

上节内容

2.7 卷积

2.8 卷积的性质

2.9 用算子符号表示微分方程

2.10 以“分配函数”的概念认识
冲激函数

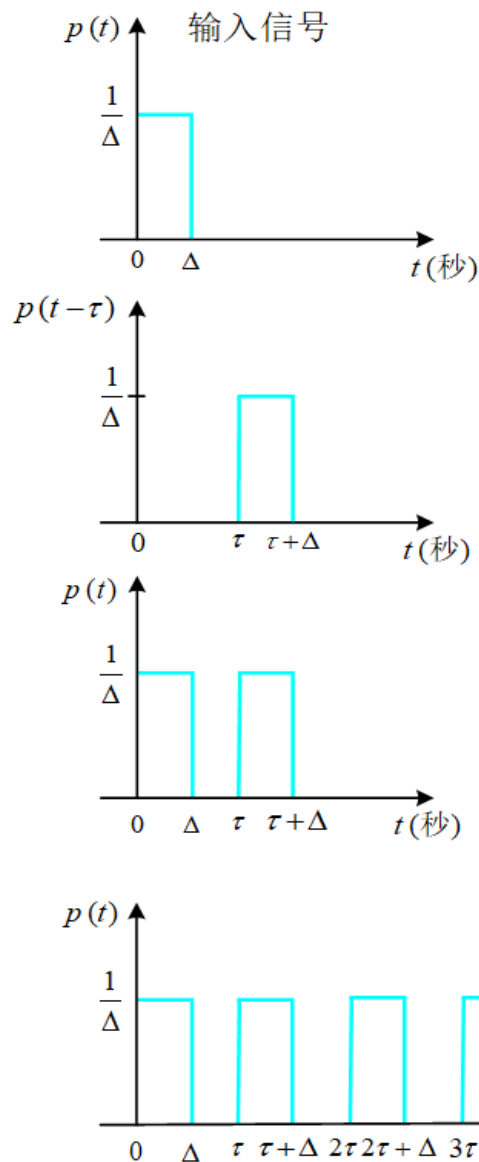
- **卷积**是一种**数学工具**，是系统分析的核心技术。
- **卷积定理**连接着系统的时域分析和变换域分析，贯彻整门课程，非常重要。
- 设有两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ ，积分

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

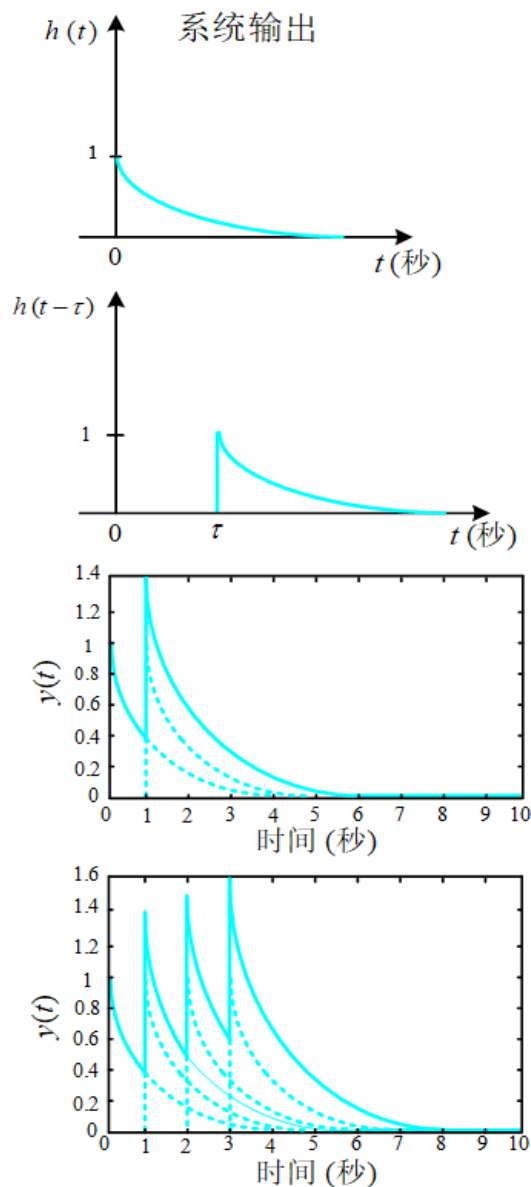
称为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积，记为

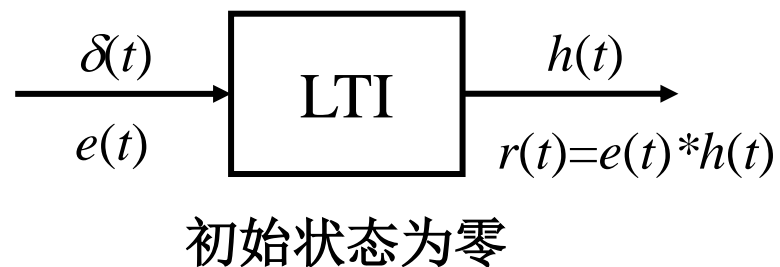
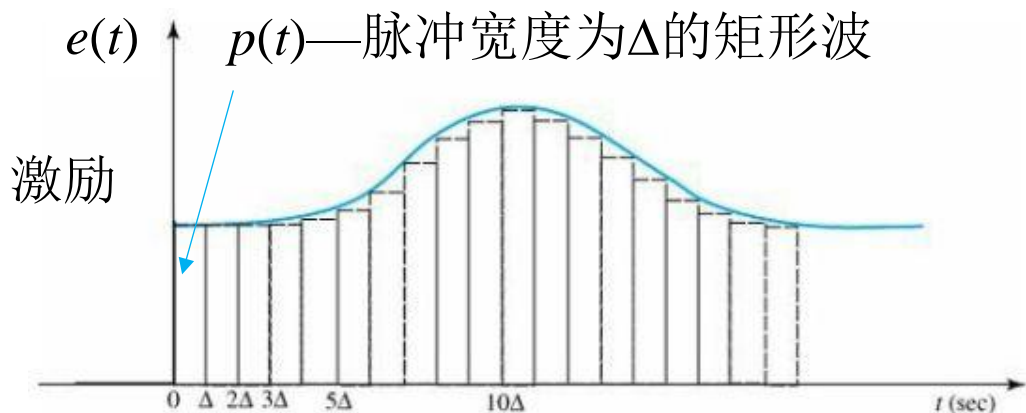
$$f(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

激励



响应





$$e(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} e(i\Delta) p(t - i\Delta)$$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} e(i\Delta) \frac{u(t - i\Delta) - u[t - (i+1)\Delta]}{\Delta} \Delta$$

$$e(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} e(i\Delta) \delta(t - i\Delta) \Delta = \int_0^{\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

利用叠加性、齐次性、时不变性

$$r(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} e(i\Delta) h(t - i\Delta) \Delta = \int_0^{\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau = e(t) * h(t)$$

卷积

系统的零状态响应为激励与冲激响应的卷积。

计算方法：将任意信号分解为冲激信号的加权和（积分），求其对应的冲激响应的加权和（积分）。

系统的卷积运算分析

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

由上述卷积积分的公式可总结出卷积积分计算步骤。首先将 $x(t)$ 和 $h(t)$ 的自变量 t 改成 τ ，即： $x(t) \rightarrow x(\tau)$ ， $h(t) \rightarrow h(\tau)$

再进行如下运算（即卷积积分的**四步曲**）：

反褶： $h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$

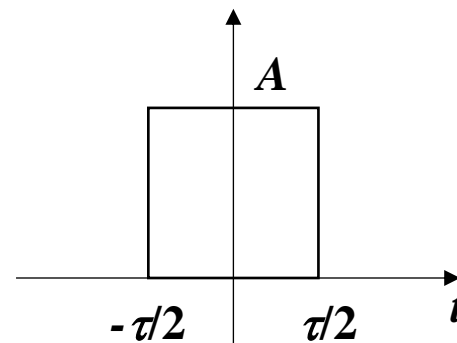
时移： $h(-\tau) \rightarrow h(t - \tau) = h[-(\tau - t)] \begin{cases} t < 0, & \text{左移 } t \\ t > 0, & \text{右移 } t \end{cases}$

