上节内容

4.1 引言
4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
4.3 拉普拉斯变换的基本性质

拉普拉斯变换（LT）

信号 $f(t)$，乘以衰减因子 $e^{-\sigma t}$(σ为任意实数)后容易满足绝对可积条件，依傅里叶变换定义：

$$F_1(\omega) = F\left[f(t)\cdot e^{-\sigma t}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(t)e^{-\sigma t}\right]\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-(\sigma+j\omega)t}dt = F(\sigma + j\omega)$$

令$\sigma + j\omega = s$，具有频率的量纲，称为复频率。

ω是振荡频率，σ控制衰减的速度。

则 $$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$$

拉氏变换对

双边拉氏变换

$$\begin{cases} F(s)=L\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt & \text{正变换} \\ f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds & \text{逆变换} \end{cases}$$

记作：$f(t)\leftrightarrow F(s)$，$f(t)$称为原函数，$F(s)$称为象函数。

考虑到实际信号都是因果信号：

单边拉氏变换

所以 $$F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

因为实际系统是因果的，信号总是在某个时刻才开始作用于系统，我们可以把这个时刻看作t=0；以上定义式中的积分的下限取0_-，考虑变换对冲激信号也是有效的。

本章及以后各章，若没有特别提到，均是指单边拉氏变换。

傅里叶变换 vs. 拉普拉斯变换

傅里叶变换	拉普拉斯变换
自变量ω是实数，有明确的物理意义--频率	自变量$s=\sigma+j\omega$是复数，其物理意义不明确，通常称其为复频率
信号的傅里叶变换反映了不同频率分量的振幅大小与起始相位的值，即信号的频谱。	信号的拉氏变换没有明确的物理意义。
系统单位冲激响应的傅里叶变换，称作系统的频率响应，它表示不同频率的正余弦信号作用于系统时，系统输出的幅度与相位随输入频率改变而改变的特性。	系统单位冲激响应的拉氏变换，称为系统的系统函数。它虽然较抽象，但是在表征系统特性及系统分析时起重要的作用。
主要应用于信号与系统的频率分析，如调制、滤波、抽样等的频谱分析。	主要应用于微分方程的求解、系统函数及其零极点分析等。

拉普拉斯变换法(LT)

- 优点：
  1. 将微积分方程求解问题转化为代数方程求解。
  2. 进行变换时，初始条件被自动计入，无需计算从0_-到0_+状态的跳变。

$$LT\left[f(t)\right]=F(s) \qquad LT\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=SF(s)-f(0_-)$$

- 缺点：
  物理概念不如傅氏变换那样清楚。

拉普拉斯变换可以看成是傅里叶变换的推广。它们之间在表达式和基本性质上有许多类似。

本章的学习方法：注意与傅里叶变换的对比，便于理解与记忆。

常用信号的拉氏变换

时域信号 (t>0)	S域信号
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

拉普拉斯变换的性质只适用于因果信号，即满足**$f(t)=f(t)u(t)$**的信号**$f(t)$**。

延时性（时移性）

设 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

$$f(t-t_0)u(t-t_0) \xleftrightarrow{LT} F(s)e^{-st_0}$$

注意：时移后的信号若为非因果信号不可用此性质！可结合课后习题4-2理解。

s域平移性（频移性）

设 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

$$f(t)e^{s_0 t} \xleftrightarrow{LT} F(s-s_0)$$

单选题 1分

设置

求$e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)u(t)$的拉氏变换。

A $\dfrac{\omega_0+\alpha}{s^2+\omega_0^2}$

B $\dfrac{s+\alpha}{s^2+\omega_0^2}$

C $\dfrac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$

D $\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$

提交

求$e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)u(t)$的拉氏变换。

解：

$$\sin(\omega_0 t)u(t)=\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}\right)u(t)$$

$$e^{j\omega_0 t}u(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{s-j\omega_0} \qquad e^{-j\omega_0 t}u(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{s+j\omega_0}$$

$$\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega_0}-\frac{1}{s+j\omega_0}\right)=\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\therefore \quad \sin(\omega_0 t)u(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

利用频移特性，

$$e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)u(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$$

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

时域展缩性

如果有 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

$$f(at) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

这里**常数a应 > 0**，否则信号发生反褶，对于单边拉氏变换，这个性质就没有意义。

$$f(at-b)u(at-b) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)e^{-\frac{bs}{a}}$$

$(a > 0, b > 0)$

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

时域微分性

设 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

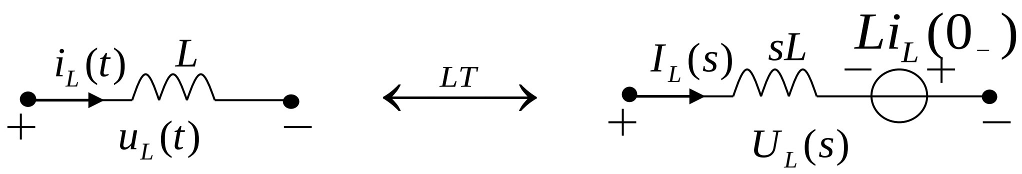
$$f'(t) \xleftrightarrow{LT} sF(s) - f(0_-)$$

$$f^{(n)}(t) \xleftrightarrow{LT} s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} f^{(i)}(0_-)$$

零状态条件下，时域微分一次，频域乘一个s

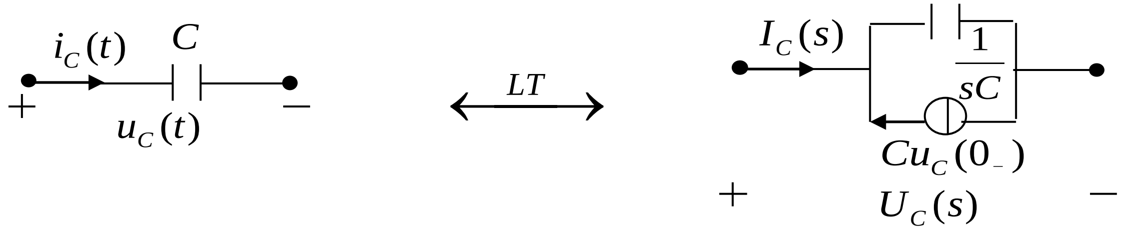
电感两端电压的拉氏变换：

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \xleftrightarrow{LT} U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-)$$



