

上节内容

3.8 卷积定理

3.9 周期信号的傅里叶变换

3.10 抽样信号的傅里叶变换

3.11 抽样定理

(1) 时域卷积定理：两信号的时域卷积等效于在频域中频谱相乘。

$$\text{若 } F_1(\omega) = \mathbf{F}[f_1(t)], \quad F_2(\omega) = \mathbf{F}[f_2(t)],$$

$$\text{则 } \mathbf{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

(2) 频域卷积定理：两信号的频域卷积等效于在时域中函数相乘（再除以 2π ）。

$$\text{若 } F_1(\omega) = \mathbf{F}[f_1(t)], \quad F_2(\omega) = \mathbf{F}[f_2(t)],$$

$$\text{则 } \mathbf{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

$$\text{其中: } F_1(\omega) * F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(\omega - u) du$$



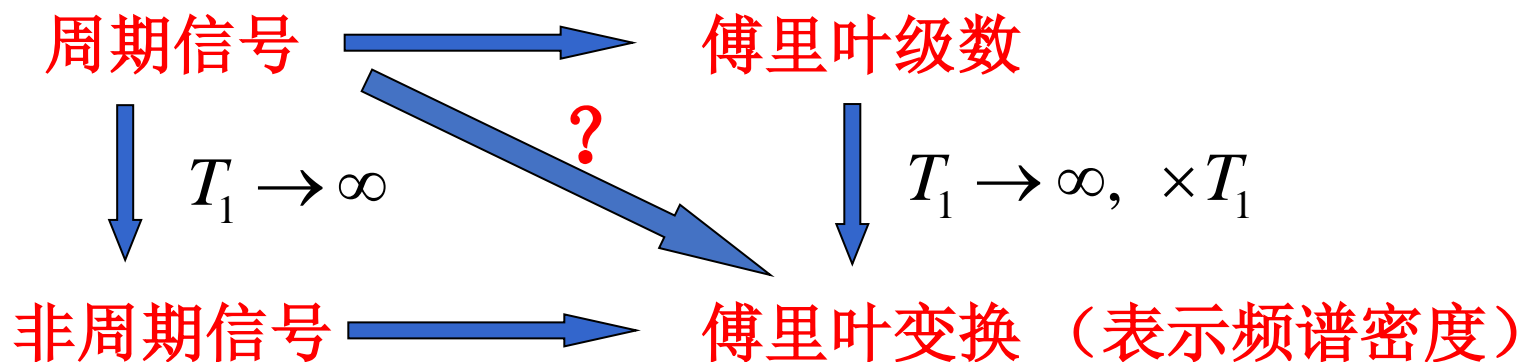
如一时间信号作用于系统，其输出仍是此时间信号，只是幅度与相位被改变，称此时间信号为系统的特征信号，表征被改变的幅度和相位的函数，称为系统的特征值或系统函数。

所以信号 $e^{j\omega_0 t}$ ， $\cos(\omega_0 t)$ 和 $\sin(\omega_0 t)$ 是系统的特征信号，函数 $H(\omega)$

（系统单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换）是系统的特征值或系统函数，也称为系统的频率响应。

$$\cos(\omega_0 t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = \cos(\omega_0 t) * h(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} h(t) * (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \\ &= \frac{1}{2} |H(\omega_0)| \left(e^{j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} + e^{-j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]} \right) = |H(\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)] \end{aligned}$$



3.9.1 正弦、余弦信号的傅里叶变换

$$\mathbf{F}[\cos \omega_0 t] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\mathbf{F}[\sin \omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

$$\mathbf{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

3.9.2 一般周期信号的傅里叶变换

思路1:

$$f_{T_1}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} \leftrightarrow F_{T_1}(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

傅里叶级数和单脉冲信号傅里叶变换的关系

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1}$$

思路2:

$$f_{T_1}(t) = \underbrace{\delta_{T_1}(t)}_{\text{单位冲激序列与单脉冲信号的卷积}} * f_0(t) \leftrightarrow F_{T_1}(\omega) = \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{F_0(n\omega_1)}_{\text{时域卷积, 频域相乘}} \delta(\omega - n\omega_1)$$

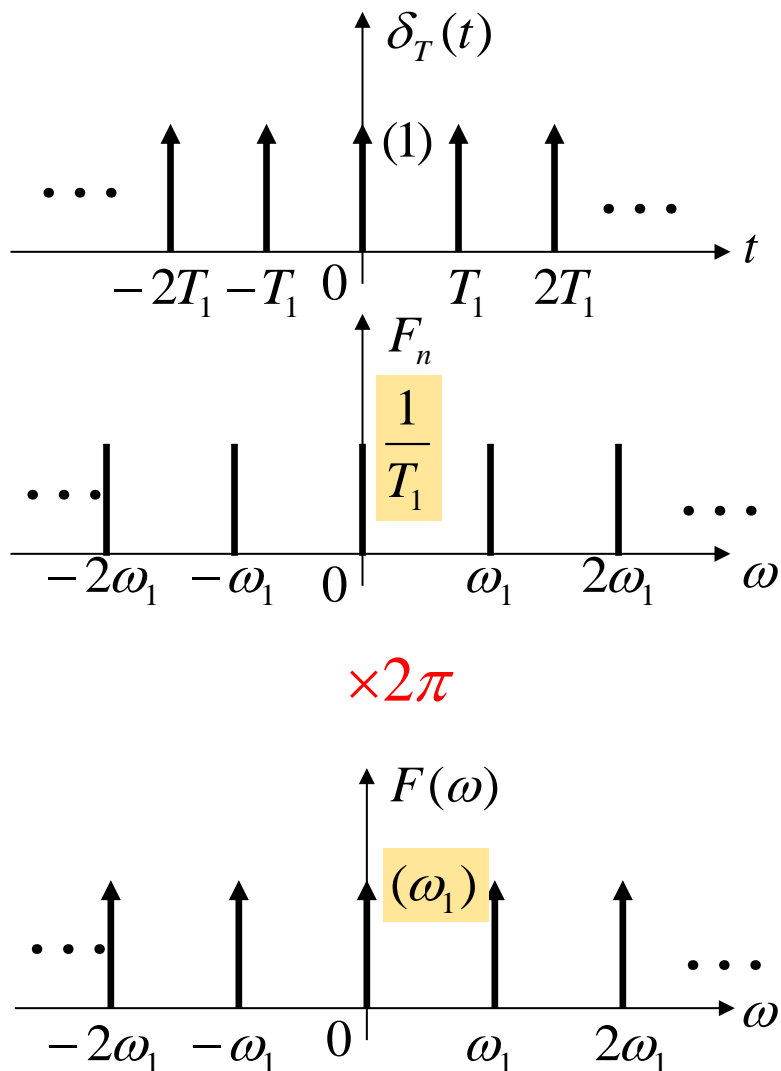
单位冲激序列与单脉冲信号的卷积

时域卷积, 频域相乘

结论:

周期信号 $f_{T_1}(t)$ 的傅里叶变换是由一系列冲激函数所组成, 这些冲激位于信号的谐频处 $(0, \pm\omega_1, \pm2\omega_1, \dots)$, 每个冲激的强度等于 $f_{T_1}(t)$ 的傅里叶级数相应系数 F_n 的 2π 倍。

