

本次课内容

- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

本次课目标

1. 理解拉普拉斯变换的定义及其与傅里叶变换的关系；
2. 熟悉拉普拉斯变换的基本性质。

4.1 引言

4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

4.4 拉普拉斯逆变换

4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型

4.6 系统函数（网络函数）

4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性

4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性

4.9 二阶谐振系统的S平面分析

4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布

4.11 线性系统的稳定性

4.12 双边拉普拉斯变换

4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

- 拉普拉斯变换的发展史：
 - 19世纪末，英国工程师赫维赛德（O. Heaviside, 1850-1925）发明算子法解决电工程计算中的一些基本问题，但数学上不够严谨。
 - 后人在法国数学家拉普拉斯（P. S. Laplace, 1749-1825）著作中找到可靠数学依据，重新给予严密的数学定义，为之取名为拉普拉斯变换（LT），简称拉氏变换。
- 拉普拉斯变换在以下领域是强有力的工具：
 - 在电路理论研究中；
 - 在连续线性时不变系统的分析中；
 - 在求解线性时不变系统的常系数微分方程时。

4.1 引言

4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

4.4 拉普拉斯逆变换

4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型

4.6 系统函数（网络函数）

4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性

4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性

4.9 二阶谐振系统的S平面分析

4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布

4.11 线性系统的稳定性

4.12 双边拉普拉斯变换

4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

4.2.1 从傅氏变换到拉氏变换

傅里叶变换 (FT)

- 优点：物理概念清楚

- 缺点：

(1) 只能处理符合狄里赫利条件的信号（傅里叶变换的充分不必要条件）：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

而有些信号不满足绝对可积条件，因而其信号的分析受限。

(2) 在求时域响应时运用傅里叶逆变换对频率进行的无穷积分求解困难。

$$f(t) = F^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

从傅里叶变换到拉普拉斯变换

乘一衰减因子

有一些信号不满足狄里赫利条件，FT不存在：

- $u(t)$

- 增长信号 $e^{\alpha t}$ ($\alpha > 0$)

- 周期信号 $\cos \omega_1 t$

• 若乘一衰减因子 $e^{-\sigma t}$ ， σ 为任意实数，则 $f(t)e^{-\sigma t}$ 收敛，满足狄里赫利条件。

- $u(t)e^{-\sigma t}$

- $e^{\alpha t}e^{-\sigma t}$ ($\sigma > \alpha$)

- $e^{-\sigma t} \cos \omega_1 t$

4.2.2 拉普拉斯变换 (LT)

信号 $f(t)$, 乘以衰减因子 $e^{-\sigma t}$ (σ 为任意实数) 后容易满足绝对可积条件, 依傅里叶变换定义:

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= F[f(t) \cdot e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t) e^{-\sigma t}] \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = F(\sigma + j\omega) \end{aligned}$$

令 $\sigma + j\omega = s$, 具有频率的量纲, 称为复频率。

则

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$$

4.2.3 拉氏逆变换 (LT^{-1})

$$F(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

$f(t) e^{-\sigma t}$ 是 $F(\sigma + j\omega)$ 的傅里叶逆变换

$$f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

两边同乘以 $e^{\sigma t}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

其中: $s = \sigma + j\omega$; 若 σ 取常数, 则 $ds = j d\omega$

积分限: 对 $\omega: \int_{-\infty}^{\infty} \Rightarrow$ 对 $s: \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty}$

所以

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

一般不用定义式求逆变换

4.2.4 拉氏变换对

$$\begin{cases} F(s) = L[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt & \text{正变换} \\ f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds & \text{逆变换} \end{cases}$$

双边拉氏变换

记作: $f(t) \leftrightarrow F(s)$, $f(t)$ 称为原函数, $F(s)$ 称为象函数。

考虑到实际信号都是因果信号:

所以 $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

单边拉氏变换

在算子法中由于未能表示出初始条件的作用，只好在运算过程中做出一些规定，

限制某些因子相消，如： $\frac{1}{p} px = \int_{-\infty}^t (\frac{d}{dt} x) \cdot d\tau = x(t) - x(-\infty) \neq x$

拉氏变换已考虑了初始条件，

$$F(s) = L[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

自动包含0₋条件

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0_-)$$

初值，若无跳变则为0

证明：

$$\int_{0_-}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = f(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) (e^{-st})' dt \quad \text{分部积分法}$$

$$\begin{aligned} &= f(\infty) e^{-s\infty} - f(0_-) + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= sF(s) - f(0_-) \end{aligned}$$



已知信号 $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ ，其拉普拉斯变换为（ ）

A $-\frac{1}{s + \alpha}$

B $\frac{\alpha}{s}$

C $e^{-\alpha s}$

D $\frac{1}{s + \alpha}$

提交

例4-1: $x(t)=e^{-\alpha t}u(t)$, 求其拉普拉斯变换 $X(s)$ 。

解: 由定义

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} u(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+\sigma)t} e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

当 $\text{Re}\{\alpha+s\}=\alpha+\sigma>0$, 即 $\sigma>-\alpha$, 以上积分可积

$$X(s) = \frac{1}{-(\alpha+s)} e^{-(\alpha+s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{(\alpha+s)}, \quad \sigma > -\alpha$$

所以

$$e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+\alpha}, \quad \text{Re}\{s\} > -\alpha$$

拉普拉斯变换法(LT)

- **优点：**
 1. 将微积分方程求解问题转化为代数方程求解。
 2. 进行变换时，初始条件被自动计入，无需计算从 0_- 到 0_+ 状态的跳变。
- **缺点：**

物理概念不如傅氏变换那样清楚。

拉普拉斯变换可以看成是傅里叶变换的推广。它们之间在表达式和基本性质上有许多类似。

本章的学习方法：**注意与傅里叶变换的对比**，便于理解与记忆。

FT:

$$\begin{cases} F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt & \text{正变换} \\ f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega & \text{逆变换} \end{cases}$$

LT:

$$\begin{cases} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt & \text{正变换} \\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds & \text{逆变换} \end{cases}$$

FT: 实频率 ω 是振荡频率

LT: 复频率 $s = \sigma + j\omega$ ω 是振荡频率, σ 控制衰减的速度

傅里叶变换 vs. 拉普拉斯变换

傅里叶变换	拉普拉斯变换
自变量 ω 是 实数 ，有明确的物理意义—— 频率 。	自变量 $s=\sigma+j\omega$ 是 复数 ，其物理意义不明确，通常称其为 复频率 。
信号的傅里叶变换反映了不同频率分量的振幅大小与起始相位的值，即信号的 频谱 。	信号的拉氏变换 没有明确的物理意义 。
系统单位冲激响应的傅里叶变换，称作系统的 频率响应 ，它表示不同频率的正余弦信号作用于系统时，系统输出的幅度与相位随输入频率改变而改变的特性。	系统单位冲激响应的拉氏变换，称为系统的 系统函数 。它虽然较抽象，但是在表征系统特性及系统分析时起重要的作用。
主要应用于信号与系统的 频率分析 ，如调制、滤波、抽样等的频谱分析。	主要应用于 微分方程的求解、系统函数及其零极点分析 等。

4.2.5 拉普拉斯变换的收敛域

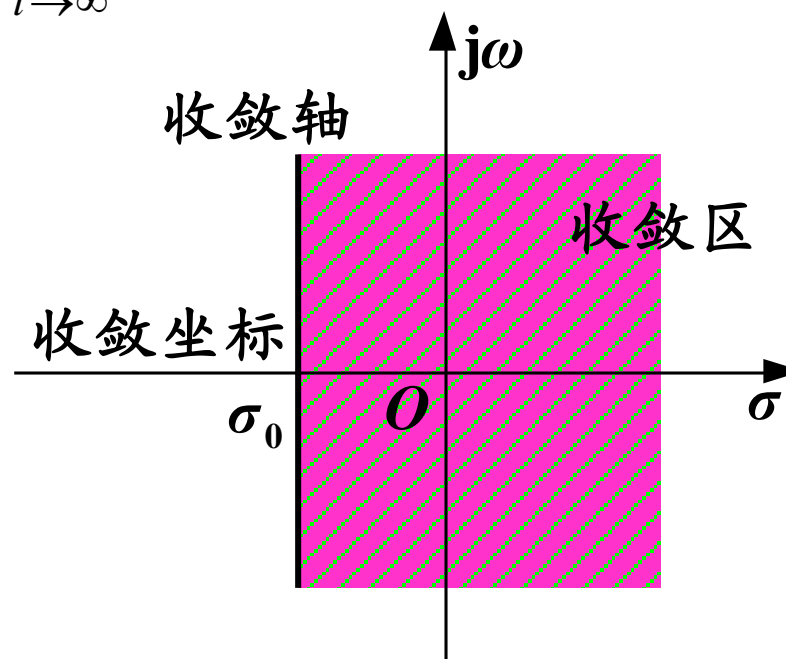
拉普拉斯变换的存在伴随着条件，就是它的收敛域。

使信号 $f(t)e^{-\sigma t}$ 满足绝对可积的 σ 的值域，是 $F(s)$ 的收敛域，记为**ROC** (region of convergence)。

数学描述：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > \sigma_0)$$

图形表示：



说明:

1. 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$ ($\sigma > \sigma_0$) 的信号称为指数阶信号;

2. 有界的非周期信号的拉氏变换一定存在, 收敛域是整个s平面。

$$3. \lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > 0)$$

$$4. \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > \alpha)$$

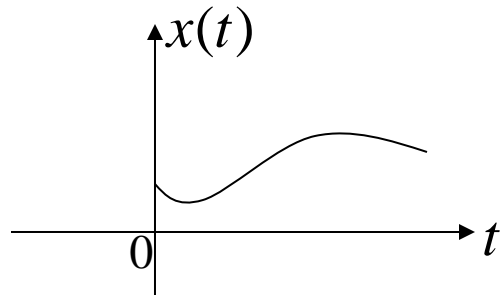
5. e^{t^2} 等信号比指数函数增长快, 找不到收敛坐标, 为非指数阶信号, 无法进行拉氏变换。

6. 一般求函数的单边拉氏变换可以不加注其收敛范围。

4.2.6 单边拉氏变换

在系统分析时，我们常用的是**单边拉氏变换**：

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$



因为实际系统是**因果**的，信号总是在某个时刻才开始作用于系统，我们可以把这个时刻看作 $t=0$ ；

以上定义式中的**积分的下限取 0_-** ，考虑变换对冲激信号也是有效的；
单边拉氏变换的**收敛域是收敛轴的右半平面**： $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$ ，以后一般不具体标示变换的收敛域。

本章及以后各章，若没有特别说明，均使用**单边拉氏变换**。

4.2.7 常用函数的拉氏变换

(1) 阶跃函数

$$L[u(t)] = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

(2) 指数函数

$$L[e^{-\alpha t} u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha+s} \quad (\sigma > -\alpha)$$

(3) 单位冲激信号

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt = 1 \quad \text{全}s\text{域平面收敛}$$

$$L[\delta(t-t_0)] = \int_0^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-st} dt = e^{-st_0}$$

(4) t^n

$$L[t^n] = \int_0^{\infty} t^n \cdot e^{-st} dt = \left. \frac{t^n}{-s} e^{-st} \right|_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt$$

$$\text{所以 } L[t^n] = \frac{n}{s} L[t^{n-1}]$$

$$n=1 \quad L[t] = \frac{1}{s} L[t^0 u(t)] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$n=2 \quad L[t^2] = \frac{2}{s} L[t] = \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}$$

$$n=3 \quad L[t^3] = \frac{3}{s} L[t^2] = \frac{3}{s} \cdot \frac{2}{s^3} = \frac{6}{s^4} \quad \dots$$

$$\text{所以 } L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

常用信号的拉氏变换

时域信号 ($t \geq 0$)	S域信号
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性
- 4.9 二阶谐振系统的S平面分析
- 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布
- 4.11 线性系统的稳定性
- 4.12 双边拉普拉斯变换
- 4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

主要内容:

线性性质

时域积分

s 域平移（频域移位）

初值定理

卷积定理

s 域积分

时域微分

延时（时域移位）

尺度变换

终值定理

s 域微分

注意：此处所指均为单边拉氏变换的性质，只适用于因果信号，即满足 $f(t)=f(t)u(t)$ 的信号 $f(t)$ 。

4.3.1 线性

如有: $f_i(t) \xleftrightarrow{LT} F_i(s)$

$$\text{则 } f(t) = \sum_{i=1}^N a_i f_i(t) \xleftrightarrow{LT} F(s) = \sum_{i=1}^N a_i F_i(s)$$

例4-2: 利用线性性质求 $x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$ 的拉氏变换。

$$\text{解: } e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+1} \quad e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+2}$$

$$\text{所以 } x(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

例4-3：利用拉氏变换的性质，求 $\cos(\omega_0 t)u(t)$ 的拉氏变换。

解：

$$\cos(\omega_0 t)u(t) = \frac{1}{2} \left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} \right) u(t)$$

$$e^{j\omega_0 t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s - j\omega_0}$$

$$e^{-j\omega_0 t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s + j\omega_0}$$

$$\therefore \cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

4.3.2 延时性（时移性）

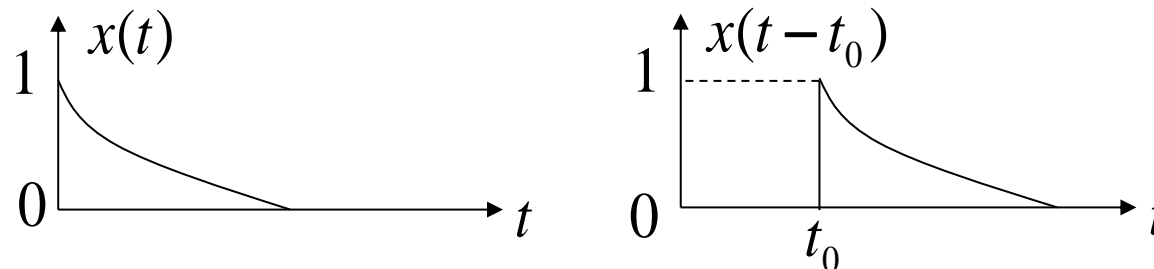
$$\text{设 } f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$$

$$f(t-t_0)u(t-t_0) \xleftrightarrow{LT} F(s)e^{-st_0}$$

注意：时移后的信号若为非因果信号不可用此性质！可结合课后习题4-2理解。

注意：在前述单边拉氏变换的定义下，

$$e^{-\alpha t}u(t) \text{ 的延时是 } e^{-\alpha(t-t_0)}u(t-t_0)$$



信号 $f(t) = u(t) - u(t - 1)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 为 ()

☐ A $F(s) = \frac{1 + e^{-s}}{s}$

☒ B $F(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}$

☐ C $F(s) = \frac{1 - s}{s}$

☐ D $F(s) = \frac{1 - s}{e^{-s}}$

提交

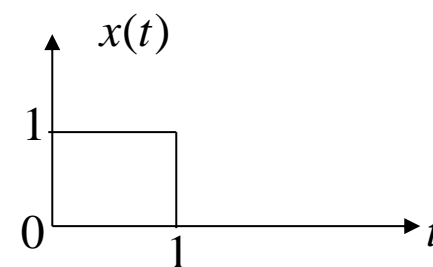
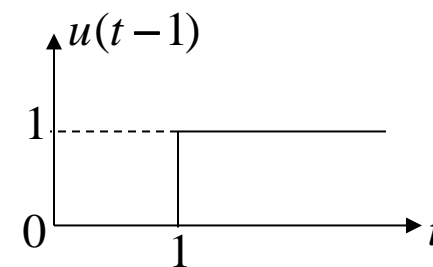
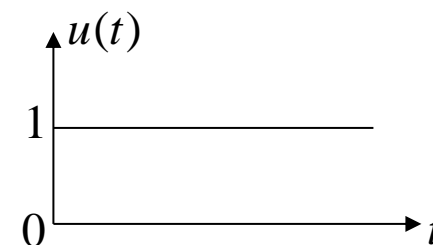
例4-4：求 $x(t) = u(t) - u(t-1)$ 的拉氏变换。

解：

$$u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}$$

$$u(t-1) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s} e^{-s}$$

$$\text{所以 } x(t) = u(t) - u(t-1) \xleftrightarrow{LT} \frac{1 - e^{-s}}{s}$$



4.3.3 s域平移性（频移性）

设 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

S域平移性是 $f(t)e^{s_0 t} \xleftrightarrow{LT} F(s - s_0)$

例4-5：利用s域平移性求 $e^{-\alpha t}u(t)$ 和 $te^{-\alpha t}u(t)$ 的拉氏变换。

$$u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}$$

$$tu(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s^2}$$

$$e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s + \alpha}$$

$$te^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s + \alpha)^2}$$

4.3.4 时域展缩性

如果有 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

$$f(at) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

此处**常数** a 应 > 0 ，否则信号发生反褶，对于单边拉氏变换，此性质就无意义。

例4-6：用时域展缩性求 $e^{-\alpha t}u(t)$ 的拉氏变换。

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+1}$$

于是
$$e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\frac{s}{\alpha} + 1} = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha}{s + \alpha} = \frac{1}{s + \alpha}$$

如果有 $f(t)u(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

既有延时又有时域展缩时，

$$f(at-b)u(at-b) \xleftrightarrow{LT} ? \quad (a > 0, b > 0)$$

先延时再做时域展缩，

$$f(t-b)u(t-b) \xleftrightarrow{LT} F(s)e^{-bs}$$

$$f(at-b)u(at-b) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) e^{-\frac{bs}{a}}$$

也可先做时域展缩再延时。

例4-7：利用拉氏变换的性质，求 $\delta(3t - 2)$ 的拉氏变换。

解法一：先延时再时域压缩

依据拉氏变换的时移性 $f(t - t_0)u(t - t_0) \xleftrightarrow{LT} F(s)e^{-st_0}$ 及 $\delta(t) \xleftrightarrow{LT} 1$ 可知：

$$\delta(t - 2) \xleftrightarrow{LT} e^{-2s}$$

由拉氏变换的时域展缩性 $f(at) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ 可知： $\delta(3t - 2) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{3} e^{-\frac{2}{3}s}$

解法二：先时域压缩再延时

由拉氏变换的时域展缩性 $f(at) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ 可知： $\delta(3t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{3}$

依据拉氏变换的时移性 $f(t - t_0)u(t - t_0) \xleftrightarrow{LT} F(s)e^{-st_0}$ 有：

$$\delta(3t - 2) = \delta\left[3\left(t - \frac{2}{3}\right)\right] \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{3} e^{-\frac{2}{3}s}$$

4.3.5 时域微分性

设 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

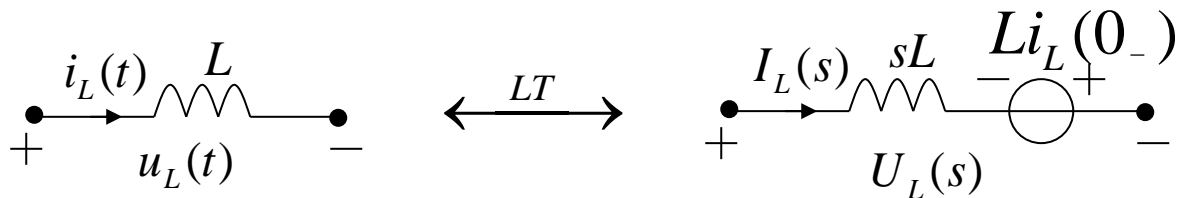
$$f'(t) \xleftrightarrow{LT} sF(s) - f(0_-)$$

$$f^{(n)}(t) \xleftrightarrow{LT} s^n F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1} f^{(i)}(0_-)$$

零状态条件下，时域微分一次，频域乘一个s

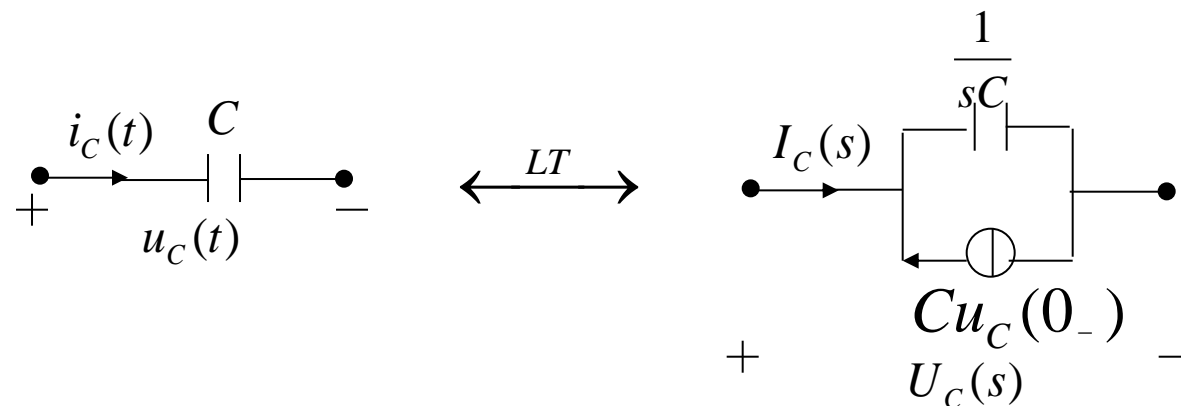
例4-8：求电感两端电压 $u_L(t)$ 的拉氏变换。

解： $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \xleftrightarrow{LT} U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-)$



同样，对于电容中的电流有

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \xleftrightarrow{LT} I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0_-)$$



4.3.6 时域积分性

$$f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$$

则
$$y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{0_-} f(\tau) d\tau + \int_{0_-}^t f(\tau) d\tau = y(0_-) + \int_{0_-}^t f(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \xleftrightarrow{LT} \frac{y(0_-)}{s} + \frac{F(s)}{s}$$

← 借助分部积分法，详见教材195页。

例4-9：求电感中的电流 $i_L(t)$ 的拉氏变换。

解：
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^t u_L(\tau) d\tau$$

于是

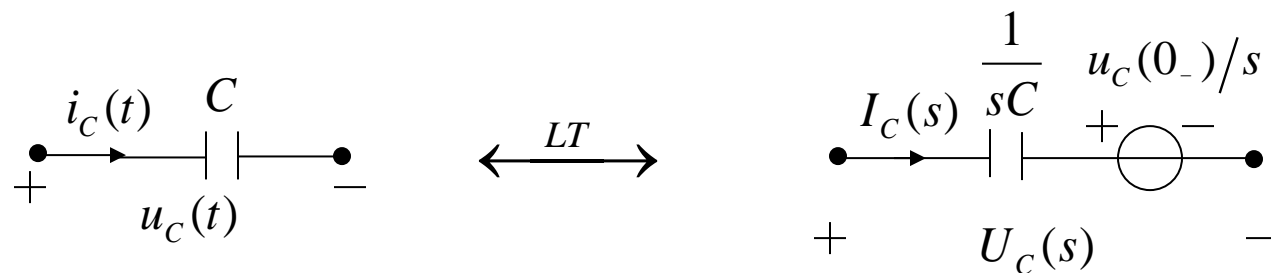
$$i_L(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{i_L(0_-)}{s} + \frac{U_L(s)}{sL}$$

同样，**电容两端的电压**

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i_C(\tau) d\tau$$

其拉氏变换为

$$u_C(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{u_C(0_-)}{s} + \frac{I_C(s)}{sC}$$



拉氏变换的**时域微积分性质**，在作**电路的瞬态分析**时，应用较为便利。

4.3.7 s域微分性

设 $f(t) \xleftrightarrow{LT} F(s)$

s域微分性 $-tf(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{dF(s)}{ds} \quad tf(t) \xleftrightarrow{LT} -\frac{dF(s)}{ds}$

例4-10：已知 $e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s+\alpha}$ ，利用s域微分性求 $te^{-\alpha t}u(t)$ 的拉氏变换。

解： $\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s+\alpha} \right] = \frac{-1}{(s+\alpha)^2}$

于是 $te^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s+\alpha)^2}$

4.3.8 s域积分性

$$\frac{f(t)}{t} \xleftrightarrow{LT} \int_s^{\infty} F(\lambda) d\lambda$$

例4-11: 已知 $(1 - e^{-\alpha t})u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \alpha}$, 求 $\frac{1 - e^{-\alpha t}}{t}u(t)$ 的拉氏变换。

解:

$$\begin{aligned} \int_s^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \alpha} \right) d\lambda &= \ln \lambda \Big|_s^{\infty} - \ln(\lambda + \alpha) \Big|_s^{\infty} \\ &= -\ln s + \ln(s + \alpha) \\ &= -\ln \frac{s}{s + \alpha} \end{aligned}$$

