

## 上节内容

7.1 引言

7.2 离散时间信号—序列

7.3 离散时间系统的数学模型

### 连续时间系统

vs.

### 离散时间系统

- 微分方程
- 卷积积分
- 拉氏变换
- 连续傅里叶变换
- 系统函数
- 卷积定理

- 差分方程
- 卷积和
- $z$ 变换
- 离散傅里叶变换
- 系统函数
- 卷积定理

### 7.2.2 离散时间信号的运算

#### 1、序列的平移

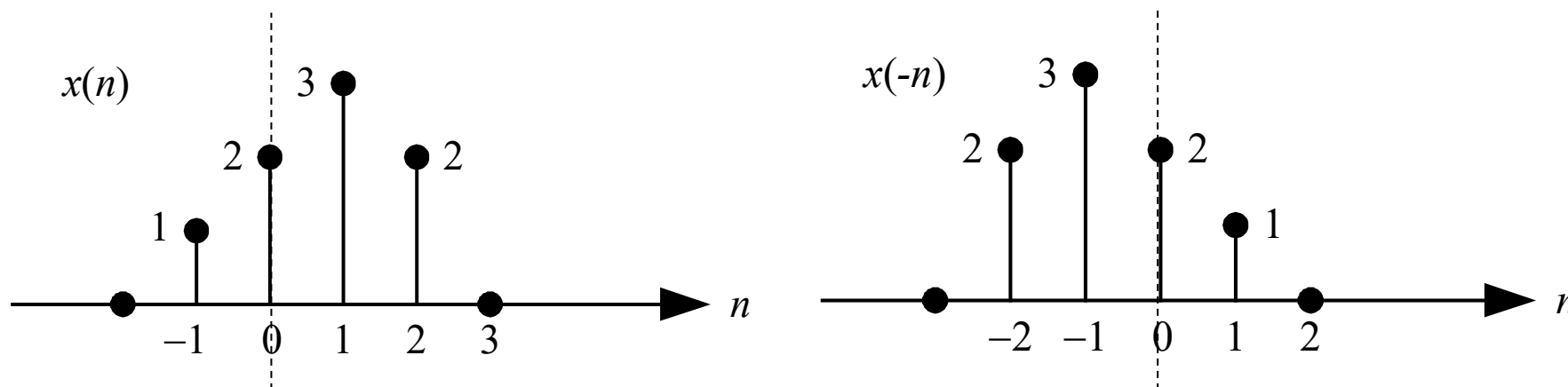
$x(n-m)$  表示将  $x(n)$  右移  $m$  个单位。

$x(n+m)$  表示将  $x(n)$  左移  $m$  个单位。

}  $m > 0$

#### 2、序列的反褶

$$x(n) \rightarrow x(-n)$$



已知序列 $x(n) = \{-2, 1, 2, \overset{\downarrow}{0}, 3, 2, 4, 6, 5\}$ , 则  $x(2n) = ( \quad )$

A  $\{-2, \overset{\downarrow}{2}, 3, 4, 5\}$

B  $\{1, \overset{\downarrow}{0}, 2, 6\}$

C  $\{2, \overset{\downarrow}{0}, 3, 2\}$

D  $\{-2, 1, \overset{\downarrow}{0}, 2, 6\}$

提交

### 3、序列的尺度变换

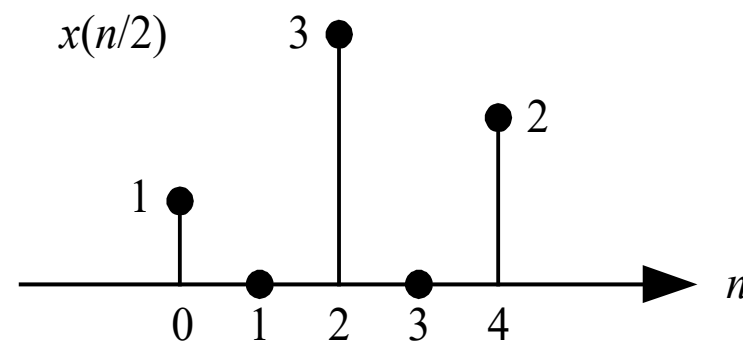
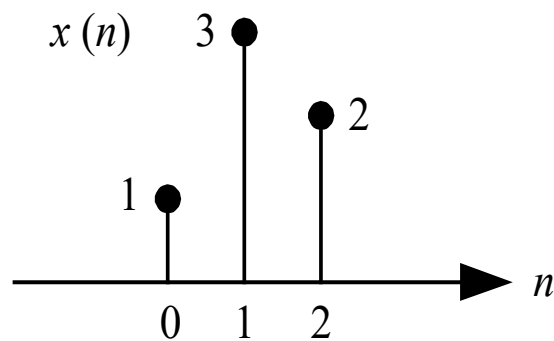
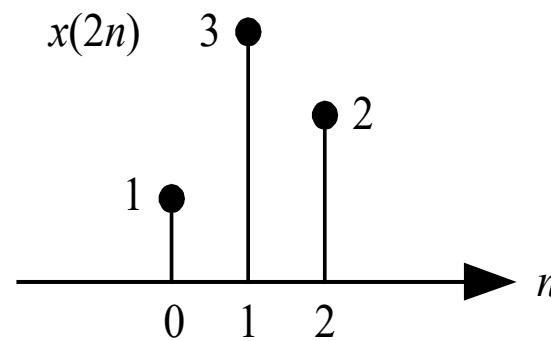
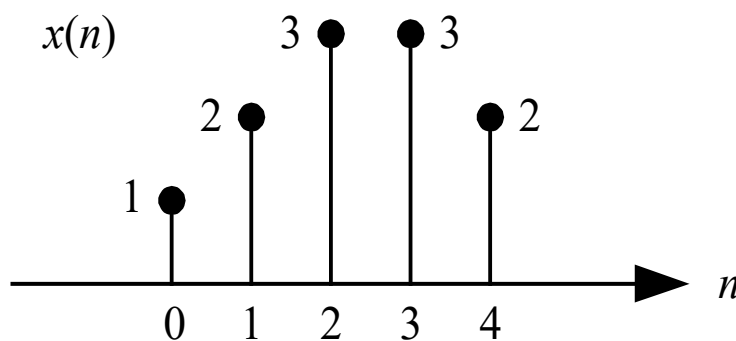
$a$ 为正整数

