

- 6.1 引言
- 6.2 信号矢量空间的基本概念
- 6.3 信号的正交函数分解
- 6.4 完备正交函数集、帕塞瓦尔定理
- 6.5 相关
- 6.6 能量谱和功率谱
- 6.7 信号通过线性系统的自相关函数、
能量谱和功率谱分析
- 6.8 匹配滤波器
- 6.9 测不准原理

信号表示式（时间函数）与多维矢量之间存在许多形式上的类似，**信号用多维矢量描述**便于对信号的性能、信号分析与处理进行更深入的研究。

本章主要内容

- 利用矢量空间方法研究信号理论的基本概念；
- 信号的正交函数分解；
- 相关函数；
- 能量谱和功率谱；
- 匹配滤波器；
- 测不准原理。

6.2.1 线性空间

定义：是这样一种集合，其中任意两元素相加可构成此集合内的另一元素，任意元素与任意数（可以是实数也可以是复数）相乘后得到此集合内的另一元素。

例： N 维实数空间 \mathbf{R}^N N 维复数空间 \mathbf{C}^N

定义 1 设 V 是一个非空集合， R 为实数域。如果对于任意两个元素 $\alpha, \beta \in V$ ，总有唯一的一个元素 $\gamma = \alpha + \beta$ 与之对应，称为 α 与 β 的和，记作： $\gamma \in V$

若对于任一数 $\lambda \in R$ 与任一元素 $\alpha \in V$ ，总有唯一的元素 $\delta \in V$ 与之对应，称为 α 与 λ 的积，记作： $\delta = \lambda\alpha$

例6-1: 正实数的全体, 记作 R^+ , 在其中定义加法及乘数运算为

$$a \oplus b = ab, \quad \lambda \circ a = a^\lambda, \quad (\lambda \in R, a, b \in R^+).$$

验证 R^+ 对上述加法与乘数运算构成线性空间。

证明: $\forall a, b \in R^+, \Rightarrow a \oplus b = ab \in R^+;$

$$\forall \lambda \in R, a \in R^+, \Rightarrow \lambda \circ a = a^\lambda \in R^+.$$

所以对定义的加法与乘数运算封闭。

6.2.2 范数

线性空间中元素 \mathbf{x} 的范数以符号 $\|\mathbf{x}\|$ 表示, 满足以下公理:

- (1) 正定性 $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时 $\|\mathbf{x}\| = 0$;
- (2) 正齐性 对所有数量 α , 有 $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$;
- (3) 三角形不等式 $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

1. \mathbf{R}^N 与 \mathbf{C}^N 空间的范数;

令 p 为实数, $1 \leq p \leq \infty$, 在 \mathbf{R}^N 与 \mathbf{C}^N 空间元素 $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 的 p 阶范数定义为

$$\|\mathbf{x}\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left[\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} & \text{对于 } 1 \leq p < \infty \\ \max_{1 \leq i \leq N} |x_i| & \text{对于 } p \rightarrow \infty \end{cases}$$

常用范数:

$$\text{若 } x = (1, j)$$

$$\|x\|_1 = 1 + 1 = 2$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\|x\|_\infty = \max(1, 1) = 1$$

在二维或三维实数矢量空间中，二阶范数的物理意义是矢量的长度。 $\|x\|_2$ 也称为欧氏(Euclidean)范数或欧氏距。

2. 连续时间信号空间 L 和离散时间信号空间 l 中的范数

“上确界”的概念是数学分析中最基本的概念。

考虑一个实数集合 M ，如果有一个实数 S ，使得 M 中任何数都不超过 S ，就称 S 是 M 的一个上界。在所有那些上界中如果有一个最小的上界，就称为 M 的**上确界**。

一个有界数集有无数个上界和下界，但是上确界只有一个。

用 \sup 表示信号的**上确界**，对于定义在闭区间内的信号， \sup 表示其幅度值。

(1) 连续时间信号空间 L 中, 元素 $x(t)$ 的 p 阶范数 $\|x\|_p$ 的定义:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt \right]^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \sup |x(t)| & p = \infty \end{cases}$$

(2) 离散时间信号空间 l 中, 元素 $x(n)$ 的 p 阶范数 $\|x\|_p$ 的定义:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (|x(n)|^p) \right]^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \sup |x(n)| & p = \infty \end{cases}$$

(3) 常用的范数

一阶范数表示信号作用的强度。

$$\|x\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \quad L\text{空间}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \quad l\text{空间}$$

二阶范数

$$\text{L空间} \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad \text{即} \quad \|\mathbf{x}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$l\text{空间} \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \right]^{1/2} \quad \text{即} \quad \|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

物理意义：二阶范数的平方表示信号的能量。

$$\text{L空间} \quad \|\mathbf{x}\|_{\infty} = \sup |x(t)|$$

$$l\text{空间} \quad \|\mathbf{x}\|_{\infty} = \sup |x(n)|$$

物理意义：对于定义在闭区间上的 $x(t)$, $\|\mathbf{x}\|_{\infty}$ 表示信号可测得的峰值，即信号的幅度。

6.2.3 内积

直角坐标平面内两矢量相对位置关系

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2}{(\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2)^{1/2} (\mathbf{y}_1^2 + \mathbf{y}_2^2)^{1/2}}$$

利用范数符号，将矢量长度分别写作

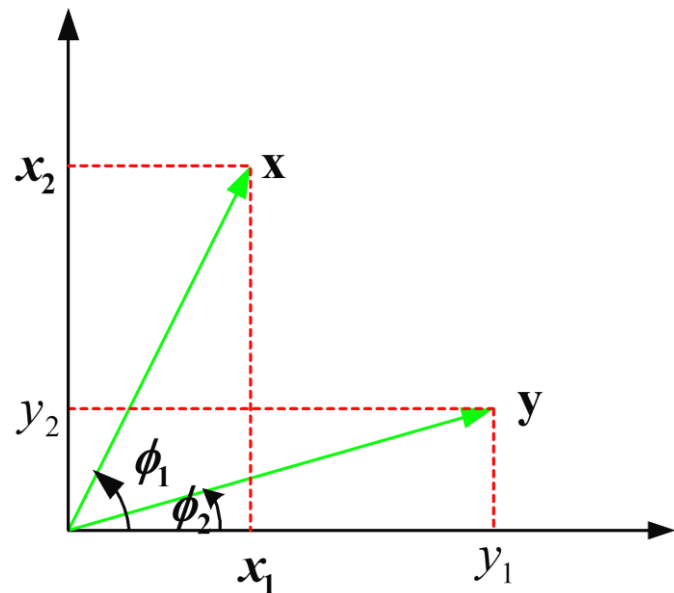
$$\|\mathbf{x}\|_2 = (\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2)^{1/2}$$

$$\|\mathbf{y}\|_2 = (\mathbf{y}_1^2 + \mathbf{y}_2^2)^{1/2}$$

于是：

$$\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2 = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2$ 对应于二维矢量空间的内积（点积）运算



$$\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2 = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

上式表明：给定的矢量长度，标量乘积式反映了两矢量之间相对位置的“校准”情况。即

$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, 两矢量之夹角为 90° , 标量乘积为零

$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$, 两矢量夹角为 0° , 标量乘积取最大值

推广：

三维 $\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2 + \mathbf{x}_3 \mathbf{y}_3$

多维 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ N 维实线性空间

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i^*$ N 维复线性空间

信号空间 L 内的两连续信号的内积

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t)^* dt \quad \text{连续时间信号}$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) y(n)^* \quad \text{离散时间信号}$$

对于 L 空间或 l 空间，信号 \mathbf{x} 与其自身的内积运算为

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{连续}$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{离散}$$

6.2.4 柯西—施瓦茨不等式

柯西—施瓦茨（Cauchy-Schwarz）不等式：

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

证明：对于二维矢量空间，已知有如下关系


$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

$$\text{即 } \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2} = \cos(\phi_1 - \phi_2) \text{ 则有 } -1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2} \leq 1$$

$$\frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \leq 1 \quad \text{所以 } |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

信号分解的目的

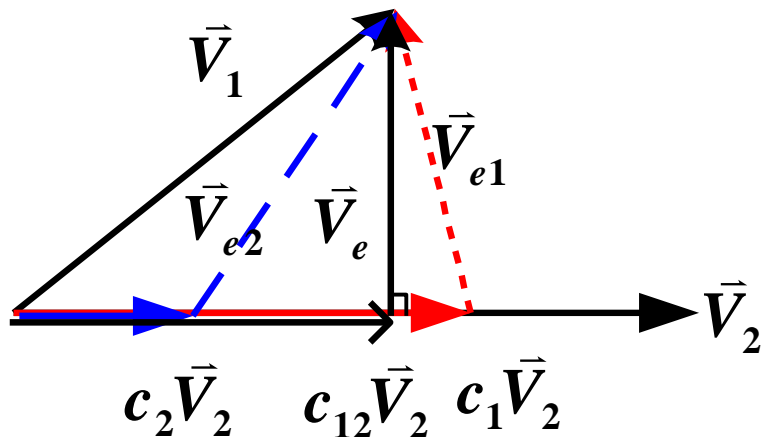
- 任意信号分解为单元信号之和，从而考查信号的特性。
- 简化系统分析与运算， 总响应=单元响应

$$e(t) = \sum_{i=0}^n e_i(t)$$

$$r(t) = H[e(t)] = H\left[\sum_{i=0}^n e_i(t)\right] = \sum_{i=0}^n r_i(t)$$

6.3.1 矢量的正交分解

\vec{V}_1 用 \vec{V}_2 表示, 方式不是惟一的:

