上节内容

3.8　卷积定理

3.9　周期信号的傅里叶变换

3.10 抽样信号的傅里叶变换

3.11 抽样定理

3.8 卷积定理

（1）时域卷积定理：两信号的时域卷积等效于在频域中频谱相乘。

若 $F_1(\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)],\qquad F_2(\omega)=\mathcal{F}[f_2(t)],$

则 $$\boxed{\mathcal{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)F_2(\omega)}$$

（2）频域卷积定理：两信号的频域卷积等效于在时域中函数相乘（再除以2π）。

若 $F_1(\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)],\qquad F_2(\omega)=\mathcal{F}[f_2(t)],$

则 $$\boxed{\mathcal{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)}$$

其中：$$F_1(\omega)*F_2(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(u)F_2(\omega-u)du$$

3.8 卷积定理

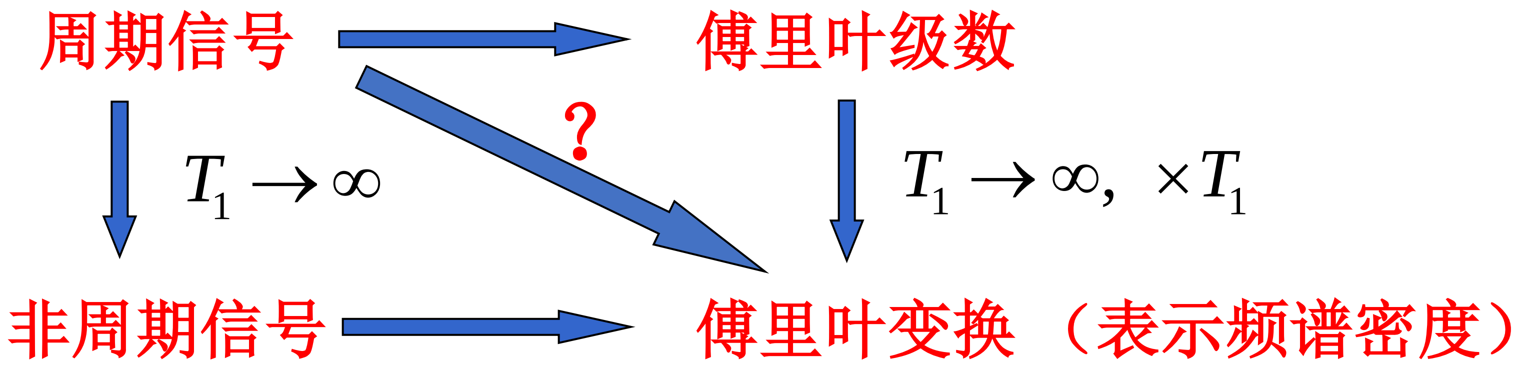
如一时间信号作用于系统，其输出仍是此时间信号，只是幅度与相位被改变，称此时间信号为系统的<u>特征信号</u>，表征被改变的幅度和相位的函数，称为系统的<u>特征值</u>或<u>系统函数</u>。

所以信号 $e^{j\omega_0 t}$，$\cos(\omega_0 t)$和 $\sin(\omega_0 t)$是系统的<u>特征信号</u>，函数 $H(\omega)$（系统单位冲激响应**$h(t)$**的傅里叶变换）是系统的<u>特征值</u>或<u>系统函数</u>，也称为系统的<u>频率响应</u>。

$$\cos(\omega_0 t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = \cos(\omega_0 t) * h(t)$$

$$y(t) = h(t) * \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} h(t) * (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$= \frac{1}{2}\left|H(\omega_0)\right|\left(e^{j[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]} + e^{-j[\omega_0 t+\varphi(\omega_0)]}\right) = \left|H(\omega_0)\right|\cos[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]$$



3.9.1 正弦、余弦信号的傅里叶变换

$$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathcal{F}[\sin\omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

3.9.2 一般周期信号的傅里叶变换

思路1：

$$f_{T_1}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}\leftrightarrow F_{T_1}(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)$$

傅里叶级数和单脉冲信号傅里叶变换的关系

$$F_n=\frac{1}{T_1}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$$

思路2：

$$f_{T_1}(t)=\underline{\delta_{T_1}(t)*f_0(t)}\leftrightarrow F_{T_1}(\omega)=\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underline{F_0(n\omega_1)\delta(\omega-n\omega_1)}$$

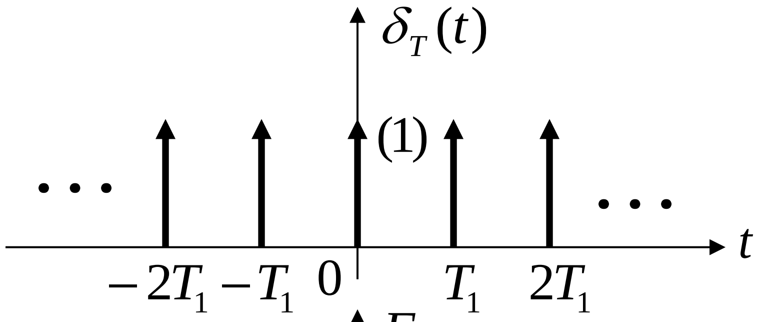
单位冲激序列与单脉冲信号的卷积　　**时域卷积，频域相乘**

结论：

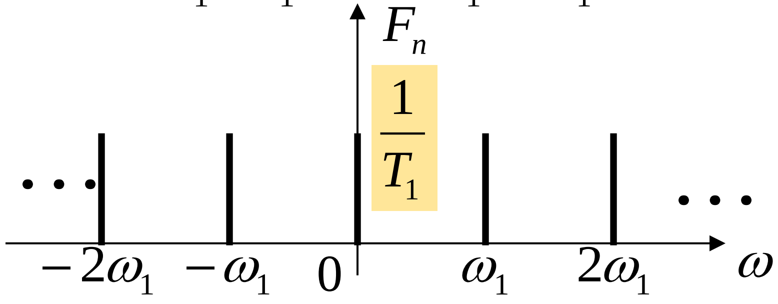
周期信号$f_{T_1}(t)$的傅里叶变换是由一系列冲激函数所组成，这些冲激位于信号的谐频处$(0,\pm\omega_1,\pm2\omega_1,\cdots\cdots)$，每个冲激的强度等于 $f_{T_1}(t)$ 的傅里叶级数相应系数 F_n 的 2π 倍。

3.9 周期信号的傅里叶变换

求周期单位冲激序列的傅里叶变换。



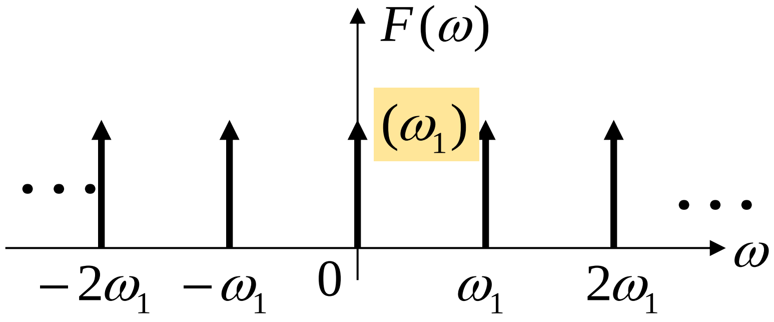
$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)$$



$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\delta(t)e^{-jn\omega_1 t}dt=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\delta(t)dt=\frac{1}{T_1}$$

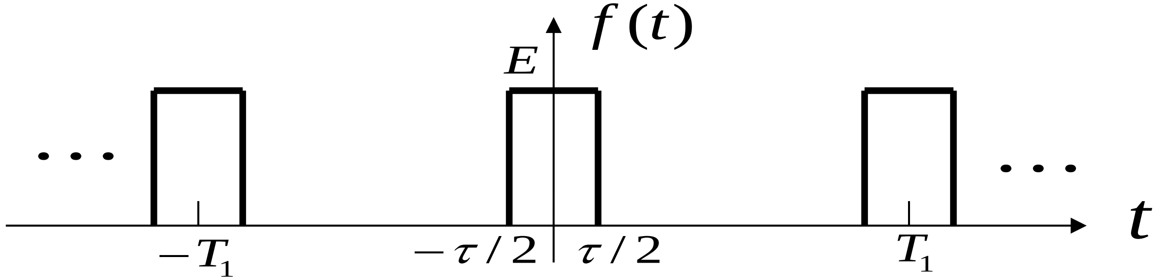
$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}=\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\omega_1 t}$$