相乘： $x(\tau)h(t - \tau)$

积分： $x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$

计算卷积积分的关键是**定积分限**。

已知矩形脉冲信号 $f(t)$ ，脉冲宽度为 τ ，幅度为 A ，定义 $s(t)=f(t)*f(t)$ ， $s(0)$ 的取值为（）



- ☐ A $A\tau$
- ☐ B $2A\tau$
- ☒ C $A^2\tau$
- ☐ D $2A^2\tau$

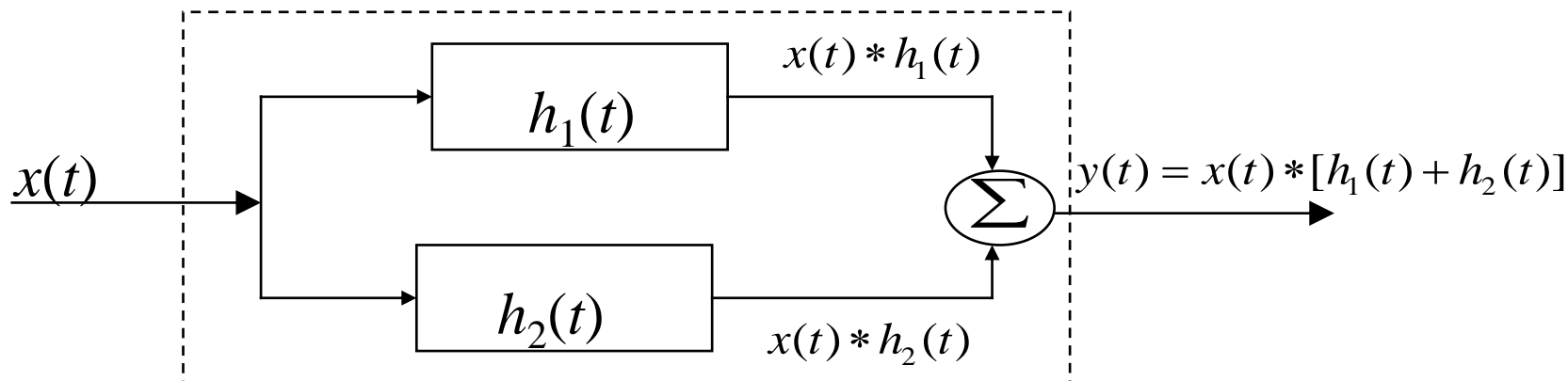
提交

2.8.1 卷积积分的代数性质

(1) 交换律 $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

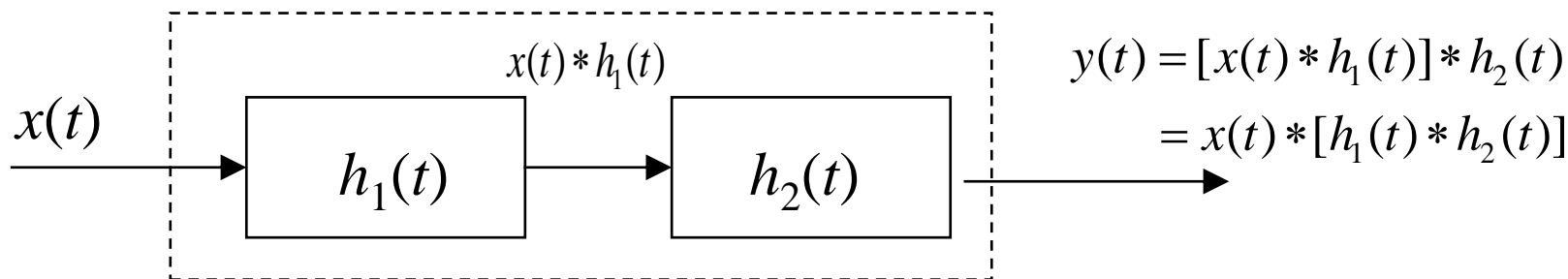
(2) 分配律 $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$

分配律用于系统分析，相当于并联系统的冲激响应等于组成**并联**系统的各子系统冲激响应之和。



(3) 结合律 $[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$

结合律用于系统分析，相当于串联系统的冲激响应等于组成**串联**系统的各子系统冲激响应的卷积。



2.8.2 卷积积分的微分与积分

$$\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} * f_2(t)$$

$$\int_{-\infty}^t [f_1(\lambda) * f_2(\lambda)] d\lambda = f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t f_1(\lambda) d\lambda * f_2(t)$$

$$\rightarrow f_1(t) * f_2(t) = \frac{df_1(t)}{dt} * \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda \quad f_1(t) * f_2(t) = f_1^{(1)}(t) * f_2^{(-1)}(t)$$

$f_1(t), f_2(t)$ 应满足时间受限条件，即 $t \rightarrow -\infty$ 时函数值应为0。试做习题2-19(b)。

2.8.3 $f(t)$ 与冲激函数的卷积

由冲激函数的筛选性质，得

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

$$f(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau - t_0) d\tau = f(t - t_0)$$

推广： $f(t) * \delta'(t) = f'(t)$ $f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda$

2.8.4 卷积积分的时移性质

若 $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ，则

$$f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2) = f_1(t - t_2) * f_2(t - t_1) = f(t - t_1 - t_2)$$

2.8.5 卷积积分的时间范围

已知 $f_1(t)$ 在 $t_1 \leq t \leq t_2$ 内有非零值， $f_2(t)$ 在 $t_3 \leq t \leq t_4$ 内有非零值， $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。
 $f(t)$ 有非零值的时间范围是 $t_1 + t_3 \leq t \leq t_2 + t_4$ ，区间的长度为 $(t_2 - t_1) + (t_4 - t_3)$ ，即 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 取非零值的时间区间长度之和。

常用卷积公式：教材附录一

$$(1) K * f(t) = K \cdot [f(t) \text{ 的净面积}]$$

$$(2) f(t) * \delta(t) = f(t)$$

$$(3) f(t) * \delta'(t) = f'(t)$$

$$(4) f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

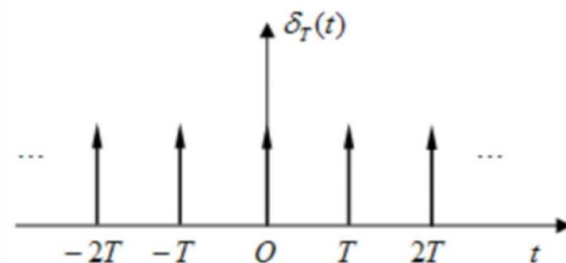
$$(5) u(t) * u(t) = tu(t)$$

$$(6) u(t) * e^{at} u(t) = -\frac{1}{a} [1 - e^{at}] u(t)$$

$$(7) e^{at} u(t) * e^{at} u(t) = te^{at} u(t)$$

$$(8) e^{a_1 t} u(t) * e^{a_2 t} u(t) = \frac{1}{a_1 - a_2} [e^{a_1 t} - e^{a_2 t}] u(t) \quad a_1 \neq a_2$$

$$(9) f(t) * \delta_T(t) = f(t) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(t - mT)$$



本次课内容

- 3.1 引言
- 3.2 周期信号的傅里叶级数分析
- 3.3 典型周期信号的傅里叶级数

本次课目标

1. 了解频域分析法提出的背景、过程和新应用；
2. 熟练掌握周期信号的三角函数和指数形式的傅里叶级数分析方法；
3. 熟练运用波形的对称性与谐波特性的关系获得傅里叶级数；
4. 熟悉矩形波等典型周期信号的傅里叶级数的特性。

3.1 引言

3.2 周期信号的傅里叶级数分析

3.3 典型周期信号的傅里叶级数

3.4 傅里叶变换

3.5 典型非周期信号的傅里叶变换

3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换

3.7 傅里叶变换的基本性质

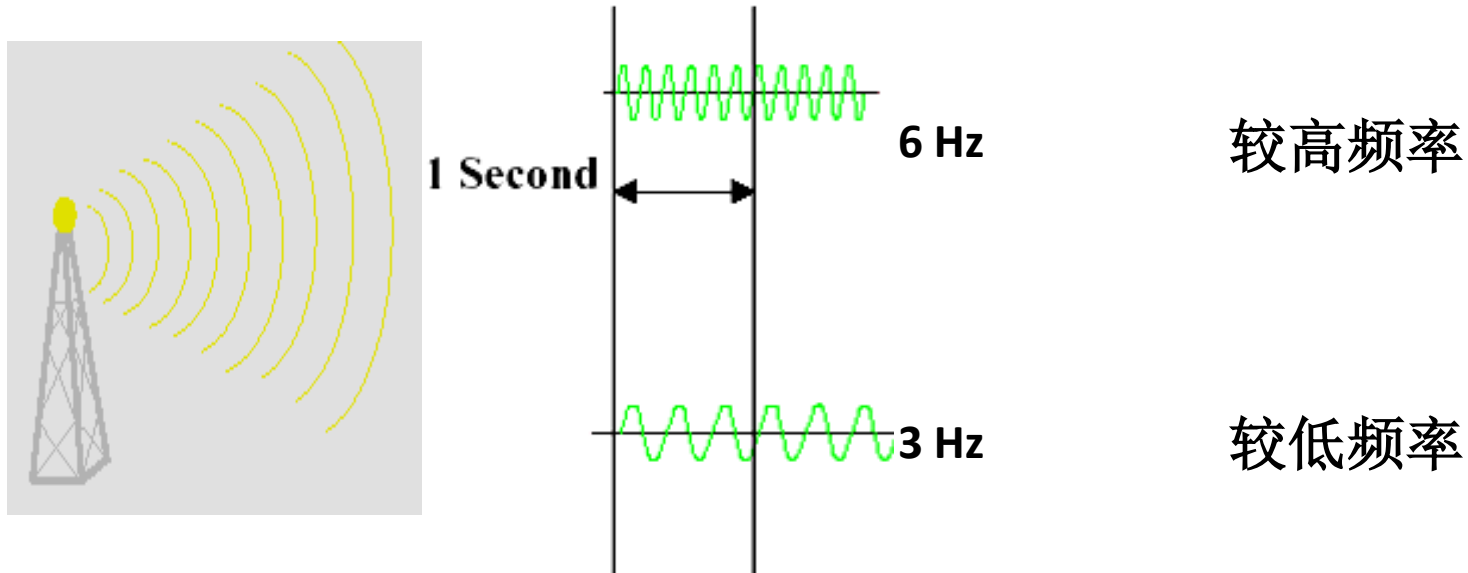
3.8 卷积特性

3.9 周期信号的傅里叶变换

3.10 抽样信号的傅里叶变换

3.11 抽样定理

- **时域**分析：信号或者系统模型的自变量为时间
- 变换域分析：自变量为其他物理量
 - **频域**分析：自变量为**频率**
 - **复频域**分析：自变量为**复频率**（第四章内容）
- **频率**是单位时间内完成周期性变化的次数（单位为周期/秒或赫兹Hz），**描述信号变换的快慢**。
- **正弦信号**的**频率**可以从**时域**直接观察到。

