

上节内容

8.6 z 变换与拉普拉斯变换的关系

8.7 利用 z 变换解差分方程

8.8 离散时间系统的系统函数

z平面与s平面的映射关系

$$z = e^{sT} \quad T \text{为序列的时间间隔}$$

将s表示成直角坐标形式，把z表示成极坐标形式

$$s = \sigma + j\omega$$

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = re^{j\theta}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r = e^{\sigma T} = e^{\frac{2\pi\sigma}{\omega_s}} \\ \theta = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s} \end{array} \right.$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \text{ 为重复频率}$$

1) s 平面上的虚轴^{映射} \implies z 平面上的单位圆($r = 1$)

$$\sigma = 0 \quad s = j\omega \quad r = |z| = e^{\sigma T} = 1$$

2) s 平面上的左半平面^{映射} \implies z 平面上的单位圆内($r < 1$)

$$\sigma < 0, s = \sigma + j\omega \quad r = |z| = e^{\sigma T} < 1$$

3) s 平面上的右半平面^{映射} \implies z 平面上的单位圆外($r > 1$)

$$\sigma > 0, s = \sigma + j\omega \quad r = |z| = e^{\sigma T} > 1$$

4) 平行于虚轴的直线^{映射} \implies z 平面上的圆 $\left(\begin{array}{l} \sigma > 0, r > 1 \\ \sigma < 0, r < 1 \end{array} \right)$

5) s 平面上的实轴($\omega=0$)^{映射} $\Rightarrow z$ 平面上的正实轴($\theta=0$)

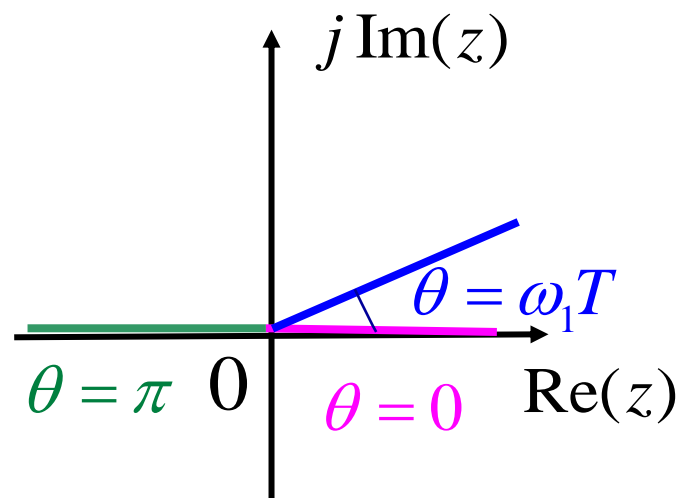
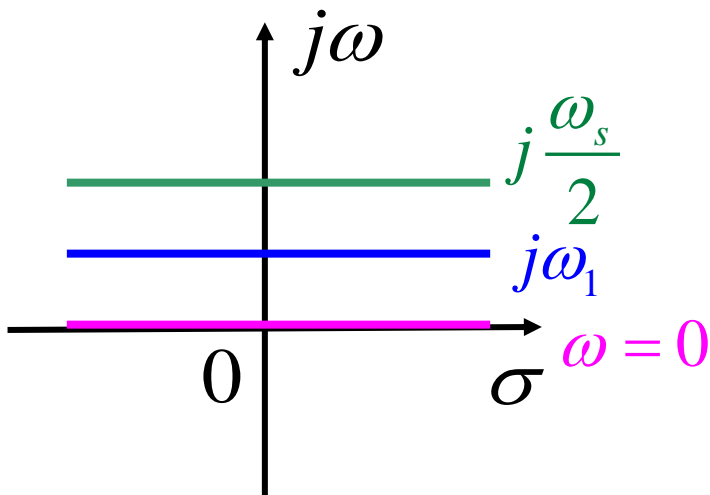
平行于实轴的直线($\omega = \text{常数}$)^{映射} $\Rightarrow z$ 平面上始于原点的射线

通过 $\pm j \frac{k\omega_s}{2}$ ($k=\pm 1, \pm 3, \dots$) 平行于实轴的直线 $\xrightarrow{\text{映射}}$ z 平面上

负实轴 $\left(\begin{matrix} \theta = \pi \\ r \text{任意} \end{matrix} \right)$

$$\theta = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s} = 2\pi \frac{k\omega_s / 2}{\omega_s} = k\pi$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$



6) s 平面上沿虚轴移动^{映射} \Rightarrow z 平面上沿单位圆周期性旋转,

每平移 ω_s , 则沿单位圆转一圈。

$$\theta = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s}$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

即 $s \sim z$ 平面的映射并不是单值的。

$$\omega = 0 \rightarrow \omega_s$$

$$\theta = 0 \rightarrow 2\pi$$

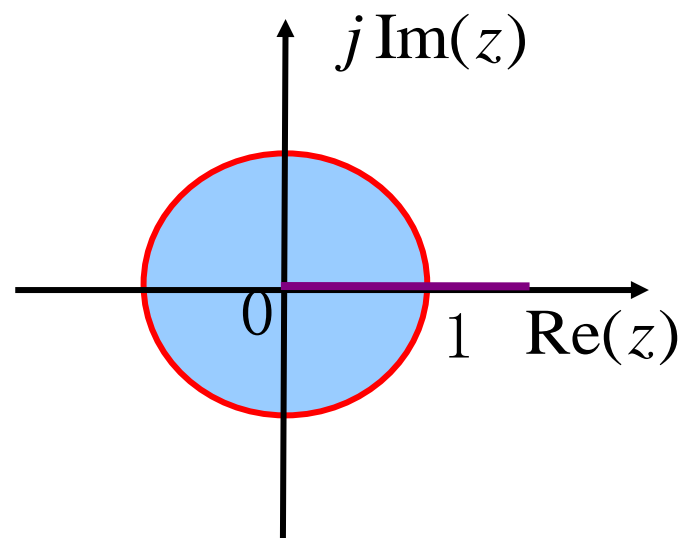
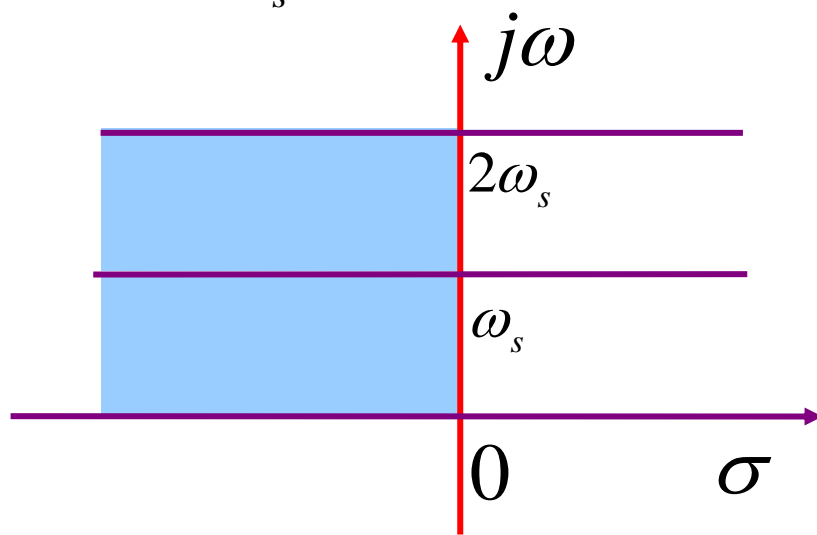
$$\omega = \omega_s \rightarrow 2\omega_s$$

$$\theta = 2\pi \rightarrow 4\pi$$

$$\omega = 0 \rightarrow k\omega_s$$

$$\theta = 0 \rightarrow 2k\pi$$

多圈



$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

求零状态响应:

若激励 $x(n)$ 为因果序列, 则

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} X(z)$$

$$Y_{zs}(z) = X(z) \cdot \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

系统函数:

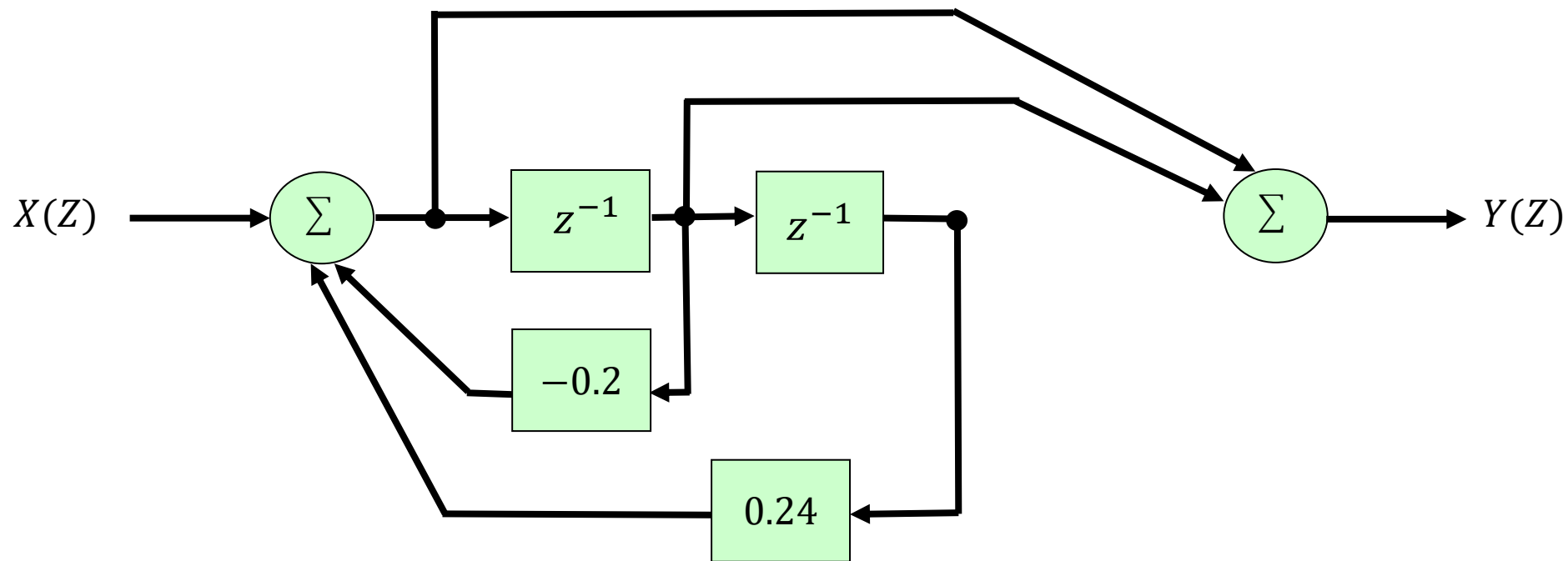
$$H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$$Y_{zs}(z) = X(z) H(z)$$

