上节内容

8.6 z变换与拉普拉斯变换的关系

8.7 利用z变换解差分方程

8.8 离散时间系统的系统函数

z平面与s平面的映射关系

$z = e^{sT}$　　T为序列的时间间隔

将s表示成直角坐标形式，把z表示成极坐标形式

$$s = \sigma + j\omega$$

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = re^{j\theta}$$

$$\begin{cases} r = e^{\sigma T} = e^{\frac{2\pi\sigma}{\omega_s}} \\ \theta = \omega T = 2\pi \dfrac{\omega}{\omega_s} \end{cases}$$

$\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$ 为重复频率

8.6 z变换与拉普拉斯变换的关系

1)s平面上的虚轴$\xlongequal{\text{映射}}$$z$平面上的单位圆$(r=1)$

$$\sigma=0 \quad s=j\omega \quad r=|z|=e^{\sigma T}=1$$

2)s平面上的左半平面$\xlongequal{\text{映射}}$$z$平面上的单位圆内$(r<1)$

$$\sigma<0, s=\sigma+j\omega \qquad r=|z|=e^{\sigma T}<1$$

3)s平面上的右半平面$\xlongequal{\text{映射}}$$z$平面上的单位圆外$(r>1)$

$$\sigma>0, s=\sigma+j\omega \qquad r=|z|=e^{\sigma T}>1$$

4)平行于虚轴的直线$\xlongequal{\text{映射}}$z平面上的圆$\begin{pmatrix} \sigma>0, r>1 \\ \sigma<0, r<1 \end{pmatrix}$

8.6 z变换与拉普拉斯变换的关系

5) s平面上的实轴$(\omega=0)\xrightarrow{\text{映射}}z$平面上的正实轴$(\theta=0)$

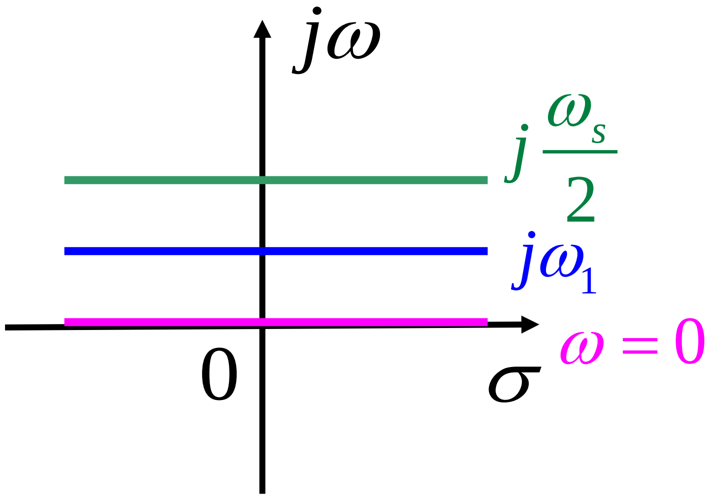
平行于实轴的直线$(\omega=$常数$)\xrightarrow{\text{映射}}z$平面上始于原点的射线

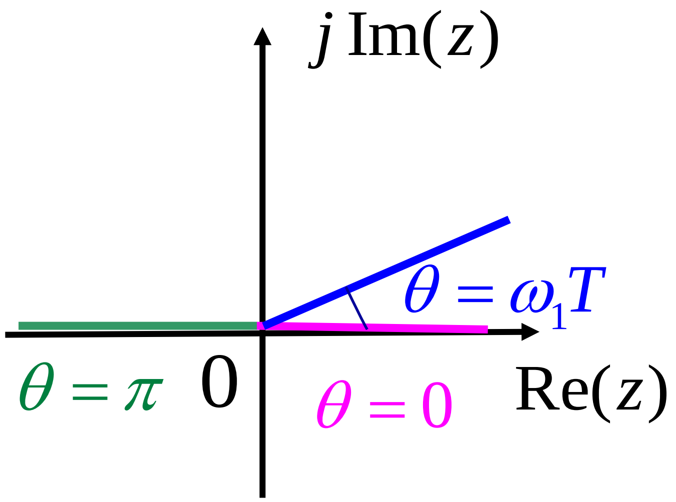
通过$\pm j\dfrac{k\omega_s}{2}(k=\pm1,\pm3,\dots)$平行于实轴的直线$\xrightarrow{\text{映射}}z$平面上

负实轴$\begin{pmatrix}\theta=\pi\\ r\text{任意}\end{pmatrix}$

$$\theta=\omega T=2\pi\frac{\omega}{\omega_s}=2\pi\frac{k\omega_s/2}{\omega_s}=k\pi$$

$$\omega_s=\frac{2\pi}{T}$$





6) s平面上沿虚轴移动$\overset{\text{映射}}{===}$$z$平面上沿单位圆周期性旋转，

每平移ω_s，则沿单位圆转一圈。

即$s \sim z$平面的映射并不是单值的。

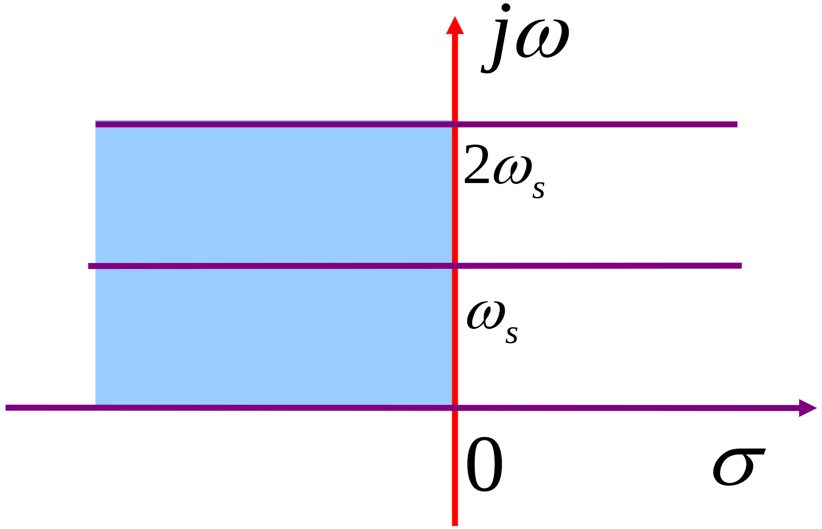
$$\theta = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s} \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

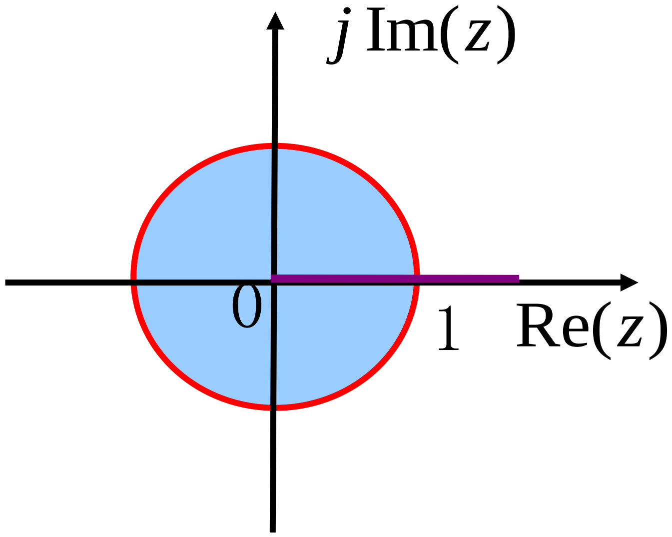
$\omega = 0 \to \omega_s$ $\qquad$ $\theta = 0 \to 2\pi$