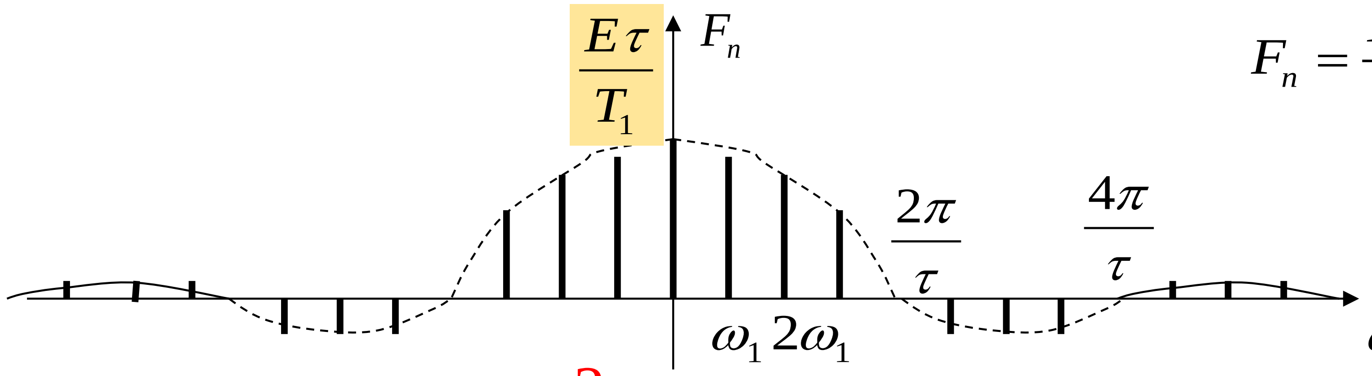
$\times 2\pi$



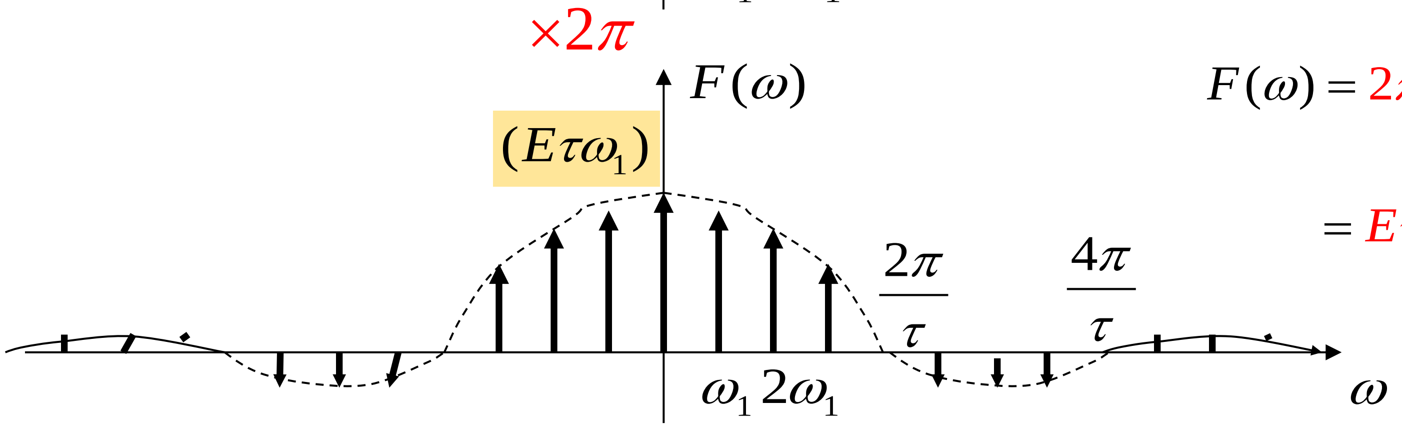
$$F(\omega)=\frac{2\pi}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1)=\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1)$$

求周期矩形脉冲信号的傅里叶级数及傅里叶变换。已知周期矩形脉冲信号$f(t)$的幅度为E，脉宽为τ，周期为T_1, 角频率为$\omega_1=2\pi/T_1$。





$$F_n=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$



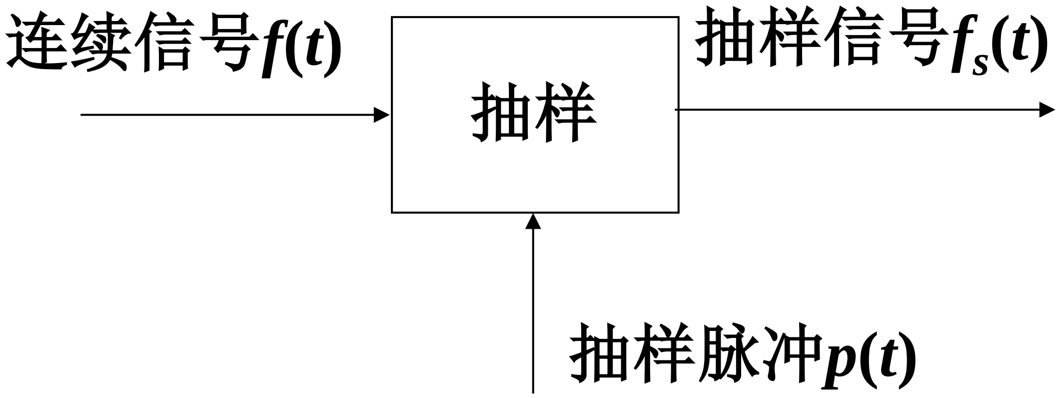
$$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)$$