$$y_{zs}(n) = \mathcal{ZT}^{-1}[X(z)H(z)]$$

求具有下列模拟框图的系统的差分方程：

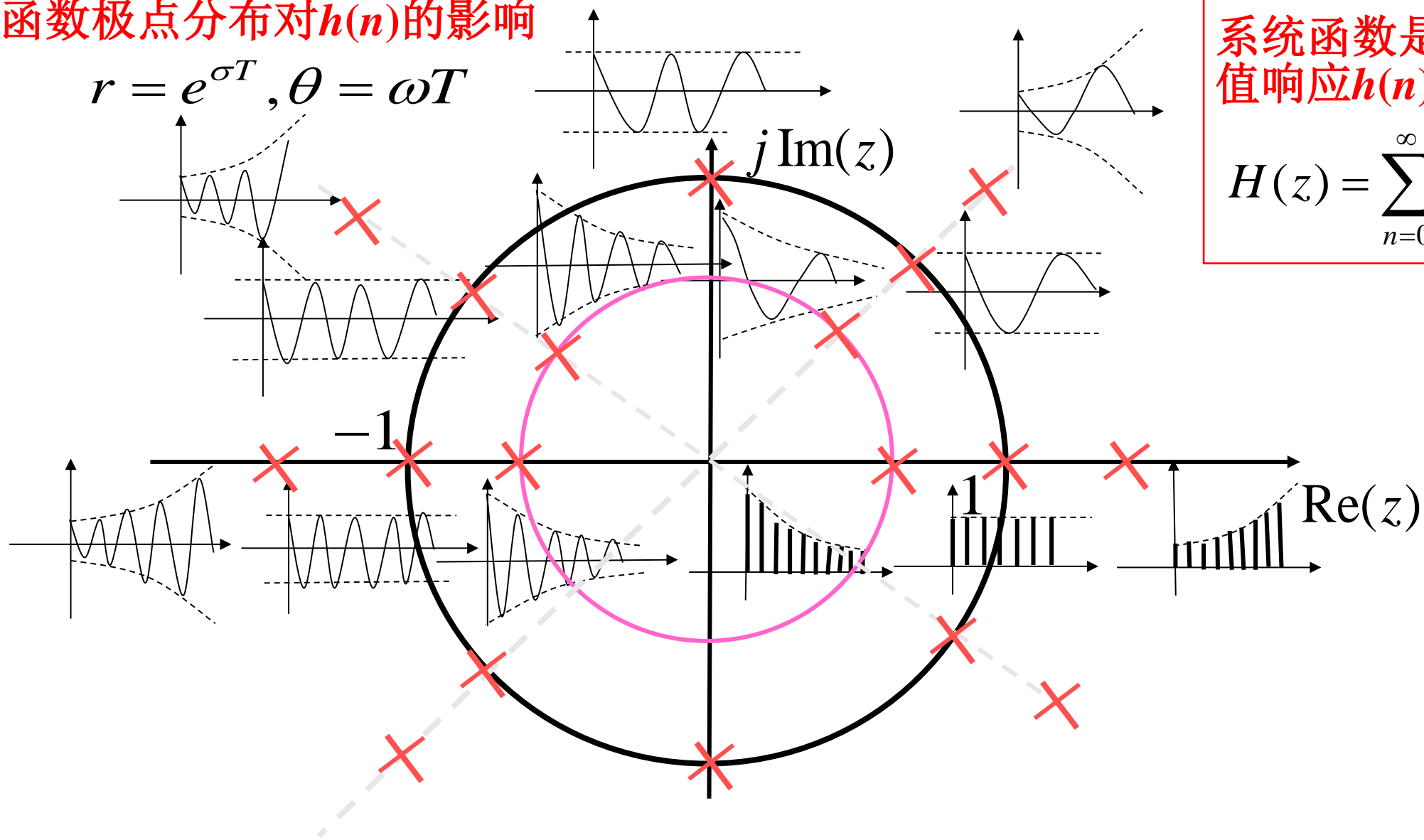
$$y(n) + [\text{填空1}] y(n-1) + [\text{填空2}] y(n-2) = x(n) + [\text{填空3}] x(n-1) + [\text{填空4}] x(n-2)$$



作答

8.8 离散时间系统的系统函数

系统函数极点分布对 $h(n)$ 的影响



离散时间系统的稳定性和因果性

1、时域中系统因果稳定的条件

离散时间系统**稳定的充要条件**是：单位样值响应绝对可和。即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

因果稳定系统的充要条件为： $h(n)$ 是右边序列且绝对可和, 即

$$\begin{cases} h(n) = h(n)u(n) & \text{因果} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty & \text{稳定} \end{cases}$$

2、z域因果稳定的条件

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}, \text{ 其存在要求 } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| < \infty$$

当 $|z|=1$ 时, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$, 恰好满足系统稳定的条件。

因此对于**稳定**系统, $H(z)$ 的**收敛域应包含单位圆** (无论是否为因果系统)。

对于**因果稳定**系统, 收敛域为 $|z| > a$ ($a < 1$) , 即**全部极点位于单位圆内**。

例8-19: 已知 $y(n) + 0.2y(n-1) - 0.24y(n-2) = x(n) + x(n-1)$, 求 $H(z)$ 、 $h(n)$, 讨论此因果系统的收敛域和稳定性。若激励信号为 $u(n)$, 求零状态响应。

解: (1) 求系统函数

差分方程两边做 z 变换可得

$$Y(z) + 0.2z^{-1}Y(z) - 0.24z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$$

整理得
$$\left(1 + \frac{0.2}{z} - \frac{0.24}{z^2}\right)Y(z) = \left(1 + \frac{1}{z}\right)X(z)$$

$$\therefore H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 + z}{z^2 + 0.2z - 0.24} = \frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.6)}$$

(2) 求收敛域和判断稳定性

$$H(z) = \frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.6)} \quad \because z_1 = 0.4, \quad z_2 = -0.6$$

系统为因果系统, $\therefore |z| > 0.6$

收敛域包括单位圆, 系统稳定。

(3) 求单位样值响应 $h(n)$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{1.4}{z-0.4} - \frac{0.4}{z+0.6} \quad H(z) = \frac{1.4z}{z-0.4} - \frac{0.4z}{z+0.6}$$

$$h(n) = [1.4(0.4)^n - 0.4(-0.6)^n]u(n)$$

(4) 求零状态响应

$$x(n) = u(n) \qquad X(z) = \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1)$$

$$Y_{zs}(z) = H(z) X(z) = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)(z-0.4)(z+0.6)}$$

$$Y_{zs}(z) = \frac{2.08z}{z-1} - \frac{0.93z}{z-0.4} - \frac{0.15z}{z+0.6} \quad (|z| > 1)$$

零状态响应

$$y_{zs}(n) = [2.08 - 0.93(0.4)^n - 0.15(-0.6)^n]u(n)$$

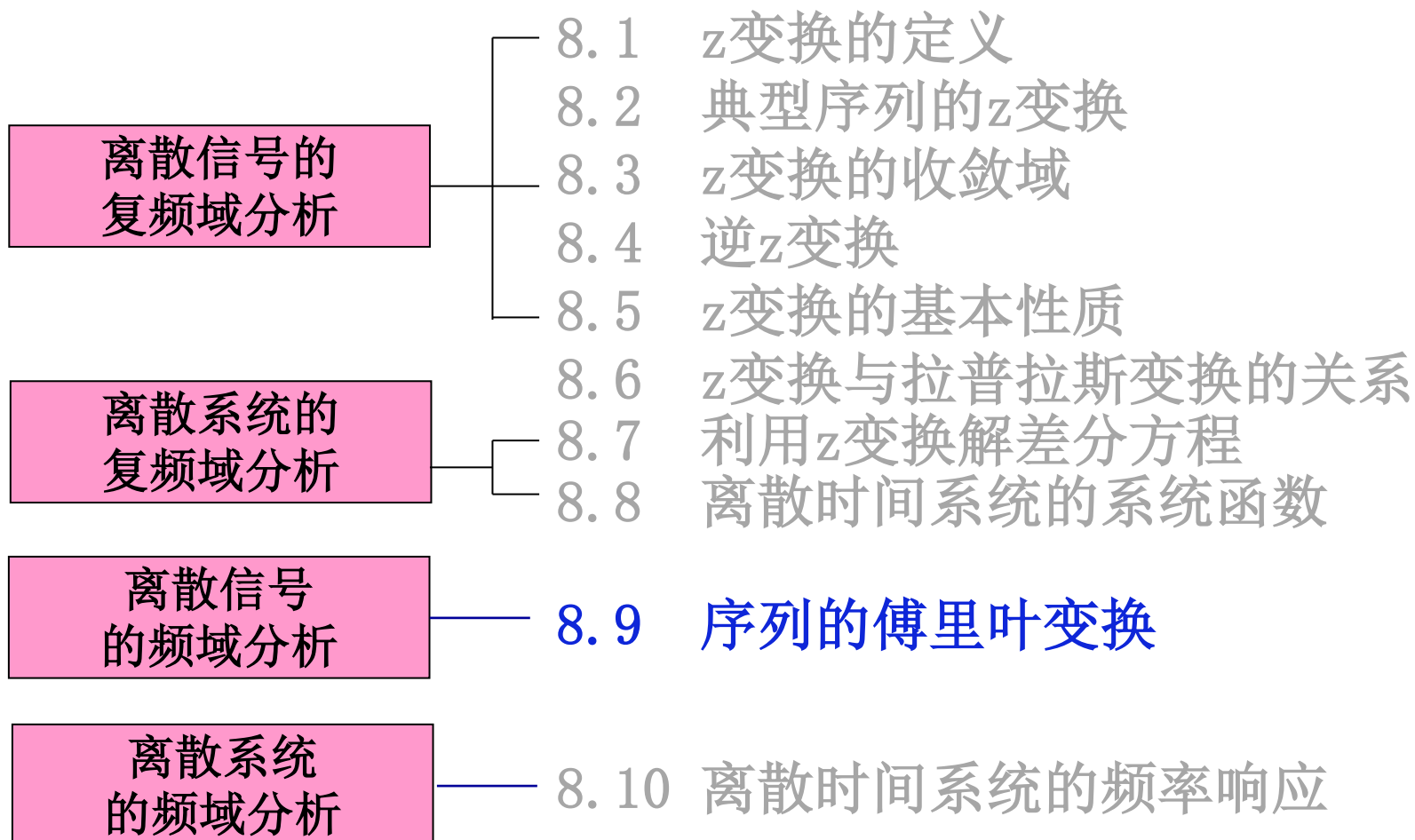
本次课内容

8.9 序列的傅里叶变换

8.10 离散时间系统的频率响应

本次课目标

1. 理解**模拟角频率**和**数字角频率**的区别，理解序列的傅里叶变换的**周期性**；
2. 熟练运用离散时间系统的频率响应求**稳态响应**；
3. 熟练运用系统函数的**零极点分布图**粗略画出**频响特性曲线**。



8.9.1 定义

序列的傅里叶变换也称离散时间的傅里叶变换 (**DTFT, Discrete-time Fourier transform**)，为研究离散时间系统的频率响应作准备。

