上节内容

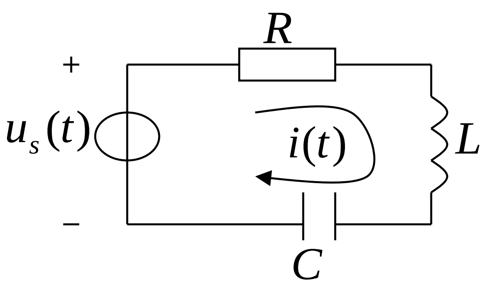
4.9 二阶谐振系统的S平面分析

4.10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布

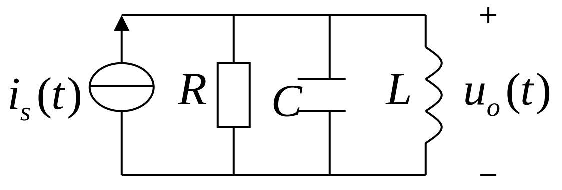
4.11 线性系统的稳定性

含有电容、电感两类储能元件的二阶系统可以具有谐振特性，常可利用这一性能构成带通、带阻滤波器。

$$H_s(s)=\frac{I(s)}{U_s(s)}$$



$$H_p(s)=\frac{U_o(s)}{I_s(s)}$$



串、并联RLC回路的对偶性：系统函数中的L和C可互换。

以并联RLC回路为例作分析。先求系统函数

$$H_p(s)=\frac{U_o(s)}{I_s(s)}=\frac{R\dfrac{L}{C}}{RsL+\dfrac{R}{sC}+\dfrac{L}{C}}=\frac{RLs}{RLCs^2+R+sL}=\frac{1}{C}\frac{s}{s^2+\dfrac{s}{RC}+\dfrac{1}{LC}}=\frac{1}{C}\frac{s}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

当 $R>\frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ ，极点为共轭复根。

4.9 二阶谐振系统的S平面分析

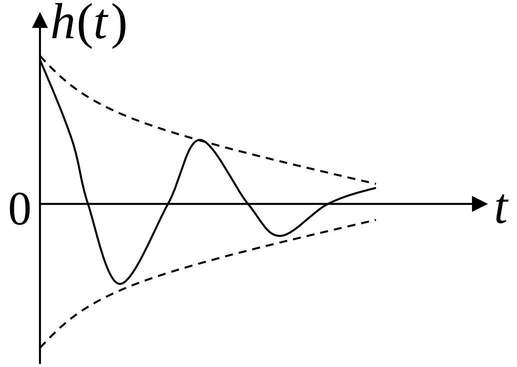
$$p_{1,2}=\frac{-\frac{1}{RC}\pm j\sqrt{\frac{4}{LC}-(\frac{1}{RC})^2}}{2}=-\frac{1}{2RC}\pm j\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{1}{2RC})^2}=-\alpha\pm j\Omega_d$$

$$\boxed{\Omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}}\qquad \boxed{\alpha=\frac{1}{2RC}}\qquad \Omega_d=\sqrt{\Omega_0^2-\alpha^2}$$

谐振频率　　衰减因子

系统函数： $$H_p(s)=\frac{1}{C}\frac{s}{(s-p_1)(s-p_2)}=\frac{1}{C}\frac{s}{(s+\alpha-j\Omega_d)(s+\alpha+j\Omega_d)}=\frac{1}{C}\frac{s}{(s+\alpha)^2+\Omega_d^2}$$

$$=\frac{1}{C}\left[\frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\Omega_d^2}-\frac{\alpha}{\Omega_d}\cdot\frac{\Omega_d}{(s+\alpha)^2+\Omega_d^2}\right]$$



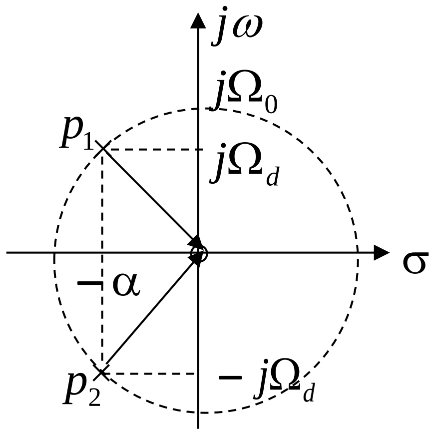
单位冲激响应： $$h_p(t)=\frac{1}{C}e^{-\alpha t}(\cos\Omega_d t-\frac{\alpha}{\Omega_d}\sin\Omega_d t)u(t)$$

若保持*RLC*不变，即系统零极点的位置不变，零点矢量的相角始终等于π/2 。

$$H_p(s)=\frac{1}{C}\frac{s}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