求周期单位冲激序列的傅里叶变换。



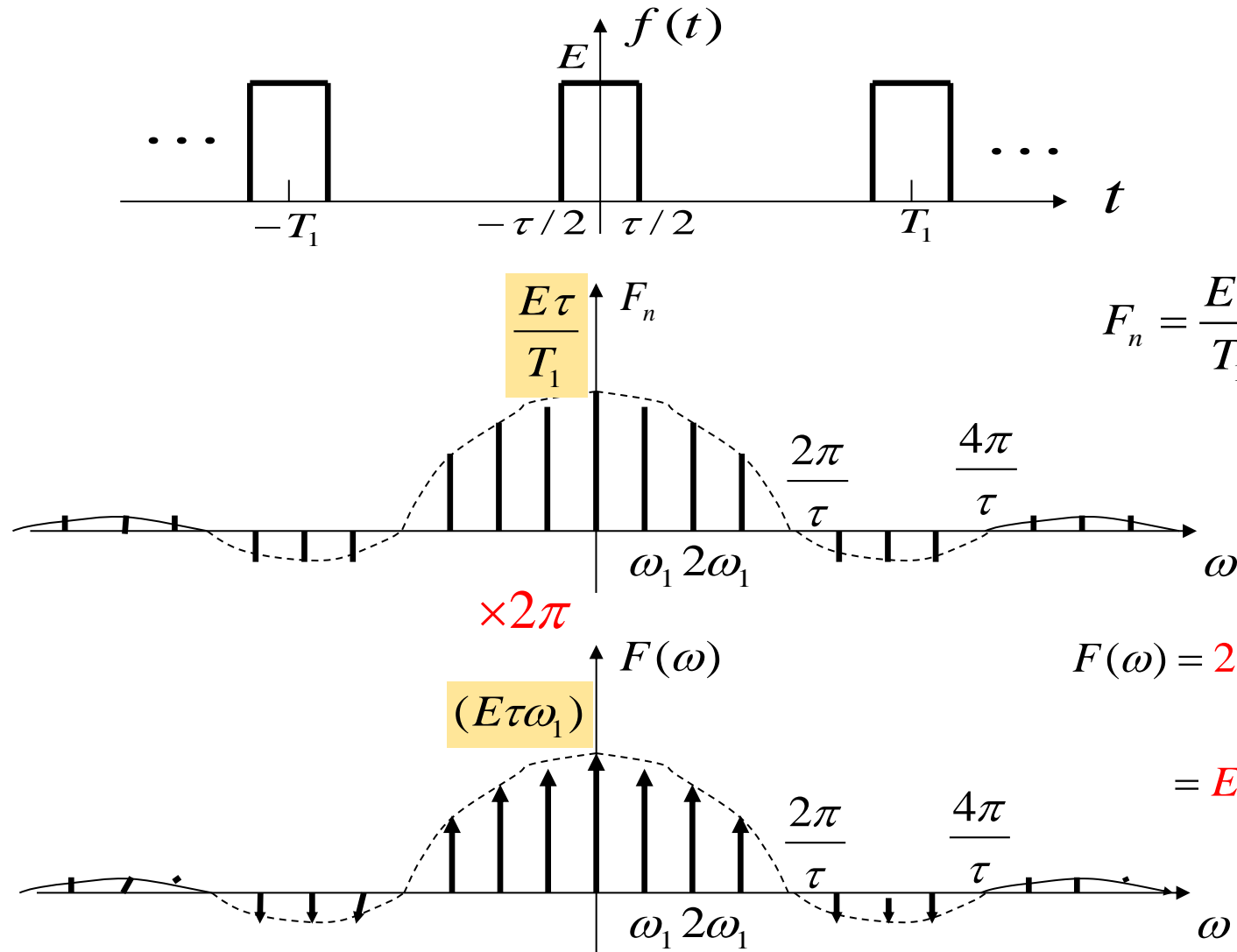
$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$$

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \delta(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T_1}$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_1 t}$$

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1) = \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

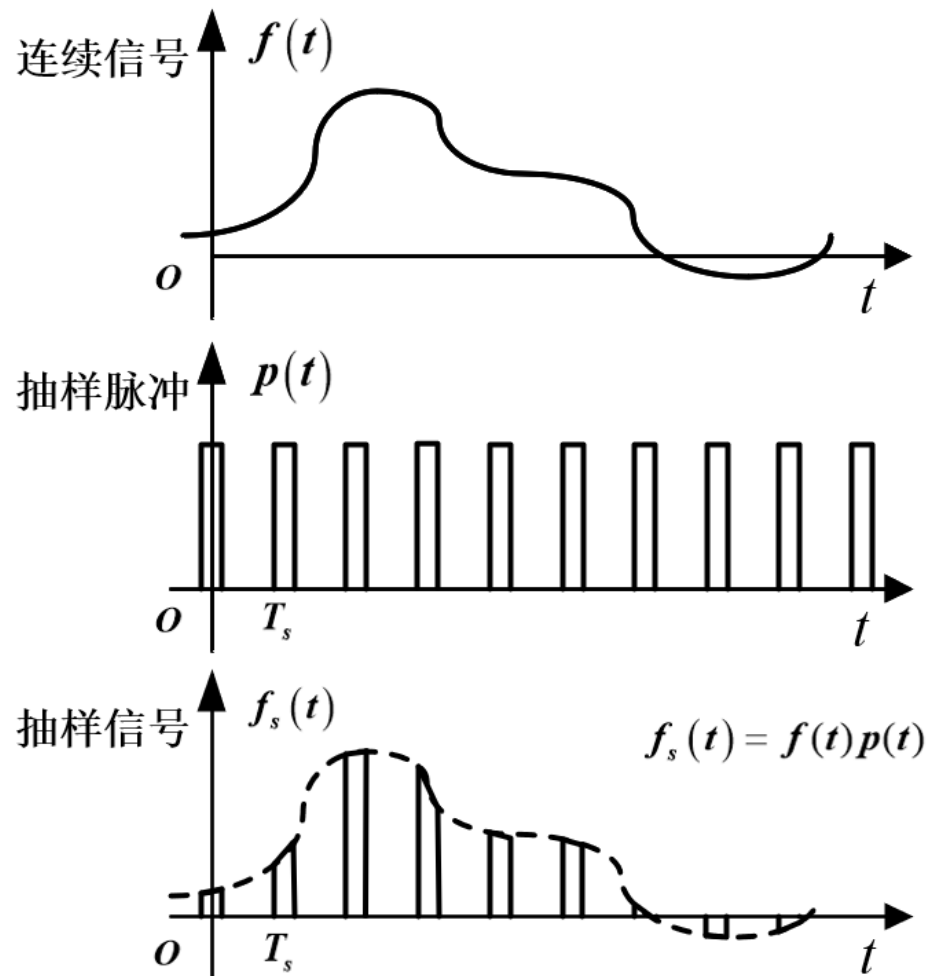
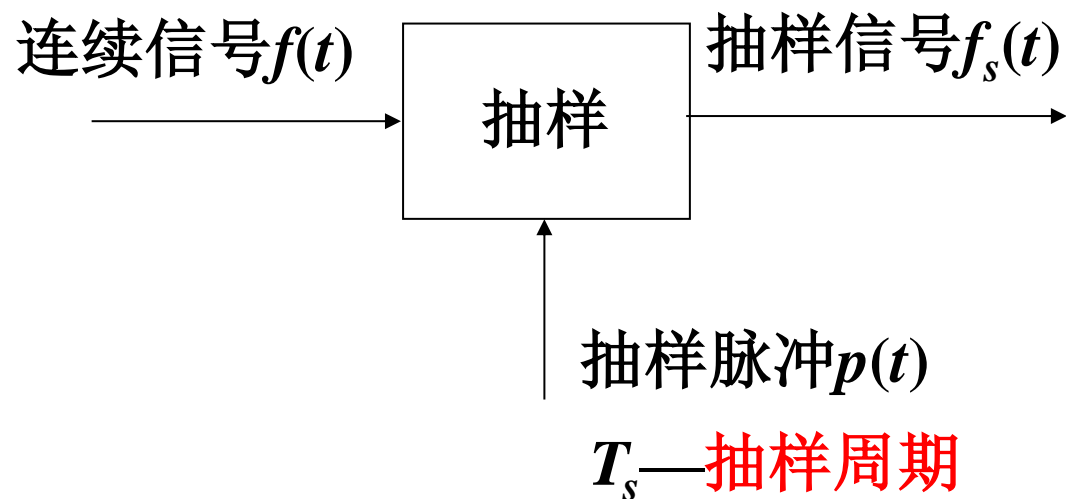
求周期矩形脉冲信号的傅里叶级数及傅里叶变换。已知周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的幅度为 E ，脉宽为 τ ，周期为 T_1 ，角频率为 $\omega_1 = 2\pi/T_1$ 。