于是

$$\frac{1 - e^{-\alpha t}}{t} u(t) \xleftrightarrow{LT} -\ln \frac{s}{s + \alpha}$$

4.3.9 卷积定理(时域、频域)

设 $f_1(t) \xleftrightarrow{LT} F_1(s), f_2(t) \xleftrightarrow{LT} F_2(s)$

则 $f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{LT} F_1(s) \cdot F_2(s)$

$$f_1(t)f_2(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$$

利用拉氏变换的定义式和延时性，即可证明此定理。

例4-12：已知系统的单位冲激响应和输入如下，求零状态响应 $y(t)$ 。

$$h(t) = e^{-\alpha t} u(t), \quad x(t) = u(t)$$

解：求拉氏变换 $h(t) = e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s + \alpha}, \quad x(t) = u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}$

于是 $y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s(s + \alpha)} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \alpha} \right)$

$$y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) u(t)$$

4.3.10 初值与终值定理

设信号 $f(t)$ 是因果的，其与其导数的拉氏变换存在，则

1、初值定理：

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

高频分量 ($\omega \rightarrow \infty$)，表示
 $t=0$ 时接入信号的突变。

若 $f(t)$ 包含冲激函数 $k\delta(t)$,

$$F(s) = k + F_1(s), \quad F_1(s) \text{ 为真分式}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - ks] = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_1(s)$$

2、终值定理：若 $f(\infty)$ 存在，于是有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

直流分量 ($\omega \rightarrow 0$)，得到电
路稳态的终值。

当电路等系统较为复杂时，无需做拉氏逆变换，即可直接求出函数的初值和终值。

例4-13: 已知 $u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}$, 利用拉氏变换性质分别求 $u(t)$ 和 $\cos(\omega_0 t)u(t)$ 的初值和终值。

解: $u(t)|_{t=0_+} = u(t)|_{t=\infty} = s \cdot \frac{1}{s} = 1$

$$\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \cos(\omega_0 t)|_{t=0_+} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} = 1$$

$\cos(\omega_0 t)u(t)$ 为等幅震荡函数 ($sF(s)$ 分母的根在虚轴上共轭对称), 其终值不存在。

已知 $F(s) = \frac{2s}{s+1}$, $f(0_+) =$ [填空1] 。

作答

已知 $F(s) = \frac{2s}{s+1}$, 求 $f(0_+)$ 。

$$F(s) = \frac{2s}{s+1} = \frac{-2}{s+1} + 2$$

$F_1(s)$

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_1(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-2s}{s+1} = -2$$

$$f(t) = -2e^{-t}u(t) + 2\delta(t)$$

例4-14：利用拉氏变换的性质，求以下信号的拉氏变换。

$$(1) te^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)u(t) \quad (2) \frac{\sin t}{t} u(t)$$

解：（1）应用频移性和s域微分性

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)u(t) &\xleftrightarrow{LT} \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \\ -te^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)u(t) &\xleftrightarrow{LT} \frac{d}{ds} \left[\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \right] \\ \frac{d}{ds} \left[\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \right] &= \frac{\omega_0^2 - (s + \alpha)^2}{[(s + \alpha)^2 + \omega_0^2]^2} \\ \therefore te^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)u(t) &\xleftrightarrow{LT} \frac{(s + \alpha)^2 - \omega_0^2}{[(s + \alpha)^2 + \omega_0^2]^2} \end{aligned}$$

(2) 应用s域积分性

$$\because \sin t u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\frac{\sin t}{t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \int_s^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 + 1} = \arctan s \Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

$$\therefore \frac{\sin t}{t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

总结

性质	时域	复频域
线性	$\sum_{i=1}^N a_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^N a_i F_i(s)$
延时性	$f(t-t_0)u(t-t_0)$	$e^{-st_0} F(s)$
频移性	$f(t)e^{-at}$	$F(s+a)$
时域展缩性	$f(at) \ (a > 0)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
时域卷积定理	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
频域卷积定理	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$F_1(s) * F_2(s) / (2\pi j)$

注意：上述性质只适用于因果信号，即满足 $f(t)=f(t)u(t)$ 的信号 $f(t)$ 。

总结

性质	时域	复频域
时域微分性	$\frac{df(t)}{dt}$	$SF(s) - f(0^-)$
时域积分性	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0^-)}{s}$
s域微分性	$-tf(t)$	$\frac{dF(s)}{ds}$
s域积分性	$f(t)/t$	$\int_s^{\infty} F(\lambda) d\lambda$
初值定理	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} SF(s)$	
终值定理	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} SF(s)$	

注意：上述性质只适用于因果信号，即满足 $f(t)=f(t)u(t)$ 的信号 $f(t)$ 。

作业

基础题（需提交）：4-1，4-2，4-3（1）（2）（3）。

加强题（选做，不提交）：4-3（4）（5）。

本次课内容

- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型

本次课目标

1. 熟练掌握部分分式法求拉普拉斯逆变换；
2. 熟练使用拉普拉斯逆变换分析电路等系统。

4.1 引言

4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

4.4 拉普拉斯逆变换

4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型

4.6 系统函数（网络函数）

4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性

4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性

4.9 二阶谐振系统的S平面分析

4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布

4.11 线性系统的稳定性

4.12 双边拉普拉斯变换

4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

4.4.1 拉普拉斯变换的零、极点

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

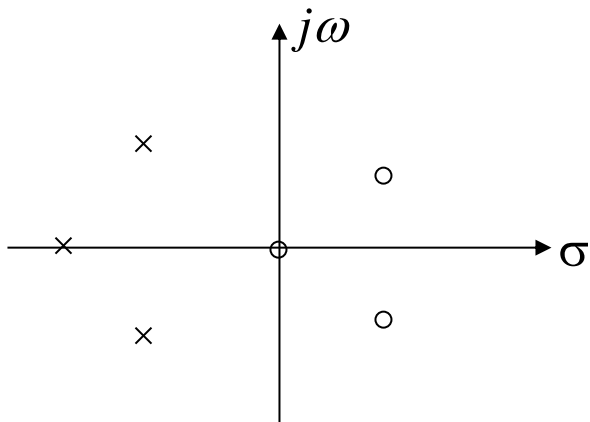
根据拉普拉斯逆变换的公式，可以应用围线积分求解。但在应用中，拉氏变换绝大多数是**有理分式**的形式：

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad \text{分子分母均是}s\text{的}\textbf{有理多项式}。$$

以上分子多项式 $N(s)=0$ 的根，称作 $F(s)$ 的**零点**；分母多项式 $D(s)=0$ 的根，称作 $F(s)$ 的**极点**。上式可表示为：

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

式中的 z_i 与 p_i ，分别是 $F(s)$ 的零点与极点。可如图将零极点标示在 s 平面上。



4.4.2 求拉氏逆变换

用拉氏变换方法分析系统时，最后还要将象函数进行拉氏逆变换。

1、部分分式法（海维赛法）

(1)极点为单实根的情况 $(p_1 \cdots p_n)$

$$m < n \text{ 时, } F(s) \stackrel{\text{分解}}{=} \frac{k_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n} \quad (\text{真分式})$$

$$\text{其中 } k_i = (s-p_i)F(s)\big|_{s=p_i} \quad (\text{留数}) \quad (\text{证明见教材})$$

$$\text{由拉氏变换性质已知: } Ae^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{A}{s+\alpha}$$

$$F(s) \xrightarrow{L^{-1}} f(t) = \left(k_1 e^{p_1 t} + \cdots + k_n e^{p_n t} \right) u(t)$$



已知 $F(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$ ，则其拉氏逆变换 $f(t)$ 为（ ）

A $f(t) = (2e^{-t} + e^{-2t})u(t)$

B $f(t) = (2e^t - e^{2t})u(t)$

C $f(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

D $f(t) = (e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$

提交

例4-15: $F(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$, 试求其拉氏逆变换 $f(t)$ 。

解:
$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{(s+1)} + \frac{k_2}{(s+2)}$$

$$k_1 = (s+1)F(s) \Big|_{s=-1} = \frac{s+3}{s+2} \Big|_{s=-1} = 2$$

$$k_2 = (s+2)F(s) \Big|_{s=-2} = \frac{s+3}{s+1} \Big|_{s=-2} = -1$$

所以:
$$F(s) = \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$$

它的拉氏逆变换为: $f(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

即使 $F(s)$ 不是真分式，即 $n < m$ ，它也可表示为一 s 的多项式与一真分式的和：

例： $F(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 6s + 5}{s^2 + 3s + 2}$

作长除法提出高次项



$$\begin{array}{r} s+1 \\ s^2+3s+2 \overline{) s^3+4s^2+6s+5} \\ \underline{s^3+3s^2+2s} \\ s^2+4s+5 \\ \underline{s^2+3s+2} \\ s+3 \end{array}$$

$$F(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 6s + 5}{s^2 + 3s + 2} = s + 1 + \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

上式中 $s+1$ 的拉氏逆变换等于： $\delta'(t) + \delta(t)$

对于拉氏变换是有理真分式的逆变换，用部分分式法求解。

(2)极点包含共轭复根的情况 ($p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$)

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{A(s)}{D(s) \left[(s + \alpha)^2 + \beta^2 \right]} \\ &= \frac{A(s)}{D(s)(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)} \end{aligned}$$

其中 $D(s)$ 为分母除去共轭复根剩余部分

$$\text{设 } F_1(s) = \frac{A(s)}{D(s)}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } F(s) &= \frac{F_1(s)}{(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)} \\ &\stackrel{\text{分解}}{=} \frac{K_1}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K_2}{s + \alpha + j\beta} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{其中 } K_{1,2} = \frac{F_1(-\alpha \pm j\beta)}{\pm 2j\beta} \quad (\text{留数})$$

$$K_1、K_2 \text{ 呈共轭关系: } K_{1,2} = A \pm jB$$

得共轭复根有关部分逆变换为 $\xrightarrow{\text{LT}^{-1}}$

$$\begin{aligned} f_c(t) &= e^{-\alpha t} (K_1 e^{j\beta t} + K_1^* e^{-j\beta t}) u(t) \\ &= e^{-\alpha t} \{ (A + jB)[\cos(\beta t) + j \sin(\beta t)] + (A - jB)[\cos(\beta t) - j \sin(\beta t)] \} u(t) \\ &= 2e^{-\alpha t} [A \cos(\beta t) - B \sin(\beta t)] u(t) \end{aligned}$$

α --衰减因子; β --振荡频率

例4-16: $F(s) = \frac{s^2 + 3}{(s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$, 试求其拉氏逆变换 $f(t)$ 。

解: 令 $F(s) = \frac{K_1}{s + 2} + \frac{K_2}{s + 1 - j2} + \frac{K_2^*}{s + 1 + j2}$ $\alpha = 1,$
 $\beta = 2, \text{取} \beta > 0$

$$K_1 = (s + 2)F(s) \Big|_{s=-2} = \frac{s^2 + 3}{s^2 + 2s + 5} \Big|_{s=-2} = \frac{7}{5}$$

$$K_2 = (s + 1 - j2)F(s) \Big|_{s=-1+j2} = \frac{s^2 + 3}{(s + 2)(s + 1 + j2)} \Big|_{s=-1+j2} = -\frac{1}{5} + j\frac{2}{5} \quad \text{A} = -\frac{1}{5}, \text{B} = \frac{2}{5}$$

共轭复根对应的时域信号为 $f_c(t) = 2e^{-\alpha t} [A \cos(\beta t) - B \sin(\beta t)] u(t)$

$$f(t) = \left[\frac{7}{5} e^{-2t} - \frac{2}{5} e^{-t} (\cos 2t + 2 \sin 2t) \right] u(t)$$

例4-17: $F(s) = \frac{s + \gamma}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$, 试求其拉氏逆变换 $f(t)$ 。

解: 此函数式只有共轭复根, 所以无需用部分分式法。

$$\text{已知LT}[\cos(\beta t)u(t)] = \frac{s}{s^2 + \beta^2}, \text{LT}[\sin(\beta t)u(t)] = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$$

$$\text{LT}[e^{-\alpha t} \cos(\beta t)u(t)] = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}, \text{LT}[e^{-\alpha t} \sin(\beta t)u(t)] = \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

$$F(s) = \frac{s + \alpha + \gamma - \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{(\gamma - \alpha)}{\beta} \cdot \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

$$f(t) = e^{-\alpha t} \left[\cos(\beta t) + \frac{\gamma - \alpha}{\beta} \sin(\beta t) \right] u(t)$$

(3)极点包含多重根的情况 (k 重根 p_1 ,单根 $p_2...p_n$)

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{A(s)}{D(s)} = \frac{A(s)}{(s-p_1)^k D_1(s)} \\
 &= \frac{K_{11}}{(s-p_1)^k} + \frac{K_{12}}{(s-p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{K_{1k}}{(s-p_1)} + \sum_{i=2}^n \frac{K_i}{s-p_i} \\
 &= \sum_{i=1}^k \frac{K_{1i}}{(s-p_1)^{k-i+1}} + \sum_{i=2}^n \frac{K_i}{s-p_i}
 \end{aligned}$$

求 K_i 和 K_{11} ，方法同第一种情况： $K_{11} = (s-p_1)^k F(s) \Big|_{s=p_1}$

求其他系数，令： $F_1(s) = (s-p_1)^k \cdot F(s)$

$$\text{当 } i=2, \quad K_{12} = \frac{d}{ds} F_1(s) \Big|_{s=p_1}$$

$$\text{当 } i=3, \quad K_{13} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} F_1(s) \Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} F_1(s) \Big|_{s=p_1} \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

$$F_1(s) = (s - p_1)^k \cdot F(s)$$

得多重根部分的逆变换 $\xrightarrow{\text{LT}^{-1}}$:

$$f_c(t) = e^{p_1 t} \left[\frac{K_{11}}{(k-1)!} t^{k-1} + \frac{K_{12}}{(k-2)!} t^{k-2} \dots + \frac{K_{1i}}{(k-i)!} t^{k-i} \dots + K_{1k} \right] u(t)$$

例4-18: $F(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3}$ ，试求其拉氏逆变换 $f(t)$ 。

解: 令

$$F(s) = \frac{K_{11}}{(s+1)^3} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)} + \frac{K_2}{s}$$

先求单根0对应的系数 K_2 :

$$K_2 = sF(s) \Big|_{s=0} = \frac{s-2}{(s+1)^3} \Big|_{s=0} = -2$$

$$\text{令 } F_1(s) = (s+1)^3 F(s) = \frac{s-2}{s}$$

$$K_{11} = F_1(s) \Big|_{s=-1} = \frac{s-2}{s} \Big|_{s=-1} = 3$$

$$K_{12} = \frac{1}{(3-2)!} \frac{dF_1(s)}{ds} \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{s-2}{s} \right] \Big|_{s=-1} = \frac{2}{s^2} \Big|_{s=-1} = 2$$

$$K_{13} = \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^2 F_1(s)}{ds^2} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-4}{s^3} \Big|_{s=-1} = 2$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \left[e^{-t} \left(\frac{K_{11}}{2!} t^2 + K_{12} t + K_{13} \right) + K_2 \right] u(t) \\ &= \left[e^{-t} \left(\frac{3}{2} t^2 + 2t + 2 \right) - 2 \right] u(t) \end{aligned}$$

2、留数法

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad t \geq 0$$

设一闭合围线的积分路径为无限大圆弧,

$$\text{即 } f(t) = \sum_{\text{极点}} \left[F(s)e^{st} \text{ 的留数} \right]$$

则上式中积分等于围线中被积函数的所有极点的留数之和。

若极点 $s = p_i$ 处留数为 r_i , 围线中有 n 个极点 p_i (k 阶)

$$\text{则 } f(t) = \sum_{i=1}^n r_i, \quad r_i = \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} (s - p_i)^k F(s)e^{st} \right]$$

特殊情况：含 $e^{-\alpha s}$ 的非有理式

$e^{-\alpha s}$ 项不参加部分分式运算，求解时利用时移性质。

例4-19：求 $\frac{e^{-2s}}{s^2 + 3s + 2}$ 的拉氏逆变换。

解：
$$\frac{e^{-2s}}{s^2 + 3s + 2} = F_1(s)e^{-2s}$$

$$F_1(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

$$\text{所以 } f_1(t) = L^{-1}[F_1(s)] = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$\text{所以 } f(t) = f_1(t-2) = [e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}]u(t-2)$$

已知 $F(s) = \left(\frac{1 - e^{-s}}{s} \right)^2$, 求拉氏逆变换 $f(t)$ 。

- ☒ A $f(t) = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$
- ☐ B $f(t) = (t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$
- ☐ C $f(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$
- ☐ D $f(t) = tu(t) - (t-2)u(t-2)$

提交

已知 $F(s) = \left(\frac{1 - e^{-s}}{s} \right)^2$, 求拉氏逆变换 $f(t)$ 。

解:
$$F(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s}$$

$$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

利用时移性质:

$$\therefore f(t) = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$$

- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性
- 4.9 二阶谐振系统的S平面分析
- 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布
- 4.11 线性系统的稳定性
- 4.12 双边拉普拉斯变换
- 4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

4.5.1 用拉普拉斯变换解微分方程

拉普拉斯变换解微分方程的步骤：

- (1) 对微分方程求拉氏变换，注意应用微分性质；
- (2) 解s域的代数方程，求出响应的拉氏变换；
- (3) 求拉氏逆变换，即求出响应的时间表达式。

例4-20: 已知 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$, $y'(0^-) = y(0^-) = 1$,
 $x(t) = e^{-3t}u(t)$ 。试求系统的响应 $y(t)$ 。

解法一: (1) 对方程两边同求拉氏变换, 利用**微分性质**。

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$$

$$\underline{s^2 Y(s) - [sy(0^-) + y'(0^-)]} + \underline{3[sY(s) - y(0^-)]} + \underline{2Y(s)} = sX(s) + 4X(s)$$

(2) 整理以上方程, 求出响应的拉氏变换式。

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 4)X(s) + (s + 3)y(0^-) + y'(0^-)$$

$$\text{所以 } Y(s) = \frac{(s + 4)X(s) + (s + 3)y(0^-) + y'(0^-)}{(s^2 + 3s + 2)}$$

$$Y(s) = \frac{(s+4)X(s) + (s+3)y(0^-) + y'(0^-)}{(s^2 + 3s + 2)} = \frac{(s+4)}{(s^2 + 3s + 2)} X(s) + \frac{(s+3)y(0^-) + y'(0^-)}{(s^2 + 3s + 2)}$$

代入起始条件和 $X(s) = \frac{1}{s+3}$ ，得到 $Y(s) = \frac{(s+4)}{(s^2 + 3s + 2)(s+3)} + \frac{(s+3)+1}{(s^2 + 3s + 2)}$

(3) 求拉氏逆变换。

用部分分式法可得 $Y(s) = \frac{\frac{3}{2}}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+3} + \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2}$

$$y(t) = \underbrace{\left(\frac{3}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{(3e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)}_{\text{零输入响应}} = \underbrace{\left(\frac{9}{2}e^{-t} - 4e^{-2t}\right)u(t)}_{\text{自由响应}} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)}_{\text{强迫响应}}$$

零状态响应

零输入响应

自由响应

强迫响应

零状态响应和零输入响应的公共项—自由响应；非公共项—强迫响应

虽然拉氏变换解方程，可一次求出全解是其优点，但是利用微分性质时，带上其起始条件，使s域的方程运算时复杂而易出错。**分别求零状态和零输入响应会更简洁。**

解法二： (1) 用**s域分析法**求**零状态响应**。对方程两边同求拉氏变换，不带起始条件。

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$$
$$s^2 Y_{zs}(s) + 3s Y_{zs}(s) + 2Y_{zs}(s) = sX(s) + 4X(s)$$

整理以上方程，求出零状态响应的拉氏变换式。

$$(s^2 + 3s + 2)Y_{zs}(s) = (s + 4)X(s)$$

所以 $Y_{zs}(s) = \frac{(s + 4)}{(s^2 + 3s + 2)} X(s) = H(s)X(s)$

$$\text{因为 } X(s) = \frac{1}{s+3}$$

得到零状态响应的拉氏变换

$$Y_{zs}(s) = \frac{(s+4)}{(s^2+3s+2)(s+3)} = \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$Y_{zs}(s) = \frac{\frac{3}{2}}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+3}$$

求拉氏逆变换，得到系统的**零状态响应**：

$$y_{zs}(t) = \left(\frac{3}{2} e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-3t} \right) u(t)$$

试用第二章的时域分析法求零状态响应，并比较结果。

(2) 用**时域分析法**求**零输入响应**。由以上方程的拉氏变换

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 4)X(s)$$

微分方程对应的特征方程是： $s^2 + 3s + 2 = 0$

特征方程的根： $s = -1$, $s = -2$

设系统的零输入响应为： $y_{zi}(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$

已知 $y'_{zi}(0^-) = y'(0^-) = 1$, $y_{zi}(0^-) = y(0^-) = 1$

由起始条件确定待定常数：

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 1 \\ -A_1 - 2A_2 &= 1 \end{aligned} \quad \therefore \quad A_1 = 3, \quad A_2 = -2$$

零输入响应： $y_{zi}(t) = (3e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)$

最后，求得系统的全响应：

$$\begin{aligned}y(t) &= y_{zs}(t) + y_{zi}(t) \\&= \left(\frac{3}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t) + (3e^{-t} - 2e^{-2t})u(t) \\&= \left(\frac{9}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)\end{aligned}$$

4.5.2 拉普拉斯变换解电路

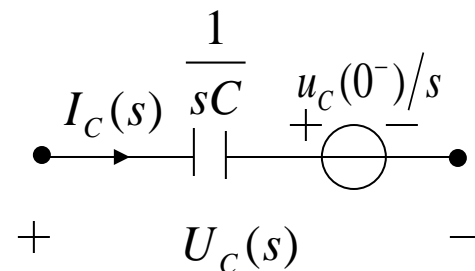
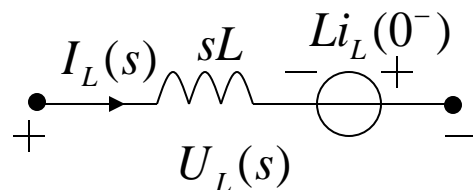
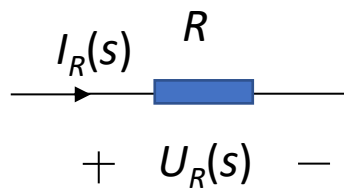
s域元件模型:

1) 回路分析 (KVL)

$$U_R(s) = RI_R(s)$$

$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$$

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{1}{s} u_c(0^-)$$

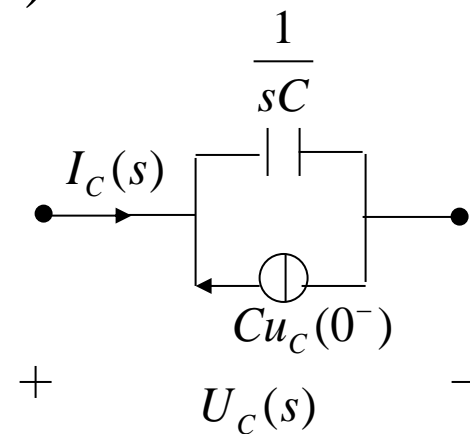
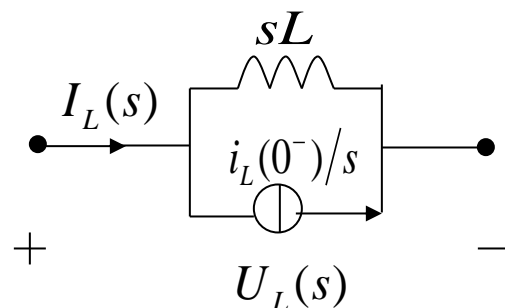
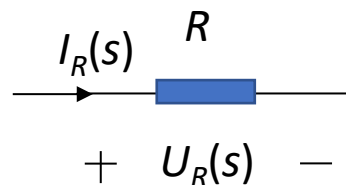


2) 结点分析 (KCL)

$$I_R = \frac{1}{R} U_R(s)$$

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} U_L(s) + \frac{1}{s} i_L(0^-)$$

$$I_C(s) = sC U_C(s) - C u_c(0^-)$$



s域电路分析方法

1. 将网络中每个元件用其s域模型代替；

将信号源写作变换式 $\left(\frac{E}{s}, \text{或} \frac{E}{sR}, U_s(s) \text{或} I_s(s)\right)$ 。