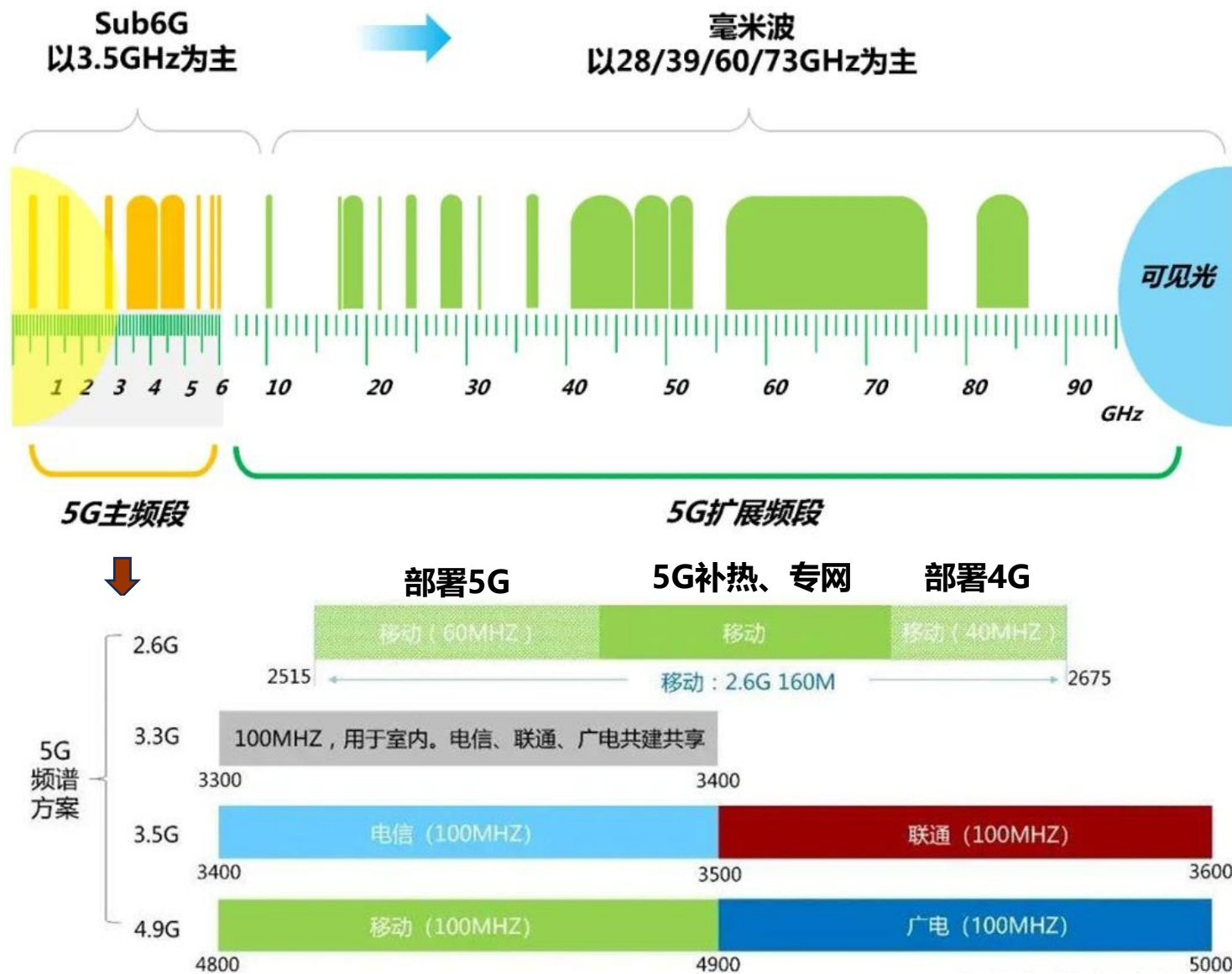


- 1807年，法国数学家和物理学家傅里叶（J. Fourier）在研究热传导理论时基于分析主义和还原主义思想，提出了将周期函数展开为正弦级数的原理，奠定了频域分析的基础。
- 泊松（Poisson）、高斯（Gauss）等人把这一成果应用到电学中。
- 19世纪末，人们制造出用于工程实际的电容器。
- 进入20世纪以后，谐振电路、滤波器、正弦振荡器等一系列具体问题的解决为正弦函数与傅里叶分析的进一步应用开辟了广阔的前景。
- 在通信与控制系统的理论研究和工程实际应用中，傅里叶变换法具有很多的优点。
- 快速傅里叶变换FFT为傅里叶分析法赋予了新的生命力。



傅里叶（1768-1830）

5G频谱分配



移动、广电共享2.6G频段5G网络

电信、联通共建共享5G接入网

- **频域分析**揭示了信号内在的频率特性以及信号时间特性与其频率特性之间的密切关系，从而导出了信号的频谱、带宽以及滤波、调制和频分复用等重要概念。
- 频域分析是通过**傅里叶变换**（**傅里叶分析**）进行的。将信号进行**正交分解**，即分解为**三角函数或复指数函数**的组合。

傅里叶分析

傅里叶级数展开：周期信号可以表示为成谐波关系的正弦信号的加权和。

傅里叶变换：非周期信号可以表示为在0到无穷高的所有频率分量上的正弦信号的加权积分。

任何周期信号都可以分解成正弦函数的线性叠加。此说法（ ）

☐ A 正确

☒ B 错误

提交

3.1 引言

3.2 周期信号的傅里叶级数分析

3.3 典型周期信号的傅里叶级数

3.4 傅里叶变换

3.5 典型非周期信号的傅里叶变换

3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换

3.7 傅里叶变换的基本性质

3.8 卷积特性

3.9 周期信号的傅里叶变换

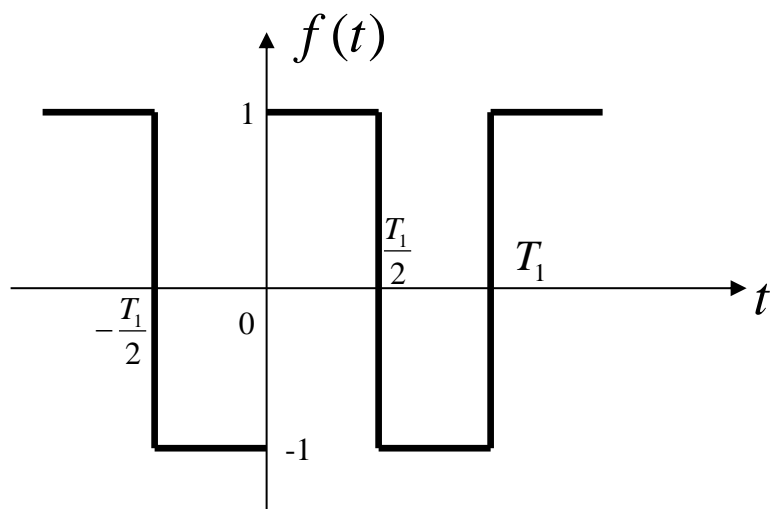
3.10 抽样信号的傅里叶变换

3.11 抽样定理

- 1807年，傅里叶提出，任何一个周期信号都可以展开成谐波关系的正弦函数的叠加。
- 拉格朗日认为此主张无意义，因为实际信号中存在断点。
- 1822年，傅里叶发表了《热的分析理论》。
- 1829年，狄里赫利（Dirichlet）证明只有在满足一定条件时，周期信号才能展开成傅里叶级数。
- **狄里赫利条件**（傅里叶级数存在的**充分不必要条件**）：
 - （1）在一个周期内，信号**连续**或只有**有限个第一类间断点**（函数在该间断点存在有限值的左极限和右极限，如函数 $x=|\sin(t)|/\sin(t)$ 在点 $t=0$ 处）。
 - （2）在一个周期内，**极大值和极小值的数目应为有限个**。
 - （3）在一个周期内，信号**绝对可积**，即 $\int_0^T |f(t)| dt < \infty$ 。
- **工程中的信号都满足狄里赫利条件。**

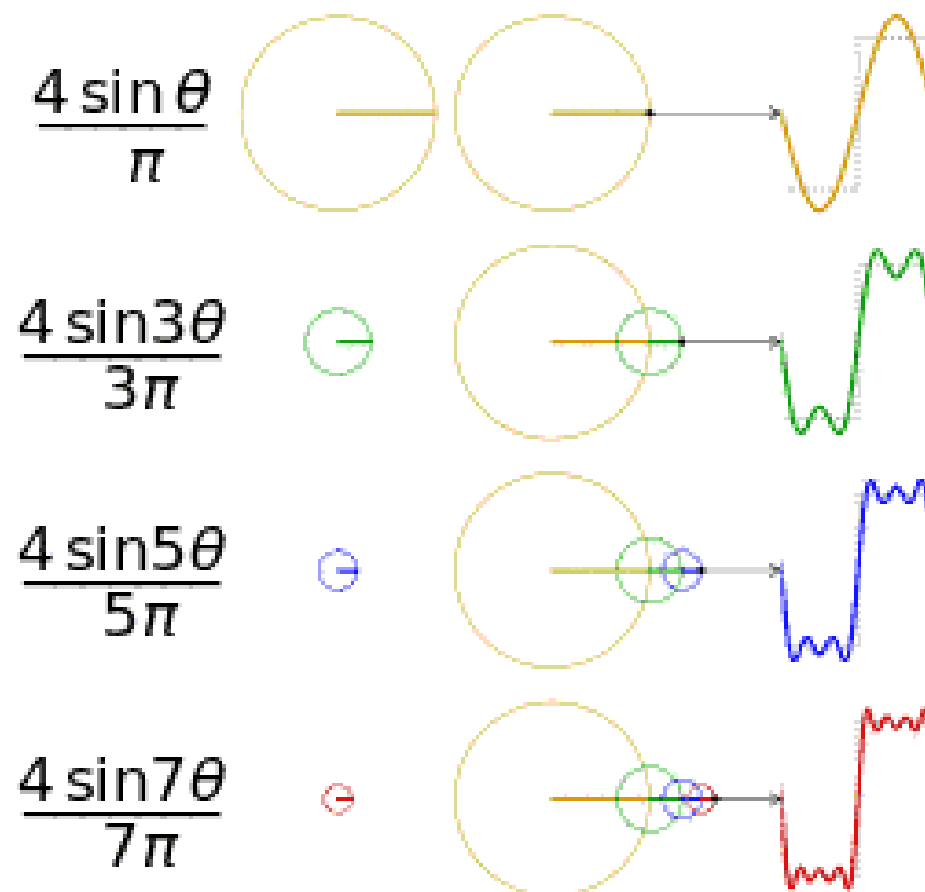
- 任何周期函数在满足狄里赫利条件下，可以展成正交函数线性组合的无穷级数。
- 如果正交函数集是三角函数集或指数函数集，此时周期函数所展成的级数就是“傅里叶级数”。
- 为什么选择三角函数（正弦波）作为傅里叶级数的基本信号？
 - 正弦曲线有保真度——一个正弦信号通过LTI系统后，输出的仍是正弦信号，只有幅度和相位可能发生变化，但频率和波形不变。
 - 三角（指数）函数的积分和求导仍为三角（指数）函数。

周期矩形信号的产生



多少个正弦波叠加可以构成矩形信号？

无数个。



3.2.1 三角形式的傅里叶级数

设周期信号为 $f(t)$, 其周期是 T_1 , 基波角频率 $\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (1)$$

直流分量:

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) dt$$

余弦分量的幅度:

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \cos n\omega_1 t dt$$

正弦分量的幅度:

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) \sin n\omega_1 t dt$$

以上各式中的积分限一般取: $0 \sim T_1$ 或 $-\frac{T_1}{2} \sim \frac{T_1}{2}$

三角形式的傅里叶级数也可表示成：

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (2)$$

$$\text{其中} \quad c_0 = a_0 \quad c_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \quad \varphi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\frac{a_n}{c_n} \cos(n\omega_1 t) + \frac{b_n}{c_n} \sin(n\omega_1 t) \right] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n [\cos(n\omega_1 t) \cos(-\varphi_n) + \sin(n\omega_1 t) \sin(-\varphi_n)] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \end{aligned}$$

