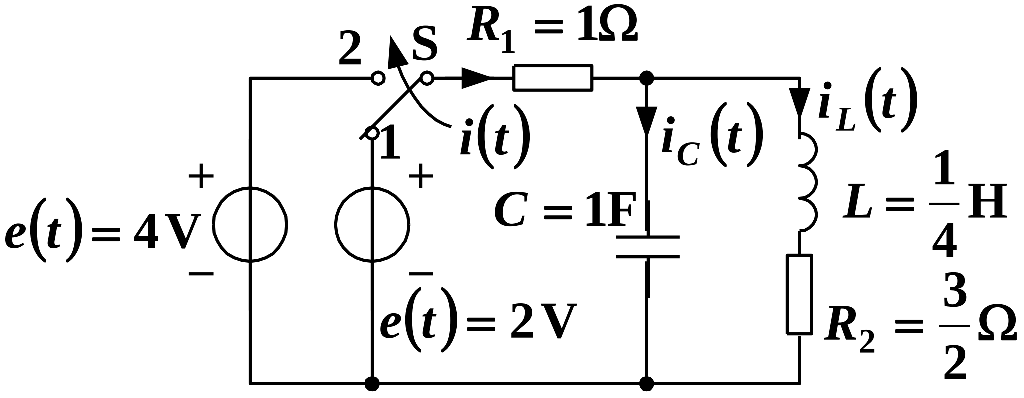
方程右端自由项为 4×4，因此令特解 $i_p(t) = B$，代入微分方程得到

$$10B = 4\times4 \longrightarrow B = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

则系统的完全响应为

$$i(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} + \frac{8}{5} \qquad (t \ge 0_+)$$

（c）确定换路后的 $i(0_+)$和 $\frac{d}{dt}i(0_+)$

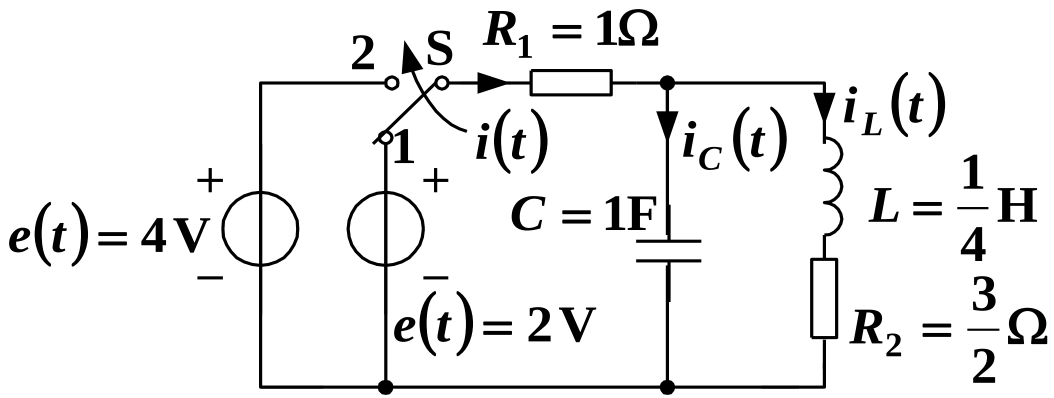


0_-状态（电容开路、电感短路）： $i(0_-) = i_L(0_-) = \dfrac{2}{R_1 + R_2} = \dfrac{4}{5}\mathrm{A}$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(0_-) = 0$　　　　$v_C(0_-) = \dfrac{2R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{6}{5}\mathrm{V}$

2.4 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换

换路后的 $i(0_+)$ 和 $\frac{d}{dt}i(0_+)$



由于**电容两端的电压和电感中的电流不会发生突变**，故有

$$v_C(0_+) = v_C(0_-) = \frac{6}{5}\text{V} \qquad i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{4}{5}\text{A}$$

$$i(0_+) = \frac{1}{R_1}\left[e(0_+) - v_C(0_+)\right] = \frac{1}{1}\left(4 - \frac{6}{5}\right)\text{A} = \frac{14}{5}\text{A}$$

$$\frac{d}{dt}i(0_+) = \frac{1}{R_1}\left[\frac{d}{dt}e(0_+) - \frac{d}{dt}v_C(0_+)\right] = \frac{1}{R_1}\left[0 - \frac{i_C(0_+)}{C}\right]$$

$$= \frac{i_L(0_+) - i(0_+)}{R_1 C} = i_L(0_-) - i(0_+) = \frac{4}{5} - \frac{14}{5} = -2\text{A/s}$$