2. 对此构成的s域模型图采用KVL和KCL分析得到所需的系统方程变换式。

（所进行的数字运算是代数关系，类似电阻性网络；

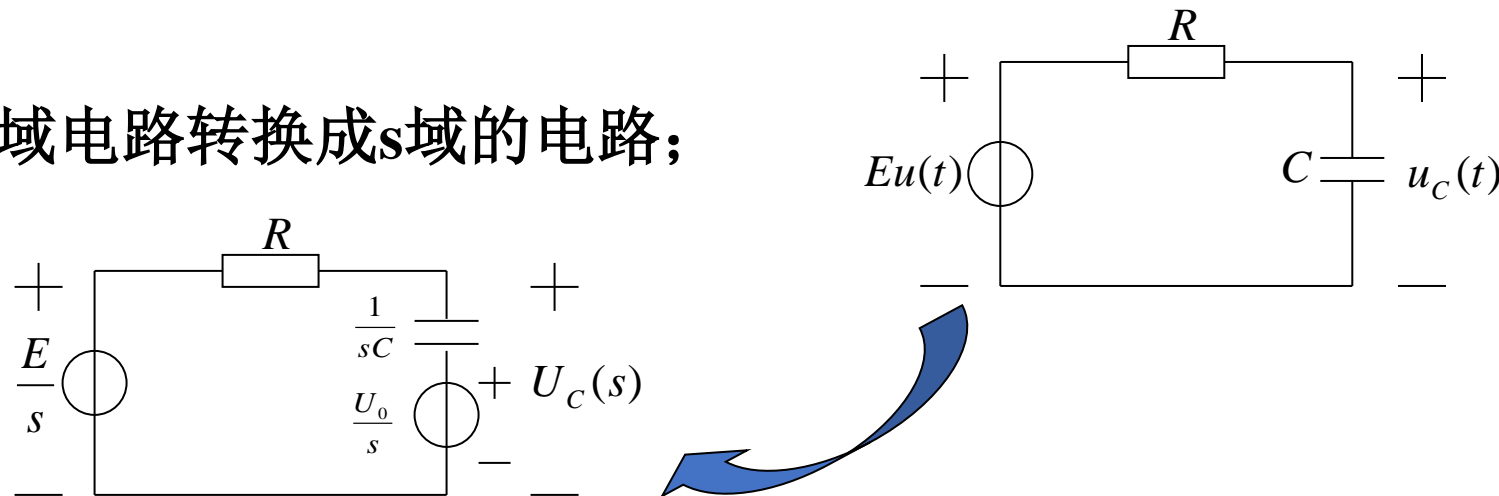
戴维南定理与诺顿定理均适用；适合较多结点或回路的网络分析。）

3. 求出响应的拉氏变换。

4. 求拉氏逆变换，即求出响应的时间表达式。

例4-21：RC电路如图所示，设已知电容上起始电压 $u_C(0^-)=U_0$ ，试求 $t>0$ 时的电容电压 $u_C(t)$ 。

解：(1) 将时域电路转换成s域的电路；



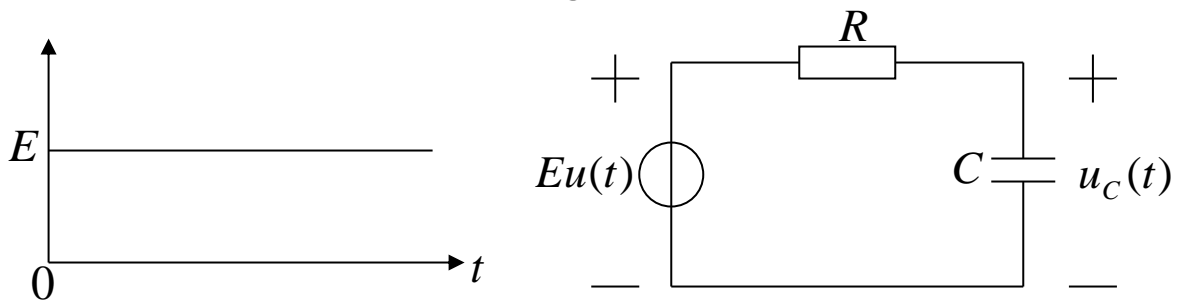
(2) 列s域的电路方程，求输出的拉氏变换；

直接可写出电容电压的拉氏变换为

$$U_C(s) = \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} \frac{E - U_0}{s} + \frac{U_0}{s} = \frac{1}{sRC + 1} \frac{E - U_0}{s} + \frac{U_0}{s}$$

(3) 通过拉氏逆变换求出响应的时间表达式。

$$U_C(s) = \frac{1}{RC} \frac{(E - U_0)}{s(s + \frac{1}{RC})} + \frac{U_0}{s} = \frac{E - U_0}{s} - \frac{(E - U_0)}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{U_0}{s} = \frac{E}{s} - \frac{(E - U_0)}{s + \frac{1}{RC}}$$

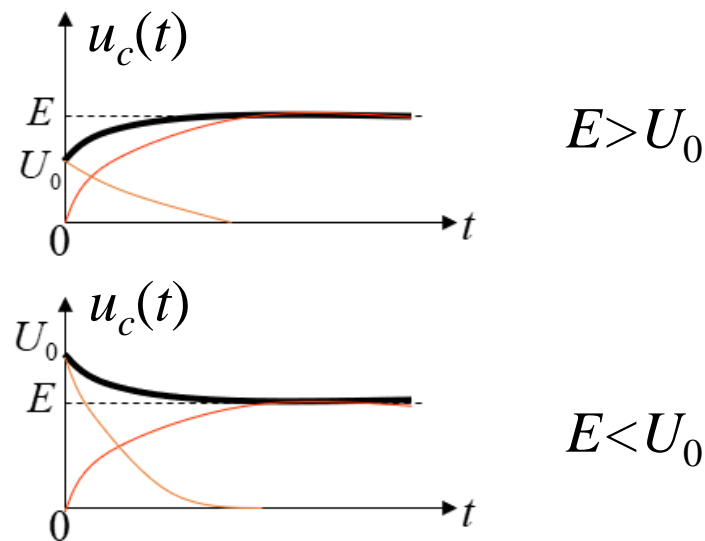


求得电容上电压

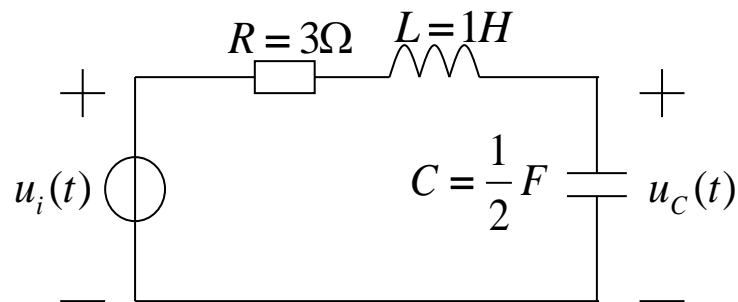
$$u_C(t) = [E - (E - U_0)e^{-\frac{t}{RC}}]u(t) \quad (\text{黑线})$$

$$u_{Czs}(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})u(t) \quad (\text{红线})$$

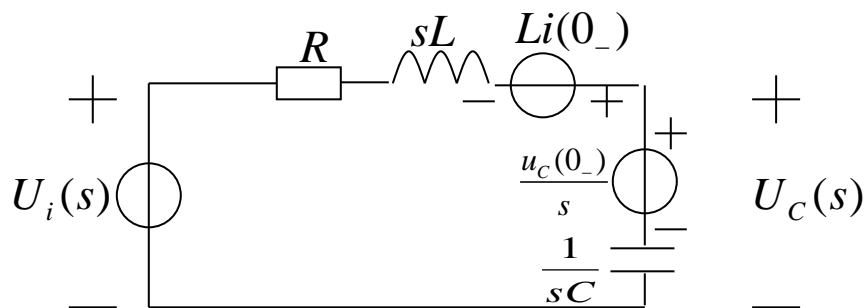
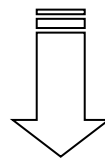
$$u_{Czi}(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} u(t) \quad (\text{橙线})$$



例4-22: RLC串联电路如图所示，设电容上起始电压 $u_C(0_-)=1\text{ V}$ ，回路中的起始电流 $i(0_-)=1\text{ A}$ ，输入电压 $u_i(t)=e^{-3t}u(t)$ 。试求 $t>0$ 时的电容电压 $u_C(t)$ 。

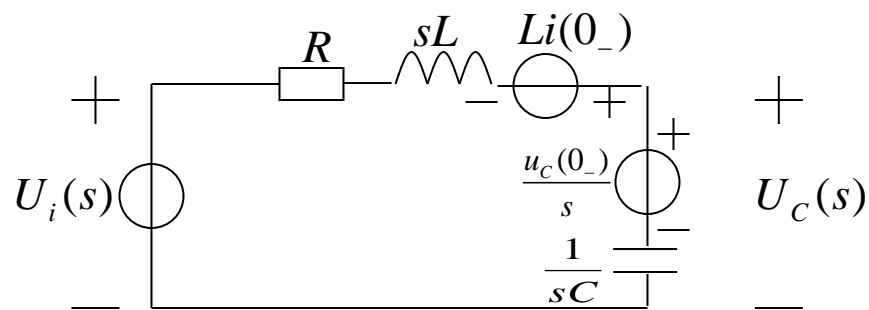


解: (1) 将时域电路转换成s域的电



(2) 列s域的电路方程，求出响应的拉氏变换。

$$\begin{aligned}
 U_C(s) &= \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} \left[U_i(s) - \frac{u_C(0_-)}{s} + Li(0_-) \right] + \frac{u_C(0_-)}{s} \\
 &= \frac{\frac{2}{s}}{3 + s + \frac{2}{s}} \left[U_i(s) - \frac{1}{s} + 1 \right] + \frac{1}{s} \\
 &= \frac{2U_i(s)}{s^2 + 3s + 2} - \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \left(\frac{1-s}{s} \right) + \frac{1}{s}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}U_{Czs}(s) &= \frac{2}{s^2 + 3s + 2} U_i(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \cdot \frac{1}{s + 3} \\&= \frac{2}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = \frac{1}{s + 1} - \frac{2}{s + 2} + \frac{1}{s + 3} \\U_{Czi}(s) &= \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \left(\frac{s - 1}{s} \right) + \frac{1}{s} = \frac{2(s - 1)}{s(s + 1)(s + 2)} + \frac{1}{s} \\&= \frac{-1}{s} + \frac{4}{s + 1} - \frac{3}{s + 2} + \frac{1}{s} = \frac{4}{s + 1} - \frac{3}{s + 2}\end{aligned}$$

(3) 通过拉氏逆变换求出响应的时间表达式。

$$u_{Czs}(t) = (e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t})u(t) \quad u_{Czi}(t) = (4e^{-t} - 3e^{-2t})u(t)$$

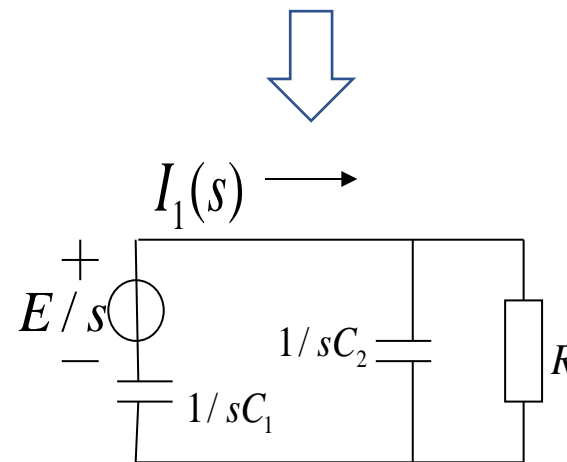
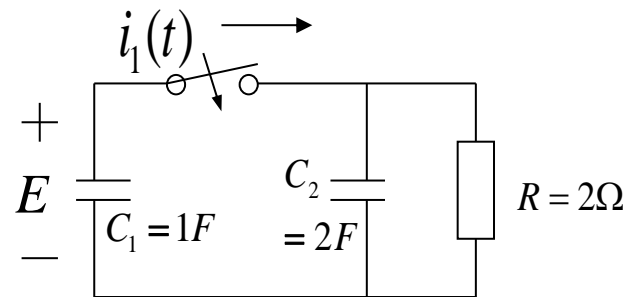
$$u_C(t) = u_{Czs}(t) + u_{Czi}(t) = (5e^{-t} - 5e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$$

例4-23： 电路如图所示，设电容上起始电压 $v_{c1}(0^-)=E$ ， $t=0$ 时开关闭合，求电流 $i_1(t)$ ，并讨论 $t=0$ 时刻前后，电容两端电荷发生的变化。

解： 画s域电路，并列方程。

$$I_1(s) = \frac{E}{s} \frac{1}{\frac{R/sC_2}{R + 1/sC_2} + \frac{1}{sC_1}} = \frac{E}{s} \frac{1}{\frac{R}{RC_2s + 1} + \frac{1}{sC_1}}$$

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \frac{E}{s} \frac{s(RC_1C_2s + C_1)}{RC_1s + RC_2s + 1} = \frac{ERC_1C_2}{R(C_1 + C_2)} \frac{s + \frac{1}{RC_2}}{s + \frac{1}{R(C_1 + C_2)}} \\ &= \frac{2E}{3} \frac{s + \frac{1}{4}}{s + \frac{1}{6}} \end{aligned}$$



$$I_1(s) = \frac{2E}{3} \left(1 + \frac{\frac{1}{12}}{s + \frac{1}{6}} \right) \quad \therefore \quad i_1(t) = \frac{2E}{3} [\delta(t) + \frac{1}{12} e^{-\frac{t}{6}} u(t)]$$

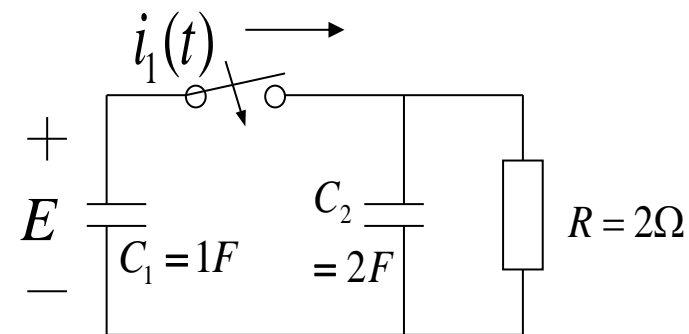
当 $t=0$ 时刻，电容上的电荷发生移动，但是总量不变。

$$C_1 v_{C1}(0_-) = (C_1 + C_2) v_{C1}(0_+) \quad \therefore \quad E = 3v_{C1}(0_+)$$

$$\therefore \quad v_{C1}(0_+) = \frac{E}{3}$$

所以 $t=0^+$ 时刻，电容上的电荷各有：

$$q_{C1} = C_1 v_{C1}(0_+) = \frac{E}{3} \quad q_{C2} = C_2 v_{C1}(0_+) = \frac{2E}{3}$$



作业

基础题：4-4，4-5，4-8，4-11。

加强题：无。

本次课内容

- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性

本次课目标

1. 熟练掌握系统函数、系统微分方程、系统模拟框图之间的相互关联（重要）；
2. 能用系统函数零、极点分布定性判断冲激响应的特性；
3. 熟练运用系统函数分析零状态响应的时域特性；
4. 熟练运用系统函数零、极点分布，粗略画出频响特性曲线（重要）。

4.1 引言

4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

4.3 拉普拉斯变换的基本性质

4.4 拉普拉斯逆变换

4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型

4.6 系统函数（网络函数）

4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性

4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性

4.9 二阶谐振系统的S平面分析

4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布

4.11 线性系统的稳定性

4.12 双边拉普拉斯变换

4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

4.6.1 系统函数的定义

若有时间信号作用于系统，其输出仍然是此时间信号，**只是幅度与相位被改变**，称此时间信号为系统的**特征信号**，表征被改变的幅度和相位的函数，称为系统的特征值或**系统函数**。

信号 $e^{j\omega t}$ 是系统的**特征信号**，函数 $H(\omega)$ （系统单位冲激响应 $h(t)$ 的傅里叶变换）是**系统函数**，也称为系统的**频率响应**。

$$\begin{array}{c} e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t) * e^{j\omega t} = H(\omega)e^{j\omega t} = |H(\omega)|e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} \end{array}$$

事实上，**指数信号 e^{st}** 也是系统的**特征信号**。

$$\begin{array}{c} e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t) * e^{st} = H(s)e^{st} \end{array}$$

$$y(t) = h(t) * e^{st} = \int_{0_-}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st} \int_{0_-}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = H(s)e^{st}$$

$H(s) = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$ 是因果系统单位冲激响应的拉氏变换，也称为系统函数。

连续时间信号 $x(t)$ ，作用于单位冲激响应为 $h(t)$ 线性时不变系统，其零状态响应 $y_{zs}(t)$ ，等于输入信号与单位冲激响应的卷积：

$$y_{zs}(t) = h(t) * x(t) \quad \begin{array}{c} x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y_{zs}(t) = h(t) * x(t) \end{array}$$

由时域卷积定理，零状态响应的拉氏变换等于输入信号的拉氏变换与单位冲激响应的拉氏变换的乘积：

$$Y_{zs}(s) = H(s)X(s) \quad \begin{array}{c} X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y_{zs}(s) = H(s)X(s) \end{array}$$

系统函数等于零状态响应的拉氏变换与输入信号的拉氏变换的比值：

$$H(s) = Y_{zs}(s) / X(s)$$

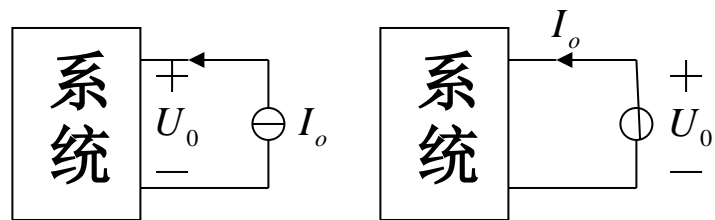
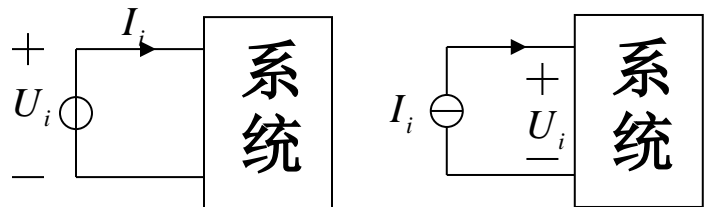
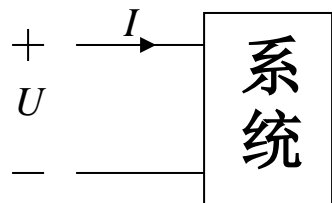
4.6.2 策动点函数与转移函数

1、策动点函数

当系统的输入、输出取自同一端口时，系统函数称为**策动点函数**。策动点函数根据其量纲，又可称为**阻抗函数**或**导纳函数**。如放大器的输入或输出**阻抗**（电压与电流之比）、输入或输出**导纳**（电流与电压之比）等。

$$\text{阻抗: } Z_i(s) = \frac{U_i(s)}{I_i(s)} \quad Z_o(s) = \frac{U_o(s)}{I_o(s)}$$

$$\text{导纳: } Y_i(s) = \frac{I_i(s)}{U_i(s)} \quad Y_o(s) = \frac{I_o(s)}{U_o(s)}$$



2、转移（传输）函数

当系统的输入输出取自不同的端口时，系统函数称为**转移函数**或**传输函数**。

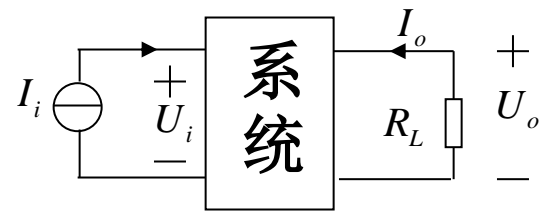
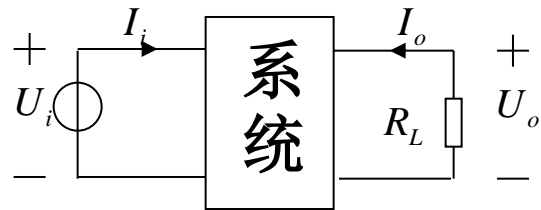
转移函数根据其量纲可称为**转移阻抗**、**转移导纳**、**电压传输比**或**电流传输比**等。如放大器的电压或电流放大倍数等。

转移阻抗: $Z_{21}(s) = \frac{U_o(s)}{I_i(s)}$

转移导纳: $Y_{21}(s) = \frac{I_o(s)}{U_i(s)}$

电压传输比: $K_v(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)}$

电流传输比: $K_i(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)}$



4.6.3 系统函数的求解

由于系统函数是系统零状态响应拉氏变换与激励拉氏变换之比，它的求解与系统的起始条件无关。

例4-24：已知系统的微分方程 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$ ，

求系统函数 $H(s)$ 与系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

解：对以上方程求拉氏变换，在利用微分性质时，起始条件为零。

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 3)X(s)$$

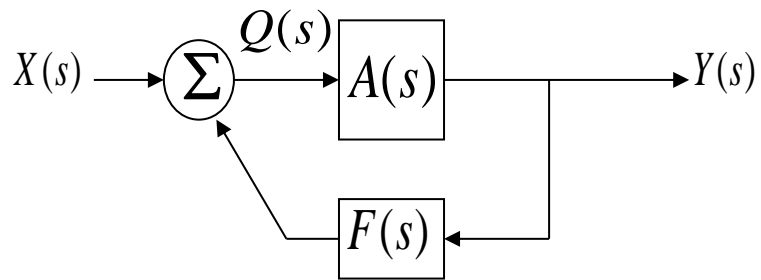
于是系统函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{2}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

求系统函数的拉氏逆变换，即为系统的单位冲激响应。

$$h(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

例4-25: 已知一反馈系统由如下框图所示, 试求系统函数 $H(s)$ 。



解: 设加法器的输出为 $Q(s)$ 。于是

$$Q(s) = X(s) + A(s)F(s)Q(s)$$

$$X(s) = [1 - A(s)F(s)]Q(s)$$

另外由于 $Y(s) = A(s)Q(s)$

所以

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{A(s)}{1 - A(s)F(s)}$$

反馈系统: 通常称 $A(s)$ 为**前向通路增益**, $F(s)$ 称为**反馈通路增益**, $A(s)F(s)$ 称为**闭环增益**。

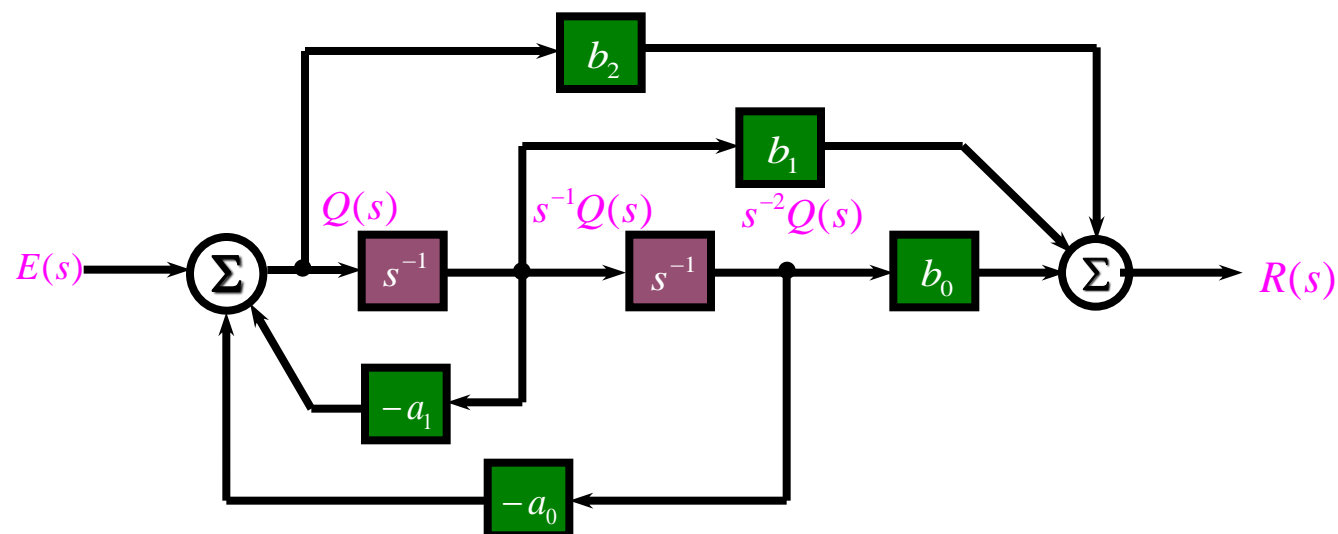
$$R(s) = H(s)E(s) = \frac{b_2 + b_1s^{-1} + b_0s^{-2}}{1 + a_1s^{-1} + a_0s^{-2}} E(s)$$