3.10.1 信号的抽样

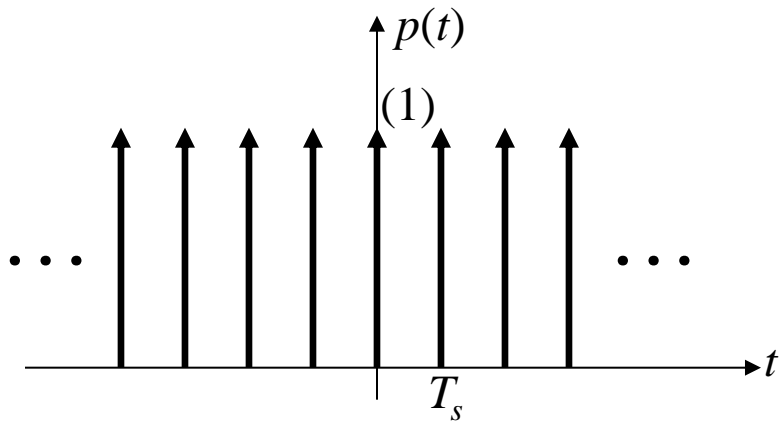
抽样--利用抽样脉冲序列从连续信号中“抽样”一系列的离散样值。

这种离散信号通常称为“**抽样信号**”。



3.10.2 抽样信号的傅里叶变换

若抽样脉冲 $p(t)$ 是冲激序列，此时称为“冲激抽样”或“理想抽样”。

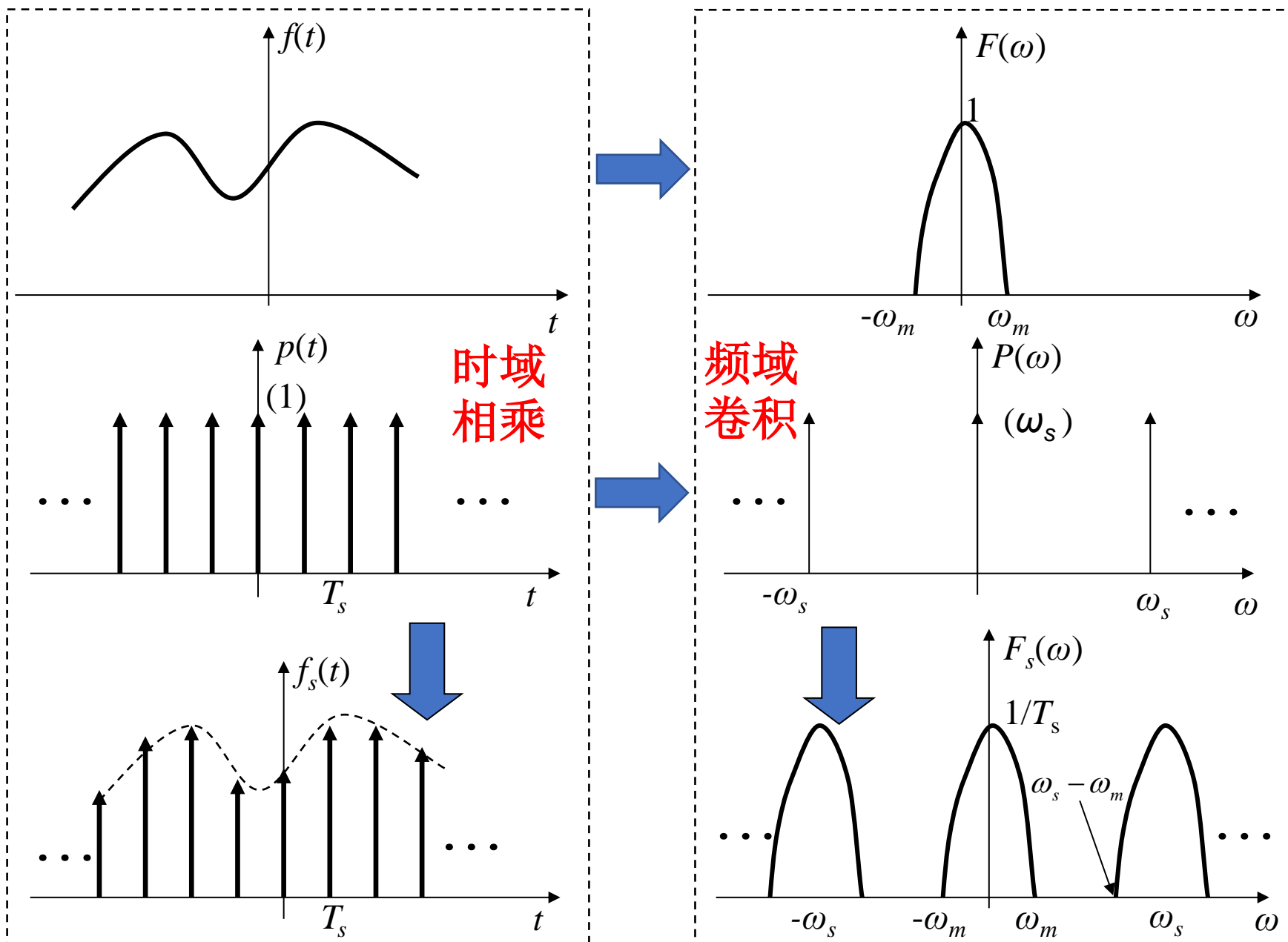


$$p(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \cdot F(\omega - n\omega_s) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \end{aligned}$$

在频域以 ω_s
为周期延拓

$$\text{其中: } P_n = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s}$$



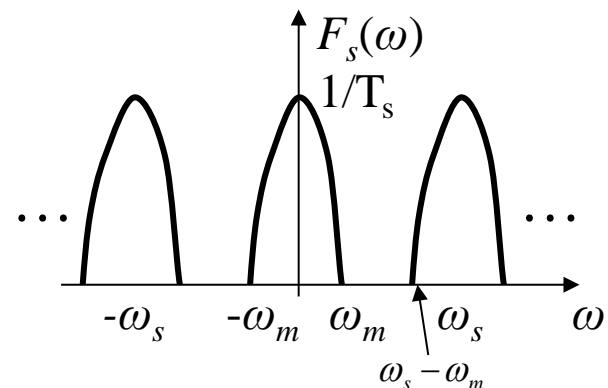
时域抽样定理： 一个频谱受限的信号 $f(t)$ ，如果频谱只占据 $-\omega_m \sim \omega_m$ 的范围，在抽样间隔不大于 $\frac{1}{2f_m}$ （其中 $\omega_m = 2\pi f_m$ ）或者抽样频率大于等于 $2f_m$ 时，信号 $f(t)$ 可以用等间隔的抽样值唯一的表示。

奈奎斯特抽样频率： 最低允许的抽样频率。

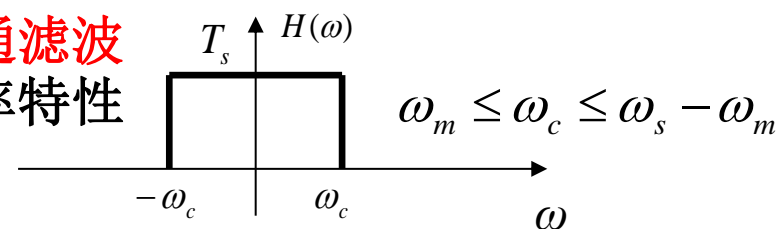
$$f_{s \min} = 2f_m$$

奈奎斯特抽样间隔： 最大允许的抽样间隔。

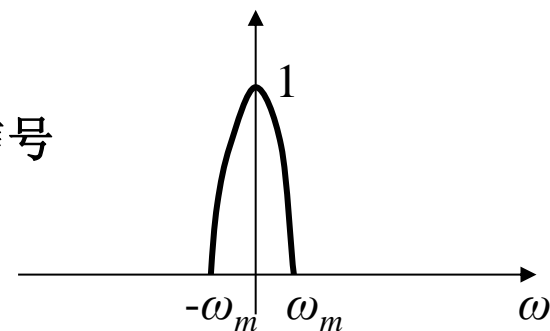
$$T_{s \max} = \frac{1}{f_{s \min}} = \frac{1}{2f_m}$$