$\omega = \omega_s \to 2\omega_s$ $\qquad$ $\theta = 2\pi \to 4\pi$

$\omega = 0 \to k\omega_s$ $\qquad$ $\theta = 0 \to 2k\pi$

多圈





$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

求零状态响应：

若激励**x(n)**为因果序列，则

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X(z)$$

$$Y_{zs}(z) = X(z) \cdot \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

系统函数：

$$\boxed{H(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}}$$

$$Y_{zs}(z) = X(z) H(z)$$

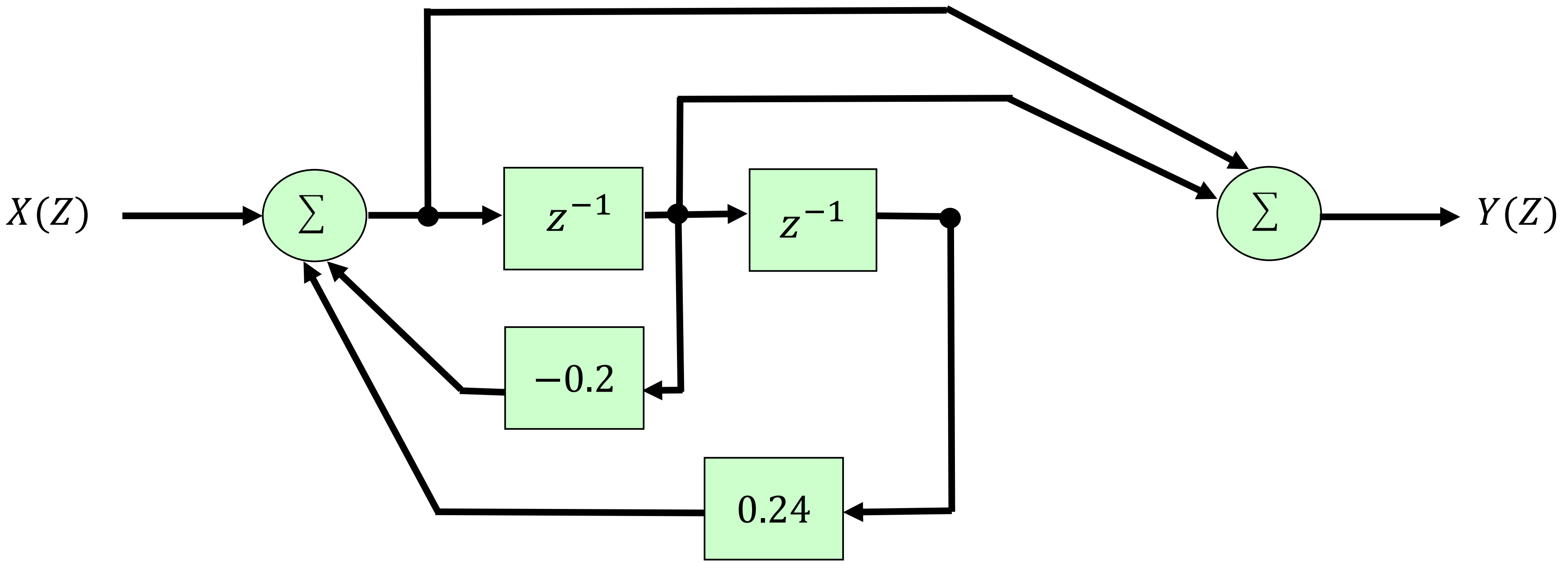
$$y_{zs}(n) = ZT^{-1}[X(z)H(z)]$$

填空题　2分

设置

求具有下列模拟框图的系统的差分方程：

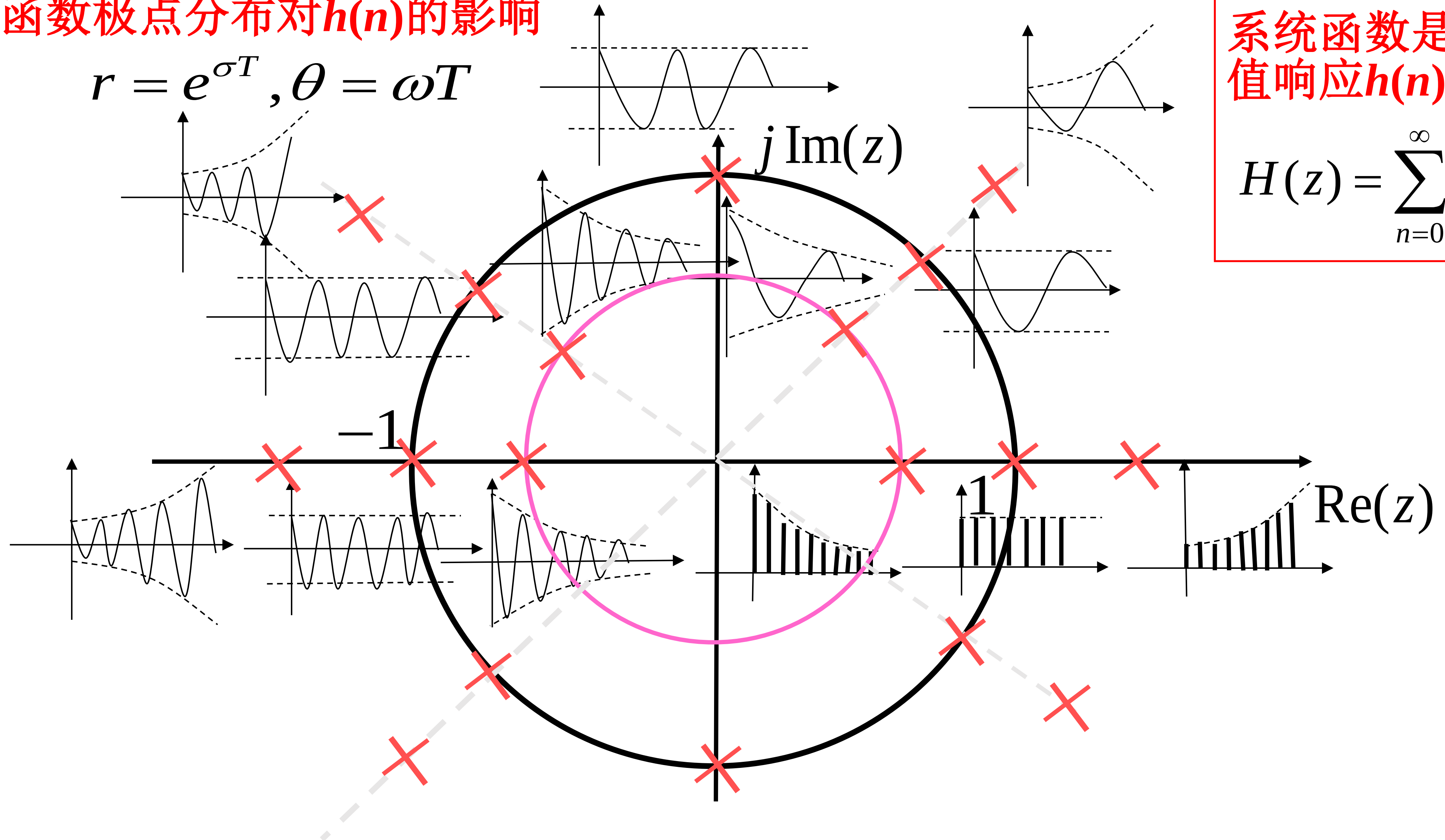
$y(n)+$ [填空1] $y(n\text{-}1)+$ [填空2] $y(n\text{-}2) = x(n)+$ [填空3] $x(n\text{-}1)+$ [填空4] $x(n\text{-}2)$



作答

系统函数极点分布对h(n)的影响

$$r = e^{\sigma T}, \theta = \omega T$$



系统函数是单位样值响应**h(n)**的z变换

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

离散时间系统的稳定性和因果性

1、时域中系统因果稳定的条件

离散时间系统稳定的充要条件是：单位样值响应绝对可和。即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$$

因果稳定系统的充要条件为：***h*(*n*)**是右边序列且绝对可和, 即

$$\begin{cases} h(n)=h(n)u(n) & \text{因果} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty & \text{稳定} \end{cases}$$

2、z域因果稳定的条件

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n},\text{其存在要求}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)z^{-n}\right|<\infty$$

当$|z|=1$时，$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$ ，恰好满足系统稳定的条件。

因此对于稳定系统，$H(z)$的收敛域应包含单位圆（无论是否为因果系统）。

对于因果稳定系统，收敛域为 $|z|>a\ (a<1)$ ，即全部极点位于单位圆内。

例8-19： 已知$y(n)+0.2y(n-1)-0.24y(n-2)=x(n)+x(n-1)$，求$H(z)$、$h(n)$，讨论此因果系统的收敛域和稳定性。若激励信号为$u(n)$，求零状态响应。

解： (1) 求系统函数

差分方程两边做z变换可得

$$Y(z)+0.2z^{-1}Y(z)-0.24z^{-2}Y(z)=X(z)+z^{-1}X(z)$$

整理得
$$\left(1+\frac{0.2}{z}-\frac{0.24}{z^2}\right)Y(z)=\left(1+\frac{1}{z}\right)X(z)$$

$$\therefore H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^2+z}{z^2+0.2z-0.24}=\frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.6)}$$

(2) 求收敛域和判断稳定性

$$H(z)=\frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.6)} \qquad \because z_1=0.4,\quad z_2=-0.6$$

系统为因果系统，$\therefore |z|>0.6$

收敛域包括单位圆，系统稳定。

(3) 求单位样值响应*h*(*n*)

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{1.4}{z-0.4}-\frac{0.4}{z+0.6} \qquad H(z)=\frac{1.4z}{z-0.4}-\frac{0.4z}{z+0.6}$$

$$h(n)=[1.4(0.4)^n-0.4(-0.6)^n]u(n)$$

（4）求零状态响应

$$x(n)=u(n) \qquad X(z)=\frac{z}{z-1}(|z|>1)$$

$$Y_{zs}(z)=H(z)X(z)=\frac{z^2(z+1)}{(z-1)(z-0.4)(z+0.6)}$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{2.08z}{z-1}-\frac{0.93z}{z-0.4}-\frac{0.15z}{z+0.6}(|z|>1)$$

零状态响应

$$y_{zs}(n)=[2.08-0.93(0.4)^n-0.15(-0.6)^n]u(n)$$

本次课内容

8.9 序列的傅里叶变换

8.10 离散时间系统的频率响应

本次课目标

1. 理解模拟角频率和数字角频率的区别，理解序列的傅里叶变换的周期性；

2. 熟练运用离散时间系统的频率响应求稳态响应；

3. 熟练运用系统函数的零极点分布图粗略画出频响特性曲线。

离散信号的复频域分析

离散系统的复频域分析

离散信号的频域分析

离散系统的频域分析

8.9 序列的傅里叶变换（DTFT）

8.9.1 定义

序列的傅里叶变换也称离散时间的傅里叶变换（**DTFT，Discrete-time Fourier transform**），为研究离散时间系统的频率响应作准备。

连续信号的傅里叶变换	离散序列的傅里叶变换
$X(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$	$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$
$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$	$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$