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= c_1 \vec{V}_2 + \vec{V}_{e1} \\ &= c_2 \vec{V}_2 + \vec{V}_{e2} \\ &= c_{12} \vec{V}_2 + \vec{V}_e\end{aligned}$$



怎样分解, 能得到最小的误差分量?

$$\vec{V}_e \perp \vec{V}_2 \quad \vec{V}_1 = c_{12} \vec{V}_2 + \vec{V}_e \quad \leftarrow \text{误差矢量}$$

$$c_{12} V_2 = V_1 \cos(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$$

↑ 系数
$$c_{12} = \frac{V_1 \cos(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)}{V_2} = \frac{V_1 V_2 \cos(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)}{V_2 V_2} = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2}$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 \quad \text{即} \quad c_{12} = 0 \quad \text{两矢量正交}$$

- 平面中任一矢量可分解为 x, y 二方向矢量。
- 空间中任一矢量可分解为 x, y, z 三方向矢量。
- 一个三维空间矢量 $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{h}$ ，必须用三个正交的矢量来表示，如果用二维矢量表示就会出现误差：

$$\vec{V} \approx x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \vec{V}_e = z\vec{h} \neq 0$$

6.3.2 正交函数

在区间($t_1 < t < t_2$)内, 信号 $f_1(t)$ 用 $f_2(t)$ 表示, 即

$$f_1(t) \approx c_{12} f_2(t)$$

$$\text{误差 } \overline{\varepsilon^2} = \overline{f_e^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - c_{12} f_2(t)]^2 dt$$

为求使 $\overline{\varepsilon^2}$ 最小的 c_{12} , 必需使 $\frac{d\overline{\varepsilon^2}}{dc_{12}} = 0$, 求得系数

$$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt} = \frac{\langle f_1(t), f_2(t) \rangle}{\langle f_2(t), f_2(t) \rangle}$$

若 $c_{12} = 0$, 则 $f_1(t), f_2(t)$ 称为正交函数, 满足

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt = 0$$

6.3.3 相关系数

分解的原则： $f_e(t)$ 的方均值最小，即误差信号功率(能量)最小。

求系数 c_{12}

$$\text{令 } \overline{\varepsilon^2} = \overline{f_e^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_e^2(t) dt, \text{ 求 } \overline{\varepsilon^2} \text{ 最小时的 } c_{12},$$

即求出 $\frac{d\overline{\varepsilon^2}}{dc_{12}} = 0$ 时的 c_{12} , 即

$$\frac{d}{dc_{12}} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - c_{12}f_2(t)]^2 dt \right\} = 0$$

交换微积分次序

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dc_{12}} [\underbrace{f_1^2(t)}_{(1)} - \underbrace{2c_{12}f_2(t)f_1(t)}_{(2)} + \underbrace{f_2^2(t)c_{12}^2}_{(3)}] dt = 0$$

先微分

$$(1) \frac{d}{dc_{12}} f_1^2(t) = 0 \quad (\text{因为 } f_1(t) \text{ 不含 } c_{12})$$

$$(2) \frac{d}{dc_{12}} [-2c_{12}f_1(t) \cdot f_2(t)] = -2f_1(t) \cdot f_2(t)$$

$$(3) \frac{d}{dc_{12}} [c_{12}^2 f_2^2(t)] = 2c_{12} f_2^2(t)$$

再积分

$$\int_{t_1}^{t_2} [-2f_1(t) \cdot f_2(t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} 2c_{12} f_2^2(t) dt = 0$$

可得系数为

$$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt} \quad c_{12} = \frac{\langle f_1(t), f_2(t) \rangle}{\langle f_2(t), f_2(t) \rangle}$$

例6-2: 设矩形脉冲 $f(t)$ 有如下定义，波形如图所示，试用正弦波 $\sin t$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内近似表示此函数，使均方误差最小。

$$f(t) = \begin{cases} +1 & (0 < t < \pi) \\ -1 & (\pi < t < 2\pi) \end{cases}$$

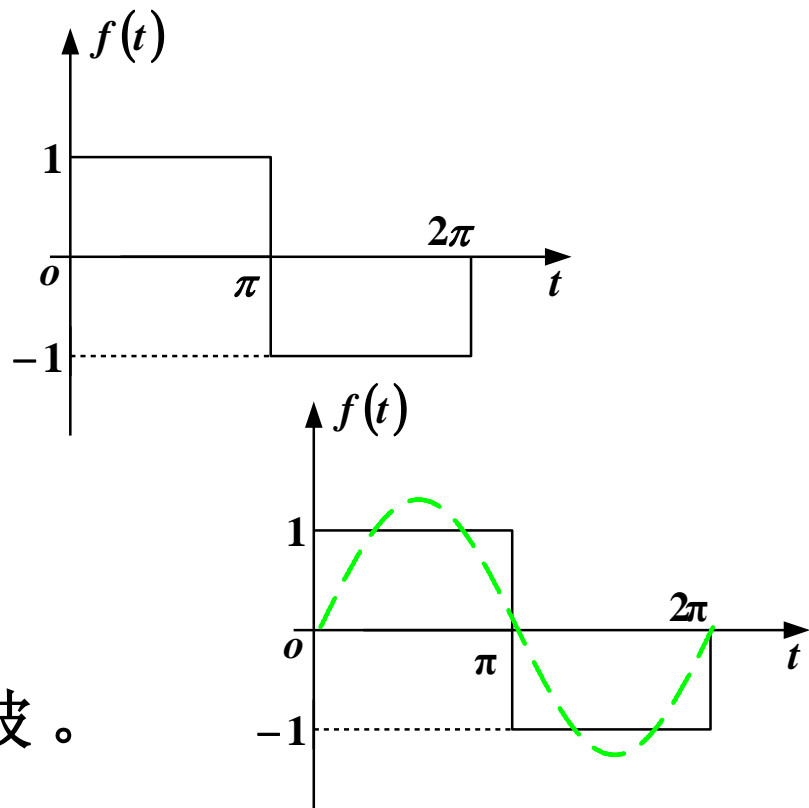
解: 函数 $f(t)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内近似为 $f(t) \approx c_{12} \sin t$

$$c_{12} = \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \sin t \, dt}{\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt} = \frac{4}{\pi}$$

所以 $f(t) \approx \frac{4}{\pi} \sin t$ 。近似波形是振幅为 $\frac{4}{\pi}$ 的正弦波。

与傅里叶级数比较： $\omega_1 = 2\pi / (2\pi) = 1$ ，基波的正弦函数的系数为

$$b_1 = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) \sin(\omega_1 t) \, dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin t \, dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin t \, dt \right) = \frac{4}{\pi}$$



例6-3: 试用正弦函数 $\sin t$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 之内来近似表示余弦函数 $\cos t$ 。

解: 显然, 由于 $\int_0^{2\pi} \cos t \sin t \, dt = 0$

所以 $c_{12} = 0$

即余弦函数 $\cos t$ 不包含正弦信号 $\sin t$ 分量, 或者说 $\cos t$ 与 $\sin t$ 两函数正交。

例6-4:用正弦波逼近三角函数, $f_e(t) = ?$

$$f_1(t) = \frac{t}{3}, \quad 0 \leq t \leq 3$$

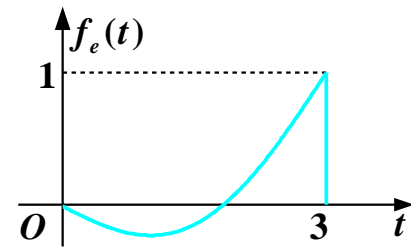
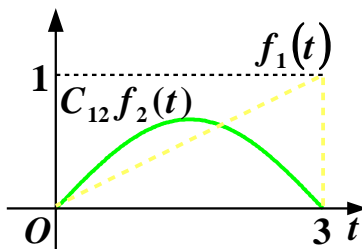
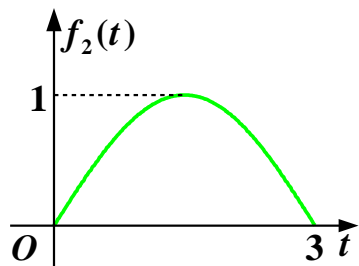
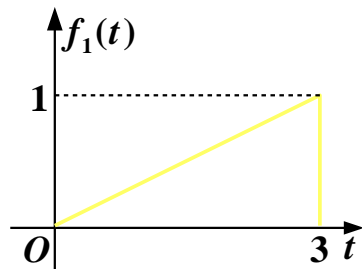
$$f_2(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right), \quad 0 \leq t \leq 3$$

解:

$$c_{12} = \frac{\int_0^3 f_1(t) \cdot f_2(t) dt}{\int_0^3 f_2^2(t) dt} = \frac{\int_0^3 \frac{t}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) dt}{\int_0^3 \left(\sin \frac{\pi}{3}t\right)^2 dt} = \frac{2}{\pi}$$