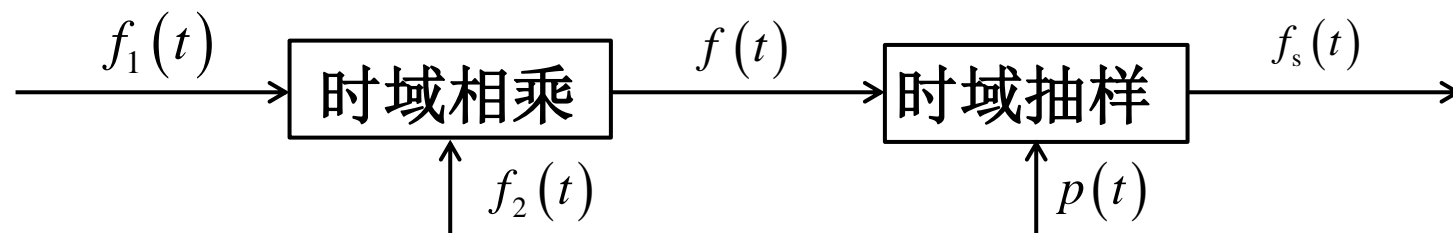
理想低通滤波器
的频率特性



恢复原信号



如图所示, $f_1(t) = Sa(1000\pi t)$, $f_2(t) = Sa(2000\pi t)$, $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ 。



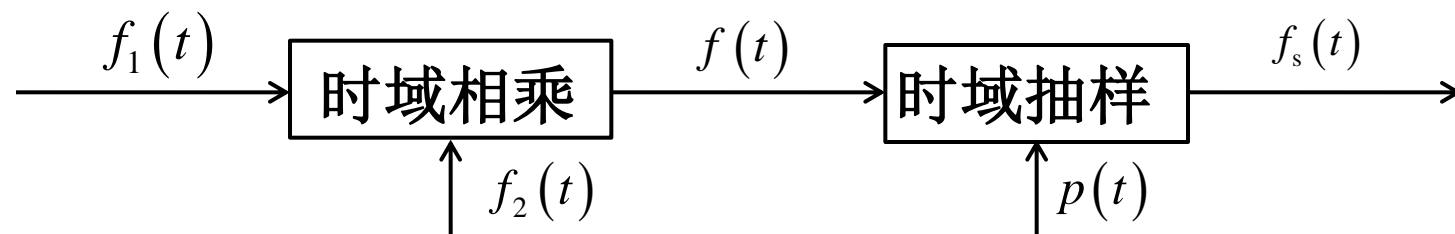
为从 $f_s(t)$ 无失真恢复 $f(t)$, 最大抽样间隔 T_{\max} 为 ()。

- ☐ A 1000 s
- ☐ B 3000π s
- ☐ C $\pi/3000$ s
- ☒ D $1/3000$ s

提交

例3-17：如图所示， $f_1(t) = Sa(1000\pi t)$, $f_2(t) = Sa(2000\pi t)$,

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \circ f(t) = f_1(t) f_2(t), f_s(t) = f(t) p(t)。$$



- (1) 为从 $f_s(t)$ 无失真恢复 $f(t)$ ，求最大抽样间隔 T_{\max} 。
- (2) 当 $T = T_{\max}$ 时，画出 $f_s(t)$ 的幅度谱 $|F_s(\omega)|$ 。

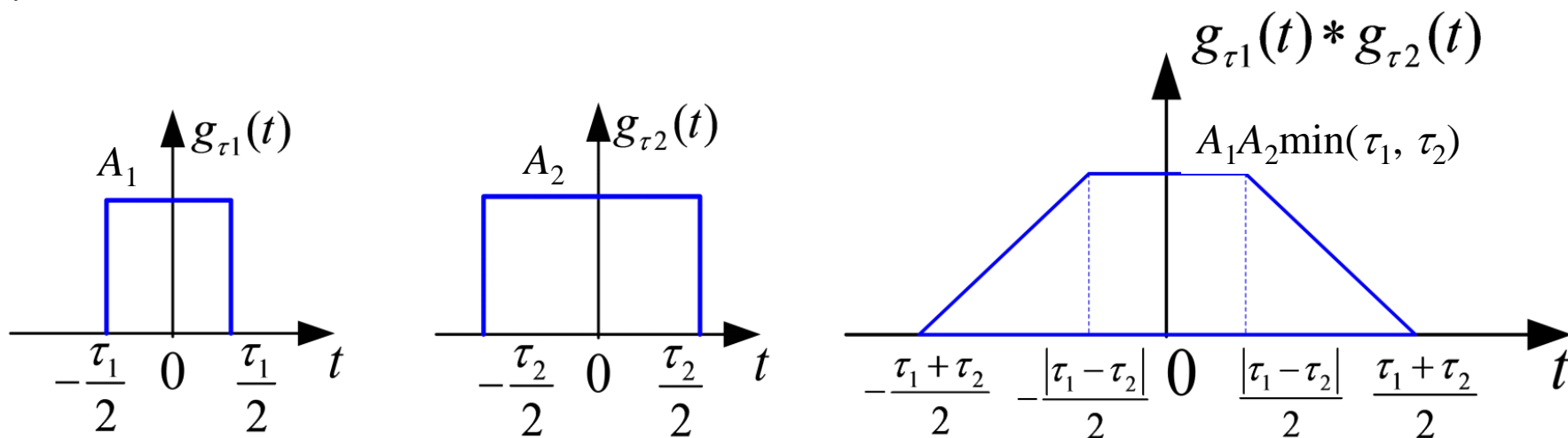
解： (1) 由于

$$f_1(t) = Sa(1000\pi t) \leftrightarrow 10^{-3} [u(\omega + 1000\pi) - u(\omega - 1000\pi)] = F_1(\omega)$$

$$f_2(t) = Sa(2000\pi t) \leftrightarrow \frac{1}{2} 10^{-3} [u(\omega + 2000\pi) - u(\omega - 2000\pi)] = F_2(\omega)$$

回顾：矩形脉冲卷积产生梯形脉冲

两个矩形脉冲 $g_{\tau_1}(t)$ 和 $g_{\tau_2}(t)$ ，脉冲宽度分别为 τ_1 和 τ_2 ，幅度分别为 A_1 和 A_2 ，求卷积 $g_{\tau_1}(t)*g_{\tau_2}(t)$ 。

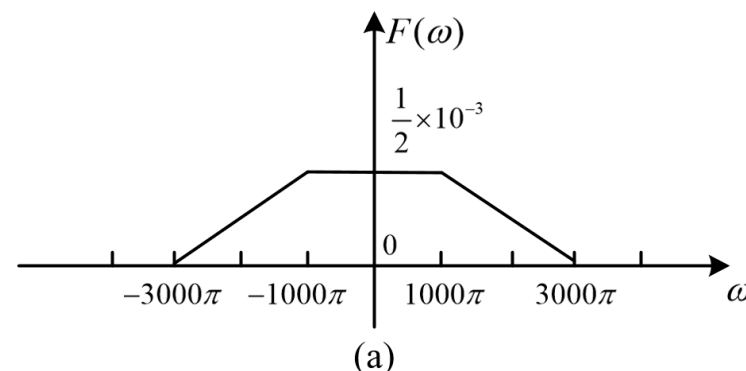


- 两个不等宽的矩形脉冲卷积的结果为梯形函数，梯形函数的高度为两个矩形高度和较窄矩形宽度三者的乘积，其上底为两个矩形宽度之差的绝对值，下底为两个矩形宽度之和。

$$\begin{aligned}
\text{则 } F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_1(\omega) \\
F(\omega) &= \frac{10^{-6}}{4\pi} [u(\omega + 1000\pi) - u(\omega - 1000\pi)] * [u(\omega + 2000\pi) - u(\omega - 2000\pi)] \\
&= \frac{10^{-6}}{4\pi} \{u(\omega) * [\delta(\omega + 1000\pi) - \delta(\omega - 1000\pi)] * u(\omega) * [\delta(\omega + 2000\pi) - \delta(\omega - 2000\pi)]\} \\
&= \frac{10^{-6}}{4\pi} [u(\omega) * u(\omega)] * [\delta(\omega + 1000\pi) - \delta(\omega - 1000\pi)] * [\delta(\omega + 2000\pi) - \delta(\omega - 2000\pi)] \\
&= \frac{10^{-6}}{4\pi} \{\omega u(\omega) * [\delta(\omega + 3000\pi) - \delta(\omega - 1000\pi) - \delta(\omega + 1000\pi) + \delta(\omega - 3000\pi)]\} \\
&= \frac{10^{-6}}{4\pi} [(\omega + 3000\pi)u(\omega + 3000\pi) - (\omega - 1000\pi)u(\omega - 1000\pi) - (\omega + 1000\pi)u(\omega + 1000\pi) + (\omega - 3000\pi)u(\omega - 3000\pi)] \\
&= \frac{10^{-6}}{4\pi} \{(\omega + 3000\pi)[u(\omega + 3000\pi) - u(\omega + 1000\pi)] + 2000\pi[u(\omega + 1000\pi) - u(\omega - 1000\pi)] \\
&\quad + (-\omega + 3000\pi)[u(\omega - 1000\pi) - u(\omega - 3000\pi)]\}
\end{aligned}$$