3.2.2 指数形式的傅里叶级数

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

根据欧拉公式：

$$\cos(n\omega_1 t) = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}), \quad \sin(n\omega_1 t) = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t})$$

代入上式得：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right)$$

$$\text{令 } F(n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad \text{则 } F(-n\omega_1) = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} F(-n\omega_1) e^{-jn\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

指数形式:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3)$$

其中 $F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$ ----- 复振幅

$$F_0 = a_0 = c_0$$

$$F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

$$|F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} c_n$$

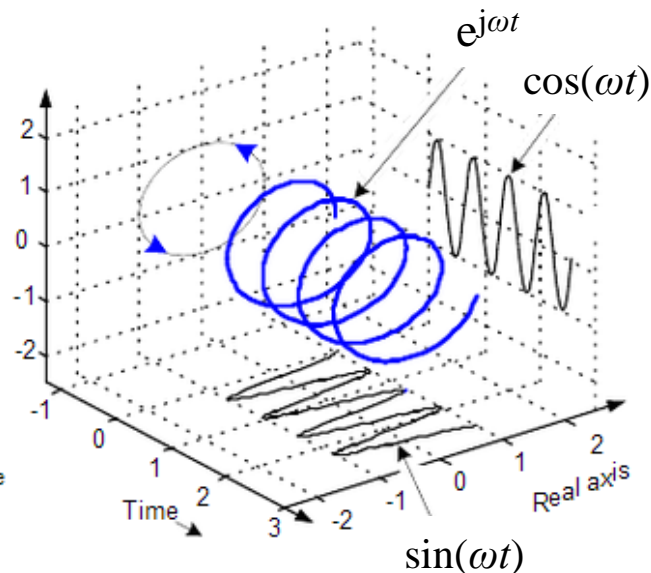
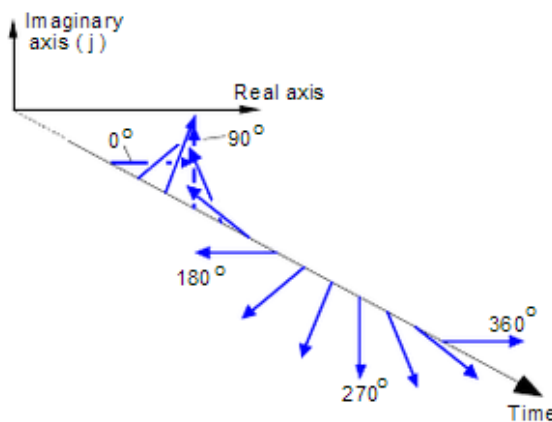
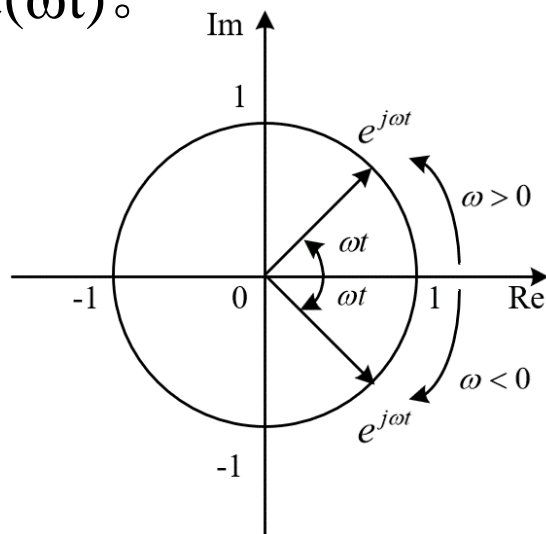
$$\varphi_n = \arctan \left(-\frac{b_n}{a_n} \right)$$

负频率的物理意义

负频率与我们观察所在的空间相关。我们直觉认为现实世界不存在负频率，是在二维空间即 $x-t$ 平面观察的结果，频率定义为单位时间内信号重复出现的次数，不会出现负值，这相当于仅从实平面或虚平面看信号。

在三维空间，根据欧拉公式， $e^{j\theta}$ 表示复平面单位圆上的一点， θ 表示相角。令 $\theta=\omega t$ ，随时间变化， $e^{j\omega t}$ 即表示该复数沿着单位圆旋转。定义正频率即 $\omega>0$ 为逆时针旋转，负频率即 $\omega<0$ 为顺时针旋转。

$e^{j\omega t}$ 随时间变化的曲线为螺旋线，且其在实平面的投影为 $\cos(\omega t)$ ，在虚平面的投影为 $\sin(\omega t)$ 。



3.2.3 周期信号的频谱及其特点

1. 周期信号的频谱

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (1)$$

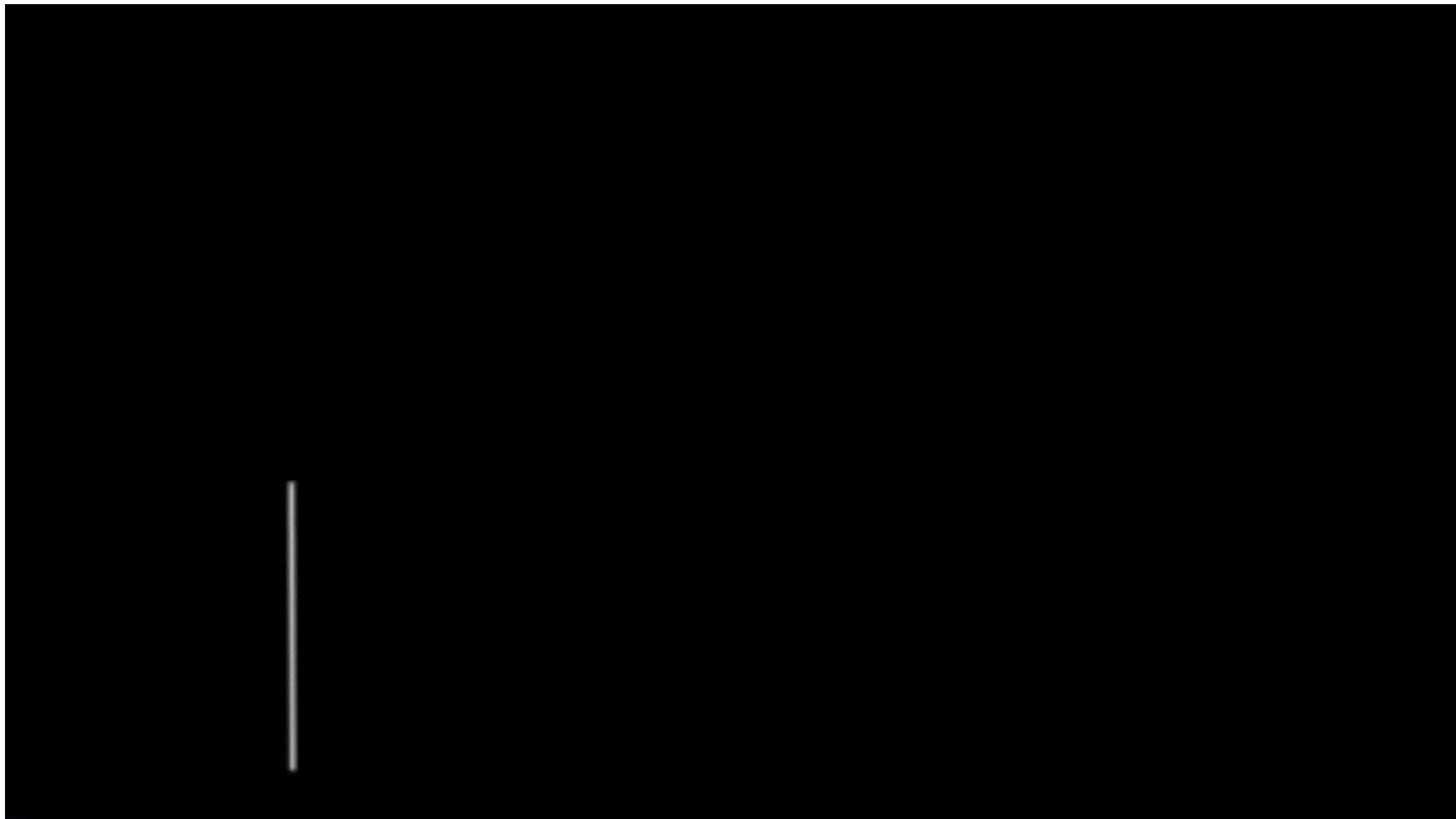
$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (2)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \quad (3)$$

为了能既方便又明确的表示一个信号中含有哪些频率分量，各频率分量所占的比重怎样，就可画出**频谱图**来直观的进行表示。

如果以频率为横轴，以幅度或相位为纵轴，便可直观的看出各频率分量的相对大小和相位情况，这样的图就称为三角形形式表示的信号的**幅度频谱**和**相位频谱**。

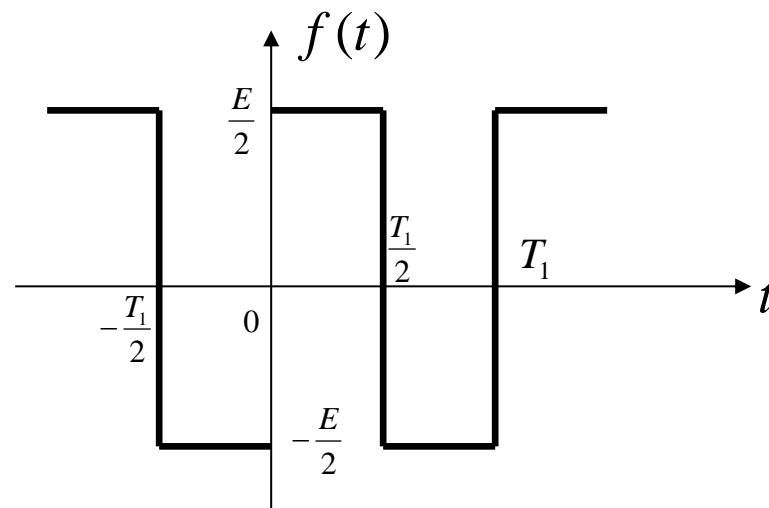
[周期矩形信号的频谱图（点击播放视频）](#)