（d）确定系数A_1、A_2

已知 $$i(t)=A_1\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-5t}+\frac{8}{5}$$ $$\frac{d}{dt}i(t)=-2A_1\mathrm{e}^{-2t}-5A_2\mathrm{e}^{-5t}$$

$$\begin{cases} i(0_+)=A_1+A_2+\dfrac{8}{5}=\dfrac{14}{5} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_+)=-2A_1-5A_2=-2 \end{cases}$$

求得 $$\begin{cases} A_1=\dfrac{4}{3} \\ A_2=-\dfrac{2}{15} \end{cases}$$

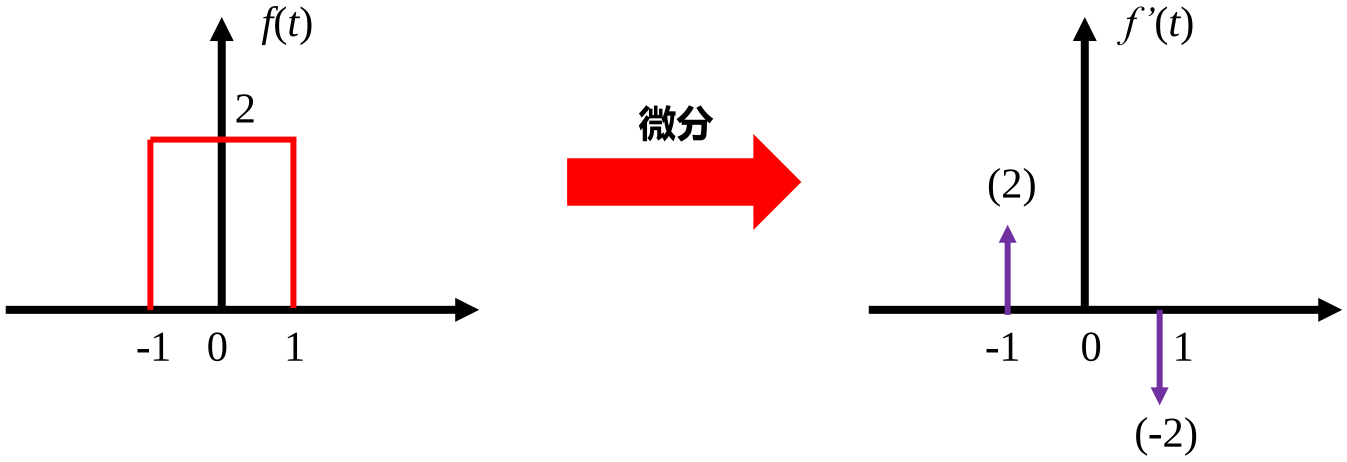
完全响应为

$$i(t)=\left(\frac{4}{3}e^{-2t}-\frac{2}{15}e^{-5t}+\frac{8}{5}\right)A \qquad (t\geq 0_+)$$

2.4 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换

冲激函数匹配法：冲激函数是产生状态跳变的原因（例如，电容中的冲激电流导致其电压跳变），所以**$t=0$ 时微分方程左右两端的$\delta(t)$及其各阶导数应该平衡。**

(其他项也应该平衡，我们讨论初始条件，只关注引起状态跳变的冲激函数及其导数，因此可以不管其他项。)



$$f(t)=2u(t+1)-2u(t-1)$$

$$\frac{df(t)}{dt}=2\delta(t+1)-2\delta(t-1)$$

跳变的概念：其导数是冲激函数。

2.4 起始点的跳变–从0_-到0_+状态的转换

例2-4： $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+3r(t)=3\delta'(t)$，已知 $r(0_-)=1$，求 $r(0_+)$。

解： 方程右端含$3\delta'(t)$项，它一定属于$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)$。

设 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)=3\delta'(t)+a\delta(t)$

则 $r(t)=3\delta(t)+\boxed{a\Delta u(t)}$ ⬅ ***a*–0_-到0_+的状态跳变量**

$\Delta u(t)$：相对单位跳变函数
表示0_-到0_+幅度跳变一个单位

代入方程，只保留方程两边的冲激函数及其导数项，

$3\delta'(t)+(a+9)\delta(t)=3\delta'(t)$ ➡ $a+9=0$ ➡ $a=-9$

$r(0_+)=r(0_-)+a=1-9=-8$

例2-4若考虑其他项的平衡，

设 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)=3\delta'(t)+a\delta(t)+b\Delta u(t)$$