从图可见 $\omega_m = 3000\pi$

$$T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{1}{3000} \text{ s}$$

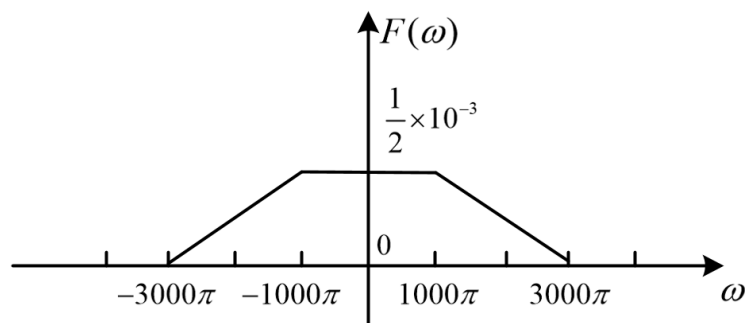


(2) 对于冲激抽样，抽样信号的频谱

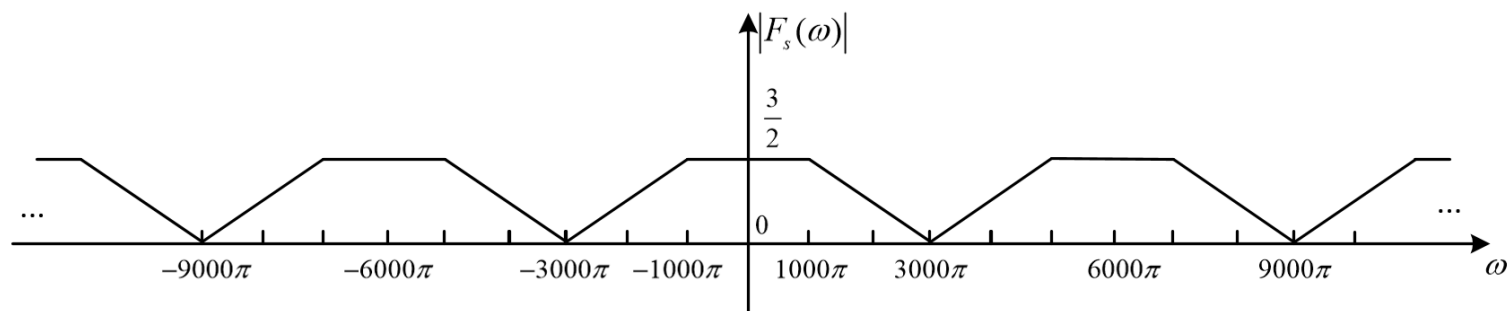
$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$

当 $T_s = T_{\max}$ 时

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_{\max}} = 2\omega_m = 6000\pi$$



(a)



(b)

本次课内容

- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

本次课目标

1. 理解拉普拉斯变换的定义及其与傅里叶变换的关系；
2. 熟悉拉普拉斯变换的基本性质。

4.1 引言

4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

4.4 拉普拉斯逆变换

4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型

4.6 系统函数（网络函数）

4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性

4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性

4.9 二阶谐振系统的S平面分析

4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布

4.11 线性系统的稳定性

4.12 双边拉普拉斯变换

4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

- 拉普拉斯变换的发展史：
 - 19世纪末，英国工程师赫维赛德（O. Heaviside, 1850-1925）发明算子法解决电工程计算中的一些基本问题，但数学上不够严谨。
 - 后人在法国数学家拉普拉斯（P. S. Laplace, 1749-1825）著作中找到可靠数学依据，重新给予严密的数学定义，为之取名为拉普拉斯变换（LT），简称拉氏变换。
- 拉普拉斯变换在以下领域是强有力的工具：
 - 在电路理论研究中；
 - 在连续线性时不变系统的分析中；
 - 在求解线性时不变系统的常系数微分方程时。

4.1 引言

4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

4.4 拉普拉斯逆变换

4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型

4.6 系统函数（网络函数）

4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性

4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性

4.9 二阶谐振系统的S平面分析

4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布

4.11 线性系统的稳定性

4.12 双边拉普拉斯变换

4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

4.2.1 从傅氏变换到拉氏变换

傅里叶变换 (FT)

- 优点：物理概念清楚

- 缺点：

(1) 只能处理符合狄里赫利条件的信号（傅里叶变换的充分不必要条件）：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

而有些信号不满足绝对可积条件，因而其信号的分析受限。

(2) 在求时域响应时运用傅里叶逆变换对频率进行的无穷积分求解困难。

$$f(t) = F^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

从傅里叶变换到拉普拉斯变换

乘一衰减因子

有一些信号不满足狄里赫利条件，FT不存在：

- $u(t)$

- 增长信号 $e^{\alpha t}$ ($\alpha > 0$)

- 周期信号 $\cos \omega_1 t$



• 若乘一衰减因子 $e^{-\sigma t}$ ， σ 为任意实数，则 $f(t)e^{-\sigma t}$ 收敛，满足狄里赫利条件。

- $u(t)e^{-\sigma t}$

- $e^{\alpha t}e^{-\sigma t}$ ($\sigma > \alpha$)

- $e^{-\sigma t} \cos \omega_1 t$

4.2.2 拉普拉斯变换 (LT)

信号 $f(t)$, 乘以衰减因子 $e^{-\sigma t}$ (σ 为任意实数) 后容易满足绝对可积条件, 依傅里叶变换定义:

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= F[f(t) \cdot e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t) e^{-\sigma t}] \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = F(\sigma + j\omega) \end{aligned}$$

令 $\sigma + j\omega = s$, 具有频率的量纲, 称为复频率。

则

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$$

4.2.3 拉氏逆变换 (LT^{-1})

$$F(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

$f(t) e^{-\sigma t}$ 是 $F(\sigma + j\omega)$ 的傅里叶逆变换

$$f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

两边同乘以 $e^{\sigma t}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

其中: $s = \sigma + j\omega$; 若 σ 取常数, 则 $ds = j d\omega$

积分限: 对 $\omega: \int_{-\infty}^{\infty} \Rightarrow$ 对 $s: \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty}$

所以

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

一般不用定义式求逆变换

4.2.4 拉氏变换对

$$\begin{cases} F(s) = L[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt & \text{正变换} \\ f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds & \text{逆变换} \end{cases}$$

双边拉氏变换

记作: $f(t) \leftrightarrow F(s)$, $f(t)$ 称为原函数, $F(s)$ 称为象函数。

考虑到实际信号都是因果信号:

所以 $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

单边拉氏变换

在算子法中由于未能表示出初始条件的作用，只好在运算过程中做出一些规定，

限制某些因子相消，如： $\frac{1}{p} px = \int_{-\infty}^t (\frac{d}{dt} x) \cdot d\tau = x(t) - x(-\infty) \neq x$

拉氏变换已考虑了初始条件，

$$F(s) = L[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

自动包含0₋条件

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0_-)$$

初值，若无跳变则为0

证明：

$$\int_{0_-}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = f(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) (e^{-st})' dt \quad \text{分部积分法}$$

$$\begin{aligned} &= f(\infty) e^{-s\infty} - f(0_-) + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= sF(s) - f(0_-) \end{aligned}$$

已知信号 $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ ，其拉普拉斯变换为（ ）

A $-\frac{1}{s + \alpha}$

B $\frac{\alpha}{s}$

C $e^{-\alpha s}$

D $\frac{1}{s + \alpha}$

提交

例4-1: $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$, 求其拉普拉斯变换 $X(s)$ 。

解: 由定义

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} u(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+\sigma)t} e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