$$=E\tau\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\omega_1)$$

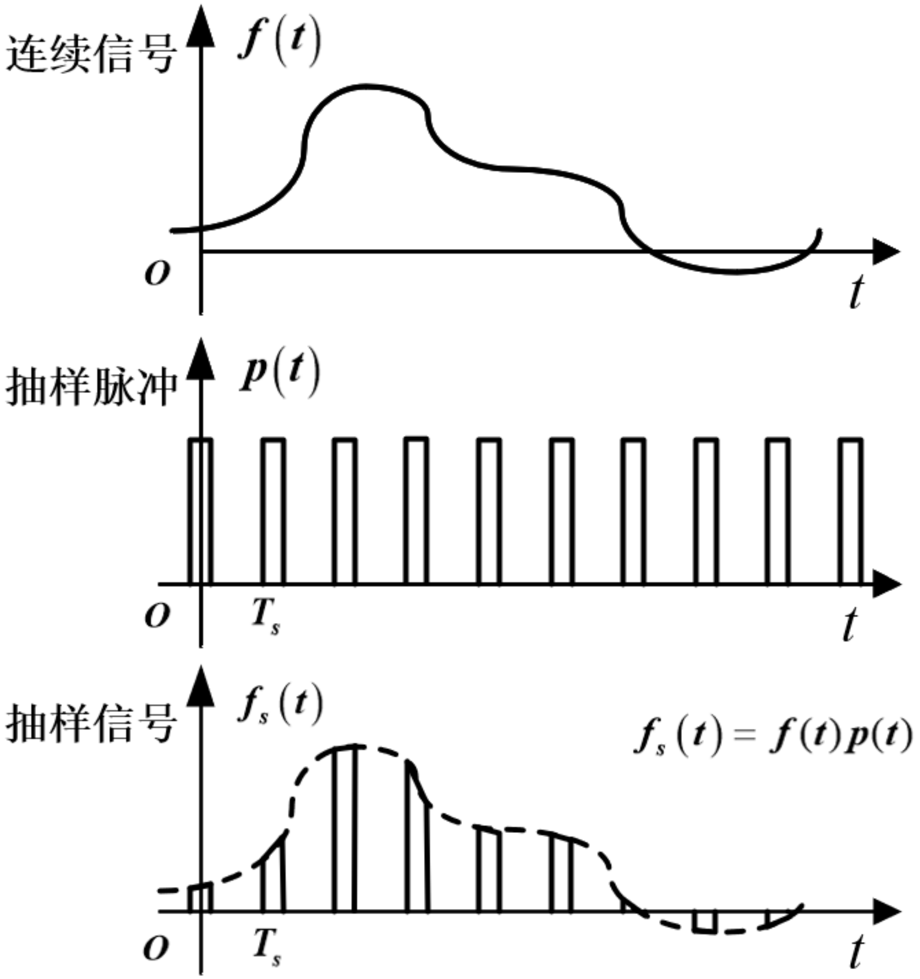
3. 10. 1　信号的抽样

抽样--利用抽样脉冲序列从连续信号中“抽样”一系列的离散样值。

这种离散信号通常称为“**抽样信号**”。

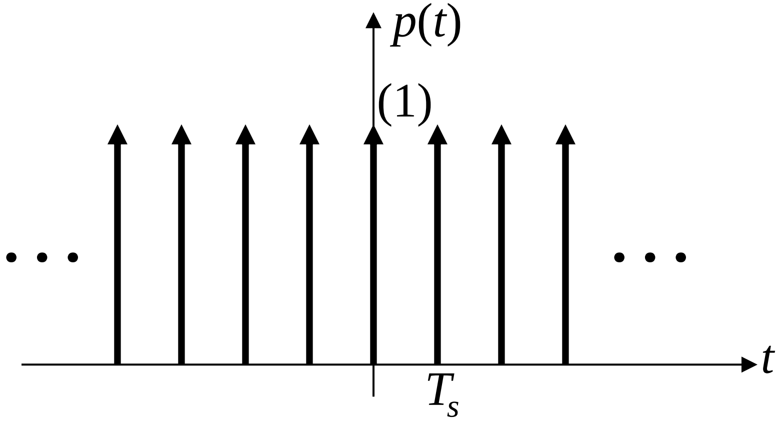


T_s—抽样周期



3.10.2 抽样信号的傅里叶变换

若抽样脉冲 $p(t)$是冲激序列，此时称为“冲激抽样”或“理想抽样”。



$$p(t)=\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

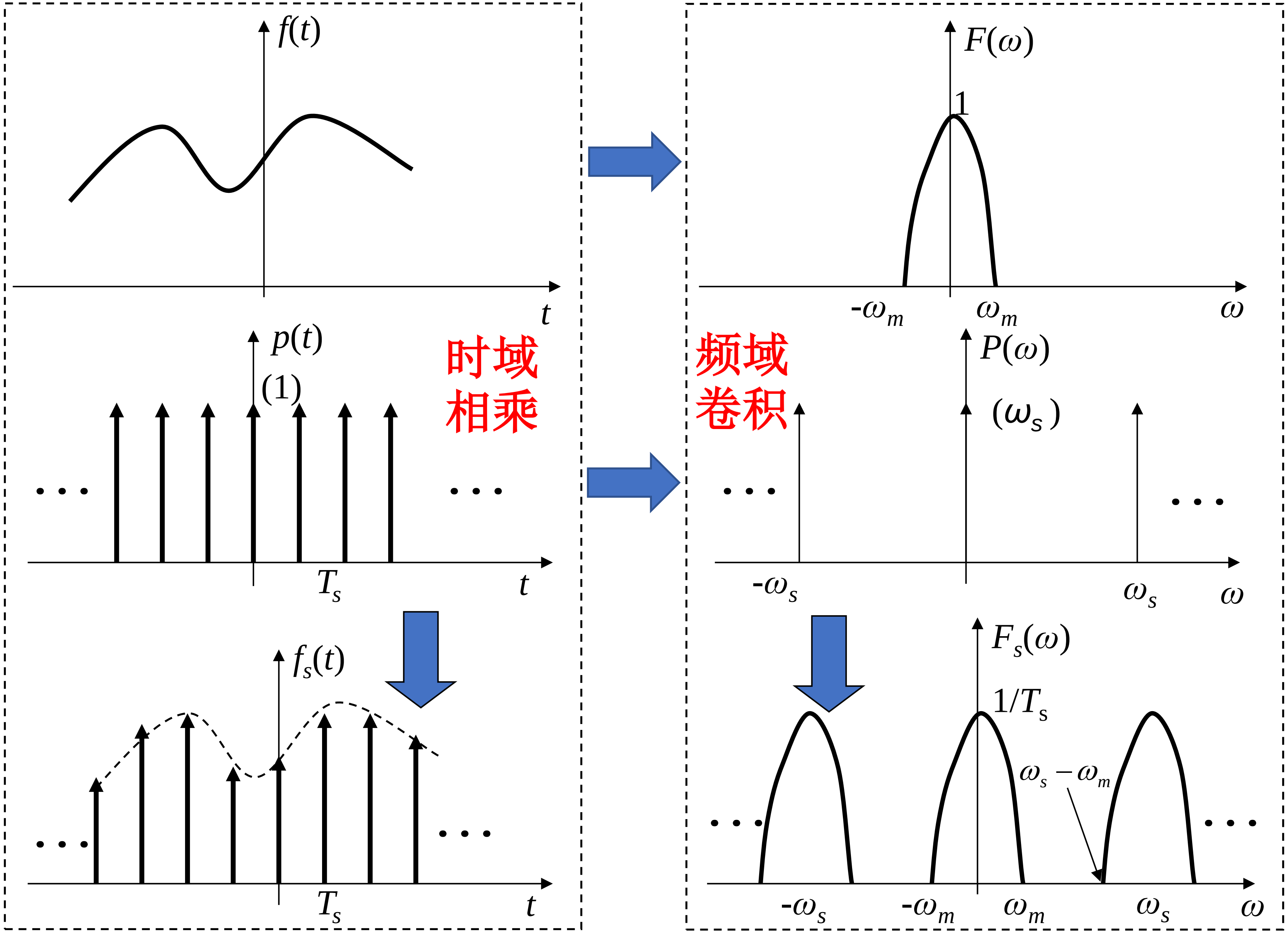
$$F_s(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\cdot F(\omega-n\omega_s)$$

$$=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$$

在频域以ω_s为周期延拓

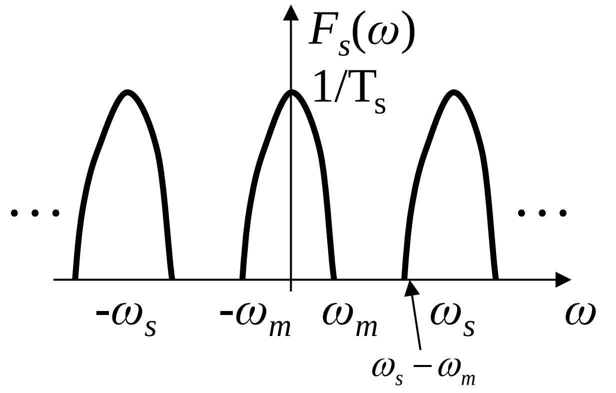
其中：$P_n=\dfrac{1}{T_s}\displaystyle\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}\delta(t)e^{-jn\omega_s t}dt=\dfrac{1}{T_s}$

3.10 抽样信号的傅里叶变换



3.11 抽样定理

时域抽样定理：一个频谱受限的信号$f(t)$，如果频谱只占据$-\omega_m$~ω_m的范围，在抽样间隔不大于$\frac{1}{2f_m}$（其中$\omega_m=2\pi f_m$）或者抽样频率大于等于$2f_m$时，信号$f(t)$可以用等间隔的抽样值唯一的表示。



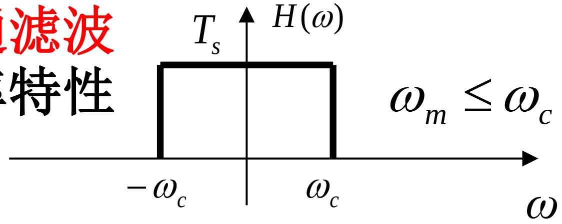
奈奎斯特抽样频率：最低允许的抽样频率。

$$\boxed{f_{s\min}=2f_m}$$

奈奎斯特抽样间隔：最大允许的抽样间隔。

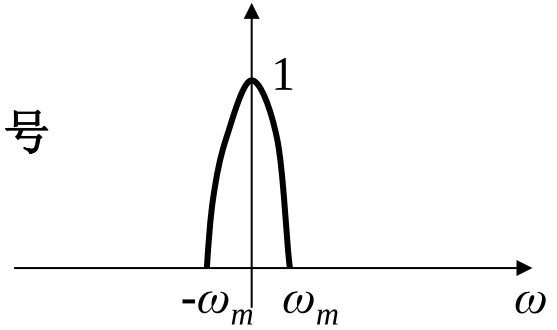
$$\boxed{T_{s\max}=\frac{1}{f_{s\min}}=\frac{1}{2f_m}}$$