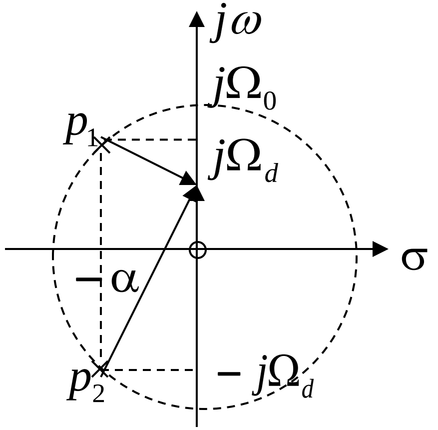
a) 当ω=0，零点矢量的模等于0，因此幅频响应$|H(\omega)|=0$；

相频响应因为两极点矢量的相角正负相等抵消，只有零点矢量的相角，所以$\varphi(\omega)=\pi/2$。



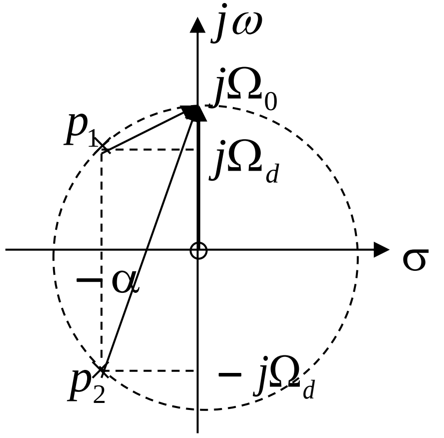
b) 当$0<\omega<\Omega_0$，随着ω↑，零点矢量的模↑，极点矢量的模变化较小，幅频响应$|H(\omega)|$↑；

因为两极点矢量的相角正的增加，负的减小，总体增加，而零点矢量的相角恒等于π/2，所以相频响应$\varphi(\omega)$↓。

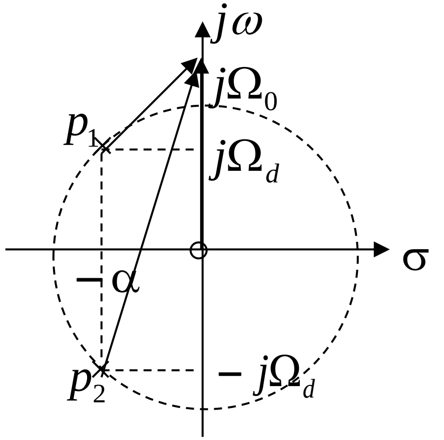


c) 当$\omega=\Omega_0$（谐振），零点矢量的模为Ω_0，可证明此时幅频响应是极大值；两极点矢量的相角之和为π/2，相频响应$\varphi(\omega)=0$。

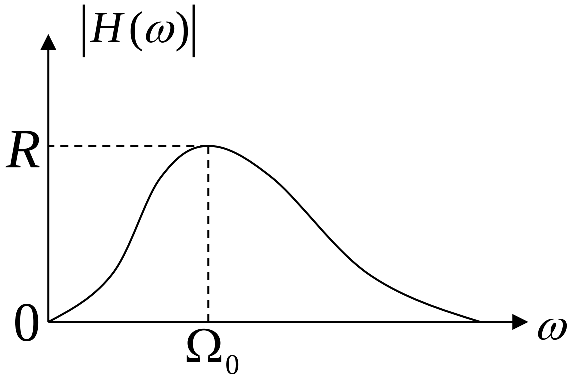
$$\left|H(\Omega_0)\right|=\frac{1}{C}\frac{\Omega_0}{|P_1||P_2|}=\frac{1}{C}\frac{1}{2\alpha}=R$$

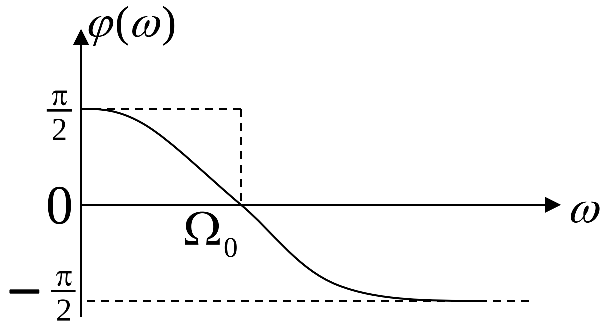


d) 当$\omega>\Omega_0$且继续增加，两极点矢量的模均增加，零点矢量的模也增加，幅频响应减小；相频响应因为两极点矢量的相角均正向增加而$\varphi(\omega)<0\downarrow$。



e) 当ω→∞，两极点矢量的模与零点矢量的模均→∞，幅频响应$|H(\omega)|\to 0$；相频响应$\varphi(\omega)$因为两极点矢量的幅角均趋于π/2而趋于−π/2。





