

## 上节内容

4.4 拉普拉斯逆变换

4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型

### 4.4.1 拉普拉斯变换的零、极点

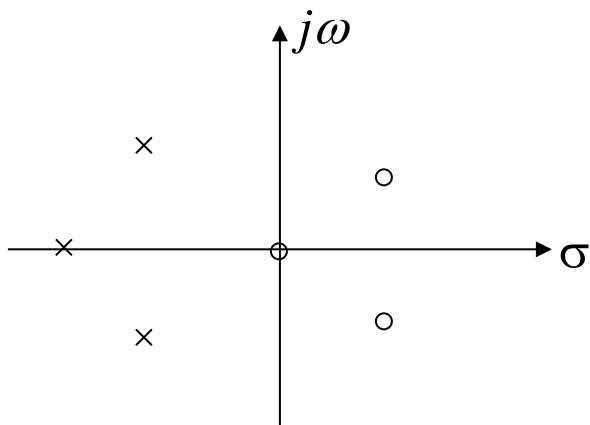
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

根据拉普拉斯逆变换的公式，可以应用围线积分求解。但是在应用中，绝大多数拉氏变换是有理分式的形式，分子分母均是 $s$ 的**有理多项式**：

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

分子多项式  $N(s)=0$  的根 $z_i$ ，称作 $F(s)$ 的**零点**；

分母多项式  $D(s)=0$  的根 $p_i$ ，称作 $F(s)$ 的**极点**。



零极点分布图

### 4.4.2 求拉氏逆变换

用拉氏变换方法分析系统时，最后还要将象函数进行拉氏逆变换。

#### 1、部分分式法（海维赛法）

(1)极点为单实根的情况  $(p_1 \cdots p_n)$

$$m < n \text{ 时, } F(s) \stackrel{\text{分解}}{=} \frac{k_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{k_n}{s - p_n} \quad (\text{真分式})$$

$$\text{其中 } k_i = (s - p_i)F(s) \Big|_{s=p_i} \quad (\text{留数}) \quad (\text{证明见教材})$$

$$\text{由拉氏变换性质已知: } Ae^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{A}{s + \alpha}$$

$$F(s) \xrightarrow{L^{-1}} f(t) = \left( k_1 e^{p_1 t} + \cdots + k_n e^{p_n t} \right) u(t)$$

若一个象函数有一对共轭极点位于 $s$ 平面的左半平面，下列说法正确的有（）

A

原函数是一个幅度随时间不变的正弦函数

B

原函数是一个幅度随时间衰减的正弦函数

C

原函数是一个幅度随时间增长的正弦函数

D

极点的实部决定原函数的频率，虚部决定原函数的幅度

E

极点的实部决定原函数的幅度，虚部决定原函数的频率

提交

(2)极点包含共轭复根的情况 ( $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ )

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{A(s)}{D(s) \left[ (s + \alpha)^2 + \beta^2 \right]} \\ &= \frac{A(s)}{D(s)(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)} \end{aligned}$$

其中 $D(s)$ 为分母除去共轭复根剩余部分

$$\text{设 } F_1(s) = \frac{A(s)}{D(s)}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } F(s) &= \frac{F_1(s)}{(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)} \\ &\stackrel{\text{分解}}{=} \frac{K_1}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K_2}{s + \alpha + j\beta} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{其中 } K_{1,2} = \frac{F_1(-\alpha \pm j\beta)}{\pm 2j\beta} \quad (\text{留数})$$

$$K_1、K_2 \text{ 呈共轭关系: } K_{1,2} = A \pm jB$$

得共轭复根有关部分逆变换为  $\xrightarrow{\text{LT}^{-1}}$

$$\begin{aligned} f_c(t) &= e^{-\alpha t} (K_1 e^{j\beta t} + K_1^* e^{-j\beta t}) u(t) \\ &= e^{-\alpha t} \{ (A + jB)[\cos(\beta t) + j \sin(\beta t)] + (A - jB)[\cos(\beta t) - j \sin(\beta t)] \} u(t) \\ &= 2e^{-\alpha t} [A \cos(\beta t) - B \sin(\beta t)] u(t) \end{aligned}$$

$\alpha$ --衰减因子;  $\beta$ --振荡频率

(3)极点包含多重根的情况 ( $k$ 重根 $p_1$ ,单根 $p_2 \dots p_n$ )

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{A(s)}{D(s)} = \frac{A(s)}{(s-p_1)^k D_1(s)} \\ &= \frac{K_{11}}{(s-p_1)^k} + \frac{K_{12}}{(s-p_1)^{k-1}} + \dots + \frac{K_{1k}}{(s-p_1)} + \sum_{i=2}^n \frac{K_i}{s-p_i} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{K_{1i}}{(s-p_1)^{k-i+1}} + \sum_{i=2}^n \frac{K_i}{s-p_i} \end{aligned}$$

求 $K_i$ , 方法同第一种情况。

令:  $F_1(s) = (s-p_1)^k \cdot F(s)$

$$K_{11} = F_1(s) \Big|_{s=p_1} \quad K_{12} = \frac{d}{ds} F_1(s) \Big|_{s=p_1} \quad K_{13} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} F_1(s) \Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} F_1(s) \Big|_{s=p_1} \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

$$F_1(s) = (s - p_1)^k \cdot F(s)$$

得多重根部分的逆变换  $\xrightarrow{\text{LT}^{-1}}$  :

$$f_c(t) = e^{p_1 t} \left[ \frac{K_{11}}{(k-1)!} t^{k-1} + \frac{K_{12}}{(k-2)!} t^{k-2} \dots + \frac{K_{1i}}{(k-i)!} t^{k-i} \dots + K_{1k} \right] u(t)$$



已知  $F(s) = \left( \frac{1 - e^{-s}}{s} \right)^2$  , 求拉氏逆变换  $f(t)$  。

- ☒ A  $f(t) = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$
- ☐ B  $f(t) = (t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$
- ☐ C  $f(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$
- ☐ D  $f(t) = tu(t) - (t-2)u(t-2)$

提交

已知  $F(s) = \left( \frac{1 - e^{-s}}{s} \right)^2$  , 求拉氏逆变换  $f(t)$  。

解: 
$$F(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s}$$

$$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

利用时移性质:

$$\therefore f(t) = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$$

如果 $F(s)$ 不是真分式，即 $n < m$ ，将其表示为一 $s$ 的多项式与一真分式的和。

$$\text{例： } F(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 6s + 5}{s^2 + 3s + 2} = s + 1 + \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

上式中 $s+1$ 的拉氏逆变换等于： $\delta'(t) + \delta(t)$

对于拉氏变换是有理真分式的逆变换，用部分分式法求解。

如果 $F(s)$ 是含 $e^{-\alpha s}$ 的非有理式， $e^{-\alpha s}$ 项不参加部分分式运算，求解利用时移性质。

$$\text{例： } \frac{e^{-2s}}{s^2 + 3s + 2} = F_1(s)e^{-2s} \quad F_1(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

$$\text{所以 } f_1(t) = L^{-1}[F_1(s)] = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$\text{所以 } f(t) = f_1(t-2) = [e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}]u(t-2)$$

### 4.5.1 用拉普拉斯变换解微分方程

拉普拉斯变换解微分方程的步骤：

- (1) 对微分方程求拉氏变换，注意应用微分性质；
- (2) 解s域的代数方程，求出响应的拉氏变换（建议分别求零状态和零输入响应）；
- (3) 求拉氏逆变换，即求出响应的时间表达式。