$$x(n) \rightarrow x(an)$$

压缩：原点左右每隔 $(a-1)$ 点抽取一点

$$x(n) \rightarrow x\left(\frac{n}{a}\right)$$

扩展：相邻两点之间插入 $(a-1)$ 个零值点



### 离散时间系统的数学模型

#### 差分方程

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

输入是离散序列 $x(n)$ 及其时移函数  $x(n), x(n-1), x(n-2), \dots$

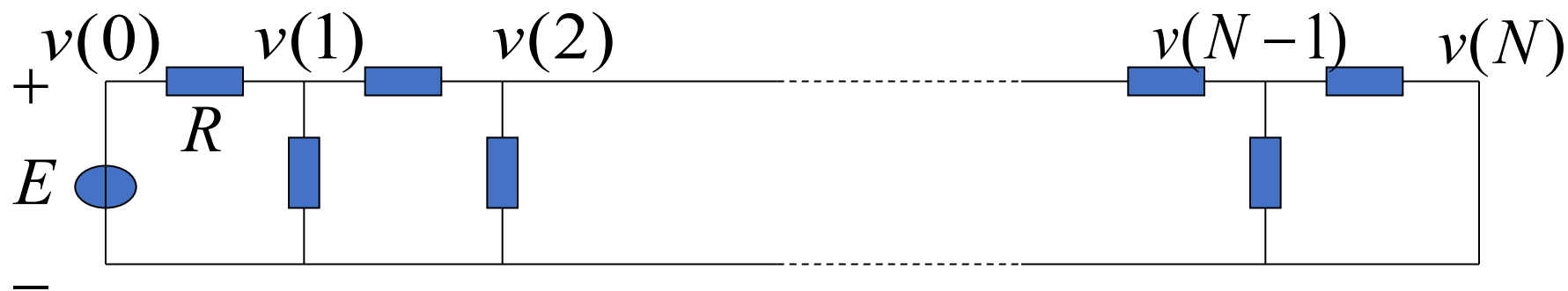
输出是离散序列 $y(n)$ 及其时移函数  $y(n), y(n-1), y(n-2), \dots$

基本运算：延时，乘系数，相加

输出序列的第 $n$ 个值不仅决定于同一瞬间的输入样值，而且还与前面输出值有关，每个输出值必须依次保留。

$$\text{通式: } \sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

**例7-4：**电阻梯形网络，其各支路电阻都为 $R$ ，每个结点对地的电压为 $v(n)$ ， $n=0, 1, 2, \dots, N$ 。已知两边界结点电压为 $v(0)=E$ ， $v(N)=0$ 。求 $v(n)$ 的差分方程式。



**解：**

$$\frac{v(n-1)}{R} = \frac{v(n) - v(n-1)}{R} + \frac{v(n-2) - v(n-1)}{R} \quad (n \geq 2)$$

$$v(n) - 3v(n-1) + v(n-2) = 0$$

## 本次课内容

7.4 常系数线性差分方程的求解

7.5 离散时间系统的单位样值  
(冲激)响应

## 本次课目标

1. 熟悉差分方程的经典时域求解方法，正确使用边界条件；
2. 熟悉单位样值响应的求解；



7.1 引言

7.2 离散时间信号一序列

7.3 离散时间系统的数学模型

7.4 常系数线性差分方程的求解

7.5 离散时间系统的单位样值(冲激)响应

7.6 卷积和

线性时不变离散系统由常系数线性差分方程来描述：

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

方程式的阶数等于未知序列变量序号的最高值与最低值之差。

求解方法：

- 迭代法
- 时域经典法：求齐次解和特解
- 卷积法：利用齐次解得零输入响应，再利用卷积和求零状态响应。
- 变换域法（z变换法，第八章）
- 状态变量分析法（第十二章）

### 7.4.1 迭代法

当差分方程阶次较低时常用此法。

**例7-5：**已知差分方程  $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ ,  $y(-1) = 0$ , 且激励  $x(n) = \delta(n)$ , 求  $y(n)$ 。

**解：**  $n = 0$   $y(0) = ay(-1) + x(0) = 0 + \delta(0) = 1$

$$n = 1 \quad y(1) = ay(0) + x(1) = a + 0 = a$$

$$n = 2 \quad y(2) = ay(1) + x(2) = a \cdot a + 0 = a^2$$

.....

$$y(n) = ay(n-1) + x(n) = a^n$$

$$\therefore y(n) = a^n u(n)$$

缺点：不易得到闭合形式的解。

### 7.4.2 时域经典法

差分方程的完全解即系统的完全响应, 由**齐次解** $y_h(n)$ 和**特解** $y_p(n)$ 组成:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

**齐次解** $y_h(n)$ 的形式由齐次方程的**特征根**确定。

**特解** $y_p(n)$ 的形式由**激励**信号代入方程右边化简的形式确定。

### 1、求齐次解(系统固有的响应)

差分方程的齐次方程: 
$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0$$

**例7-6:** 若一阶齐次差分方程的表达式为  $y(n) - ay(n-1) = 0$  , 但起始状态  $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$  不能全为零, 求对应的齐次解。

**解:**  $y(-1) \neq 0, \frac{y(0)}{y(-1)} = \frac{y(1)}{y(0)} = \dots = \frac{y(n)}{y(n-1)} = a$

说明  $y(n)$  是一个公比为  $a$  的几何级数, 所以  $y(n) = Ca^n$ 。

或由特征方程  $r - a = 0$  可得  $r = a$  ,  $y(n) = Cr^n = Ca^n$

指数形式

$C$  由起始状态 (边界条件) 确定。

任意阶差分方程的齐次解以形式为  $C\alpha^n$  的项线性组合而成。

将  $y(n) = C\alpha^n$  代入差分方程  $\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0$  得到  $\sum_{k=0}^N a_k C\alpha^{n-k} = 0$ ,