令： $Q(s) = \frac{E(s)}{1 + a_1s^{-1} + a_0s^{-2}}$

则：

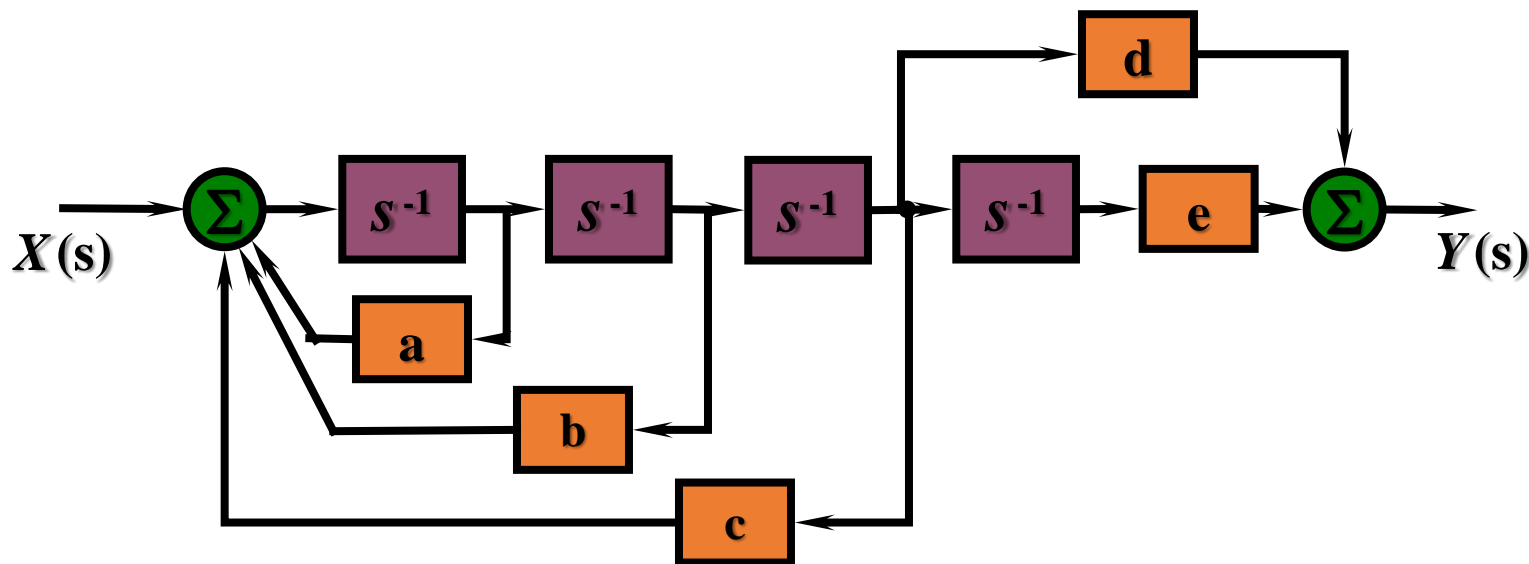
$$Q(s) = E(s) - a_1s^{-1}Q(s) - a_0s^{-2}Q(s)$$

$$R(s) = (b_2 + b_1s^{-1} + b_0s^{-2}) Q(s)$$



已知 $H(s) = \frac{2s+3}{s(s+3)(s+2)^2}$, 试给出 s 域模拟图中的参数:

a= [填空1] , b= [填空2] , c= [填空3] , d= [填空4] , e= [填空5] 。

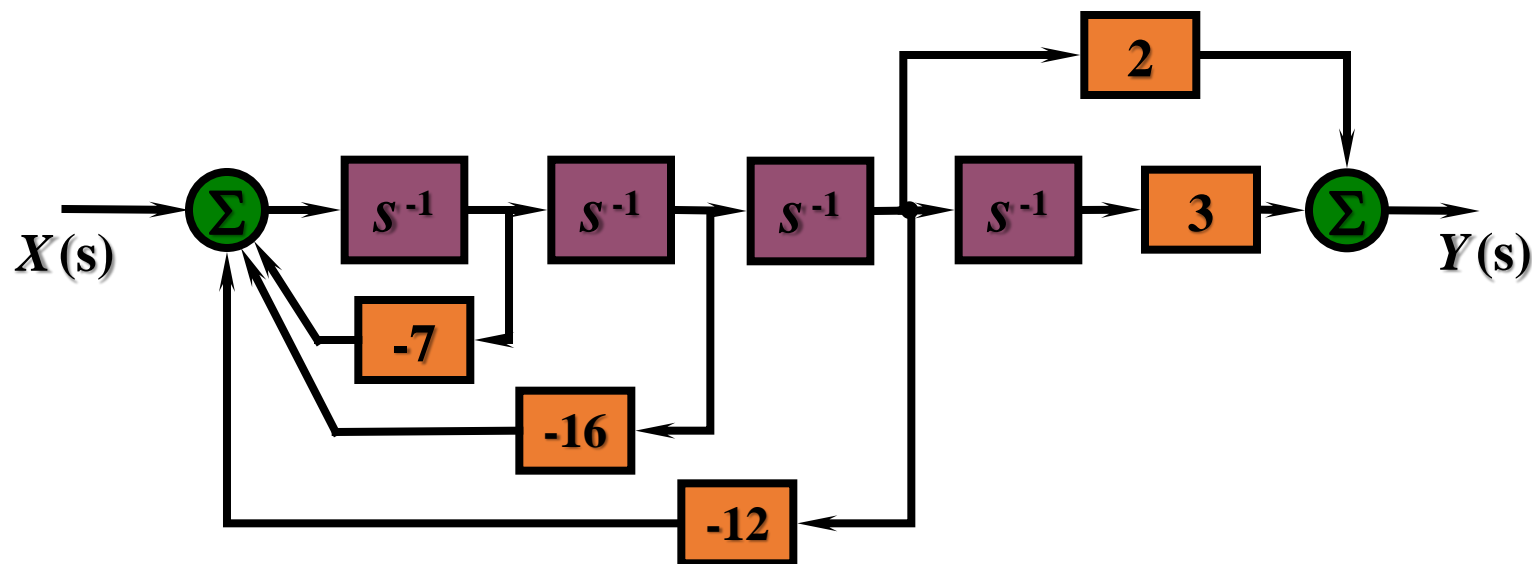


作答

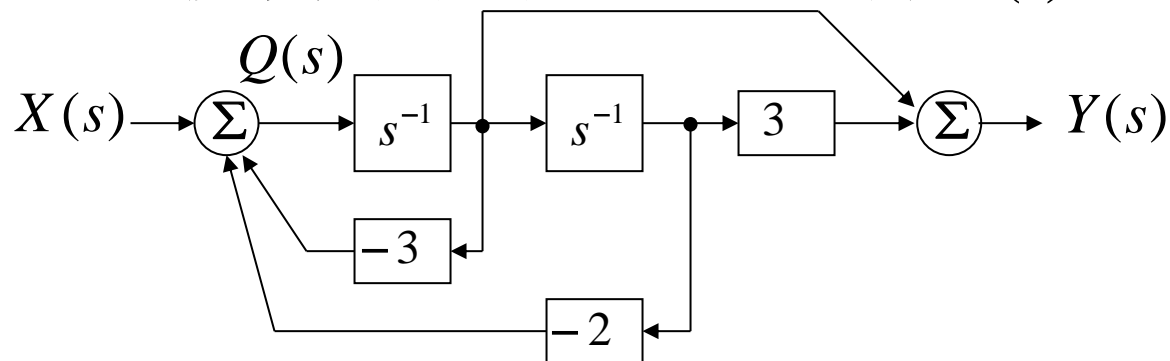
已知 $H(s) = \frac{2s+3}{s(s+3)(s+2)^2}$, 试给出 s 域模拟图中的参数。

解：系统函数可变为

$$H(s) = \frac{2s+3}{s(s+3)(s+2)^2} = \frac{2s+3}{s^4 + 7s^3 + 16s^2 + 12s} = \frac{2s^{-3} + 3s^{-4}}{1 + 7s^{-1} + 16s^{-2} + 12s^{-3}}$$



例4-26: 已知一个系统的模拟框图如下, 求系统函数 $H(s)$ 。



解: 设前一个加法器的输出为 $Q(s)$ 。于是有

$$Q(s) = X(s) - 3s^{-1}Q(s) - 2s^{-2}Q(s)$$

$$X(s) = (1 + 3s^{-1} + 2s^{-2})Q(s)$$

后一个加法器的输出 $Y(s)$ 等于

$$Y(s) = s^{-1}Q(s) + 3s^{-2}Q(s) = (s^{-1} + 3s^{-2})Q(s)$$

于是

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^{-1} + 3s^{-2}}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性**
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性
- 4.9 二阶谐振系统的S平面分析
- 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布
- 4.11 线性系统的稳定性
- 4.12 双边拉普拉斯变换
- 4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

4.7.1 系统函数的零、极点分布与单位冲激响应的波形

系统的单位冲激响应是系统函数的拉氏逆变换：

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$$

一般的，系统函数是有理分式，于是

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{N(s)}{D(s)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{A\prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)}\right\} = L^{-1}\left\{\sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - p_k}\right\} = \sum_{k=1}^N A_k e^{p_k t} u(t)$$

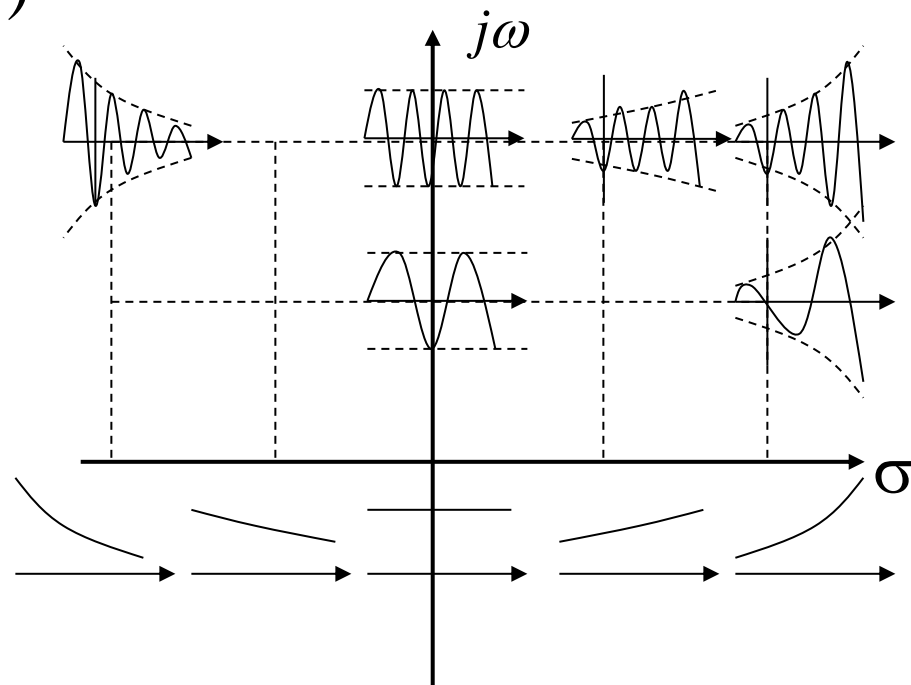
上式中， z_k 与 p_k 分别是系统函数零点与极点，零点与极点在 s 平面上的位置不同，对单位冲激响应的的影响不同。

s 平面是一个复平面， σ 轴是实轴，虚轴用 $j\omega$ 来记。平面上不同的点 s ，对应着不同的时间信号 e^{st} 。

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

信号 e^{st} ，表示的是幅度按指数变化的正余弦信号。**离实轴越远的点，表示信号变化的频率越高；离虚轴越远的点，表示信号幅度增长或衰减得越快。**

**实轴上的点，表示单调指数变化的信号；
虚轴上的点，表示等幅振荡的正余弦信号。**



一阶极点

$$H(s) = \frac{1}{s}, \quad p_1 = 0 \text{在原点}, \quad h(t) = L^{-1}[H(s)] = u(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s + \alpha}, \quad p_1 = -\alpha$$

$\alpha > 0$, 在左实轴上, $h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$, 指数衰减

$\alpha < 0$, 在右实轴上, $h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$, 指数增加

$$H(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad p_{1,2} = \pm j\omega, \text{ 在虚轴上}$$

$h(t) = \sin(\omega t)u(t)$, 等幅振荡

$$H(s) = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}, \quad p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega \quad h(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega t u(t)$$

当 $\alpha > 0$, 极点在左半平面, 衰减振荡

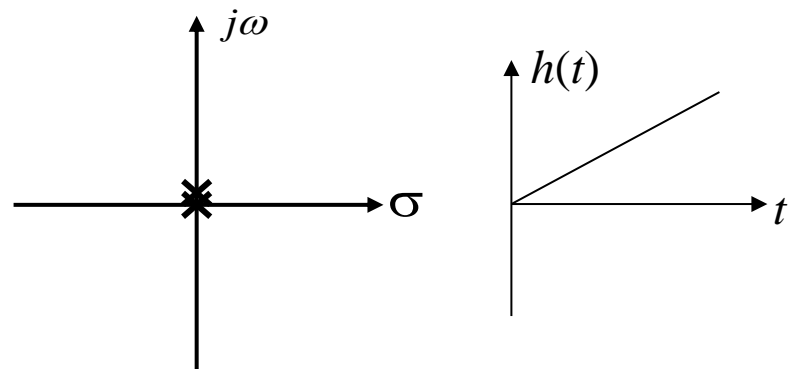
当 $\alpha < 0$, 极点在右半平面, 增幅振荡

二阶极点

$$H(s) = \frac{1}{s^2}, \text{极点在原点,}$$

$$h(t) = tu(t)$$

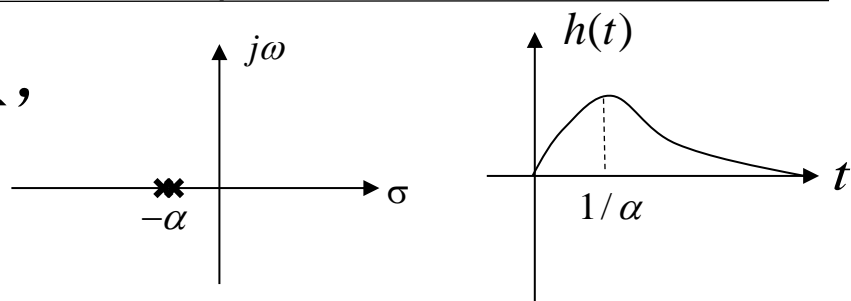
$$t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow \infty$$



$$H(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^2}, \text{极点在实轴上,}$$

$$h(t) = t e^{-\alpha t} u(t), \alpha > 0$$

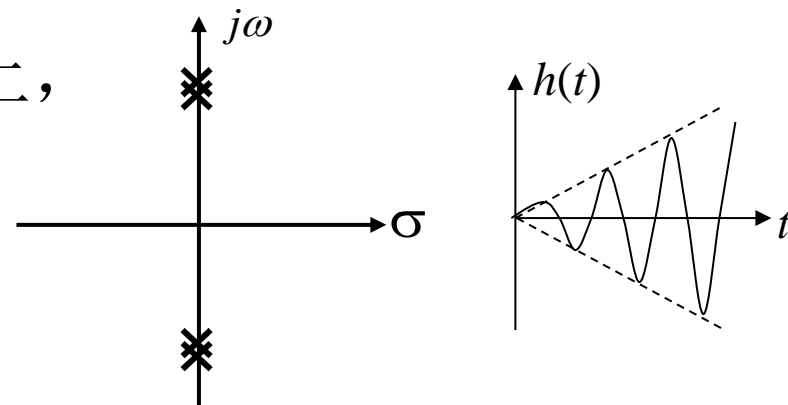
$$t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow 0$$



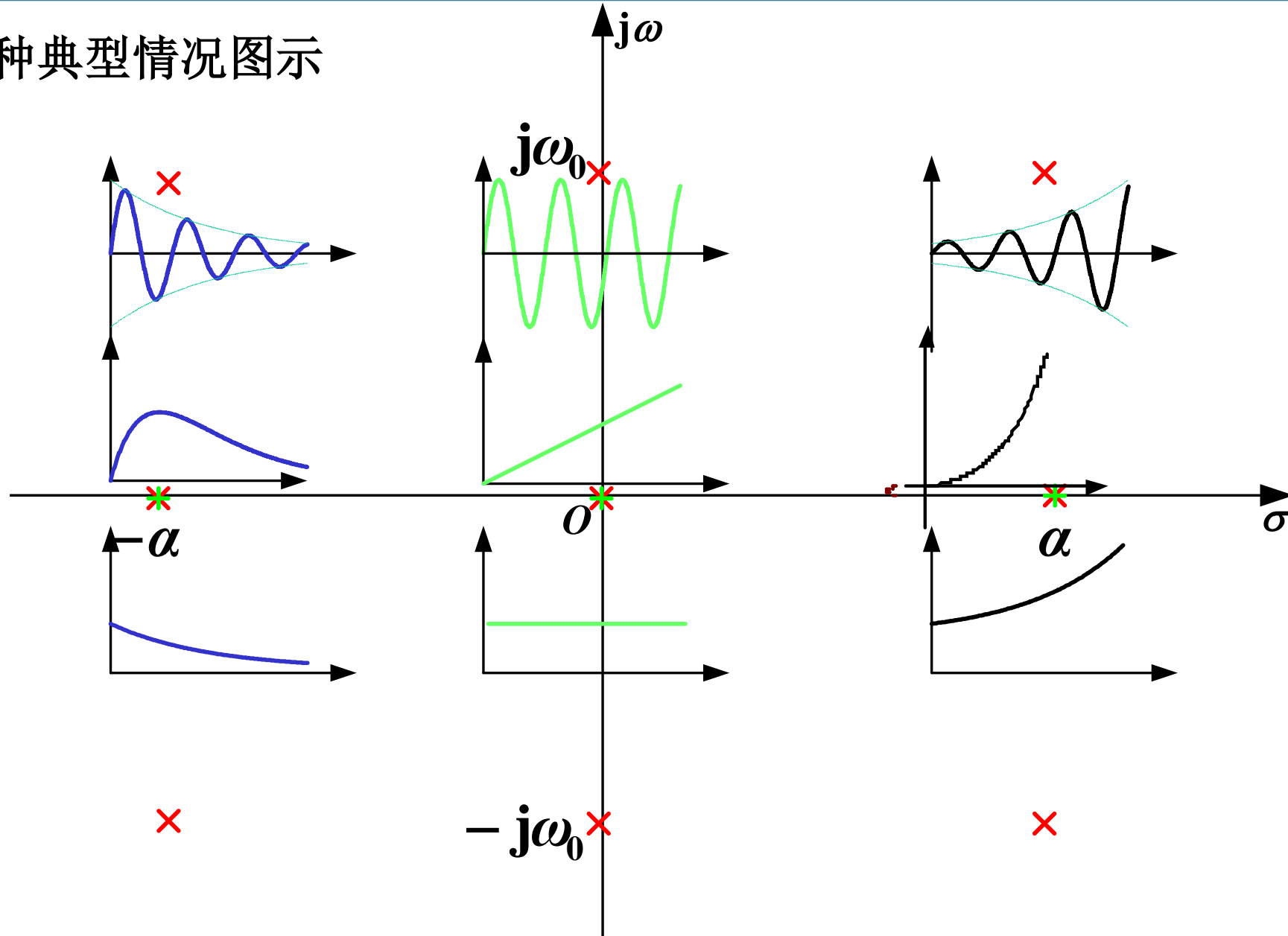
$$H(s) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}, \text{极点在虚轴上,}$$

$$h(t) = t \sin \omega t u(t)$$

$$t \rightarrow \infty, h(t) \text{ 增幅振荡}$$



几种典型情况图示



$H(s)$ 极点与 $h(t)$ 波形特征的对应关系:

极点于s平面左半平面

$h(t)$ 呈衰减形式

极点于s平面右半平面

$h(t)$ 呈增长形式

极点于s平面虚轴上（不含原点）

$h(t)$ 等幅振荡（一阶极点）
或增长振荡（多阶极点）

极点于s平面实轴上（不含原点）

$h(t)$ 呈现与指数相关的变化
（一阶或多阶极点）

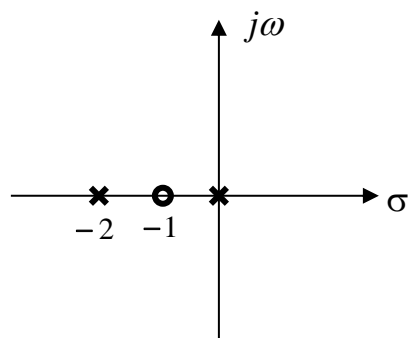
极点于s平面原点

$h(t)$ 等值 $u(t)$ （一阶极点）或
增长 t^n （多阶极点）

例4-27：已知系统函数如下，试作出它们的零极图，求出其单位冲激响应并画出其波形图。

$$H_1(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} \quad H_2(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2} \quad H_3(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

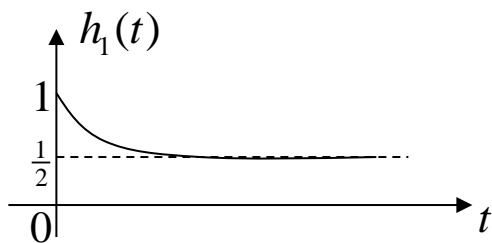
解： $H_1(s)$ 的零极图如下： 因为



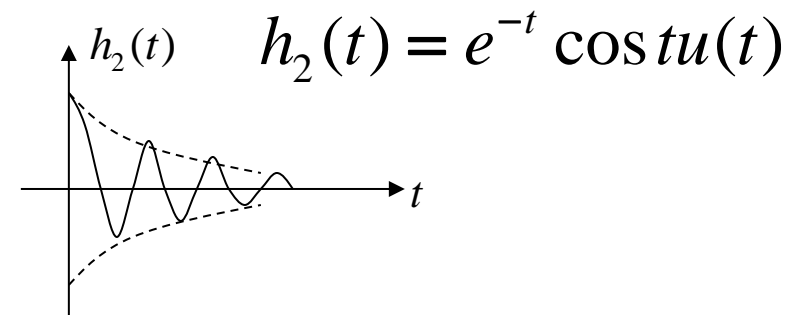
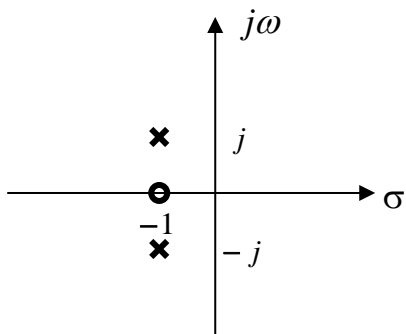
$$H_1(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)}$$

所以

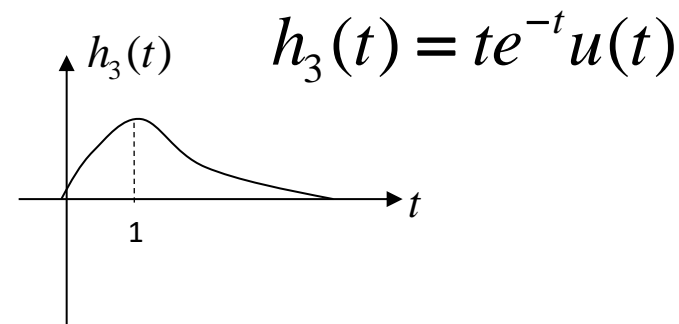
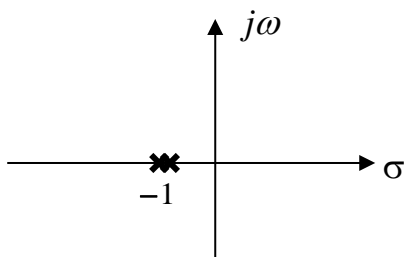
$$h_1(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})u(t)$$



$H_2(s)$ 的零极图如下: $H_2(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$



$H_3(s)$ 的零极图如下: $H_3(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$



由上例可见，若极点是多阶极点，其对应的时间波形与一阶极点时不同。

4.7.2 系统函数和激励的零、极点分布与响应的各分量

系统函数与激励的**极点**共同决定响应的波形。 $Y(s) = X(s)H(s)$

例4-28： 设系统函数 $H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$ ，系统的激励 $x(t) = u(t)$ ，初始状态为零，求系统的响应，并指出自由响应与强迫响应。

解： 系统的零状态响应的拉氏变换

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} = \frac{\frac{3}{2}}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2}$$