### 4.5.2 拉普拉斯变换解电路

#### s域电路分析方法

1. 将网络中每个元件用其s域模型代替；

将信号源写作变换式  $\left(\frac{E}{s}, \text{或} \frac{E}{sR}, U_s(s) \text{或} I_s(s)\right)$ 。

2. 对此构成的s域模型图采用KVL和KCL分析得到所需的系统方程变换式。

（所进行的数字运算是代数关系，类似电阻性网络；

戴维南定理与诺顿定理均适用；适合较多结点或回路的网络分析。）

3. 求出响应的拉氏变换。

4. 求拉氏逆变换，即求出响应的时间表达式。

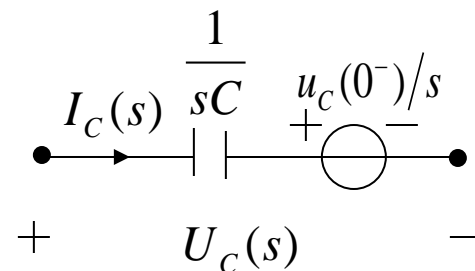
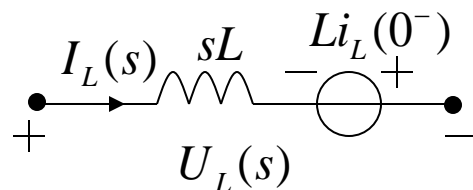
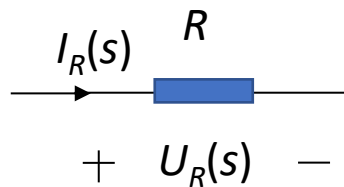
$s$ 域元件模型:

### 1) 回路分析 (KVL)

$$U_R(s) = RI_R(s)$$

$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{1}{s} u_c(0^-)$$

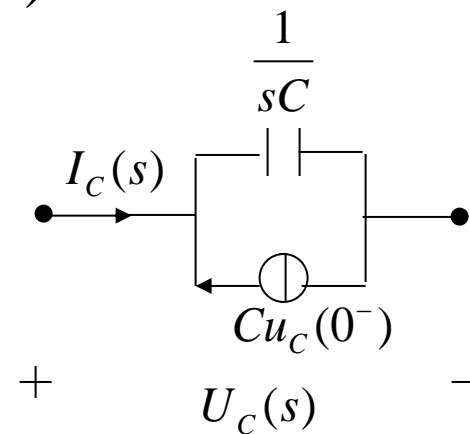
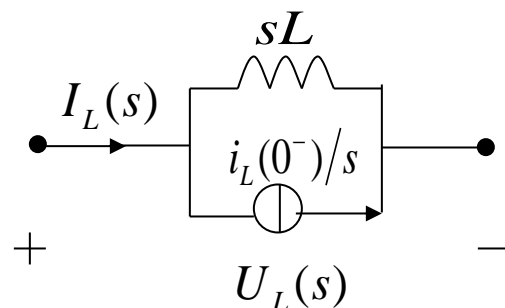
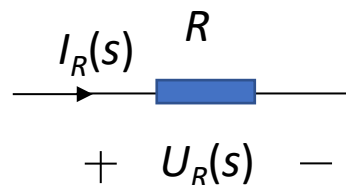


## 2) 结点分析 (KCL)

$$I_R = \frac{1}{R} U_R(s)$$

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} U_L(s) + \frac{1}{s} i_L(0^-)$$

$$I_C(s) = sC U_C(s) - C u_c(0^-)$$



## 本次课内容

- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性

## 本次课目标

1. 熟练掌握系统函数、系统微分方程、系统模拟框图之间的相互关联（重要）；
2. 能用系统函数零、极点分布定性判断冲激响应的特性；
3. 熟练运用系统函数分析零状态响应的时域特性；
4. 熟练运用系统函数零、极点分布，粗略画出频响特性曲线（重要）。



4.1 引言

4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

4.4 拉普拉斯逆变换

4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型

4.6 系统函数（网络函数）

4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性

4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性

4.9 二阶谐振系统的S平面分析

4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布

4.11 线性系统的稳定性

4.12 双边拉普拉斯变换

4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

## 4.6.1 系统函数的定义

若有时间信号作用于系统，其输出仍然是此时间信号，**只是幅度与相位被改变**，称此时间信号为系统的**特征信号**，表征被改变的幅度和相位的函数，称为系统的特征值或**系统函数**。

信号  $e^{j\omega t}$  是系统的**特征信号**，函数  $H(\omega)$ （系统单位冲激响应  $h(t)$  的傅里叶变换）是**系统函数**，也称为系统的**频率响应**。

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{e^{j\omega t}} \boxed{h(t)} \xrightarrow{\quad} \\
 y(t) = h(t) * e^{j\omega t} = H(\omega)e^{j\omega t} = |H(\omega)|e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]}
 \end{array}$$

事实上，**指数信号  $e^{st}$** 也是系统的**特征信号**。

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{e^{st}} \boxed{h(t)} \xrightarrow{\quad} \\
 y(t) = h(t) * e^{st} = H(s)e^{st}
 \end{array}$$

$$y(t) = h(t) * e^{st} = \int_{0_-}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st} \int_{0_-}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = H(s)e^{st}$$

$H(s) = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$  是因果系统单位冲激响应的拉氏变换，也称为系统函数。

连续时间信号 $x(t)$ ，作用于单位冲激响应为 $h(t)$ 线性时不变系统，其零状态响应 $y_{zs}(t)$ ，等于输入信号与单位冲激响应的卷积：

$$y_{zs}(t) = h(t) * x(t) \quad \begin{array}{c} x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y_{zs}(t) = h(t) * x(t) \end{array}$$

由时域卷积定理，零状态响应的拉氏变换等于输入信号的拉氏变换与单位冲激响应的拉氏变换的乘积：

$$Y_{zs}(s) = H(s)X(s) \quad \begin{array}{c} X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y_{zs}(s) = H(s)X(s) \end{array}$$

系统函数等于零状态响应的拉氏变换与输入信号的拉氏变换的比值：

$$H(s) = Y_{zs}(s) / X(s)$$

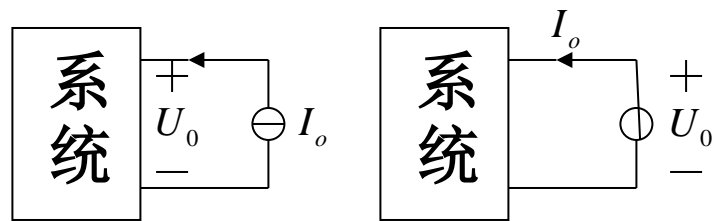
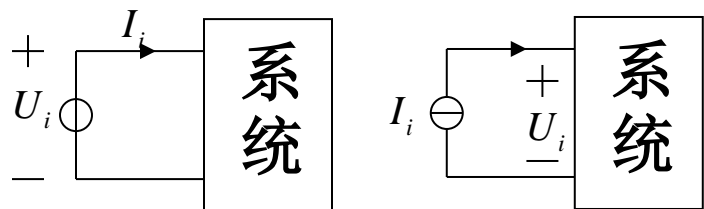
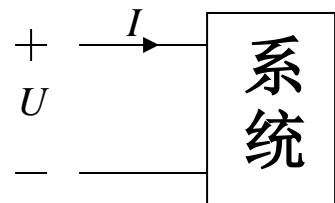
### 4.6.2 策动点函数与转移函数