所以 $f_1(t) \approx \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{3}t \quad (0 \leq t \leq 3)$

$$f_e(t) = f_1(t) - c_{12}f_2(t)$$



6.3.4 正交函数集

任意信号 $f(t)$ 可表示为 n 维正交函数之和:

$$f(t) \doteq c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots c_r g_r(t) + \cdots + c_n g_n(t) = \sum_{r=1}^n c_r g_r(t)$$

原函数

近似函数

$g_1(t), g_2(t) \cdots g_r(t)$ 相互正交:



$r=0,1,2,\dots,n$

基底函数 (basis signal)

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) \cdot g_j(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i, & i = j \end{cases}$$

$g_1(t), g_2(t) \cdots g_r(t)$ 正交函数集

$$\begin{aligned} c_r &= \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt} \\ &= \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) dt}{K_r} \\ &= \frac{\langle f(t), g_r(t) \rangle}{\langle g_r(t), g_r(t) \rangle} \end{aligned}$$

分解原则是误差函数方均值最小

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{f_e^2(t)} = \frac{1}{t_1 - t_2} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{r=1}^n c_r g_r(t)]^2 dt$$

$\overline{f_e}$

误差信号能量

误差信号功率

令 $\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial C_1} = 0, \frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial C_2} = 0, \dots, \frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial C_r} = 0, \dots, \frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial C_n} = 0$ 可得 c_r 表达式

理解:

$$c_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_r(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t)dt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_r(t)dt}{K_r}$$

- 此公式是个通式，适合于任何正交函数集。
- c_1, c_2, \dots, c_n 是相互独立的，互不影响，计算时先抽取哪一个都可以，非正交函数就无此特性。
- 正交函数集规定：
所有函数应两两正交。
不能因一个函数集中某几个函数相互正交就说该函数集是正交函数。

总结:

- 两周期信号在同一周期内(同区间内)正交的条件是 $c_{12}=0$,
即:

$$\int_T f_1(t) \cdot f_2(t) dt = 0$$

- 对一般信号在给定区间正交,而在其他区间不一定满足正交。
- 两个信号不正交,就有相关关系,必能分解出另一信号。

6.3.5 复变函数的正交特性

两复变函数在区间 (t_1, t_2) 内相互正交的条件是

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \cdot f_2^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f_2(t) \cdot f_1^*(t) dt = 0$$

若在区间 (t_1, t_2) 内，复变函数集 $\{g_r(t)\} (r=1, 2, \dots, n)$ 满足关系

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_i^*(t) dt = \langle g_i(t), g_i(t) \rangle = K_i$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j^*(t) dt = \langle g_i(t), g_j(t) \rangle = 0 \quad i \neq j$$

则此复变函数集为正交函数集。

用 $\{g_r(t)\} (r=0, 1, 2, \dots, n)$ 表示 $f(t)$ ，求系数

$$c_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_r(t) g_r^*(t) dt},$$

6.4.1 完备正交函数集

$$f(t) \doteq c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots c_r g_r(t) + \cdots + c_n g_n(t) = \sum_{r=1}^n c_r g_r(t)$$

定义1:

当 n 增加时, $\overline{\varepsilon^2}$ 下降, 若 $n \rightarrow \infty$, 则 $\overline{\varepsilon^2} \rightarrow 0$, 此时 $g_1(t), g_2(t) \cdots g_r(t) \cdots, g_n(t)$ 为完备的正交函数集。

定义2:

如果存在函数 $x(t)$, 有 $\int_{t_1}^{t_2} g_r(t) \cdot x(t) dt = 0$, 则 $x(t)$ 必属于此正交函数集, 原函数集 $g_1(t), g_2(t) \cdots g_r(t) \cdots g_n(t)$ 不完备。

6.4.2 帕塞瓦尔定理

设 $\{g_r(t)\}$ 为完备的正交函数集，即

$$\text{误差函数 } \overline{f_e^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{r=1}^{\infty} c_r g_r(t) \right]^2 dt = 0$$

$$\text{即 } \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - 2 \sum_{r=1}^{\infty} c_r \int_{t_1}^{t_2} g_r(t) f(t) dt + \sum_{r=1}^{\infty} c_r^2 \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt = 0$$

$$\text{因为 } c_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt} \longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) dt = c_r \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt$$

$$\text{代入 } \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - 2 \sum_{r=1}^{\infty} c_r c_r \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt + \sum_{r=1}^{\infty} c_r^2 \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt = 0$$

$$\text{即 } \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{r=1}^{\infty} c_r^2 \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} [c_r g_r(t)]^2 dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{r=1}^{\infty} C_r^2 \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} [C_r g_r(t)]^2 dt$$

信号的
能量

基底信号的
能量

各信号分量的
能量

物理意义：一个信号所含有的能量（功率）恒等于此信号在完备正交函数集中各分量能量（功率）之和。

数学本质：矢量空间信号正交变换的范数（内积）不变性。

6.5.1 能量信号和功率信号

定义：一般说来，能量总是与某一物理量的平方成正比。

令 $R = 1$ ，则在整个时间域内，实信号 $f(t)$ 的

能量
$$E = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f^2(t) dt$$

平均功率
$$P = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f^2(t) dt$$

讨论上述两个式子，只可能出现两种情况：

① $0 < E < \infty$ (有限值) $P = 0$ ← 能量 (有限) 信号

② $0 < P < \infty$ (有限值) $E = \infty$ ← 功率 (有限) 信号

一般规律

- ①一般周期信号为功率信号。
- ②非周期信号，在有限区间有值，为能量信号。
- ③还有一些非周期信号是非能量信号。

如 $u(t)$ 是功率信号；

而 $tu(t)$ 为非功率非能量信号；

$\delta(t)$ 是无定义的非功率非能量信号。

信号 $f(t) = e^{-4|t|}$ 是:

- ☒ A 能量信号
- ☐ B 功率信号

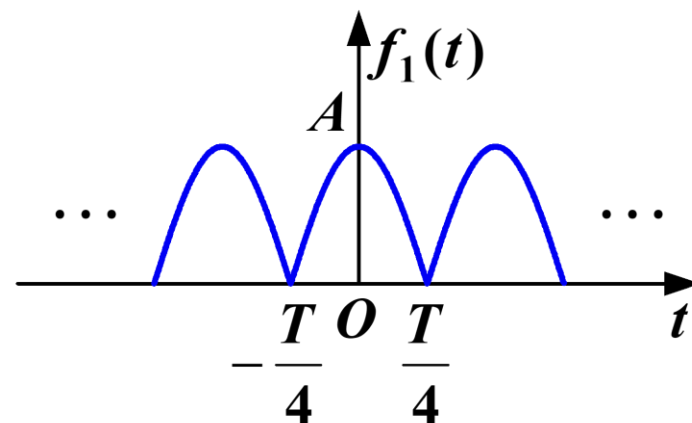
提交

例6-5：判断下面的信号是功率信号还是能量信号。

解： $P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} f^2(t) dt$

$$= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} [A \cos(\omega t)]^2 dt \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T} \right)$$

$$= \frac{2}{T} A^2 \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \frac{\cos(2\omega t) + 1}{2} dt = \frac{A^2}{2}$$



$$0 < P < \infty \quad E = \lim_{T \rightarrow \infty} P \frac{T}{2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{4} T = \infty$$

所以 $f_1(t)$ 为功率信号

6.5.2 相关系数与相关函数

数学本质：相关系数是信号矢量空间内积与范数特征的具体表现。

物理本质：相关与信号能量特征有着密切联系。

1. 相关系数 ρ_{12}

由两个信号的内积所决定：

$$\begin{aligned}\rho_{12} &= \frac{\langle f_1(t), f_2(t) \rangle}{\left[\langle f_1(t), f_1(t) \rangle \langle f_2(t), f_2(t) \rangle \right]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\langle f_1(t), f_2(t) \rangle}{\|f_1(t)\|_2 \|f_2(t)\|_2}\end{aligned}$$

相关系数

假定 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是能量有限的实信号。用 $f_2(t)$ 逼近 $f_1(t)$,
选择 c_{12} 使误差 $\overline{\varepsilon^2}$ 最小, 则有

$$c_{12} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f_2^2(t)dt}$$

此时, 能量误差为

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_1(t) - f_2(t) \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} f_2^2(t)dt} \right]^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t)dt - \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt \right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} f_2^2(t)dt}\end{aligned}$$

令相对能量误差为

$$\frac{\overline{\varepsilon^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t) dt} = 1 - \rho_{12}^2$$

其中

$$\rho_{12} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} f_2^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\langle f_1(t), f_2(t) \rangle}{\|f_1(t)\|_2 \|f_2(t)\|_2}$$

ρ_{12} 称为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的相关系数。

由柯西—施瓦茨不等式，得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} f_2^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

所以

$$|\rho_{12}| \leq 1$$

若 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 完全一样, $\rho_{12} = 1$, 此时 $\overline{\varepsilon^2}$ 等于零

若 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 为正交函数, $\rho_{12} = 0$, 此时 $\overline{\varepsilon^2}$ 最大

说明:

相关系数 ρ_{12} 从信号能量误差的角度描述了信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的相关特性, 利用矢量空间的的内积运算给出了定量说明。