则 $$r(t)=3\delta(t)+a\Delta u(t)$$

$\Delta u(t)$从0_-到0_+的积分为0（斜变函数）

代入方程

$$3\delta'(t)+(a+9)\delta(t)+(3a+b)\Delta u(t)=3\delta'(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+9=0 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-9 \\ b=27 \end{cases}$$

$$r(0_+)=r(0_-)+a=1-9=-8$$

因此无需考虑其他项的平衡。

系统微分方程为 $r''(t) + 3r'(t) + 2r(t) = 2\delta(t)$，已知 $r(0_-)$和$r'(0_-)$，求$r(0_+)$和$r'(0_+)$。

A $\mathrm{r}(0_+) = r(0_-)$， $r'(0_+) = r'(0_-)$

B $\mathrm{r}(0_+) = r(0_-)$，$r'(0_+) = r'(0_-) + 2$

C $\mathrm{r}(0_+) = r(0_-) + 2$，$r'(0_+) = r'(0_-)$

D $\mathrm{r}(0_+) = r(0_-) + 3$，$r'(0_+) = r'(0_-) + 2$

提交

例2-5： 系统微分方程为$r''(t)+3r'(t)+2r(t)=2\delta(t)$，已知$r(0_-)$和$r'(0_-)$，求$r(0_+)$和$r'(0_+)$。

解： 方法一：设 $r''(t)=a\delta(t),\quad r'(t)=a\Delta u(t),\quad r(t)=0\quad (t=0)$

$$a\delta(t)+3a\Delta u(t)=2\delta(t)\longrightarrow a=2$$

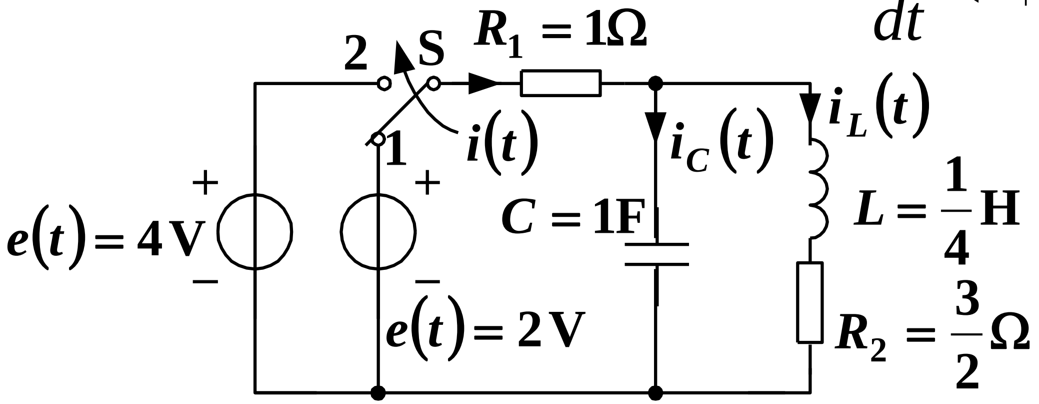
$$r'(0_+)=r'(0_-)+2\qquad r(0_+)=r(0_-)$$

方法二：方程右端含$2\delta(t)$项，它一定属于$r''(t)$，说明$r'(t)$ 在0时刻发生了**两个单位的跳变**，即$r'(0_+)=r'(0_-)+2$。

而$r(t)$在0时刻没有变化，即 $r(0_+)=r(0_-)$ 。

用冲激函数匹配法求例2-3中0_-到0_+时的状态变化。

给定如图所示电路，$t<0$ 开关S处于1的位置而且已经达到稳态。当$t=0$ 时由1转向2，建立电流 $i(t)$的微分方程并确定换路后的 $i(0_+)$ 和$\frac{d}{dt}i(0_+)$ 。



解： 列写电路的微分方程

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t)$$

0_+时刻附近激励的表达式为：$e(t)=e(0_-)+2\Delta u(t)=2+2\Delta u(t)$,

代入方程右边可得：$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)+8\Delta u(t)+8$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+10i(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)+8\Delta u(t)+8$$

令 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t)=2\delta'(t)+a\delta(t)$，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)=2\delta(t)+\underline{a}\Delta u(t)$，$i(t)=\underline{2}\Delta u(t)$