电容中的电流的拉氏变换：

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \xleftrightarrow{LT} I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0_-)$$



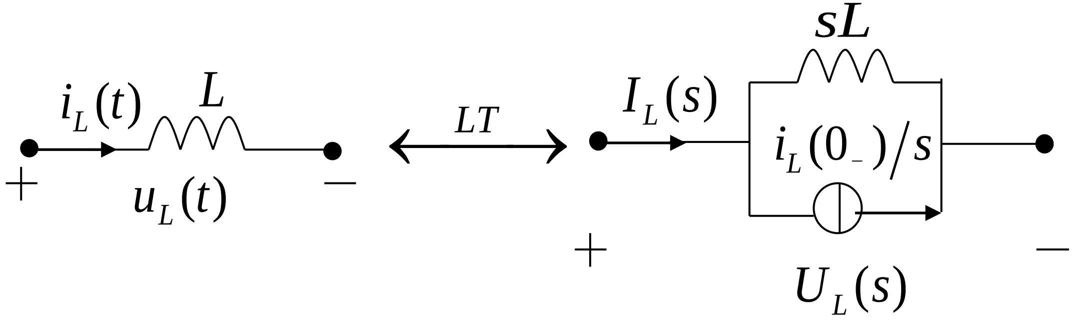
时域积分性

$$f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$$

则 $$y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \xleftrightarrow{LT} \frac{y(0_-)}{s}+\frac{F(s)}{s}$$

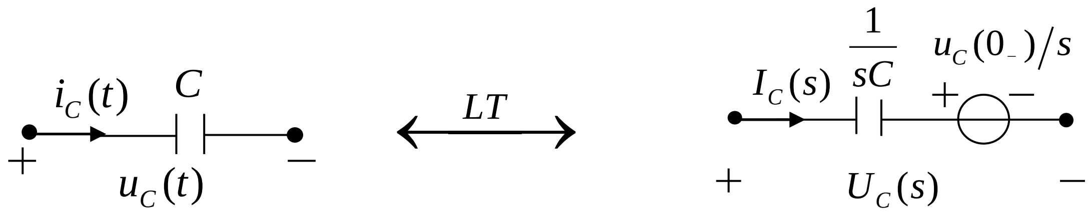
电感中电流的拉氏变换：

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(\tau)d\tau \xleftrightarrow{LT} \frac{i_L(0_-)}{s}+\frac{U_L(s)}{sL}$$



电容两端电压的拉氏变换：

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau \xleftrightarrow{LT} \frac{u_C(0_-)}{s}+\frac{I_C(s)}{sC}$$



4.3 拉普拉斯变换的基本性质

s域微分性

设 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

s域微分性 $tf(t) \xleftrightarrow{LT} -\dfrac{dF(s)}{ds}$

s域积分性

$$\frac{f(t)}{t} \xleftrightarrow{LT} \int_s^\infty F(\lambda)d\lambda$$

卷积定理(时域、频域）

设 $f_1(t) \xleftrightarrow{LT} F_1(s),\ f_2(t) \xleftrightarrow{LT} F_2(s)$

则 $f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{LT} F_1(s) \cdot F_2(s)$

$$f_1(t)\, f_2(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$$

初值与终值定理

设信号*f*(*t*)是因果的，其与其导数的拉氏变换存在，则

1、初值定理：

$$\lim_{t\to 0_+} f(t) = f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

高频分量（ω→∞），表示t=0时接入信号的突变。

若*f*(t)包含冲激函数$k\delta(t)$,

$$F(s) = k + F_1(s)，F_1(s)\text{为真分式}$$

$$\lim_{t\to 0_+} f(t) = \lim_{s\to\infty}[sF(s) - ks] = \lim_{s\to\infty} sF_1(s)$$

2、终值定理：若*f*(∞)存在，于是有

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

直流分量（ω→0），得到电路稳态的终值。

当电路等系统较为复杂时，无需做拉氏逆变换，即可直接求出函数的初值和终值。

填空题 1分

设置

已知 $F(s)=\dfrac{2s}{s+1}$ ，$f(0_{+})=$ [填空1] 。

作答

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

已知 $F(s)=\dfrac{2s}{s+1}$，求$f(0_+)$。

$$F(s)=\frac{2s}{s+1}=\underbrace{\frac{-2}{s+1}}_{F_1(s)}+2$$

$$f(0_+)=\lim_{s\to\infty}sF_1(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{-2s}{s+1}=-2$$

$$f(t)=-2e^{-t}u(t)+2\delta(t)$$

本次课内容

4.4 拉普拉斯逆变换

4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型

本次课目标

1. 熟练掌握部分分式法求拉普拉斯逆变换；

2. 熟练使用拉普拉斯逆变换分析电路等系统。

4.1 引言
4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
4.3 拉普拉斯变换的基本性质
4.4 拉普拉斯逆变换
4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
4.6 系统函数（网络函数）
4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性
4.9 二阶谐振系统的S平面分析
4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布
4.11 线性系统的稳定性
4.12 双边拉普拉斯变换
4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