理想低通滤波器的频率特性



$\omega_m\le\omega_c\le\omega_s-\omega_m$

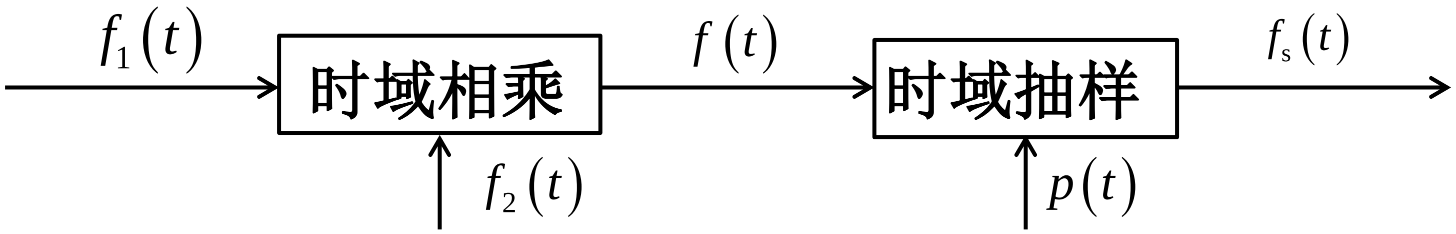
恢复原信号



单选题 1分

设置

如图所示，$f_1(t)=Sa(1000\pi t)$，$f_2(t)=Sa(2000\pi t)$， $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ 。



为从 $f_s(t)$无失真恢复 $f(t)$，最大抽样间隔 $T_{\max}$ 为（）。

A 1000 s

B 3000π s

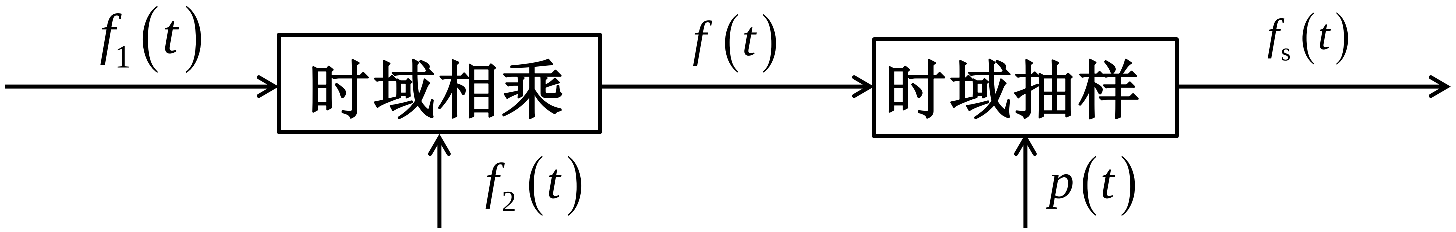
C π/3000 s

D 1/3000 s

提交

例3-17：如图所示， $f_1(t)=Sa(1000\pi t)$，$f_2(t)=Sa(2000\pi t)$，

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\text{。}f(t)=f_1(t)\,f_2(t),\ f_s(t)=f(t)\,p(t)\text{。}$$



（1）为从 $f_s(t)$ 无失真恢复 $f(t)$，求最大抽样间隔 $T_{\max}$ 。

（2）当 $T=T_{\max}$ 时，画出 $f_s(t)$ 的幅度谱 $|F_s(\omega)|$ 。

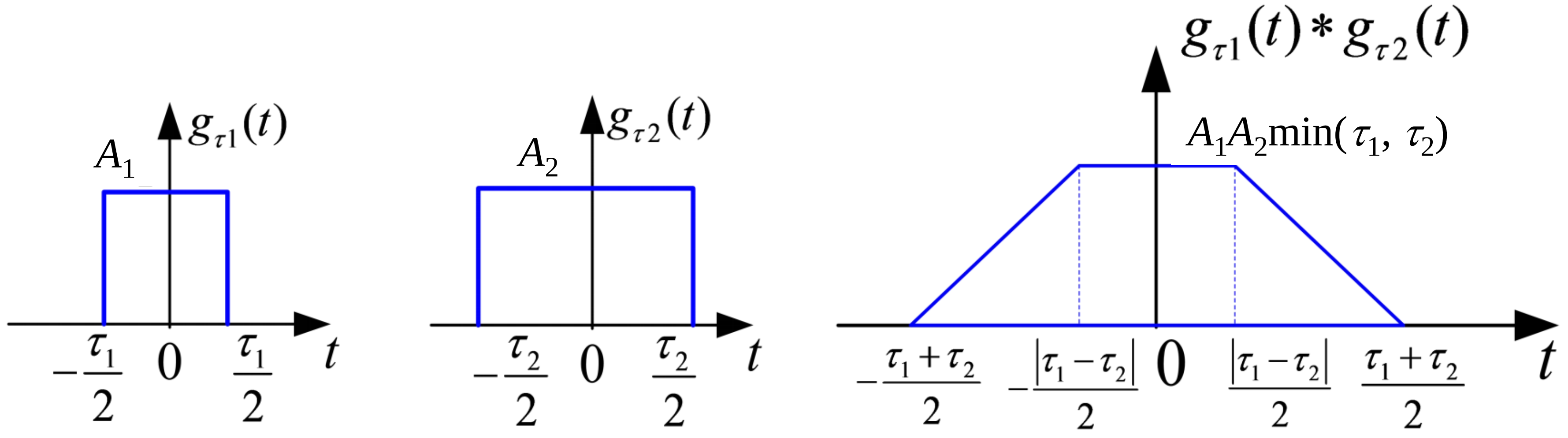
解： （1）由于

$$f_1(t)=Sa(1000\pi t)\leftrightarrow 10^{-3}\left[u(\omega+1000\pi)-u(\omega-1000\pi)\right]=F_1(\omega)$$

$$f_2(t)=Sa(2000\pi t)\leftrightarrow \frac{1}{2}10^{-3}\left[u(\omega+2000\pi)-u(\omega-2000\pi)\right]=F_2(\omega)$$

回顾：矩形脉冲卷积产生梯形脉冲

两个矩形脉冲$g_{\tau 1}(t)$和$g_{\tau 2}(t)$，脉冲宽度分别为τ_1和τ_2，幅度分别为A_1和A_2，求卷积$g_{\tau 1}(t)*g_{\tau 2}(t)$。



- 两个不等宽的矩形脉冲卷积的结果为梯形函数，梯形函数的高度为两个矩形高度和较窄矩形宽度三者的乘积，其上底为两个矩形宽度之差的绝对值，下底为两个矩形宽度之和。

则 $F(\omega)=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_1(\omega)$

$$F(\omega)=\frac{10^{-6}}{4\pi}[u(\omega+1000\pi)-u(\omega-1000\pi)]*[u(\omega+2000\pi)-u(\omega-2000\pi)]$$

$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}\{u(\omega)*[\delta(\omega+1000\pi)-\delta(\omega-1000\pi)]*u(\omega)*[\delta(\omega+2000\pi)-\delta(\omega-2000\pi)]\}$$

$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}[u(\omega)*u(\omega)]*[\delta(\omega+1000\pi)-\delta(\omega-1000\pi)]*[\delta(\omega+2000\pi)-\delta(\omega-2000\pi)]$$

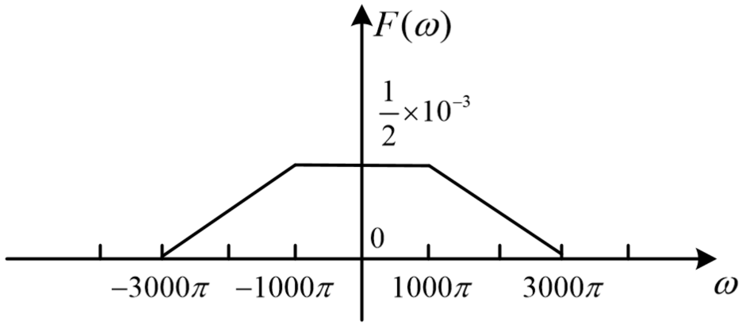
$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}\{\omega u(\omega)*[\delta(\omega+3000\pi)-\delta(\omega-1000\pi)-\delta(\omega+1000\pi)+\delta(\omega-3000\pi)]\}$$

$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}[(\omega+3000\pi)u(\omega+3000\pi)-(\omega-1000\pi)u(\omega-1000\pi)-(\omega+1000\pi)u(\omega+1000\pi)+(\omega-3000\pi)u(\omega-3000\pi)]$$

$$=\frac{10^{-6}}{4\pi}\{(\omega+3000\pi)[u(\omega+3000\pi)-u(\omega+1000\pi)]+2000\pi[u(\omega+1000\pi)-u(\omega-1000\pi)]$$
$$+(-\omega+3000\pi)[u(\omega-1000\pi)-u(\omega-3000\pi)]\}$$