#### 1、策动点函数

当系统的输入、输出取自同一端口时，系统函数称为**策动点函数**。策动点函数根据其量纲，又可称为**阻抗函数**或**导纳函数**。如放大器的输入或输出**阻抗**（电压与电流之比）、输入或输出**导纳**（电流与电压之比）等。

$$\text{阻抗: } Z_i(s) = \frac{U_i(s)}{I_i(s)} \quad Z_o(s) = \frac{U_o(s)}{I_o(s)}$$

$$\text{导纳: } Y_i(s) = \frac{I_i(s)}{U_i(s)} \quad Y_o(s) = \frac{I_o(s)}{U_o(s)}$$



## 2、转移（传输）函数

当系统的输入输出取自不同的端口时，系统函数称为**转移函数**或**传输函数**。

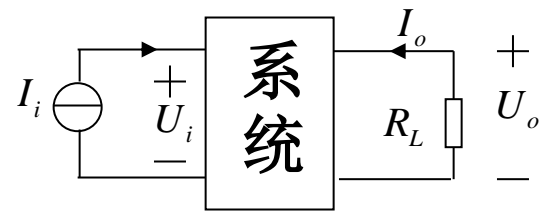
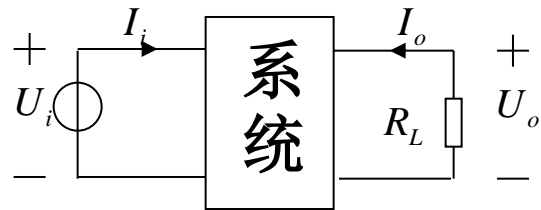
转移函数根据其量纲可称为**转移阻抗**、**转移导纳**、**电压传输比**或**电流传输比**等。如放大器的电压或电流放大倍数等。

转移阻抗:  $Z_{21}(s) = \frac{U_o(s)}{I_i(s)}$

转移导纳:  $Y_{21}(s) = \frac{I_o(s)}{U_i(s)}$

电压传输比:  $K_v(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)}$

电流传输比:  $K_i(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)}$



## 4.6.3 系统函数的求解

由于系统函数是系统零状态响应拉氏变换与激励拉氏变换之比，它的求解与系统的起始条件无关。

**例4-24：**已知系统的微分方程  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$ ，

求系统函数 $H(s)$ 与系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

**解：**对以上方程求拉氏变换，在利用微分性质时，起始条件为零。

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 3)X(s)$$

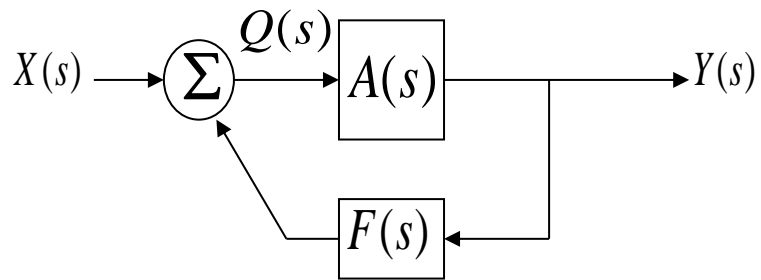
于是系统函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{2}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

求系统函数的拉氏逆变换，即为系统的单位冲激响应。

$$h(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

**例4-25:** 已知一反馈系统由如下框图所示, 试求系统函数 $H(s)$ 。



**解:** 设加法器的输出为 $Q(s)$ 。于是

$$Q(s) = X(s) + A(s)F(s)Q(s)$$

$$X(s) = [1 - A(s)F(s)]Q(s)$$

另外由于  $Y(s) = A(s)Q(s)$

所以

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{A(s)}{1 - A(s)F(s)}$$

反馈系统: 通常称 $A(s)$ 为前向通路增益,  $F(s)$ 称为反馈通路增益,  $A(s)F(s)$ 称为闭环增益。

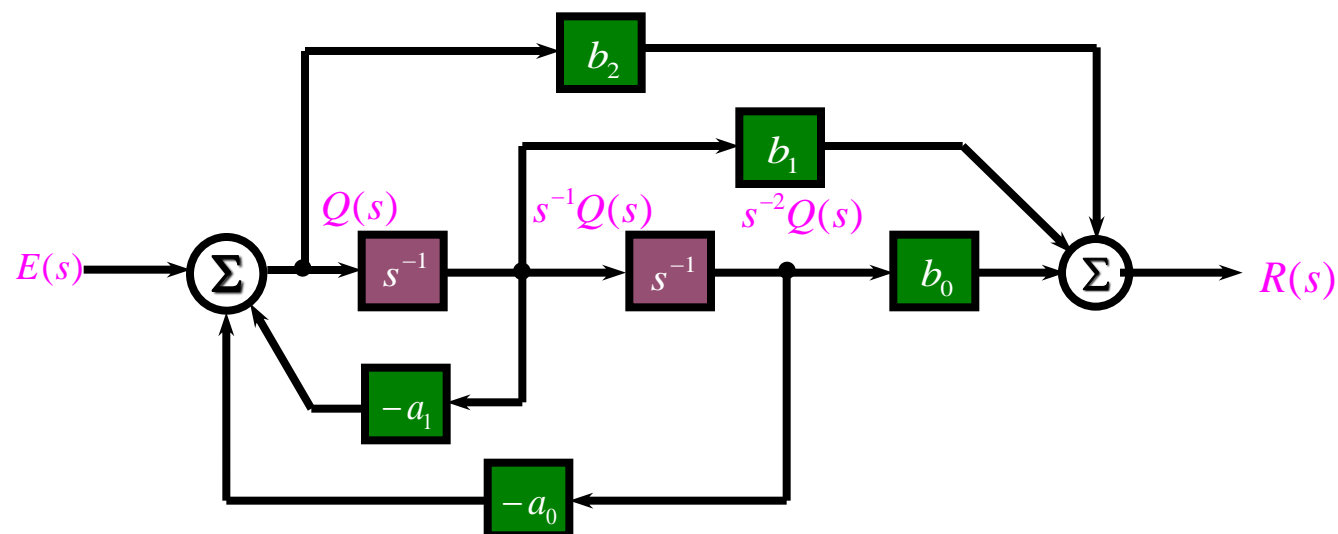
$$R(s) = H(s)E(s) = \frac{b_2 + b_1s^{-1} + b_0s^{-2}}{1 + a_1s^{-1} + a_0s^{-2}} E(s)$$

