近世代数

计算机科学与技术学院
唐琳琳

内容

- 1. 集合
- 2. 映射与变换
- 3. 代数运算
- 4. 运算律
- 5. 同态与同构
- 6. 等价关系与集合的分类

多选题 1分

设置

以下关于代数运算和运算律说法正确的是（）

A 整数集上的加、减、乘都是其上的代数运算。

B 一个集合上的代数运算也是其子集上的代数运算。

C 代数运算满足结合律后只要同一组元素的顺序不变，随便加括号其结果都一样。

D 代数运算满足结合律就满足交换律

提交

同态

- 定义

➢集合M上有代数运算$\circ$，集合$\bar{M}$上有代数运算$\bar{\circ}$，若存映射φ，$\varphi: M \to \bar{M}$，若满足：

$$\varphi: a \to \bar{a}, \quad b \to \bar{b}$$

$$\varphi: a \circ b \to \bar{a} \,\bar{\circ}\, \bar{b}$$

即，$\overline{a \circ b} = \bar{a} \,\bar{\circ}\, \bar{b}$ 或 $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \,\bar{\circ}\, \varphi(b)$

那么，φ 被成为代数系统M 到 $\bar{M}$ 的一个同态映射。若其为一满射，就称代数系统M 与 $\bar{M}$ 同态。记为：$M \sim \bar{M}$

同态

- 例子

➢1. $\circ$ 是数域F上全体n阶方阵的集合M上的矩阵乘法代数运算，$\bar{\circ}$ 是数域F=$\overline{M}$上的普通数乘代数运算。设：

$$\varphi:\quad M \to \overline{M} \qquad\qquad \varphi:\quad A \to |A|$$

问φ 是不是一个同态映射?

Yes 是映射，且有 $|AB| = |A| \cdot |B|$ $\qquad \varphi(AB) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$

它是不是个满射？ Yes

$$\forall a \in \overline{M} \qquad \exists A = \begin{bmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in M \qquad M \sim \overline{M}$$

同态

- 定理1

➢ 代数系统M和$\bar{M}$分别有代数运算$\circ$和$\bar{\circ}$，若$M \sim \bar{M}$ 则会有以下结论成立：

(1) $\circ$满足结合律, 那么$\bar{\circ}$也满足结合律。

(2) $\circ$满足交换律, 那么$\bar{\circ}$ 也满足交换律。

证明：(1)设 φ 为两代数系统之间的满同态映射, 则有

$$\varphi:\quad \begin{array}{l} (a\circ b)\circ c \to \left(\overline{a\circ b}\right)\bar{\circ}\,\bar{c} = \left(\bar{a}\,\bar{\circ}\,\bar{b}\right)\bar{\circ}\,\bar{c} \\ a\circ(b\circ c) \to \bar{a}\,\bar{\circ}\left(\overline{b\circ c}\right) = \bar{a}\,\bar{\circ}\left(\bar{b}\,\bar{\circ}\,\bar{c}\right) \end{array} \qquad a\to\bar{a}, b\to\bar{b}, c\to\bar{c}$$

$$(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c) \qquad \left(\bar{a}\,\bar{\circ}\,\bar{b}\right)\bar{\circ}\,\bar{c} = \bar{a}\,\bar{\circ}\left(\bar{b}\,\bar{\circ}\,\bar{c}\right)$$

同态

(2) $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \bar{M}$

设 φ: $a \to \bar{a}$, $b \to \bar{b}$

那么 $a \circ b \to \bar{a} \,\bar{\circ}\, \bar{b}$ $b \circ a \to \bar{b} \,\bar{\circ}\, \bar{a}$

$a \circ b = b \circ a \quad \to \quad \bar{a} \,\bar{\circ}\, \bar{b} = \bar{b} \,\bar{\circ}\, \bar{a}$

同态

- 定理2

➢ $\circ$和$\oplus$是代数系统M 上的两个代数运算，$\bar{\circ}$和$\bar{\oplus}$是代数系统$\overline{M}$上的两个代数运算；φ 是 M到 $\overline{M}$ 的一个满射，且对$\circ$与$\bar{\circ}$，$\oplus$与$\bar{\oplus}$ 同态；那么如果$\circ$关于$\oplus$满足左（右）分配律那么$\bar{\circ}$对$\bar{\oplus}$也将满足左（右）分配律。