消去常数  $C$  并逐项乘以  $\alpha^{N-n}$ , 得到

$$a_0\alpha^N + a_1\alpha^{N-1} + \cdots + a_k\alpha^{N-k} + \cdots + a_N = 0$$

特征方程

方程的根  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$

特征根

$\alpha_i$  称为系统的固有频率或自由频率、自然频率。

齐次解的形式:

(1) 特征根是不等实根（无重根） $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$

$$y_h(n) = C_1 \alpha_1^n + C_2 \alpha_2^n + \dots + C_N \alpha_N^n = \sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n$$

(2) 特征根是 $k$ 阶重根  $\alpha_1$

$$y_h(n) = C_1 n^{k-1} \alpha_1^n + C_2 n^{k-2} \alpha_1^n + \dots + C_{k-1} n \alpha_1^n + C_k \alpha_1^n = \sum_{i=1}^k C_i n^{k-i} \alpha_1^n$$

(3) 特征根是成对共轭复根  $\alpha \pm j\beta = \rho e^{\pm j\omega_0}$

$$y_h(n) = C_1 (\alpha + j\beta)^n + C_2 (\alpha - j\beta)^n = \rho^n [P \cos(n\omega_0) + Q \sin(n\omega_0)]$$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad P = C_1 + C_2 \quad Q = j(C_1 - C_2)$$

齐次解的待定系数由边界条件决定（在求出特解之后）。

差分方程与微分方程齐次解的比较

特征根	差分方程齐次解	微分方程齐次解
不等实根 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$	$\sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n$	$\sum_{k=1}^N A_k e^{\alpha_k t}$
$k$ 重根 $\alpha_1$	$\sum_{i=1}^k C_i n^{k-i} \alpha_1^n$	$\sum_{i=1}^k A_i t^{k-i} e^{\alpha_1 t}$
共轭复根 $\alpha \pm j\beta$	$\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)^n \left[ P \cos(n\omega_0) + Q \sin(n\omega_0) \right]$	$e^{\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t)$



## 2、求特解：由激励信号的形式决定

自由项 (方程右端)	特解形式
$\alpha^n$	$D\alpha^n$ ( $\alpha$ 不是特征根) $Dn^r \alpha^n$ ( $\alpha$ 是 $r$ 重特征根)
$n^k$	$D_0 n^k + \dots + D_{k-1} n + D_k$ (1不是特征根) $n^r [D_0 n^k + \dots + D_{k-1} n + D_k]$ (1是 $r$ 重特征根)
$\alpha^n n^k$	$[D_0 n^k + \dots + D_{k-1} n + D_k] \alpha^n$ ( $\alpha$ 不是特征根) $n^r [D_0 n^k + \dots + D_{k-1} n + D_k] \alpha^n$ ( $\alpha$ 是 $r$ 重特征根)
$\cos(n\omega)$ 或 $\sin(n\omega)$	$D_1 \cos(n\omega) + D_2 \sin(n\omega)$ ( $e^{\pm j\omega}$ 不是特征根)
$\alpha^n \cos(n\omega)$ 或 $\alpha^n \sin(n\omega)$	$\alpha^n [D_1 \cos(n\omega) + D_2 \sin(n\omega)]$ ( $\alpha e^{\pm j\omega}$ 不是特征根)

- 通过观察方程右端自由项的函数形式，试选特解函数式。
- 将特解代入方程，利用待定系数法来确定 $D_i$ 。

**定理1：**  $k$ 阶常系数非齐次线性差分方程

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_k y(n-k) = P_I(n) \alpha^n$$

有形如  $y^*(n) = n^s Q_I(n) \alpha^n$  的特解，当  $\alpha$  不是方程的特征根时  $s = 0$ ，当  $\alpha$  是方程的  $r$  重特征根时  $s = r$ 。  $P_I(n)$  为  $n$  的  $I$  次多项式，  $Q_I(n)$  为  $n$  的  $I$  次待定系数多项式。

**定理2：**  $k$ 阶常系数非齐次线性差分方程

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_k y(n-k) = \alpha^n [P_h(n) \cos(n\omega) + P_l(n) \sin(n\omega)]$$

有形如  $y^*(n) = n^s \alpha^n [Q_t^1(n) \cos(n\omega) + Q_t^2(n) \sin(n\omega)]$  的特解，当  $\alpha e^{\pm j\omega}$  非方程特征根时  $s = 0$ ，当  $\alpha e^{\pm j\omega}$  是方程的  $r$  重特征根时  $s = r$ 。  $Q_t^1(n)$ 、  $Q_t^2(n)$  是  $t = \max\{h, l\}$  次待定系数多项式。

### 3、由边界条件确定齐次解待定系数

完全解的一般形式（无重根的情况）：

$$y(n) = C_1 \alpha_1^n + C_2 \alpha_2^n + \cdots + C_N \alpha_N^n + D(n) = \sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n + D(n)$$

$C_i$  须利用  $N$  个给定的边界条件来确定。例如，

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 + \cdots + C_N + D(0) \\ y(1) = C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_2 + \cdots + C_N \alpha_N + D(1) \\ \cdots \\ y(N-1) = C_1 \alpha_1^{N-1} + C_2 \alpha_2^{N-1} + \cdots + C_N \alpha_N^{N-1} + D(N-1) \end{array} \right.$$

对于因果系统（激励在  $n=0$  时接入系统），常给定  $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$  为边界条件。

**例7-7:** 求差分方程  $y(n) + 2y(n-1) = x(n) - x(n-1)$  的完全解。其中激励信号  $x(n] = n^2$ ，且已知  $y(-1) = -1$ 。

**解:**  $\alpha = -2 \quad \therefore y_h(n) = C_1(-2)^n$  **齐次解**

右端自由项  $= n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$

$y_p(n) = D_0n + D_1$  **特解的形式**

$D_0n + D_1 + 2D_0(n-1) + 2D_1 = 2n - 1$  **特解代入差分方程**

$$\begin{cases} 3D_0 = 2 \\ 3D_1 - 2D_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow D_0 = \frac{2}{3}, D_1 = \frac{1}{9}$$