频率的比较

模拟角频率Ω，量纲：弧度/秒；

数字角频率 ω，量纲：弧度；

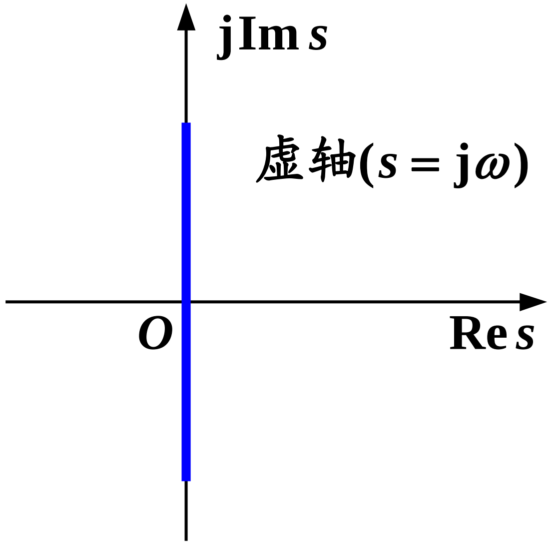
$e^{j\omega}$ 是周期为2π的周期函数

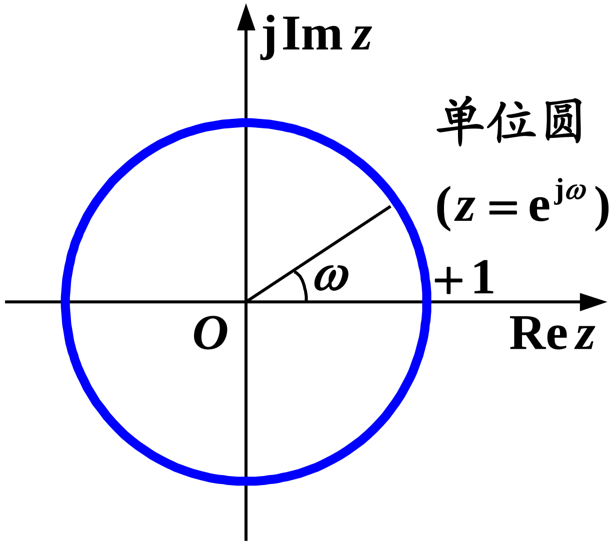
$$z=e^{sT}=e^{j\Omega T}=e^{j\omega}$$

$$\omega=\Omega T$$

DTFT与z变换的关系

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$





令$z=e^{j\omega}$，$|z|=1$，即单位圆上的z变换就是DTFT

周期为2π

$$X(e^{j\omega})=X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

DTFT的逆变换

$$x(n)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_{|z|=1}X(z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\oint_{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right|=1}X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega}\,\mathrm{d}\omega$$

$$\mathrm{DTFT}\left[x(n)\right]=X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}$$

$$\mathrm{IDTFT}\left[X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right]=x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega}\,\mathrm{d}\omega$$

8.9.2　序列的频谱

$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)=\left|X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right|e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$　　　$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)$为$x(n)$的频谱

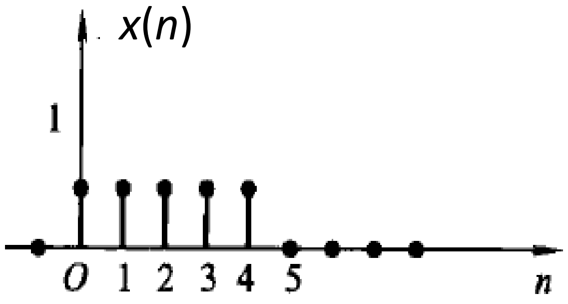
$\left|X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right|$为$x(n)$的幅度谱，$\varphi(\omega)$为相位谱。两者都为$\omega$的连续函数。

因为$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)=X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega+2\pi)}\right)$，$X\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)$是以$2\pi$为周期的周期函数。

实序列的傅里叶变换$X(e^{j\omega})$的实部偶对称、虚部奇对称，幅度谱偶对称、相位谱奇对称。

例8-21：已知序列$x(n)=u(n)-u(n-5)$，求其傅里叶变换$X(e^{j\omega})$。

解：



$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{-j5\omega/2}}{e^{-j\omega/2}}\cdot\frac{e^{j5\omega/2}-e^{-j5\omega/2}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}=e^{-j2\omega}\cdot\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

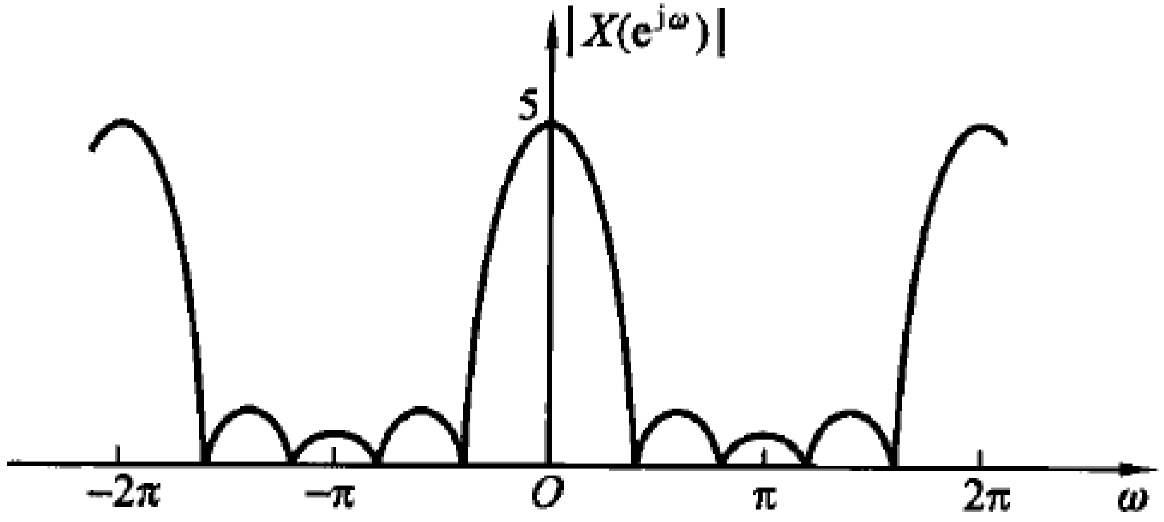
$$=\left|X\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\left|X\left(\mathrm{e}^{j\omega}\right)\right|=\left|\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right| \qquad \varphi(\omega)=-2\omega+\arg\left[\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right]$$

arg[ ]--方框内表达式的相移

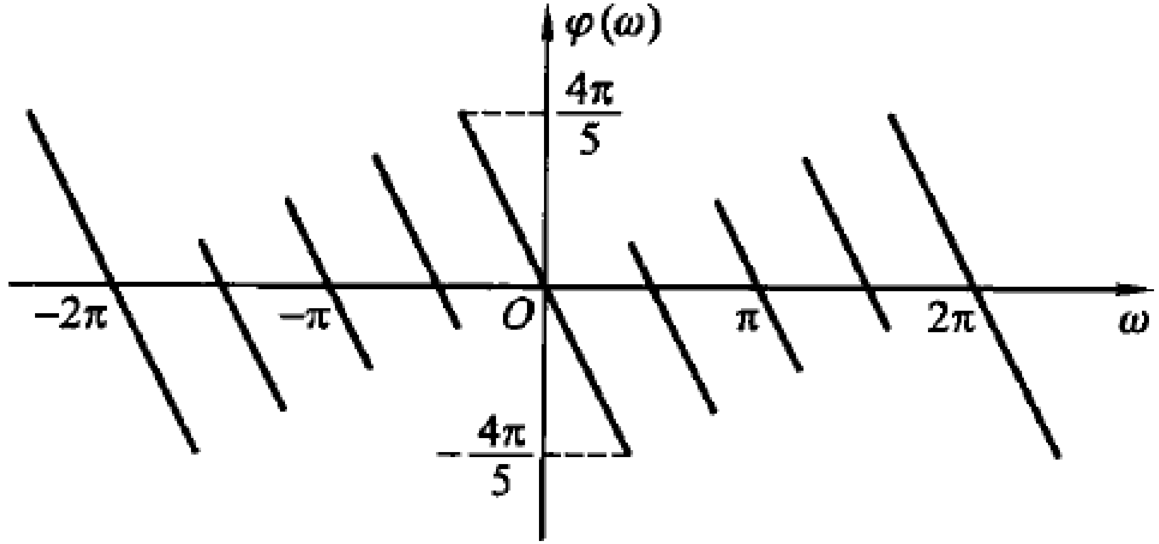
8.9 序列的傅里叶变换（DTFT）

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right|$$



$$\varphi(\omega) = -2\omega + \arg\left[\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right]$$

$$= \begin{cases} -2\omega & \omega \in [0, 2\pi/5) \\ -2\omega + \pi & \omega \in [2\pi/5, 4\pi/5) \\ -2\omega + 2\pi & \omega \in [4\pi/5, 6\pi/5) \\ -2\omega + 3\pi & \omega \in [6\pi/5, 8\pi/5) \\ -2\omega + 4\pi & \omega \in [8\pi/5, 2\pi) \end{cases}$$

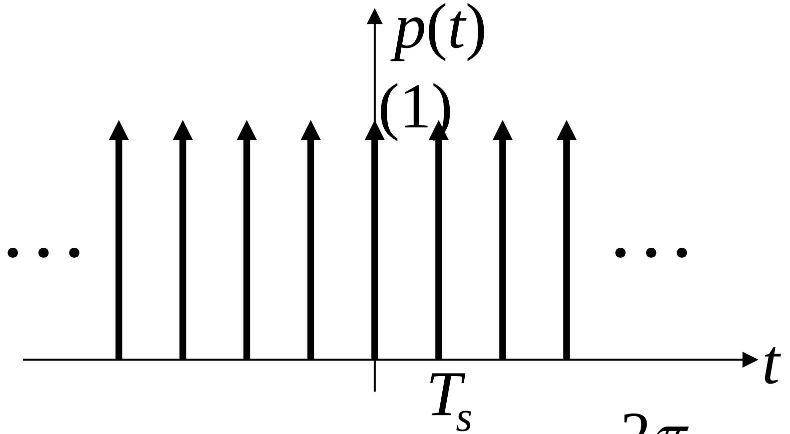


抽样信号的傅里叶变换

令连续信号$f(t)$的傅里叶变换为 $F(\Omega)$

抽样脉冲$p(t)$的傅里叶变换为 $P(\Omega)$

抽样后信号$f_s(t)$的傅里叶变换为 $F_s(\Omega)$



抽样信号：$f_s(t) = f(t)p(t) = f(t)\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$　　$(\omega_s = \dfrac{2\pi}{T_s})$