4.9 二阶谐振系统的S平面分析

当系统函数有一对靠近虚轴的极点 $p=\alpha_i \pm j\Omega_i$ ($\alpha_i << \Omega_0$)，$\Omega_i \approx \Omega_0$, 系统的幅频响应在$\omega=\Omega_i$附近会有一个峰值点（谐振），相频响应负向变化；

当系统函数有一对靠近虚轴的零点 $z=\alpha_j \pm j\Omega_j$ ($\alpha_i << \Omega_0$)，系统的幅频响应在$\omega=\Omega_j$附近会有一个谷值点，相频响应正向变化。

若系统函数有远离虚轴的零点和极点，那它们对系统的频响曲线的形状影响较小，只是对总的幅频响应与相频响应的大小有所影响。

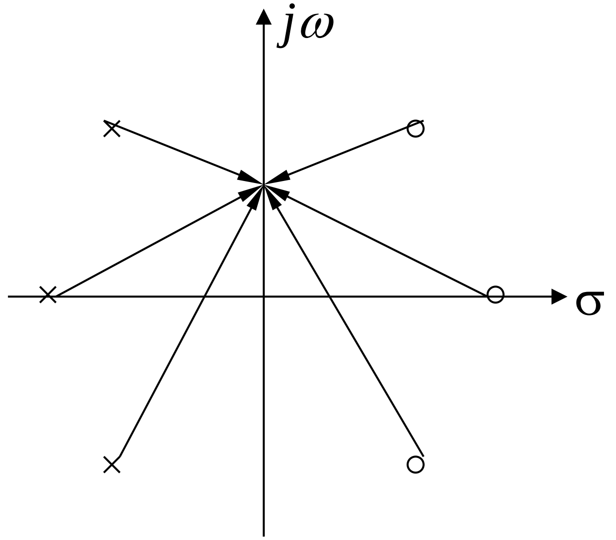
4.10.1 全通系统的零极点分布

全通系统的幅频响应在所有频率上均为一常数。

全通系统的相频响应没有受到限制，会改变输入信号的相频特性，可以在传输系统中作相位均衡器或移相器。

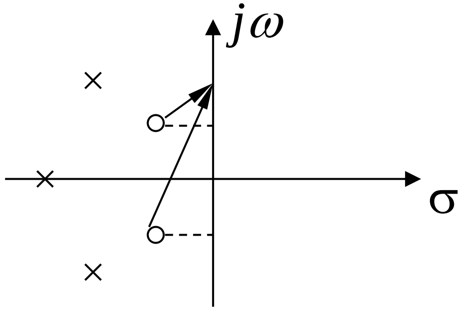
全通系统函数的零点矢量的模之积与极点矢量的模之积，在所有频率上均相等。要做到这一点，零点与极点应该以虚轴为镜像对称分布。