令：  $Q(s) = \frac{E(s)}{1 + a_1s^{-1} + a_0s^{-2}}$

则：

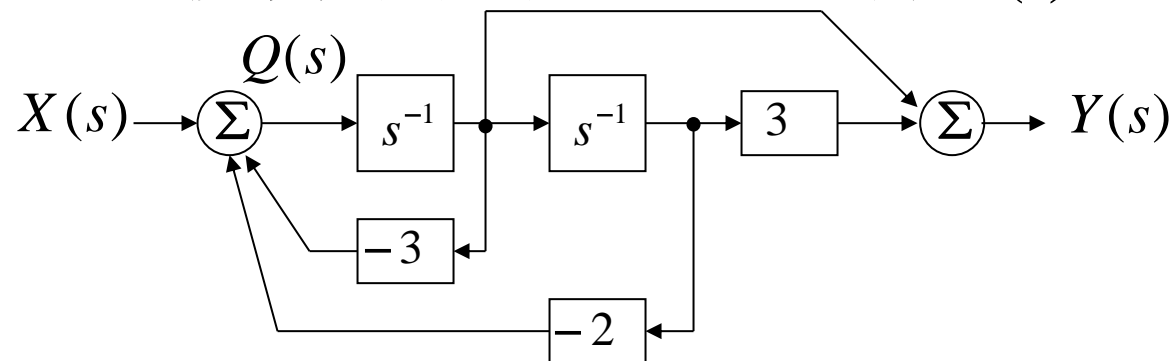
$$Q(s) = E(s) - a_1s^{-1}Q(s) - a_0s^{-2}Q(s)$$

$$R(s) = (b_2 + b_1s^{-1} + b_0s^{-2}) Q(s)$$





**例4-26:** 已知一个系统的模拟框图如下, 求系统函数 $H(s)$ 。



**解:** 设前一个加法器的输出为 $Q(s)$ 。于是有

$$Q(s) = X(s) - 3s^{-1}Q(s) - 2s^{-2}Q(s)$$

$$X(s) = (1 + 3s^{-1} + 2s^{-2})Q(s)$$

后一个加法器的输出 $Y(s)$ 等于

$$Y(s) = s^{-1}Q(s) + 3s^{-2}Q(s) = (s^{-1} + 3s^{-2})Q(s)$$

于是

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^{-1} + 3s^{-2}}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性**
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性
- 4.9 二阶谐振系统的S平面分析
- 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布
- 4.11 线性系统的稳定性
- 4.12 双边拉普拉斯变换
- 4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

### 4.7.1 系统函数的零、极点分布与单位冲激响应的波形

系统的单位冲激响应是系统函数的拉氏逆变换：

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$$

一般的，系统函数是有理分式，于是

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{N(s)}{D(s)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{A\prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)}\right\} = L^{-1}\left\{\sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - p_k}\right\} = \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k t} u(t)$$

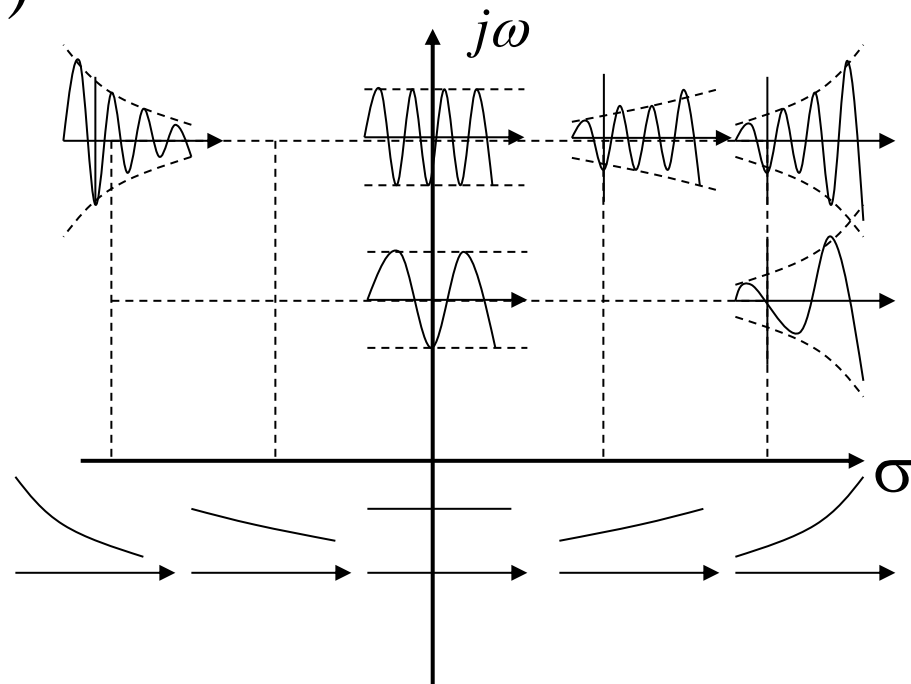
上式中， $z_k$ 与 $p_k$ 分别是系统函数零点与极点，零点与极点在 $s$ 平面上的位置不同，对单位冲激响应的的影响不同。

$s$ 平面是一个复平面， $\sigma$ 轴是实轴，虚轴用 $j\omega$ 来记。平面上不同的点 $s$ ，对应着不同的时间信号 $e^{st}$ 。

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

信号 $e^{st}$ ，表示的是幅度按指数变化的正余弦信号。离实轴越远的点，表示信号变化的频率越高；离虚轴越远的点，表示信号幅度增长或衰减得越快。

实轴上的点，表示单调指数变化的信号；  
虚轴上的点，表示等幅振荡的正余弦信号。



### 一阶极点

$$H(s) = \frac{1}{s}, \quad p_1 = 0 \text{ 在原点}, \quad h(t) = L^{-1}[H(s)] = u(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s + \alpha}, \quad p_1 = -\alpha$$

$\alpha > 0$ , 在左实轴上,  $h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ , 指数衰减

$\alpha < 0$ , 在右实轴上,  $h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ , 指数增加

$$H(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad p_{1,2} = \pm j\omega, \text{ 在虚轴上}$$

$$h(t) = \sin(\omega t)u(t), \text{ 等幅振荡}$$

$$H(s) = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}, \quad p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega \quad h(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega t u(t)$$

当  $\alpha > 0$ , 极点在左半平面, 衰减振荡

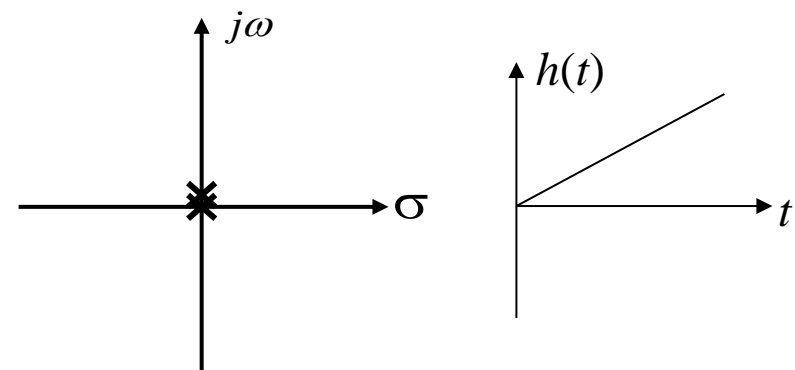
当  $\alpha < 0$ , 极点在右半平面, 增幅振荡

## 二阶极点

$$H(s) = \frac{1}{s^2}, \text{极点在原点,}$$

$$h(t) = tu(t)$$

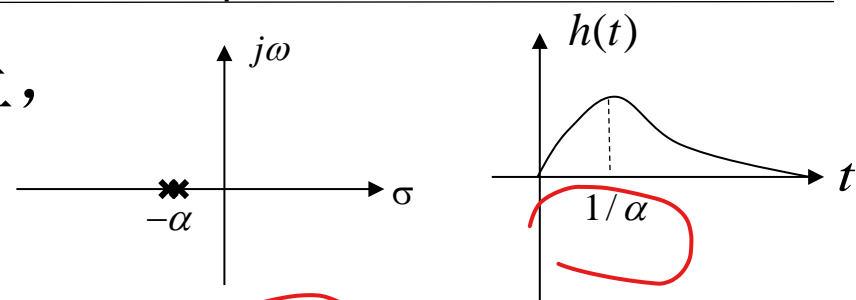
$$t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow \infty$$