$y_p(n) = \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}$  **特解**

完全解=齐次解+特解

$$y(n) = C_1(-2)^n + \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}$$

代入边界条件求出待定系数  $C_1$ ,

$$y(-1) = C_1(-2)^{-1} + \frac{2}{3}(-1) + \frac{1}{9} = -1$$

$$C_1 = \frac{8}{9}$$

得到完全解的闭式

$$y(n) = \frac{8}{9}(-2)^n + \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}$$

**例7-8:** 解差分方程  $y(n) + 2y(n-1) + 2y(n-2) = \sin \frac{n\pi}{2}$ , 已知  $y(0) = 1$ ,  $y(-1) = 0$ 。

**解:** (1) 求齐次解

特征方程为  $\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0$  特征根为  $\alpha_{1,2} = -1 \pm j = -\sqrt{2}e^{\mp j\frac{\pi}{4}}$   
(也可写为  $\sqrt{2}e^{\pm j\frac{3\pi}{4}}$ )

齐次解为  $y_h(n) = (-\sqrt{2})^n (P \cos \frac{n\pi}{4} + Q \sin \frac{n\pi}{4})$

(2) 求特解

$$y_p(n) = D_1 \sin \frac{n\pi}{2} + D_2 \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$(2D_2 - D_1) \sin \frac{n\pi}{2} - (2D_1 + D_2) \cos \frac{n\pi}{2} = \sin \frac{n\pi}{2} \Rightarrow D_1 = -\frac{1}{5} \quad D_2 = \frac{2}{5}$$

$$y_p(n) = -\frac{1}{5} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{5} \cos \frac{n\pi}{2}$$

### (3) 求完全解

$$y(n) = \left(-\sqrt{2}\right)^n \left( P \cos \frac{n\pi}{4} + Q \sin \frac{n\pi}{4} \right) - \frac{1}{5} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{5} \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(-1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} P + \frac{2}{5} = 1 \\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left( P \frac{\sqrt{2}}{2} - Q \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{5} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore P = \frac{3}{5} \quad Q = \frac{1}{5}$$

$$y(n) = \left(-\sqrt{2}\right)^n \left( \frac{3}{5} \cos \frac{n\pi}{4} + \frac{1}{5} \sin \frac{n\pi}{4} \right) - \frac{1}{5} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{5} \cos \frac{n\pi}{2}$$

### 经典法不足之处

1. 若差分方程右边激励项较复杂，则难以处理。
2. 若激励信号发生变化，则须全部重新求解。
3. 若初始条件发生变化，则须全部重新求解。
4. 这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念。

$$y(n) = \sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n + D(n)$$



### 7.4.3 零输入响应和零状态响应

系统全响应=零输入响应+零状态响应

#### 1、零输入响应

➤定义：输入信号为零，仅由系统的起始状态单独作用而产生的响应，用 $y_{zi}(n)$ 表示。

➤数学模型：

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0$$

➤求解方法：根据差分方程的特征根确定零输入响应的形式，再由边界条件求齐次解待定系数。

已知某线性时不变系统的差分方程为：

$$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$$

系统的起始状态为 $y(-1)=0$ ， $y(-2)=1/2$ 。系统的零输入响应为（ ）。

☒ A  $y_{zi}(n) = (-1)^n - 2(-2)^n \quad n \geq 0$

☐ B  $y_{zi}(n) = 2(-2)^n \quad n \geq 0$

☐ C  $y_{zi}(n) = -2(-2)^n \quad n \geq 0$

☐ D  $y_{zi}(n) = (-1)^n \quad n \geq 0$

提交

**例7-9:** 已知某线性时不变系统的差分方程为  $y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$ ，系统的起始状态为  $y(-1)=0$ ,  $y(-2)=1/2$ ，求系统的零输入响应。

**解:** 系统的特征方程为  $\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$

特征根为  $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2$

设系统的零输入响应为  $y_{zi}(n) = C_1(-1)^n + C_2(-2)^n$

$$y(-1) = -C_1 - \frac{1}{2}C_2 = 0$$

$$y(-2) = C_1 + \frac{1}{4}C_2 = \frac{1}{2}$$

解得  $C_1=1, C_2=-2$

用零点以前的值来求的

$$\therefore y_{zi}(n) = (-1)^n - 2(-2)^n \quad (n \geq 0)$$

### 2、零状态响应

➤定义：当系统的起始状态为零时，由系统的外部激励 $x(n)$ 产生的响应，用 $y_{zs}(n)$ 表示。

➤数学模型：

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

➤求解方法：

- 1) 直接求解起始状态为零的差分方程。
- 2) **卷积法**：利用信号分解和线性时不变系统的特性求解。

### 3、零状态响应的直接求解法

直接求解起始状态为零的差分方程，也可得零状态响应。

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=1}^N C_{zsk} \alpha_k^n + D(n)$$

对于因果系统（激励信号在 $n=0$ 时接入系统），常给出 $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ 作为边界条件。

零状态是指 $y(-1), y(-2), y(-3), \dots, y(-N)$ 都等于零。

$y(0), y(1), y(2), \dots, y(N-1)$ 可用迭代法求出。

完全响应=齐次解 + 特解



完全响应=自由响应+强迫响应

完全响应=零输入响应+零状态响应

$$y(n) = \sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n + D(n)$$



自由响应    强迫响应

$$= \sum_{k=1}^N C_{zik} \alpha_k^n + \sum_{k=1}^N C_{zsk} \alpha_k^n + D(n)$$



零输入响应    零状态响应

对于 $N$ 阶差分方程，激励在 $n=0$ 时加入，确定零输入响应或零状态响应的齐次解的系数，需利用边界条件--  $N$ 个 $y(n)$ 值。

确定零输入响应的齐次解的系数：起始条件 $y(n)$ 中的 $n$ 可正可负，且未必连续

（例如，教材例7-8中给出了 $y(1), y(2), y(3), y(5)$ ）。 $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ 或 $y(0), y(1), \dots, y(N-1)$ 作为边界条件均可。 $n \geq 0$ 时的 $y(n)$ 可利用 $n < 0$ 时的 $y(n)$ 迭代得到，迭代时须令差分方程右边等于零。