所以，系统的零状态响应是 $y(t) = \frac{1}{2}(3 - 4e^{-t} + e^{-2t})u(t)$

其中自由响应 $y_h(t) = (\frac{1}{2}e^{-2t} - 2e^{-t})u(t)$ ，强迫响应 $y_p(t) = \frac{3}{2}u(t)$

系统函数的极点对应自由响应分量；激励的极点对应强迫响应分量。

设系统函数 $H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$ ，系统的激励 $x(t) = e^{-3t}u(t)$ ，初始状态为零，则系统的强迫响应为（ ）

- ☒ A 0
- ☐ B $(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$
- ☐ C $(e^{-t} + e^{-2t})u(t)$
- ☐ D $2e^{-3t}u(t)$

提交

例4-29： 设系统函数 $H(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$ ，系统的激励 $x(t) = e^{-3t}u(t)$ ，初始状态为零，求系统的响应，并指出自由响应与强迫响应。

解： 系统的零状态响应的拉氏变换

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1}{\textcolor{red}{s+3}} \cdot \frac{\textcolor{red}{s+3}}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

所以，系统的零状态响应是

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

响应中只有自由响应分量，强迫响应分量等于零，因为**系统函数与激励函数有零极点相互抵消**。

所以，如果系统函数与激励函数有零极点相互抵消，响应中将不会出现对应的时间分量。

例4-30： 已知某LTI系统微分方程为

$$r''(t) + 2r'(t) + r(t) = e'(t)$$

求该系统在激励 $e(t) = u(t)$ 时的零状态响应 $r_{zs}(t)$ 。

解： 对微分方程两边同求拉氏变换：

$$(s^2 + 2s + 1)R(s) = sE(s)$$

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{s}{s^2 + 2s + 1} = \frac{s}{(s + 1)^2}$$

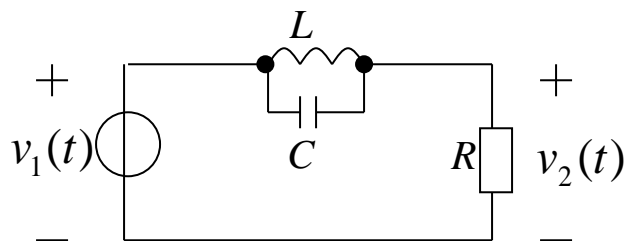
求激励的拉氏变换： $E(s) = \frac{1}{s}$

$$R(s) = H(s)E(s) = \frac{sE(s)}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s + 1)^2}$$

利用常用函数 $tu(t)$ 的拉氏变换为 $1/s^2$ ，以及频移性质，求拉氏逆变换，可得零状态响应的时域表达式：

$$r_{zs}(t) = te^{-t}u(t)$$

例4-31： 电路如图所示，求系统转移函数 $H(s)=V_2(s)/V_1(s)$ ；如果激励信号为



$v_1(t)=\cos(2t)u(t)$ ，为使响应中不存在正弦稳态分量，求 LC 的约束；若 $R=1\ \Omega$ ， $L=1\ \text{H}$ ，求 C 值和响应 $v_2(t)$ 。

解： 系统函数
$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R}{R + \frac{sL}{LCs^2 + 1}} = \frac{R(LCs^2 + 1)}{R(LCs^2 + 1) + sL} = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

激励的拉氏变换为
$$V_1(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$$

响应的拉氏变换为
$$V_2(s) = H(s)V_1(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \cdot \frac{s}{s^2 + 4}$$

为使响应中不出现**正弦稳态响应**， $V_2(s)$ 分母中不应出现 s^2+4 （**等幅振荡**）的因子。

$$V_2(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} \quad \therefore \quad \frac{1}{LC} = 4 \rightarrow LC = \frac{1}{4} \quad C = \frac{1}{4L} = \frac{1}{4} \text{ F}$$

此时

$$V_2(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 4} = \frac{s}{(s+2)^2} = \frac{K_{11}}{(s+2)^2} + \frac{K_{12}}{(s+2)}$$

$$K_{11} = (s+2)^2 V_2(s) \big|_{s=-2} = s \big|_{s=-2} = -2 \quad K_{12} = \frac{d}{ds} [(s+2)^2 V_2(s)] \big|_{s=-2} = 1$$

$$\therefore V_2(s) = \frac{-2}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)} \quad v_2(t) = (1-2t)e^{-2t}u(t)$$

零状态响应的拉氏变换位于s平面**左半平面的极点决定瞬态响应分量**；位于虚轴上的极点决定稳态响应分量，其中**虚轴上的共轭极点决定正弦稳态响应分量**，位于**原点处的一阶极点决定直流稳态响应分量**。

例4-32: 已知线性时不变系统，当输入 $x(t)=Eu(t)$ 时，零状态响应与零输入响应分别为：

$$y_{zs}(t) = E\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t}\right)u(t) \quad y_{zi}(t) = 3e^{-t} - 5e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

试求系统函数 $H(s)$ ，并写出微分方程，画出系统模拟框图。

解： 系统零状态响应的拉氏变换为

$$\begin{aligned} Y_{zs}(s) &= \frac{E}{6s} - \frac{1}{2} \frac{E}{s+2} + \frac{1}{3} \frac{E}{s+3} = \frac{E\left[\frac{1}{6}(s+2)(s+3) - \frac{1}{2}s(s+3) + \frac{1}{3}s(s+2)\right]}{s(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{E}{s(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

激励的拉氏变换为 $X(s) = \frac{E}{s}$

所以系统函数

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

由零输入响应 $y_{zi}(t) = 3e^{-t} - 5e^{-2t} + 2e^{-3t}$ 可知，系统有三个特征根，系统函数应有三个极点。特征根 $\alpha = -1$ （极点 $s = -1$ ）在系统函数的分母中未出现，是由于系统函数的零、极点相消导致的。

所以，为了列写系统的微分方程，系统函数的分子和分母都乘以 $s+1$ ：

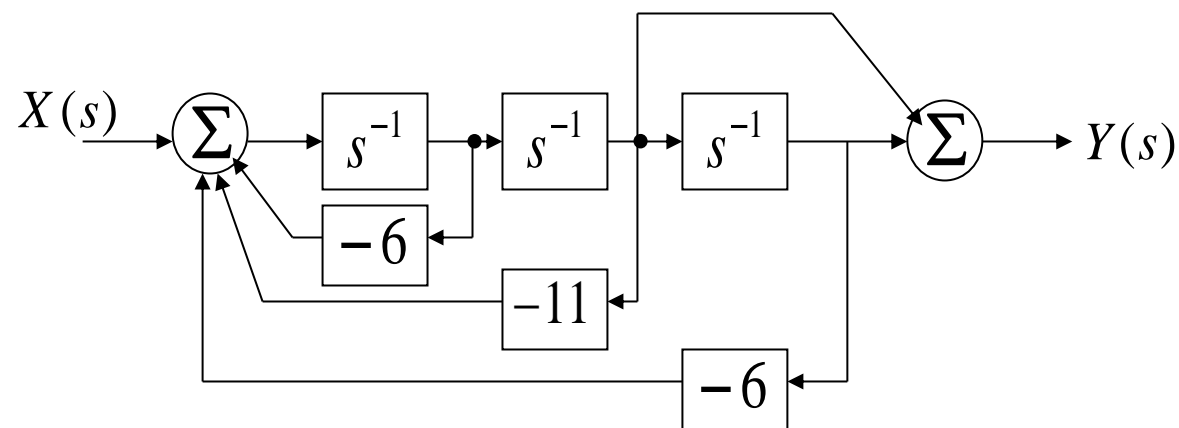
$$H(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{s+1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

系统的三阶微分方程为：

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 6 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$H(s) = \frac{s+1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{s^{-2} + s^{-3}}{1 + 6s^{-1} + 11s^{-2} + 6s^{-3}}$$

系统的模拟框图：

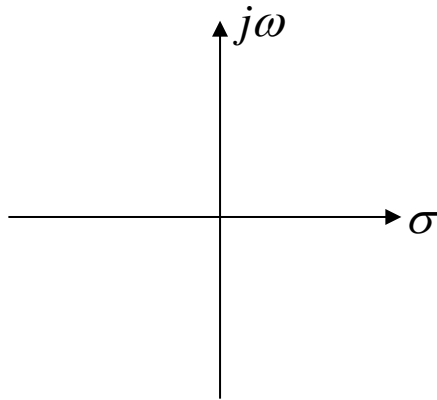


- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性**
- 4.9 二阶谐振系统的S平面分析
- 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布
- 4.11 线性系统的稳定性
- 4.12 双边拉普拉斯变换
- 4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

4.8.1 $H(s)$ 与 $H(\omega)$

拉普拉斯变换是傅里叶变换由实频域 ω 至复频域 s 的推广，傅里叶变换是拉普拉斯变换在 s 平面虚轴上的特例。**一般来说**，

$$H(\omega) = H(s) \big|_{s=j\omega}$$



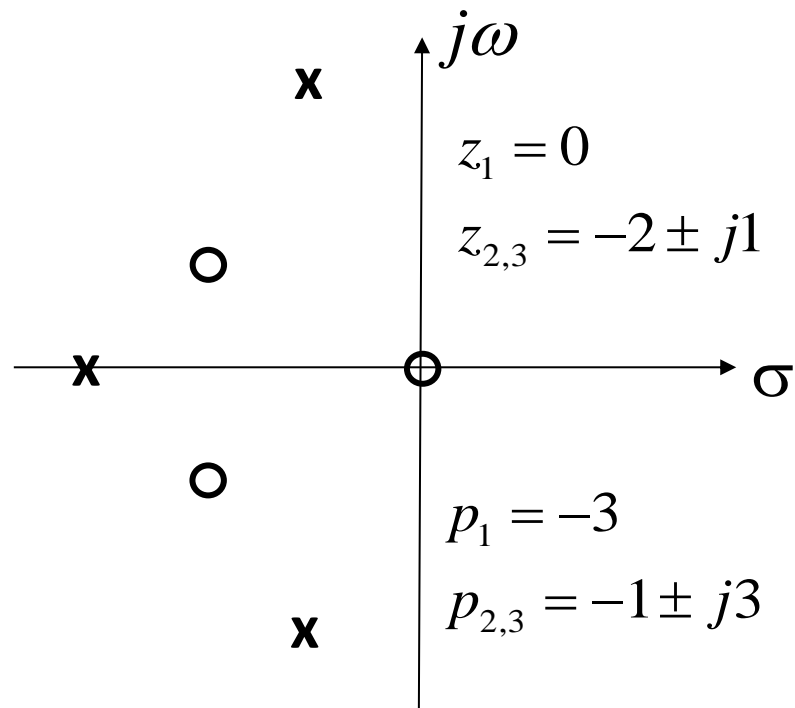
4.8.2 $H(s)$ 的零极点分布与 $H(\omega)$

由于 $H(s)$ 一般是有理分式，可表示为

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{G \prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)}$$

G —常数

例4-33: 已知系统函数 $H(s)$ 的零、极点分布如下图所示，且 $h(0_+)=5$ ，求 $H(s)$ 的表达式。



解:

$$H(s) = \frac{G \prod_{k=1}^3 (s - z_k)}{\prod_{k=1}^3 (s - p_k)} = \frac{Gs(s+2-j)(s+2+j)}{(s+3)(s+1-j3)(s+1+j3)}$$

$$= \frac{G(s^3 + 4s^2 + 5s)}{s^3 + 5s^2 + 16s + 30}$$

$$= G + \underbrace{\frac{-G(s^2 + 11s + 30)}{s^3 + 5s^2 + 16s + 30}}_{H_1(s)}$$

由初值定理, $h(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH_1(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-G(s^3 + 11s^2 + 30s)}{s^3 + 5s^2 + 16s + 30} = -G = 5$

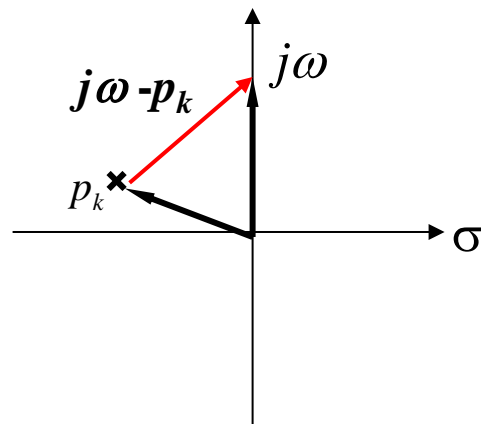
$$G = -5, H(s) = \frac{-5(s^3 + 4s^2 + 5s)}{s^3 + 5s^2 + 16s + 30}$$

系统的频率响应**一般**可写为（条件参见教材4.13节）

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{G \prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{G \prod_{k=1}^M (j\omega - z_k)}{\prod_{k=1}^N (j\omega - p_k)}$$

上式中，分子和分母的每一个因式，均表示s平面上一个指向 $j\omega$ 轴的矢量。

如图所示，因式 $(j\omega - p_k)$ 表示的是沿虚轴变化的矢量 $j\omega$ 与由原点指向 p_k 的矢量的差矢量。



上式中分子上的因式对应的矢量，称为**零点矢量**；分母上的因式对应的矢量，称为**极点矢量**。

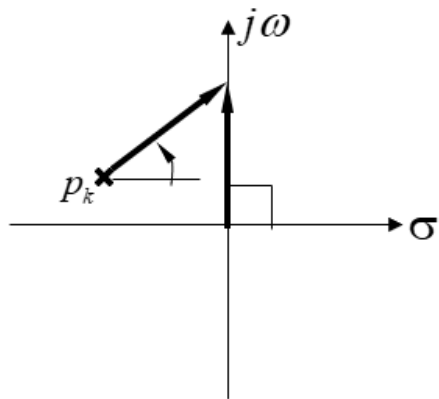
每个矢量均有它的模与相角，于是

$$H(\omega) = \frac{G \prod_{k=1}^M (j\omega - z_k)}{\prod_{k=1}^N (j\omega - p_k)} = \frac{G \prod_{k=1}^M B_k e^{j\beta_k}}{\prod_{k=1}^N A_k e^{j\theta_k}} = \frac{G \prod_{k=1}^M B_k}{\prod_{k=1}^N A_k} e^{j(\sum_{k=1}^M \beta_k - \sum_{k=1}^N \theta_k)}$$

$$= |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|H(\omega)| = \frac{G \prod_{k=1}^M B_k}{\prod_{k=1}^N A_k}$$

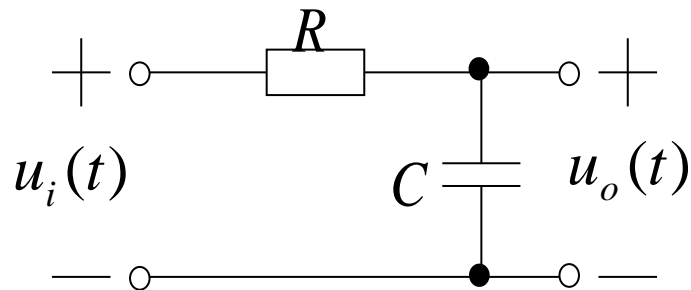
$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^M \beta_k - \sum_{k=1}^N \theta_k$$



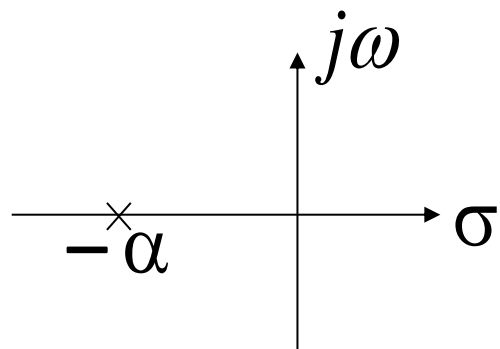
系统的幅频响应等于零点矢量的模之积与极点矢量的模之积的比值。

系统的相频响应等于零点矢量相角之和减去极点矢量相角之和。

例4-34: 如图所示RC电路，试求其系统函数，作出其零极图，求其频率响应，并粗略的画出其频响曲线。



解: 电路的系统函数为



$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{RCs + 1} \\
 &= \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{\alpha}{s + \alpha} \quad \left(\alpha = \frac{1}{RC} \right)
 \end{aligned}$$

4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性

由系统函数 $H(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}$ 粗略画出频率响应：

(1) 当 $\omega = 0$ 时，极点矢量指向原点，其模长为 α ，相角等于0；于是 $|H(\omega)| = \alpha/\alpha = 1$ ， $\varphi(\omega) = 0$ 。

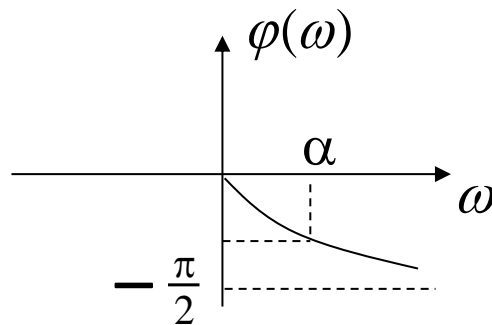
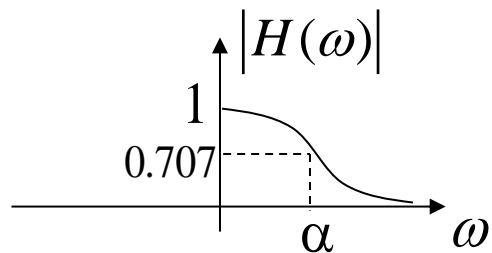
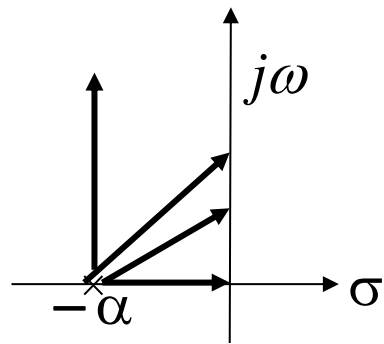
(2) 当 $\omega \uparrow$ ，极点矢量模 \uparrow ，相角 \uparrow ； $|H(\omega)| \downarrow$ ， $\varphi(\omega) \downarrow$ 。

(3) 当 $\omega = \alpha$ ， $|H(\omega)| \approx 0.707$ ， $\varphi(\omega) = -\pi/4$ 。

(4) 当 $\omega \rightarrow \infty$ ， $|H(\omega)| \rightarrow 0$ ， $\varphi(\omega) \rightarrow -\pi/2$ 。

由其幅频响应曲线可见，是一**低通滤波器**。

$$H(\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}} e^{-j\arctg(\frac{\omega}{\alpha})}$$



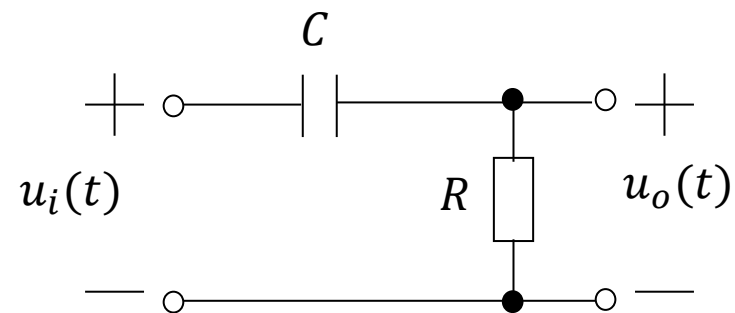
作业

基础题（需提交）：4-13（a）（b），4-16，4-22，4-24（a）（b）（c），4-26（a）（c），4-27，4-33。

加强题（选做，不提交）：4-13（c），4-26（b）（d）。

习题错误订正：4-16电路图中电容和受控源下端口是连起来的。

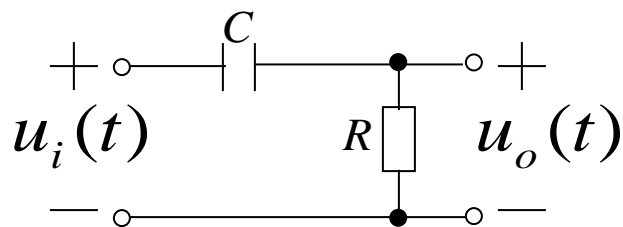
某RC电路如图所示，这表示一个（ ）



- ☐ A 低通滤波器
- ☒ B 高通滤波器
- ☐ C 带通滤波器
- ☐ D 全通滤波器

提交

例4-35：如图所示RC电路，试求其系统函数，作出其零极图，求其频率响应，并粗略的画出其频响曲线。

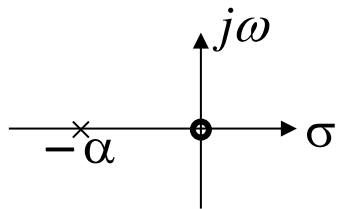


解： 电路的系统函数

$$H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{RCs}{RCs + 1}$$

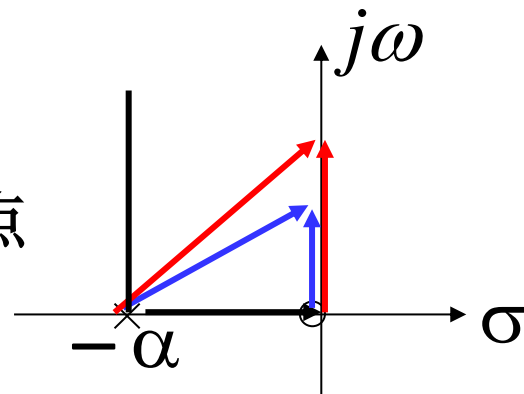
$$= \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{s}{s + \alpha} \quad \left(\alpha = \frac{1}{RC} \right)$$

$$H(\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \alpha}$$



由系统函数 $H(s) = \frac{s}{s + \alpha}$ 粗略画出频率响应:

(1) 当 $\omega = 0$ 时, 极点矢量指向原点, 其模长为 α , 相角为 0 ; 零点矢量长度为 0 , 相角等于 $\pi/2$; 于是 $|H(\omega)| = 0$, $\varphi(\omega) = \pi/2$ 。



(2) 当 $\omega \uparrow$, 极点矢量模 \uparrow , 相角 \uparrow ; 零点矢量的模 \uparrow , 且增大的速率比极点矢量的高, 相角等于 $\pi/2$; $|H(\omega)| \uparrow$, $\varphi(\omega) \downarrow = (\pi/2) - \arctg(\omega/\alpha)$ 。

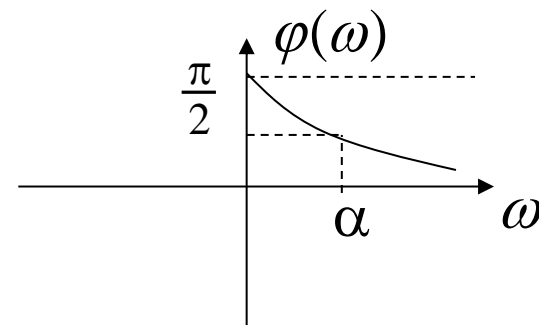
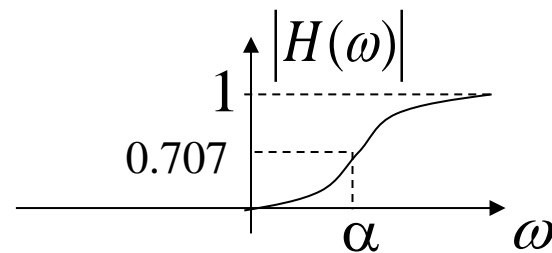
例如, 相角为 $\pi/6$ 时, 零点矢量的模为 $\sqrt{3}\alpha/3$, 极点矢量的模为 $2\sqrt{3}\alpha/3$, $|H(\omega)| = 1/2$; 相角趋近 $\pi/4$ 时, 零点矢量的模趋近 α , 极点矢量的模趋近 $\sqrt{2}\alpha$, $|H(\omega)| \rightarrow 0.707$ 。

(3) 当 $\omega = \alpha$, $|H(\omega)| \approx 0.707$, $\varphi(\omega) = \pi/4$ 。

(4) 当 $\omega \rightarrow \infty$, 零点矢量与极点矢量均垂直于实轴指向无穷远, 幅度均为无穷, 相角均为 $\pi/2$ 。 $|H(\omega)| \rightarrow 1$, $\varphi(\omega) \rightarrow 0$ 。

$$|H(\omega)| = \frac{|\omega|}{\sqrt{\omega^2 + \alpha^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) & \omega > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) & \omega < 0 \end{cases}$$