4.4.1 拉普拉斯变换的零、极点

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

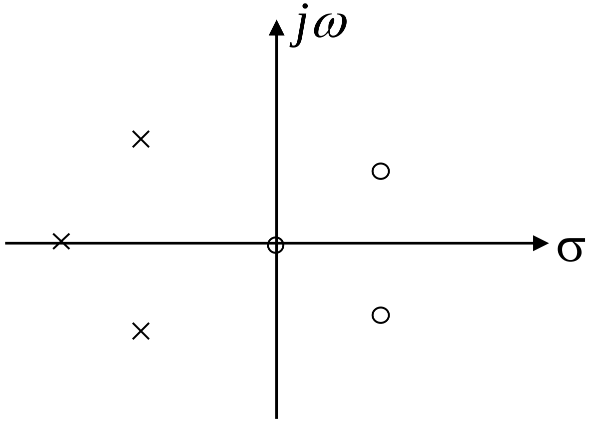
根据拉普拉斯逆变换的公式，可以应用围线积分求解。但在应用中，拉氏变换绝大多数是有理分式的形式：

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\sum_{i=0}^{m}b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n}a_i s^i}$$ 分子分母均是s的有理多项式。

以上分子多项式 $N(s)=0$ 的根，称作***F*(*s*)**的零点；分母多项式 $D(s)=0$ 的根，称作***F*(*s*)**的极点。上式可表示为：

$$F(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}$$

式中的z_i与p_i，分别是***F*(*s*)**的零点与极点。可如图将零极点标示在*s*平面上。



4.4.2 求拉氏逆变换

用拉氏变换方法分析系统时，最后还要将象函数进行拉氏逆变换。

1、部分分式法（海维赛法）

(1)极点为单实根的情况　$(p_1 \cdots p_n)$

$$m<n \text{ 时，} F(s) \overset{\text{分解}}{=\!=} \frac{k_1}{s-p_1}+\cdots+\frac{k_n}{s-p_n} \quad \text{（真分式）}$$

$$\text{其中} k_i=(s-p_i)F(s)\Big|_{s=p_i} \quad \text{（留数）（证明见教材）}$$

由拉氏变换性质已知：$Ae^{-\alpha t}u(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} \dfrac{A}{s+\alpha}$

$$F(s) \xrightarrow{L^{-1}} f(t)=\left(k_1 e^{p_1 t}+\cdots+k_n e^{p_n t}\right)u(t)$$

已知$F(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}$，则其拉氏逆变换$f(t)$为（ ）

A $f(t)=\left(2e^{-t}+e^{-2t}\right)u(t)$

B $f(t)=\left(2e^{t}-e^{2t}\right)u(t)$

C $f(t)=\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$

D $f(t)=\left(e^{-t}+2e^{-2t}\right)u(t)$

提交

例4-15：$F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$ ，试求其拉氏逆变换**$f(t)$**。

解：$$F(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{k_1}{(s+1)}+\frac{k_2}{(s+2)}$$

$$k_1=(s+1)F(s)\big|_{s=-1}=\left.\frac{s+3}{s+2}\right|_{s=-1}=2$$

$$k_2=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=\left.\frac{s+3}{s+1}\right|_{s=-2}=-1$$

所以：$$F(s)=\frac{2}{(s+1)}-\frac{1}{(s+2)}$$

它的拉氏逆变换为：$f(t)=(2e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

即使$F(s)$不是真分式，即$n<m$，它也可表示为一s的多项式与一真分式的和：

例： $$F(s)=\frac{s^3+4s^2+6s+5}{s^2+3s+2}$$

作长除法提出高次项

$$\begin{array}{r}
s+1 \\
s^2+3s+2\,\overline{)\,s^3+4s^2+6s+5} \\
\underline{s^3+3s^2+2s\qquad} \\
s^2+4s+5 \\
\underline{s^2+3s+2} \\
s+3
\end{array}$$

$$F(s)=\frac{s^3+4s^2+6s+5}{s^2+3s+2}=s+1+\frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

上式中s+1的拉氏逆变换等于：$\delta'(t)+\delta(t)$

对于拉氏变换是有理真分式的逆变换，用部分分式法求解。

(2)极点包含共轭复根的情况 $(p_{1,2}=-\alpha \pm j\beta)$

$$F(s)=\frac{A(s)}{D(s)\left[(s+\alpha)^2+\beta^2\right]}$$

$$=\frac{A(s)}{D(s)(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}$$

其中$D(s)$为分母除去共轭复根剩余部分

设$F_1(s)=\dfrac{A(s)}{D(s)}$

则$F(s)=\dfrac{F_1(s)}{(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}$

$$\stackrel{\text{分解}}{=\!=}\frac{K_1}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K_2}{s+\alpha+j\beta}+\ldots$$

4.4 拉普拉斯逆变换

其中$K_{1,2}=\dfrac{F_1(-\alpha\pm j\beta)}{\pm 2j\beta}$（留数）

K_1、K_2呈共轭关系：$K_{1,2}=A\pm jB$

得共轭复根有关部分逆变换为$\xrightarrow{\mathrm{LT}^{-1}}$

$$f_c(t)=e^{-\alpha t}(K_1e^{j\beta t}+K_1^*e^{-j\beta t})u(t)$$
$$=e^{-\alpha t}\{(A+jB)[\cos(\beta t)+j\sin(\beta t)]+(A-jB)[\cos(\beta t)-j\sin(\beta t)]\}u(t)$$
$$=2e^{-\alpha t}\left[A\cos\left(\beta t\right)-B\sin\left(\beta t\right)\right]u(t)$$

α--衰减因子；β--震荡频率

例4-16：$F(s)=\dfrac{s^2+3}{(s+2)(s^2+2s+5)}$ ，试求其拉氏逆变换**f(t)**。

解：令 $F(s)=\dfrac{K_1}{s+2}+\dfrac{K_2}{s+1-j2}+\dfrac{K_2^*}{s+1+j2}$

$\alpha=1,$

$\beta=2,取\beta>0$

$$K_1=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=\frac{s^2+3}{s^2+2s+5}\bigg|_{s=-2}=\frac{7}{5}$$

$$K_2=(s+1-j2)F(s)\big|_{s=-1+j2}=\frac{s^2+3}{(s+2)(s+1+j2)}\bigg|_{s=-1+j2}=-\frac{1}{5}+j\frac{2}{5}$$