确定零状态响应的齐次解的系数：令 $y(-1)=y(-2)=\dots=y(-N+1)=0$ ，迭代求 $y(0), y(1), \dots$ 。假设激励在 $n = n_0$ 时加入，边界条件中需包含至少一个 $n \geq n_0$ 的 $y(n)$ ，且 $n < n_0$ 时的 $n$ 需连续（确保可以迭代得到 $n \geq n_0$ 的 $y(n)$ ）。例如， $n_0 = 0$ 时， $y(0), y(-1), y(-N+1)$ 作为边界条件。

**例7-10：**已知某线性时不变因果系统的差分方程式为：

$$y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n)$$

(1) 若边界条件 $y(-1)=0$ ，求系统的完全响应。

(2) 若边界条件 $y(-1)=1$ ，求系统的完全响应。

**解：**（1）因为边界条件 $y(-1)=0$ ，求系统的完全响应等效于求**零状态响应**。

方程的齐次解为  $C(0.9)^n$

由方程右端激励形式，选择特解为 $D$

将特解代入差分方程： $D - 0.9D = 0.05$ ，  $D = 0.5$

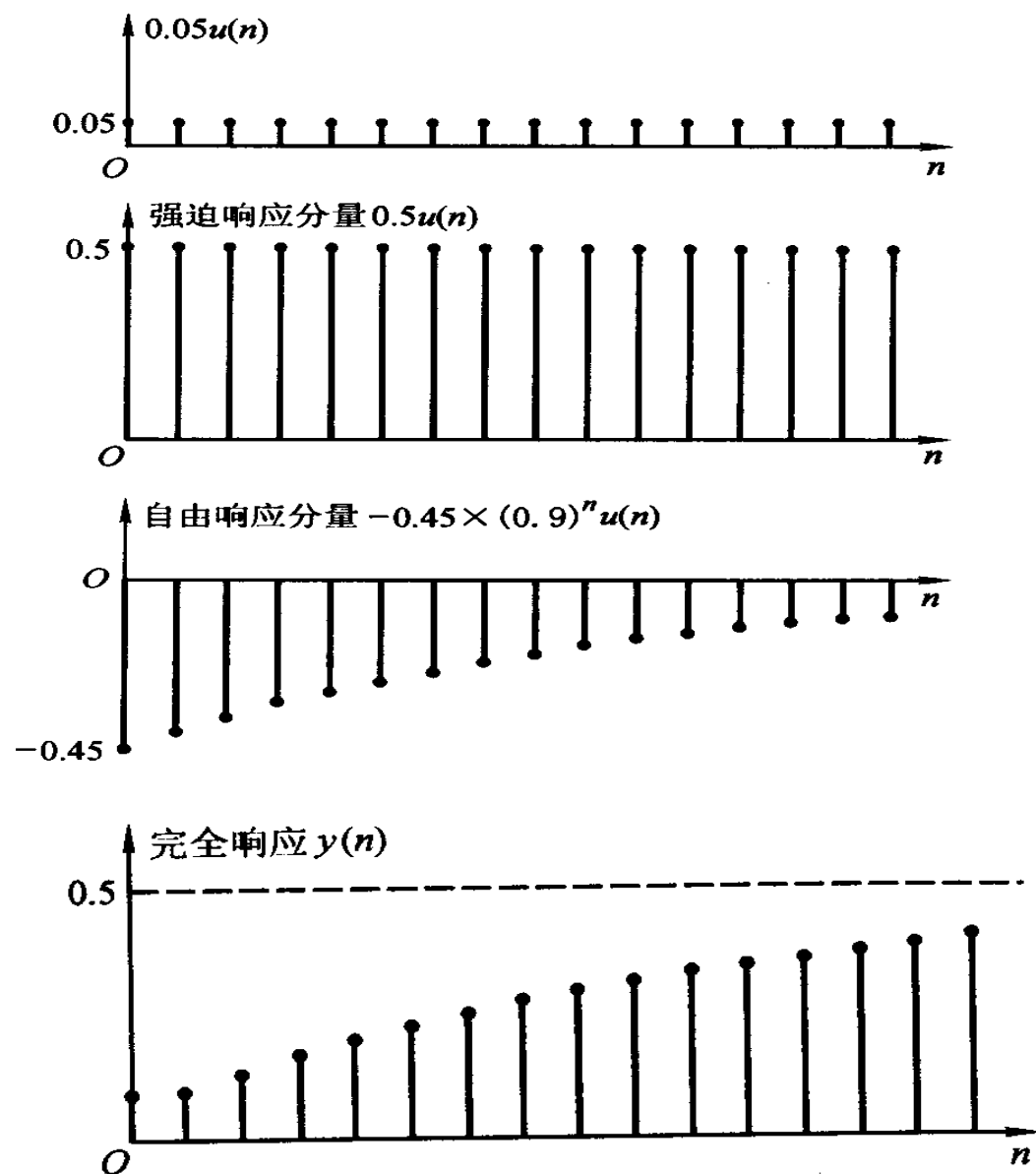
完全解形式为： $y(n) = C(0.9)^n + 0.5$

由 $y(-1)=0$ ，利用**迭代法**得到  $y(0) = 0.9y(-1) + 0.05 = 0.05$

**$y(0)$  代入 $y(n)$ ：**  $0.05 = C + 0.5 \Rightarrow C = -0.45$

$$\therefore y(n) = \left[ -0.45 \times (0.9)^n + 0.5 \right] u(n)$$





(2) 在(1)中已求得零状态响应  $y_{zs}(n) = \left[ -0.45 \times (0.9)^n + 0.5 \right] u(n)$

求零输入响应:

令激励为零, 得差分方程:  $y(n) - 0.9y(n-1) = 0$

零输入响应  $y_{zi}(n) = C_{zi} \times (0.9)^n$

$y(-1)=1$ 代入:  $1 = C_{zi} \times (0.9)^{-1} \Rightarrow C_{zi} = 0.9$

完全响应:  $y(n) = \underbrace{\left[ -0.45 \times (0.9)^n + 0.5 \right]}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{0.9 \times (0.9)^n}_{\text{零输入响应}}$