$$H(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2}, \text{极点在实轴上,}$$

$$h(t) = t e^{-\alpha t} u(t), \alpha > 0$$

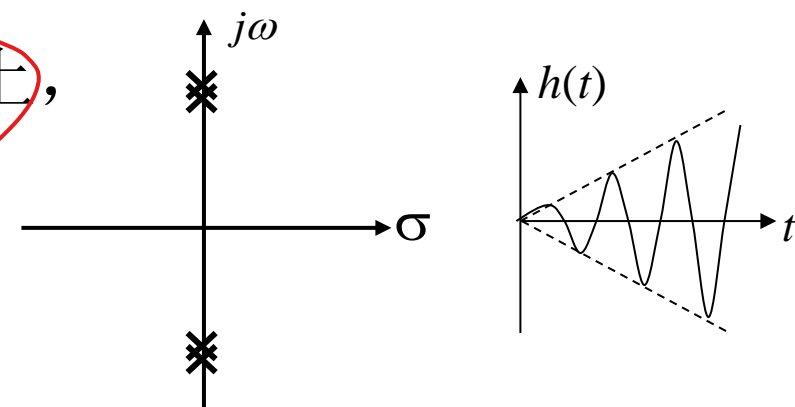
$$t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow 0$$



$$H(s) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}, \text{极点在虚轴上,}$$

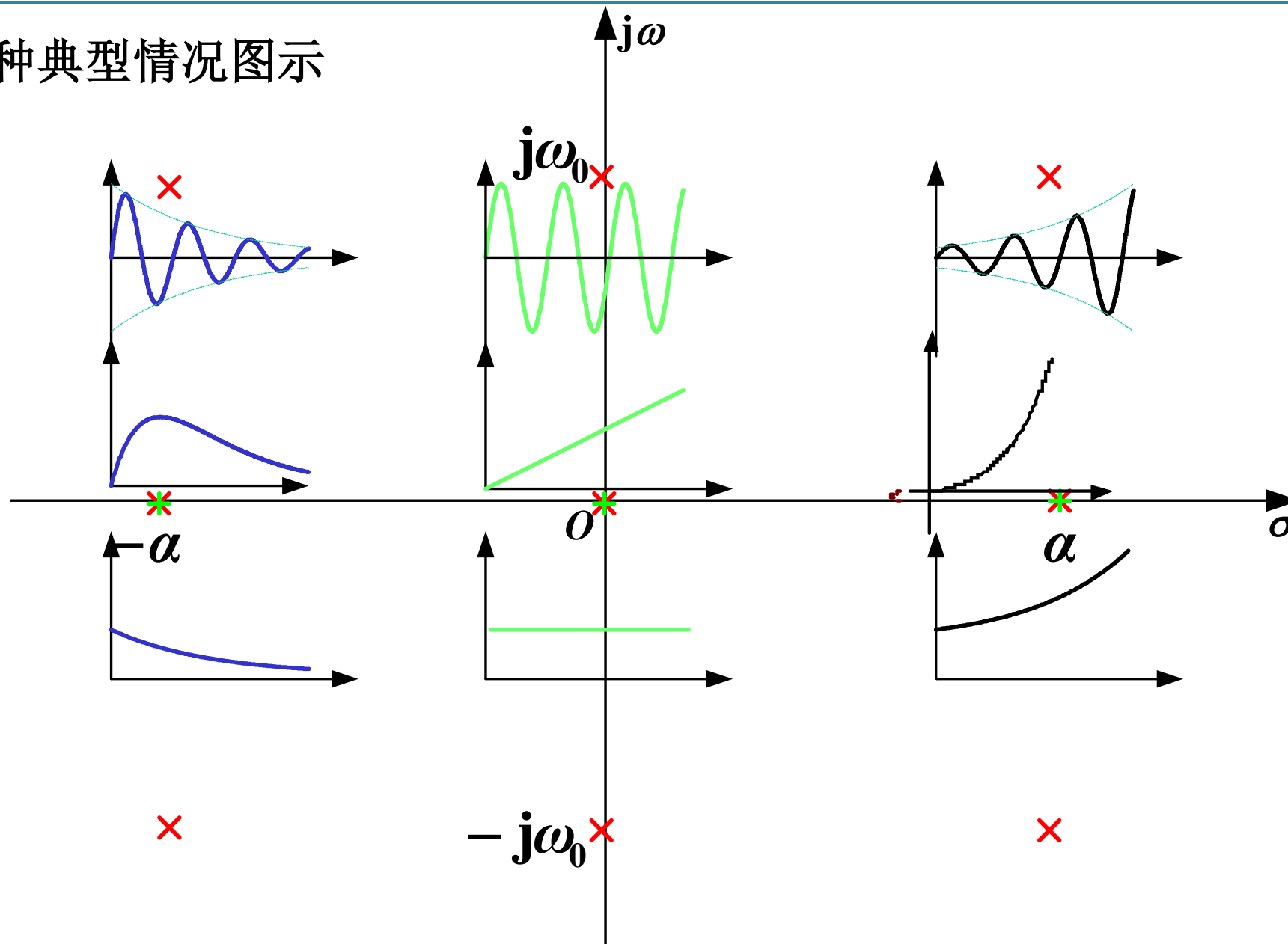
$$h(t) = t \sin \omega t u(t)$$

$$t \rightarrow \infty, h(t) \text{ 增幅振荡}$$



求导  
得

几种典型情况图示



$H(s)$ 极点与 $h(t)$ 波形特征的对应关系:

极点于s平面左半平面

$h(t)$ 呈衰减形式

极点于s平面右半平面

$h(t)$ 呈增长形式

极点于s平面虚轴上 (不含原点)

$h(t)$ 等幅振荡 (一阶极点)  
或增长振荡 (多阶极点)

极点于s平面实轴上 (不含原点)

$h(t)$ 呈现与指数相关的变化  
(一阶或多阶极点)

极点于s平面原点

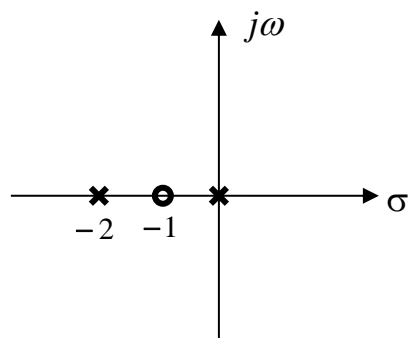
$h(t)$ 等值 $u(t)$  (一阶极点) 或  
增长 $t^n$  (多阶极点)



**例4-27:** 已知系统函数如下，试作出它们的零极图，求出其单位冲激响应并画出其波形图。

$$H_1(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} \quad H_2(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2} \quad H_3(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