连续信号的傅里叶变换

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

离散序列的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

频率的比较

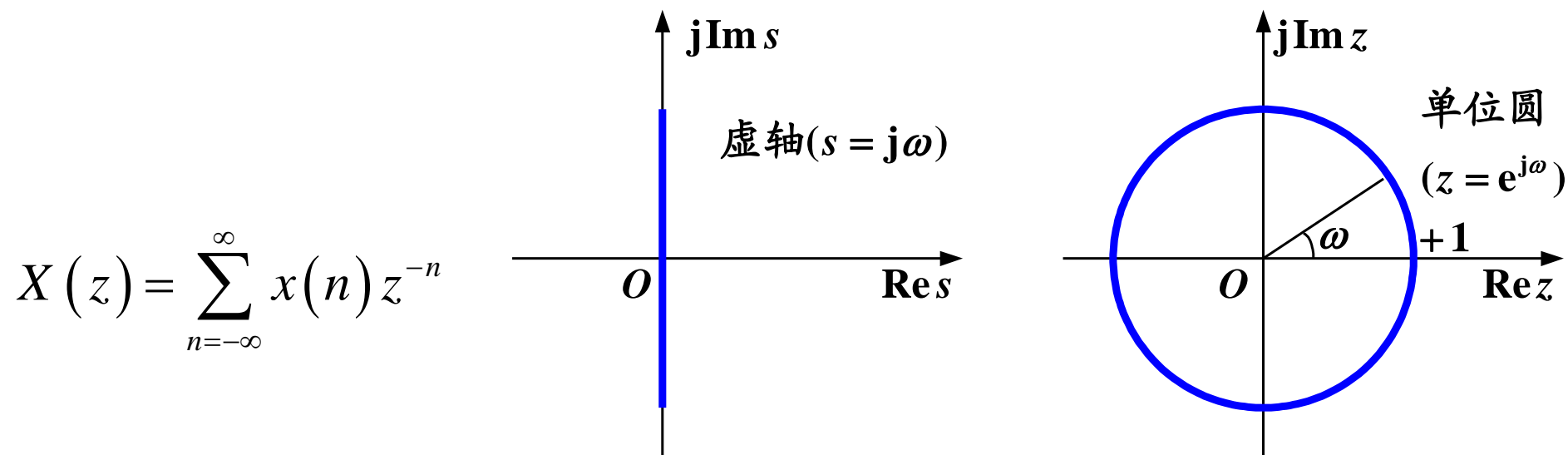
模拟角频率 Ω ，量纲：弧度/秒；

数字角频率 ω ，量纲：**弧度**；

$e^{j\omega}$ 是周期为 2π 的周期函数

$$z = e^{sT} = e^{j\Omega T} = e^{j\omega}$$
$$\omega = \Omega T$$

DTFT与z变换的关系



令 $z = e^{j\omega}$, $|z| = 1$, 即单位圆上的 z 变换就是 DTFT

周期为 2π

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

DTFT的逆变换

$$\begin{aligned}x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} X(z) z^{n-1} dz \\&= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|e^{j\omega}|=1} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} \cdot e^{-j\omega} d(e^{j\omega}) \\&= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} \cdot e^{-j\omega} j e^{j\omega} d\omega \\&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega\end{aligned}$$

$$\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega}$$

$$\text{IDTFT}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$$

8.9.2 序列的频谱

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \quad X(e^{j\omega}) \text{ 为 } x(n) \text{ 的频谱}$$

$|X(e^{j\omega})|$ 为 $x(n)$ 的幅度谱, $\varphi(\omega)$ 为相位谱。两者都为 ω 的连续函数。

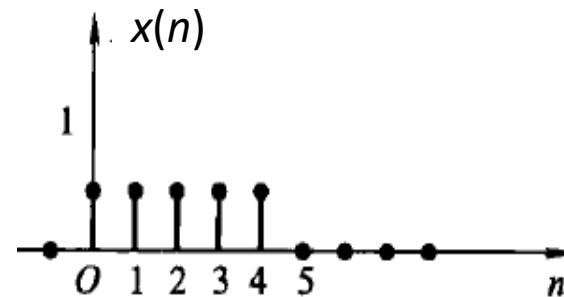
因为 $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$, $X(e^{j\omega})$ 是以 2π 为周期的周期函数。

实序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的实部偶对称、虚部奇对称, 幅度谱偶对称、相位谱奇对称。

例8-21: 已知序列 $x(n]=u(n)-u(n-5)$, 求其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 。

解:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^4 e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j5\omega}}{1 - e^{-j\omega}}$$



$$= \frac{e^{-j5\omega/2}}{e^{-j\omega/2}} \cdot \frac{e^{j5\omega/2} - e^{-j5\omega/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} = e^{-j2\omega} \cdot \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

$$= |X(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

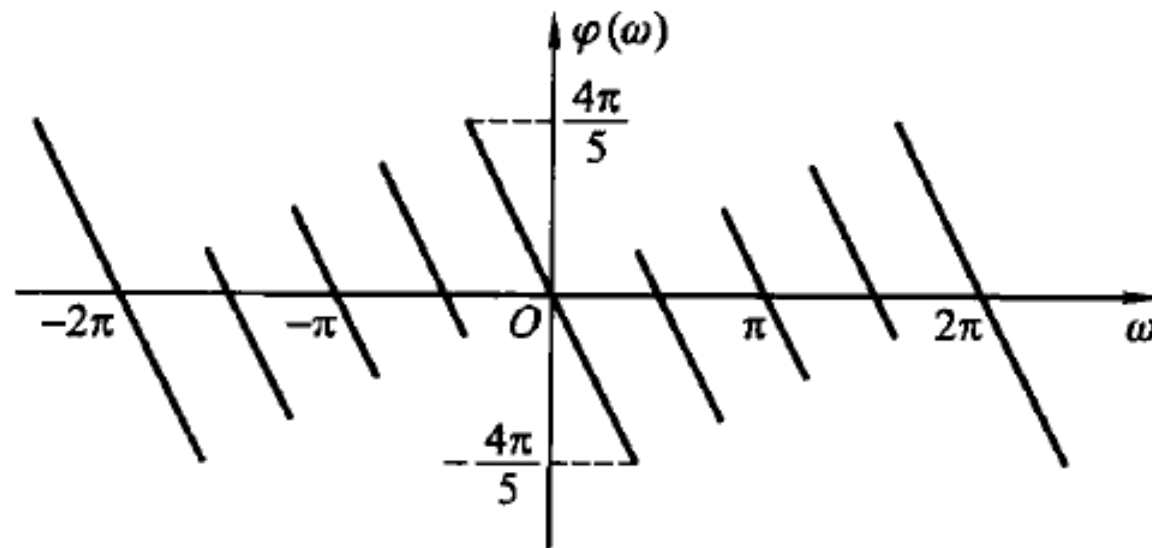
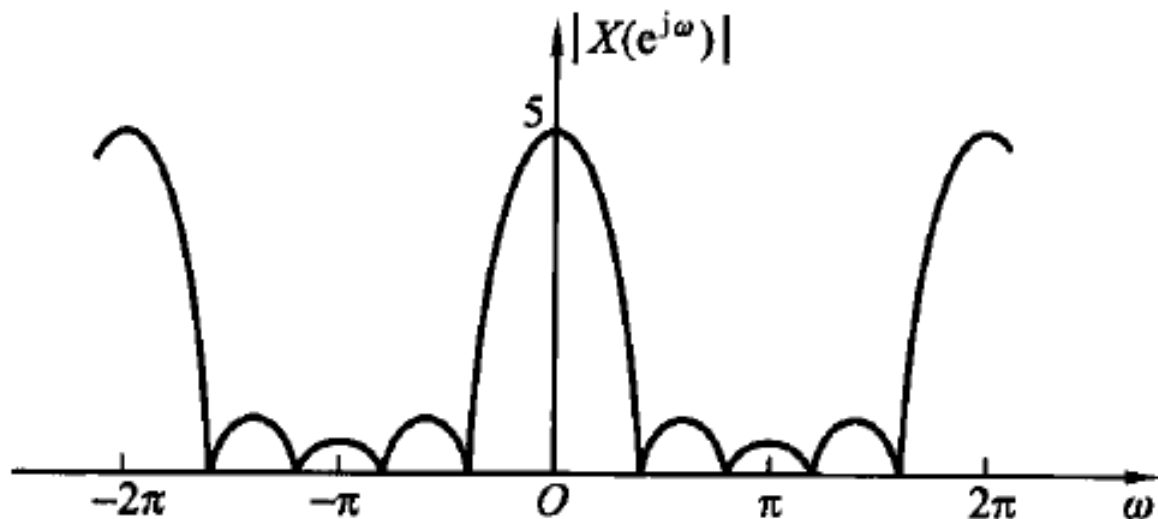
$$|X(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right| \quad \varphi(\omega) = -2\omega + \arg \left[\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right]$$

↑
arg[]--方框内表达式的相移

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right|$$

$$\varphi(\omega) = -2\omega + \arg \left[\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right]$$

$$= \begin{cases} -2\omega & \omega \in [0, 2\pi/5) \\ -2\omega + \pi & \omega \in [2\pi/5, 4\pi/5) \\ -2\omega + 2\pi & \omega \in [4\pi/5, 6\pi/5) \\ -2\omega + 3\pi & \omega \in [6\pi/5, 8\pi/5) \\ -2\omega + 4\pi & \omega \in [8\pi/5, 2\pi) \end{cases}$$

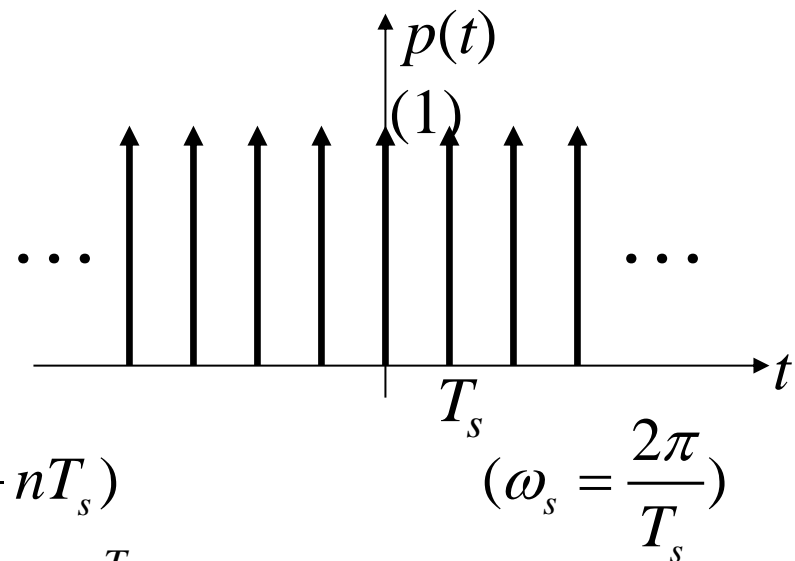


抽样信号的傅里叶变换

令连续信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(\Omega)$

抽样脉冲 $p(t)$ 的傅里叶变换为 $P(\Omega)$

抽样后信号 $f_s(t)$ 的傅里叶变换为 $F_s(\Omega)$



抽样信号: $f_s(t) = f(t)p(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$

$$P(\Omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\Omega - n\omega_s) \quad \text{其中} \quad P_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s}$$

$$F_s(\Omega) = \frac{1}{2\pi} F(\Omega) * P(\Omega) = \frac{1}{2\pi} F(\Omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\omega_s)$$