$$|H(j\omega)| = \frac{G\prod_{k=1}^{N} B_k}{\prod_{k=1}^{N} A_k} = G$$

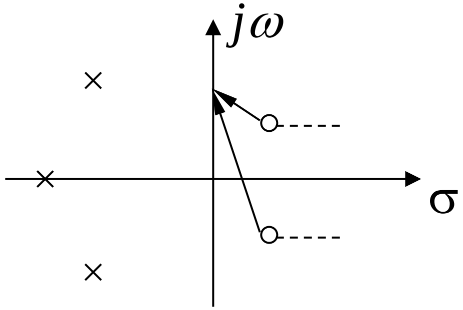


4.10.2 最小相移系统的零极点分布

最小相移系统：系统函数的零点均分布在s平面的左半平面或虚轴上。若有一个或多个零点分布在右半平面，就是非最小相移系统。



最小相移系统零极图



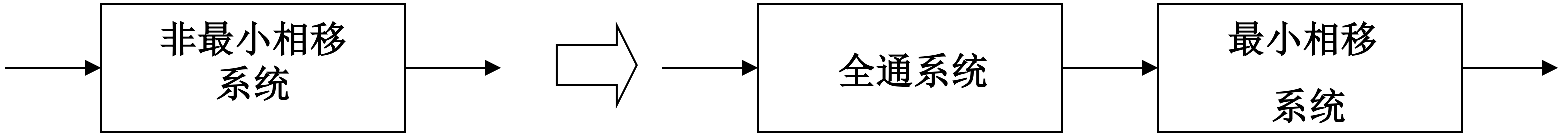
非最小相移系统零极图

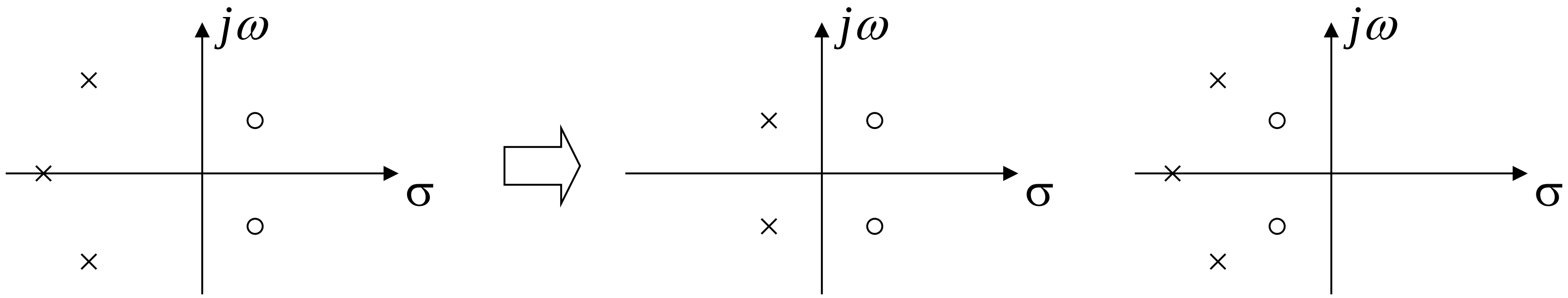
比较以上两零极图，极点分布相同，零点的虚部相等，实部符号相反。显然，两图幅频响应相同；对于所有的频率上，左图中零点的相角均小于右图中零点的相角，而两图中极点的相角相同，所以就相移的绝对值而言，左图的相移更小。

4. 10 全通函数与最小相移函数的零、极点分布

任何一个非最小相移系统均可表示为一全通系统与一最小相移系统的级联。

$$H(s)=H_{AP}(s)\cdot H_{\min}(s)$$





全通系统的极点和最小相移系统的零点相消

例如：

$$H(s)=\frac{(s-\alpha_2)^2+\Omega_2^2}{(s+\alpha_0)[(s+\alpha_1)^2+\Omega_1^2]}=\frac{(s+\alpha_2)^2+\Omega_2^2}{(s+\alpha_0)[(s+\alpha_1)^2+\Omega_1^2]}\cdot\frac{(s-\alpha_2)^2+\Omega_2^2}{(s+\alpha_2)^2+\Omega_2^2}$$

$$H_{AP}(s)=\frac{(s-\alpha_2)^2+\Omega_2^2}{(s+\alpha_2)^2+\Omega_2^2}\qquad H_{\min}(s)=\frac{(s+\alpha_2)^2+\Omega_2^2}{(s+\alpha_0)[(s+\alpha_1)^2+\Omega_1^2]}$$

4.11.1 系统的因果性与稳定性

系统的稳定性指幅度有限的输入只能产生幅度有限的输出的系统，即当输入$|x(\cdot)|<\infty$，输出$|y(\cdot)|<\infty$，系统必定是稳定的。即输出不能包含冲激函数及其导数。

线性时不变系统的稳定性指单位冲激响应满足绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$$

系统的因果性指在初始状态为零时，输出不会发生在输入作用于系统之前，即当$t<t_0$，$x(t)=0$，必定有$t<t_0$，$y(t)=0$。

线性系统的因果性指其单位冲激响应满足（充要条件）：

$$h(t)=h(t)u(t)$$

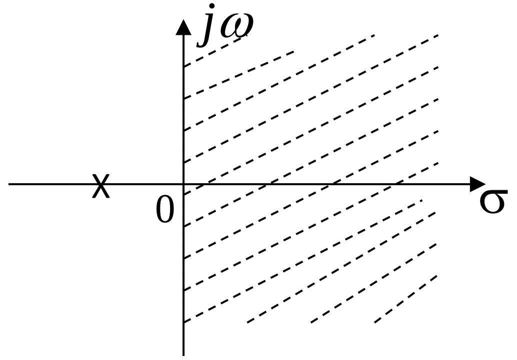
当系统是因果稳定的，其单位冲激响应应该满足在0^-到∞绝对可积：

$$\boxed{\int_{0^-}^{\infty}|h(t)|dt<\infty} \qquad \textbf{(1)}$$

因为 $H(s)=\int_{0^-}^{\infty}h(t)e^{-st}dt=\int_{0^-}^{\infty}h(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$ **(2)**