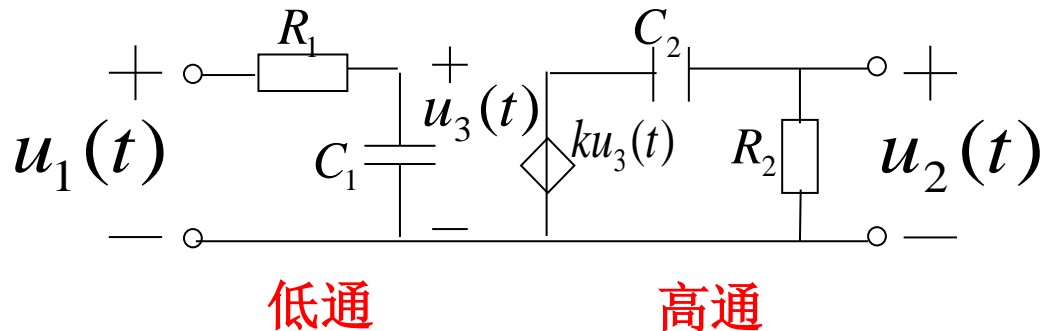


由其幅频响应曲线可见，这是一**高通滤波器**。

$$H_{HP}(\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \alpha}, \quad H_{LP}(\omega) = \frac{\alpha}{j\omega + \alpha}$$

$$H_{HP}(\omega) = 1 - H_{LP}(\omega)$$

例4-36：如图所示二阶RC电路，试求其系统函数，设 $R_2C_2 \gg R_1C_1$ ，作出其零极图，并粗略的画出其频响曲线。



解：电路的系统函数为

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{U_2(s)}{kU_3(s)} \cdot \frac{kU_3(s)}{U_1(s)}$$

由前两例可知

$$\frac{U_3(s)}{U_1(s)} = \frac{\alpha_1}{s + \alpha_1} \quad \frac{U_2(s)}{kU_3(s)} = \frac{s}{s + \alpha_2} \quad (\alpha_1 = \frac{1}{R_1C_1} \gg \frac{1}{R_2C_2} = \alpha_2)$$

所以

$$H(s) = \frac{ks\alpha_1}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)}$$

$$H(\omega) = \frac{j\omega k\alpha_1}{(j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2)}$$

(1) 当 $\omega = 0$ ，零点矢量的模等于0，相角等于 $\pi/2$ ，极点矢量的相角均等于零，幅频响应 $|H(\omega)| = 0$ ， $\varphi(\omega) = \pi/2$ 。

(2) 当 ω 较小时，主要的变化是零点矢量与极点 $-\alpha_2$ 对应的矢量， $|j\omega + \alpha_1| \approx \alpha_1$ ，此时

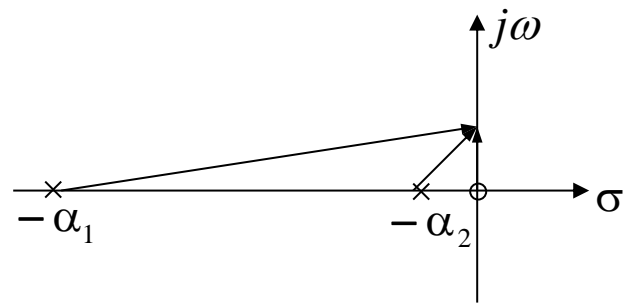
$$H(\omega) = \frac{kj\omega\alpha_1}{(j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2)} \approx \frac{kj\omega}{j\omega + \alpha_2}$$

相当于截止频率等于 α_2 的高通滤波器。

说明在低频段，主要是电路2的高通特性在起作用。

$$H(\omega) = \frac{kj\omega\alpha_1}{(j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2)}$$

系统函数的零极图

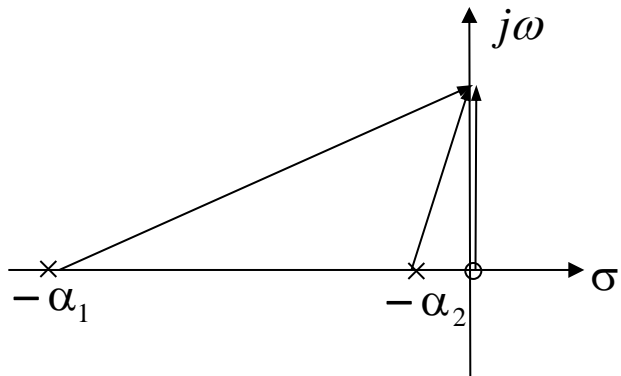


4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性

(3) 当 $\alpha_2 < \omega < \alpha_1$ 时, $|j\omega + \alpha_1| \approx \alpha_1$, $j\omega + \alpha_2 \approx j\omega$, 此时

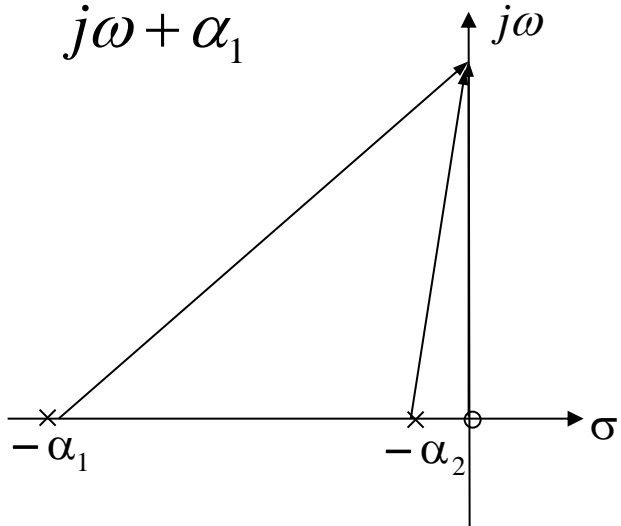
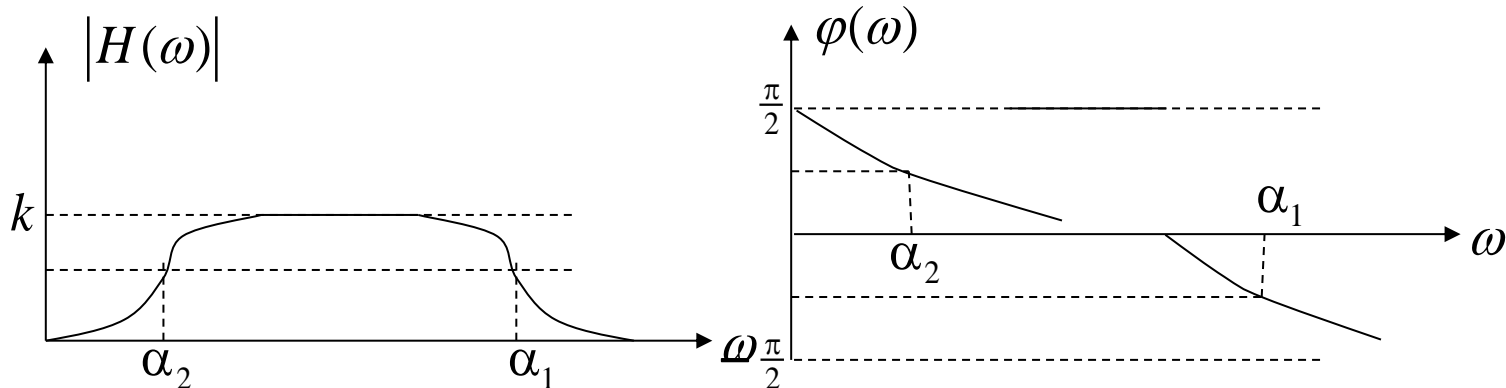
$H(\omega) \approx k$, 相当于截止频率为 α_1 和 α_2 的**带通滤波器**。

说明在中频段, C_1 近似于开路, C_2 近似于短路, 等效于信号 u_1 经受控源的 k 倍放大送往输出端。 $u_2(t) \approx ku_1(t)$ 。



(4) 当 $\omega \approx \alpha_1$ 时, $j\omega + \alpha_2 \approx j\omega$, 此时 $H(\omega) = \frac{j\omega k \alpha_1}{(j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2)} \approx \frac{k \alpha_1}{j\omega + \alpha_1}$,

相当于截止频率为 α_1 的**低通滤波器**。



本次课内容

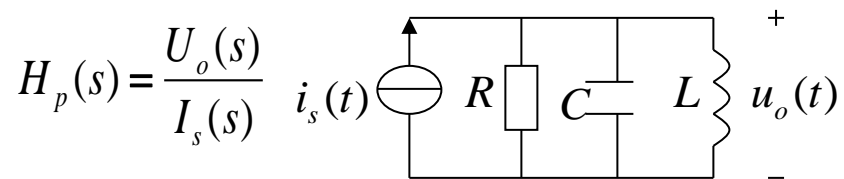
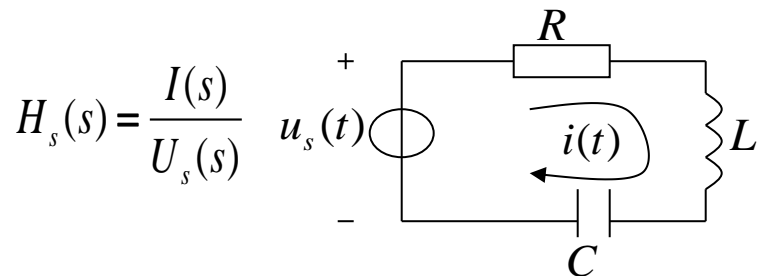
- 4.9 二阶谐振系统的S平面分析
- 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布
- 4.11 线性系统的稳定性

本次课目标

1. 巩固运用系统函数零、极点分布分析频响特性的能力；
2. 了解全通函数与最小相移函数的零、极点分布特点；
3. 熟练运用系统函数判断系统的稳定性。

- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性
- 4.9 二阶谐振系统的S平面分析
- 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布
- 4.11 线性系统的稳定性
- 4.12 双边拉普拉斯变换
- 4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

含有电容、电感两类储能元件的二阶系统可以具有谐振特性，常可利用这一性能构成**带通**、带阻滤波器。



串、并联RLC回路的对偶性：系统函数中的L和C可互换。

以并联RLC回路为例作分析。先求系统函数

$$H_p(s) = \frac{U_o(s)}{I_s(s)} = \frac{R \frac{L}{C}}{R s L + \frac{R}{s C} + \frac{L}{C}} = \frac{R L s}{R L C s^2 + R + s L} = \frac{1}{C} \frac{s}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{C} \frac{s}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

当 $R > \frac{1}{2} \sqrt{L/C}$ ，极点为共轭复根。

$$p_{1,2} = \frac{-\frac{1}{RC} \pm j\sqrt{\frac{4}{LC} - (\frac{1}{RC})^2}}{2} = -\frac{1}{2RC} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{1}{2RC})^2} = -\alpha \pm j\Omega_d$$

$$\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

谐振频率

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

衰减因子

$$\Omega_d = \sqrt{\Omega_0^2 - \alpha^2}$$

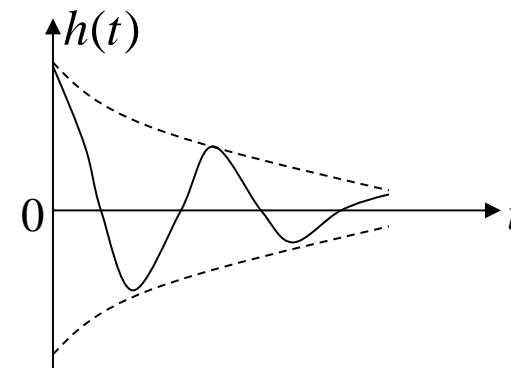
系统函数:

$$H_p(s) = \frac{1}{C} \frac{s}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{1}{C} \frac{s}{(s+\alpha-j\Omega_d)(s+\alpha+j\Omega_d)} = \frac{1}{C} \frac{s}{(s+\alpha)^2 + \Omega_d^2}$$

$$= \frac{1}{C} \left[\frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2 + \Omega_d^2} - \frac{\alpha}{\Omega_d} \cdot \frac{\Omega_d}{(s+\alpha)^2 + \Omega_d^2} \right]$$

单位冲激响应:

$$h_p(t) = \frac{1}{C} e^{-\alpha t} (\cos \Omega_d t - \frac{\alpha}{\Omega_d} \sin \Omega_d t) u(t)$$

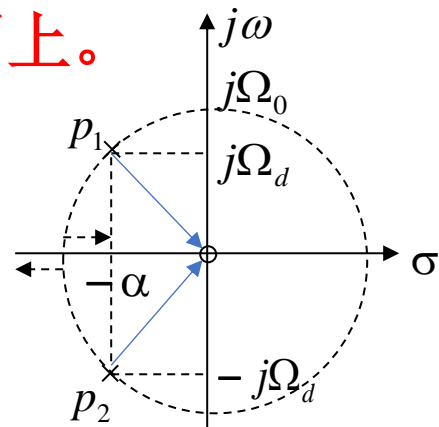


1) 如果保持 LC 不变, 即 Ω_0 不变, 两个极点在以 Ω_0 为半径的左半圆上。

$$\Omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \alpha = \frac{1}{2RC}$$

$$\Omega_d = \sqrt{\Omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\Omega_d$$



系统函数的零极图

a) 若 R 减小, 则 α 增加, Ω_d 减小, 两极点就沿着以 Ω_0 为半径的左半圆向实轴靠拢。

b) 当 $R = \frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ ($\alpha = \Omega_0$) 时, $\Omega_d = 0$, 极点变成了在实轴上 $-\alpha$ 处的二阶极点。系统函数与单位冲激响应分别为:

$$H_p(s) = \frac{1}{C} \frac{s}{(s + \alpha)^2}$$

$$h_p(t) = \frac{1}{C} (1 - \alpha t) e^{-\alpha t} u(t)$$

c) 若 R 继续减小, 即 $R < \frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ ($\alpha > \Omega_0$), Ω_d 为虚数, 两极点变为实数, 在实轴上向正负方向分开, 类似于例4-36中二阶RC电路的情况。

2) 若保持 RLC 不变，即系统零极点的位置不变，零点矢量的相角始终等于 $\pi/2$ 。

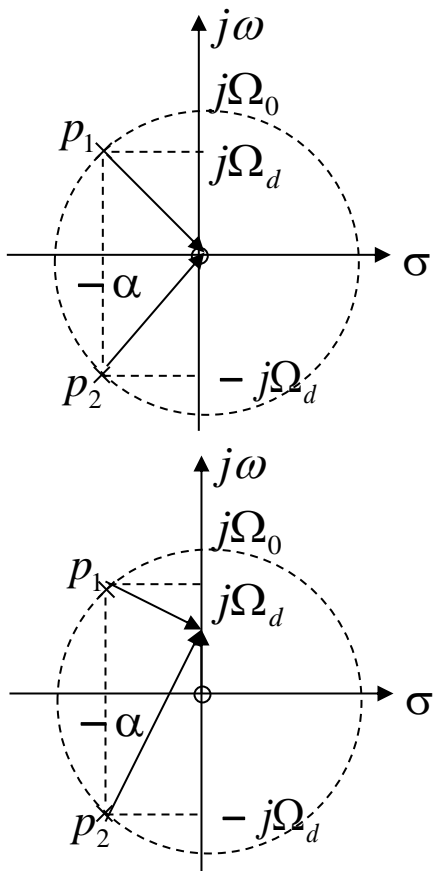
$$H_p(s) = \frac{1}{C} \frac{s}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

a) 当 $\omega=0$ ，零点矢量的模等于0，因此幅频响应 $|H(\omega)|=0$ ；

相频响应因为两极点矢量的相角正负相等抵消，只有零点矢量的相角，所以 $\varphi(\omega)=\pi/2$ 。

b) 当 $0 < \omega < \Omega_0$ ，随着 $\omega \uparrow$ ，零点矢量的模 \uparrow ，极点矢量的模变化较小，幅频响应 $|H(\omega)| \uparrow$ ；

因为两极点矢量的相角正的增加，负的减小，总体增加，而零点矢量的相角恒等于 $\pi/2$ ，所以相频响应 $\varphi(\omega) \downarrow$ 。



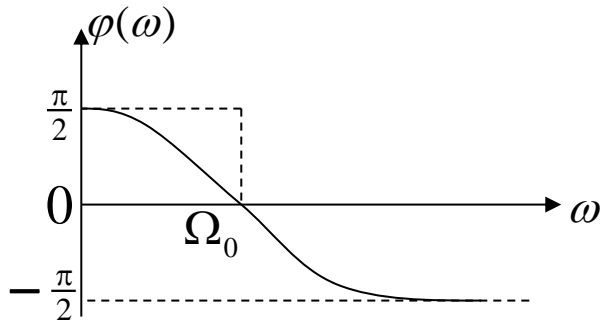
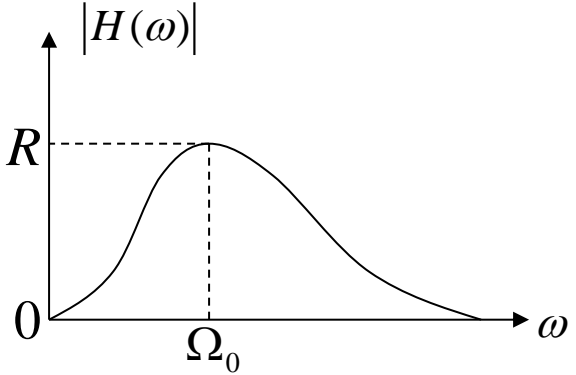
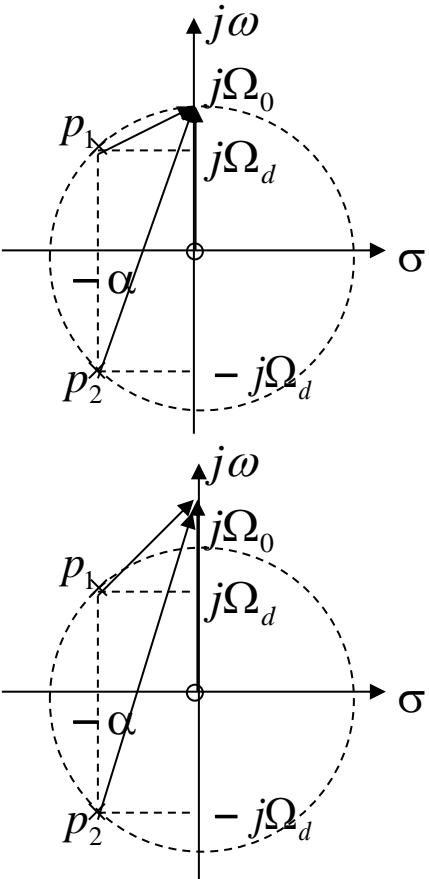
4.9 二阶谐振系统的S平面分析

c) 当 $\omega=\Omega_0$ （谐振），零点矢量的模为 Ω_0 ，可证明此时幅频响应是极大值；两极点矢量的相角之和为 $\pi/2$ ，相频响应 $\varphi(\omega)=0$ 。

$$|H(\Omega_0)| = \frac{1}{C} \frac{\Omega_0}{|P_1||P_2|} = \frac{1}{C} \frac{1}{2\alpha} = R$$

d) 当 $\omega > \Omega_0$ 且继续增加，两极点矢量的模均增加，零点矢量的模也增加，幅频响应减小；相频响应因为两极点矢量的相角均正向增加而 $\varphi(\omega) < 0 \downarrow$ 。

e) 当 $\omega \rightarrow \infty$ ，两极点矢量的模与零点矢量的模均 $\rightarrow \infty$ ，幅频响应 $|H(\omega)| \rightarrow 0$ ；相频响应 $\varphi(\omega)$ 因为两极点矢量的幅角均趋于 $\pi/2$ 而趋于 $-\pi/2$ 。



当系统函数有一对靠近虚轴的极点 $p = \alpha_i \pm j\Omega_i$ ($\alpha_i \ll \Omega_0$), $\Omega_i \approx \Omega_0$, 系统的幅频响应在 $\omega = \Omega_i$ 附近会有一个峰值点 (谐振), 相频响应负向变化;

当系统函数有一对靠近虚轴的零点 $z = \alpha_j \pm j\Omega_j$ ($\alpha_j \ll \Omega_0$), 系统的幅频响应在 $\omega = \Omega_j$ 附近会有一个谷值点, 相频响应正向变化。

若系统函数有远离虚轴的零点和极点, 那它们对系统的频响曲线的形状影响较小, 只是对总的幅频响应与相频响应的大小有所影响。

- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性
- 4.9 二阶谐振系统的S平面分析
- 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布**
- 4.11 线性系统的稳定性
- 4.12 双边拉普拉斯变换
- 4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

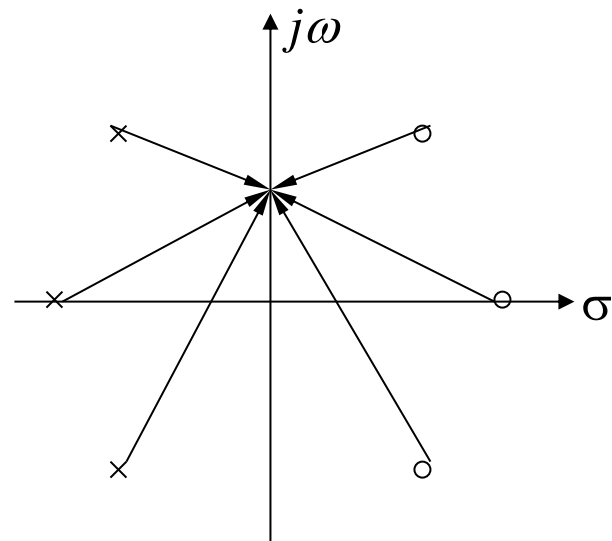
4.10.1 全通系统的零极点分布

全通系统的幅频响应在所有频率上均为一常数。

全通系统的相频响应没有受到限制，会改变输入信号的相频特性，可以在传输系统中作相位均衡器或移相器。

全通系统函数的零点矢量的模之积与极点矢量的模之积，在所有频率上均相等。要做到这一点，零点与极点应该以虚轴为镜像对称分布。

$$|H(\omega)| = \frac{G \prod_{k=1}^N B_k}{\prod_{k=1}^N A_k} = G$$



4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布

例4-37: 如图所示RC电桥, 求其传输函数 $H(s)$, 并说明当 $R_1C_1=R_2C_2$ 时电路是全通网络。

解: 画出s域等效电路, 输出电压的拉氏变换为

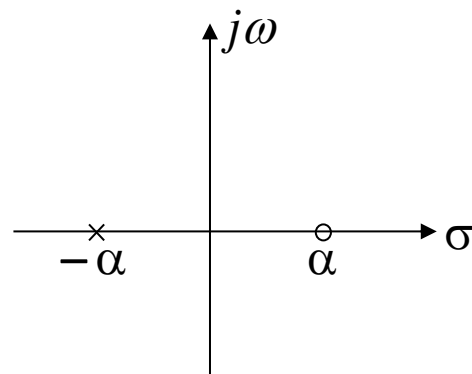
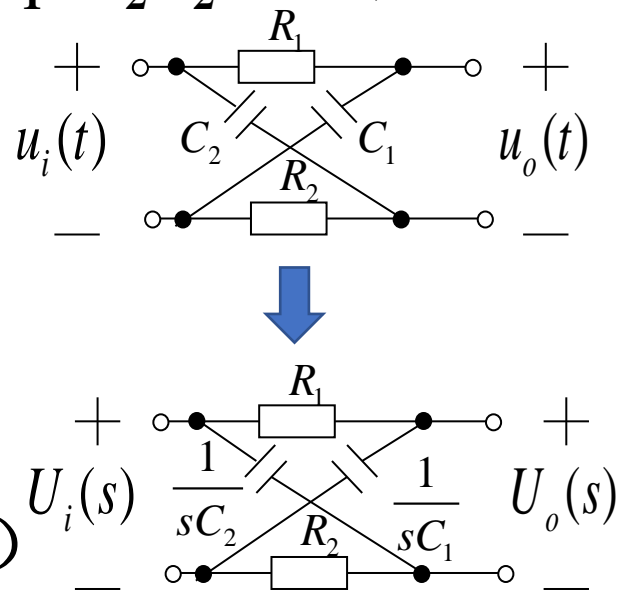
$$U_o(s) = U_{C_1}(s) - U_{R_2}(s) = U_i(s) \cdot \frac{1}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} - U_i(s) \cdot \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{sC_2}}$$

(U_{C_1} 可由 R_1 和 C_1 串联电路得到, U_{R_2} 可由 R_2 和 C_2 串联电路得到)