从图可见 $\omega_m=3000\pi$

$$T_{\max}=\frac{\pi}{\omega_m}=\frac{1}{3000}\text{ s}$$



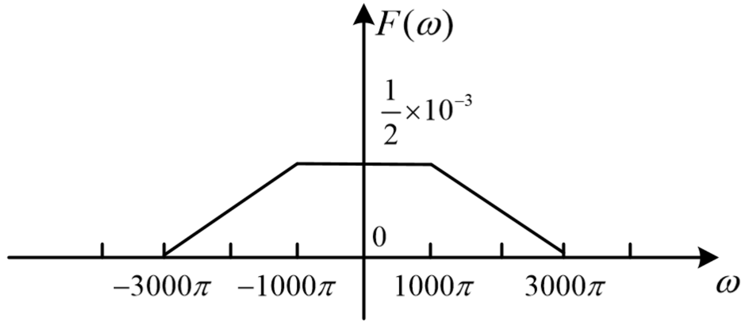
(a)

(2) 对于冲激抽样，抽样信号的频谱

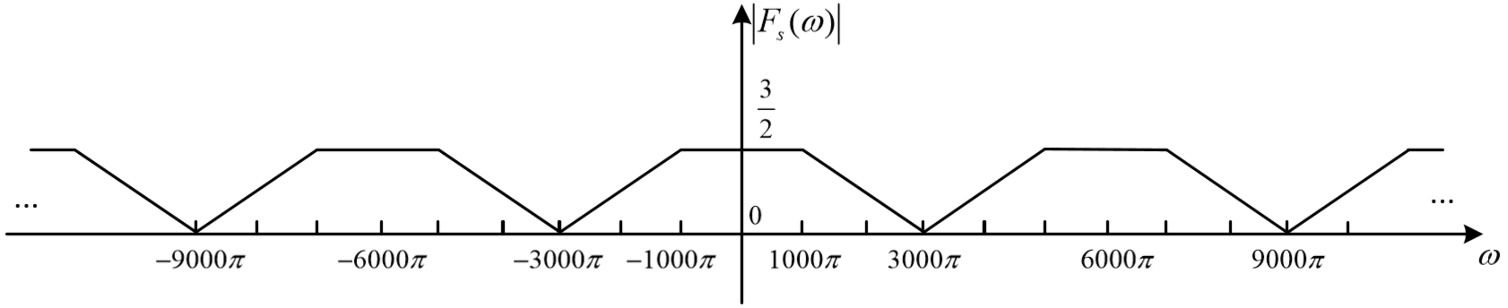
$$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$$

当 $T_s=T_{\max}$ 时

$$\omega_s=\frac{2\pi}{T_{\max}}=2\omega_m=6000\pi$$



(a)



(b)

本次课内容

4.1 引言

4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

本次课目标

1. 理解拉普拉斯变换的定义及其与傅里叶变换的关系；

2. 熟悉拉普拉斯变换的基本性质。

4.1 引言

- 拉普拉斯变换的发展史：
  - 19世纪末，英国工程师赫维赛德（**O. Heaviside, 1850-1925**）发明算子法解决电工程计算中的一些基本问题，但数学上不够严谨。
  - 后人在法国数学家拉普拉斯（**P. S. Laplace, 1749-1825**）著作中找到可靠数学依据，重新给予严密的数学定义，为之取名为拉普拉斯变换（**LT**），简称拉氏变换。

- 拉普拉斯变换在以下领域是强有力的工具：
  - 在电路理论研究中；
  - 在连续线性时不变系统的分析中；
  - 在求解线性时不变系统的常系数微分方程时。

4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

4.2.1 从傅氏变换到拉氏变换

傅里叶变换（FT）

- **优点：** 物理概念清楚
- **缺点：**

(1) 只能处理符合狄里赫利条件的信号（傅里叶变换的充分不必要条件）：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|\mathrm{d}t<\infty$$

而有些信号不满足绝对可积条件，因而其信号的分析受限。

(2) 在求时域响应时运用傅里叶逆变换对频率进行的无穷积分求解困难。

$$f(t)=F^{-1}\left[F(\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

从傅里叶变换到拉普拉斯变换

乘一衰减因子

有一些信号不满足狄里赫利条件，FT不存在：

- $u(t)$
- 增长信号 $e^{\alpha t}$ $(\alpha > 0)$
- 周期信号 $\cos\omega_1 t$

- 若乘一衰减因子 $e^{-\sigma t}$，σ 为任意实数，则 $f(t)e^{-\sigma t}$ 收敛，满足狄里赫利条件。
- $u(t)e^{-\sigma t}$
- $e^{\alpha t}e^{-\sigma t}$ $(\sigma > \alpha)$
- $e^{-\sigma t}\cos\omega_1 t$

4.2.2 拉普拉斯变换（LT）

信号 $f(t)$，乘以衰减因子 $\mathrm{e}^{-\sigma t}$(σ为任意实数)后容易满足绝对可积条件，依傅里叶变换定义：

$$F_1(\omega)=F\left[f(t)\cdot \mathrm{e}^{-\sigma t}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\right]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot \mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t=F(\sigma+\mathrm{j}\omega)$$

令$\sigma+\mathrm{j}\omega=s$，具有频率的量纲，称为复频率。

则 $$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,dt$$

$$f(t)\xleftrightarrow{LT}F(s)$$

4.2.3 拉氏逆变换（LT^{-1}）

$$F(\sigma+j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)e^{-\sigma t}\right]e^{-j\omega t}dt$$

$f(t)e^{-\sigma t}$ 是$F(\sigma+j\omega)$的傅里叶逆变换

$$f(t)e^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

两边同乘以 $e^{\sigma t}$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega$$

其中：$s=\sigma+j\omega$； 若σ取常数，则$ds=jd\omega$

积分限：对ω：$\int_{-\infty}^{\infty}\Rightarrow$ 对s：$\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}$

所以

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}\,ds$$

一般不用定义式求逆变换

4.2.4 拉氏变换对

双边拉氏变换

$$\begin{cases} F(s)=L\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt & \text{正变换} \\ f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds & \text{逆变换} \end{cases}$$

记作：$f(t)\leftrightarrow F(s)$，$f(t)$称为原函数，$F(s)$称为象函数。

考虑到实际信号都是因果信号：

单边拉氏变换

所以 $$F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

在算子法中由于未能表示出初始条件的作用，只好在运算过程中做出一些规定，限制某些因子相消，如：$\frac{1}{p}px=\int_{-\infty}^{t}(\frac{d}{dt}x)\cdot d\tau=x(t)-x(-\infty)\neq x$

拉氏变换已考虑了初始条件，

$$F(s)=L\left[f(t)\right]=\int_{0_-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

自动包含0_条件

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=SF(s)-f(0_-)$$

初值，若无跳变则为0

证明：$\int_{0_-}^{\infty}f^{'}(t)e^{-st}dt=f(t)e^{-st}\Big|_{0}^{\infty}-\int_{0}^{\infty}f(t)(e^{-st})^{'}dt$　　分部积分法

$$=f(\infty)e^{-s\infty}-f(0_-)+s\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$$

$$=SF(s)-f(0_-)$$

已知信号$\boldsymbol{x(t) = e^{-\alpha t}u(t)}$，其拉普拉斯变换为（ ）

A $-\dfrac{1}{s+\alpha}$

B $\dfrac{\alpha}{s}$

C $e^{-\alpha s}$

D $\dfrac{1}{s+\alpha}$

提交

例4-1：$x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$，求其拉普拉斯变换$X(s)$。

解： 由定义

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha t}u(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(\alpha+s)t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(\alpha+\sigma)t}e^{-j\omega t}dt$$

当**Re{α+s}=α+σ>0，即σ > -α，以上积分可积**

$$X(s)=\frac{1}{-(\alpha+s)}e^{-(\alpha+s)t}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{(\alpha+s)},\quad \sigma>-\alpha$$

所以

$$e^{-\alpha t}u(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{s+\alpha},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-\alpha$$

拉普拉斯变换法(LT)

- **优点：**
  1. 将微积分方程求解问题转化为代数方程求解。
  2. 进行变换时，初始条件被自动计入，无需计算从0_-到0_+状态的跳变。

- **缺点：**
  物理概念不如傅氏变换那样清楚。

拉普拉斯变换可以看成是傅里叶变换的推广。它们之间在表达式和基本性质上有许多类似。

本章的学习方法：注意与傅里叶变换的对比，便于理解与记忆。

4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

FT：

$$\begin{cases} F(\omega)=F\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt & \text{正变换} \\ f(t)=F^{-1}\left[F(\omega)\right]=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega & \text{逆变换} \end{cases}$$