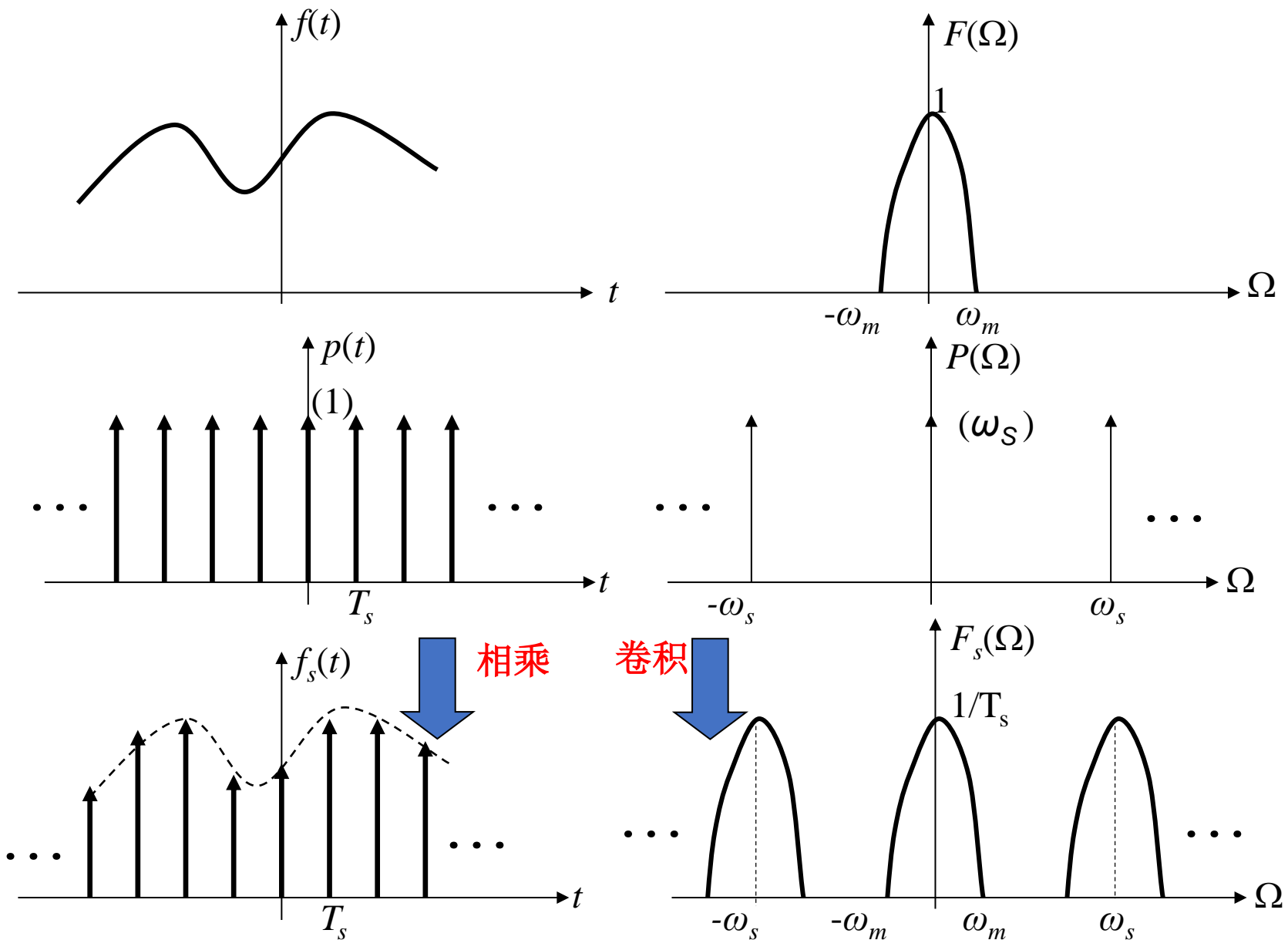
$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\Omega - n\omega_s)$$

← $F_s(\Omega)$ 是周期为 ω_s 的周期函数。

$$\omega = \Omega T_s, \quad \omega_s T_s = 2\pi$$

$F_s(e^{j\omega}) = F_s(e^{j\Omega T_s})$ 是周期为 2π 的周期函数。

8.9 序列的傅里叶变换 (DTFT)



8.9.3 DTFT存在的条件

(1) 若要DTFT存在，就要求对于全部的 ω 有 $|X(e^{j\omega})| < \infty$ 。

$$|X(e^{j\omega})| = |\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |e^{-j\omega n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

这表明若序列绝对可和，则傅里叶变换存在。但由于上式存在不等式缩放，

绝对可和仅是序列傅里叶变换存在的充分条件。

(2) 若序列平方可和，即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$ ，序列能量有限，此时有

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$ 均方收敛于 $X(e^{j\omega})$ ，序列的傅里叶变换也存在。

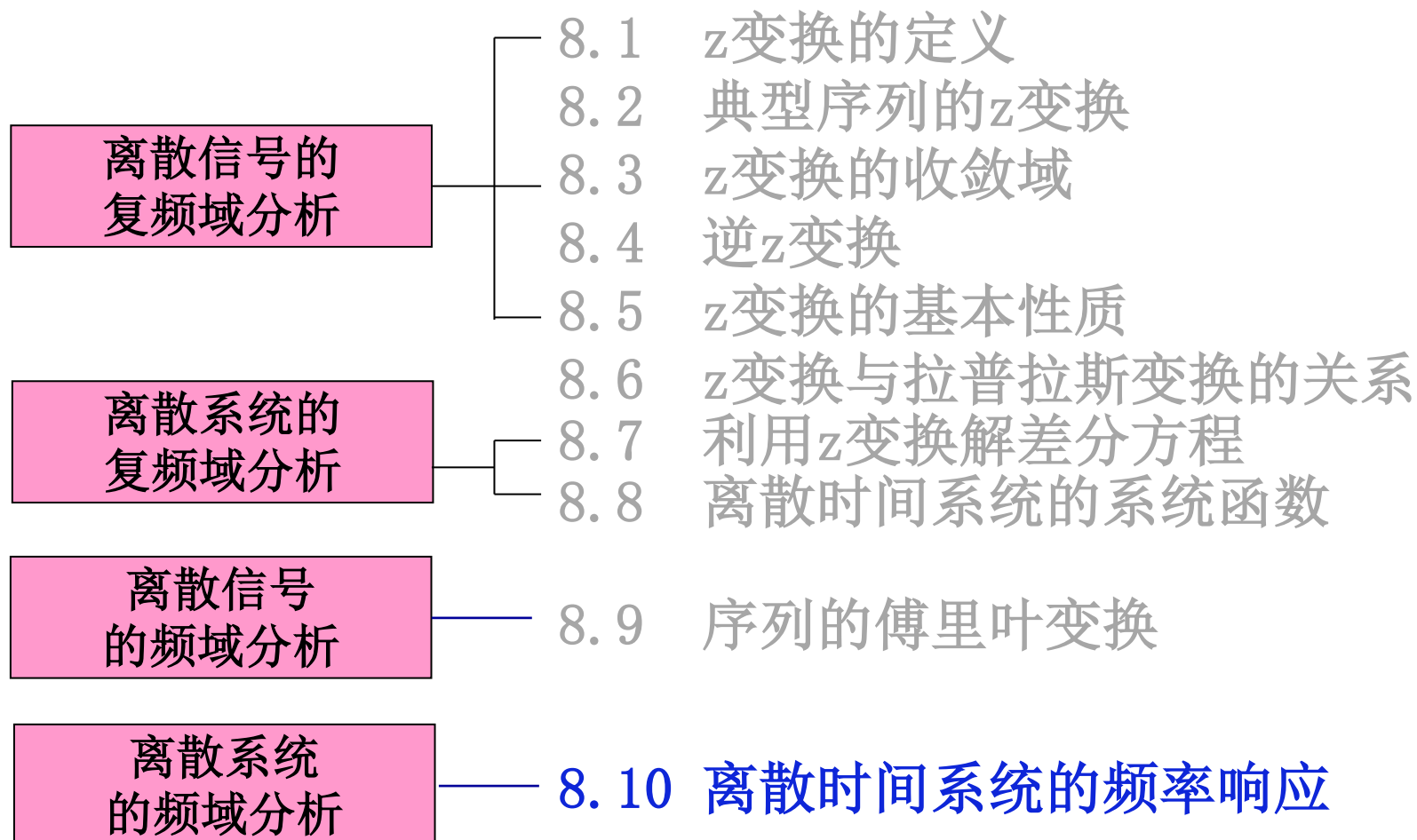
上述两条件仅是序列傅里叶变换存在的充分条件，不满足这两个条件的某些序列（如周期性序列、单位阶跃序列），只要引入单位样值信号 $\delta(n)$ ，也可以得到它们的傅里叶变换。

序列傅里叶变换存在的充分必要条件至今尚未找到。

下列关于序列傅里叶变换的说法中，**错误**的是（ ）

- ☐ A 实序列的傅里叶变换满足共轭对称性，即 $X(e^{j\omega})$ 的实部偶对称、虚部奇对称，模值偶对称、相角奇对称。
- ☐ B 序列满足绝对可和条件时一定满足能量受限，而能量受限不能保证绝对可和。
- ☒ C $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的复函数且周期为 2π ，但其模值与相角不一定以 2π 为周期。
- ☐ D 序列傅里叶变换的帕塞瓦尔定理表明，序列的时域总能量等于频域一周期内的总能量。

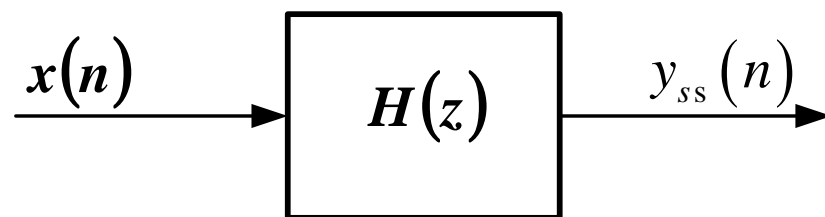
提交



8.10.1 离散系统频响特性的意义

1、频响特性的定义

频率响应特性：离散系统在正弦序列作用下的**稳态响应（steady state, SS）**随频率变化的情况。



稳定的离散因果系统

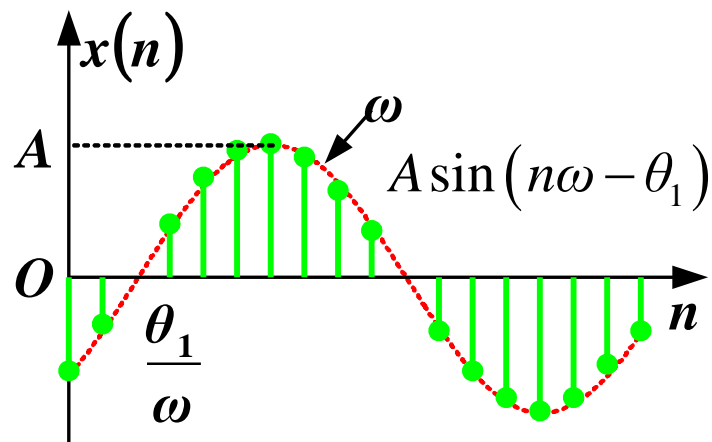
$$x(n) = A \sin(n\omega_c)u(n)$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \left| H(e^{j\omega}) \right| e^{j\varphi(\omega)}$$