2. 相关函数

(1) $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 是能量信号

① $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 为实函数:

相关函数定义:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t + \tau) f_2(t) dt$$

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t + \tau) dt$$

可以证明:

$$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau)$$

当 $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$ 时,

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau) f(t) dt$$

$$R(\tau) = R(-\tau) \quad \tau \text{ 的偶函数}$$

② $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 为复函数:

相关函数:

$$\mathbf{R}_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_1(t) \mathbf{f}_2^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_1(t + \tau) \mathbf{f}_2^*(t) dt$$

$$\mathbf{R}_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_1^*(t - \tau) \mathbf{f}_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_1^*(t) \mathbf{f}_2(t + \tau) dt$$

$$\mathbf{R}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(t) \mathbf{f}^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(t + \tau) \mathbf{f}^*(t) dt$$

同时具有性质:

$$\mathbf{R}_{12}(\tau) = \mathbf{R}_{21}^*(-\tau)$$

$$\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{R}^*(-\tau)$$

(2) $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 是功率信号

① $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 为实函数:

相关函数:

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_1(t) f_2(t - \tau) dt \right]$$
$$R_{21}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_2(t) f_1(t - \tau) dt \right]$$

自相关函数:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t - \tau) dt \right]$$

② $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 为复函数:

相关函数:

$$\mathbf{R}_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{f}_1(t) \mathbf{f}_2^*(t - \tau) dt \right]$$

$$\mathbf{R}_{21}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{f}_2(t) \mathbf{f}_1^*(t - \tau) dt \right]$$

自相关函数:

$$\mathbf{R}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{f}(t) \mathbf{f}^*(t - \tau) dt \right]$$

6.5.3 相关与卷积的比较

$f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 卷积表达式:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

$f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 相关函数表达式:

$$R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t - \tau) dt$$

两者的关系

$$R_{12}(t) = f_1(t) * f_2(-t)$$

即

- $f_2(t)$ 反褶与 $f_1(t)$ 之卷积即得 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的相关函数 $R_{12}(t)$ 。
- $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 为实偶函数, 则其卷积与相关完全相同。

说明:

- ① 自相关在 $t = 0$ 时,相关性最强, $R(0)$ 最大。
- ② 若 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 为实偶函数,则卷积与相关完全相同。
- ③ 相关与卷积类似, 都包含移位, 相乘和积分三个步骤, 差别在于卷积运算需要反褶, 而相关不需要反褶。

例6-6： 求周期余弦信号 $f(t) = E\cos(\omega_1 t)$ 的自相关函数。

解： 对此功率信号，由自相关函数的定义，有

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t - \tau) dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega_1 t) \cos[\omega_1(t - \tau)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega_1 t) [\cos(\omega_1 t) \cos(\omega_1 \tau) + \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_1 \tau)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E^2}{T} \cos(\omega_1 \tau) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(\omega_1 t) dt \\ &= \frac{E^2}{2} \cos(\omega_1 \tau) \end{aligned}$$

此例结论

1. 周期信号的自相关函数仍为周期信号, 且周期相同。
2. 周期信号的自相关函数是一偶函数, $R(0)$ 为最大值。
3. 余弦函数的自相关函数仍为余弦; 同理可证, 任意相位的正弦、余弦之自相关函数仍为余弦。

6.5.4 相关定理

若已知 $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$ $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$

则 $\mathcal{F}[R_{12}(\tau)] = F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega)$

若 $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$, $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$

则自相关函数为

$$\mathcal{F}[R(\tau)] = |F(\omega)|^2$$

相关定理证明:

由相关函数定义可知 $\mathbf{R}_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t - \tau) dt$

取傅里叶变换

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}[\mathbf{R}_{12}(\tau)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t - \tau) dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2^*(t - \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{j\omega\tau} d\tau \right]^* dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\lambda + t) e^{j\omega\lambda} d\lambda \right]^* dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \left[F_2(\omega) e^{j\omega t} \right]^* dt = F_2^*(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega)
 \end{aligned}$$

同理可得: $\mathbf{F}[\mathbf{R}_{21}(\tau)] = F_1^*(\omega) \cdot F_2(\omega)$

说明

1. 相关定理表明：两信号互相关函数的傅里叶变换等于其中第一个信号的变换与第二个信号变换**取共轭**两者之积。
2. 自相关函数的傅里叶变换等于原信号**幅度谱的平方**。

若是实偶函数,此时 $F_2^*(\omega) = F_2(\omega)$,此时相关定理与卷积定理具有相同的结果。

6.6.1 能量谱

由相关定理知 $\mathcal{F}[R(\tau)] = |F(\omega)|^2$

$$\text{所以 } R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

又能量信号的自相关函数是

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t - \tau) dt$$

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

有下列关系

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 df$$

若 $f(t)$ 为实数, 上式可写成

$$\begin{aligned} R(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 df \quad \cdots \cdots \text{帕塞瓦尔方程} \end{aligned}$$

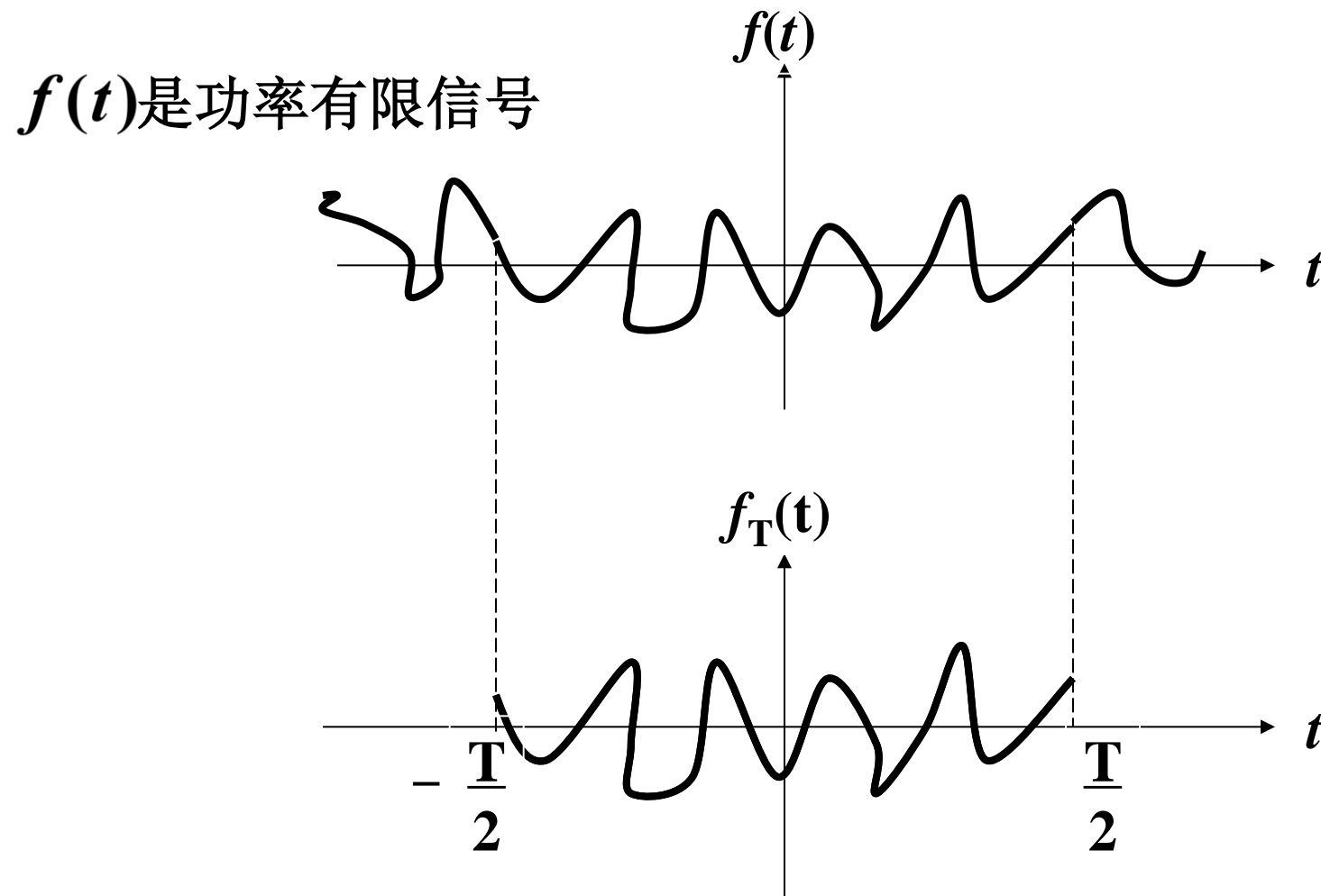
定义 $\varepsilon(\omega) = |F(\omega)|^2$ $\cdots \cdots$ 能量谱密度 (能谱)