LT：

$$\begin{cases} F(s)=L\left[f(t)\right]=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt & \text{正变换} \\ f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds & \text{逆变换} \end{cases}$$

FT：实频率 ω 是振荡频率

LT：复频率 $s=\sigma+j\omega$　　ω 是振荡频率，σ控制衰减的速度

傅里叶变换 vs. 拉普拉斯变换

傅里叶变换	拉普拉斯变换
自变量ω是实数，有明确的物理意义--频率。	自变量$s=\sigma+j\omega$是复数，其物理意义不明确，通常称其为复频率。
信号的傅里叶变换反映了不同频率分量的振幅大小与起始相位的值，即信号的频谱。	信号的拉氏变换没有明确的物理意义。
系统单位冲激响应的傅里叶变换，称作系统的频率响应，它表示不同频率的正余弦信号作用于系统时，系统输出的幅度与相位随输入频率改变而改变的特性。	系统单位冲激响应的拉氏变换，称为系统的系统函数。它虽然较抽象，但是在表征系统特性及系统分析时起重要的作用。
主要应用于信号与系统的频率分析，如调制、滤波、抽样等的频谱分析。	主要应用于微分方程的求解、系统函数及其零极点分析等。

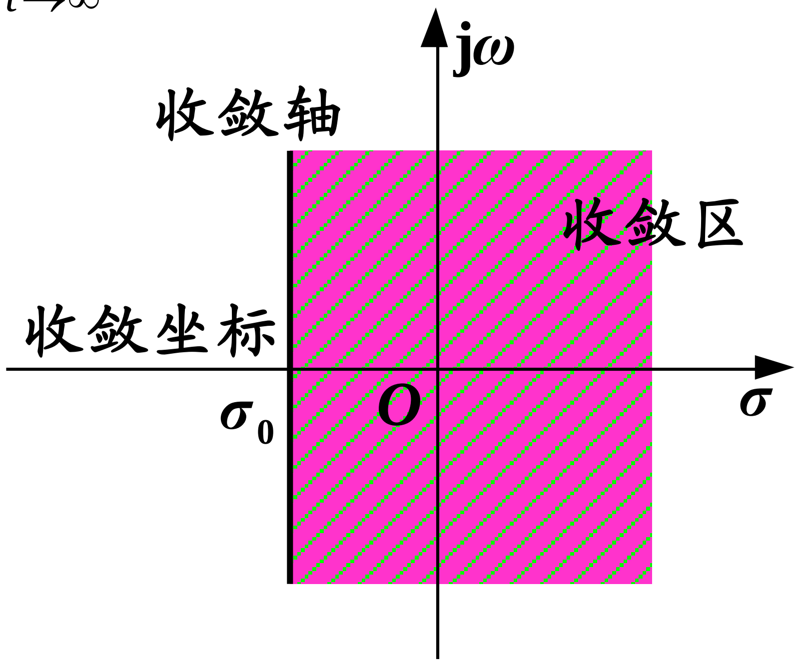
4.2.5 拉普拉斯变换的收敛域

拉普拉斯变换的存在伴随着条件，就是它的收敛域。

使信号$f(t)e^{-\sigma t}$满足绝对可积的σ的值域，是$F(s)$的收敛域，记为ROC (region of convergence)。

数学描述：$$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma t}=0 \qquad (\sigma>\sigma_0)$$

图形表示：



说明：

1. 满足 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}=0(\sigma>\sigma_0)$的信号称为指数阶信号；

2. 有界的非周期信号的拉氏变换一定存在，收敛域是整个s平面。

3. $\lim\limits_{t\to\infty} t^n\mathrm{e}^{-\sigma t}=0 \quad (\sigma>0)$

4. $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{-\sigma t}=0 \quad (\sigma>\alpha)$

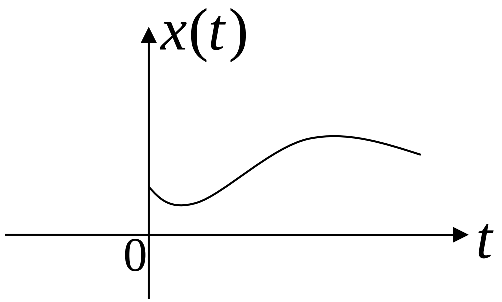
5. e^{t^2} 等信号比指数函数增长快，找不到收敛坐标，为非指数阶信号，无法进行拉氏变换。

6. 一般求函数的单边拉氏变换可以不加注其收敛范围。

4.2.6 单边拉氏变换

在系统分析时，我们常用的是**单边拉氏变换**：

$$X(s)=\int_{0^-}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$$



因为实际系统是因果的，信号总是在某个时刻才开始作用于系统，我们可以把这个时刻看作t=0；

以上定义式中的积分的下限取0_-，考虑变换对冲激信号也是有效的；单边拉氏变换的收敛域是收敛轴的右半平面：$\text{Re}\{s\}>\sigma_0$，以后一般不具体标示变换的收敛域。

本章及以后各章，若没有特别说明，均使用单边拉氏变换。

4.2.7 常用函数的拉氏变换

（1）阶跃函数

$$L[u(t)]=\int_0^{\infty}1\cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{-s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s}$$

（2）指数函数

$$L\left[\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)\right]=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{\alpha+s}\quad(\sigma>-\alpha)$$

（3）单位冲激信号

$$L\left[\delta(t)\right]=\int_0^{\infty}\delta(t)\cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=1$$ 全s域平面收敛

$$L\left[\delta(t-t_0)\right]=\int_0^{\infty}\delta(t-t_0)\cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-st_0}$$

（4）t^n

$$L\left[t^n\right]=\int_0^{\infty} t^n \cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{t^n}{-s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{\infty}+\frac{n}{s}\int_0^{\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{n}{s}\int_0^{\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

所以 $L\left[t^n\right]=\dfrac{n}{s}L\left[t^{n-1}\right]$

$n=1 \quad L[t]=\dfrac{1}{s}L\left[t^0 u(t)\right]=\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{s^2}$

$n=2 \quad L\left[t^2\right]=\dfrac{2}{s}L[t]=\dfrac{2}{s}\cdot\dfrac{1}{s^2}=\dfrac{2}{s^3}$

$n=3 \quad L\left[t^3\right]=\dfrac{3}{s}L\left[t^2\right]=\dfrac{3}{s}\cdot\dfrac{2}{s^3}=\dfrac{6}{s^4} \qquad \cdots\cdots$

所以 $\boxed{L\left[t^n\right]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}}$

常用信号的拉氏变换

时域信号 (t>0)	S域信号
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

主要内容：

线性性质 时域微分

时域积分 延时（时域移位）

*s*域平移（频域移位） 尺度变换

初值定理 终值定理

卷积定理 *s*域微分

*s*域积分

注意：此处所指均为单边拉氏变换的性质，只适用于因果信号，即满足 $f(t)=f(t)u(t)$的信号$f(t)$。

4.3.1 线性

如有： $f_i(t) \xleftrightarrow{LT} F_i(s)$

则 $f(t)=\sum_{i=1}^{N} a_i f_i(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)=\sum_{i=1}^{N} a_i F_i(s)$

例4-2：利用线性性质求 $x(t)=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$ 的拉氏变换。

解： $e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \dfrac{1}{s+1}$ $\quad$ $e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \dfrac{1}{s+2}$

所以 $x(t) \xleftrightarrow{LT} \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$