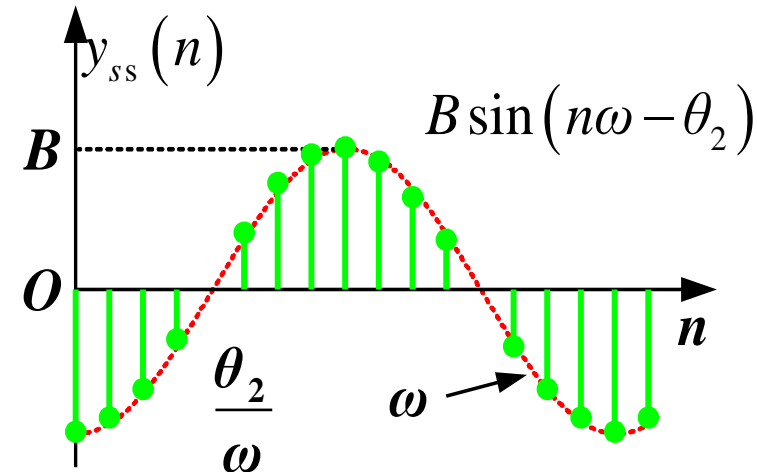
$$y_{ss}(n) = A \left| H(e^{j\omega_c}) \right| \sin[n\omega_c + \varphi(\omega_c)]u(n)$$

证明：见教材95-96页。

激励



正弦稳态
响应



$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} = \frac{B}{A} e^{j[-(\theta_2 - \theta_1)]}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{B}{A} \quad \varphi(\omega) = -(\theta_2 - \theta_1)$$

频响特性的意义：表示输出正弦序列的幅度和相位相对于输入正弦序列的变化。

2、由系统函数得到频响特性

系统函数在单位圆上的 z 变换即为系统的频率响应特性：

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

$|H(e^{j\omega})| \sim \omega$: 幅度响应或幅频特性

输出正弦序列与输入正弦序列的**幅度之比**

$\varphi(\omega) \sim \omega$: 相位响应或相频特性

输出正弦序列对输入正弦序列的**相移**

$e^{j\omega}$ 为周期函数，所以 $H(e^{j\omega})$ 为周期函数，其周期为 2π 是有别于连续系统的一个突出特点。

例8-22: 已知离散时间系统的系统函数 $H(z) = \frac{z-1}{(z-1/3)(z-1/2)} \quad \left(|z| > \frac{1}{2}\right)$, 求激励为 $x(n) = \cos(\pi n / 2)u(n)$ 的正弦稳态响应 $y_{ss}(n)$ 。

解: 系统的频率响应为 $H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega} - 1}{(e^{j\omega} - 1/3)(e^{j\omega} - 1/2)}$

$$H(e^{j\pi/2}) = \frac{e^{j\pi/2} - 1}{(e^{j\pi/2} - 1/3)(e^{j\pi/2} - 1/2)} = \frac{j-1}{(j-1/3)(j-1/2)} = \frac{6-1+j}{5-1-j} = \frac{6}{5} e^{-j\pi/2}$$

$$|H(e^{j\pi/2})| = \frac{6}{5} \quad \varphi(\pi/2) = -\frac{\pi}{2}$$

$$y_{ss}(n) = |H(e^{j\pi/2})| \cos[\pi n / 2 + \varphi(\pi/2)] u(n) = \frac{6}{5} \sin(\pi n / 2) u(n)$$

3、频率响应与单位样值响应的关系

离散时间系统的频率响应是系统的单位样值响应的傅里叶变换。

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

物理意义： $H(e^{j\omega})$ 是以 $h(n)$ 为加权系数，对各次谐波进行改变的情况。

由于 $h(n)$ 一般是实序列，所以 $|H(e^{j\omega})|$ 是偶函数， $\varphi(\omega)$ 是奇函数。

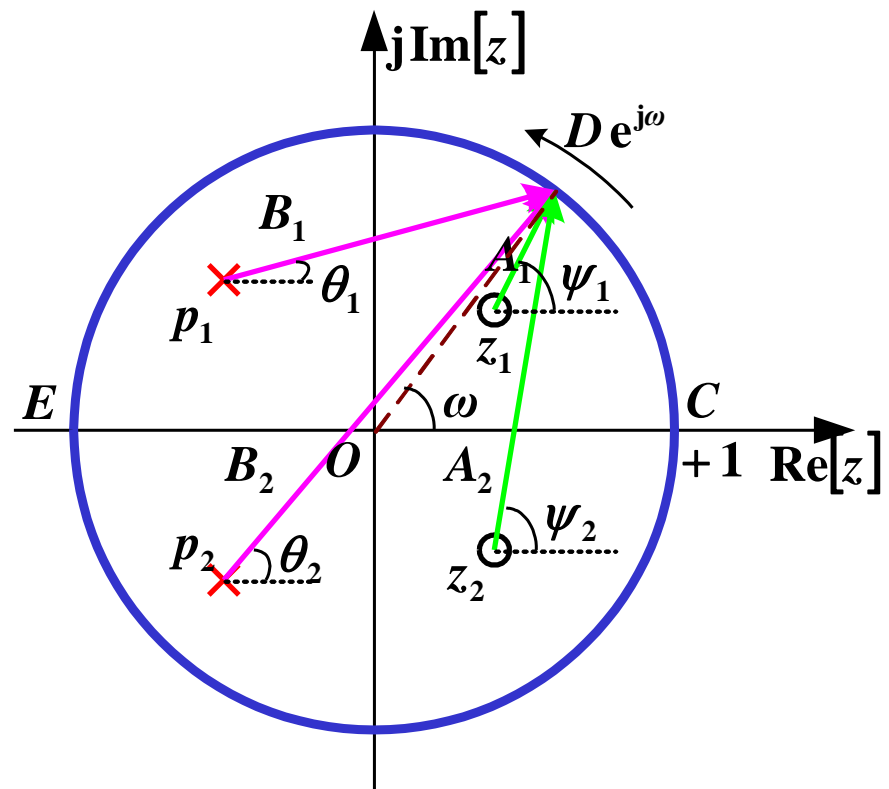
8.10.2 频响特性的几何确定

$$H(z) = \frac{\prod_{r=1}^M (z - z_r)}{\prod_{k=1}^N (z - p_k)}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - z_r)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - p_k)} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\text{令 } e^{j\omega} - z_r = A_r e^{j\psi_r}$$

$$e^{j\omega} - p_k = B_k e^{j\theta_k}$$



$$\text{幅频响应 } |H(e^{j\omega})| = \frac{\prod_{r=1}^M A_r}{\prod_{k=1}^N B_k} \quad \text{相频响应 } \varphi(\omega) = \sum_{r=1}^M \psi_r - \sum_{k=1}^N \theta_k$$

说明:

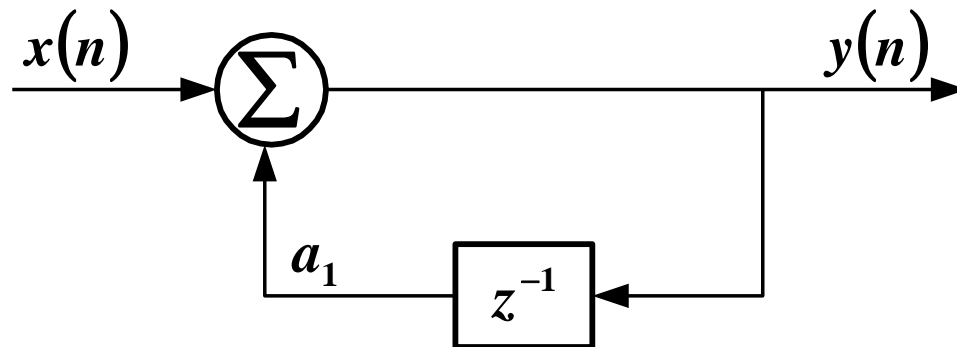
(1) 位于 $z = 0$ 处的零点或极点对幅频响应不产生作用，因而在 $z = 0$ 处加入或去除零极点，不会使幅频响应发生变化，但会影响相频响应。

(2) 当 $e^{j\omega}$ 点旋转到某个极点 p_i 附近时，如极点矢量的长度 B_i 最短，则频率响应在该点可能出现峰值。

- 若极点 p_i 越靠近单位圆， B_i 愈短，则频率响应在峰值附近愈尖锐；
- 若极点 p_i 落在单位圆上， $B_i = 0$ ，则频率响应的峰趋于无穷大。

(3) 零点的作用与极点相反。

例8-23:求下图所示一阶离散因果稳定系统的频率响应并分析其特性。



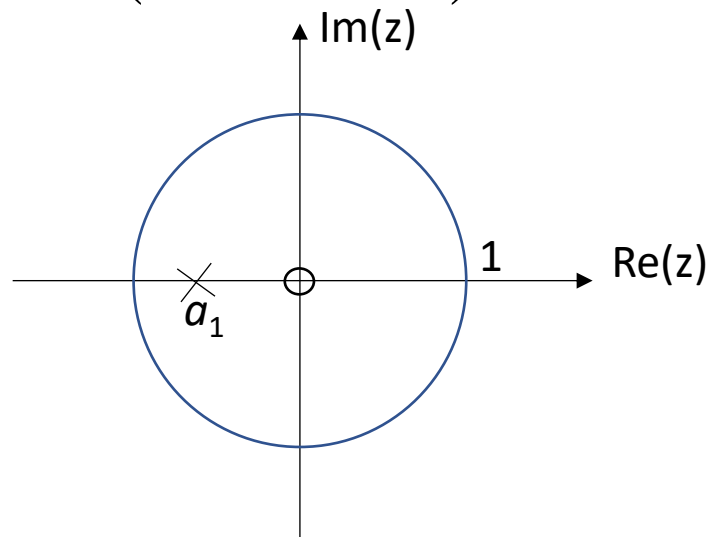
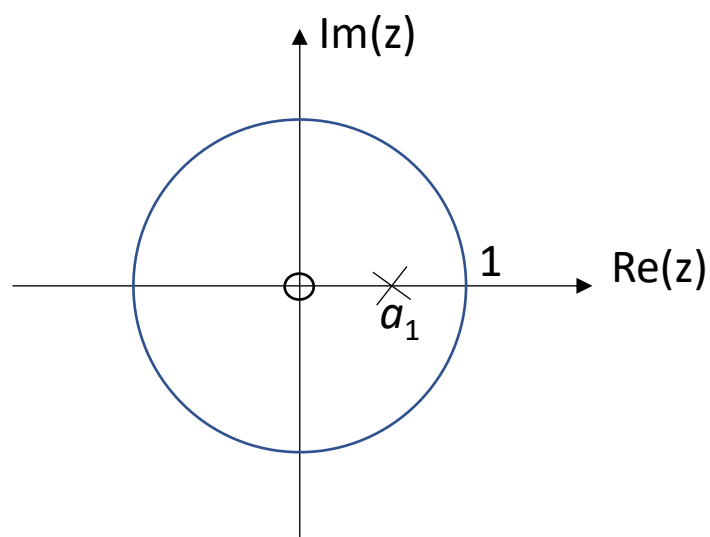
解: 差分方程 $y(n) - a_1 y(n-1) = x(n)$

系统为因果系统, $H(z) = \frac{z}{z - a_1} \quad |z| > |a_1|$

为了保证该系统稳定, 要求 $|a_1| < 1$ 。

单位样值响应 $h(n) = a_1^n u(n)$

频率响应 $H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a_1} = \frac{1}{(1 - a_1 \cos \omega) + j a_1 \sin \omega}$



$0 < a_1 < 1$ 时，系统为低通特性； $-1 < a_1 < 0$ 时，系统为高通特性。

幅频响应 $|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a_1^2 - 2a_1 \cos \omega}}$