所以有 $\varepsilon(\omega) = F[R(\tau)]$

$$R(\tau) = F^{-1}[\varepsilon(\omega)]$$

所以能量信号的能量谱密度与自相关函数是一对傅里叶变换对。

6.6.2 功率谱

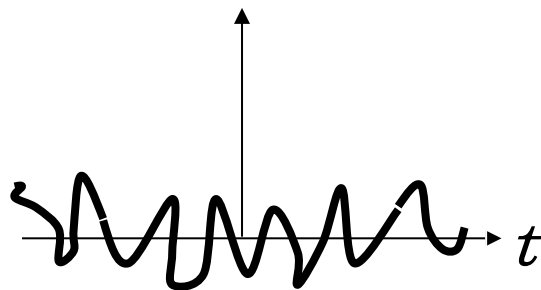


信号 $f(t)$ 及其截断函数

$$\text{令 } f_T(t) = \begin{cases} f(t) & \left(|t| \leq \frac{T}{2}\right) \\ 0 & \left(|t| > \frac{T}{2}\right) \end{cases} \quad \mathcal{F}[f_T(t)] = F_T(\omega)$$

T 是有限的，能量有限

$$\begin{aligned} E_T &= \int_{-\infty}^{\infty} f_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} |F_T(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt \end{aligned}$$



则 $f(t)$ 的平均功率为:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} d\omega$$

定义 $S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$ 为 $f(t)$ 的功率密度函数(功率谱)

1. 一个极限的概念;
2. 单位频带内信号功率随频率的变化情况;
3. 无相位信息。

利用相关定理有：

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f^*(t - \tau) dt$$
$$TR(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega$$

两端乘以 $\frac{1}{T}$ 并取 $T \rightarrow \infty$ 可以得到：

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$
$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

即 $S(\omega) = \mathcal{F}[R(\tau)]$

$$R(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S(\omega)]$$

功率信号的功率谱函数与自相关函数是一对傅里叶变换。

例6-7： 求余弦信号 $f(t) = E \cos(\omega_1 t)$ 的自相关函数和功率谱。

解： $f(t)$ 为功率信号, 所以自相关函数为:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f(t - \tau) dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega_1 t) \cdot \cos[\omega_1(t - \tau)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E^2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega_1 t) [\cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_1 \tau) \\ &\quad + \sin(\omega_1 t) \cdot \sin(\omega_1 \tau)] dt \\ &= \frac{E^2}{2} \cos(\omega_1 \tau) \end{aligned}$$

求功率谱

因为功率信号的功率谱函数与自相关函数是一对傅里叶变换, 所以功率谱为:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= F[R(\tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{E^2\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)] \end{aligned}$$

例6-8: 白噪声的功率谱密度为 $S_N(\omega) = N$, $-\infty < \omega < \infty$, 求自相关函数。

解: 白噪声的自相关函数

$$R_N(\tau) = N\delta(\tau)$$

由于白噪声的功率谱密度为常数，所以白噪声的自相关函数为冲激函数，表明白噪声在各时刻的取值杂乱无章，没有任何相关性。

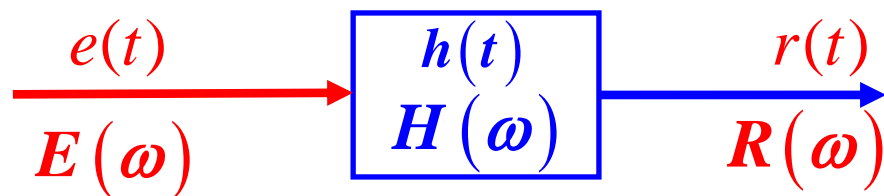
对于 $\tau \neq 0$ 的所有时刻， $R_N(\tau)$ 都取零值，仅在 $\tau = 0$ 时为强度等于 N 的冲激。

- 能量谱和功率谱分析
- 信号经线性系统的自相关函数

前面，从 $\left\{ \begin{array}{c} \text{时域} \\ \text{频域} \\ s\text{域} \end{array} \right\}$ 中研究了 $\left\{ \begin{array}{c} \text{激励} \\ \text{响应} \\ \text{系统} \end{array} \right\}$ 三者的关系

现在，从激励和响应的自相关函数，能量谱，功率谱所发生的变化来研究线性系统所表现的传输特性。

6.7.1 能量谱和功率谱分析



时域 $r(t) = h(t) * e(t)$

频域 $R(\omega) = H(\omega) \cdot E(\omega)$

假定 $e(t)$ 是能量有限信号， $e(t)$ 的能量谱密度为 $\varepsilon_e(\omega)$,

$r(t)$ 的能量谱密度为 $\varepsilon_r(\omega)$

$$\varepsilon_e(\omega) = |E(\omega)|^2$$

$$\varepsilon_r(\omega) = |R(\omega)|^2$$

显然 $|R(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |E(\omega)|^2$

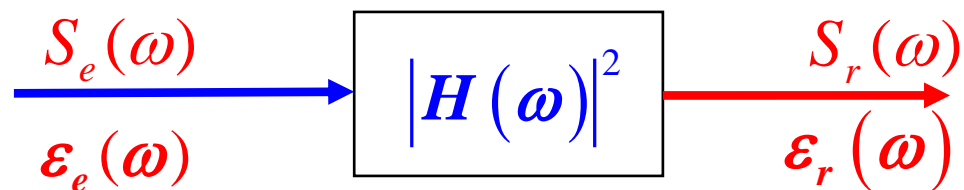
所以 $\varepsilon_r(\omega) = |H(\omega)|^2 \varepsilon_e(\omega)$

物理意义：响应的能谱等于激励的能谱与 $|H(j\omega)|^2$ 的乘积。

同样，对功率信号有

$$S_r(\omega) = |H(\omega)|^2 S_e(\omega)$$

物理意义：响应的功率谱等于激励的功率谱与 $|H(j\omega)|^2$ 的乘积。



6.7.2 信号经线性系统的自相关函数

由 $\varepsilon_r(\omega) = |H(\omega)|^2 \varepsilon_e(\omega)$

$$S_r(\omega) = |H(\omega)|^2 S_e(\omega)$$

得 $\varepsilon_r(\omega) = H(\omega) H^*(\omega) \varepsilon_e(\omega)$

$$S_r(\omega) = H(\omega) H^*(\omega) S_e(\omega)$$



因为 $\mathcal{F}[h(t)] = H(\omega)$ $\mathcal{F}[h^*(-t)] = H^*(\omega)$

所以 $R_r(\tau) = R_e(\tau) * h(t) * h^*(-t) = R_e(\tau) * R_h(\tau)$

其中 $R_h(\tau) = h(t) * h^*(-t)$ 为系统冲激响应的自相关函数。

例6-9: 功率谱密度为 N 的白噪声通过图(a)所示的低通网络, 求输出的功率谱 $S(\omega)$ 、自相关函数 $R_r(\tau)$, 以及输出的平均功率 p_r 。

解: (1) 已知激励 $e(t)$ 的功率谱为

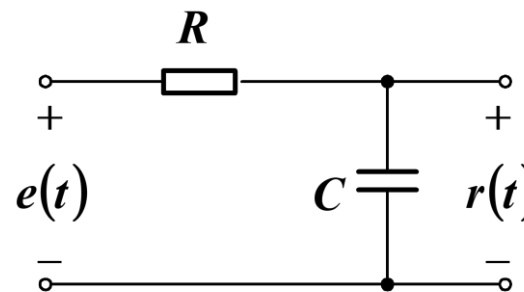
$$S_e(\omega) = N$$

因为系统函数为

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

冲激响应

$$h(t) = F^{-1}[H(\omega)] = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t)$$



(a) RC低通电路

所以，响应 $r(t)$ 的功率谱为

$$S_r(\omega) = S_e(\omega) |H(\omega)|^2 = N \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}$$

如图(b)所示

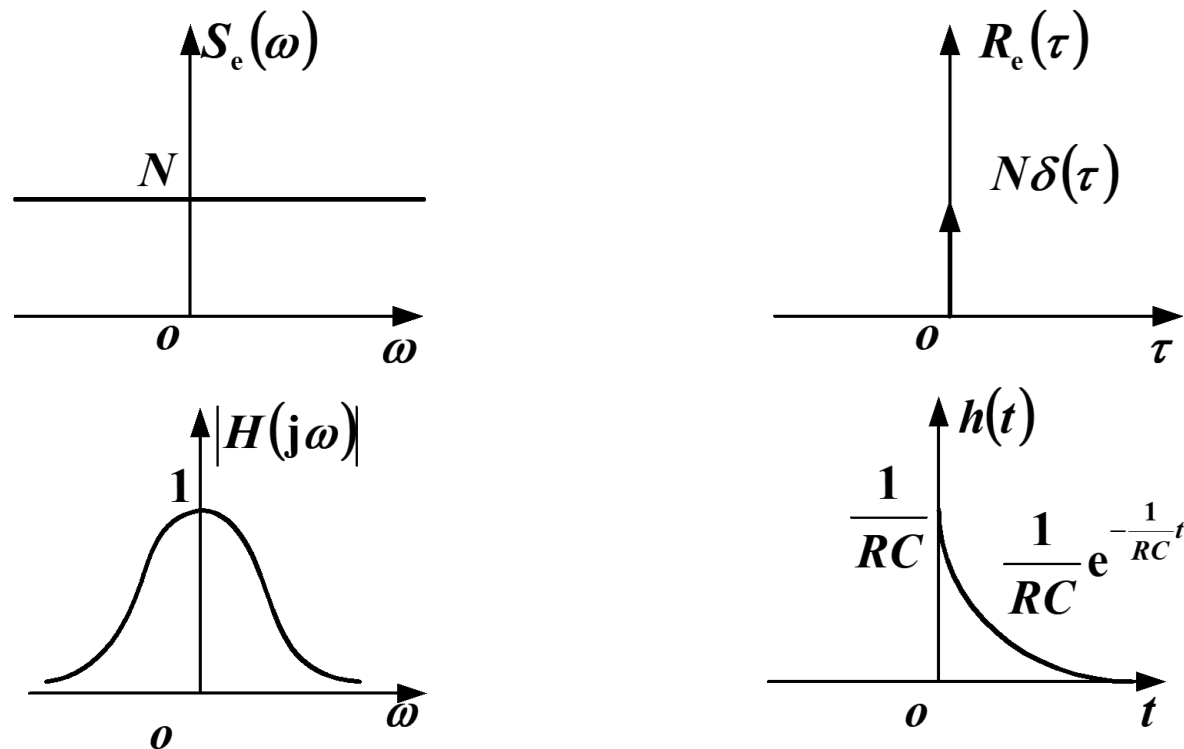


图 (b)