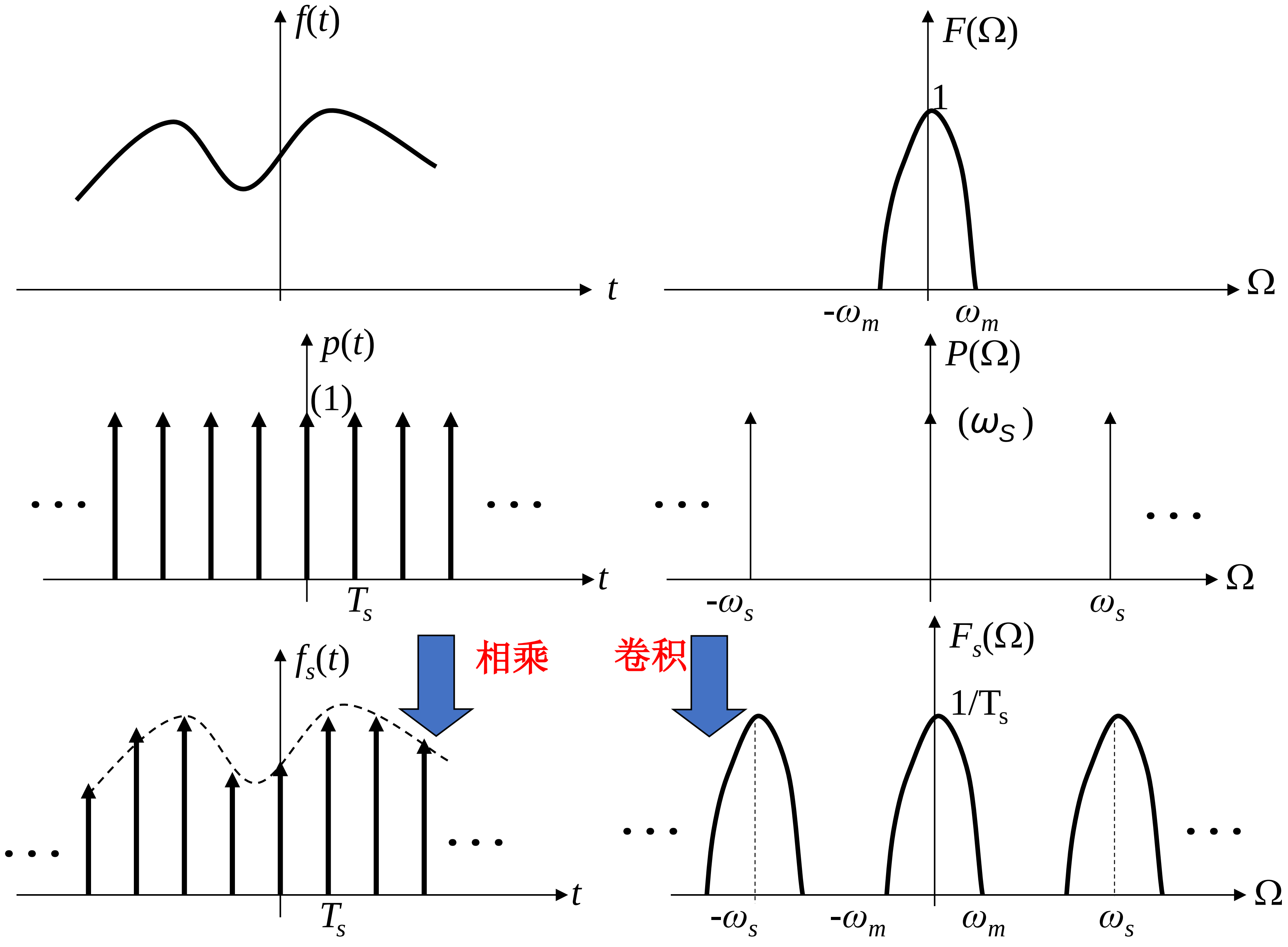
$$P(\Omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\delta(\Omega - n\omega_s) \quad \text{其中} \quad P_n = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}\delta(t)e^{-jn\omega_s t}dt = \frac{1}{T_s}$$

$$F_s(\Omega) = \frac{1}{2\pi}F(\Omega) * P(\Omega) = \frac{1}{2\pi}F(\Omega) * \frac{2\pi}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - n\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\Omega - n\omega_s) \quad \longleftarrow \quad F_s(\Omega)\ \text{是周期为}\ \omega_s\ \text{的周期函数。}$$

$\omega = \Omega T_s,\ \omega_s T_s = 2\pi$　　$F_s(e^{j\omega}) = F_s(e^{j\Omega T_s})$ 是周期为2π的周期函数。

8.9 序列的傅里叶变换（DTFT）



8.9.3 DTFT存在的条件

(1) 若要DTFT存在，就要求对于全部的ω有$|X(e^{j\omega})|<\infty$。

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}\right|\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)||e^{-j\omega n}|\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty$$

这表明若序列**绝对可和**，则傅里叶变换存在。但由于上式存在不等式缩放，

绝对可和仅是序列傅里叶变换存在的充分条件。

(2) 若序列**平方可和**，即$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2<\infty$，序列**能量有限**，此时有

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$ 均方收敛于$X\left(e^{j\omega}\right)$，序列的傅里叶变换也存在。

上述两条件仅是序列傅里叶变换存在的**充分条件**，不满足这两个条件的某些序列（如周期性序列、单位阶跃序列），只要引入单位样值信号$\delta(n)$，也可以得到它们的傅里叶变换。

序列傅里叶变换存在的充分必要条件至今尚未找到。

下列关于序列傅里叶变换的说法中，**错误**的是（ ）

A 实序列的傅里叶变换满足共轭对称性，即$X(e^{j\omega})$的实部偶对称、虚部奇对称，模值偶对称、相角奇对称。

B 序列满足绝对可和条件时一定满足能量受限，而能量受限不能保证绝对可和。

C $X(e^{j\omega})$是ω的复函数且周期为2π，但其模值与相角不一定以2π为周期。

D 序列傅里叶变换的帕塞瓦尔定理表明，序列的时域总能量等于频域一周期内的总能量。

提交

8.10.1 离散系统频响特性的意义

1、频响特性的定义

频率响应特性：离散系统在正弦序列作用下的稳态响应（steady state, SS）随频率变化的情况。

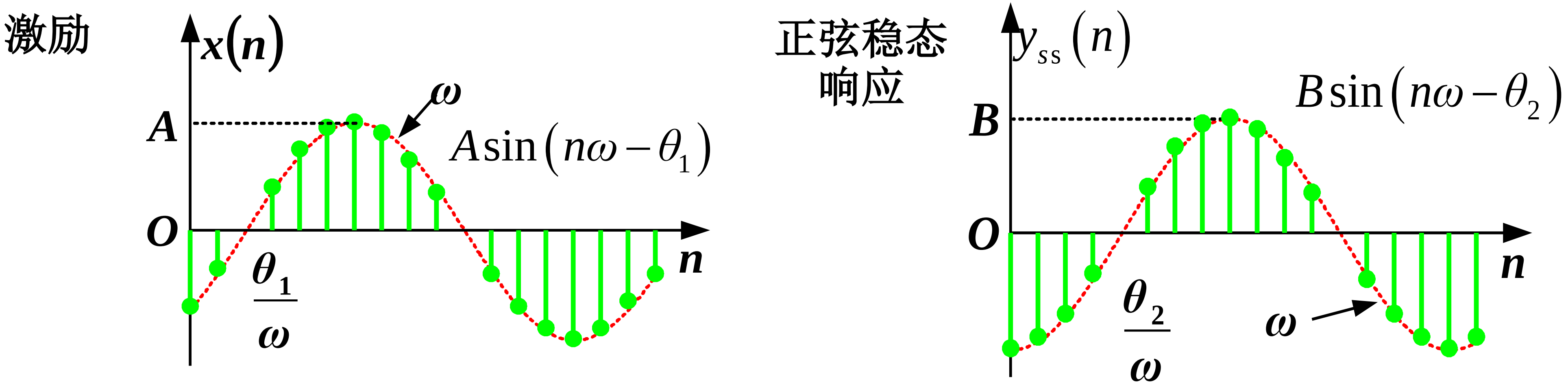
$$x(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow y_{ss}(n)$$

稳定的离散因果系统

$$x(n) = A\sin(n\omega_c)u(n) \qquad H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\boxed{y_{ss}(n) = A\left|H(e^{j\omega_c})\right|\sin[n\omega_c + \varphi(\omega_c)]u(n)}$$

证明：见教材95-96页。



$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)} = \frac{B}{A} e^{j[-(\theta_2-\theta_1)]}$$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{B}{A} \qquad \varphi(\omega) = -(\theta_2 - \theta_1)$$

频响特性的意义：表示输出正弦序列的幅度和相位相对于输入正弦序列的变化。

2、由系统函数得到频响特性

系统函数在单位圆上的z变换即为系统的频率响应特性：

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\sim\omega$ ： 幅度响应或幅频特性

输出正弦序列与输入正弦序列的幅度之比

$\varphi(\omega)\sim\omega$ ： 相位响应或相频特性

输出正弦序列对输入正弦序列的相移

$e^{j\omega}$ 为周期函数，所以 $H\left(e^{j\omega}\right)$ 为周期函数，其周期为 2π 是有别于连续系统的一个突出特点。

例8-22: 已知离散时间系统的系统函数 $H(z)=\dfrac{z-1}{\left(z-1/3\right)\left(z-1/2\right)}\quad\left(|z|>\dfrac{1}{2}\right)$，求激励为 $x(n)=\cos\left(\pi n/2\right)u(n)$ 的正弦稳态响应 $y_{ss}(n)$。

解： 系统的频率响应为 $H(e^{j\omega})=\dfrac{e^{j\omega}-1}{(e^{j\omega}-1/3)(e^{j\omega}-1/2)}$

$$H(e^{j\pi/2})=\frac{e^{j\pi/2}-1}{(e^{j\pi/2}-1/3)(e^{j\pi/2}-1/2)}=\frac{j-1}{(j-1/3)(j-1/2)}=\frac{6}{5}\frac{-1+j}{-1-j}=\frac{6}{5}e^{-j\pi/2}$$

$$\left|H(e^{j\pi/2})\right|=\frac{6}{5}\qquad \varphi(\pi/2)=-\frac{\pi}{2}$$

$$y_{ss}(n)=\left|H(e^{j\pi/2})\right|\cos\left[\pi n/2+\varphi(\pi/2)\right]u(n)=\frac{6}{5}\sin\left(\pi n/2\right)u(n)$$