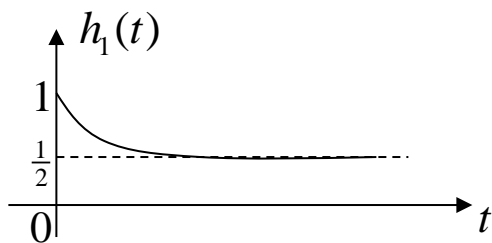
**解:**  $H_1(s)$ 的零极图如下: 因为



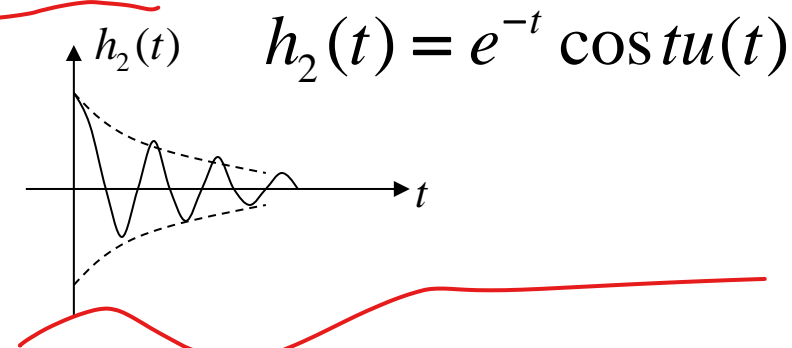
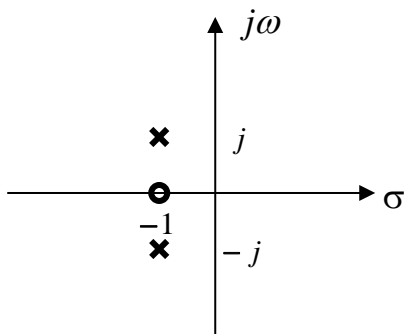
$$H_1(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)}$$

所以

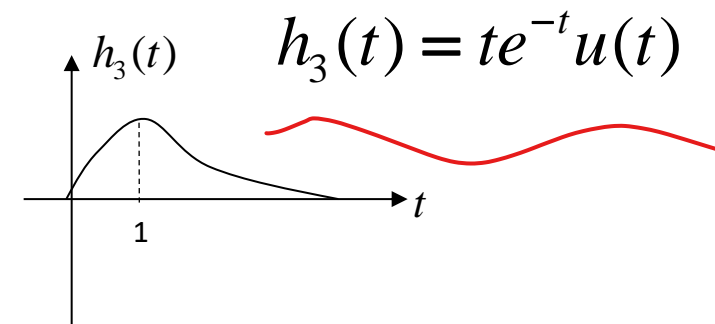
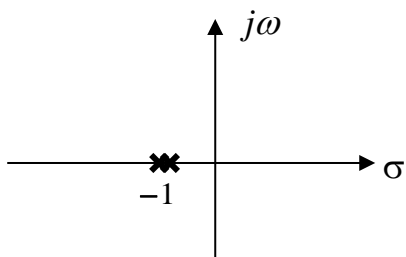
$$h_1(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})u(t)$$



$H_2(s)$ 的零极图如下:  $H_2(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$



$H_3(s)$ 的零极图如下:  $H_3(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$



由上例可见，若极点是多阶极点，其对应的时间波形与一阶极点时不同。

### 4.7.2 系统函数和激励的零、极点分布与响应的各分量

系统函数与激励的极点共同决定响应的波形。  $Y(s) = X(s)H(s)$

**例4-28:** 设系统函数  $H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$ ，系统的激励  $x(t) = u(t)$ ，初始状态为零，求系统的响应，并指出自由响应与强迫响应。

**解:** 系统的零状态响应的拉氏变换

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{\frac{3}{2}}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2}$$

所以，系统的零状态响应是  $y(t) = \frac{1}{2}(3 - 4e^{-t} + e^{-2t})u(t)$

其中自由响应  $y_h(t) = (\frac{1}{2}e^{-2t} - 2e^{-t})u(t)$ ，强迫响应  $y_p(t) = \frac{3}{2}u(t)$

系统函数的极点对应自由响应分量；激励的极点对应强迫响应分量。

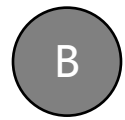


设系统函数  $H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$ ，系统的激励  $x(t) = e^{-3t}u(t)$ ，初始状态为零，则系统的强迫响应为（ ）



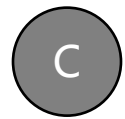
A

0



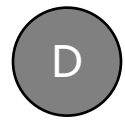
B

$(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$



C

$(e^{-t} + e^{-2t})u(t)$



D

$2e^{-3t}u(t)$

提交

**例4-29:** 设系统函数  $H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$ ，系统的激励  $x(t) = e^{-3t}u(t)$ ，初始状态为零，求系统的响应，并指出自由响应与强迫响应。

**解:** 系统的零状态响应的拉氏变换

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1}{s+3} \cdot \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

所以，系统的零状态响应是

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

响应中只有自由响应分量，强迫响应分量等于零，因为系统函数与激励函数有零极点相互抵消。

所以，如果系统函数与激励函数有零极点相互抵消，响应中将不会出现对应的时间分量。

**例4-30：** 已知某LTI系统微分方程为

$$r''(t) + 2r'(t) + r(t) = e'(t)$$

求该系统在激励 $e(t) = u(t)$ 时的零状态响应 $r_{zs}(t)$ 。

**解：** 对微分方程两边同求拉氏变换：

$$(s^2 + 2s + 1)R(s) = sE(s)$$

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{s}{s^2 + 2s + 1} = \frac{s}{(s + 1)^2}$$

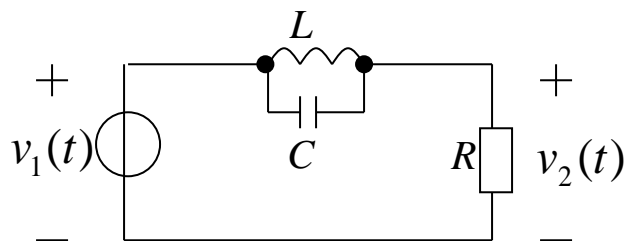
求激励的拉氏变换： $E(s) = \frac{1}{s}$

$$R(s) = H(s)E(s) = \frac{sE(s)}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s + 1)^2}$$

利用常用函数 $tu(t)$ 的拉氏变换为 $1/s^2$ ，以及频移性质，求拉氏逆变换，可得零状态响应的时域表达式：

$$r_{zs}(t) = te^{-t}u(t)$$

**例4-31:** 电路如图所示, 求系统转移函数  $H(s)=V_2(s)/V_1(s)$ ; 如果激励信号为



$v_1(t)=\cos(2t)u(t)$ , 为使响应中不存在正弦稳态分量, 求  $LC$  的约束; 若  $R=1\ \Omega$ ,  $L=1\ \text{H}$ , 求  $C$  值和响应  $v_2(t)$ 。

**解:** 系统函数 
$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R}{R + \frac{sL}{LCs^2 + 1}} = \frac{R(LCs^2 + 1)}{R(LCs^2 + 1) + sL} = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

激励的拉氏变换为 
$$V_1(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$$

响应的拉氏变换为 
$$V_2(s) = H(s)V_1(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \cdot \frac{s}{s^2 + 4}$$

## 4.7 由系统函数的零、极点分布决定时域特性

为使响应中不出现**正弦稳态响应**， $V_2(s)$ 分母中不应出现 **$s^2+4$ （等幅振荡）**的因子。

$$V_2(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} \quad \therefore \quad \frac{1}{LC} = 4 \rightarrow LC = \frac{1}{4} \quad C = \frac{1}{4L} = \frac{1}{4} \text{ F}$$

此时

$$V_2(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 4} = \frac{s}{(s+2)^2} = \frac{K_{11}}{(s+2)^2} + \frac{K_{12}}{(s+2)}$$

$$K_{11} = (s+2)^2 V_2(s) \big|_{s=-2} = s \big|_{s=-2} = -2 \quad K_{12} = \frac{d}{ds} [(s+2)^2 V_2(s)] \big|_{s=-2} = 1$$

$$\therefore V_2(s) = \frac{-2}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)} \quad v_2(t) = (1-2t)e^{-2t}u(t)$$