例3-1：求题图所示的周期矩形信号的三角形式与指数形式的傅里叶级数，并画出各自的频谱图。

解：一个周期内 $f(t)$ 的表达式为：

$$f(t) = \begin{cases} \frac{E}{2} & 0 \leq t < \frac{T_1}{2} \\ -\frac{E}{2} & -\frac{T_1}{2} \leq t < 0 \end{cases} \quad (\text{奇函数})$$



$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) dt = 0 \quad a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \cos n\omega_1 t dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \sin n\omega_1 t dt = \frac{E}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] = \begin{cases} \frac{2E}{n\pi} & n = 1, 3, 5 \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6 \dots \end{cases}$$

$$c_0 = 0$$

$$c_n = b_n = \begin{cases} \frac{2E}{n\pi} & n = 1, 3, 5 \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6 \dots \end{cases}$$

$$\varphi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 3, 5 \dots)$$

因此 $f(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_1 t$

$$= \frac{2E}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right)$$

或 $f(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\left(n\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right)$

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = -j\frac{b_n}{2} = \begin{cases} -\frac{jE}{n\pi} & n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots \\ 0 & n = \pm 2, \pm 4, \pm 6 \dots \end{cases}$$

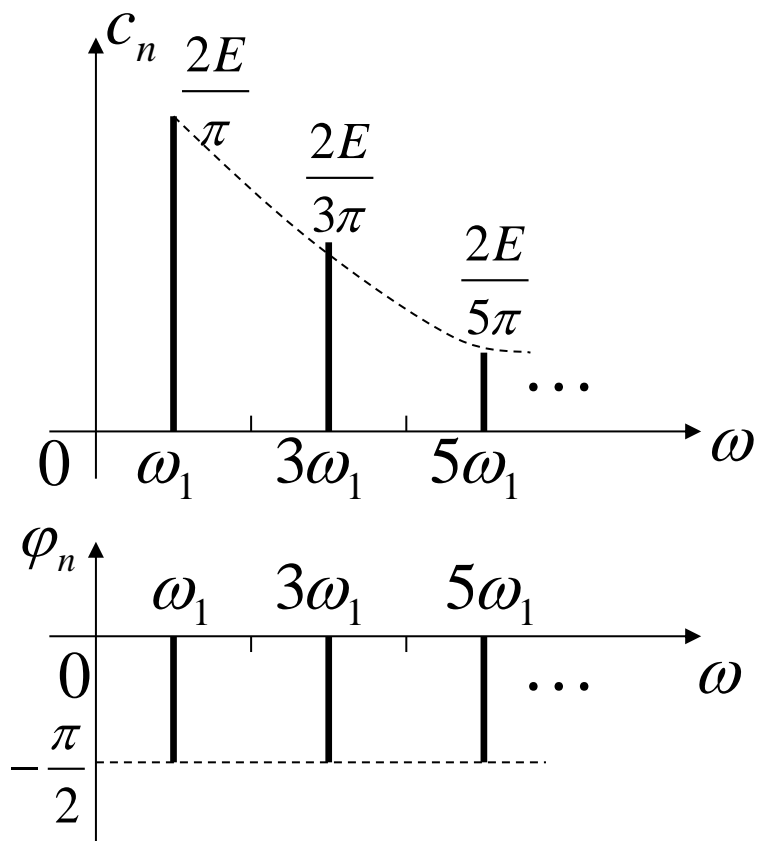
$$f(t) = \left(\frac{jE}{\pi} e^{-j\omega_1 t} - \frac{jE}{\pi} e^{j\omega_1 t} \right) + \left(\frac{jE}{3\pi} e^{-j3\omega_1 t} - \frac{jE}{3\pi} e^{j3\omega_1 t} \right) + \dots$$

$$|F_n| = \frac{E}{|n|\pi} \quad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots)$$

$$\varphi_n = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (n = 1, 3, 5 \dots) \\ \frac{\pi}{2} & (n = -1, -3, -5 \dots) \end{cases}$$

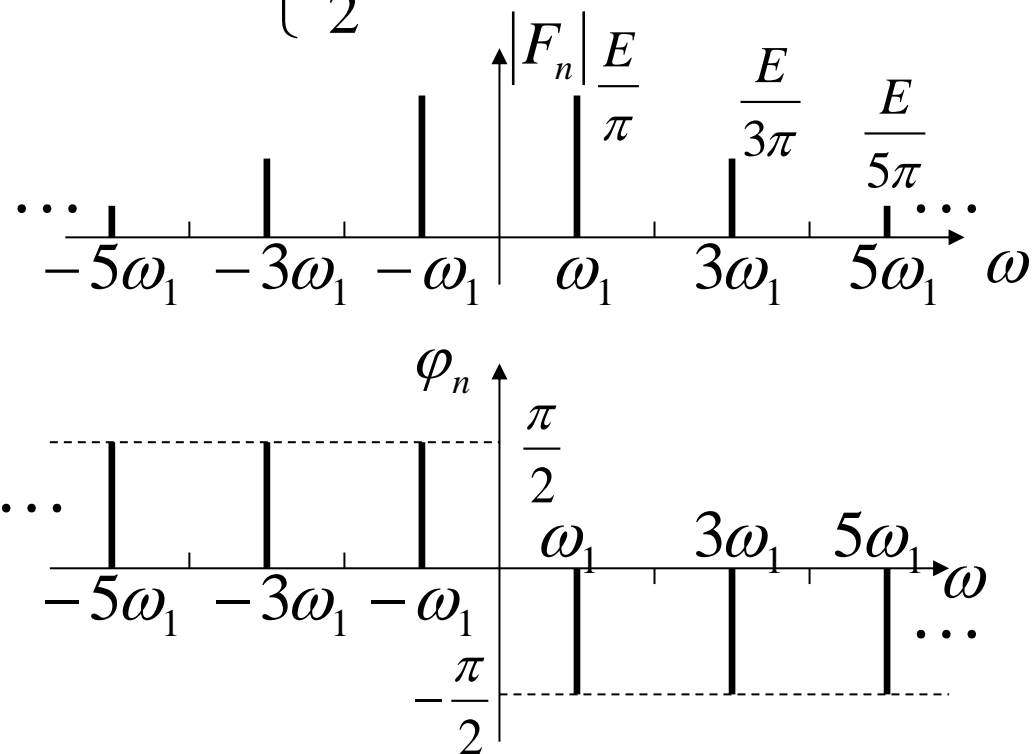
$$c_n = \begin{cases} \frac{2E}{n\pi} & n = 1, 3, 5 \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6 \dots \end{cases}$$

$$\varphi_n = -\frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 3, 5 \dots)$$



$$|F_n| = \frac{E}{|n|\pi} \quad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots)$$

$$\varphi_n = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (n = 1, 3, 5 \dots) \\ \frac{\pi}{2} & (n = -1, -3, -5 \dots) \end{cases}$$



2. 周期信号频谱的特点

- (1) **离散性**——频谱是离散的而不是连续的，这种频谱称为离散频谱。
- (2) **谐波性**——谱线出现在基波频率 ω_1 的整数倍上。
- (3) **收敛性**——幅度谱的谱线幅度随着 $n \rightarrow \infty$ 而逐渐衰减到零。

3.2.4 波形的对称性与谐波特性的关系

已知信号 $f(t)$ 展为傅里叶级数的时候，如果 $f(t)$ 是实函数且它的波形满足某种对称性，则在傅里叶级数中有些项将不出现，留下的各项系数的表示式也将变得比较简单。