3、频率响应与单位样值响应的关系

离散时间系统的频率响应是系统的单位样值响应的傅里叶变换。

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}$$

物理意义：$H(e^{j\omega})$ 是以**h(n)**为加权系数，对各次谐波进行改变的情况。

由于$h(n)$一般是实序列，所以$|H(e^{j\omega})|$是偶函数，$\varphi(\omega)$是奇函数。

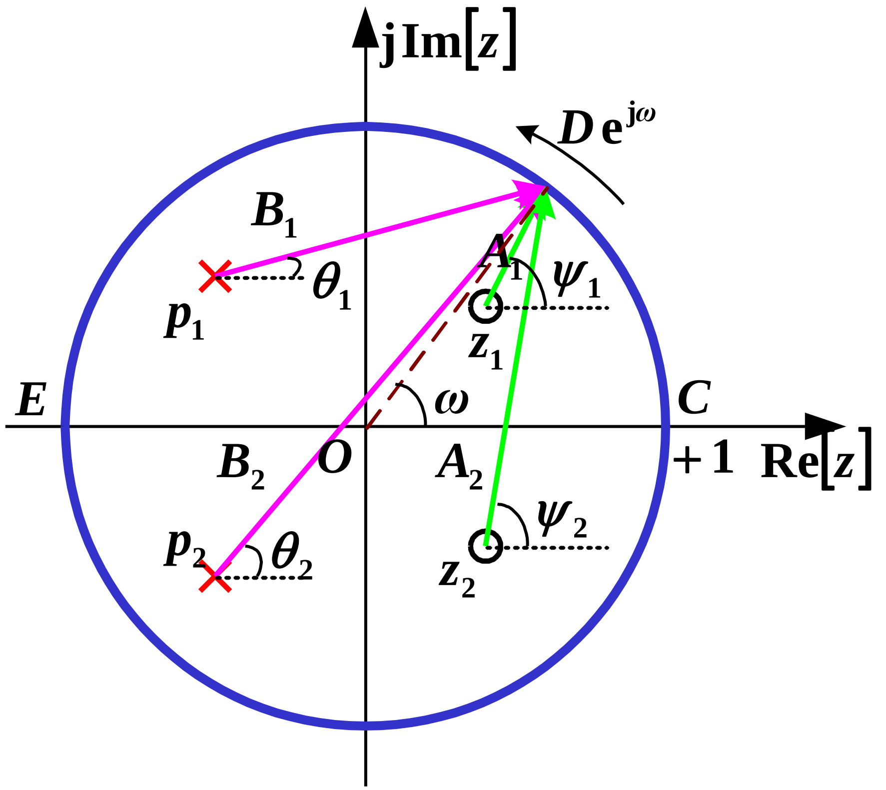
8.10.2 频响特性的几何确定

$$H(z)=\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)}=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

令 $e^{j\omega}-z_r=A_r\,e^{j\psi_r}$

$$e^{j\omega}-p_k=B_k\,e^{j\theta_k}$$



幅频响应 $\left|H(e^{j\omega})\right|=\dfrac{\prod_{r=1}^{M}A_r}{\prod_{k=1}^{N}B_k}$　　相频响应 $\varphi(\omega)=\sum_{r=1}^{M}\psi_r-\sum_{k=1}^{N}\theta_k$

说明：

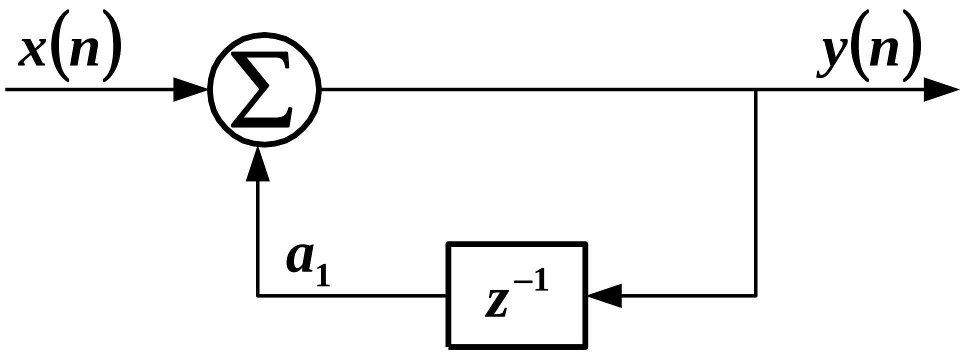
（1）位于$z=0$处的零点或极点对幅频响应不产生作用，因而在$z=0$处加入或去除零极点，不会使幅频响应发生变化，但会影响相频响应。

（2）当 $e^{j\omega}$ 点 旋转到某个极点p_i附近时，如极点矢量的长度B_i最短，则频率响应在该点可能出现峰值。

- 若极点p_i越靠近单位圆，B_i愈短，则频率响应在峰值附近愈尖锐；
- 若极点p_i落在单位圆上，$B_i=0$ ，则频率响应的峰趋于无穷大。

（3）零点的作用与极点相反。

例8-23:求下图所示一阶离散因果稳定系统的频率响应并分析其特性。



解: 差分方程 $y(n)-a_1y(n-1)=x(n)$

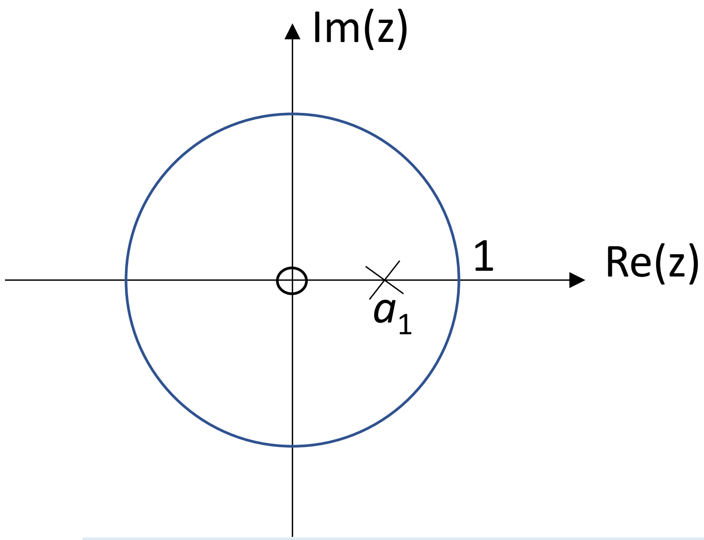
系统为因果系统，$H(z)=\dfrac{z}{z-a_1}$ $\quad |z|>|a_1|$

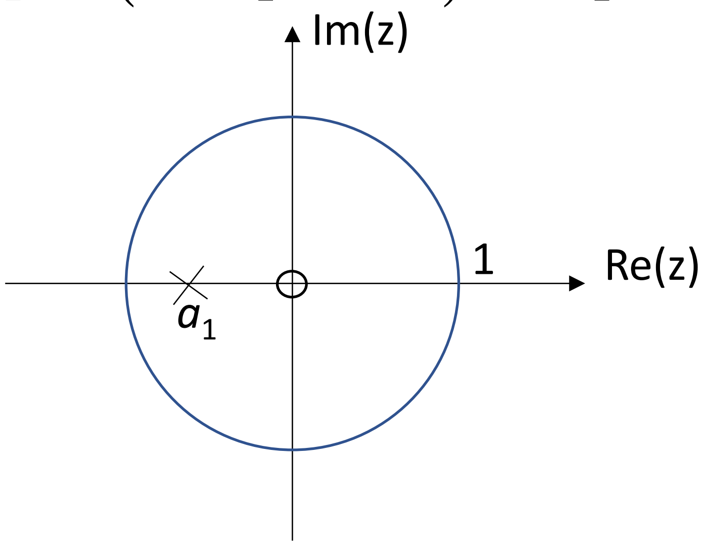
为了保证该系统稳定，要求$|a_1|<1$。

单位样值响应 $\quad h(n)=a_1^n u(n)$

8.10 离散时间系统的频率响应

频率响应 $$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a_1}=\frac{1}{\left(1-a_1\cos\omega\right)+ja_1\sin\omega}$$



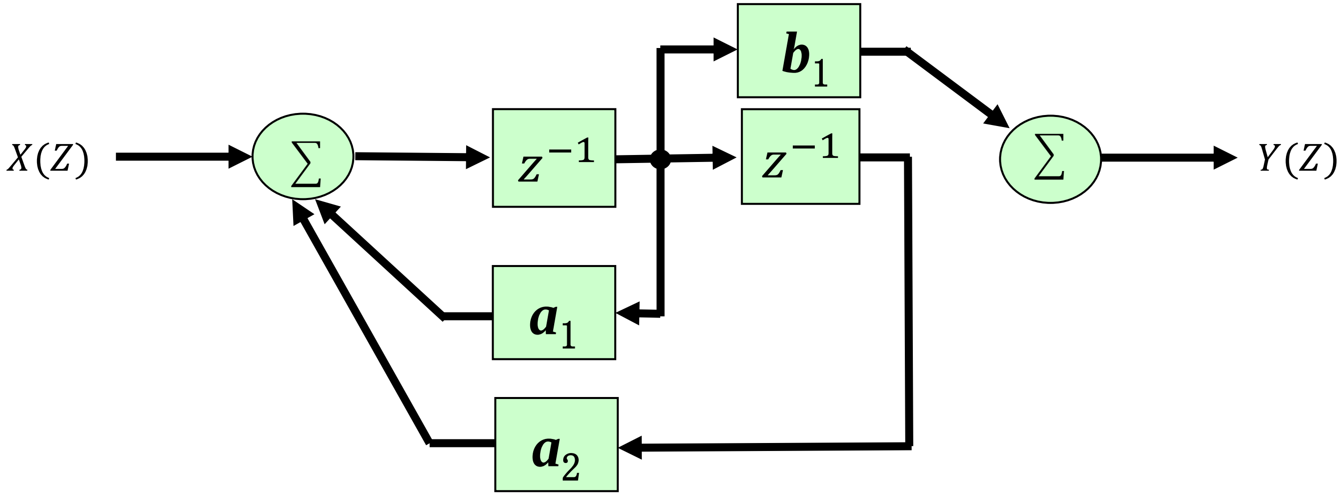


$0<a_1<1$时，系统为低通特性;-1$<a_1<0$时，系统为高通特性。

幅频响应 $$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+a_1^{\ 2}-2a_1\cos\omega}}$$