当 $\text{Re}\{\alpha+s\}=\alpha+\sigma>0$, 即 $\sigma>-\alpha$, 以上积分可积

$$X(s) = \frac{1}{-(\alpha+s)} e^{-(\alpha+s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{(\alpha+s)}, \quad \sigma > -\alpha$$

所以

$$e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+\alpha}, \quad \text{Re}\{s\} > -\alpha$$

拉普拉斯变换法(LT)

- **优点:**
 1. 将微积分方程求解问题转化为代数方程求解。
 2. 进行变换时, 初始条件被自动计入, 无需计算从 0_- 到 0_+ 状态的跳变。
- **缺点:**

物理概念不如傅氏变换那样清楚。

拉普拉斯变换可以看成是傅里叶变换的推广。它们之间在表达式和基本性质上有许多类似。

本章的学习方法: **注意与傅里叶变换的对比**, 便于理解与记忆。

FT:

$$\begin{cases} F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt & \text{正变换} \\ f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega & \text{逆变换} \end{cases}$$

LT:

$$\begin{cases} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt & \text{正变换} \\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds & \text{逆变换} \end{cases}$$

FT: 实频率 ω 是振荡频率

LT: 复频率 $s = \sigma + j\omega$ ω 是振荡频率, σ 控制衰减的速度

傅里叶变换 vs. 拉普拉斯变换

傅里叶变换	拉普拉斯变换
自变量 ω 是 实数 ，有明确的物理意义—— 频率 。	自变量 $s=\sigma+j\omega$ 是 复数 ，其物理意义不明确，通常称其为 复频率 。
信号的傅里叶变换反映了不同频率分量的振幅大小与起始相位的值，即信号的 频谱 。	信号的拉氏变换 没有明确的物理意义 。
系统单位冲激响应的傅里叶变换，称作系统的 频率响应 ，它表示不同频率的正余弦信号作用于系统时，系统输出的幅度与相位随输入频率改变而改变的特性。	系统单位冲激响应的拉氏变换，称为系统的 系统函数 。它虽然较抽象，但是在表征系统特性及系统分析时起重要的作用。
主要应用于信号与系统的 频率分析 ，如调制、滤波、抽样等的频谱分析。	主要应用于 微分方程的求解、系统函数及其零极点分析 等。

4.2.5 拉普拉斯变换的收敛域

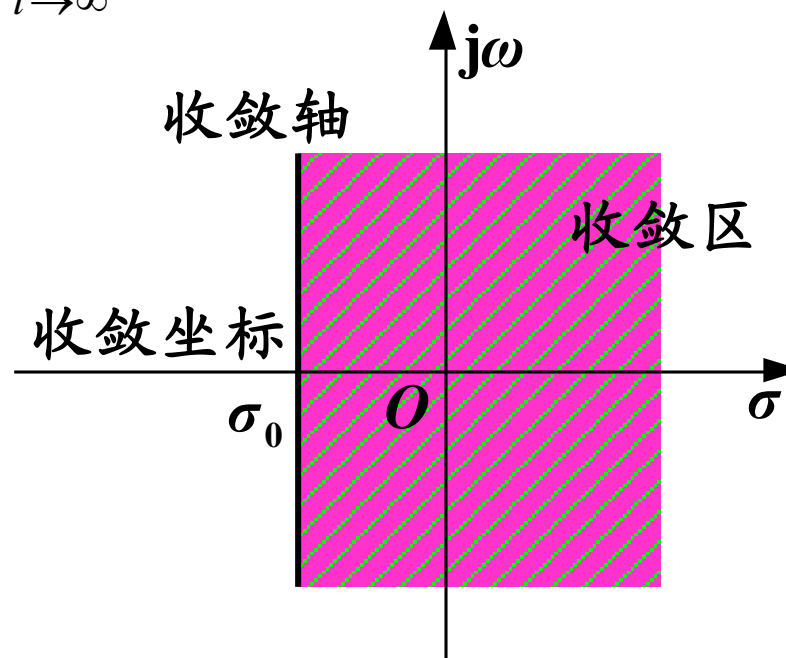
拉普拉斯变换的存在伴随着条件，就是它的收敛域。

使信号 $f(t)e^{-\sigma t}$ 满足绝对可积的 σ 的值域，是 $F(s)$ 的收敛域，记为**ROC** (region of convergence)。

数学描述：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > \sigma_0)$$

图形表示：



说明:

1. 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$ ($\sigma > \sigma_0$) 的信号称为指数阶信号;

2. 有界的非周期信号的拉氏变换一定存在, 收敛域是整个s平面。

$$3. \lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > 0)$$

$$4. \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > \alpha)$$

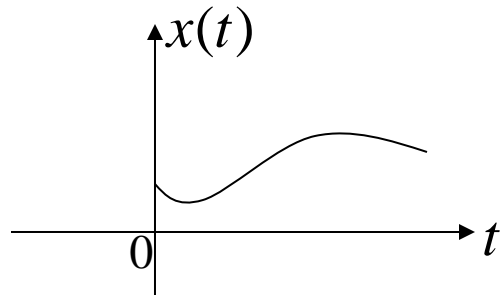
5. e^{t^2} 等信号比指数函数增长快, 找不到收敛坐标, 为非指数阶信号, 无法进行拉氏变换。

6. 一般求函数的单边拉氏变换可以不加注其收敛范围。

4.2.6 单边拉氏变换

在系统分析时，我们常用的是**单边拉氏变换**：

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$



因为实际系统是**因果**的，信号总是在某个时刻才开始作用于系统，我们可以把这个时刻看作 $t=0$ ；

以上定义式中的**积分的下限取 0_-** ，考虑变换对冲激信号也是有效的；单边拉氏变换的**收敛域是收敛轴的右半平面**： $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$ ，以后一般不具体标示变换的收敛域。

本章及以后各章，若没有特别说明，均使用**单边拉氏变换**。

4.2.7 常用函数的拉氏变换

(1) 阶跃函数

$$L[u(t)] = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

(2) 指数函数

$$L[e^{-\alpha t} u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha+s} \quad (\sigma > -\alpha)$$

(3) 单位冲激信号

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt = 1 \quad \text{全}s\text{域平面收敛}$$

$$L[\delta(t-t_0)] = \int_0^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-st} dt = e^{-st_0}$$

(4) t^n

$$L[t^n] = \int_0^{\infty} t^n \cdot e^{-st} dt = \left. \frac{t^n}{-s} e^{-st} \right|_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt$$

$$\text{所以 } L[t^n] = \frac{n}{s} L[t^{n-1}]$$

$$n=1 \quad L[t] = \frac{1}{s} L[t^0 u(t)] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$n=2 \quad L[t^2] = \frac{2}{s} L[t] = \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}$$

$$n=3 \quad L[t^3] = \frac{3}{s} L[t^2] = \frac{3}{s} \cdot \frac{2}{s^3} = \frac{6}{s^4} \quad \dots$$

$$\text{所以 } L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

常用信号的拉氏变换

时域信号 ($t \geq 0$)	S域信号
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性
- 4.9 二阶谐振系统的S平面分析
- 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布
- 4.11 线性系统的稳定性
- 4.12 双边拉普拉斯变换
- 4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

主要内容:

线性性质

时域积分

s 域平移（频域移位）

初值定理

卷积定理

s 域积分

时域微分

延时（时域移位）

尺度变换

终值定理

s 域微分

注意：此处所指均为单边拉氏变换的性质，只适用于因果信号，即满足 $f(t)=f(t)u(t)$ 的信号 $f(t)$ 。

4.3.1 线性

如有: $f_i(t) \xleftrightarrow{LT} F_i(s)$

$$\text{则 } f(t) = \sum_{i=1}^N a_i f_i(t) \xleftrightarrow{LT} F(s) = \sum_{i=1}^N a_i F_i(s)$$