$A=-\dfrac{1}{5},B=\dfrac{2}{5}$

共轭复根对应的时域信号为$f_c(t)=2e^{-\alpha t}\left[A\cos\left(\beta t\right)-B\sin\left(\beta t\right)\right]u(t)$

$$f(t)=\left[\frac{7}{5}e^{-2t}-\frac{2}{5}e^{-t}(\cos 2t+2\sin 2t)\right]u(t)$$

例4-17： $F(s)=\dfrac{s+\gamma}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$ ，试求其拉氏逆变换**f(t)**。

解：此函数式只有共轭复根，所以无需用部分分式法。

已知 $\mathrm{LT}[\cos(\beta t)u(t)]=\dfrac{s}{s^2+\beta^2}$，$\mathrm{LT}[\sin(\beta t)u(t)]=\dfrac{\beta}{s^2+\beta^2}$

$$\mathrm{LT}[e^{-\alpha t}\cos(\beta t)u(t)]=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2},\quad \mathrm{LT}[e^{-\alpha t}\sin(\beta t)u(t)]=\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$F(s)=\frac{s+\alpha+\gamma-\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}+\frac{(\gamma-\alpha)}{\beta}\cdot\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

$$f(t)=e^{-\alpha t}\left[\cos(\beta t)+\frac{\gamma-\alpha}{\beta}\sin(\beta t)\right]u(t)$$

(3)极点包含多重根的情况 (k重根p_1, 单根$p_2 \dots p_n$)

$$F(s)=\frac{A(s)}{D(s)}=\frac{A(s)}{(s-p_1)^k D_1(s)}$$

$$=\frac{K_{11}}{(s-p_1)^k}+\frac{K_{12}}{(s-p_1)^{k-1}}+\cdots+\frac{K_{1k}}{(s-p_1)}+\sum_{i=2}^{n}\frac{K_i}{s-p_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{K_{1i}}{(s-p_1)^{k-i+1}}+\sum_{i=2}^{n}\frac{K_i}{s-p_i}$$

求K_i和K_{11}，方法同第一种情况：$K_{11}=(s-p_1)^k F(s)\big|_{s=p_1}$

求其他系数，令：$F_1(s)=(s-p_1)^k \cdot F(s)$

当$i=2$，$\quad K_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F_1(s)\big|_{s=p_1}$

当$i=3$，$\quad K_{13}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}F_1(s)\big|_{s=p_1}$

$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}s^{i-1}}F_1(s)\Big|_{s=p_1} \qquad (i=1,2,\cdots k)$$

$$F_1(s) = (s-p_1)^k \cdot F(s)$$

得多重根部分的逆变换 $\xrightarrow{\mathrm{LT}^{-1}}$:

$$f_c(t) = e^{p_1 t}\left[\frac{K_{11}}{(k-1)!}t^{k-1} + \frac{K_{12}}{(k-2)!}t^{k-2}\cdots + \frac{K_{1i}}{(k-i)!}t^{k-i}\cdots + K_{1k}\right]u(t)$$

例4-18： $F(s)=\dfrac{s-2}{s(s+1)^3}$，试求其拉氏逆变换$f(t)$。

解： 令

$$F(s)=\frac{K_{11}}{(s+1)^3}+\frac{K_{12}}{(s+1)^2}+\frac{K_{13}}{(s+1)}+\frac{K_2}{s}$$

先求单根0对应的系数K_2:

$$K_2=sF(s)\big|_{s=0}=\left.\frac{s-2}{(s+1)^3}\right|_{s=0}=-2$$

令$F_1(s)=(s+1)^3F(s)=\dfrac{s-2}{s}$

$$K_{11} = F_1(s)|_{s=-1} = \left.\frac{s-2}{s}\right|_{s=-1} = 3$$

$$K_{12} = \frac{1}{(3-2)!}\left.\frac{dF_1(s)}{ds}\right|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s-2}{s}\right]\Bigg|_{s=-1} = \left.\frac{2}{s^2}\right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{13} = \frac{1}{(3-1)!}\left.\frac{d^2F_1(s)}{ds^2}\right|_{s=-1} = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{-4}{s^3}\right|_{s=-1} = 2$$

$$f(t) = \left[e^{-t}\left(\frac{K_{11}}{2!}t^2 + K_{12}t + K_{13}\right) + K_2\right]u(t)$$

$$= \left[e^{-t}\left(\frac{3}{2}t^2 + 2t + 2\right) - 2\right]u(t)$$

2、留数法

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds,\quad t\geq 0$$

设一闭合围线的积分路径为无限大圆弧,

$$\text{即}f(t)=\sum_{\text{极点}}\left[F(s)e^{st}\text{的留数}\right]$$

则上式中积分等于围线中被积函数的所有极点的留数之和。

若极点$s=p_i$处留数为r_i，围线中有n个极点p_i(k 阶)

$$\text{则}f(t)=\sum_{i=1}^{n}r_i,\quad r_i=\frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}(s-p_i)^kF(s)e^{st}\right]$$

特殊情况：含$e^{-\alpha s}$的非有理式

$e^{-\alpha s}$项不参加部分分式运算，求解时利用时移性质。

例4-19：求 $\dfrac{e^{-2s}}{s^2+3s+2}$ 的拉氏逆变换。

解：

$$\frac{e^{-2s}}{s^2+3s+2}=F_1(s)e^{-2s}$$

$$F_1(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+2}$$

所以 $f_1(t)=L^{-1}[F_1(s)]=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$

所以 $f(t)=f_1(t-2)=\left[e^{-(t-2)}-e^{-2(t-2)}\right]u(t-2)$

4.1 引言
4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
4.3 拉普拉斯变换的基本性质
4.4 拉普拉斯逆变换
4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
4.6 系统函数（网络函数）
4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性
4.9 二阶谐振系统的S平面分析
4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布
4.11 线性系统的稳定性
4.12 双边拉普拉斯变换
4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