例4-3：利用拉氏变换的性质，求$\cos(\omega_0 t)u(t)$的拉氏变换。

解：

$$\cos(\omega_0 t)u(t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)u(t)$$

$$e^{j\omega_0 t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s - j\omega_0}$$

$$e^{-j\omega_0 t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s + j\omega_0}$$

$$\therefore \quad \cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

4.3.2 延时性（时移性）

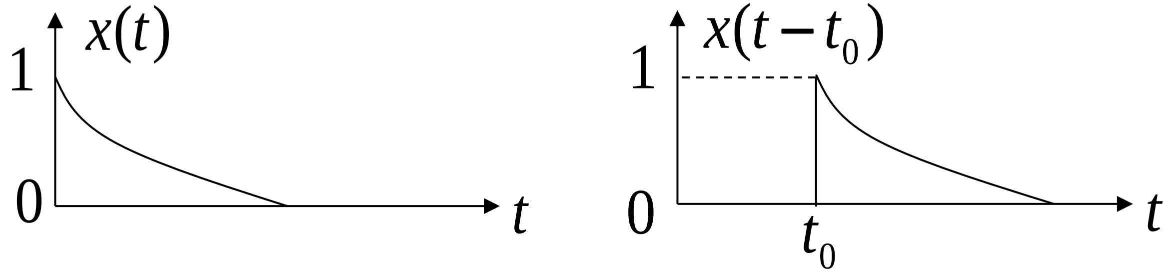
设 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

$$f(t-t_0)u(t-t_0) \xleftrightarrow{LT} F(s)e^{-st_0}$$

注意：时移后的信号若为非因果信号不可用此性质！可结合课后习题**4-2**理解。

注意：在前述单边拉氏变换的定义下，

$e^{-\alpha t}u(t)$ 的延时是 $e^{-\alpha(t-t_0)}u(t-t_0)$



信号$f(t)=u(t)-u(t-1)$的拉氏变换$F(s)$为（ ）

A $F(s)=\dfrac{1+e^{-s}}{s}$

B $F(s)=\dfrac{1-e^{-s}}{s}$

C $F(s)=\dfrac{1-s}{s}$

D $F(s)=\dfrac{1-s}{e^{-s}}$

提交

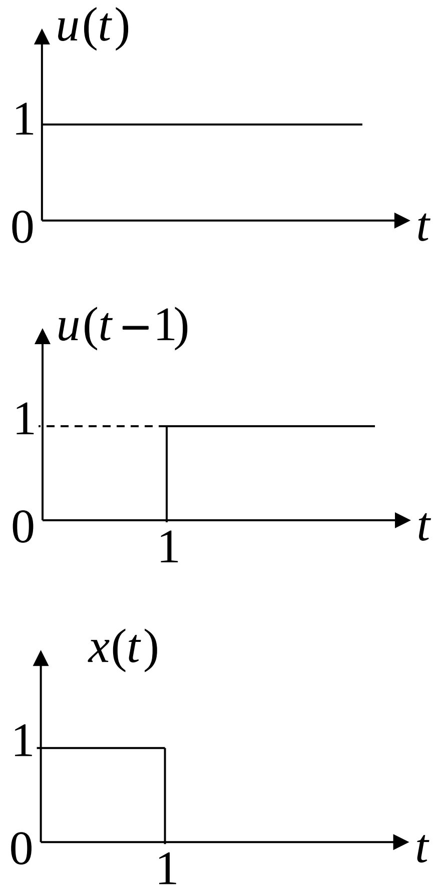
例4-4：求 $x(t)=u(t)-u(t-1)$ 的拉氏变换。

解：

$$u(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{s}$$

$$u(t-1)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{s}e^{-s}$$

所以 $x(t)=u(t)-u(t-1)\xleftrightarrow{LT}\dfrac{1-e^{-s}}{s}$



4.3.3 s域平移性（频移性）

设 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

S域平移性是 $f(t)e^{s_0 t} \xleftrightarrow{LT} F(s-s_0)$

例4-5：利用s域平移性求$e^{-\alpha t}u(t)$和$te^{-\alpha t}u(t)$ 的拉氏变换。

$$u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s} \qquad tu(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s^2}$$

$$e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+\alpha} \qquad te^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

4.3.4 时域展缩性

如果有 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

$$f(at) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

此处常数a应>0，否则信号发生反褶，对于单边拉氏变换，此性质就无意义。

例4-6：用时域展缩性求 $e^{-\alpha t}u(t)$ 的拉氏变换。

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+1}$$

于是 $e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\frac{s}{\alpha}+1} = \frac{1}{\alpha}\frac{\alpha}{s+\alpha} = \frac{1}{s+\alpha}$

如果有 $f(t)u(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

既有延时又有时域展缩时，

$$f(at-b)u(at-b) \xleftrightarrow{LT} ? \quad (a>0, b>0)$$

先延时再做时域展缩，

$$f(t-b)u(t-b) \xleftrightarrow{LT} F(s)e^{-bs}$$

$$f(at-b)u(at-b) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)e^{-\frac{bs}{a}}$$

也可先做时域展缩再延时。

例4-7：利用拉氏变换的性质，求$\delta(3t-2)$的拉氏变换。

<u>解法一：先延时再时域压缩</u>

依据拉氏变换的时移性$f(t-t_0)u(t-t_0)\xleftrightarrow{LT}F(s)e^{-st_0}$及$\delta(t)\xleftrightarrow{LT}1$可知：

$\delta(t-2)\xleftrightarrow{LT}e^{-2s}$

由拉氏变换的时域展缩性$f(at)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$可知：$\delta(3t-2)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}s}$

<u>解法二：先时域压缩再延时</u>

由拉氏变换的时域展缩性$f(at)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$可知：$\delta(3t)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{3}$

依据拉氏变换的时移性$f(t-t_0)u(t-t_0)\xleftrightarrow{LT}F(s)e^{-st_0}$ 有：

$$\delta(3t-2)=\delta[3(t-\frac{2}{3})]\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}s}$$

4.3.5 时域微分性

设

$$f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$$

$$f'(t) \xleftrightarrow{LT} sF(s) - f(0_-)$$

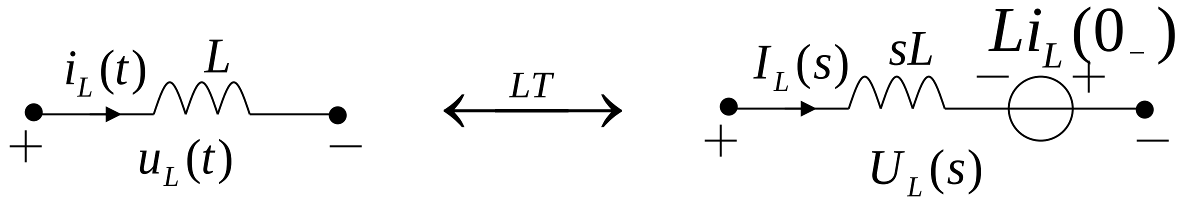
$$f^{(n)}(t) \xleftrightarrow{LT} s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} f^{(i)}(0_-)$$

零状态条件下，时域微分一次，频域乘一个s

例4-8：求电感两端电压 $u_L(t)$ 的拉氏变换。

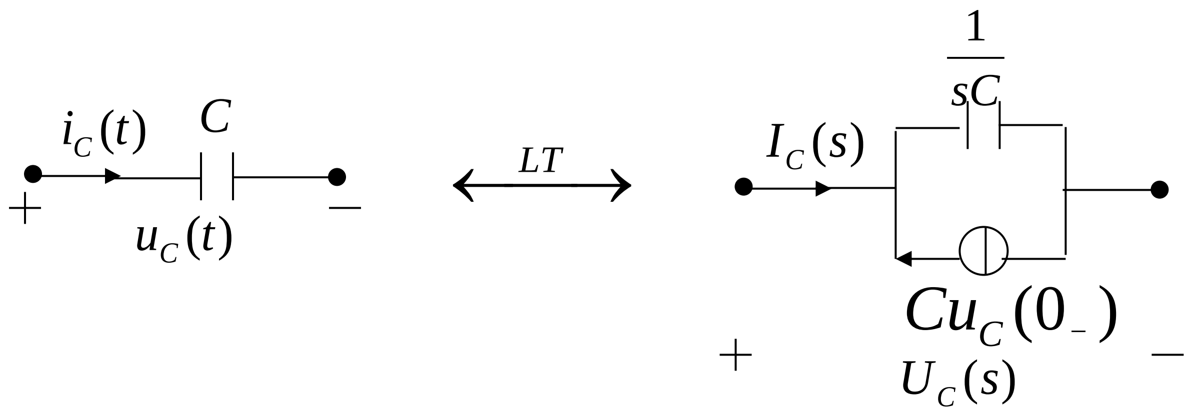
解：

$$\boxed{u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \xleftrightarrow{LT} U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-)}$$



同样，对于电容中的电流有

$$\boxed{i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \xleftrightarrow{LT} I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0_-)}$$



4.3.6 时域积分性

$$f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$$

则 $$y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{0_-} f(\tau)d\tau+\int_{0_-}^{t} f(\tau)d\tau=y(0_-)+\int_{0_-}^{t} f(\tau)d\tau$$