$= \underbrace{0.45 \times (0.9)^n}_{\text{自由响应}} + \underbrace{0.5}_{\text{强迫响应}} \quad (n \geq 0)$

### 利用经典法求完全响应

方程的齐次解为  $C(0.9)^n$

由方程右端激励形式，选择特解为  $D$

将特解代入差分方程：  $D - 0.9D = 0.05$  ,  $D = 0.5$

完全解形式为：  $y(n) = C(0.9)^n + 0.5$

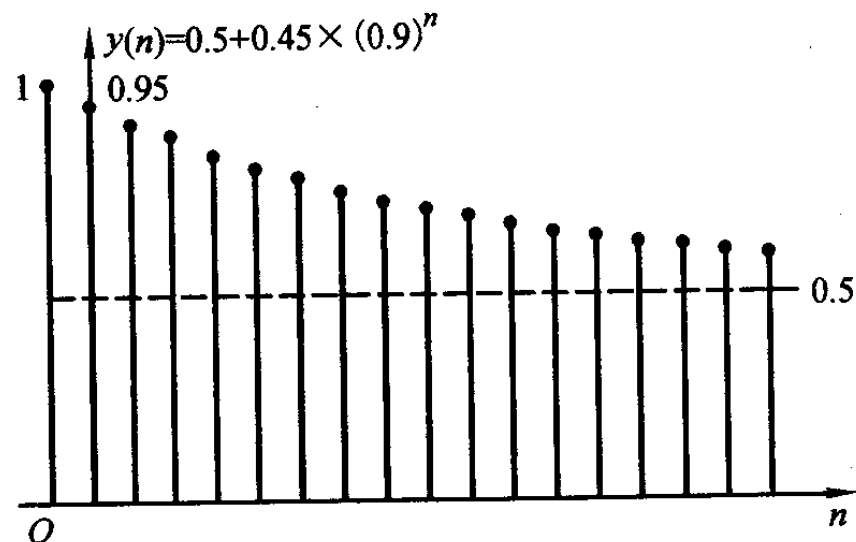
由  $y(-1)=1$ ，利用迭代法得到  $y(0) = 0.9y(-1) + 0.05 = 0.95$

$y(0)=0.95$  代入完全解  $y(n)$ ：

$$0.95 = C + 0.5 \Rightarrow C = 0.45$$

$$\therefore y(n) = [0.45 \times (0.9)^n + 0.5] u(n)$$

结果同前面一样！

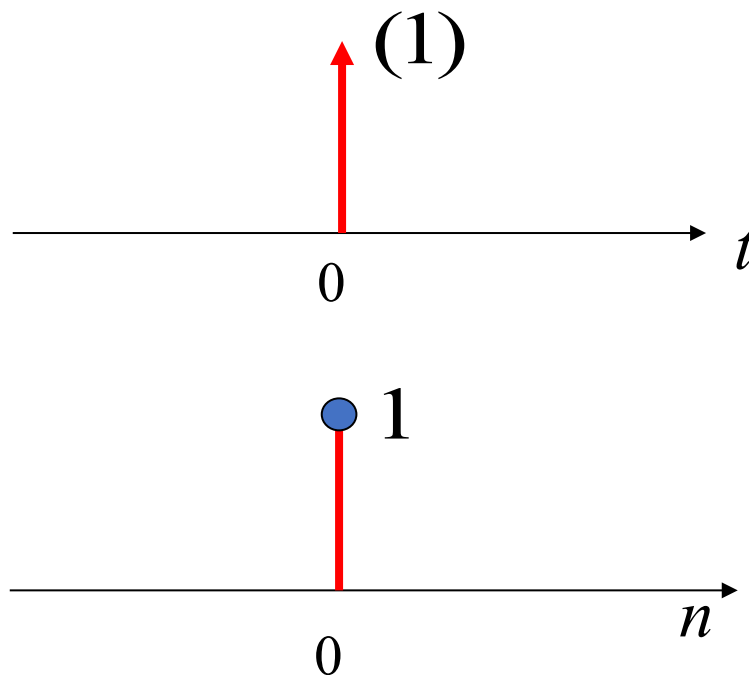


**单位样值响应：**是激励为 $\delta(n)$ 时产生的系统**零状态响应**，用 $h(n)$ 表示。

注意 $\delta(t)$ 和 $\delta(n)$ 的区别：

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 & (t = 0) \\ \delta(t) = 0 & (t \neq 0) \end{cases}$$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



7.1 引言

7.2 离散时间信号一序列

7.3 离散时间系统的数学模型

7.4 常系数线性差分方程的求解

7.5 离散时间系统的单位样值(冲激)响应

7.6 卷积和

### 7.5.1 单位样值响应的求解

#### 1、迭代法求系统单位样值响应

**例7-11：** 已知离散时间系统的差分方程表达式如下，求单位样值响应。

$$y(n) - 0.5y(n-1) = x(n)$$

**解：** 对于因果系统  $x(-1) = \delta(-1) = 0$ ,  $y(-1) = h(-1) = 0$

$$h(0) = \delta(0) + 0.5y(-1) = 1$$

$$h(1) = \delta(1) + 0.5y(0) = 0.5$$

$$h(2) = \delta(2) + 0.5y(1) = (0.5)^2$$

.....

$$\therefore h(n) = (0.5)^n u(n)$$

### 2、将单位样值激励信号转化为边界条件

将  $\delta(n)$  转化为边界条件，于是求单位样值响应转化为求齐次解，即  $n > 0$  时的零输入响应。

以上一例题为例  $y(n) - 0.5y(n-1) = x(n)$

$$\alpha - 0.5 = 0 \quad \alpha = 0.5$$

齐次解为  $h(n) = C(0.5)^n u(n)$

$$h(-1) = 0 \quad h(0) = 0.5h(-1) + \delta(0) = 1$$

$$h(0) = C(0.5)^0 = 1 \quad C = 1$$

$$\therefore h(n) = (0.5)^n u(n)$$

**例7-12:** 已知系统差分方程，求单位样值响应。

$$y(n) - 3y(n-1) + 3y(n-2) - y(n-3) = x(n)$$

**解:**  $h(n)$  满足方程

$$h(n) - 3h(n-1) + 3h(n-2) - h(n-3) = \delta(n)$$

**(1) 求零输入响应**

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1 = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$$