波形的对称性有两类，一类是对整周期对称；另一类是对半周期对称。

1. 偶函数 $f(t) = f(-t)$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt$$

在偶函数的傅里叶级数中不含正弦分量，只可能含有直流和余弦分量。

2. 奇函数 $f(t) = -f(-t)$

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt$$

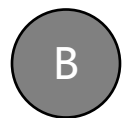
在奇函数的傅里叶级数中不含直流与余弦分量，只包含正弦分量。



奇函数加上直流分量后，傅里叶级数中仍含有正弦分量。此说法（）



正确

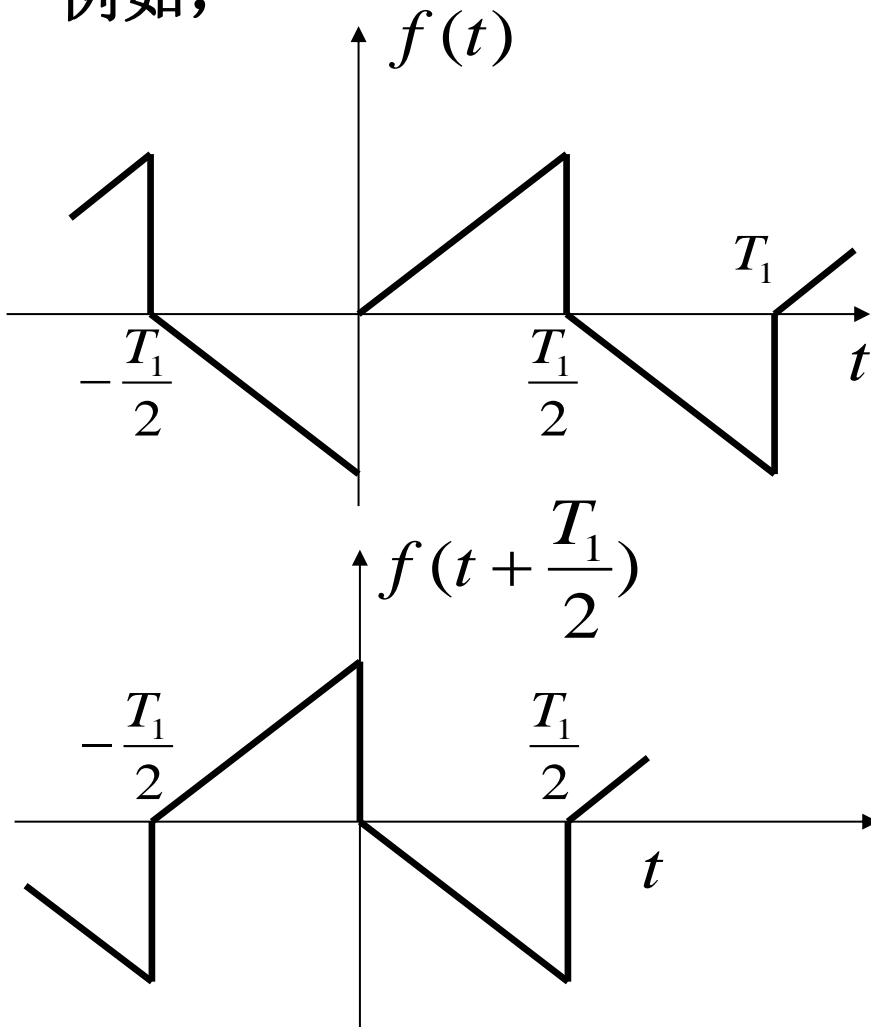


错误

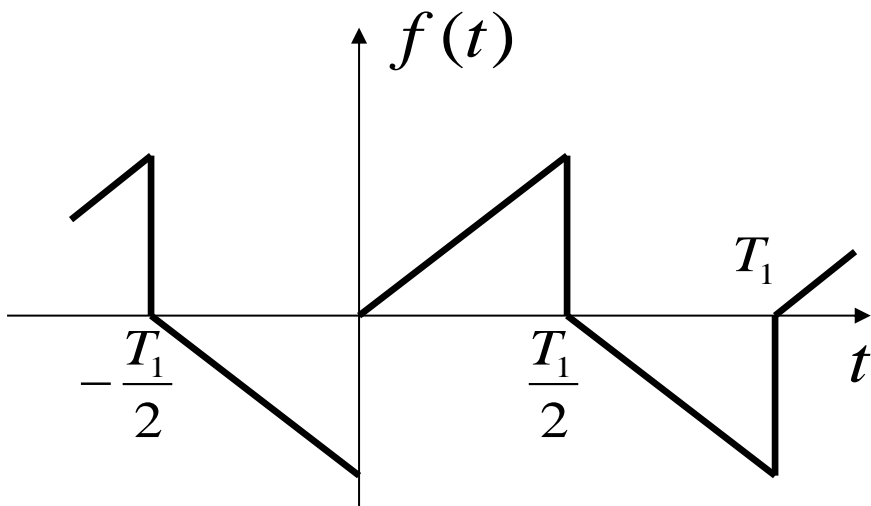
提交

3. 奇谐函数（半波奇对称） $f(t \pm \frac{T_1}{2}) = -f(t)$

例如，



$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \\
 &= \frac{2}{T_1} \left[\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt + \int_{-\frac{T_1}{2}}^0 f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \right] \\
 &= \frac{2}{T_1} \left[\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt - \int_{-\frac{T_1}{2}}^0 f(t + \frac{T_1}{2}) \cos(n\omega_1 t) dt \right] \\
 &= \frac{2}{T_1} \left[\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt - \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(\tau) \cos[n\omega_1(\tau - T_1/2)] d\tau \right] \\
 &= \frac{2}{T_1} \left[\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt - \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t - n\pi) dt \right] \\
 &= \begin{cases} 0 & (n = 0, 2, 4, 6 \dots) \\ \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt & (n = 1, 3, 5 \dots) \end{cases}
 \end{aligned}$$



$$a_0 = 0$$

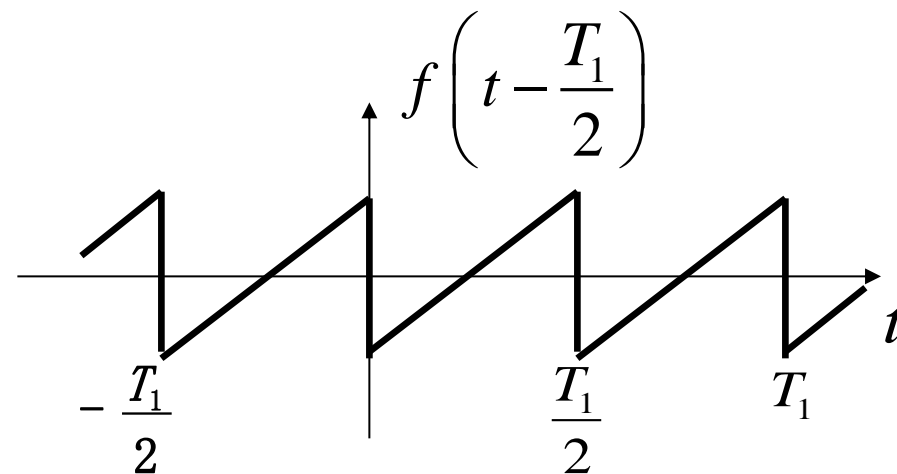
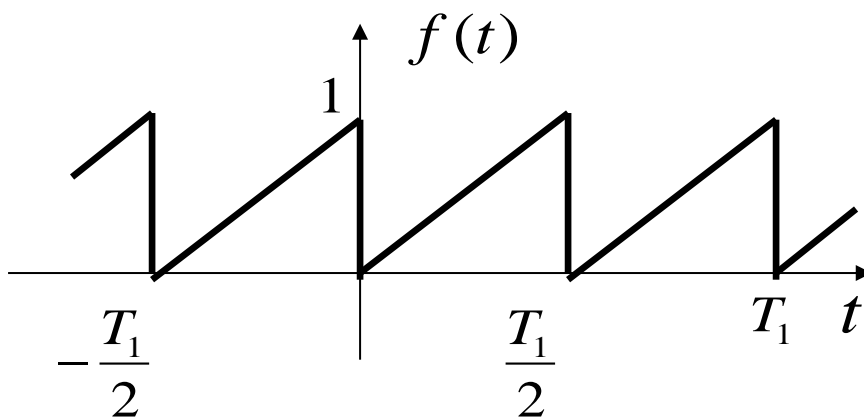
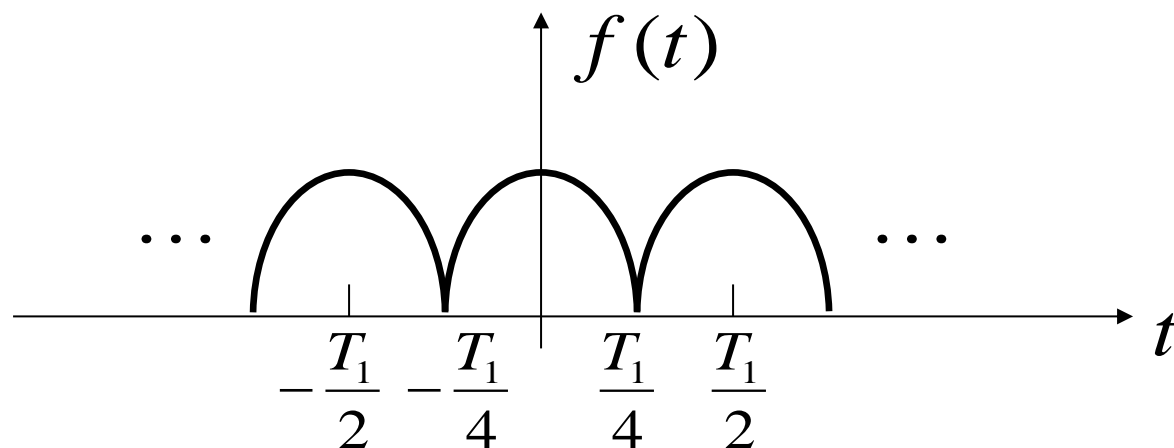
$$a_n = \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, 6 \dots) \\ \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt & (n = 1, 3, 5 \dots) \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, 6 \dots) \\ \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt & (n = 1, 3, 5 \dots) \end{cases}$$

在半波奇对称函数的傅里叶级数中，只含有基波和奇次谐波的正弦、余弦分量，不会包含直流分量和偶次谐波分量，所以称其为奇谐函数。

4. 偶谐函数（半波偶对称）

$$f\left(t \pm \frac{T_1}{2}\right) = f(t)$$



在半波偶对称的傅里叶级数中，只含有（直流与）偶次谐波的正弦、余弦分量，不包含奇次谐波分量，所以称其为偶谐函数。

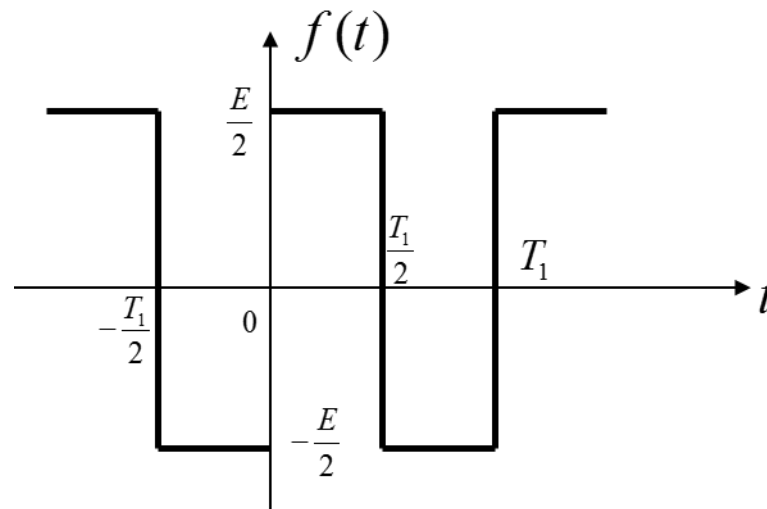
关于题图所示的周期矩形信号的三角形式傅里叶级数正确的参数包括（）

☒ A $a_n = 0 \quad (n = 0, 2, 4 \dots)$

☒ B $a_n = 0 \quad (n = 1, 3, 5 \dots)$

☐ C $b_n = 0 \quad (n = 1, 3, 5 \dots)$

☒ D $b_n = 0 \quad (n = 2, 4, 6 \dots)$



提交

波形对称性与谐波特性的总结

$f(t)$ 的对称条件	展开式中系数特点
$f(t) = f(-t)$, 纵轴对称 (偶函数)	$b_n = 0, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_1 t dt$
$f(t) = -f(-t)$, 原点对称 (奇函数)	$a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_1 t dt$
$f(t) = f(t + \frac{T}{2})$, 半周重叠 (偶谐函数)	无奇次谐波, 只有直流和偶次谐波
$f(t) = -f(t + \frac{T}{2})$, 半周镜像 (奇谐函数)	无偶次谐波, 只有奇次谐波分量