0_到0+的状态跳变量

将上述表达式代入方程左边，只保留方程两边的冲激函数及其导数项进行匹配，

$$2\delta'(t)+(a+14)\delta(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)$$

$$a+14=12\Rightarrow a=-2$$

$$\therefore i(0_+)=i(0_-)+2=\frac{4}{5}+2=\frac{14}{5}\text{A}，\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_+)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_-)-2=0-2=-2\ \text{A/s}$$

对于一个N阶微分方程 $$\frac{d^N r(t)}{dt^N}+\sum_{k=0}^{N-1} a_k \frac{d^k r(t)}{dt^k}=\sum_{r=0}^{N} b_r \frac{d^r \delta(t)}{dt^r}$$

令 $$\frac{d^N r(t)}{dt^N}=\sum_{r=0}^{N} c_r \frac{d^r \delta(t)}{dt^r}$$

$$\frac{d^{N-1} r(t)}{dt^{N-1}}=\sum_{r=1}^{N} c_r \frac{d^{r-1} \delta(t)}{dt^{r-1}}+\boxed{c_0 \Delta u(t)}$$

$$\frac{d^{N-2} r(t)}{dt^{N-2}}=\sum_{r=2}^{N} c_r \frac{d^{r-2} \delta(t)}{dt^{r-2}}+\boxed{c_1 \Delta u(t)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\ r(t)}{dt}=c_N \delta'(t)+c_{N-1}\delta(t)+\boxed{c_{N-2}\Delta u(t)}$$

$$r(t)=c_N \delta(t)+\boxed{c_{N-1}\Delta u(t)}$$

状态跳变

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{d^{N-1} r(0_+)}{dt^{N-1}}=\frac{d^{N-1} r(0_-)}{dt^{N-1}}+c_0\\
&\frac{d^{N-2} r(0_+)}{dt^{N-2}}=\frac{d^{N-2} r(0_-)}{dt^{N-2}}+c_1\\
&\vdots\\
&\frac{d\ r(0_+)}{dt}=\frac{d\ r(0_-)}{dt}+c_{N-2}\\
&r(0_+)=r(0_-)+c_{N-1}
\end{aligned}}$$

将上述公式代入方程左边，

$$c_N \frac{d^N\delta(t)}{dt^N} + \sum_{r=0}^{N-1}\left(c_r + \sum_{k=r+1}^{N}\left(a_{N+r-k}c_k\right)\right)\frac{d^r\delta(t)}{dt^r} = \sum_{r=0}^{N} b_r \frac{d^r\delta(t)}{dt^r}$$

$c_N = b_N, c_r + \sum_{k=r+1}^{N}\left(a_{N+r-k}c_k\right) = b_r\,(r = 0,\ldots,N-1)$，求解$c_r\,(r = 0\ldots,N-1)$。

$$\frac{d^k r(0_+)}{dt^k} = \frac{d^k r(0_-)}{dt^k} + c_{N-1-k}\,(k = 0,\ldots,N-1)$$

特例：若b_1至b_N均为0（方程右边的最高阶为$\delta(t)$），

则c_1至c_N均为0，$c_0 = b_0$。

$$\frac{d^{N-1} r(0_+)}{dt^{N-1}} = \frac{d^{N-1} r(0_-)}{dt^{N-1}} + b_0$$

$$\frac{d^k r(0_+)}{dt^k} = \frac{d^k r(0_-)}{dt^k} \quad (k = 0,\ldots,N-2)$$

冲激函数匹配法自主练习题

（1） $2\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+4r(t)=\frac{de(t)}{dt}$

已知 $e(t)=u(t)$， $r(0\_)=1$， $r'(0\_)=1$， 求 $r(0_+)$， $r'(0_+)$ 。

答案： $r(0_+)=1, r'(0_+)=\frac{3}{2}$

（2） $\frac{d^2r(t)}{dt^2}+5\frac{dr(t)}{dt}+6r(t)=\frac{de(t)}{dt}-2e(t)$

已知 $e(t)=u(t)$ ，$r(0\_)=1$， $r'(0\_)=2$， 求 $r(0_+)$， $r'(0_+)$。

答案： $r(0_+)=1, r'(0_+)=3$

作业

基础题（需提交）：2-1(a)(b)，2-5

加强题（选做，不提交）：2-1(c)(d)