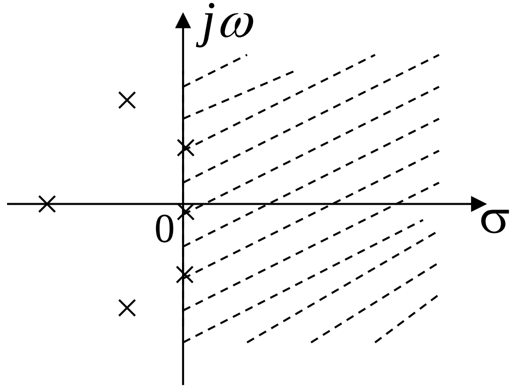
若使（2）绝对可积， $\int_{0^-}^{\infty}\left|h(t)e^{-\sigma t}\right|dt<\infty$ **(3)**

$$\left(\left|e^{-j\omega t}\right|=1\right)$$



比较（1）和（3）可知，线性因果稳定系统的系统函数的最小收敛域是**σ=Re{s}>0**。也即，因果稳定系统的系统函数的极点只能分布在s平面虚轴的左半平面上。

如果系统函数的极点分布在s平面虚轴上呢？



例如原点上的一阶极点，对应的因式是 $\frac{1}{s}$，逆变换是单位阶跃信号$u(t)$, 不满足绝对可积。但其在t>0时，稳定不变。

例如虚轴上的一对共轭极点，对应的因式是$\frac{\Omega_0}{s^2+\Omega_0^2}$ 或 $\frac{s}{s^2+\Omega_0^2}$ 的形式，对应的逆变换是等幅的正余弦信号，也不满足绝对可积。但是在t>0时，其最大幅度稳定不变。

如果在虚轴上的极点是多重的，对应的时间信号将不满足绝对可积，且在t>0时，其幅度是逐渐增加的。

显然，虚轴上的极点无论是单阶还是多阶的，都使系统不稳定。也有称虚轴上一阶极点的情况为临界稳定的。

一个稳定系统的系统函数对零点的个数也有要求。

设系统函数为：

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=s+\frac{A(s)}{D(s)}$$

$A(s)/D(s)$是有理真分式。当输入一有界的$x(t)=u(t)$，拉氏变换为1/s，输出的拉氏变换中就会出现1，对应的输出中会出现冲激函数$\delta(t)$，幅度无界。可见以上系统是不稳定的。***h*(t)可以包含冲激函数，但不能包含冲激函数的导数。**

综上，从s域判断线性系统的稳定条件应该是：

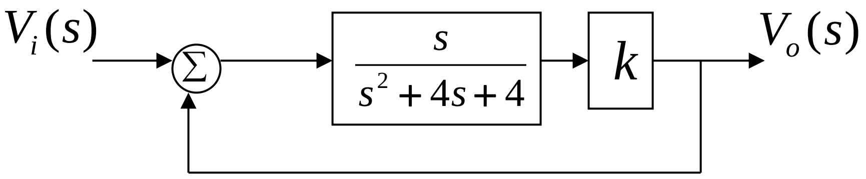
(1) 系统函数的极点均应分布在s平面虚轴的左半平面上；即系统函数分母多项式的根如果是实数，则应该是负实数；如果是复数，则应具有负实部。

(2) 系统函数的分子多项式的阶次不应高于分母多项式的阶次（零点个数不应多于极点个数）。

单选题 1分

设置

如下图所示一反馈系统，**k**满足什么条件时系统稳定？



A $k > 4$

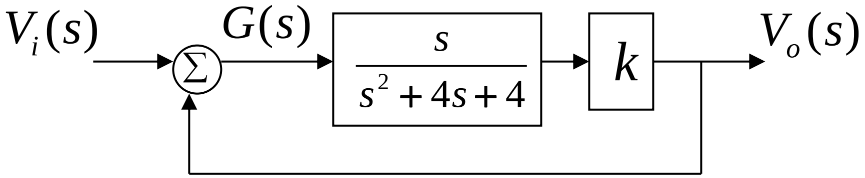
B $k > -4$

C $k < 4$

D $k < -4$

提交

例4-38： 下图示一反馈系统，（1）求系统函数。（2）**k**满足什么条件时系统稳定？(3) 在临界稳定时，求系统的单位冲激响应。



解：（1）$G(s)=V_i(s)+V_o(s)$

$$V_o(s)=\frac{ksG(s)}{s^2+4s+4}$$

$$\therefore H(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{ks}{s^2+(4-k)s+4}$$