证明：

$$\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c}\in\overline{M},\quad \exists a,b,c\in M$$

$$\varphi: a\to\bar{a}, b\to\bar{b}, c\to\bar{c}$$

$$\varphi(a\circ(b\oplus c))=\varphi(a)\bar{\circ}\varphi(b\oplus c)=\varphi(a)\bar{\circ}[\varphi(b)\bar{\oplus}\varphi(c)]=\bar{a}\bar{\circ}(\bar{b}\bar{\oplus}\bar{c})$$

$$\because\quad a\circ(b\oplus c)=(a\circ b)\oplus(a\circ c)$$

$$\therefore\quad \varphi(a\circ(b\oplus c))=\varphi[(a\circ b)\oplus(a\circ c)]=\varphi(a\circ b)\bar{\oplus}\varphi(a\circ c)$$

$$=(\bar{a}\bar{\circ}\bar{b})\bar{\oplus}(\bar{a}\bar{\circ}\bar{c})$$

同构

- 定义

➢ φ 是代数系统 M 到$\overline{M}$ 关于代数运算$\circ$ 与$\bar{\circ}$ 的同态满射，如果 φ 同时也是一个单射（即双射），那么它就是M 到 $\overline{M}$ 的一个同构映射。称 M 与$\overline{M}$同构，记为：

$$M \cong \bar{M}$$

- 1. 如果没有这种同构映射，则称 M 与$\overline{M}$不同构。
- 2.M到其自身的同态映射叫做 M的自同态映射，简称为M 的自同态。
- 3. M 到其自身的同构映射叫做M 的自同构映射，简称为M 的自同构。

同构

- 例子

➢1.$M=Z$，$\bar{M}$ 是偶数集，φ:　$n\rightarrow 2n$，是否是他们之间的同构映射?

注：要对一定的运算来讲

➢2.$M=Q+$是正有理数集，∘ 若是普通数乘运算“ × ”，那么下面法则是否是一个$M=Q+$上的自同构?

$$\varphi:\quad a\rightarrow \frac{1}{a}$$

➢若∘是普通数的加法 “+”，那么法则此时还是不是原集合上的自同构?

$$\varphi(2+3)=\varphi(5)=\frac{1}{5}$$

$$\varphi(2)+\varphi(3)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\neq\frac{1}{5}$$

$$\varphi(2+3)\neq\varphi(2)+\varphi(3)$$

同构

- 性质
- 1. $M \cong M$　　反身性
- 2. 若$M_1 \cong M_2$ ，那么$M_2 \cong M_1$　　对称性
- 3. 若 $M_1 \cong M_2$ 且 $M_2 \cong M_3$ ，那么 $M_1 \cong M_3$　　传递性

构造 一个 同构映射.

- 1. I 恒等映射
- 2. 若φ_1 是 $M_1 \cong M_2$ 的同构映射，那么 φ_1^{-1} 就是$M_2 \cong M_1$ 的同构映射。
- 3. 若φ_1 是 $M_1 \cong M_2$ 的同构映射，φ_2 是 $M_2 \cong M_3$ 的同构映射，那么$\varphi_3 = \varphi_2\varphi_1$ 是 $M_1 \cong M_3$ 的同构映射。

同构

- 意义

➢ $\circ$ 是$M=\{a,b,c,\cdots\}$ 的代数运算，$\bar{\circ}$是 $\bar{M}=\{\bar{a},\bar{b},\bar{c},\cdots\}$ 的代数运算，若$M \cong \bar{M}$，同构映射如下：

$$\varphi: \quad a \to \bar{a}, \quad b \to \bar{b}, \quad c \to \bar{c}, \cdots$$

$$a \circ b = c \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \,\bar{\circ}\, \bar{b} = \bar{c}$$

那么代数系统 M上所有的运算性质都可以自动的传递给所有与M同构的代数系统上。

同态与同构

- 练习
  - 1. (1) $x \to |x|$ ， (2) $x \to 2x$ ， (3) $x \to x^2$， (4) $x \to -x$ for R, " $\times$ "

自同态? 自同态满射? 自同构?