4.5.1 用拉普拉斯变换解微分方程

拉普拉斯变换解微分方程的步骤：

（1）对微分方程求拉氏变换，注意应用微分性质；

（2）解s域的代数方程，求出响应的拉氏变换；

（3）求拉氏逆变换，即求出响应的时间表达式。

例4-20：已知 $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+4x(t)$，$y'(0^-)=y(0^-)=1$，$x(t)=e^{-3t}u(t)$ 。试求系统的响应**y(t)**。

解法一：(1) 对方程两边同求拉氏变换，利用微分性质。

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+4x(t)$$

$$\underline{s^2Y(s)-[sy(0^-)+y'(0^-)]}+\underline{3[sY(s)-y(0^-)]}+\underline{2Y(s)}=sX(s)+4X(s)$$

(2) 整理以上方程，求出响应的拉氏变换式。

$$(s^2+3s+2)Y(s)=(s+4)X(s)+(s+3)y(0^-)+y'(0^-)$$

所以 $$Y(s)=\frac{(s+4)X(s)+(s+3)y(0^-)+y'(0^-)}{(s^2+3s+2)}$$

$$Y(s)=\frac{(s+4)X(s)+(s+3)y(0^-)+y'(0^-)}{(s^2+3s+2)}=\frac{(s+4)}{(s^2+3s+2)}X(s)+\frac{(s+3)y(0^-)+y'(0^-)}{(s^2+3s+2)}$$

代入起始条件和 $X(s)=\dfrac{1}{s+3}$ ，得到 $Y(s)=\dfrac{(s+4)}{(s^2+3s+2)(s+3)}+\dfrac{(s+3)+1}{(s^2+3s+2)}$

(3) 求拉氏逆变换。

用部分分式法可得 $Y(s)=\dfrac{\frac{3}{2}}{s+1}-\dfrac{2}{s+2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{s+3}+\dfrac{3}{s+1}-\dfrac{2}{s+2}$

$$y(t)=\underbrace{(\frac{3}{2}e^{-t}-2e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{(3e^{-t}-2e^{-2t})u(t)}_{\text{零输入响应}}=\underbrace{(\frac{9}{2}e^{-t}-4e^{-2t})u(t)}_{\text{自由响应}}+\underbrace{\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)}_{\text{强迫响应}}$$

零状态响应和零输入响应的公共项—自由响应；非公共项—强迫响应

虽然拉氏变换解方程，可一次求出全解是其优点，但是利用微分性质时，带上其起始条件，使s域的方程运算时复杂而易出错。分别求零状态和零输入响应会更简洁。

解法二：(1) 用s域分析法求零状态响应。对方程两边同求拉氏变换，不带起始条件。

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+4x(t)$$

$$s^2Y_{zs}(s)+3sY_{zs}(s)+2Y_{zs}(s)=sX(s)+4X(s)$$

整理以上方程，求出零状态响应的拉氏变换式。

$$(s^2+3s+2)Y_{zs}(s)=(s+4)X(s)$$

所以 $Y_{zs}(s)=\dfrac{(s+4)}{(s^2+3s+2)}X(s)=H(s)X(s)$

因为 $X(s)=\dfrac{1}{s+3}$

得到零状态响应的拉氏变换

$$Y_{zs}(s)=\frac{(s+4)}{(s^2+3s+2)(s+3)}=\frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$Y_{zs}(s)=\frac{\frac{3}{2}}{s+1}-\frac{2}{s+2}+\frac{\frac{1}{2}}{s+3}$$

求拉氏逆变换，得到系统的零状态响应：

$$y_{zs}(t)=(\frac{3}{2}e^{-t}-2e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$$

试用第二章的时域分析法求零状态响应，并比较结果。

(2) 用时域分析法求零输入响应。由以上方程的拉氏变换

$$(s^2+3s+2)Y(s)=(s+4)X(s)$$

微分方程对应的特征方程是：$s^2+3s+2=0$

特征方程的根： $s=-1$ ， $s=-2$

设系统的零输入响应为： $y_{zi}(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$

已知 $y'_{zi}(0^-)=y'(0^-)=1,\ y_{zi}(0^-)=y(0^-)=1$

由起始条件确定待定常数：

$$\begin{cases} A_1+A_2=1 \\ -A_1-2A_2=1 \end{cases} \qquad \therefore \quad A_1=3\ ,\quad A_2=-2$$

零输入响应： $y_{zi}(t)=(3e^{-t}-2e^{-2t})u(t)$

最后，求得系统的全响应：

$$y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)$$

$$=(\frac{3}{2}e^{-t}-2e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)+(3e^{-t}-2e^{-2t})u(t)$$

$$=(\frac{9}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$$

4.5.2 拉普拉斯变换解电路

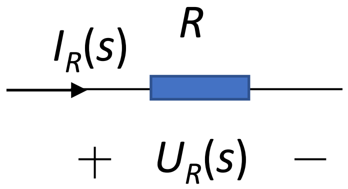
s域元件模型：

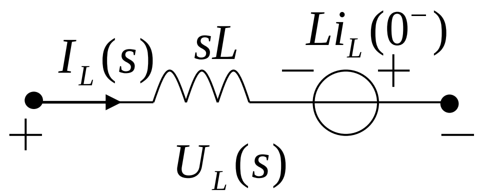
1) 回路分析 (KVL)