(2) 相关函数

因为 $R_e(\tau) = F^{-1}[S_e(\omega)] = F^{-1}[N] = N\delta(\tau)$

所以响应 $r(t)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_r(\tau) &= R_e(\tau) * h(t) * h^*(-t) \\ &= N\delta(\tau) * \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t) * \frac{1}{RC} e^{\frac{1}{RC}t} u(-t) \\ &= \frac{N}{2RC} e^{-\frac{1}{RC}|\tau|} \end{aligned}$$

求响应 $r(t)$ 的自相关函数的另一种方法：

$$\text{由 } R_r(\tau) = F^{-1}[S_r(\omega)] = F^{-1}\left[\frac{1}{1+(\omega RC)^2}\right]$$

考虑到 $F[e^{-\alpha|t|}] = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$ 同样可以求得 $R_r(\tau)$

相关函数图形如图(c)所示



图(c)

(3) 输出的平均功率为

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_r(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{N}{1 + (\omega RC)^2} d\omega \\ &= \frac{N}{\pi RC} \arctan(R\omega C) \Big|_0^{\infty} = \frac{N}{2RC} \end{aligned}$$

在数字通信中，消息依靠一些标准符号的有无来传送；因此，波形的完整复原就显得不那么重要了，波形是早已知道的，我们感兴趣的是判断脉冲 $s(t)$ 的有无。

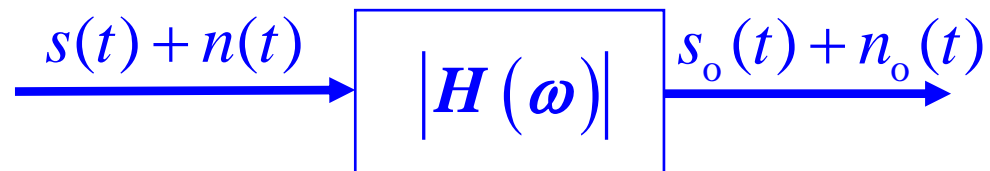
这就需要设计一种“最佳检测器”，使其具有增强信号抵抗噪声的能力，保证在判断信号出现时具有最低的错误概率。

我们把能以最低的错误概率判断脉冲信号有无功能的最佳检测滤波器称为“匹配滤波器”。

6.8.1 匹配滤波器的定义

匹配滤波器：指滤波器的性能与信号的特性取得某种一致，使滤波器输出端的信号瞬时功率与噪声平均功率的比值最大。即当信号与噪声同时进入滤波器时，它使信号成份在某一瞬间出现尖峰值，而噪声成份受到抑制。

设： $s(t)$ 为滤波器输入的有用信号；
 $n(t)$ 为滤波器输入的噪声信号；
 $s_o(t)$ 为滤波器输出的有用信号；
 $n_o(t)$ 为滤波器输出的噪声信号；
 $H(\omega)$ 为滤波器的转移函数。



6.8.2 匹配滤波器的约束关系

依据：滤波器使信号平方与噪声功率之比达到最大值。

匹配滤波器的约束关系

$$H(\omega) = kS(-\omega)e^{-j\omega t_m}$$

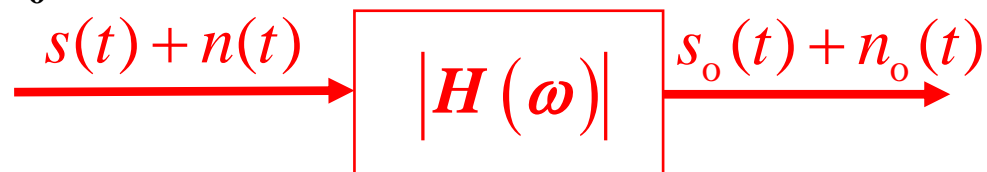
其冲激响应为 $h(t) = F^{-1}[H(\omega)] = ks(t_m - t)$

$s(t)$ 为输入
信号

匹配滤波器的约束关系

依据： 滤波器使信号平方与噪声功率之比达到最大值。

推导： $s(t)$ 、 $s_0(t)$ 分别是滤波器的输入、输出有用信号
 $n(t)$ 、 $n_0(t)$ 分别是滤波器的输入、输出噪声信号



在 $t=t_m$ 时刻信噪比 $\rho = \frac{s_o^2(t_m)}{n_o^2(t_m)}$

设 $S(\omega) = F[s(t)]$ ，则

$$s_o(t) = F^{-1}[S(\omega)H(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$s_o(t_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t_m} d\omega$$

$n(t)$ 是白噪声，其功率谱为常数 N ，则 $n_o(t)$ 的功率谱为 $|H(\omega)|^2 \times N$ ，所以

$$\overline{n_o^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N |H(\omega)|^2 d\omega$$

又因为 $\overline{n_o^2(t)} = n_o^2(t)$ ，且此值与时间 t 无关，则

$$n_o^2(t_m) = \frac{N}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

$$\text{于是 } \rho = \frac{s_o^2(t_m)}{n_o^2(t_m)} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) S(\omega) e^{j\omega t_m} d\omega \right|^2}{2\pi N \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}$$

这里因为 $s_o^2(t)$ 是实数，所以 $s_o^2(t) = |s_o(t)|^2$ 。

据柯西—施瓦茨不等式,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega) \mathbf{S}(\omega) e^{j\omega t_m} d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{H}(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{S}(\omega)|^2 d\omega$$

当且仅当下式成立时上式取等号

$$\mathbf{H}(\omega) = k \left[\mathbf{S}(\omega) e^{j\omega t_m} \right]^* = k \mathbf{S}(-\omega) e^{-j\omega t_m}$$

k 为任意常数, 此时滤波器输出端信噪比的最大可能值为

$$\rho_{\max} = \frac{s_o^2(t_m)}{n_o^2(t_m)} = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{S}(\omega)|^2 d\omega$$

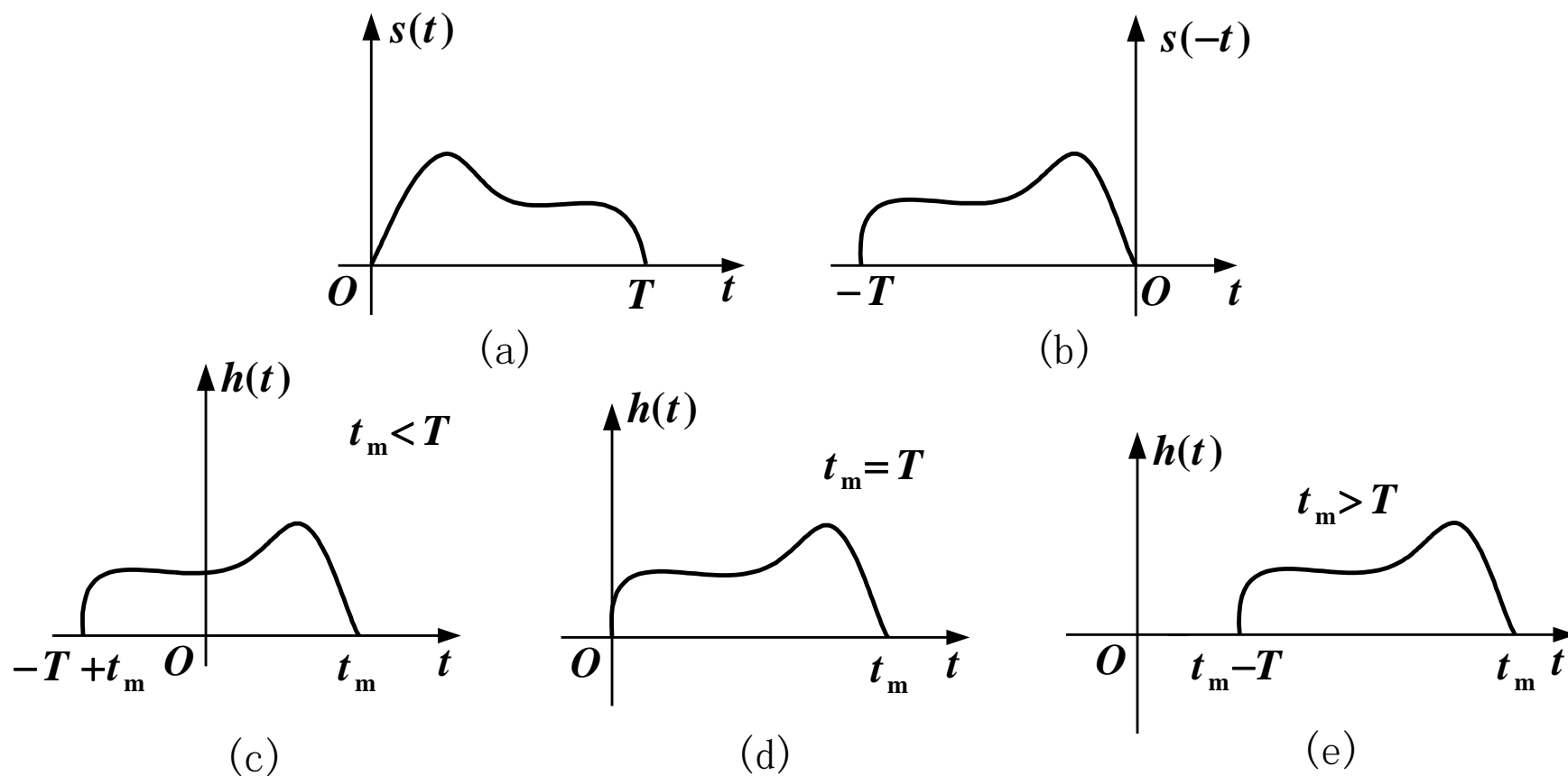
匹配滤波器的约束关系 $H(\omega) = kS(-\omega)e^{-j\omega t_m}$