系统的传输函数 (传输电压比) 为

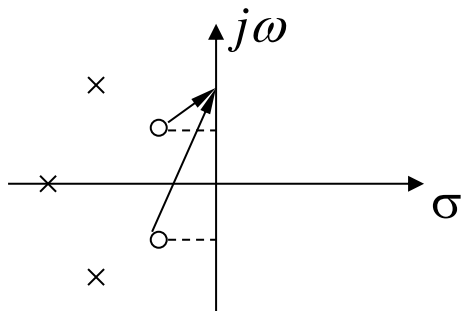
$$H(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} - \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{1}{s + \frac{1}{R_1C_1}} - \frac{s}{s + \frac{1}{R_2C_2}}$$

当 $R_1C_1=R_2C_2=1/\alpha$ 时, $H(s) = -\frac{s-\alpha}{s+\alpha}$, 零极点以虚轴镜像对称, 电路为全通网络。

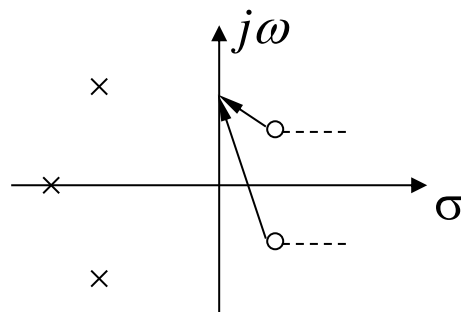


4.10.2 最小相移系统的零极点分布

最小相移系统：系统函数的零点均分布在 s 平面的左半平面或虚轴上。若有一个或多个零点分布在右半平面，就是非最小相移系统。



最小相移系统零极图



非最小相移系统零极图

比较以上两零极图，极点分布相同，零点的虚部相等，实部符号相反。显然，**两图幅频响应相同**；对于所有的频率上，左图中零点的相角均小于右图中零点的相角，而两图中极点的相角相同，所以就相移的绝对值而言，**左图的相移更小**。



下列系统函数中，属于最小相移系统的是（ ）

A $H(s) = \frac{(s-2)^2+6}{(s+1)(s+5)^2}$

B $H(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{s(s+1)^2}$

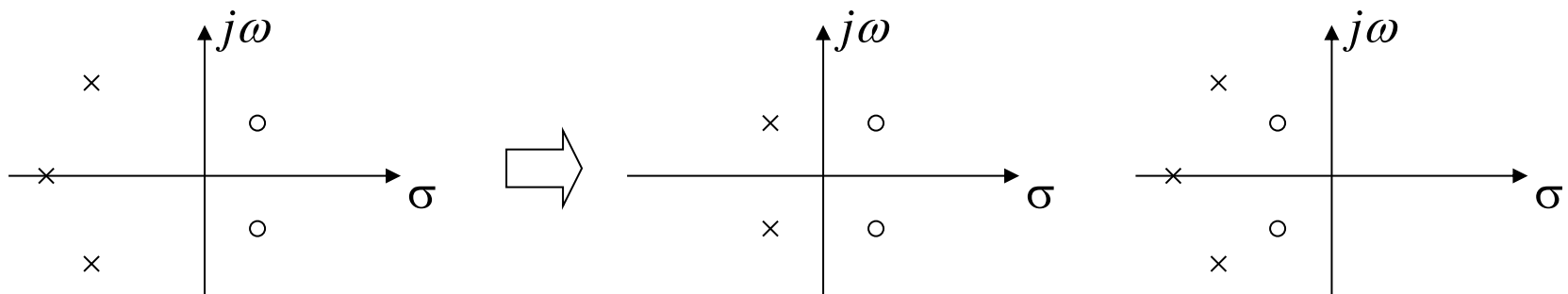
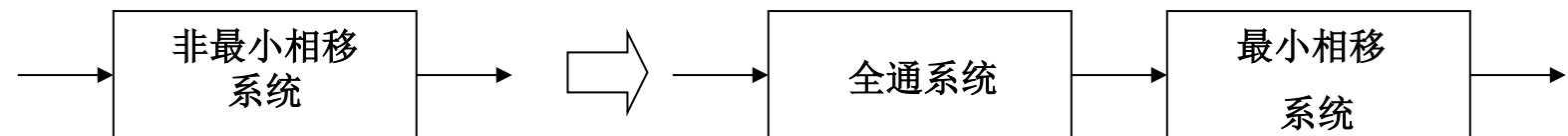
C $H(s) = \frac{(s+2)^2+6}{(s+1)(s+5)^2}$

D $H(s) = \frac{(s-3)^2}{s^3+5s+7}$

提交

任何一个非最小相移系统均可表示为**一全通系统与一最小相移系统的级联**。

$$H(s) = H_{AP}(s) \cdot H_{\min}(s)$$



全通系统的**极点**
和最小相移系统的**零点相消**

例如：

$$H(s) = \frac{(s - \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}{(s + \alpha_0)[(s + \alpha_1)^2 + \Omega_1^2]} = \frac{(s + \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}{(s + \alpha_0)[(s + \alpha_1)^2 + \Omega_1^2]} \cdot \frac{(s - \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}{(s + \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}$$

$$H_{AP}(s) = \frac{(s - \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}{(s + \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}$$

$$H_{\min}(s) = \frac{(s + \alpha_2)^2 + \Omega_2^2}{(s + \alpha_0)[(s + \alpha_1)^2 + \Omega_1^2]}$$

- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性
- 4.9 二阶谐振系统的S平面分析
- 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布
- 4.11 线性系统的稳定性
- 4.12 双边拉普拉斯变换
- 4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

4.11.1 系统的因果性与稳定性

系统的**稳定性**指**幅度有限的输入**只能产生**幅度有限的输出**的系统，即当输入 $|x(\cdot)| < \infty$ ，输出 $|y(\cdot)| < \infty$ ，系统必定是稳定的。即**输出不能包含冲激函数及其导数**。

线性时不变系统的稳定性指**单位冲激响应满足绝对可积**，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

系统的**因果性**指在初始状态为零时，输出不会发生在输入作用于系统之前，即当 $t < t_0$ ， $x(t)=0$ ，必定有 $t < t_0$ ， $y(t)=0$ 。

线性系统的因果性指其**单位冲激响应**满足：

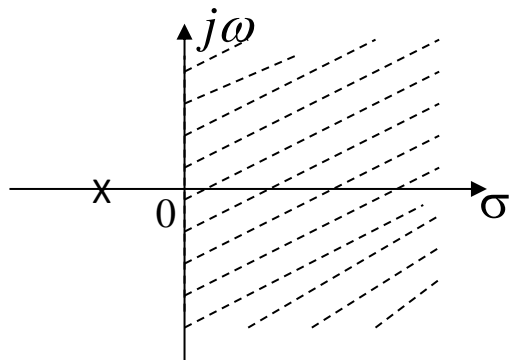
$$h(t) = h(t)u(t)$$

当系统是**因果稳定**的，其单位冲激响应应该满足在 0^- 到 ∞ 绝对可积：

$$\int_{0^-}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (1)$$

$$\text{因为 } H(s) = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \quad (2)$$

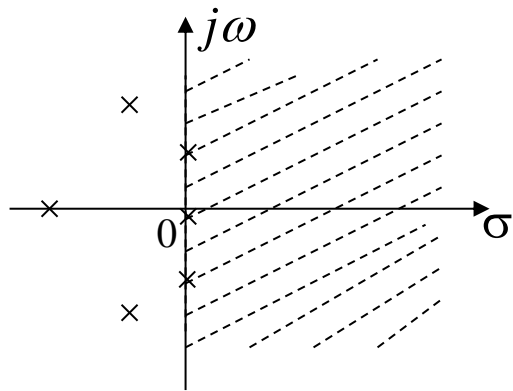
$$\text{若使 (2) 绝对可积, } \int_{0^-}^{\infty} |h(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (3)$$
$$\left(|e^{-j\omega t}| = 1 \right)$$



比较 (1) 和 (3) 可知，线性因果稳定系统的系统函数的最小收敛域是 $\sigma=\text{Re}\{s\}>0$ 。也即，**因果稳定系统的系统函数的极点只能分布在s平面虚轴的左半平面上。**

如果系统函数的极点分布在s平面虚轴上呢？

例如原点上一阶极点，对应的因式是 $\frac{1}{s}$ ，逆变换是单位阶跃信号 $u(t)$ ，不满足绝对可积。但其在 $t>0$ 时，稳定不变。



例如虚轴上的一对共轭极点，对应的因式是 $\frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2}$ 或 $\frac{s}{s^2 + \Omega_0^2}$ 的形式，对应的逆变换是等幅的正余弦信号，也不满足绝对可积。但是在 $t>0$ 时，其最大幅度稳定不变。

如果在虚轴上的极点是多重的，对应的时间信号将不满足绝对可积，且在 $t>0$ 时，其幅度是逐渐增加的。

显然，虚轴上的极点无论是单阶还是多阶的，都使系统不稳定。也有称虚轴上一阶极点的情况为临界稳定的。

一个稳定系统的系统函数对零点的个数也有要求。

设系统函数为：

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = s + \frac{A(s)}{D(s)}$$

$A(s)/D(s)$ 是有理真分式。当输入一有界的 $x(t)=u(t)$ ，拉氏变换为 $1/s$ ，输出的拉氏变换中就会出现1，对应的输出中会出现冲激函数 $\delta(t)$ ，幅度无界。可见以上系统是不稳定的。 $h(t)$ 可以包含冲激函数，但不能包含冲激函数的导数。

综上，从s域判断线性系统的稳定条件应该是：

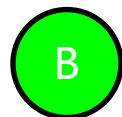
- (1) 系统函数的极点均应分布在s平面虚轴的左半平面上；即系统函数分母多项式的根如果是实数，则应该是负实数；如果是复数，则应具有负实部。
- (2) 系统函数的分子多项式的阶次不应高于分母多项式的阶次（零点个数不应多于极点个数）。



已知一个系统的系统函数为 $H(s) = \frac{s}{s^2 - s - 6}$ ，该系统：



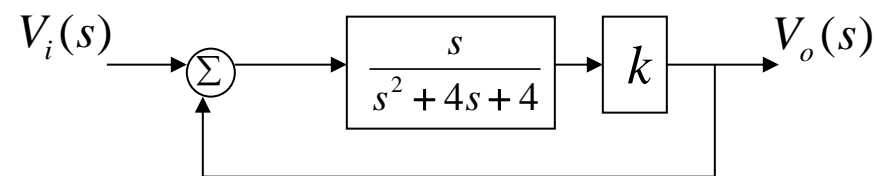
A 稳定



B 不稳定

提交

如下图所示一反馈系统， k 满足什么条件时系统稳定？

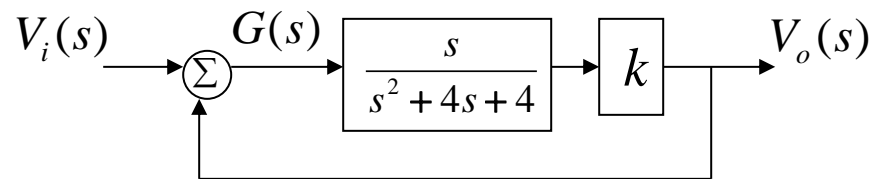


- ☐ A $k > 4$
- ☐ B $k > -4$
- ☒ C $k < 4$
- ☐ D $k < -4$

提交

例4-38: 下图示一反馈系统，（1）求系统函数。（2） k 满足什么条件时系统稳定？（3）在临界稳定时，求系统的单位冲激响应。

解: （1） $G(s) = V_i(s) + V_o(s)$



$$V_o(s) = \frac{ksG(s)}{s^2 + 4s + 4}$$

$$\therefore H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{ks}{s^2 + (4-k)s + 4}$$

$$(2) \text{ 系统函数的极点: } p_{1,2} = \frac{-(4-k) \pm \sqrt{(4-k)^2 - 16}}{2}$$

当 $k > 4$ ，系统函数有正实部的极点，系统不稳定。

因此，应满足 $k < 4$ 时系统稳定。

$$(3) \text{ 当 } k=4 \text{ 时, 系统函数为 } H(s) = \frac{4s}{s^2 + 4} \quad \therefore h(t) = 4 \cos 2t u(t)$$

如何判断一个多项式的根是否都是负实部的？

当多项式是一阶或二阶的，可按以下条件判断它的根都是负实部的：

- (1) 分母多项式中各次系数都不为0，即不缺项；
- (2) 分母多项式中各次系数的符号相同。当最高阶系数为1时，其他系数应均为正。

按以上条件，可立即得出上例的稳定条件：

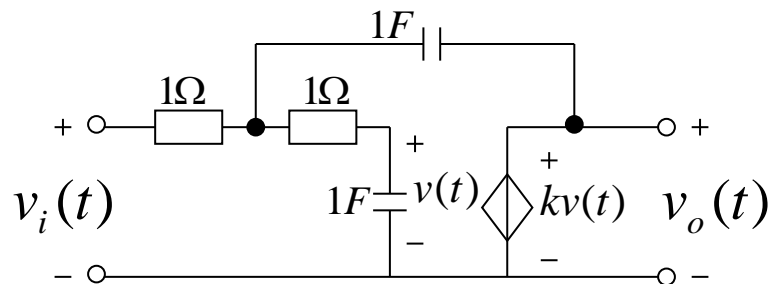
$$H(s) = \frac{ks}{s^2 + (4-k)s + 4} \quad 4-k > 0 \quad \therefore k < 4$$

系统函数当分母多项式的阶次较高时，其极点的求解就比较困难，此时按以上条件判断还不充分。有关的条件，如：罗斯-霍尔维兹判据，可参考其他书籍。

例4-39：带反馈的受控源电路如图，求系统函数 $H(s)=V_o(s)/V_i(s)$ ；求系统稳定时的 k 的取值范围；求当系统处于临界稳定时的单位冲激响应 $h(t)$ 。

解：画出 s 域等效电路，引入中间变量 $V_1(s)$ 。

$$V_1(s) = \frac{V(s)}{1/s} \left(1 + 1/s\right) = (s+1)V(s) = \frac{(s+1)V_o(s)}{k}$$

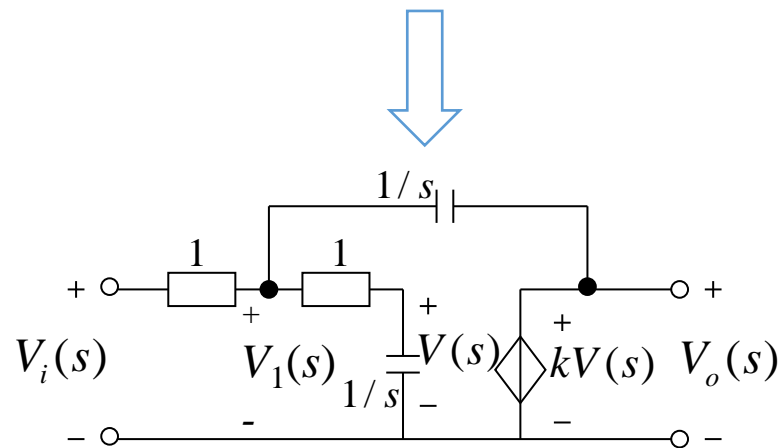


利用节点电流定律，

$$\frac{V_i(s) - V_1(s)}{1} = \frac{V_1(s)}{1 + 1/s} + \frac{V_1(s) - V_o(s)}{1/s}$$

$$V_i(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s + 1} V_1(s) - sV_o(s)$$

$$= \left(\frac{s^2 + 3s + 1}{k} - s \right) V_o(s) = \frac{s^2 + (3 - k)s + 1}{k} V_o(s)$$



系统函数：
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{k}{s^2 + (3-k)s + 1}$$

当系统稳定时，系统函数分母多项式的系数均应大于零，即

$$3 - k > 0 \quad \therefore k < 3$$

系统临界稳定时 $k=3$ ，此时系统函数

$$H(s) = \frac{3}{s^2 + 1} \quad \therefore \quad h(t) = 3 \sin t u(t)$$

线性稳定系统的瞬态响应与稳态响应

- **瞬态响应**：在激励（**阶跃信号或有始周期信号**）作用下，全响应中瞬时出现的成分，随时间增长逐渐消失。
- **稳态响应**： $t \rightarrow \infty$ 时，全响应中保留的分量，通常由**阶跃函数、周期函数**组成。
- 稳定系统的**系统函数极点位于s平面的左半平面**，自由响应函数呈衰减趋势，**自由响应=瞬态响应**。
- 若**激励的极点位于s平面的虚轴上或右半平面**，**强迫响应=稳态响应**。

例：激励信号 $x(t)=\cos(2t)u(t)$ ，系统函数的极点为-6和-1，响应为

$$r(t) = \underbrace{-\frac{6}{25}e^{-t} + \frac{9}{50}e^{-6t}}_{\substack{\text{自由响应} \\ \text{瞬态响应}}} + \underbrace{\frac{21}{50}\sin(2t) + \frac{3}{50}\cos(2t)}_{\substack{\text{强迫响应} \\ \text{稳态响应}}} \quad (t \geq 0)$$

作业

基础题：4-38，4-39 (a) (b) (c) (e) (g) ，4-42，4-47。

加强题：4-39 (d) (f) (h) ，4-41，4-48。

本次课内容

4.12 双边拉普拉斯变换

4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

本次课目标

1. 熟悉双边拉氏变换的收敛域与原函数的对应关系；
2. 了解拉氏变换与傅里叶变换的对应关系。

- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性
- 4.9 二阶谐振系统的S平面分析
- 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布
- 4.11 线性系统稳定性
- 4.12 双边拉普拉斯变换
- 4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

双边拉普拉斯变换（**广义傅里叶变换**）：

$$F_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

对于衰减因子 σ ， $t>0$ 时的情况与 $t<0$ 时的情况正好相反，因此**双边拉氏变换积分结果不一定存在**，这与单边拉氏变换不同。要讨论双边拉氏变换的存在性问题。

4.12.1 双边拉氏变换的收敛域

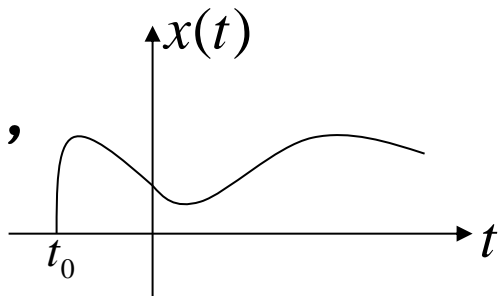
信号拉氏变换的收敛域与信号本身的形态有关，根据拉氏变换的定义，一般信号拉氏变换的存在应满足条件：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)e^{-\sigma t} = 0 \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)e^{-\sigma t} = 0$$

4.12.1 右边信号的双边拉氏变换

当信号是一右边信号，即 $t < t_0$ 时， $x(t) = 0$ （因果信号是右边信号），

$$\text{其拉氏变换: } X(s) = \int_{t_0}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{t_0}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

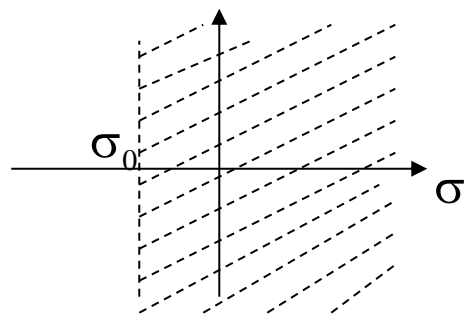


如果 σ_0 使上式满足绝对可积，即 $\int_{t_0}^{\infty} |x(t) e^{-\sigma_0 t} e^{-j\omega t}| dt = \int_{t_0}^{\infty} |x(t) e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty$

令 $\sigma = \sigma_0 + \Delta$ ，已知 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{-\sigma_0 t} = 0$ 。若使 $x(t) e^{-\sigma t}$ 绝对可积，

即 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{-\sigma t} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) e^{-\sigma_0 t} e^{-\Delta t} = 0$ ，需满足 $\Delta > 0$ ，即 $\sigma > \sigma_0$ 。

所以收敛域为 $\text{Re}\{s\} = \sigma > \sigma_0$





已知信号 $x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$ ，其双边拉氏变换及收敛域为（ ）

☐ A $X(s) = \frac{-1}{(s-1)(s-2)}, \sigma > -2$

☒ B $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \sigma > -1$

☐ C $X(s) = \frac{-1}{(s-1)(s-2)}, \sigma > -1$

☐ D $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \sigma > -2$

提交

例4-40: 求以下因果信号的双边拉氏变换, 并指出其收敛域。

$$x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

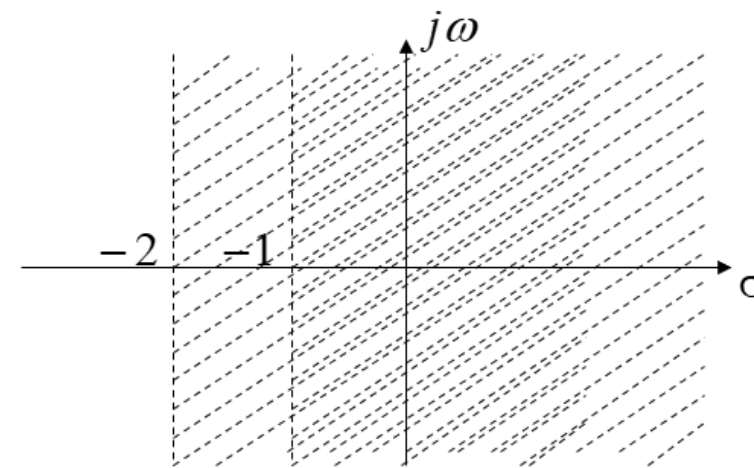
$$\begin{aligned} \text{解: } X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-t}e^{-st}dt - \int_0^{\infty} e^{-2t}e^{-st}dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s+1)t}dt - \int_0^{\infty} e^{-(s+2)t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+1)t}e^{-j\omega t}dt - \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+2)t}e^{-j\omega t}dt \end{aligned}$$

前一项当 $\text{Re}\{s+1\}=\sigma+1>0$ 时, 积分可积

$$\frac{1}{s+1} \quad \text{收敛域为 } \text{Re}\{s\}=\sigma>-1$$

后一项当 $\text{Re}\{s+2\}=\sigma+2>0$ 时, 积分可积

$$\frac{1}{s+2} \quad \text{收敛域为 } \text{Re}\{s\}=\sigma>-2$$

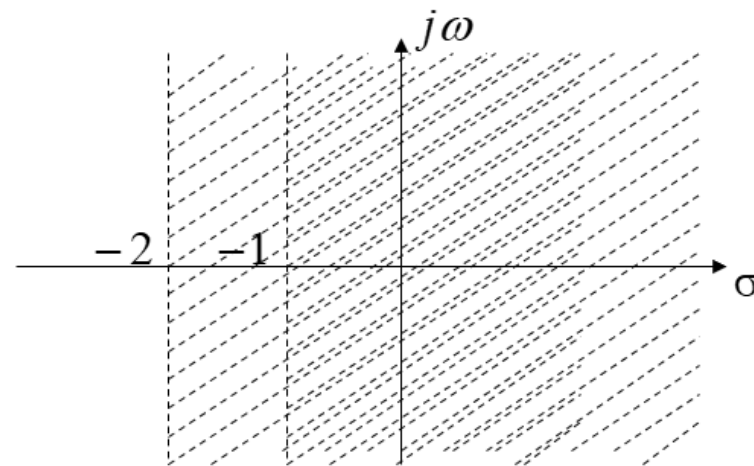


于是，整个函数的拉氏变换为：

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

收敛域为 $\text{Re}\{s\} = \sigma > -1$

即信号拉氏变换的收敛域为两部分收敛域的公共区域。右边信号的收敛域在最右边极点的右侧。

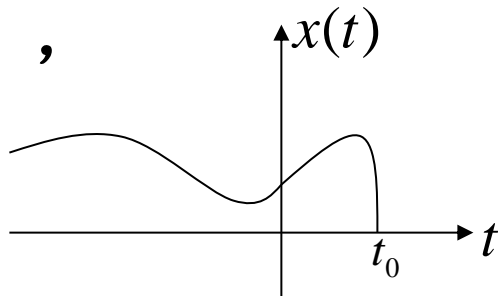


4.12.2 左边信号（反因果信号）的双边拉氏变换

当信号是一左边信号，即 $t > t_0$ 时， $x(t) = 0$ （ $t_0 = 0$ 时为反因果信号），

其拉氏变换为：

$$X(s) = \int_{-\infty}^{t_0} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{t_0} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