相频响应 $$\varphi\left(\omega\right)=-\arctan\left(\frac{a_1\sin\omega}{1-a_1\cos\omega}\right)$$

例8-24：求图（a）所示二阶离散因果系统的频率响应并粗略画出幅频响应曲线。



(a)

解：系统函数

$$H(z)=\frac{b_1 z^{-1}}{1-a_1 z^{-1}-a_2 z^{-2}}$$

该系统的差分方程为

$$y(n)-a_1 y(n-1)-a_2 y(n-2)=b_1 x(n-1)$$

若a_1,a_2为实系数，且 $a_1^2+4a_2<0$，则$H(z)$含有一对共轭极点：$p_{1,2}=r\,\mathrm{e}^{\pm j\theta}$

对此因果系统，$H(z)$的收敛域应为$|z|>r$ 。

容易求得r,θ与系数a_1,a_2的关系为

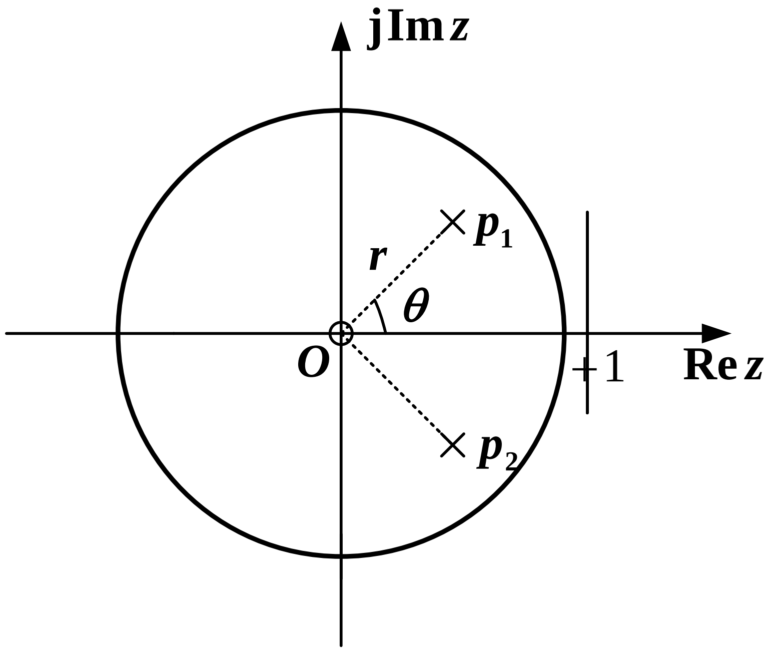
$$\left(1-r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}z^{-1}\right)\left(1-r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}z^{-1}\right)=1-a_1z^{-1}-a_2z^{-2}$$

得到：$r^2=-a_2$

$$2r\cos\theta=a_1$$

于是$H(z)$可写成

$$H(z)=\frac{b_1z^{-1}}{\left(1-r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}z^{-1}\right)\left(1-r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}z^{-1}\right)}$$



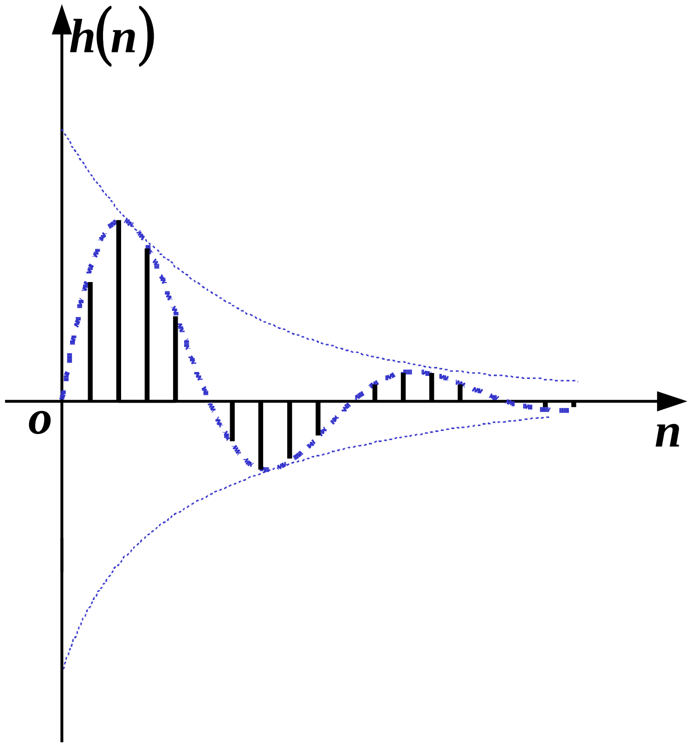
（b）

$H(z)$除一对共轭极点外，还在$z=0$处有一个零点，如图(b)所示。

若把$H(z)$展成部分分式，得

$$H(z)=A\left(\frac{1}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}z^{-1}}-\frac{1}{1-r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}z^{-1}}\right)$$

其中 $$A=\frac{b_1}{2\mathrm{j}r\sin\theta}$$



(c)

对$H(z)$进行逆变换，单位样值响应为

$$h(n)=A\left(r^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\theta}-r^n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\theta}\right)u(n)$$

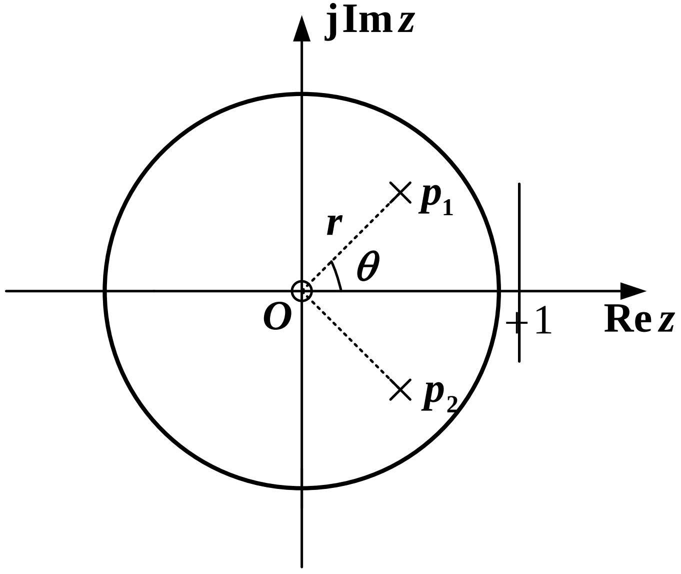
$$=2\mathrm{j}Ar^n\sin(n\theta)\cdot u(n)=\frac{b_1r^{n-1}}{\sin\theta}\cdot\sin(n\theta)u(n)$$

如图(c)所示,若$r<1$, 极点位于单位圆内，$h(n)$为衰减型，此系统是稳定的。

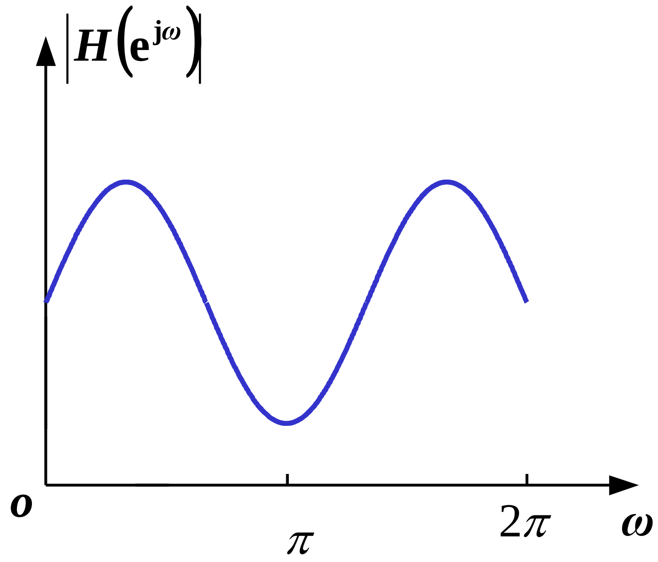
系统的频率响应为

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{b_1 e^{-j\omega}}{1-a_1 e^{-j\omega}-a_2 e^{-2j\omega}}$$

根据$H(z)$的零极点分布，通过几何方法可以大致估计出幅频响应的形状，如图(d)所示。



(b)



(d)

带通滤波器

某离散系统的差分方程为$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$，该系统的单位样值响应为（ ）

A $h(n)=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}\right)^n-\frac{1}{4}\left(\frac{7}{3}\right)^n\right]u(n)$

B $h(n)=\left[\frac{10}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^n-\frac{7}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]u(n)$

C $h(n)=\left[\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$

D $h(n)=\left[\frac{1}{8}\left(\frac{10}{3}\right)^n-\frac{3}{4}\left(\frac{7}{3}\right)^n\right]u(n)$

提交

例8-25：已知离散系统差分方程表示式

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

1）求系统函数和单位样值响应；2）画出系统函数的零、极点分布图；3）粗略画出幅频响应特性曲线；4）画出系统的模拟框图。

解：1）系统函数

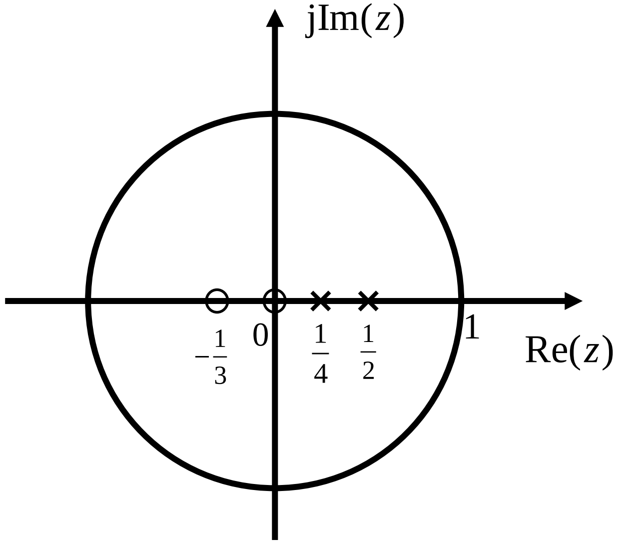
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{z(z+\frac{1}{3})}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}$$

$$=\frac{10}{3}\left(\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right)-\frac{7}{3}\left(\frac{z}{z-\frac{1}{4}}\right)\quad(|z|>\frac{1}{2})$$