零状态响应的拉氏变换位于s平面**左半平面的极点决定瞬态响应分量**；位于虚轴上的极点决定稳态响应分量，其中**虚轴上的共轭极点决定正弦稳态响应分量**，位于**原点处的一阶极点决定直流稳态响应分量**。



**例4-32:** 已知线性时不变系统，当输入 $x(t)=Eu(t)$ 时，零状态响应与零输入响应分别为：

$$y_{zs}(t) = E\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t}\right)u(t) \quad y_{zi}(t) = 3e^{-t} - 5e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

试求系统函数 $H(s)$ ，并写出微分方程，画出系统模拟框图。

**解：** 系统零状态响应的拉氏变换为

$$\begin{aligned} Y_{zs}(s) &= \frac{E}{6s} - \frac{1}{2} \frac{E}{s+2} + \frac{1}{3} \frac{E}{s+3} = \frac{E\left[\frac{1}{6}(s+2)(s+3) - \frac{1}{2}s(s+3) + \frac{1}{3}s(s+2)\right]}{s(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{E}{s(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

激励的拉氏变换为  $X(s) = \frac{E}{s}$

所以系统函数

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

由零输入响应  $y_{zi}(t) = 3e^{-t} - 5e^{-2t} + 2e^{-3t}$  可知，系统有三个特征根，系统函数应有三个极点。特征根  $\alpha = -1$ （极点  $s = -1$ ）在系统函数的分母中未出现，是由于系统函数的零、极点相消导致的。

所以，为了列写系统的微分方程，系统函数的分子和分母都乘以  $s+1$ ：

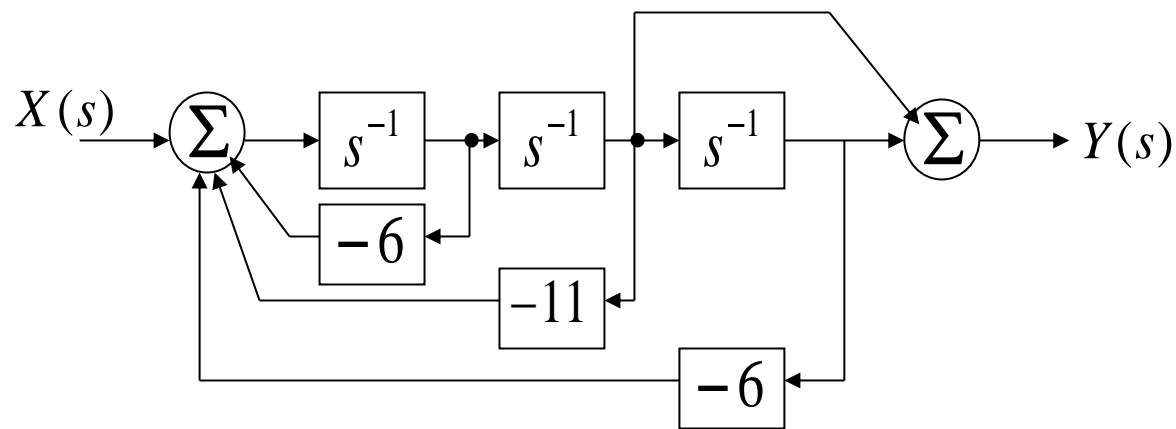
$$H(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{s+1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

系统的三阶微分方程为：

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 6 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$H(s) = \frac{s+1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{s^{-2} + s^{-3}}{1 + 6s^{-1} + 11s^{-2} + 6s^{-3}}$$

系统的模拟框图：

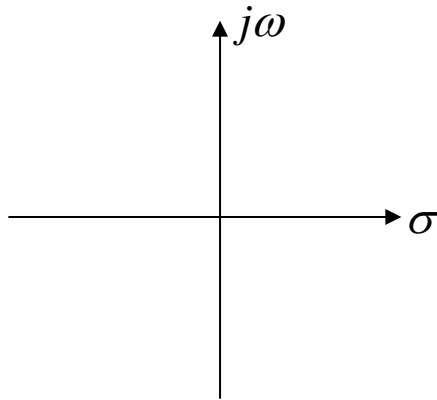


- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性**
- 4.9 二阶谐振系统的S平面分析
- 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布
- 4.11 线性系统的稳定性
- 4.12 双边拉普拉斯变换
- 4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

### 4.8.1 $H(s)$ 与 $H(\omega)$

拉普拉斯变换是傅里叶变换由实频域 $\omega$ 至复频域 $s$ 的推广，傅里叶变换是拉普拉斯变换在 $s$ 平面虚轴上的特例。**一般来说**，

$$H(\omega) = H(s) \big|_{s=j\omega}$$



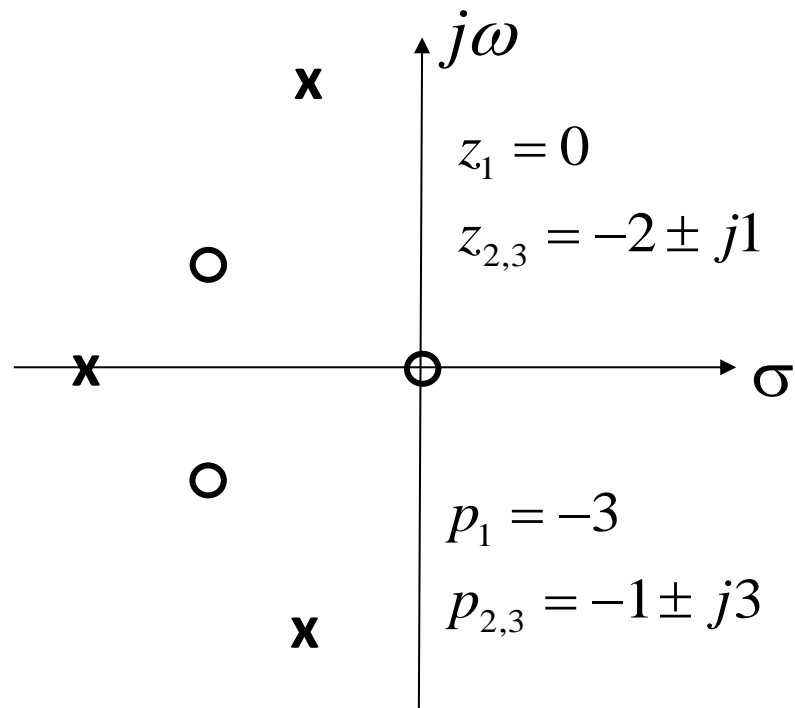
### 4.8.2 $H(s)$ 的零极点分布与 $H(\omega)$

由于 $H(s)$ 一般是有理分式，可表示为

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{G \prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)}$$

**$G$ —常数**

**例4-33:** 已知系统函数 $H(s)$ 的零、极点分布如下图所示，且 $h(0_+)=5$ ，求 $H(s)$ 的表达式。



**解:**

$$H(s) = \frac{G \prod_{k=1}^3 (s - z_k)}{\prod_{k=1}^3 (s - p_k)} = \frac{Gs(s+2-j)(s+2+j)}{(s+3)(s+1-j3)(s+1+j3)}$$

$$= \frac{G(s^3 + 4s^2 + 5s)}{s^3 + 5s^2 + 16s + 30}$$

$$= G + \underbrace{\frac{-G(s^2 + 11s + 30)}{s^3 + 5s^2 + 16s + 30}}_{H_1(s)}$$

由初值定理,  $h(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH_1(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-G(s^3 + 11s^2 + 30s)}{s^3 + 5s^2 + 16s + 30} = -G = 5$