相频响应 $\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{a_1 \sin \omega}{1 - a_1 \cos \omega}\right)$

例8-24：求图（a）所示二阶离散因果系统的频率响应并粗略画出幅频响应曲线。

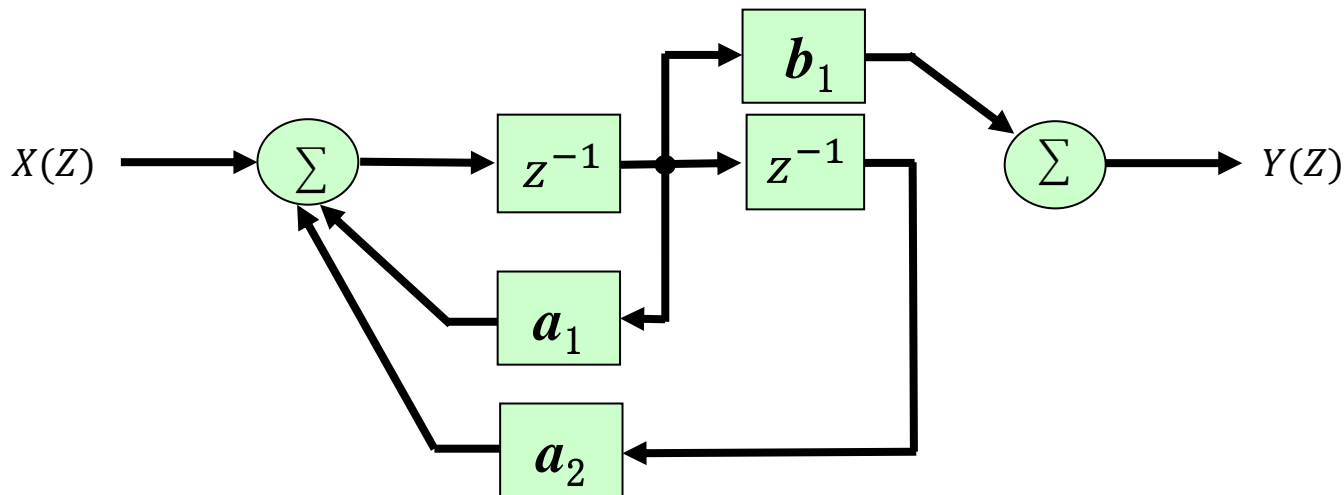
解：系统函数

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

该系统的差分方程为

$$y(n) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) = b_1 x(n-1]$$

(a)



若 a_1, a_2 为实系数，且 $a_1^2 + 4a_2 < 0$ ，则 $H(z)$ 含有一对共轭极点： $p_{1,2} = r e^{\pm j\theta}$

对此因果系统， $H(z)$ 的收敛域应为 $|z| > r$ 。

容易求得 r, θ 与系数 a_1, a_2 的关系为

$$(1 - r e^{j\theta} z^{-1})(1 - r e^{-j\theta} z^{-1}) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}$$

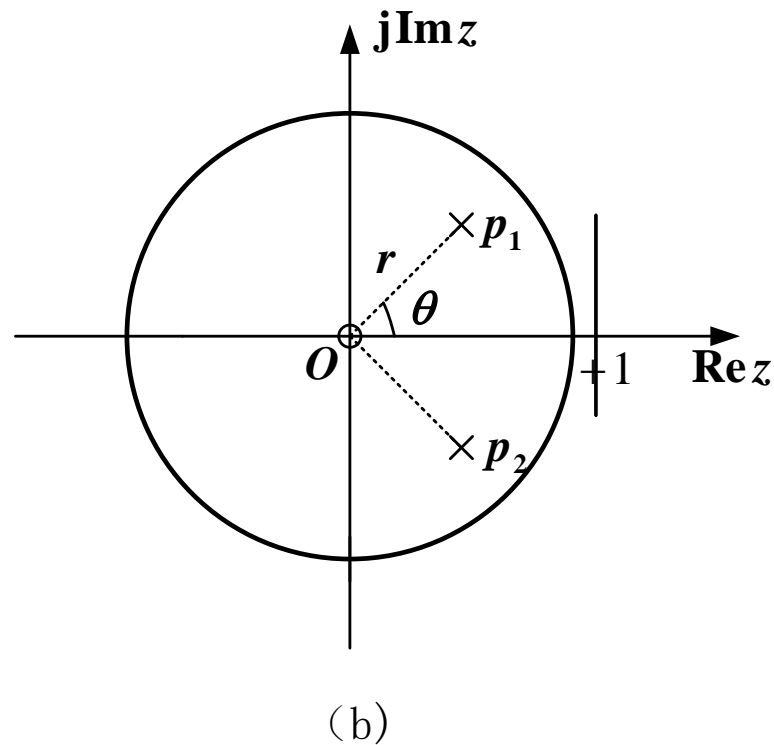
$$\text{得到: } r^2 = -a_2$$

$$2r \cos \theta = a_1$$

于是 $H(z)$ 可写成

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{(1 - r e^{j\theta} z^{-1})(1 - r e^{-j\theta} z^{-1})}$$

$H(z)$ 除一对共轭极点外，还在 $z = 0$ 处有一个零点，如图(b)所示。



若把 $H(z)$ 展成部分分式, 得

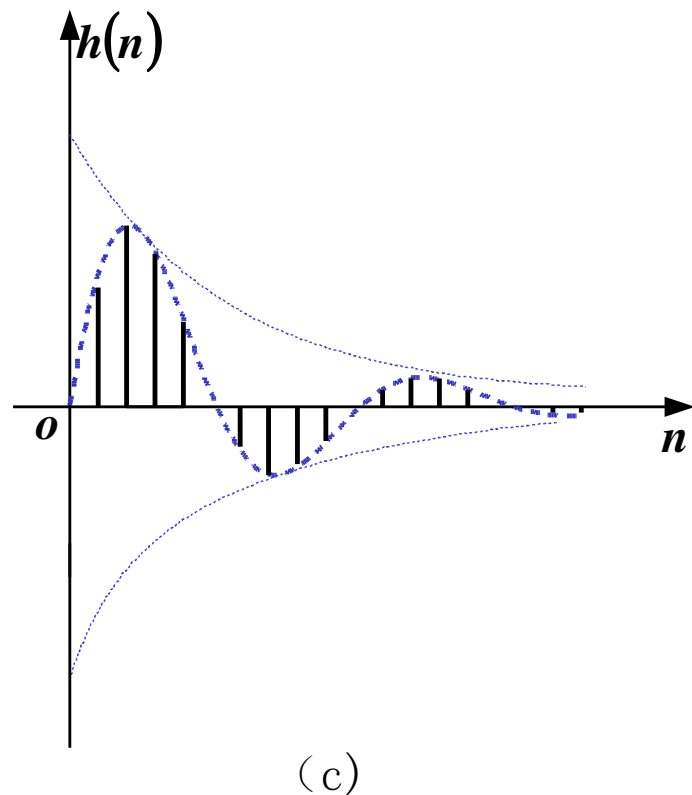
$$H(z) = A \left(\frac{1}{1 - r e^{j\theta} z^{-1}} - \frac{1}{1 - r e^{-j\theta} z^{-1}} \right)$$

其中
$$A = \frac{b_1}{2j r \sin \theta}$$

对 $H(z)$ 进行逆变换, 单位样值响应为

$$\begin{aligned} h(n) &= A \left(r^n e^{jn\theta} - r^n e^{-jn\theta} \right) u(n) \\ &= 2j A r^n \sin(n\theta) \cdot u(n) = \frac{b_1 r^{n-1}}{\sin \theta} \cdot \sin(n\theta) u(n) \end{aligned}$$

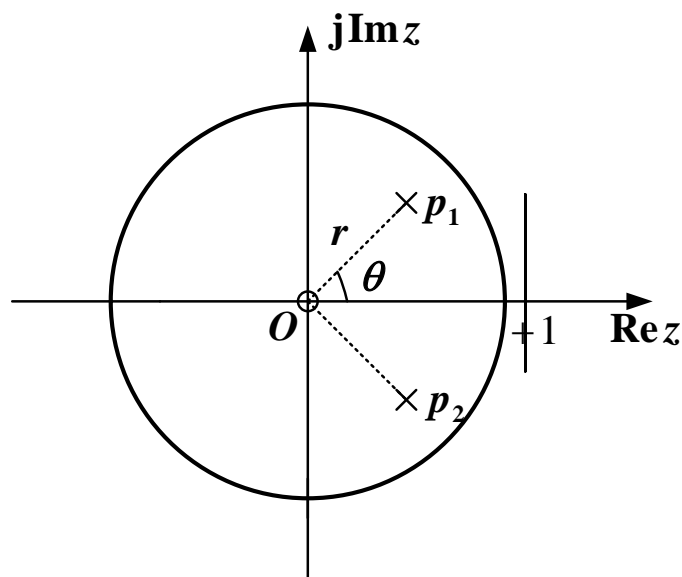
如图(c)所示, 若 $r < 1$, 极点位于单位圆内, $h(n)$ 为衰减型, 此系统是稳定的。



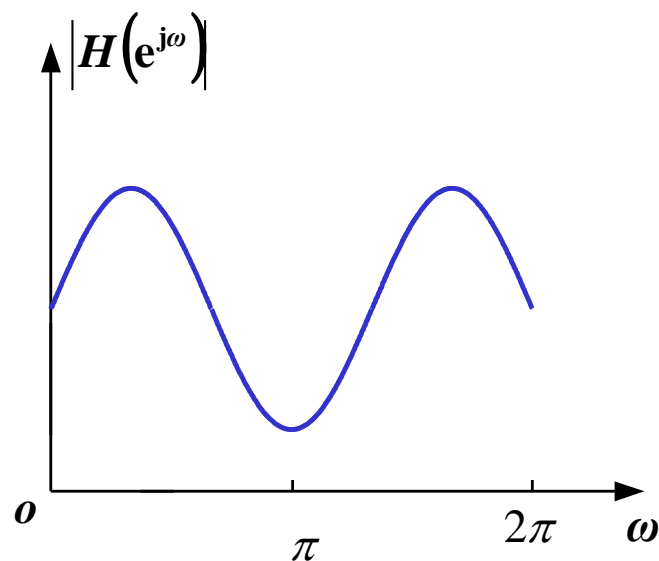
系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_1 e^{-j\omega}}{1 - a_1 e^{-j\omega} - a_2 e^{-2j\omega}}$$

根据 $H(z)$ 的零极点分布，通过几何方法可以大致估计出幅频响应的形状，如图(d)所示。



(b)



(d)

带通滤波器

某离散系统的差分方程为 $y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$ ，该系统的单位样值响应为 ()

- ☐ A $h(n) = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{10}{3} \right)^n - \frac{1}{4} \left(\frac{7}{3} \right)^n \right] u(n)$
- ☐ B $h(n) = \left[\frac{10}{3} \left(\frac{1}{8} \right)^n - \frac{7}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^n \right] u(n)$
- ☒ C $h(n) = \left[\frac{10}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{7}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] u(n)$
- ☐ D $h(n) = \left[\frac{1}{8} \left(\frac{10}{3} \right)^n - \frac{3}{4} \left(\frac{7}{3} \right)^n \right] u(n)$