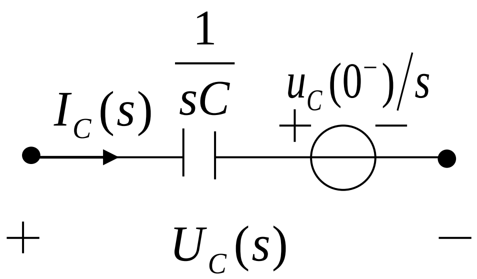
$$U_R(s) = RI_R(s)$$

$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$

$$U_C(s) = \frac{1}{sC}I_C(s) + \frac{1}{s}u_c(0^-)$$





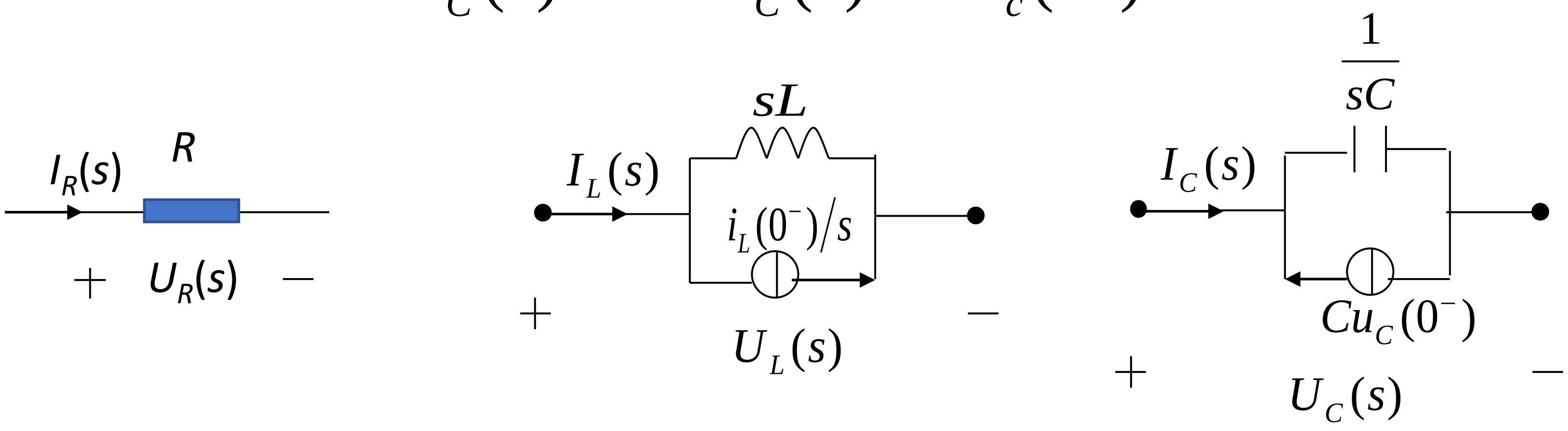


2) 结点分析 (KCL)

$$I_R = \frac{1}{R} U_R(s)$$

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} U_L(s) + \frac{1}{s} i_L(0^-)$$

$$I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_c(0^-)$$



s域电路分析方法

1. 将网络中每个元件用其s域模型代替；

将信号源写作变换式（$\frac{E}{s}$, 或$\frac{E}{sR}$，$U_s(s)$或$I_s(s)$）。

2. 对此构成的s域模型图采用KVL和KCL分析得到所需的系统方程变换式。

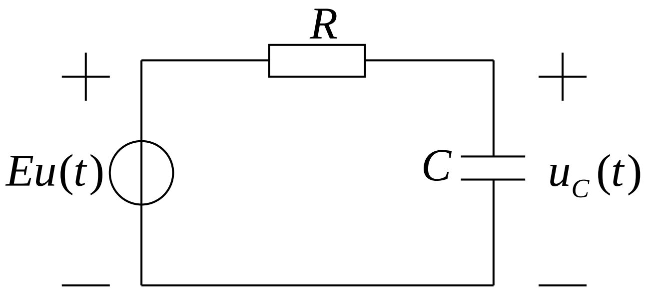
（所进行的数字运算是代数关系，类似电阻性网络；

戴维南定理与诺顿定理均适用;适合较多结点或回路的网络分析。）

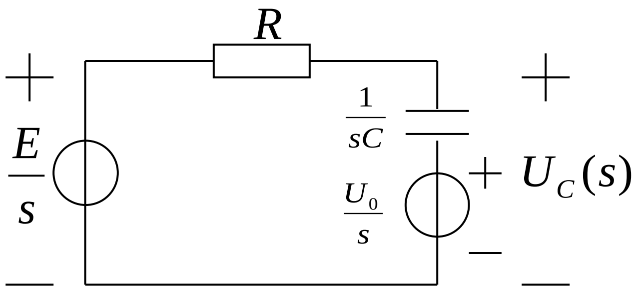
3. 求出响应的拉氏变换。

4. 求拉氏逆变换，即求出响应的时间表达式。

例4-21：RC电路如图所示，设已知电容上起始电压$u_C(0^-)=U_0$，试求$t>0$时的电容电压$u_C(t)$。



解：(1) 将时域电路转换成s域的电路；



(2) 列s域的电路方程，求输出的拉氏变换；

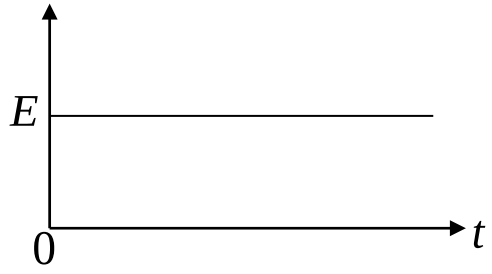
直接可写出电容电压的拉氏变换为

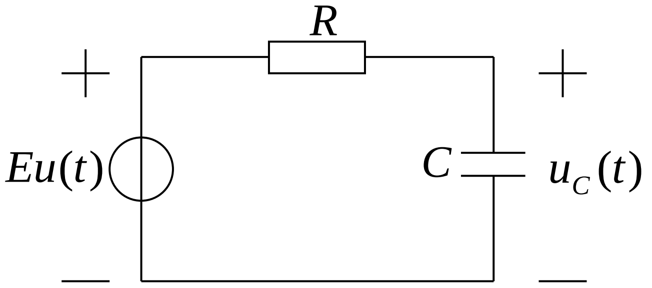
$$U_C(s)=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}\frac{E-U_0}{s}+\frac{U_0}{s}=\frac{1}{sRC+1}\frac{E-U_0}{s}+\frac{U_0}{s}$$