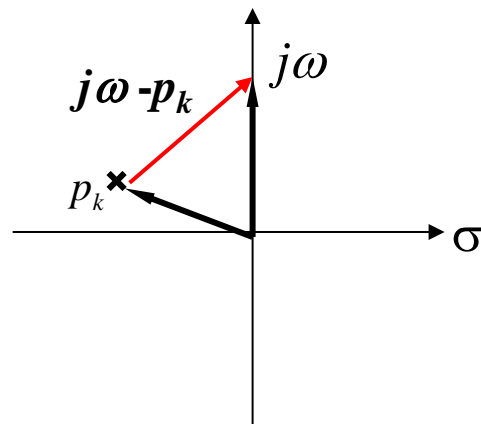
$$G = -5, H(s) = \frac{-5(s^3 + 4s^2 + 5s)}{s^3 + 5s^2 + 16s + 30}$$

系统的频率响应**一般**可写为（条件参见教材4.13节）

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{G \prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{G \prod_{k=1}^M (j\omega - z_k)}{\prod_{k=1}^N (j\omega - p_k)}$$

上式中，分子和分母的每一个因式，均表示s平面上一个指向 $j\omega$ 轴的矢量。

如图所示，因式  $(j\omega - p_k)$  表示的是沿虚轴变化的矢量 $j\omega$ 与由原点指向 $p_k$ 的矢量的差矢量。



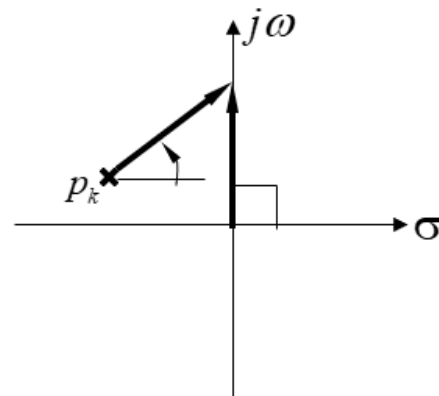
上式中分子上的因式对应的矢量，称为**零点矢量**；分母上的因式对应的矢量，称为**极点矢量**。

每个矢量均有它的模与相角，于是

$$H(\omega) = \frac{G \prod_{k=1}^M (j\omega - z_k)}{\prod_{k=1}^N (j\omega - p_k)} = \frac{G \prod_{k=1}^M B_k e^{j\beta_k}}{\prod_{k=1}^N A_k e^{j\theta_k}} = \frac{G \prod_{k=1}^M B_k}{\prod_{k=1}^N A_k} e^{j(\sum_{k=1}^M \beta_k - \sum_{k=1}^N \theta_k)}$$
$$= |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(\omega)| = \frac{G \prod_{k=1}^M B_k}{\prod_{k=1}^N A_k}$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^M \beta_k - \sum_{k=1}^N \theta_k$$

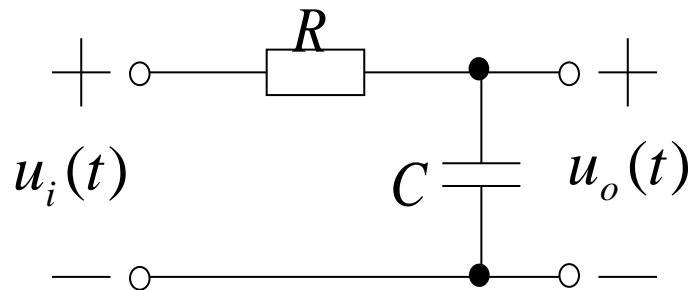


系统的幅频响应等于零点矢量的模之积与极点矢量的模之积的比值。

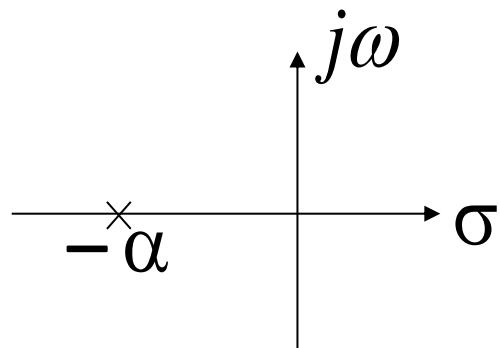
系统的相频响应等于零点矢量相角之和减去极点矢量相角之和。



**例4-34:** 如图所示RC电路，试求其系统函数，作出其零极图，求其频率响应，并粗略的画出其频响曲线。



**解:** 电路的系统函数为



$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{RCs + 1} \\
 &= \frac{1}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{\alpha}{s + \alpha} \quad \left( \alpha = \frac{1}{RC} \right)
 \end{aligned}$$

## 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性

由系统函数  $H(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}$  粗略画出频率响应：

(1) 当  $\omega = 0$  时，极点矢量指向原点，其模长为  $\alpha$ ，相角等于0；于是  $|H(\omega)| = \alpha/\alpha = 1$ ， $\varphi(\omega) = 0$ 。

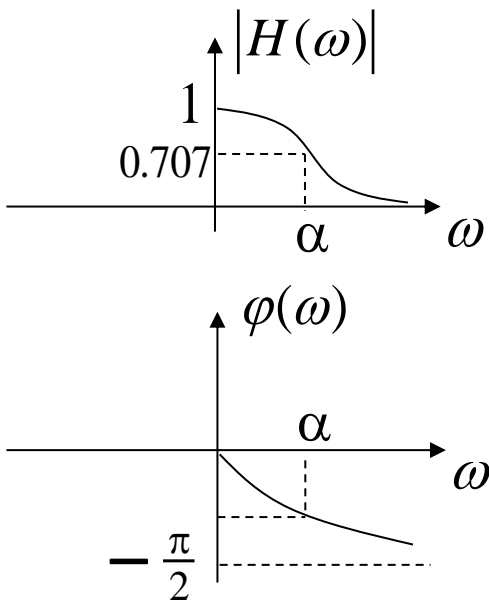
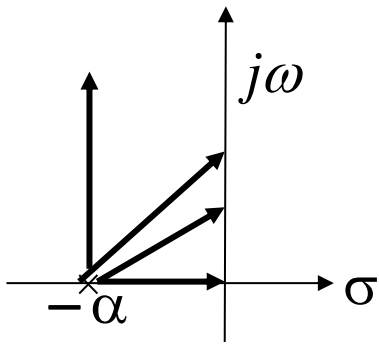
(2) 当  $\omega \uparrow$ ，极点矢量模 $\uparrow$ ，相角 $\uparrow$ ； $|H(\omega)| \downarrow$ ， $\varphi(\omega) \downarrow$ 。

(3) 当  $\omega = \alpha$ ， $|H(\omega)| \approx 0.707$ ， $\varphi(\omega) = -\pi/4$ 。

(4) 当  $\omega \rightarrow \infty$ ， $|H(\omega)| \rightarrow 0$ ， $\varphi(\omega) \rightarrow -\pi/2$ 。

由其幅频响应曲线可见，是一**低通滤波器**。

$$H(\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}} e^{-j \arctan(\frac{\omega}{\alpha})}$$



## 作业

基础题（需提交）：4-13（a）（b），4-16，4-22，4-24（a）（b）（c），4-26（a）（c），4-27，4-33。

加强题（选做，不提交）：4-13（c），4-26（b）（d）。

习题错误订正：4-16电路图中电容和受控源下端口是连起来的。