3.2.5 吉布斯（Gibbs）现象

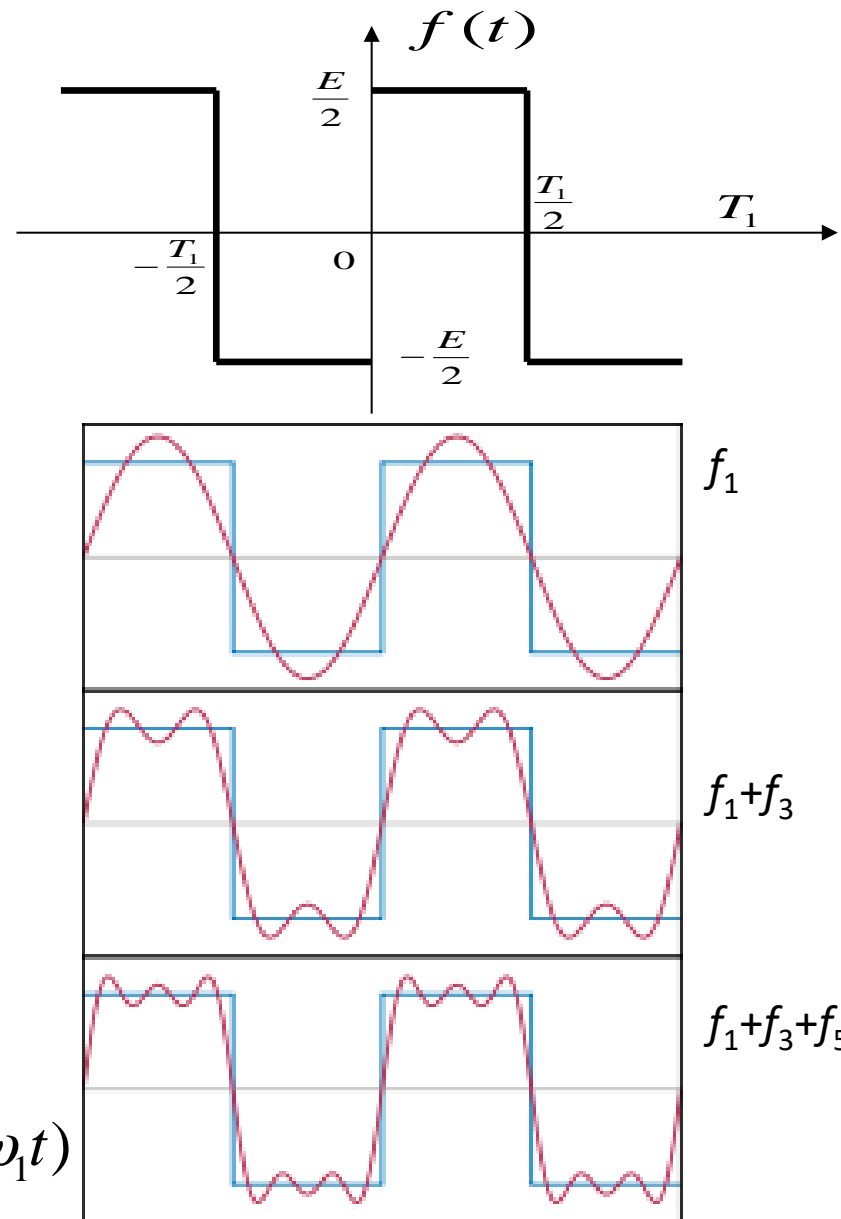
$n=1:$ $f(t) \approx \frac{2E}{\pi} \sin \omega_1 t$

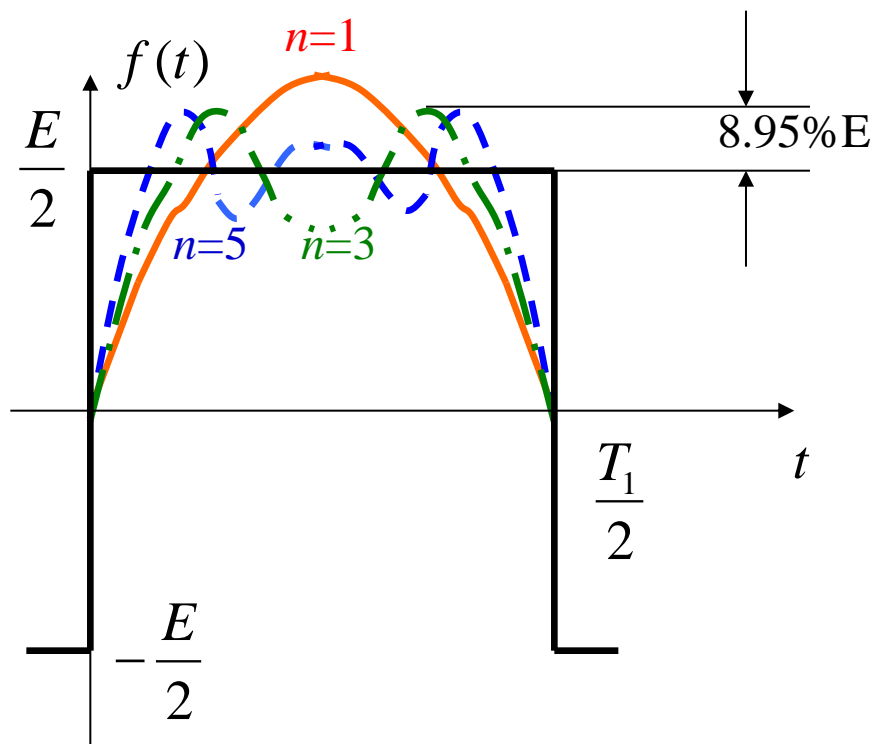
$n=3:$

$$f(t) \approx \frac{2E}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t \right)$$

$n=5:$

$$f(t) \approx \frac{2E}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t \right)$$





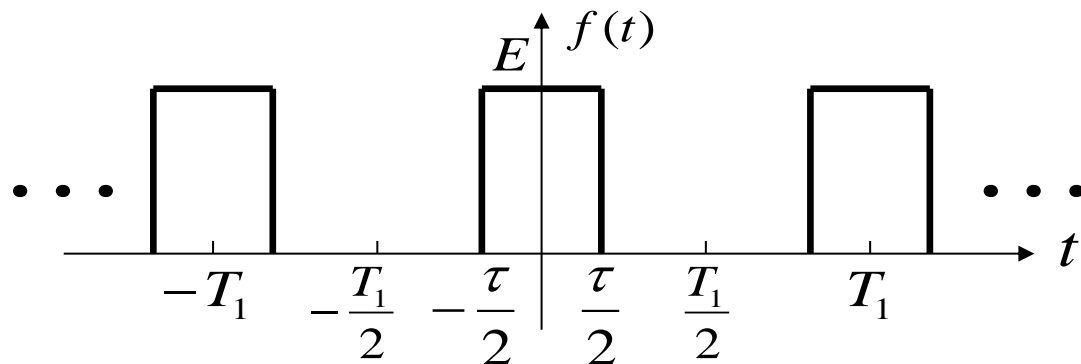
吉布斯现象：当选取的项数 N 很大时，**峰起值**趋于一个常数，**约等于总跳变值的9%**，并从不连续点开始以起伏振荡的形式逐渐衰减下去。

高频分量主要影响脉冲的跳变沿，**低频分量**主要影响脉冲的顶部。

$f(t)$ 波形变化越剧烈，所包含的高频分量越丰富；变化越缓慢，所包含的低频分量越丰富。

- 3.1 引言
- 3.2 周期信号的傅里叶级数分析
- 3.3 典型周期信号的傅里叶级数
- 3.4 傅里叶变换
- 3.5 典型非周期信号的傅里叶变换
- 3.6 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换
- 3.7 傅里叶变换的基本性质
- 3.8 卷积特性
- 3.9 周期信号的傅里叶变换
- 3.10 抽样信号的傅里叶变换
- 3.11 抽样定理

周期矩形脉冲信号的傅里叶级数



$b_n = 0$ (在偶函数的傅里叶级数中不含正弦项)

$$a_0 = \frac{2}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt = \frac{2}{T_1} \int_0^{\frac{\tau}{2}} E dt = \frac{E\tau}{T_1}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{\tau}{2}} E \cos n\omega_1 t dt = \frac{4E}{n\omega_1 T_1} \sin\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right) = \frac{2E\tau}{T_1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right)}{\frac{n\omega_1 \tau}{2}} \\ &= \frac{2E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right) = c_n \end{aligned}$$