其冲激响应为 $h(t) = F^{-1}[H(\omega)] = ks(t_m - t)$

说明：1) 匹配滤波器的冲激响应是所需信号 $s(t)$ 对垂直轴镜像并向右移 T 。

一般取 $t_m = T$ ，则当 $k=1$ 时 $h(t) = s(T - t)$

$s(-t)$ 及 $s(t_m - t)$ 的三种情况，如图(b)(c)(d)(e)分别示出：



2) 取 $t_m=T$, 匹配滤波器的功能相当于对 $s(t)$ 进行自相关运算:

$$s_o(t) = s(t) * h(t) = s(t) * s(T-t) = R_{ss}(t-T)$$

在 $t=T$ 时刻, 取得自相关函数 $R_{ss}(t)$ 的峰值, 而噪声通过滤波器所完成的互相关运算相对于有用信号受到明显抑制。

3) 匹配滤波器输出信号的最大值出现在 $t=T$ 时刻, 其大小等于信号 $s(t)$ 的能量 E , 与 $s(t)$ 的波形无关。

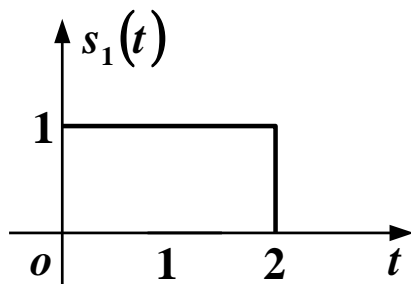
当 $t=t_m=T$ 时, 输出信号峰值为 $s_o(t_m) = s_o(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega$
由于 $s_o(t) = R_{ss}(t-T)$

$$\text{得 } s_o(T) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$$

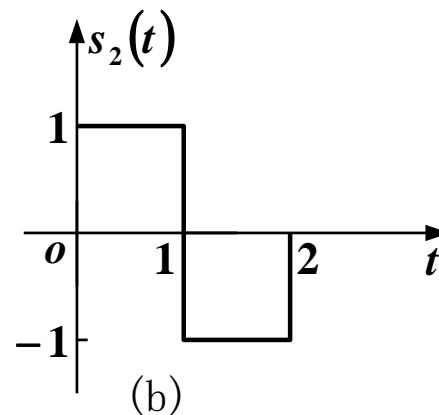
$$\text{所以 } s_o(T) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = E$$

例6-10：在测距系统中，发送信号 $s(t)$ ，以匹配滤波器接收回波信号，利用滤波器输出信号峰值出现的时间折算目标距离。如果有两种可供选择的信号 $s(t)$ ，分别如图(a)的 $s_1(t)$ 和图(b)的 $s_2(t)$ 所示。

- (1) 分别画出 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 自相关函数波形 $R_{11}(t)$ 和 $R_{22}(t)$ ；
- (2) 为改善测距精度，你认为应选用 $s_1(t)$ 或 $s_2(t)$ 两种脉冲的哪一种信号。

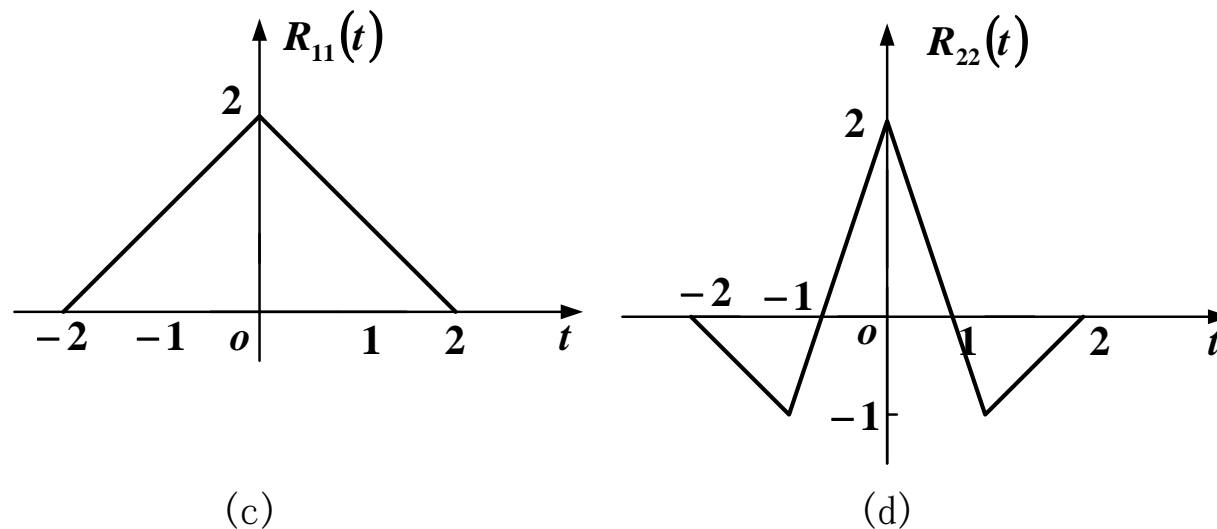


(a)



(b)

解：（1）由自相关函数的定义可求得 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 自相关函数波形 $R_{11}(t)$ 和 $R_{22}(t)$ 如图(c)、(d)。



（2）考虑到匹配滤波器输出信号是波形 $s(t)$ 自相关函数波形的延迟，为使峰值检测时间精确，宜选用相关函数形状尖锐的波形，因而选择 $s_2(t)$ 信号有利于改善测距精度。

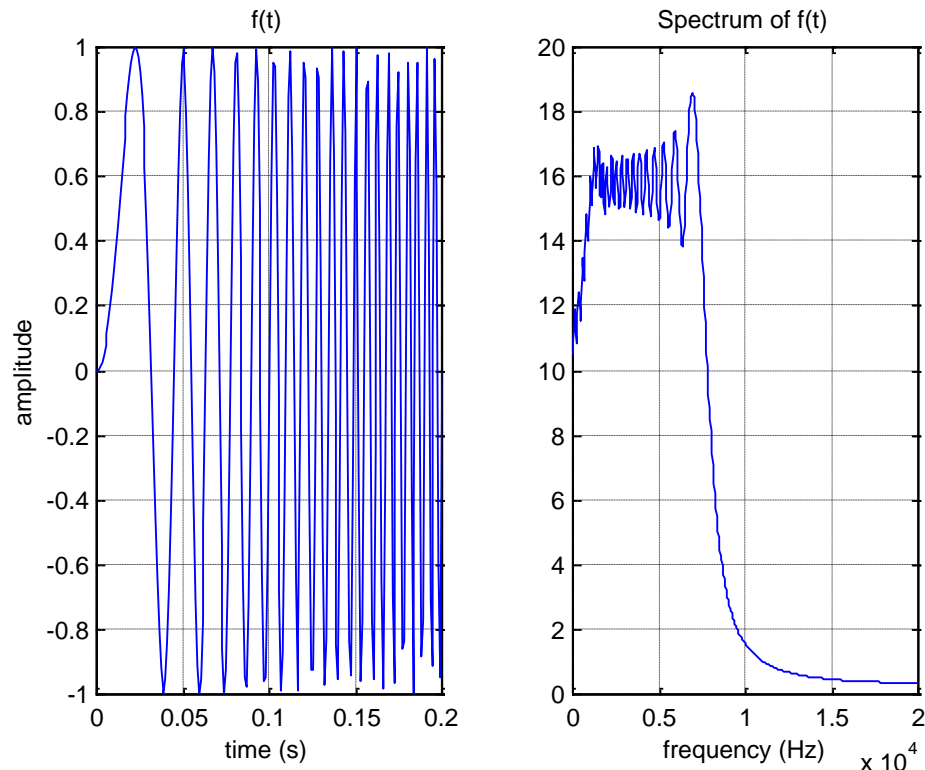
傅里叶分析的局限性

时间和**频率**是描述信号行为的两个最重要物理量。

傅里叶变换将信号分解成单个谐波频率分量，并建立了每个分量的相对强度。

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

傅里叶变换只能表示信号含有哪些频率成分，**无法告诉我们这些频率在什么时候出现**。它是一种**全局变换**，无法表达信号的时频局部性质。



线性调频信号（Chirp信号）的波形和频谱

平稳随机信号

- **狭义平稳随机过程**：随机过程的任何 n 维分布函数或概率密度函数与时间起点无关，统计特性不随时间的推移而不同。

对任意正整数 n 和任意实数 τ ， n 维概率密度函数满足：

$$\begin{aligned} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = f_n(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau) \end{aligned}$$