(1) $\varphi(ab) = |ab| = |a||b| = \varphi(a)\varphi(b)$

(2) $\varphi(ab) = 2ab \neq 2a \cdot 2b = \varphi(a)\varphi(b)$

(3) $\varphi(ab) = (ab)^2 = a^2 \cdot b^2 = \varphi(a)\varphi(b)$

(4) $\varphi(ab) = -ab \neq (-a) \cdot (-b) = \varphi(a)\varphi(b)$

同态与同构

- 练习

➢ 2.给出有理数集 Q 上一个不同与恒等映射的自同构。代数运算是普通加法“+”。

➢映射、保持运算

φ: $x \to -x$

$a \to -a, b \to -b$

$$\varphi(a \circ b) = -(a+b) = (-a)+(-b) = \varphi(a) \bar{\circ} \varphi(b)$$

➢双射

对 $\forall x \in Q$ $\exists -x \in Q$ 有 $\varphi(-x) = -(-x) = x$ 满

对 $\forall x, y \in Q, x \neq y$, 有 $\varphi(x) = -x \neq -y = \varphi(y)$ 单

自同构

- 练习

➢3. $\circ$ 和 $\bar{\circ}$ 分别是 M 和 $\overline{M}$ 上的代数运算, $M\sim\overline{M}$，若 $\bar{\circ}$ 在 $\overline{M}$ 上满足结合律，则 $\circ$ 是否在 M 上也满足结合律？

➢ 设 φ 是两代数系统之间的满同态映射, 已知对 $\forall\bar{a},\bar{b},\bar{c}\in\overline{M}$,

$$\exists a,b,c\in M,\qquad s.t.\quad \varphi(a)=\bar{a},\varphi(b)=\bar{b},\varphi(c)=\bar{c}$$

$$\because\left(\bar{a}\,\bar{\circ}\,\bar{b}\right)\bar{\circ}\,\bar{c}=\bar{a}\,\bar{\circ}\left(\bar{b}\,\bar{\circ}\,\bar{c}\right)$$

$$\therefore\varphi((a\circ b)\circ c)=\varphi(a\circ(b\circ c))$$

➢即便 φ 是一个同态满射, 还是没办法从 $\varphi((a\circ b)\circ c)=\varphi(a\circ(b\circ c))$ 得到 $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$

$$M=Z \qquad\qquad \overline{M}=\{1\}$$

$$\circ\rightarrow\text{"}-\text{"} \qquad\qquad \bar{\circ}\rightarrow\text{"}\times\text{"}$$

$$\varphi:\qquad x\rightarrow 1$$

同态与同构

- 练习

➢4. (1) 若 $M_1 \cong M_2$，那么 $M_2 \cong M_1$

(2) 若 $M_1 \cong M_2$，$M_2 \cong M_3$，那么 $M_1 \cong M_3$

(1) $\forall \bar{a}, \bar{b} \in M_2 \quad \varphi(a \circ b) = \varphi(a) \bar{\circ} \varphi(b) = \bar{a} \bar{\circ} \bar{b}$

$$\varphi^{-1}(\bar{a}) = a, \varphi^{-1}(\bar{b}) = b$$

$$\varphi^{-1}(\bar{a} \bar{\circ} \bar{b}) = \varphi^{-1}(\varphi(a \circ b)) = a \circ b = \varphi^{-1}(\bar{a}) \circ \varphi^{-1}(\bar{b})$$

(2) $\forall a, b \in M_1,\ \varphi_1(a \circ b) = \varphi_1(a) \bar{\circ} \varphi_1(b),\ \varphi_2(\varphi_1(a) \bar{\circ} \varphi_1(b)) = \varphi_2(\varphi_1(a)) \bar{\bar{\circ}} \varphi_2(\varphi_1(b))$

$\varphi_3 = \varphi_2 \varphi_1$

$$\varphi_2(\varphi_1(a \circ b)) = \varphi_2(\varphi_1(a)) \bar{\bar{\circ}} \varphi_2(\varphi_1(b))$$

$$\varphi_3(a \circ b) = \varphi_3(a) \bar{\bar{\circ}} \varphi_3(b)$$

作业

- P23. 1 ——ppt上“练习1”，要求：证明过程书写清楚。