4. 5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域元件模型

(3) 通过拉氏逆变换求出响应的时间表达式。

$$U_C(s)=\frac{\frac{1}{RC}(E-U_0)}{s(s+\frac{1}{RC})}+\frac{U_0}{s}=\frac{E-U_0}{s}-\frac{(E-U_0)}{s+\frac{1}{RC}}+\frac{U_0}{s}=\frac{E}{s}-\frac{(E-U_0)}{s+\frac{1}{RC}}$$



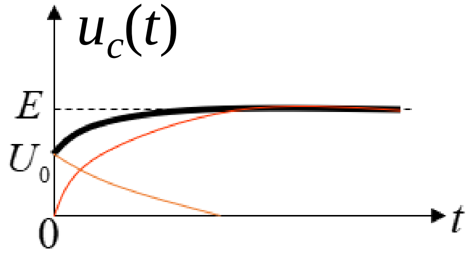


求得电容上电压

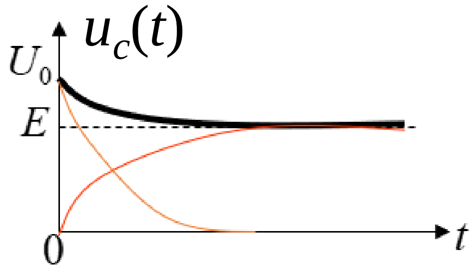
$$u_C(t)=[E-(E-U_0)e^{-\frac{t}{RC}}]u(t)$$ （黑线）

$$u_{Czs}(t)=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})u(t)$$ （红线）

$$u_{Czi}(t)=U_0e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$ （橙线）

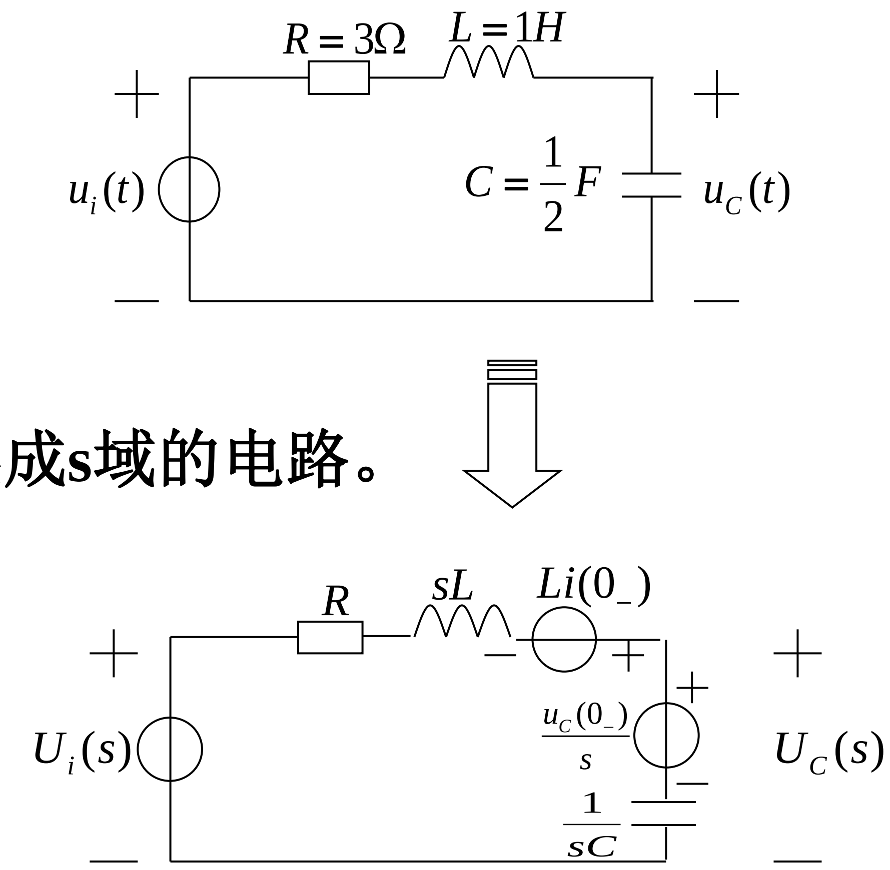


$E>U_0$



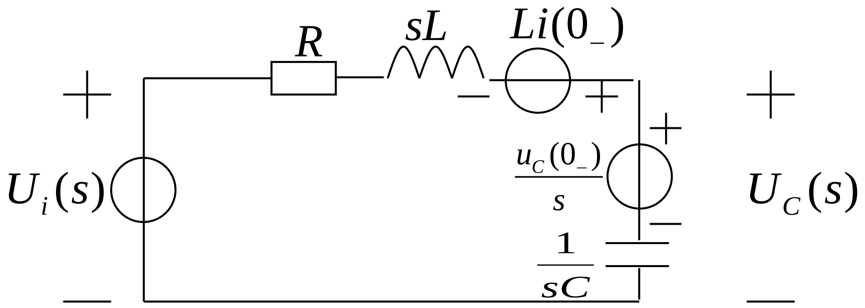
$E<U_0$

例4-22：RLC串联电路如图所示，设电容上起始电压$u_C(0_-)=1\text{ V}$，回路中的起始电流$i(0_-)=1\text{ A}$，输入电压$u_i(t)=e^{-3t}u(t)$。试求$t>0$时的电容电压$u_C(t)$。