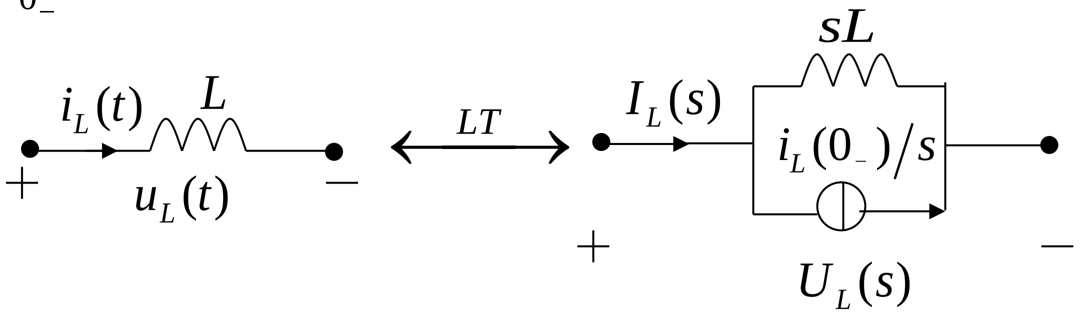
$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \xleftrightarrow{LT} \frac{y(0_-)}{s}+\frac{F(s)}{s}$$

借助分部积分法，详见教材195页。

例4-9：求电感中的电流 $i_L(t)$ 的拉氏变换。

解：$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(\tau)d\tau=i_L(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{t} u_L(\tau)d\tau$$

于是 $$\boxed{i_L(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{i_L(0_-)}{s}+\frac{U_L(s)}{sL}}$$

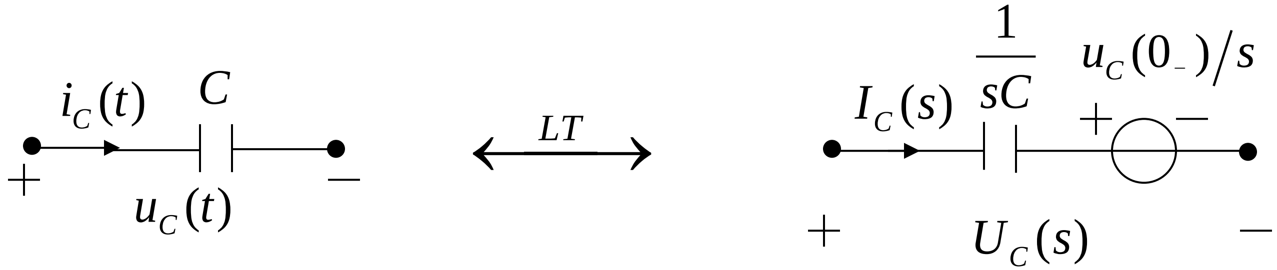


同样，电容两端的电压

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau=u_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{t} i_C(\tau)d\tau$$

其拉氏变换为

$$\boxed{u_C(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{u_C(0_-)}{s}+\frac{I_C(s)}{sC}}$$



拉氏变换的时域微积分性质，在作电路的瞬态分析时，应用较为便利。

4.3.7 s域微分性

设　$f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

s域微分性　$-tf(t) \xleftrightarrow{LT} \dfrac{dF(s)}{ds}$　　$tf(t) \xleftrightarrow{LT} -\dfrac{dF(s)}{ds}$

例4-10：已知 $e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \dfrac{1}{s+\alpha}$，利用s域微分性求 $te^{-\alpha t}u(t)$ 的拉氏变换。

解：

$$\frac{d}{ds}[\frac{1}{s+\alpha}] = \frac{-1}{(s+\alpha)^2}$$

于是

$$te^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

4. 3. 8 s域积分性

$$\frac{f(t)}{t} \xleftrightarrow{LT} \int_s^{\infty} F(\lambda)d\lambda$$

例4-11： 已知 $(1-e^{-\alpha t})u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}-\frac{1}{s+\alpha}$，求 $\frac{1-e^{-\alpha t}}{t}u(t)$ 的拉氏变换。

解：

$$\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda+\alpha}\right)d\lambda = \ln\lambda\Big|_s^{\infty} - \ln(\lambda+\alpha)\Big|_s^{\infty}$$

$$= -\ln s + \ln(s+\alpha)$$

$$= -\ln\frac{s}{s+\alpha}$$

于是

$$\frac{1-e^{-\alpha t}}{t}u(t) \xleftrightarrow{LT} -\ln\frac{s}{s+\alpha}$$

4.3.9 卷积定理(时域、频域)

设 $f_1(t) \xleftrightarrow{LT} F_1(s),\ f_2(t) \xleftrightarrow{LT} F_2(s)$

则 $f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{LT} F_1(s) \cdot F_2(s)$

$$f_1(t) f_2(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$$

利用拉氏变换的定义式和延时性，即可证明此定理。

例4-12：已知系统的单位冲激响应和输入如下，求零状态响应$y(t)$。

$$h(t) = e^{-\alpha t} u(t)\ ,\quad x(t) = u(t)$$

解：求拉氏变换 $h(t) = e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \dfrac{1}{s+\alpha}$，$x(t) = u(t) \xleftrightarrow{LT} \dfrac{1}{s}$

于是 $y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{LT} \dfrac{1}{s(s+\alpha)} = \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+\alpha}\right)$

$$y(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) u(t)$$

4.3.10 初值与终值定理

设信号$f(t)$是因果的，其与其导数的拉氏变换存在，则

1、初值定理：

$$\lim_{t\to 0_+} f(t) = f(0_+) = \lim_{s\to\infty} SF(s)$$

高频分量（ω→∞），表示t=0时接入信号的突变。

若$f(t)$包含冲激函数$k\delta(t)$,

$$F(s) = k + F_1(s)，F_1(s)\text{为真分式}$$

$$\lim_{t\to 0_+} f(t) = \lim_{s\to\infty}[sF(s) - ks] = \lim_{s\to\infty} sF_1(s)$$

2、终值定理：若$f(\infty)$存在，于是有

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s\to 0} SF(s)$$

直流分量（ω→0），得到电路稳态的终值。

当电路等系统较为复杂时，无需做拉氏逆变换，即可直接求出函数的初值和终值。

例4-13：已知 $u(t) \xleftrightarrow{LT} \dfrac{1}{s}$，利用拉氏变换性质分别求 $u(t)$和 $\cos(\omega_0 t)u(t)$的初值和终值。

解：$u(t)|_{t=0_+} = u(t)|_{t=\infty} = s \cdot \dfrac{1}{s} = 1$

$$\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \qquad \cos(\omega_0 t)|_{t=0_+} = \lim_{s\to\infty} s\frac{s}{s^2+\omega_0^2} = 1$$

$\cos(\omega_0 t)u(t)$为等幅震荡函数（$sF(s)$分母的根在虚轴上共轭对称），其终值不存在。

例4-14：利用拉氏变换的性质，求以下信号的拉氏变换。

$$(1)\ te^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t) \qquad (2)\ \frac{\sin t}{t}u(t)$$

解： （1）应用频移性和s域微分性

$$e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$$

$$-te^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{d}{ds}\left[\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}\right]$$

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}\right]=\frac{\omega_0^2-(s+\alpha)^2}{[(s+\alpha)^2+\omega_0^2]^2}$$

$$\therefore \quad te^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{(s+\alpha)^2-\omega_0^2}{[(s+\alpha)^2+\omega_0^2]^2}$$

（2）应用**s域积分性**

$$\because \quad \sin t u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s^2+1}$$

$$\frac{\sin t}{t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \int_s^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2+1} = \arctan s \,\Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

$$\therefore \quad \frac{\sin t}{t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

总结

性质	时域	复频域
线性	$\sum_{i=1}^{N} a_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{N} a_i F_i(s)$
延时性	$f(t-t_0)u(t-t_0)$	$e^{-st_0}F(s)$
频移性	$f(t)e^{-at}$	$F(s+a)$
时域展缩性	$f(at)\quad(a>0)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
时域卷积定理	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(s)\cdot F_2(s)$
频域卷积定理	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$F_1(s)*F_2(s)/(2\pi j)$

注意：上述性质只适用于**因果信号，即满足$f(t)=f(t)u(t)$的信号$f(t)$**。

总结

性质	时域	复频域
时域微分性	$\frac{df(t)}{dt}$	$SF(s)-f(0^-)$
时域积分性	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{-1}(0^-)}{s}$
s域微分性	$-tf(t)$	$\frac{dF(s)}{ds}$
s域积分性	$f(t)/t$	$\int_{s}^{\infty} F(\lambda)d\lambda$
初值定理	$\lim_{t\to 0^+} f(t)=f(0^+)=\lim_{s\to\infty} SF(s)$	
终值定理	$\lim_{t\to\infty} f(t)=f(\infty)=\lim_{s\to 0} SF(s)$	

注意：上述性质只适用于因果信号，即满足**$f(t)= f(t)u(t)$**的信号**$f(t)$**。

作业

基础题（需提交）：4-1，4-2，4-3（1）（2）（3）。

加强题（选做，不提交）：4-3（4）（5）。