（2）系统函数的极点：$p_{1,2}=\dfrac{-(4-k)\pm\sqrt{(4-k)^2-16}}{2}$

当**k>4**，系统函数有正实部的极点，系统不稳定。

因此，应满足**k<4**时系统稳定。

（3）当**k=4**时，系统函数为 $H(s)=\dfrac{4s}{s^2+4}$　$\therefore h(t)=4\cos 2t u(t)$

4.11 线性系统的稳定性

如何判断一个多项式的根是否都是负实部的？

当多项式是一阶或二阶的，可按以下条件判断它的根都是负实部的：

(1) 分母多项式中各次系数都不为0，即不缺项；

(2) 分母多项式中各次系数的符号相同。当最高阶系数为1时，其他系数应均为正。

按以上条件，可立即得出上例的稳定条件：

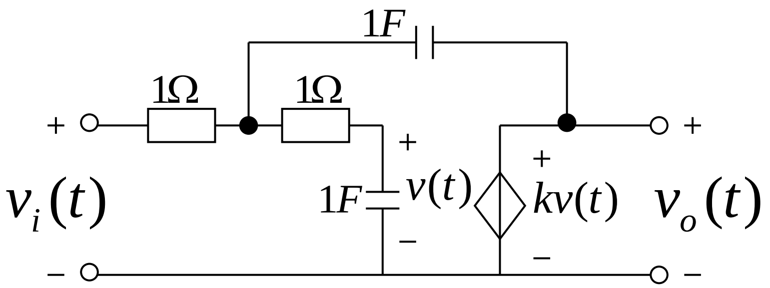
$$H(s)=\frac{ks}{s^2+(4-k)s+4} \qquad 4-k>0 \qquad \therefore k<4$$

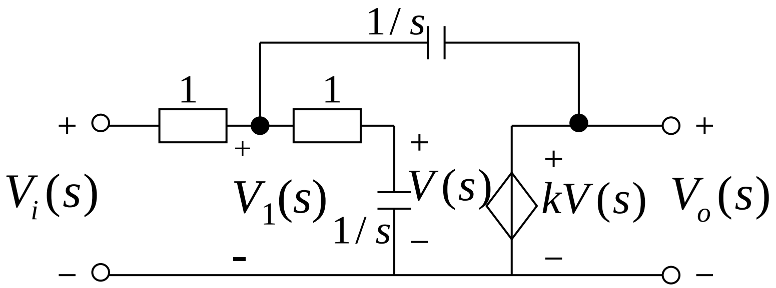
系统函数当分母多项式的阶次较高时，其极点的求解就比较困难，此时按以上条件判断还不充分。有关的条件，如：罗斯-霍尔维兹判据，可参考其他书籍。

例4-39：带反馈的受控源电路如图，求系统函数$H(s)=V_o(s)/V_i(s)$；求系统稳定时的k的取值范围；求当系统处于临界稳定时的单位冲激响应$h(t)$。

解：画出s域等效电路，引入中间变量$V_1(s)$。

$$V_1(s)=\frac{V(s)}{1/s}(1+1/s)=(s+1)V(s)=\frac{(s+1)V_o(s)}{k}$$





利用节点电流定律，

$$\frac{V_i(s)-V_1(s)}{1}=\frac{V_1(s)}{1+1/s}+\frac{V_1(s)-V_o(s)}{1/s}$$

$$V_i(s)=\frac{s^2+3s+1}{s+1}V_1(s)-sV_o(s)$$

$$=\left(\frac{s^2+3s+1}{k}-s\right)V_o(s)=\frac{s^2+(3-k)s+1}{k}V_o(s)$$

系统函数： $H(s)=\dfrac{V_o(s)}{V_i(s)}=\dfrac{k}{s^2+(3-k)s+1}$

当系统稳定时，系统函数分母多项式的系数均应大于零，即

$$3-k>0 \qquad \therefore \quad k<3$$

系统临界稳定时**k=3**，此时系统函数

$$H(s)=\frac{3}{s^2+1} \qquad \therefore \qquad h(t)=3\sin t u(t)$$

4.11 线性系统的稳定性

线性稳定系统的瞬态响应与稳态响应

- 瞬态响应：在激励（阶跃信号或有始周期信号）作用下，全响应中瞬时出现的成分，随时间增长逐渐消失。
- 稳态响应：t→∞时，全响应中保留的分量，通常由阶跃函数、周期函数组成。
- 稳定系统的系统函数极点位于s平面的左半平面，自由响应函数呈衰减趋势，自由响应=瞬态响应。
- 若激励的极点位于s平面的虚轴上或右半平面，强迫响应=稳态响应。

例：激励信号$x(t)=\cos(2t)u(t)$, 系统函数的极点为−6和−1，响应为

$$r(t)=\underbrace{-\frac{6}{25}e^{-t}+\frac{9}{50}e^{-6t}}_{\substack{\text{自由响应}\\ \text{瞬态响应}}}+\underbrace{\frac{21}{50}\sin(2t)+\frac{3}{50}\cos(2t)}_{\substack{\text{强迫响应}\\ \text{稳态响应}}}\quad (t\geq 0)$$