解：（1）将时域电路转换成s域的电路。

（2）列s域的电路方程，求出响应的拉氏变换。



$$U_C(s)=\frac{\frac{1}{sC}}{R+sL+\frac{1}{sC}}[U_i(s)-\frac{u_C(0\_)}{s}+Li(0\_)]+\frac{u_C(0\_)}{s}$$

$$=\frac{\frac{2}{s}}{3+s+\frac{2}{s}}[U_i(s)-\frac{1}{s}+1]+\frac{1}{s}$$

$$=\frac{2U_i(s)}{s^2+3s+2}-\frac{2}{s^2+3s+2}(\frac{1-s}{s})+\frac{1}{s}$$

$$U_{Czs}(s)=\frac{2}{s^2+3s+2}U_i(s)=\frac{2}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s+3}$$

$$=\frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+3}$$

$$U_{Czi}(s)=\frac{2}{s^2+3s+2}(\frac{s-1}{s})+\frac{1}{s}=\frac{2(s-1)}{s(s+1)(s+2)}+\frac{1}{s}$$

$$=\frac{-1}{s}+\frac{4}{s+1}-\frac{3}{s+2}+\frac{1}{s}=\frac{4}{s+1}-\frac{3}{s+2}$$

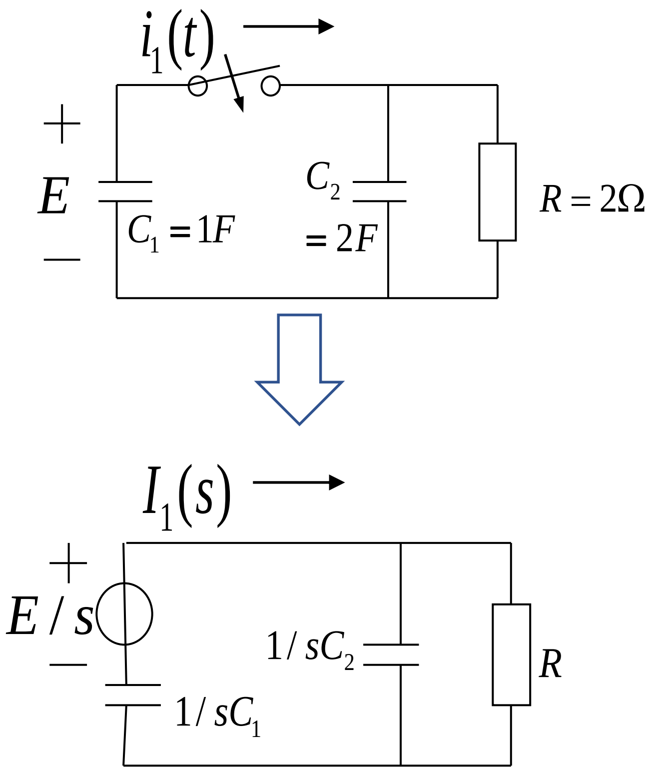
(3) 通过拉氏逆变换求出响应的时间表达式。

$$u_{Czs}(t)=(e^{-t}-2e^{-2t}+e^{-3t})u(t) \qquad u_{Czi}(t)=(4e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$$

$$u_C(t)=u_{C_{zs}}(t)+u_{C_{zi}}(t)=(5e^{-t}-5e^{-2t}+e^{-3t})u(t)$$

例4-23： 电路如图所示，设电容上起始电压$v_{c1}(0^-)=E$，$t=0$时开关闭合，求电流$i_1(t)$，并讨论$t=0$时刻前后，电容两端电荷发生的变化。

解： 画s域电路，并列方程。



$$I_1(s)=\frac{E}{s}\frac{1}{\dfrac{R/sC_2}{R+1/sC_2}+\dfrac{1}{sC_1}}=\frac{E}{s}\frac{1}{\dfrac{R}{RC_2s+1}+\dfrac{1}{sC_1}}$$

$$I_1(s)=\frac{E}{s}\frac{s(RC_1C_2s+C_1)}{RC_1s+RC_2s+1}=\frac{ERC_1C_2}{R(C_1+C_2)}\frac{s+\dfrac{1}{RC_2}}{s+\dfrac{1}{R(C_1+C_2)}}$$

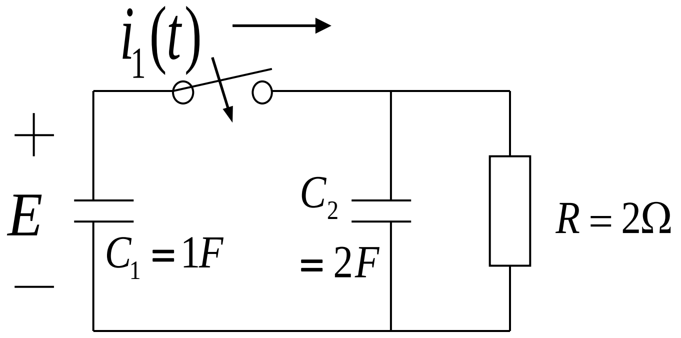
$$=\frac{2E}{3}\frac{s+\dfrac{1}{4}}{s+\dfrac{1}{6}}$$

$$I_1(s)=\frac{2E}{3}\left(1+\frac{\frac{1}{12}}{s+\frac{1}{6}}\right)\qquad \therefore\quad i_1(t)=\frac{2E}{3}[\delta(t)+\frac{1}{12}e^{-\frac{t}{6}}u(t)]$$

当t=0时刻，电容上的电荷发生移动，但是总量不变。

$$C_1v_{C1}(0_-)=(C_1+C_2)v_{C1}(0_+)\qquad \therefore\quad E=3v_{C1}(0_+)$$

$$\therefore\quad v_{C1}(0_+)=\frac{E}{3}$$



所以t=0^+时刻，电容上的电荷各有：

$$q_{C1}=C_1v_{C1}(0_+)=\frac{E}{3}\qquad q_{C2}=C_2v_{C1}(0_+)=\frac{2E}{3}$$

作业

基础题：4-4，4-5，4-8，4-11。

加强题：无。