单位样值响应 $h(n)=z^{-1}[H(z)]=\left[\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$

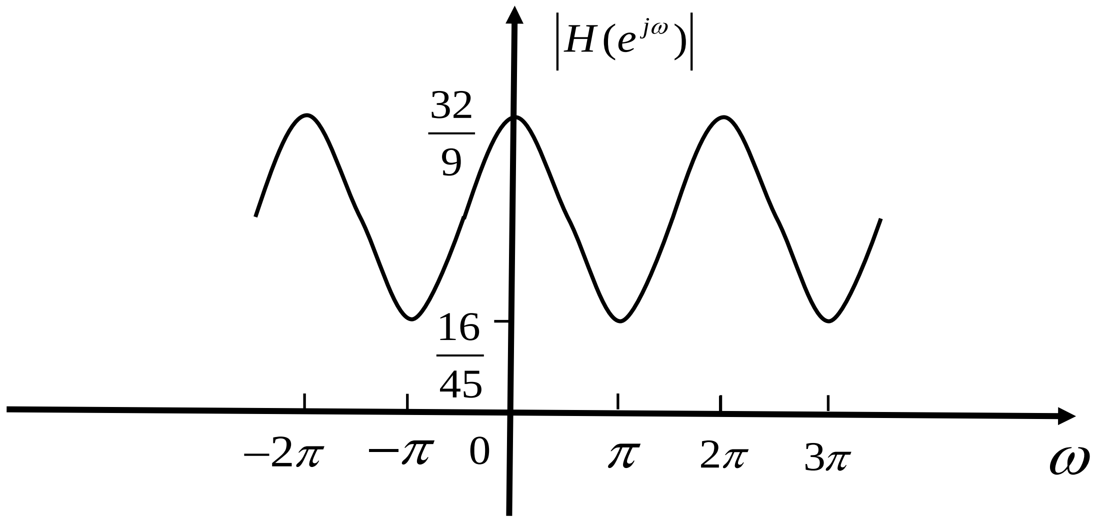
2）
$$H(z)=\frac{z(z+\frac{1}{3})}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}=\frac{z(z+\frac{1}{3})}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}$$

零极点分布如图（a）所示。



（a）

3）由零极点分布得系统幅频响应如图（b）所示。

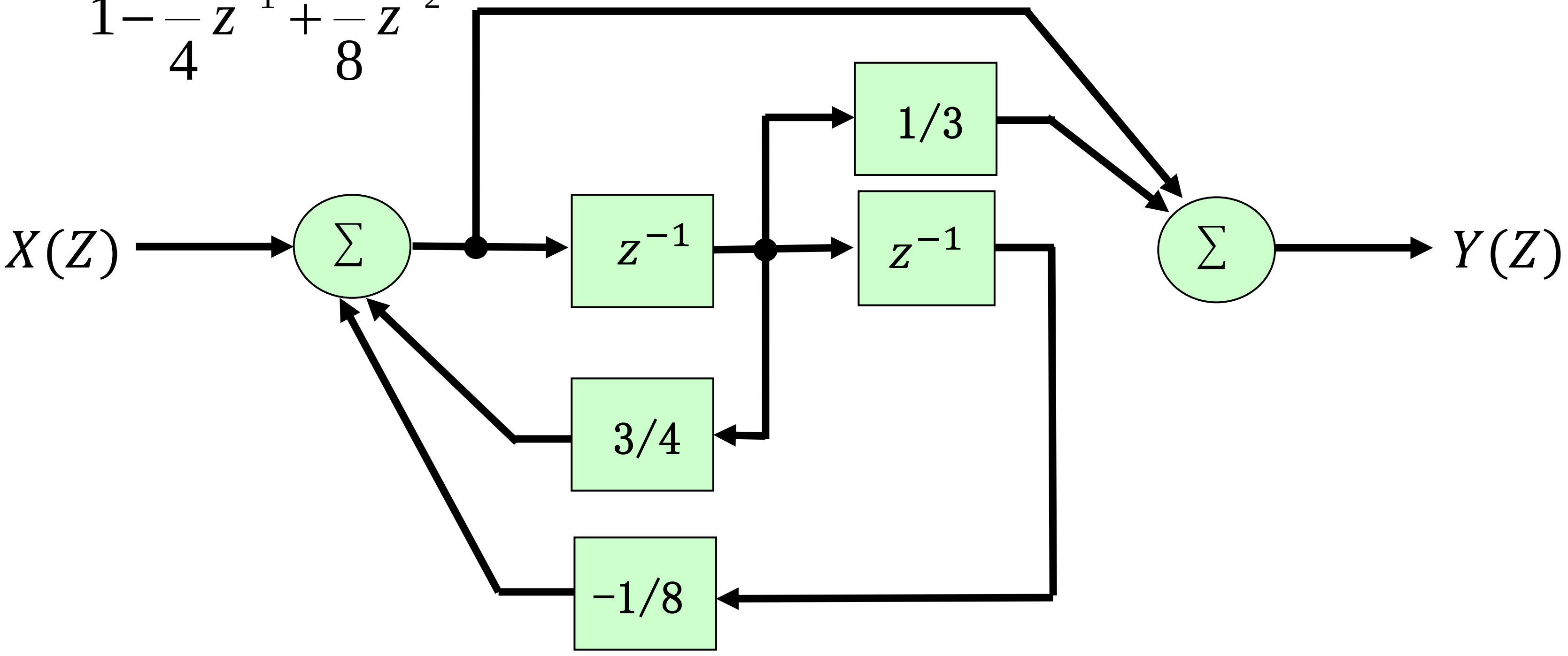


（b）

8.10 离散时间系统的频率响应

4）由差分方程或系统函数得到系统结构框图如图（c）所示。

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$



(c)

8.10.3 滤波器介绍

滤波器的作用：

1）去除信号中不需要的部分(信号分离)，如随机噪声；

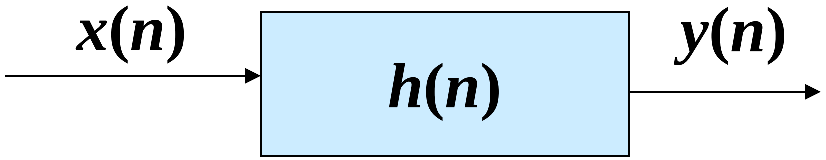
2）提取信号中的有用部分(信号恢复)，如提取某一频率段内的成分。

从系统角度看，滤波器分为模拟滤波器(analog filter, AF)和数字滤波器(digital filter, DF)两大类。它们都是可实现的线性时不变系统。两类滤波器在物理组成和工作方式上有很大不同。

- **模拟滤波器**：利用模拟电路对模拟信号做滤波处理。模拟滤波器只能用硬件实现，其元件是R,L,C及运算放大器或开关电容等。

- **数字滤波器**：利用离散时间系统对数字信号做滤波处理。数字滤波器既可以用硬件实现(数字信号处理器)，也可以用计算机软件来实现。其在体积、重量、精度、稳定性、可靠性、存储功能、灵活性以及性能价格比等方面明显优于模拟滤波器。

8.10.4 数字滤波器的工作原理



LTI系统的输出为：

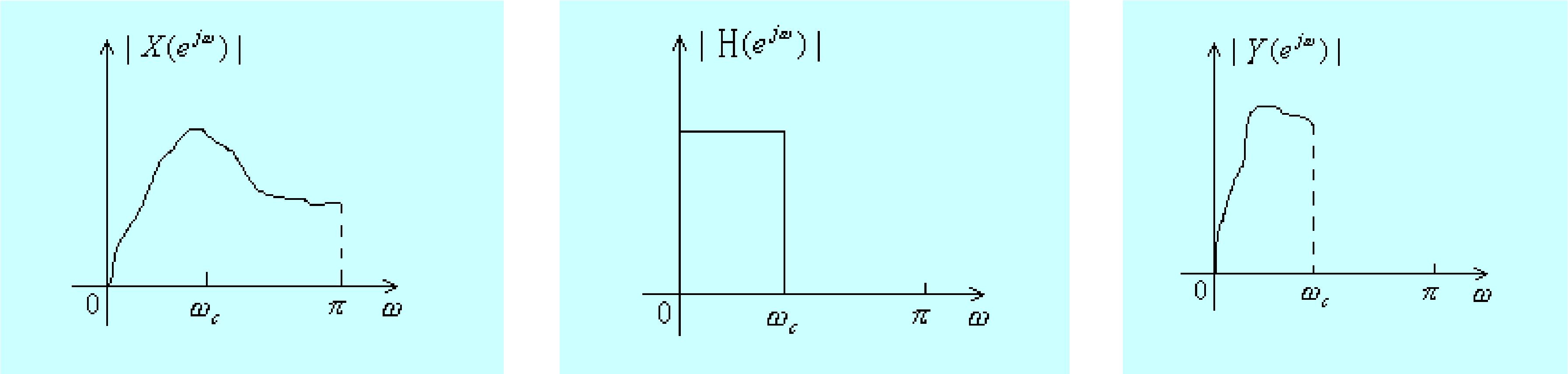
$$y(n) = x(n) * h(n) = \mathrm{IDTFT}[X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})]$$

输入序列的频谱$X(e^{j\omega})$经过滤波器$H(e^{j\omega})$后变成$X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