齐次解为

$$C_1 n^2 + C_2 n + C_3$$

**(2) 边界条件**

对于因果系统，有  $h(-1) = 0, h(-2) = 0, h(-3) = 0$

代入差分方程，可推出

$$h(0) = 3h(-1) - 3h(-2) + h(-3) + \delta(0) = 1$$



$$C_1 n^2 + C_2 n + C_3$$

以  $h(0) = 1, h(-1) = 0, h(-2) = 0$  作为零输入响应的边界条件

$$\begin{cases} 1 = C_3 \\ 0 = C_1 - C_2 + C_3 \\ 0 = 4C_1 - 2C_2 + C_3 \end{cases} \quad C_1 = \frac{1}{2} \quad C_2 = \frac{3}{2} \quad C_3 = 1$$

(3) 求单位样值响应

$$h(n) = \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2)u(n)$$

边界条件也可以是  $h(0), h(1), h(2)$

注意：选择边界条件的基本原则是必须将  $\delta(n)$  的作用体现在边界条件中。

### 3、利用线性时不变性求单位样值响应

在  $n \neq 0$  时，接入激励  $\delta(n-1)$ ，用线性时不变性来计算  $h(n)$ 。

$$y(n) - 0.5y(n-1) = \delta(n-1)$$

$$x(n) = \delta(n) \quad h(n) = (0.5)^n u(n)$$

$$x(n) = \delta(n-1) \quad r(n) = h(n-1) = (0.5)^{n-1}$$

**例7-13:** 已知系统的差分方程模型, 求单位样值响应。

$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = x(n) - 3x(n-2)$$

**解:** (1) 齐次解为  $C_1 2^n + C_2 3^n$

拆开求解

(2) 只考虑激励  $x(n) = \delta(n)$  作用时系统的单位样值响应  $h_1(n)$

$$h_1(0) = 1, \quad h_1(-1) = 0 \quad C_1 = -2, \quad C_2 = 3$$

$$h_1(n) = (3^{n+1} - 2^{n+1})u(n)$$

(3) 只考虑激励  $-3x(n-2)$

$$h_2(n) = -3h_1(n-2) = -3(3^{n-1} - 2^{n-1})u(n-2)$$

利用LTI性质

$$\begin{aligned} (4) \quad h(n) &= h_1(n) + h_2(n) = (3^{n+1} - 2^{n+1})u(n) - 3(3^{n-1} - 2^{n-1})u(n-2) \\ &= (3^{n+1} - 2^{n+1})[\delta(n) + \delta(n-1) + u(n-2)] - (3^n - 3 \times 2^{n-1})u(n-2) \\ &= \delta(n) + 5\delta(n-1) + (2 \times 3^n - 2^{n-1})u(n-2) \end{aligned}$$

### 7.5.2 根据单位样值响应分析系统的因果性和稳定性

因果系统：输出变化不领先于输入变化的系统。即响应只取决于此时及以前的激励。

离散时间线性时不变系统是因果系统的充分必要条件：

$$n < 0 \quad h(n) = 0 \quad \text{或} \quad h(n) = h(n)u(n)$$

稳定系统：输入有界则输出必定有界。

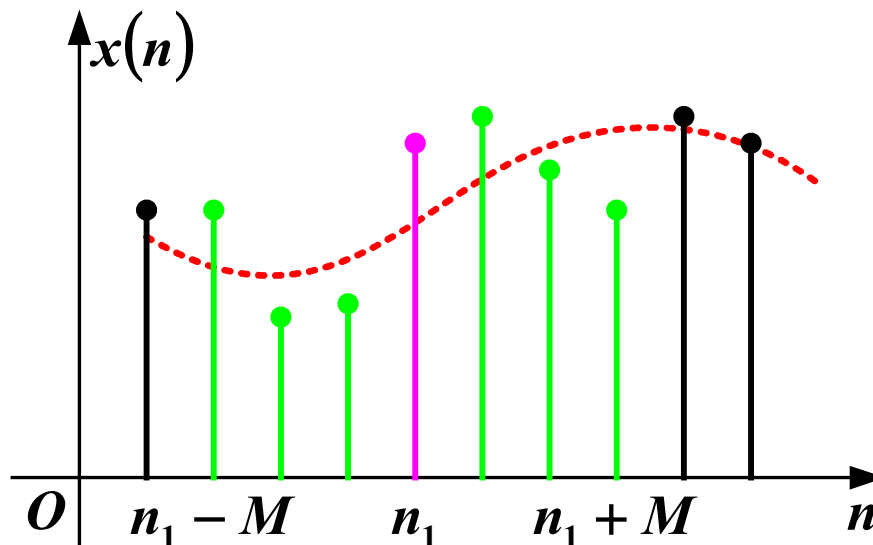
离散实际线性时不变系统是稳定系统的充分必要条件：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leq M, M \text{ 为有界正值}$$

### 非因果系统举例

**滑动平均滤波器：**为考察一段时间内的慢变化趋势，可以利用移动平滑系统滤除高频成分。

$$y(n) = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x(n-k)$$





已知某系统的单位样值响应  $h(n) = a^n u(n)$ ，该系统（）

- ☐ A 因果，稳定
- ☐ B 非因果，稳定
- ☒ C 因果， $|a| < 1$  时稳定， $|a| > 1$  时不稳定
- ☐ D 因果， $|a| < 1$  时不稳定， $|a| > 1$  时稳定