本次课内容

4.12 双边拉普拉斯变换

4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

本次课目标

1. 熟悉双边拉氏变换的收敛域与原函数的对应关系；

2. 了解拉氏变换与傅里叶变换的对应关系。

4.12 双边拉普拉斯变换

双边拉普拉斯变换（广义傅里叶变换）：

$$F_B(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$$

对于衰减因子σ，$t>0$时的情况与$t<0$时的情况正好相反，因此双边拉氏变换积分结果不一定存在，这与单边拉氏变换不同。要讨论双边拉氏变换的存在性问题。

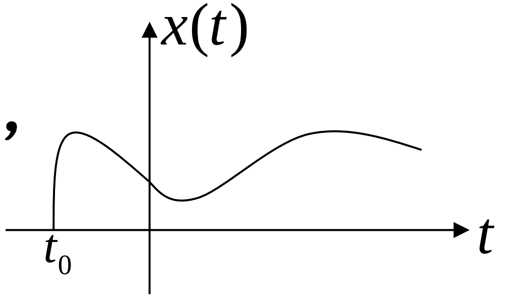
4.12.1 双边拉氏变换的收敛域

信号拉氏变换的收敛域与信号本身的形态有关，根据拉氏变换的定义，一般信号拉氏变换的存在应满足条件：

$$\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-\sigma t}=0 \quad \& \quad \lim_{t\to-\infty} x(t)e^{-\sigma t}=0$$

4.12.1 右边信号的双边拉氏变换

当信号是一右边信号，即$t<t_0$时，$x(t)=0$（因果信号是右边信号），

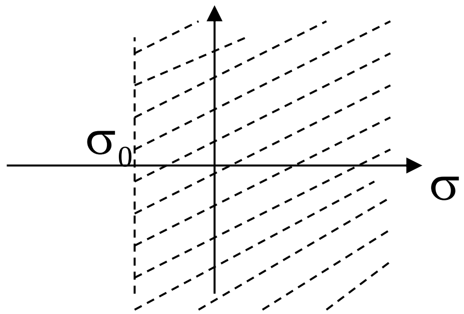


其拉氏变换：$X(s)=\int_{t_0}^{\infty}x(t)e^{-st}dt=\int_{t_0}^{\infty}x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$

如果σ_0使上式满足绝对可积，即 $\int_{t_0}^{\infty}\left|x(t)e^{-\sigma_0 t}e^{-j\omega t}\right|dt=\int_{t_0}^{\infty}\left|x(t)e^{-\sigma_0 t}\right|dt<\infty$

令$\sigma=\sigma_0+\Delta$，已知$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)e^{-\sigma_0 t}=0$。若使$x(t)e^{-\sigma t}$绝对可积，

即$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)e^{-\sigma t}=\lim\limits_{t\to\infty}x(t)e^{-\sigma_0 t}e^{-\Delta t}=0$，需满足$\Delta>0$，即$\sigma>\sigma_0$。



所以收敛域为 $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma>\sigma_0$

已知信号$x(t)=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$，其双边拉氏变换及收敛域为（ ）

A $X(s)=\dfrac{-1}{(s-1)(s-2)},\sigma>-2$

B $X(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)},\sigma>-1$

C $X(s)=\dfrac{-1}{(s-1)(s-2)},\sigma>-1$

D $X(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)},\sigma>-2$

提交

例4-40:求以下因果信号的双边拉氏变换，并指出其收敛域。

$$x(t)=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$$

解: $X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-t}e^{-st}dt-\int_{0}^{\infty}e^{-2t}e^{-st}dt$

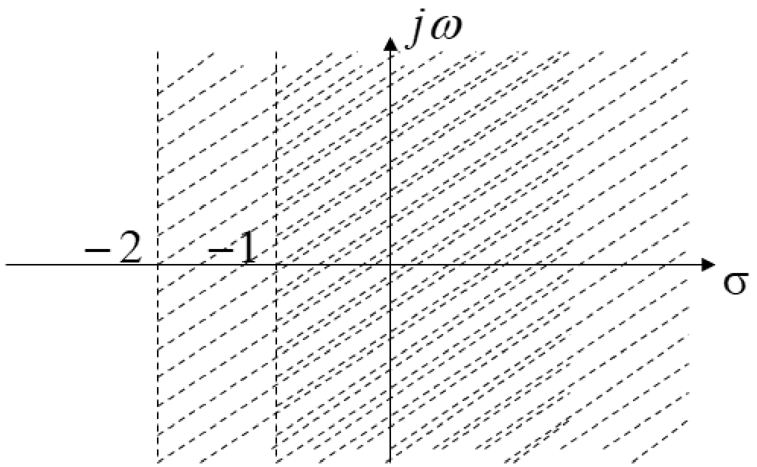
$$=\int_{0}^{\infty}e^{-(s+1)t}dt-\int_{0}^{\infty}e^{-(s+2)t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(\sigma+1)t}e^{-j\omega t}dt-\int_{0}^{\infty}e^{-(\sigma+2)t}e^{-j\omega t}dt$$