例4-2: 利用线性性质求 $x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$ 的拉氏变换。

$$\text{解: } e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+1} \quad e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+2}$$

$$\text{所以 } x(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

例4-3：利用拉氏变换的性质，求 $\cos(\omega_0 t)u(t)$ 的拉氏变换。

解：

$$\cos(\omega_0 t)u(t) = \frac{1}{2} \left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} \right) u(t)$$

$$e^{j\omega_0 t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s - j\omega_0}$$

$$e^{-j\omega_0 t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s + j\omega_0}$$

$$\therefore \cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

4.3.2 延时性（时移性）

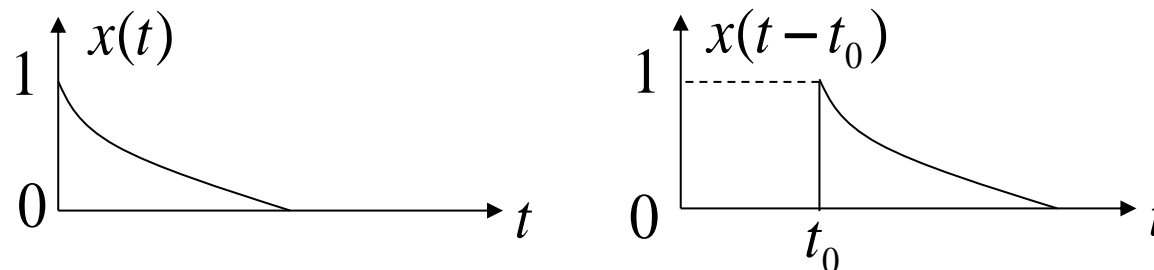
$$\text{设 } f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$$

$$f(t-t_0)u(t-t_0) \xleftrightarrow{LT} F(s)e^{-st_0}$$

注意：时移后的信号若为非因果信号不可用此性质！可结合课后习题4-2理解。

注意：在前述单边拉氏变换的定义下，

$$e^{-\alpha t}u(t) \text{ 的延时是 } e^{-\alpha(t-t_0)}u(t-t_0)$$



信号 $f(t) = u(t) - u(t - 1)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 为 ()

A $F(s) = \frac{1 + e^{-s}}{s}$

B $F(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}$

C $F(s) = \frac{1 - s}{s}$

D $F(s) = \frac{1 - s}{e^{-s}}$

提交

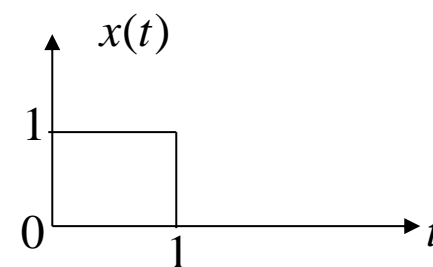
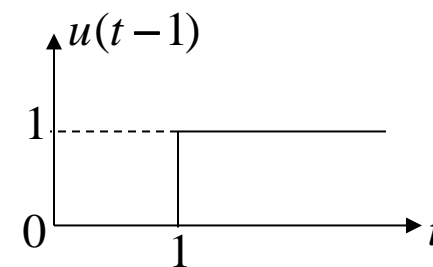
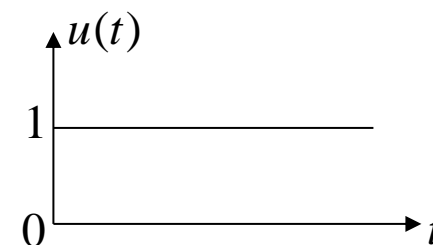
例4-4：求 $x(t) = u(t) - u(t-1)$ 的拉氏变换。

解：

$$u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}$$

$$u(t-1) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s} e^{-s}$$

$$\text{所以 } x(t) = u(t) - u(t-1) \xleftrightarrow{LT} \frac{1 - e^{-s}}{s}$$



4.3.3 s域平移性（频移性）

设 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

s域平移性是 $f(t)e^{s_0 t} \xleftrightarrow{LT} F(s - s_0)$

例4-5：利用s域平移性求 $e^{-\alpha t}u(t)$ 和 $te^{-\alpha t}u(t)$ 的拉氏变换。

$$u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}$$

$$tu(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s^2}$$

$$e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s + \alpha}$$

$$te^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s + \alpha)^2}$$

4.3.4 时域展缩性

如果有 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

$$f(at) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

此处常数 a 应 >0 ，否则信号发生反褶，对于单边拉氏变换，此性质就无意义。

例4-6：用时域展缩性求 $e^{-\alpha t}u(t)$ 的拉氏变换。

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+1}$$

$$\text{于是 } e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\frac{s}{\alpha} + 1} = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha}{s + \alpha} = \frac{1}{s + \alpha}$$

如果有 $f(t)u(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

既有延时又有时域展缩时，

$$f(at-b)u(at-b) \xleftrightarrow{LT} ? \quad (a > 0, b > 0)$$

先延时再做时域展缩，

$$f(t-b)u(t-b) \xleftrightarrow{LT} F(s)e^{-bs}$$

$$f(at-b)u(at-b) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) e^{-\frac{bs}{a}}$$

也可先做时域展缩再延时。

例4-7：利用拉氏变换的性质，求 $\delta(3t - 2)$ 的拉氏变换。

解法一：先延时再时域压缩

依据拉氏变换的时移性 $f(t - t_0)u(t - t_0) \xleftrightarrow{LT} F(s)e^{-st_0}$ 及 $\delta(t) \xleftrightarrow{LT} 1$ 可知：

$$\delta(t - 2) \xleftrightarrow{LT} e^{-2s}$$

由拉氏变换的时域展缩性 $f(at) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ 可知： $\delta(3t - 2) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{3} e^{-\frac{2}{3}s}$

解法二：先时域压缩再延时

由拉氏变换的时域展缩性 $f(at) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ 可知： $\delta(3t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{3}$

依据拉氏变换的时移性 $f(t - t_0)u(t - t_0) \xleftrightarrow{LT} F(s)e^{-st_0}$ 有：

$$\delta(3t - 2) = \delta\left[3\left(t - \frac{2}{3}\right)\right] \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{3} e^{-\frac{2}{3}s}$$

4.3.5 时域微分性

设 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

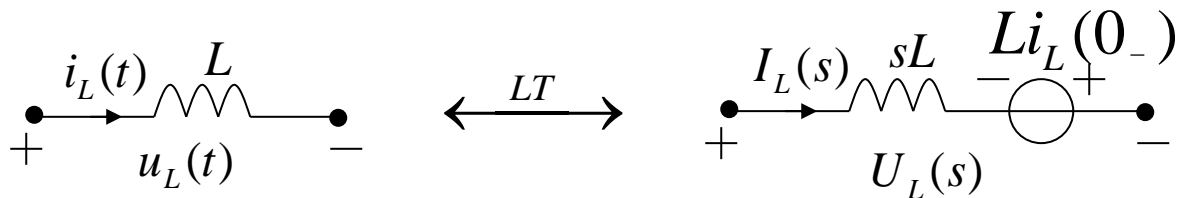
$$f'(t) \xleftrightarrow{LT} sF(s) - f(0_-)$$

$$f^{(n)}(t) \xleftrightarrow{LT} s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} f^{(i)}(0_-)$$

零状态条件下，时域微分一次，频域乘一个s

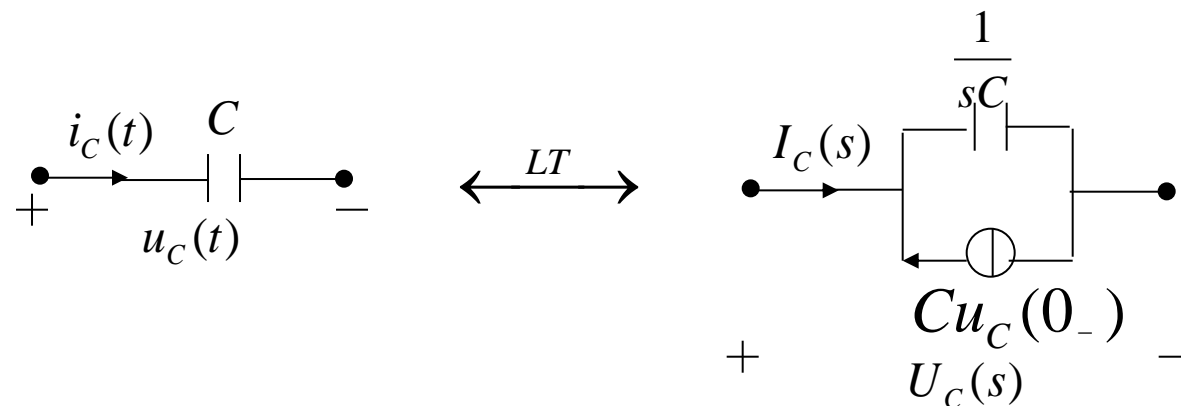
例4-8：求电感两端电压 $u_L(t)$ 的拉氏变换。

解： $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \xleftrightarrow{LT} U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-)$