选取$H(e^{j\omega})$，使滤波器输出$X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$符合我们的要求，

这就是数字滤波器的工作原理。

滤波原理



$(a)\,|X(e^{j\omega})|$ $(b)\,|H(e^{j\omega})|$ $(c)\,|Y(e^{j\omega})|$

$x(n)$通过系统$h(n)$后使输出$y(n)$中不再含有$|\omega|>\omega_c$的频率成分，而使$|\omega|<\omega_c$的成分“不失真的通过”。

8.10.5 经典滤波器和现代滤波器

1、经典滤波器

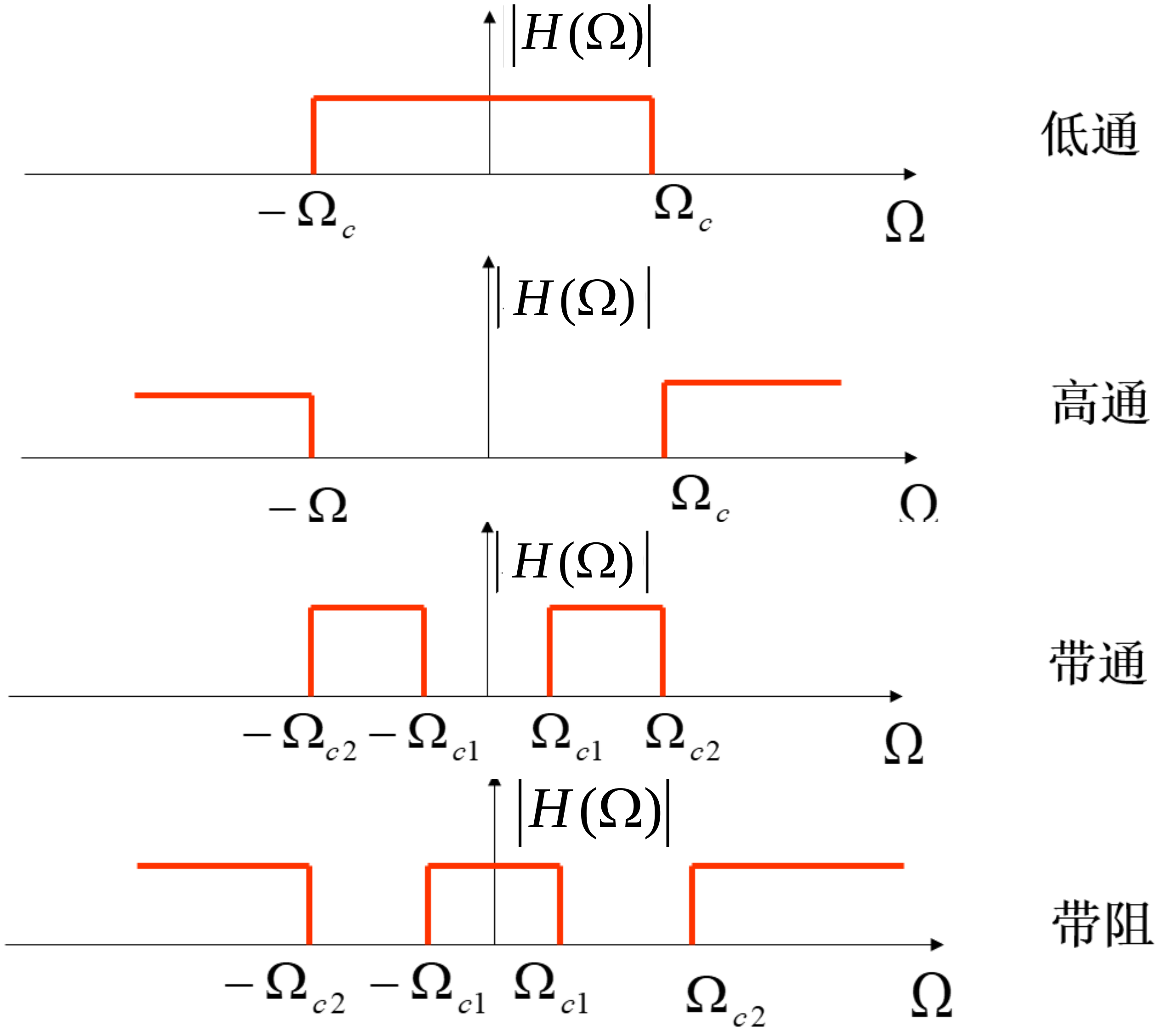
$$x(n)=s(n)+u(n) \longrightarrow \boxed{\text{加性噪声}}$$

若 $x(n)$ 中的有用成分$s(n)$ 和希望去除的成分$u(n)$各自占有不同的频带，通过一个线性系统可将 $u(n)$ 有效去除。

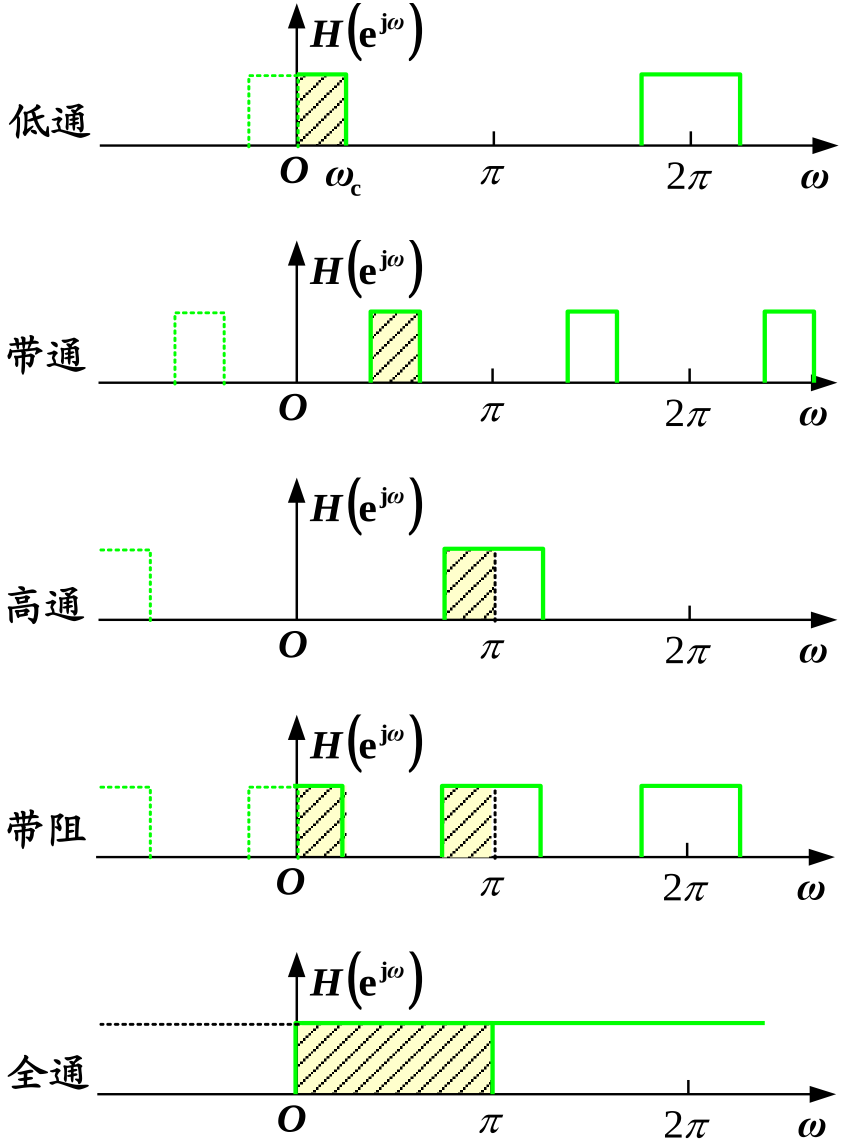
按功能分：低通（LP），高通（HP），带通（BP），带阻（BS），全通。

每一种又有模拟（AF）、数字（DF）两种滤波器。

（1）模拟滤波器的理想幅频特性



（2）数字滤波器的理想幅频特性



由于周期性和对称性，只研究$0 \le \omega \le \pi$范围即可。

左图中假设相频响应为0。

下列关于滤波器的说法中，**错误**的是（ ）

A 滤波器通过减小某频率处的增益来“滤除”该频率。

B 数字滤波器$\omega = 2\pi$附近区域对应实际频率的“高频”。

C 模拟滤波器可直接对模拟信号进行处理。

D 经过模数转换后的信号才能被数字滤波器处理。

提交

2、现代滤波器

$$x(n)=s(n)u(n)$$ → 乘法性噪声

$$x(n)=s(n)*u(n)$$ → 卷积性噪声

信号的频谱和噪声频谱混迭在一起，靠经典的滤波方法难以去除噪声。

目标：从含有噪声的数据记录(又称时间序列)中估计出信号的某些特征或信号本身。

滤波器种类：维纳(Wiener)滤波器、卡尔曼(Kalman)滤波器、线性预测、自适应滤波器

对**数字滤波器（DF）**, 从实现方法上, 有**finite impulse response (FIR)**滤波器和 **infinite impulse response (IIR)**滤波器之分, 转移函数分别为:

FIR DF: $$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

IIR DF: $$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

小结

1. 系统的频响特性 $H\left(e^{j\omega}\right)=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\cdot e^{j\varphi(\omega)}$

$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$：幅频特性，输出与输入序列的幅度之比

$\varphi(\omega)$ ：相频特性，输出对输入序列的相移

2. 系统的频率响应就是系统函数在单位圆上的动态，因ω而变化，影响输出的幅度与相位。

3. 因为$e^{j\omega}$是周期为2π的周期函数，所以系统的频响特性$H\left(e^{j\omega}\right)$是周期为$2\pi$的周期函数。

4. $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$是关于$\omega$的偶函数，$\varphi(\omega)$是关于$\omega$的奇函数。

5. 数字滤波器$\omega=\pi$附近对应实际频率的高频。

作业

基础题：8-32，8-33（2），8-34

加强题：8-33（1）（3），8-38