- **广义平稳随机过程**：信号的均值与方差均与时间无关；自相关函数只与时间间隔有关。

自相关函数的傅里叶变换是功率谱密度，为一确定函数。

非平稳随机信号：统计特性（均值、方差及自相关函数等）及频谱随时间变化。例如：光谱、音乐、语音、心脏跳动。

傅里叶变换反映不出信号频率随时间变化的行为，因此，它只适合于分析平稳信号，即时不变信号，而对频率随时间变化的非平稳信号，即时变信号，它只能给出一个总的平均效果。

时频分析法可将一个信号（一维时间函数）映射成一个时间和频率的二维函数，构成信号的时频谱，描述观察信号的时频联合特征。

常用时频分析法：**短时傅里叶变换、小波变换、希尔伯特-黄变换**等。

定义一个双参数的基函数 $\psi_{t,\alpha}(\tau)$

τ – 运行时间。 t – 延迟时间。

α 取决于所考虑的时频分析的特定类型：

在短时傅里叶变换中， α 等于频率 ω ；

在小波变换中， α 等于支配频率成分的缩放参数 a 。

基函数的性质：

1) 标准化：基函数能量为1，即 $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{t,\alpha}(\tau)|^2 d\tau = 1$ 。

2) 正交性： $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{t,\alpha}(\tau) \psi_{t',\alpha'}^*(\tau) d\tau = 0$

从一个受限的可能值集中选择参数 t ， α 和 t' ， α' ，使其满足正交条件。

- 分辨率 (resolution) 是信号处理中的基本概念, 它包括**时间分辨率**和**频率分辨率**, 其含义是指对信号能作出辨别的时域或频域的**最小间隔**。
- 时间分辨率和频率分辨率分别是通过一个时域或频域的窗函数来观察信号时所看到的时间和频率的宽度。窗函数越窄, 相应的分辨率就越好。
- 对在时域具有瞬变的信号, 我们希望时域的分辨率要好 (即时域的观察间隔尽量短), 以保证能观察到该瞬变信号发生的时刻及瞬变的形态。
- 分辨能力的好坏一是取决于信号的特点, 二是取决于信号的长度, 三是取决于所用的算法。
- 信号的**时间中心**, **时间宽度**, **频率中心**, **频率宽度**是非常重要的概念。它们分别说明了信号在时域和频域的中心位置以及在两个域内的扩展情况。是讨论各种信号处理算法的基础。

信号能量: $E = \|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega < \infty$

时域能量密度: $|x(t)|^2 / E$

频域能量密度: $|X(\omega)|^2 / E$

时间中心: $\mu(t) = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t |x(t)|^2 dt = t_0$ 时间均值

频率中心: $\mu(\omega) = \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |X(\omega)|^2 d\omega = \omega_0$ 频率均值

时间宽度 (time-duration) : Δ_t

$$\begin{aligned}\Delta_t^2 &= \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |x(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt - \frac{2t_0}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t |x(t)|^2 dt + \frac{t_0^2}{E} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt - t_0^2\end{aligned}$$

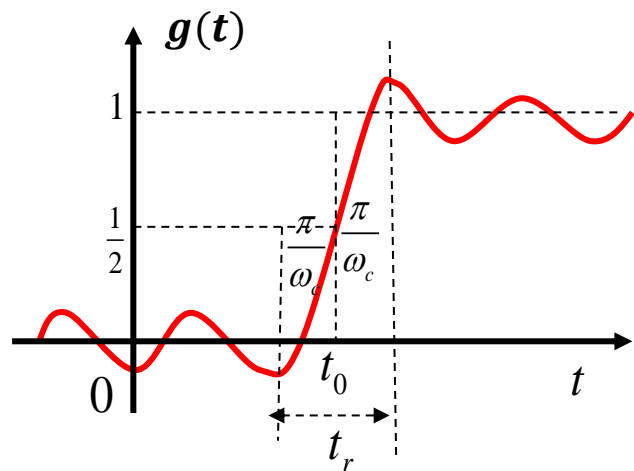
t 较大时 $x(t)$ 值也较大的信号持续时间较长。

频率宽度 (frequency-bandwidth) : Δ_ω

$$\begin{aligned}\Delta_\omega^2 &= \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |X(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 d\omega - \omega_0^2\end{aligned}$$

时宽一带宽积: $\Delta_t \Delta_\omega$

由5.5节可知，理想低通滤波器阶跃响应的上升时间 t_r 与系统带宽 B 之间存在一种约束关系，即： $t_r B = \text{常数}$ 。



$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si[\omega_c(t - t_0)]$$

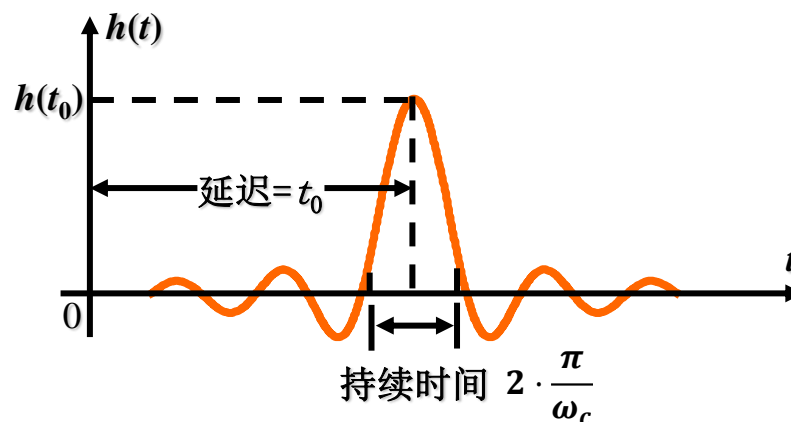
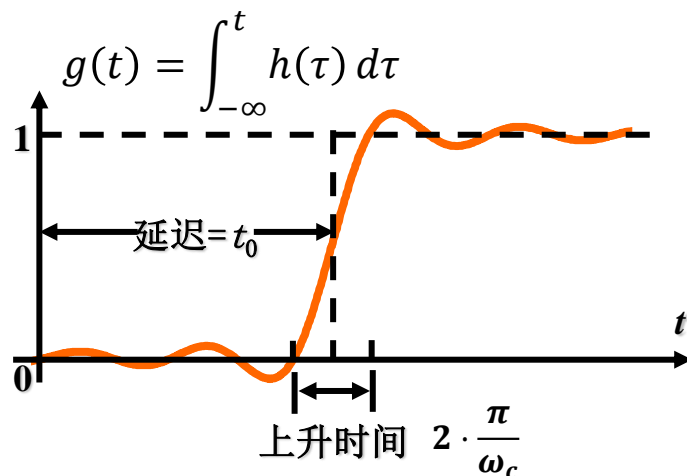
上升时间 t_r ：输出由最小值到最大值所需要的时间。

$$t_r = 2 \cdot \frac{\pi}{\omega_c}$$

其中 ω_c 为系统的截止频率（带宽）。

$$t_r \omega_c = 2\pi$$

滤波器阶跃响应 $g(t)$ 的上升时间对应冲激响应 $h(t)$ 的脉冲宽度。冲激响应的时宽与频宽乘积也为常数 $t_r \omega_c = 2\pi$ 。



系统的时间分辨率和频率分辨率不可能同时达到最好，即时宽与带宽不可能同时趋于无限小。

测不准(不定度)原理

给定信号 $x(t)$ ，若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} x(t) = 0$ ，则其时宽频宽积 $\Delta_t \Delta_\omega \geq \frac{1}{2}$ 。

当且仅当 $x(t)$ 为高斯信号时，即 $x(t) = Ae^{-\alpha t^2}$ ，等号成立。

证明：利用Schwarz不等式，详见教材6.10节。

在测不准(不定度)原理制约下，人们在竭力探索既能得到好的时间分辨率（或窄的时宽）又能得到好的频率分辨率（或窄的带宽）的信号分析方法，也可根据信号的特点及信号处理任务的需要选取不同的时间分辨率和频率分辨率。

在物理中，微观粒子的位置与动量、时间与能量等各组成对量之间也存在不定度关系。成对量之间一个量测量越精准，另一个测量误差就越大。