同样，对于电容中的电流有

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \xleftrightarrow{LT} I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0_-)$$



4.3.6 时域积分性

$$f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$$

则 $y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{0_-} f(\tau) d\tau + \int_{0_-}^t f(\tau) d\tau = y(0_-) + \int_{0_-}^t f(\tau) d\tau$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \xleftrightarrow{LT} \frac{y(0_-)}{s} + \frac{F(s)}{s} \quad \leftarrow \text{借助分部积分法, 详见教材195页。}$$

例4-9: 求电感中的电流 $i_L(t)$ 的拉氏变换。

解:
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^t u_L(\tau) d\tau$$

于是

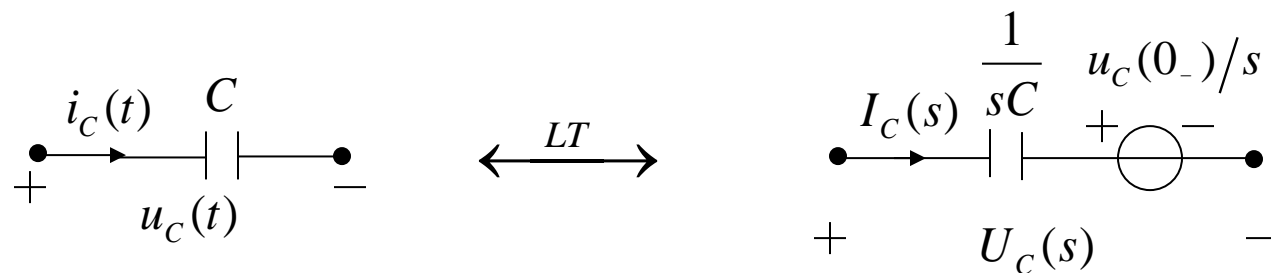
$$i_L(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{i_L(0_-)}{s} + \frac{U_L(s)}{sL}$$

同样，**电容两端的电压**

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i_C(\tau) d\tau$$

其拉氏变换为

$$u_C(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{u_C(0_-)}{s} + \frac{I_C(s)}{sC}$$



拉氏变换的**时域微积分性质**，在作**电路的瞬态分析**时，应用较为便利。

4.3.7 s域微分性

设 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

s域微分性 $-tf(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{dF(s)}{ds} \quad tf(t) \xleftrightarrow{LT} -\frac{dF(s)}{ds}$

例4-10: 已知 $e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+\alpha}$, 利用s域微分性求 $te^{-\alpha t}u(t)$ 的拉氏变换。

解:
$$\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s+\alpha} \right] = \frac{-1}{(s+\alpha)^2}$$

于是
$$te^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

4.3.8 s域积分性

$$\frac{f(t)}{t} \xleftrightarrow{LT} \int_s^{\infty} F(\lambda) d\lambda$$

例4-11: 已知 $(1 - e^{-\alpha t})u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \alpha}$, 求 $\frac{1 - e^{-\alpha t}}{t}u(t)$ 的拉氏变换。

解:

$$\begin{aligned} \int_s^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \alpha} \right) d\lambda &= \ln \lambda \Big|_s^{\infty} - \ln(\lambda + \alpha) \Big|_s^{\infty} \\ &= -\ln s + \ln(s + \alpha) \\ &= -\ln \frac{s}{s + \alpha} \end{aligned}$$

于是

$$\frac{1 - e^{-\alpha t}}{t} u(t) \xleftrightarrow{LT} -\ln \frac{s}{s + \alpha}$$

4.3.9 卷积定理(时域、频域)

设 $f_1(t) \xleftrightarrow{LT} F_1(s), f_2(t) \xleftrightarrow{LT} F_2(s)$

则 $f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{LT} F_1(s) \cdot F_2(s)$

$$f_1(t)f_2(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$$

利用拉氏变换的定义式和延时性，即可证明此定理。

例4-12：已知系统的单位冲激响应和输入如下，求零状态响应 $y(t)$ 。

$$h(t) = e^{-\alpha t} u(t), \quad x(t) = u(t)$$

解：求拉氏变换 $h(t) = e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s + \alpha}, \quad x(t) = u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}$

于是 $y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s(s + \alpha)} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \alpha} \right)$

$$y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t)$$

4.3.10 初值与终值定理

设信号 $f(t)$ 是因果的，其与其导数的拉氏变换存在，则

1、初值定理：

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

高频分量（ $\omega \rightarrow \infty$ ），表示
 $t=0$ 时接入信号的突变。

若 $f(t)$ 包含冲激函数 $k\delta(t)$,

$$F(s) = k + F_1(s), F_1(s) \text{ 为真分式}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - ks] = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_1(s)$$

2、终值定理：若 $f(\infty)$ 存在，于是有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

直流分量（ $\omega \rightarrow 0$ ），得到电
路稳态的终值。

当电路等系统较为复杂时，无需做拉氏逆变换，即可直接求出函数的初值和终值。

例4-13: 已知 $u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}$, 利用拉氏变换性质分别求 $u(t)$ 和 $\cos(\omega_0 t)u(t)$ 的初值和终值。

解: $u(t)|_{t=0_+} = u(t)|_{t=\infty} = s \cdot \frac{1}{s} = 1$

$$\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \cos(\omega_0 t)|_{t=0_+} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} = 1$$

$\cos(\omega_0 t)u(t)$ 为等幅震荡函数 ($sF(s)$ 分母的根在虚轴上共轭对称), 其终值不存在。

例4-14：利用拉氏变换的性质，求以下信号的拉氏变换。

$$(1) te^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)u(t) \quad (2) \frac{\sin t}{t} u(t)$$

解：（1）应用频移性和s域微分性

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)u(t) &\xleftrightarrow{LT} \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \\ -te^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)u(t) &\xleftrightarrow{LT} \frac{d}{ds} \left[\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \right] \\ \frac{d}{ds} \left[\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \right] &= \frac{\omega_0^2 - (s + \alpha)^2}{[(s + \alpha)^2 + \omega_0^2]^2} \\ \therefore te^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)u(t) &\xleftrightarrow{LT} \frac{(s + \alpha)^2 - \omega_0^2}{[(s + \alpha)^2 + \omega_0^2]^2} \end{aligned}$$

(2) 应用s域积分性

$$\because \sin t u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\frac{\sin t}{t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \int_s^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 + 1} = \arctan s \Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

$$\therefore \frac{\sin t}{t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

总结

性质	时域	复频域
线性	$\sum_{i=1}^N a_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^N a_i F_i(s)$
延时性	$f(t-t_0)u(t-t_0)$	$e^{-st_0} F(s)$
频移性	$f(t)e^{-at}$	$F(s+a)$
时域展缩性	$f(at) \ (a > 0)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
时域卷积定理	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
频域卷积定理	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$F_1(s) * F_2(s) / (2\pi j)$

注意：上述性质只适用于因果信号，即满足 $f(t)=f(t)u(t)$ 的信号 $f(t)$ 。

总结

性质	时域	复频域
时域微分性	$\frac{df(t)}{dt}$	$SF(s) - f(0^-)$
时域积分性	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0^-)}{s}$
s域微分性	$-tf(t)$	$\frac{dF(s)}{ds}$
s域积分性	$f(t)/t$	$\int_s^{\infty} F(\lambda) d\lambda$
初值定理	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} SF(s)$	
终值定理	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} SF(s)$	

注意：上述性质只适用于因果信号，即满足 $f(t)=f(t)u(t)$ 的信号 $f(t)$ 。

作业

基础题（需提交）：4-1，4-2，4-3（1）（2）（3）。

加强题（选做，不提交）：4-3（4）（5）。