提交

**例7-14:** 已知某系统的单位样值响应  $h(n) = a^n u(n)$ ，判断它的因果性和稳定性。

**解:**  $n < 0, u(n) = 0 \quad \therefore n < 0, h(n) = a^n u(n) = 0$

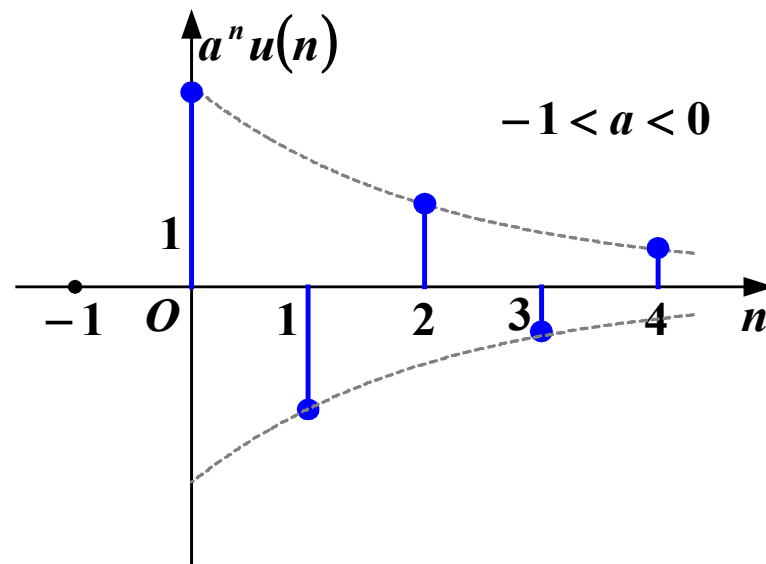
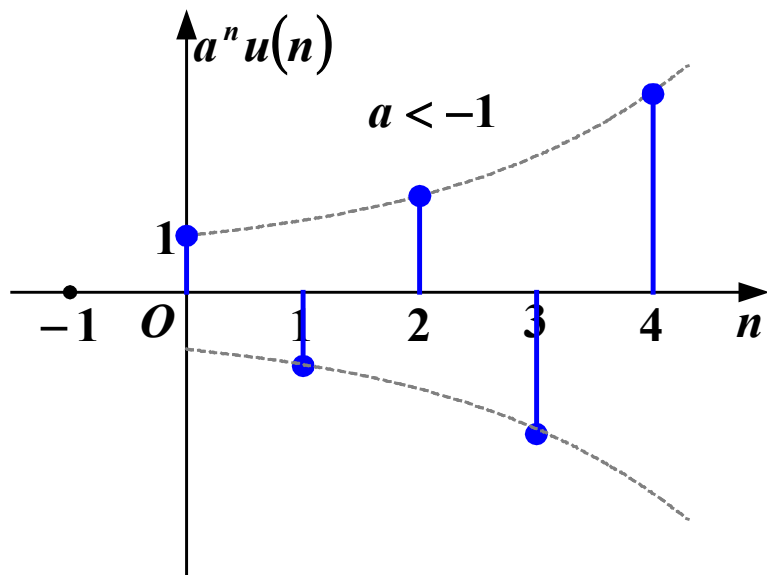
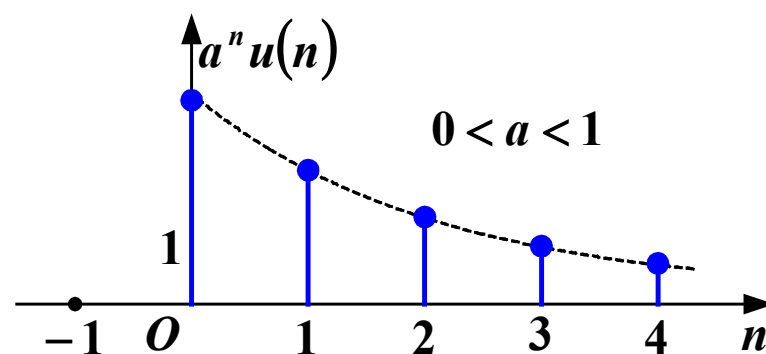
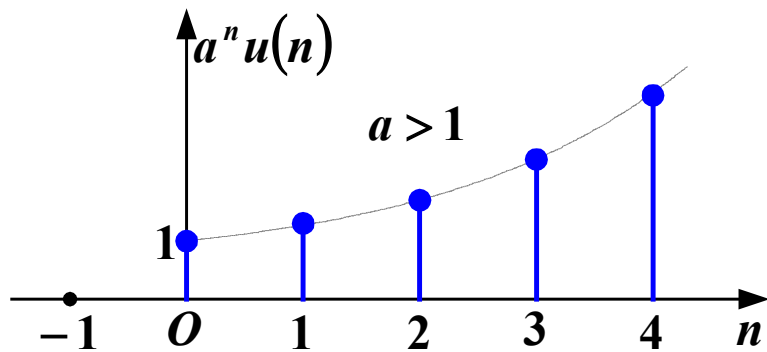
该系统是因果系统。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \begin{cases} |a| < 1 & \frac{1}{1-|a|} \\ |a| > 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-|a|^{n+1}}{1-|a|} \end{cases}$$

有界稳定

发散不稳定

当 $|a| > 1$ 时序列是发散的；当 $|a| < 1$ 时序列是收敛的。





**例7-15:** 已知系统的差分方程模型如下, 求系统的单位样值响应  $h(n)$ , 并判断系统的稳定性。

$$y(n) + \frac{1}{5}y(n-1) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2)$$

**解:**

$$h(n) + \frac{1}{5}h(n-1) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$$

$$\text{特征根 } \alpha = -\frac{1}{5} \quad \therefore h(n) = C\left(-\frac{1}{5}\right)^n \quad n \geq 2$$

此时方程右边的三个样值函数都已作用完毕

$$h(-1) = 0, \quad \text{迭代求得 } h(0) = 1, h(1) = \frac{9}{5}, h(2) = \frac{66}{25} \rightarrow C = 66$$

$$h(n) = \delta(n) + \frac{9}{5}\delta(n-1) + 66\left(-\frac{1}{5}\right)^n u(n-2)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = 1 + \frac{9}{5} + \sum_{n=2}^{\infty} |66(-0.2)^n| < \infty \quad \text{此为稳定系统。}$$

## 作业

基础题：7-12 (1) (2) , 7-29。

加强题：7-27。