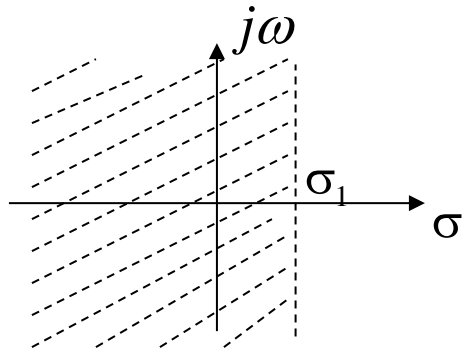


如果 σ_1 使上式满足绝对可积，即

$$X(s) = X(\sigma_1 + j\omega) = \int_{-\infty}^{t_0} x(t) e^{-\sigma_1 t} e^{-j\omega t} dt$$

存在，则收敛域为 $\text{Re}\{s\} = \sigma < \sigma_1$

证明：令 $\sigma = \sigma_1 + \Delta$ ，已知 $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) e^{-\sigma_1 t} = 0$ 。若使 $x(t) e^{-\sigma t}$ 绝对可积，



即 $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) e^{-\sigma t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) e^{-\sigma_1 t} e^{-\Delta t} = 0$ ，需满足 $\Delta < 0$ ，即 $\sigma < \sigma_1$ 。

例4-41: 已知反因果信号 $x(t) = -e^{-\alpha t}u(-t)$, 求其双边拉氏变换 $X(s)$ 。

解: 由定义

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} u(-t) e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha t} e^{-st} dt \\ &= - \int_{-\infty}^0 e^{-(s+\alpha)t} dt \end{aligned}$$

当 $\text{Re}\{s+\alpha\} = \sigma + \alpha < 0$, $\sigma < -\alpha$, 以上积分才可积。

$$X(s) = \frac{1}{(s+\alpha)} e^{-(s+\alpha)t} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{(s+\alpha)}, \quad \sigma < -\alpha$$

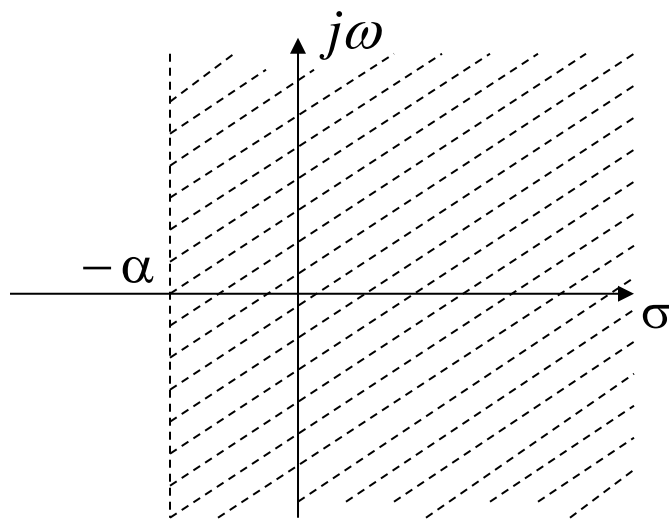
所以

$$-e^{-\alpha t}u(-t) \xleftrightarrow{LT} 1/(s+\alpha), \quad \text{Re}\{s\} < -\alpha$$

而例4-1求得

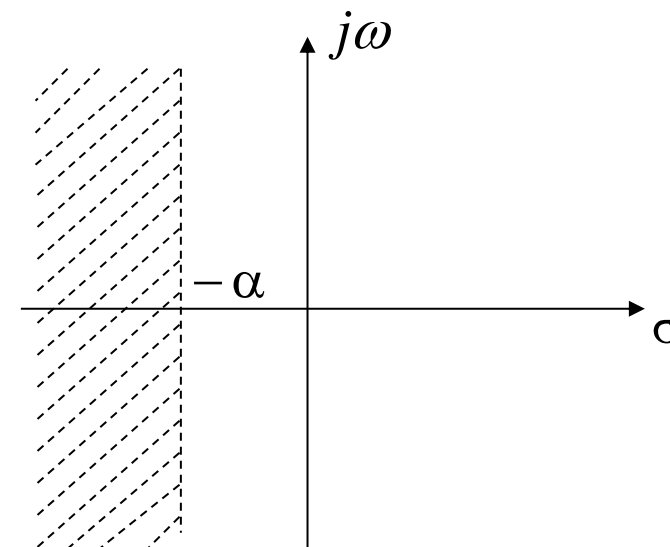
$$e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} 1/(s+\alpha), \quad \text{Re}\{s\} > -\alpha$$

相同的双边拉氏变换式，因为收敛域不同，表示不同的时间信号。因此，在由双边拉氏变换表示其原信号时，必须给定它的收敛域，否则不能确定原信号。



$e^{-\alpha t}u(t)$ 双边拉氏变换

收敛域 $\sigma > -\alpha$



$-e^{-\alpha t}u(-t)$ 双边拉氏变换

收敛域 $\sigma < -\alpha$

以上两信号的双边拉氏变换收敛域，均是在s平面上的半个开平面。

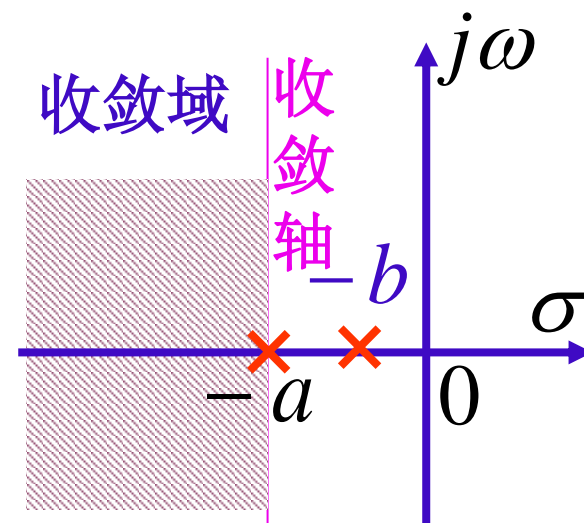
$-\alpha$ 称为它们的收敛坐标， $\sigma = \text{Re}\{s\} = -\alpha$ 称为它们的收敛轴或收敛域边界。

若信号为: $f(t) = (e^{-at} + e^{-bt})u(-t)$ ($a > b > 0$)

象函数为: $F(s) = \frac{-1}{s+a} + \frac{-1}{s+b}$ ($\sigma < -a$)

左边信号的收敛域在最左边极点的左侧。

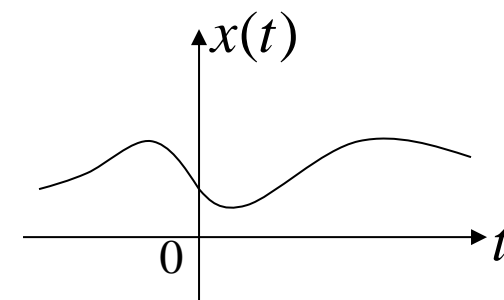
象函数的极点全部位于收敛域右侧。



4.12.3 双边信号的双边拉氏变换

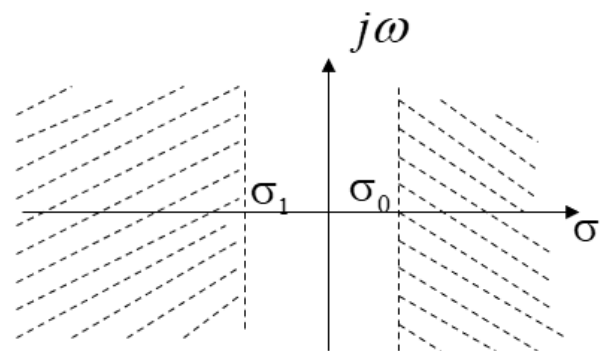
当信号是一双边信号，其双边拉氏变换为：

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

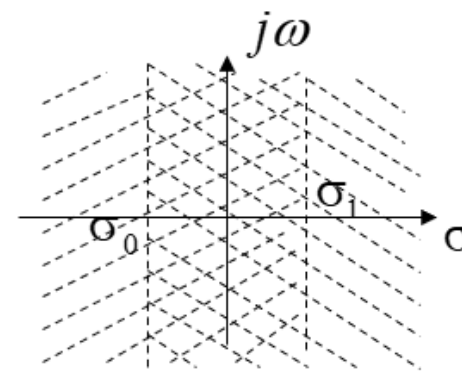


如果 σ_1 使上式第一项满足绝对可积， σ_0 使上式第二项满足绝对可积，即

$$X(s) = \int_{-\infty}^0 x(t)e^{-\sigma_1 t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} x(t)e^{-\sigma_0 t} e^{-j\omega t} dt$$



若 $\sigma_0 > \sigma_1$ ， $X(s)$ 不存在



若 $\sigma_0 < \sigma_1$ ， $X(s)$ 存在，
收敛域为 $\sigma_0 < \sigma < \sigma_1$



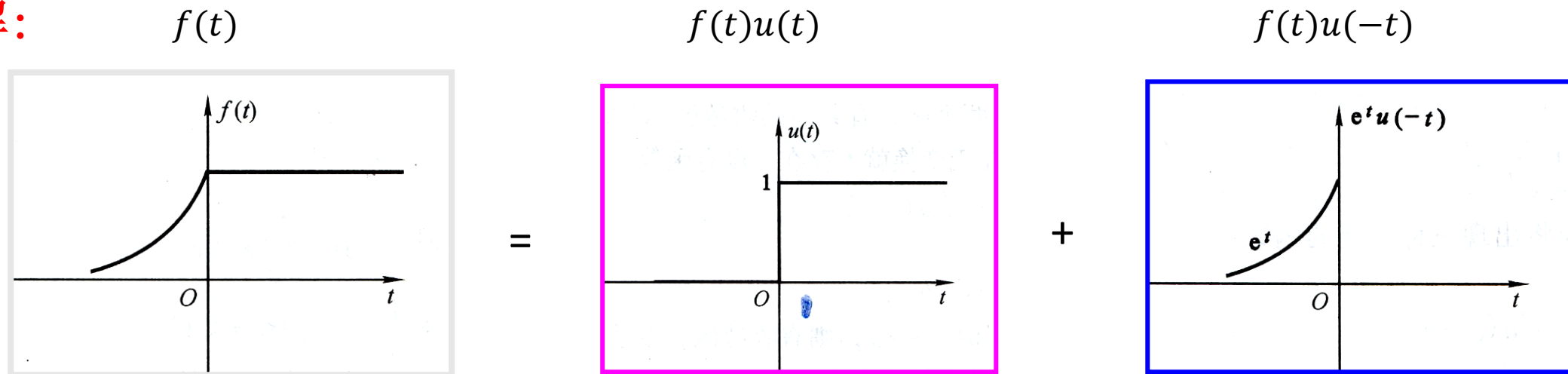
已知 $f(t) = u(t) + e^t u(-t)$ ，其双边拉氏变换为（ ）

- ☐ A $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}$, $\sigma > 0$
- ☐ B $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$, $0 < \sigma < 1$
- ☒ C $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}$, $0 < \sigma < 1$
- ☐ D $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$, $\sigma > -1$

提交

例4-42: 已知 $f(t) = u(t) + e^t u(-t)$, 试求其双边拉氏变换。

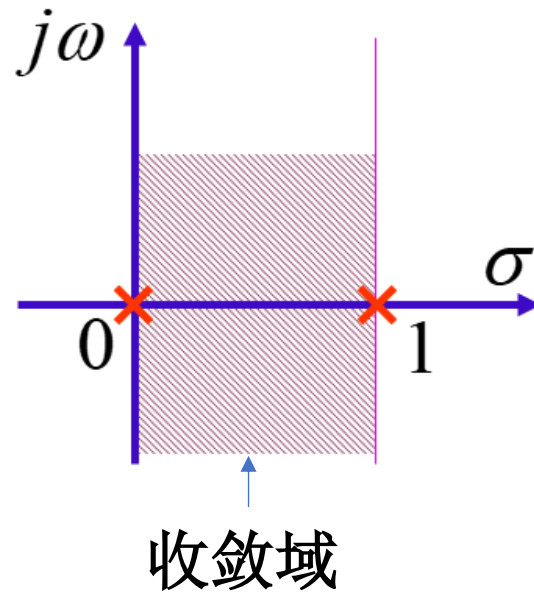
解:



$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^t e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(1-\sigma)t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$

为使上式两项满足绝对可积, 应有 $1 - \sigma > 0, \sigma > 0$, 故可得 $0 < \sigma < 1$ 。

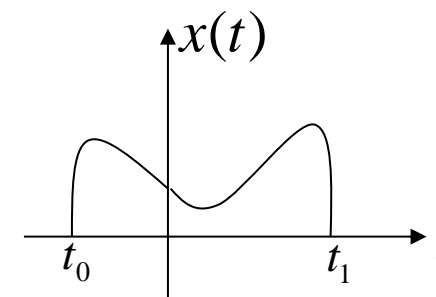
$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} \quad (0 < \sigma < 1)$$



4.12.4 时限信号的双边拉氏变换

当信号是一时限信号，即 $t_0 > t > t_1$ ， $x(t)=0$ ，其拉氏变换：

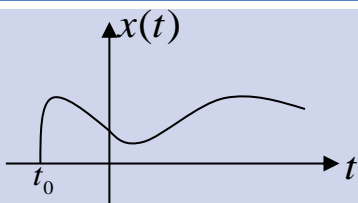
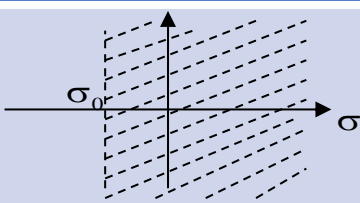
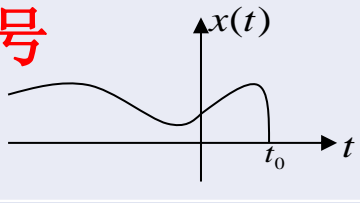
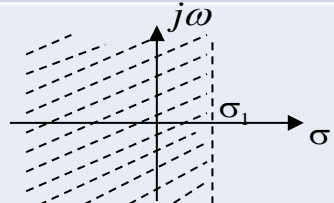
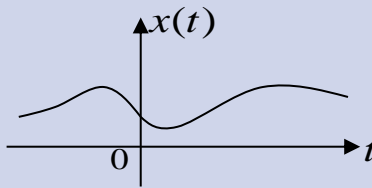
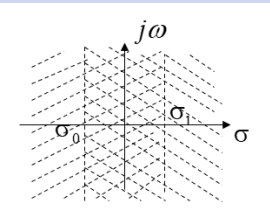
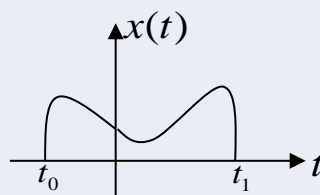
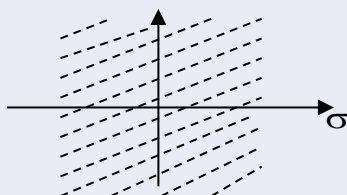
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t)e^{-st} dt = \int_{t_0}^{t_1} x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$



此时，若 $x(t)$ 是绝对可积的， $x(t)e^{-\sigma t}$ 总是满足绝对可积的，所以其双边拉氏变换在整个 s 平面上均存在，即收敛域是 s 全平面。

4.12.5 双边拉氏变换收敛域的特点

双边拉氏变换要考虑收敛域的存在性，**必须注明收敛域**。

信号类别	双边拉氏变换的收敛域	
右边信号 	象函数 最右边极点的右侧	
左边信号 	象函数 最左边极点的左侧	
双边信号 	两个极点之间的 带状区域 (若双边拉氏变换存在)	
时限信号 	s全平面	

同样的象函数若收敛域不同，对应的原信号也不同。

$F(s)$	收敛域	$f(t)$
$1/s$	$\sigma > 0$	$u(t)$
$1/s$	$\sigma < 0$	$-u(-t)$
$1/(s+\alpha)$	$\sigma > -\alpha$	$e^{-\alpha t} u(t)$
$1/(s+\alpha)$	$\sigma < -\alpha$	$-e^{-\alpha t} u(-t)$

例： $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+\alpha} \quad (\alpha > 0)$

$$\sigma > 0 \quad f(t) = u(t) + e^{-\alpha t} u(t)$$

$$-\alpha < \sigma < 0 \quad f(t) = -u(-t) + e^{-\alpha t} u(t)$$

$$\sigma < -\alpha \quad f(t) = -u(-t) - e^{-\alpha t} u(-t)$$

4.12.5 双边拉氏逆变换

可以根据收敛域和极点的情况来求解：

- (1) 对象函数进行部分分式展开；
- (2) 根据极点的情况对象函数取逆变换；
- (3) 收敛域左边的极点对应右边信号，收敛域右边极点对应左边信号。

例4-43: 已知 $F(s) = \frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)}$ ，求其所有可能的双边拉氏逆变换。

解:
$$F(s) = \frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)} = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{s+3}$$

根据象函数极点的情况，它的收敛域有**四种可能的情况**，不同的收敛域取逆变换得到不同的时域形式。

$$\sigma > 0 \quad f(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t} \right) u(t)$$

$$-2 < \sigma < 0 \quad f(t) = -\frac{1}{2}u(-t) + \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t} \right) u(t)$$

$$-3 < \sigma < -2 \quad f(t) = -\frac{1}{2}(1 + e^{-2t})u(-t) - e^{-3t}u(t)$$

$$\sigma < -3 \quad f(t) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t} \right) u(-t)$$

- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 用拉普拉斯逆变换法分析电路、S域原件模型
- 4.6 系统函数（网络函数）
- 4.7 由系统函数零、极点分布决定时域特性
- 4.8 由系统函数零、极点分布决定频响特性
- 4.9 二阶谐振系统的S平面分析
- 4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布
- 4.11 线性系统稳定性
- 4.12 双边拉普拉斯变换
- 4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

拉普拉斯变换是傅里叶变换由实频率 ω 至复频率 $s=\sigma+j\omega$ 上的推广，傅里叶变换是拉普拉斯变换在 s 平面虚轴上的特例。

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} = X(\sigma + j\omega)$$

许多信号，将其傅里叶变换式中的 $j\omega$ 换成 s 就是它的拉普拉斯变换，反之亦然。例如单边指数衰减信号：

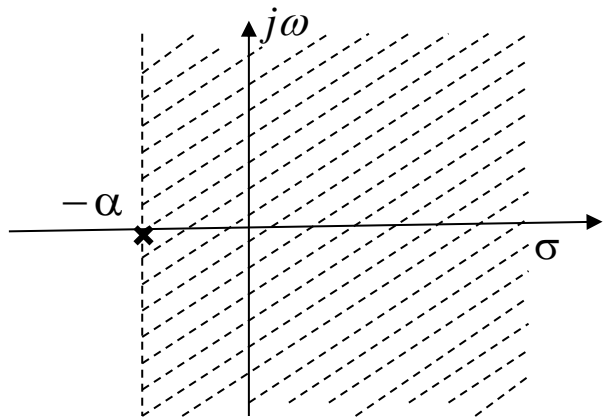
$$e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega + \alpha} \quad \therefore e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s + \alpha}$$

然而也有**特例**。例如单位阶跃信号：

$$u(t) \xleftrightarrow{FT} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}$$

如果信号的拉氏变换的收敛域包含了虚轴，可将拉氏变换中的 s 代以 $j\omega$ 求得其傅里叶变换。

例如，单边指数衰减的信号极点位于负实轴上。



$e^{-\alpha t} u(t)$ 拉氏变换收敛域

负实轴上的重极点的例子：

$$te^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{(j\omega + \alpha)^2}$$

$$te^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s + \alpha)^2}$$

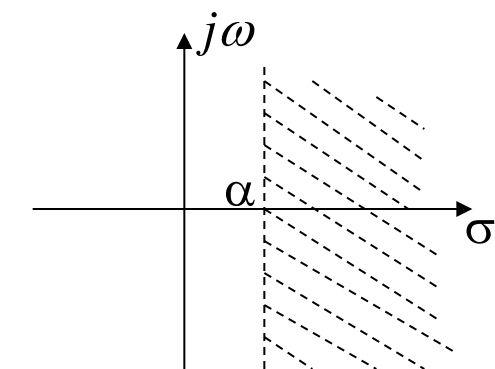
负实部的共轭复数极点的例子：

$$e^{-\alpha t} \cos(\Omega_0 t) u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{j\omega + \alpha}{(j\omega + \alpha)^2 + \Omega_0^2}$$

$$e^{-\alpha t} \cos(\Omega_0 t) u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \Omega_0^2}$$

当拉氏变换收敛域不包含虚轴时，即信号的拉氏变换的极点在s平面上虚轴的右半平面，其傅里叶变换不存在。

例如，单边指数增长的信号，其极点位于正实轴上。



$e^{\alpha t}u(t)$ 的拉氏变换收敛域

$$e^{\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s - \alpha}$$

由于信号呈指数增长，不满足绝对可积的条件，其傅里叶变换不存在。

当信号的拉氏变换的极点有位于s平面虚轴上的极点，不能简单的将 $j\omega$ 代替 s 以得到其傅里叶变换。例如，单位阶跃信号 $u(t)$ ：

$$u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s}$$

$$u(t) \xleftrightarrow{FT} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

设信号 $x(t)$ 的拉氏变换为 $X(s)$ ，它有虚轴上的 N 个单极点 $j\Omega_i$ ，

$$X(s) = X_1(s) + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - j\Omega_i}$$

$$x(t) = x_1(t) + \sum_{i=1}^N A_i e^{j\Omega_i t} u(t)$$

极点位于虚轴的左侧


频域卷积定理

$$X(\omega) = X_1(\omega) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N 2\pi A_i \delta(\omega - \Omega_i) * \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right]$$

$$= \underbrace{X_1(\omega) + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{j(\omega - \Omega_i)}}_{X(s)|_{s=j\omega}} + \pi \sum_{i=1}^N A_i \delta(\omega - \Omega_i)$$

对应虚轴上单极点的冲激信号

设信号 $x(t)$ 的拉氏变换 $X(s)$ 有虚轴上的 k 重极点： $j\Omega_0$

$$X(s) = X_1(s) + \frac{A_0}{(s - j\Omega_0)^k}$$


极点位于虚轴的左侧

可以证明，其对应的傅里叶变换为：

$$X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega} + \frac{\pi A_0 j^{k-1}}{(k-1)!} \delta^{(k-1)}(\omega - \Omega_0)$$

例如，单位斜变信号

$$tu(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s^2}$$
$$tu(t) \xleftrightarrow{FT} -\frac{1}{\omega^2} + j\pi\delta'(\omega)$$

❖ 单边拉氏变换的应用

单边拉氏变换在系统分析时，我们均设定系统是**因果**的。单边拉氏变换在系统的**瞬态分析**、**系统函数**及其s域分析应用十分普遍。

❖ 系统的复频域分析方法（用拉氏变换求解系统的响应）

分2种情况：


- **给定微分方程**

利用拉氏变换的时域微分特性，可分零状态响应和零输入响应求解。

- **给定电路图**

1. 去掉系统的激励，将系统的初始条件等效为激励源，画出S域等效电路，可得到零输入响应；
2. 去掉系统的初始条件，保留激励源，画出S域等效电路，可得到零状态响应。

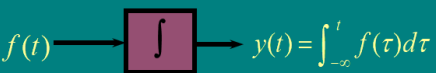
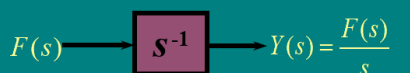
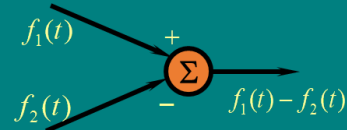
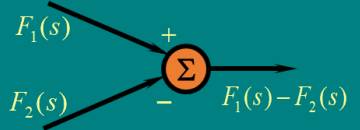
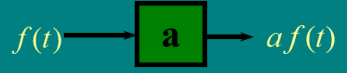
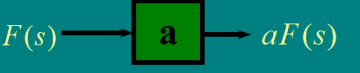
❖ 系统函数 $H(s)$ 的求解方法

1. $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$
2. $H(s)$ = 零状态响应的拉氏变换/激励的拉氏变换
3. 由微分方程求解
4. 由电路图求解
5. 由s域模拟框图求解 
6. 由零、极点图+初始条件求解

❖ 用系统函数 $H(s)$ 分析线性时不变系统

1. $h(t)$ 的时域波形
2. 频响特性 $H(\omega)$ （幅频特性、相频特性）
3. 系统的稳定性判别

模拟框图中的基本单元

	时 域	S 域
积分器		
加法器		
数乘器		

系统函数分析法的局限性

系统函数反映的是系统零状态响应的外特性，不反映系统内部全部特性。

在很多情况之下，难以建立确切的系统函数模型，此分析方法也就失效。
如高阶线性系统求系统函数太烦琐，非线性，时变系统以及模糊现象不能采用系统函数的方法。

解决方法：状态变量分析法（第十二章）

作业

基础题：4-50。

加强题：4-51。