提交

例8-25： 已知离散系统差分方程表示式

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$$

- 1) 求系统函数和单位样值响应； 2) 画出系统函数的零、极点分布图；
3) 粗略画出幅频响应特性曲线； 4) 画出系统的模拟框图。

解： 1) 系统函数

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{z(z + \frac{1}{3})}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}$$

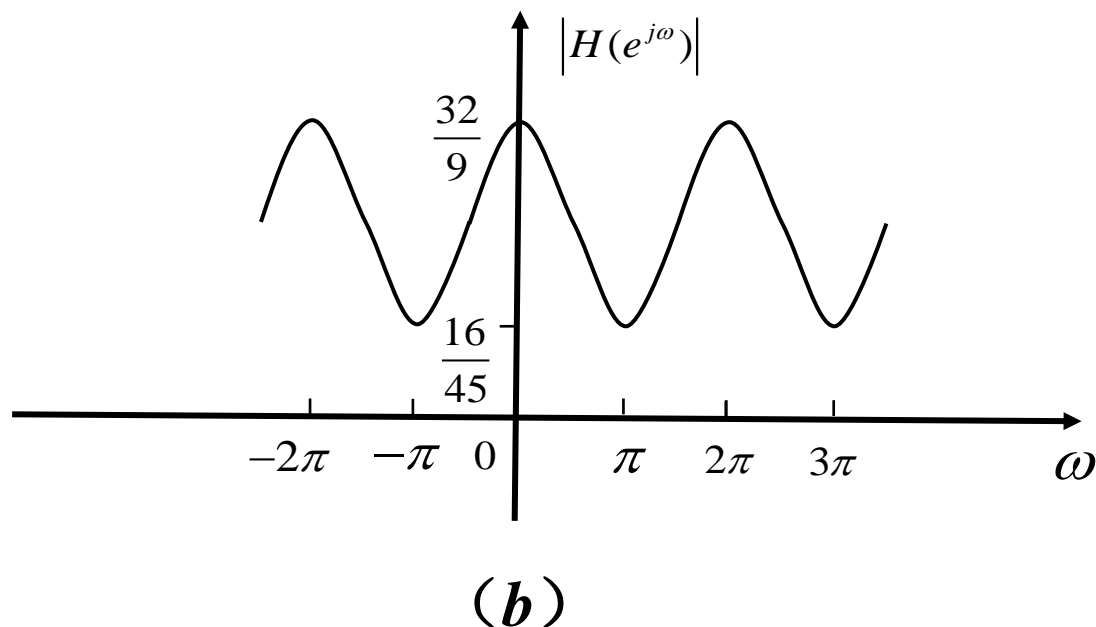
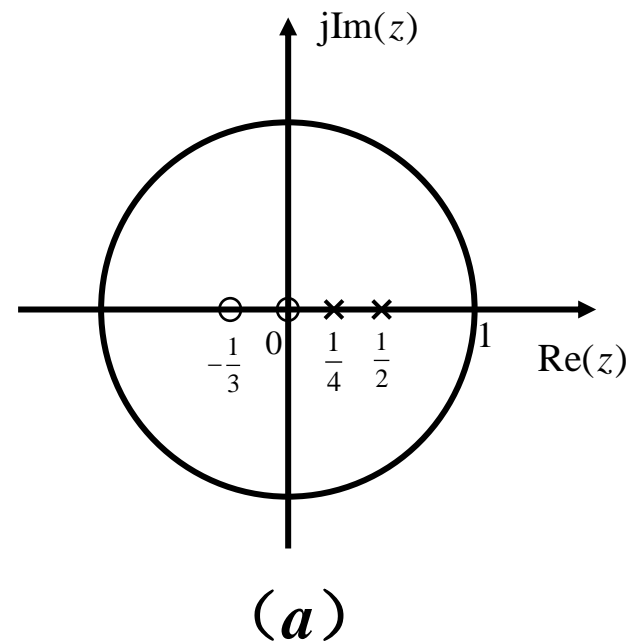
$$= \frac{10}{3} \left(\frac{z}{z - \frac{1}{2}} \right) - \frac{7}{3} \left(\frac{z}{z - \frac{1}{4}} \right) \quad (|z| > \frac{1}{2})$$

单位样值响应 $h(n) = z^{-1}[H(z)] = \left[\frac{10}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \frac{7}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n \right] u(n)$

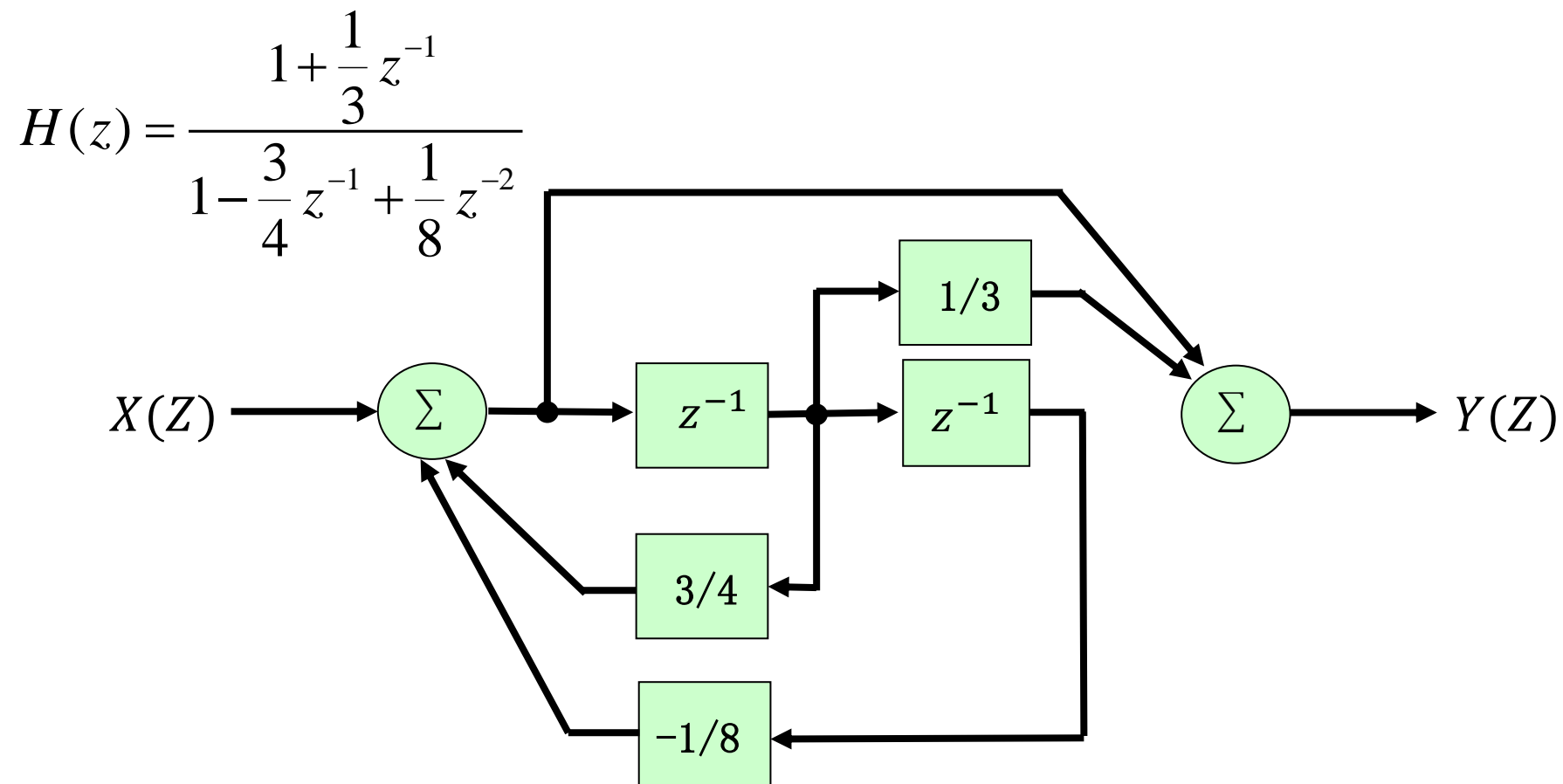
$$2) \quad H(z) = \frac{z(z + \frac{1}{3})}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} = \frac{z(z + \frac{1}{3})}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})}$$

零极点分布如图 (a) 所示。

3) 由零极点分布得系统幅频响应如图 (b) 所示。



4) 由差分方程或系统函数得到系统结构框图如图 (c) 所示。



(c)

8.10.3 滤波器介绍

滤波器的作用：

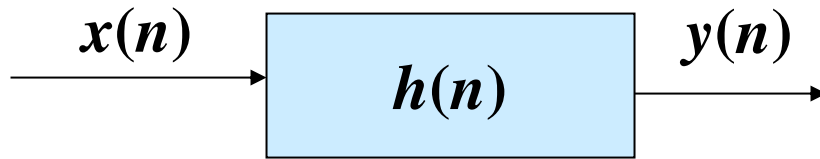
- 1) 去除信号中不需要的部分(信号分离)，如随机噪声；
- 2) 提取信号中的有用部分(信号恢复)，如提取某一频率段内的成分。

从系统角度看，滤波器分为模拟滤波器(analog filter, AF)和数字滤波器(digital filter, DF)两大类。它们都是可实现的**线性时不变系统**。两类滤波器在物理组成和工作方式上有很大不同。

➤ **模拟滤波器**：利用模拟电路对模拟信号做滤波处理。模拟滤波器只能用硬件实现，其元件是R,L,C及运算放大器或开关电容等。

➤ **数字滤波器**：利用离散时间系统对数字信号做滤波处理。数字滤波器既可以用**硬件**实现(数字信号处理器)，也可以用**计算机软件**来实现。其在体积、重量、精度、稳定性、可靠性、存储功能、灵活性以及性能价格比等方面明显优于模拟滤波器。

8.10.4 数字滤波器的工作原理



LTI系统的输出为:

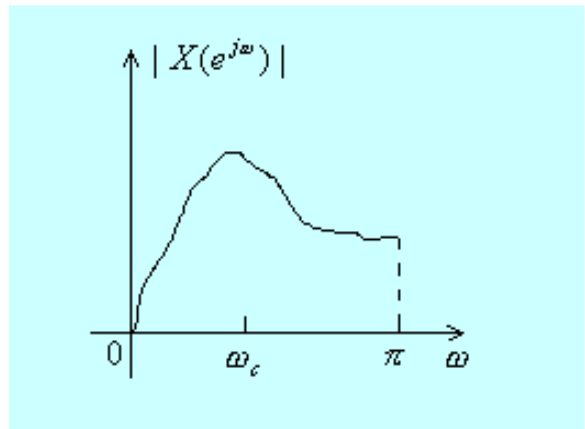
$$y(n) = x(n) * h(n) = \text{IDTFT}[X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})]$$

输入序列的频谱 $X(e^{j\omega})$ 经过滤波器 $H(e^{j\omega})$ 后变成 $X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