周期矩形脉冲信号的三角形式傅里叶级数为

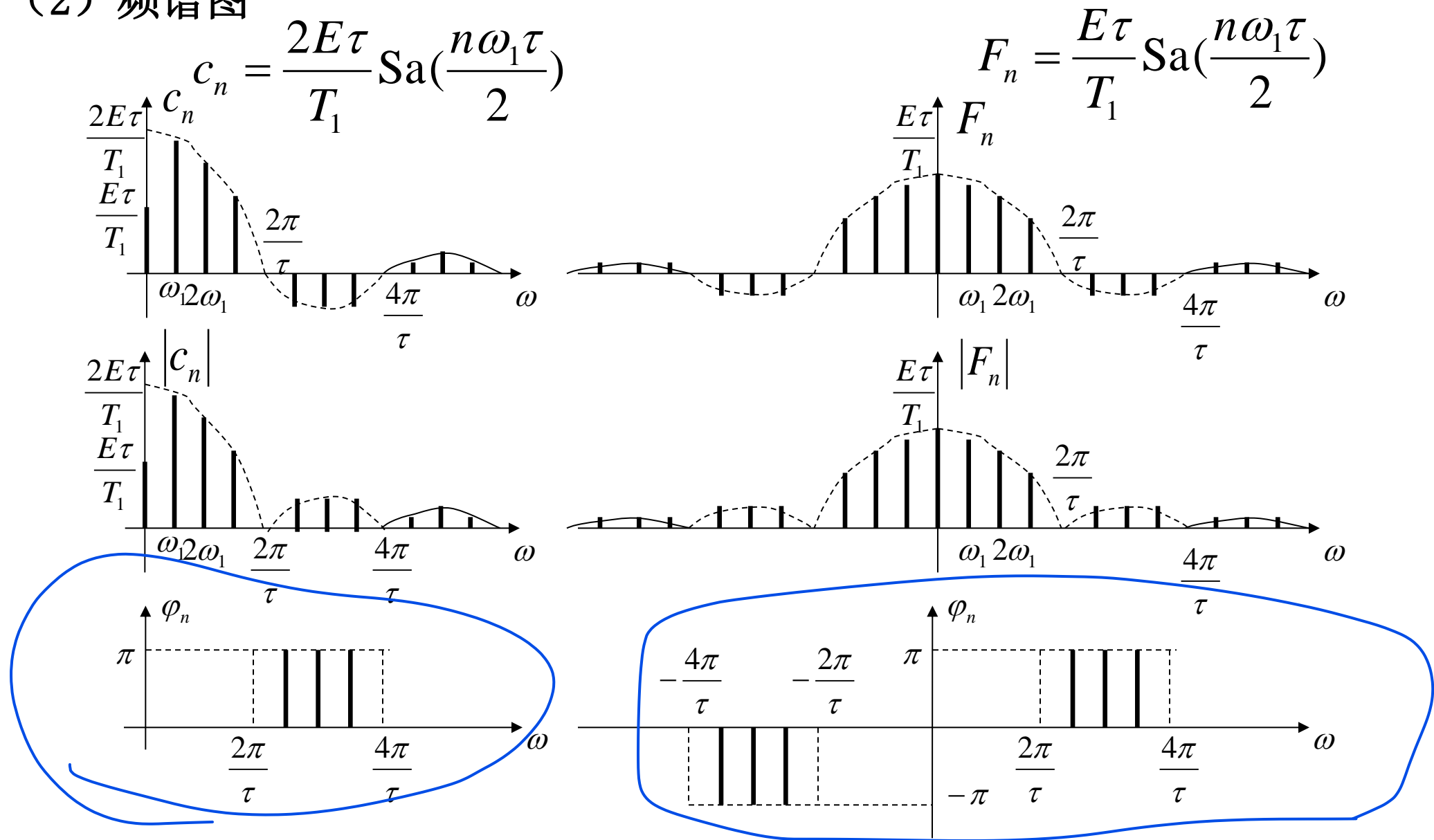
$$f(t) = \frac{E\tau}{T_1} + \frac{2E\tau}{T_1} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \cos n\omega_1 t$$

$$\text{因为 } F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2}a_n = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

$f(t)$ 的指数形式的傅里叶级数为

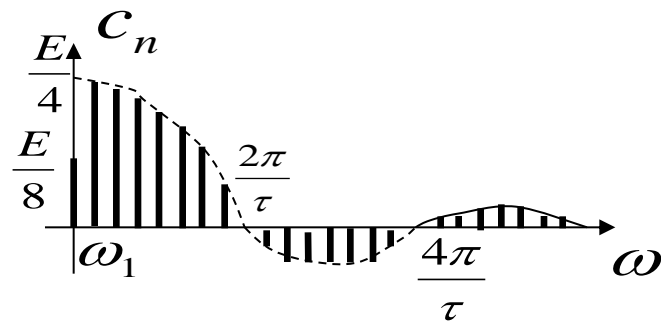
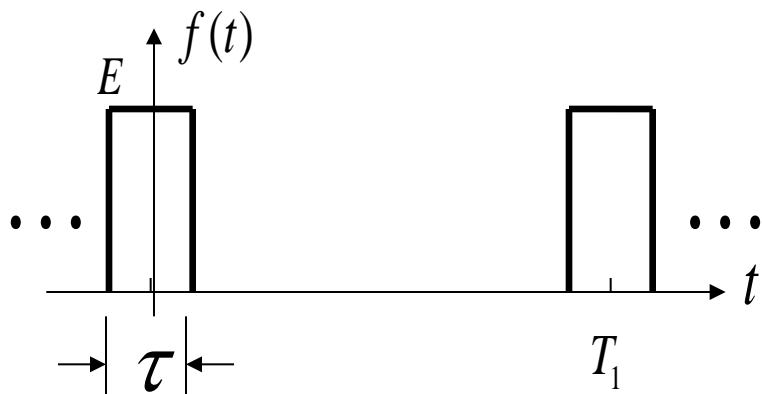
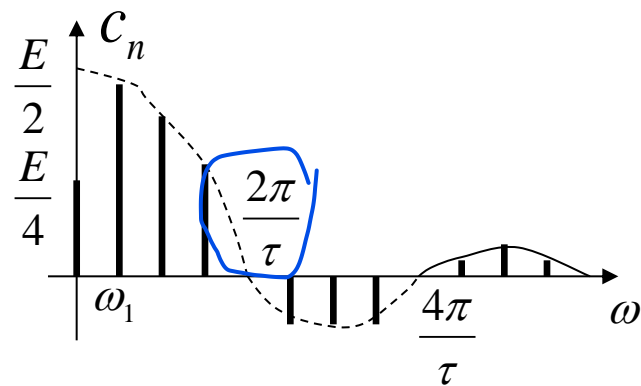
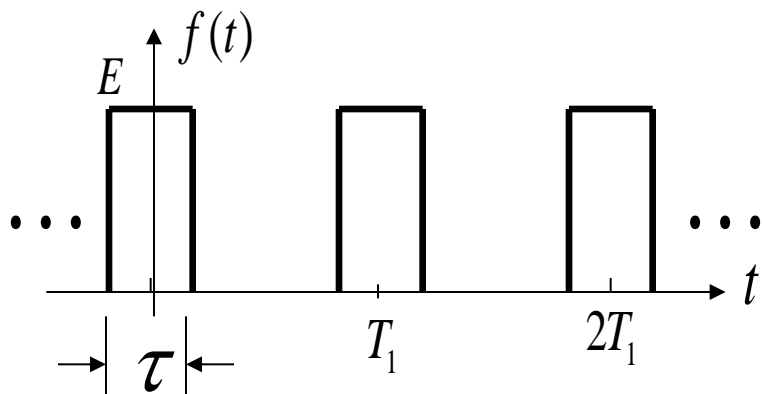
$$f(t) = \frac{E\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) e^{jn\omega_1 t}$$

(2) 频谱图

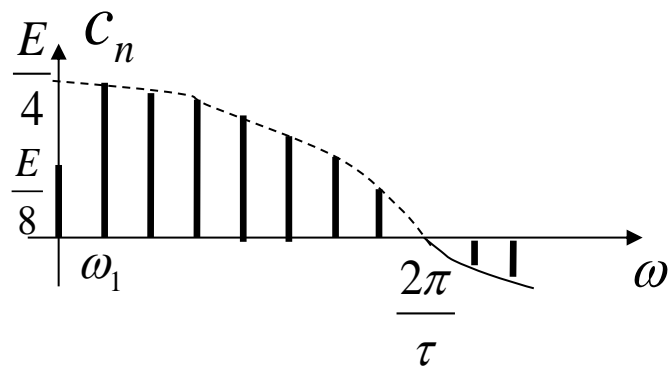
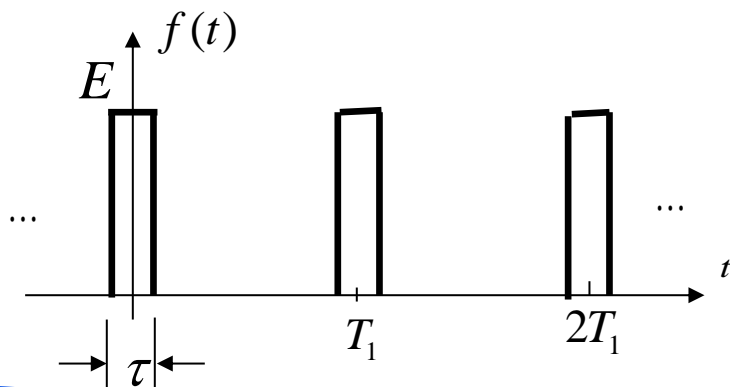
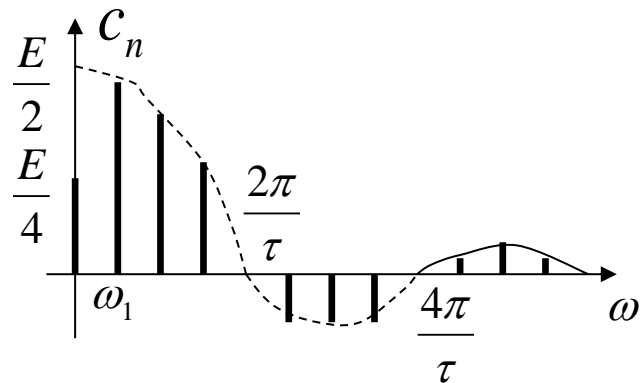
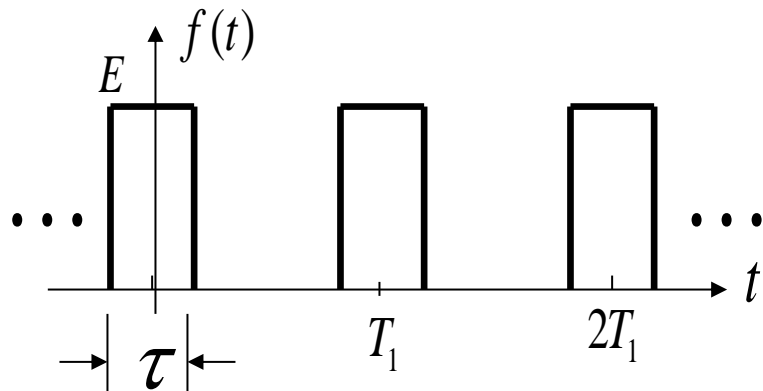


(3) 频谱结构与波形参数的关系 (T_1, τ)

a) 若 τ 不变, T_1 扩大一倍, 即 $T_1 = 4\tau \rightarrow T_1 = 8\tau$



b) 若 T_1 不变, τ 减小一半, 即 $T_1 = 4\tau \rightarrow T_1 = 8\tau$



谱线间隔 $\omega_1 (= \frac{2\pi}{T_1})$ 只与周期 T_1 有关, 且与 T_1 成反比;

零值点频率只与脉冲宽度 τ 有关, 且与 τ 成反比;

谱线幅度与 T_1 和 τ 都有关系, 且与 T_1 成反比, 与 τ 成正比。

作业

基础题（需提交）：3-2, 3-3, 3-4, 3-5, 3-7(a) (c) (e),
3-10(1) (3) (5)

加强题（选做，不提交）：3-7(b) (d) (f), 3-10(2) (4) (6),
3-11(a), 3-12