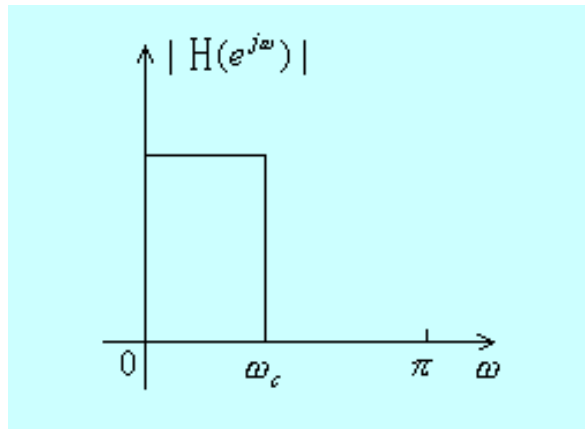
选取 $H(e^{j\omega})$,使滤波器输出 $X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 符合我们的要求,

这就是数字滤波器的工作原理。

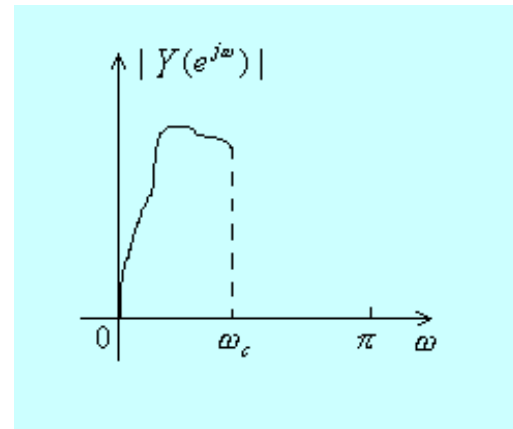
滤波原理



(a) $|X(e^{j\omega})|$



(b) $|H(e^{j\omega})|$



(c) $|Y(e^{j\omega})|$

$x(n)$ 通过系统 $h(n)$ 后使输出 $y(n)$ 中不再含有 $|\omega| > \omega_c$ 的频率成分，而使 $|\omega| < \omega_c$ 的成分“不失真的通过”。

8.10.5 经典滤波器和现代滤波器

1、经典滤波器

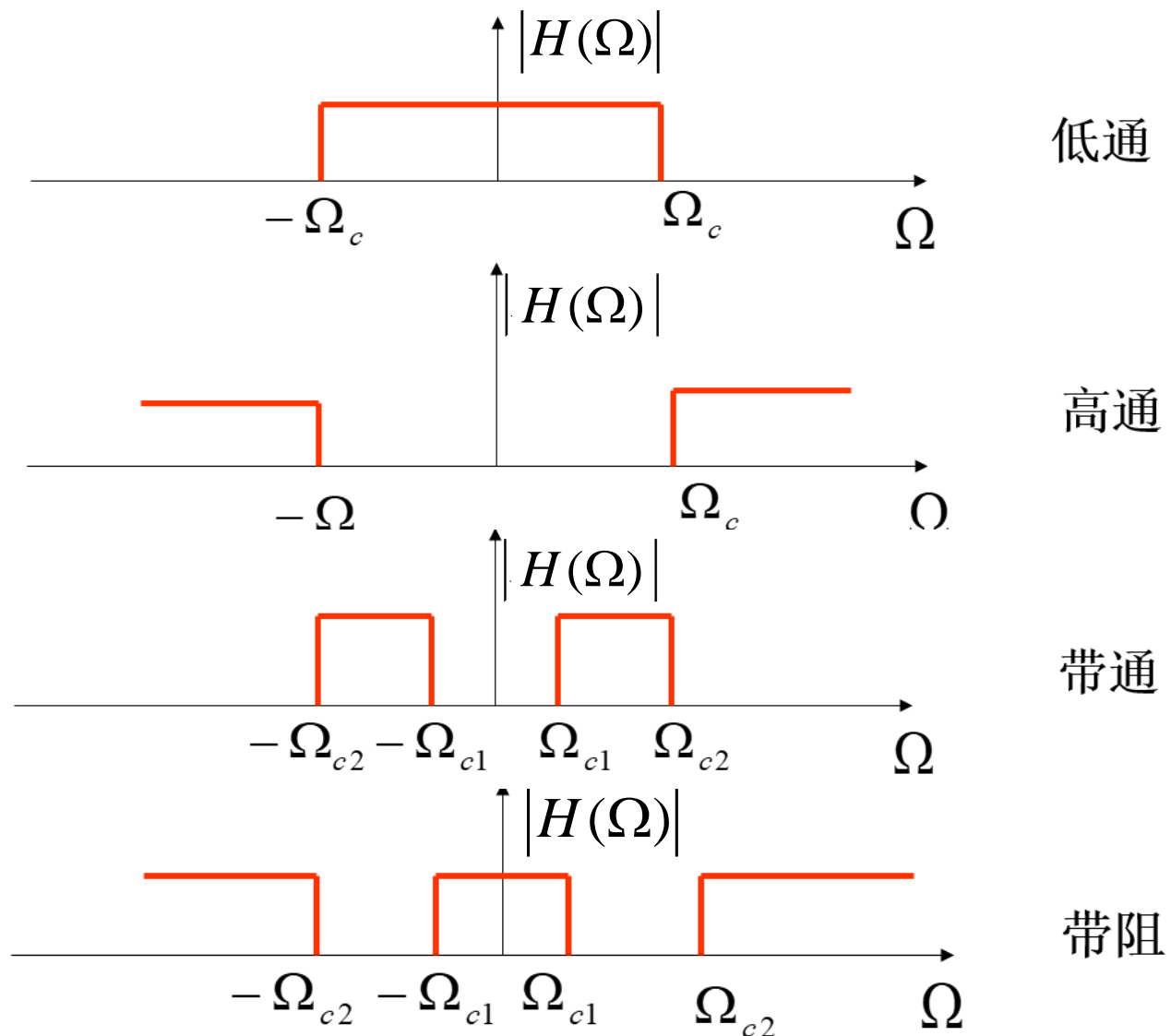
$$x(n) = s(n) + u(n) \xrightarrow{\text{加性噪声}}$$

若 $x(n)$ 中的有用成分 $s(n)$ 和希望去除的成分 $u(n)$ 各自占有不同的频带，通过一个线性系统可将 $u(n)$ 有效去除。

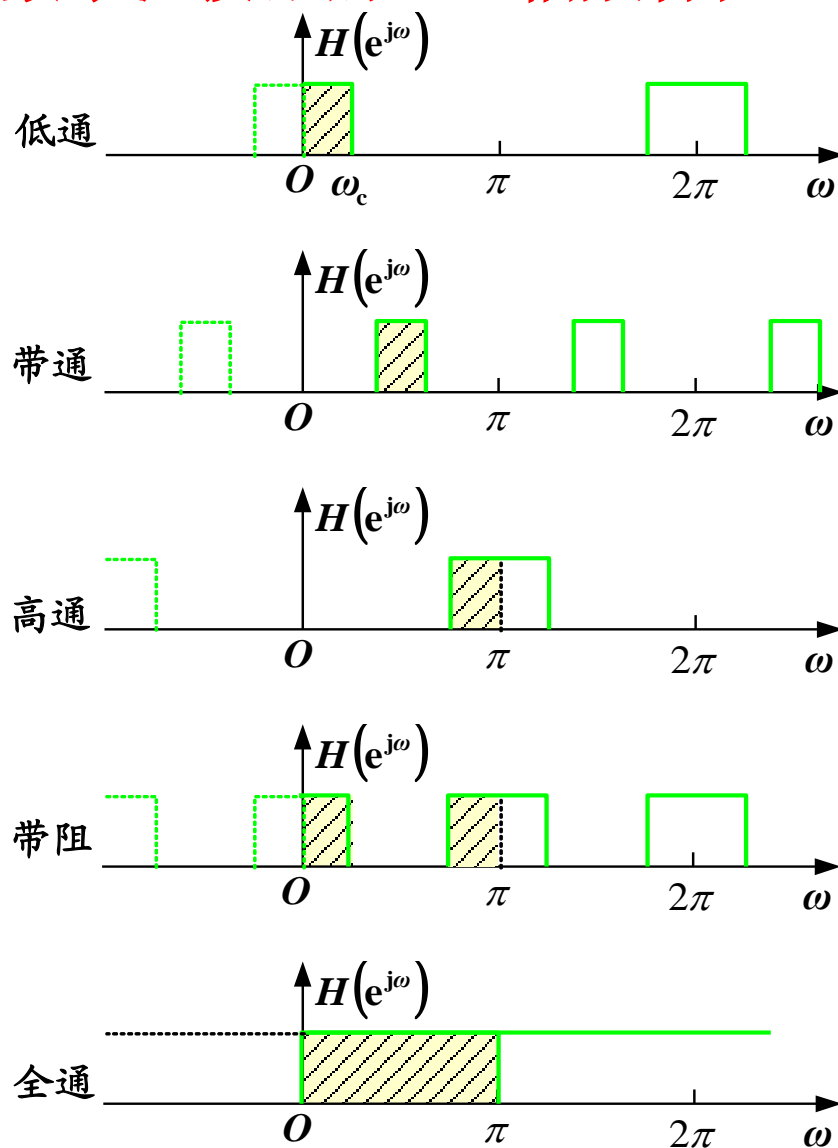
按功能分：低通(LP)，高通(HP)，带通(BP)，带阻(BS)，全通。

每一种又有模拟(AF)、数字(DF)两种滤波器。

(1) 模拟滤波器的理想幅频特性



(2) 数字滤波器的理想幅频特性



由于周期性和对称性，只研究
 $0 \leq \omega \leq \pi$ 范围即可。

左图中假设相频响应为0。

下列关于滤波器的说法中，**错误**的是（ ）

- ☐ A 滤波器通过减小某频率处的增益来“滤除”该频率。
- ☒ B 数字滤波器 $\omega = 2\pi$ 附近区域对应实际频率的“高频”。
- ☐ C 模拟滤波器可直接对模拟信号进行处理。
- ☐ D 经过模数转换后的信号才能被数字滤波器处理。

提交

2、现代滤波器

$$x(n) = s(n)u(n) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{乘法性噪声}}$$

$$x(n) = s(n) * u(n) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{卷积性噪声}}$$

信号的频谱和噪声频谱混迭在一起，靠经典的滤波方法难以去除噪声。

目标：从含有噪声的数据记录(又称时间序列)中估计出信号的某些特征或信号本身。

滤波器种类：维纳(Wiener)滤波器、卡尔曼(Kalman)滤波器、线性预测、自适应滤波器

对**数字滤波器 (DF)**，从实现方法上，有**finite impulse response (FIR)**滤波器和 **infinite impulse response (IIR)**滤波器之分，转移函数分别为：

$$\text{FIR DF: } H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

$$\text{IIR DF: } H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

小结

1. 系统的频响特性 $H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$
 $|H(e^{j\omega})|$: 幅频特性, 输出与输入序列的幅度之比
 $\varphi(\omega)$: 相频特性, 输出对输入序列的相移
2. 系统的频率响应就是系统函数在单位圆上的动态, 因 ω 而变化, 影响输出的幅度与相位。
3. 因为 $e^{j\omega}$ 是周期为 2π 的周期函数, 所以系统的频响特性 $H(e^{j\omega})$ 是周期为 2π 的周期函数。
4. $|H(e^{j\omega})|$ 是关于 ω 的偶函数, $\varphi(\omega)$ 是关于 ω 的奇函数。
5. 数字滤波器 $\omega = \pi$ 附近对应实际频率的高频。

作业

基础题：8-32, 8-33 (2) , 8-34

加强题：8-33 (1) (3) , 8-38