前一项当**Re{s+1}=σ+1>0**时，积分可积

$\frac{1}{s+1}$ 收敛域为 $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma>-1$

后一项当**Re{s+2}=σ+2>0** 时，积分可积

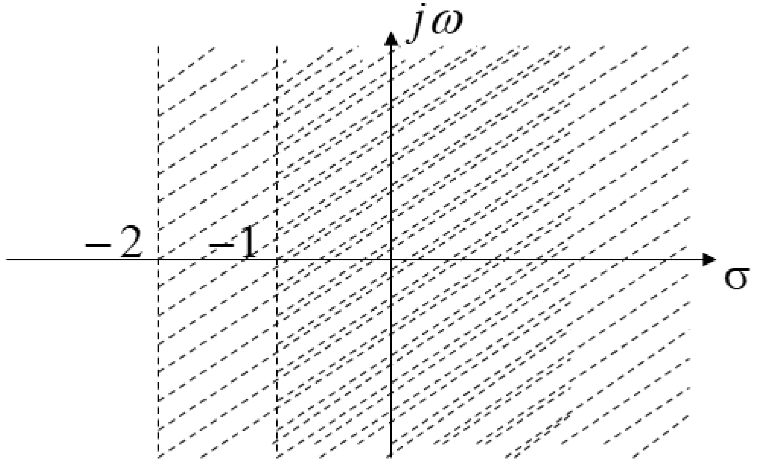
$\frac{1}{s+2}$ 收敛域为 $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma>-2$



于是，整个函数的拉氏变换为：

$$X(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

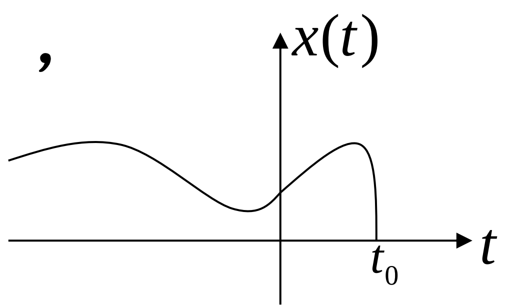
收敛域为 $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma>-1$



即信号拉氏变换的收敛域为两部分收敛域的公共区域。右边信号的收敛域在最右边极点的右侧。

4.12.2 左边信号（反因果信号）的双边拉氏变换

当信号是一左边信号，即$t>t_0$时，$x(t)=0$（ $t_0=0$时为反因果信号），

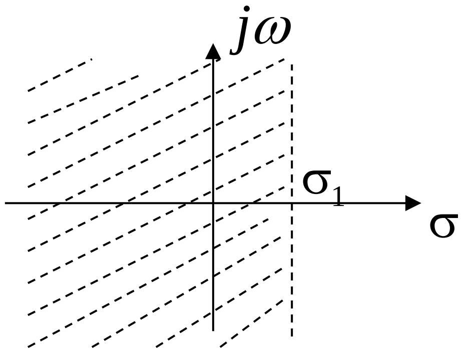


其拉氏变换为： $X(s)=\int_{-\infty}^{t_0} x(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{t_0} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$

如果σ_1使上式满足绝对可积，即

$$X(s)=X(\sigma_1+j\omega)=\int_{-\infty}^{t_0} x(t)e^{-\sigma_1 t}e^{-j\omega t}dt$$

存在，则收敛域为$\mathrm{Re}\{s\}=\sigma<\sigma_1$



证明：令$\sigma=\sigma_1+\Delta$，已知$\lim\limits_{t\to-\infty} x(t)e^{-\sigma_1 t}=0$。若使$x(t)e^{-\sigma t}$绝对可积，

即$\lim\limits_{t\to-\infty} x(t)e^{-\sigma t}=\lim\limits_{t\to-\infty} x(t)e^{-\sigma_1 t}e^{-\Delta t}=0$，需满足$\Delta<0$，即$\sigma<\sigma_1$。

例4-41:已知反因果信号$x(t)=-e^{-\alpha t}u(-t)$ ，求其双边拉氏变换$X(s)$。

解:由定义

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt=-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha t}u(-t)e^{-st}dt=-\int_{-\infty}^{0}e^{-\alpha t}e^{-st}dt$$

$$=-\int_{-\infty}^{0}e^{-(s+\alpha)t}dt$$

当$\mathrm{Re}\{s+\alpha\}=\sigma+\alpha<0$， $\sigma<-\alpha$，以上积分才可积。

$$X(s)=\frac{1}{(s+\alpha)}e^{-(s+\alpha)t}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{(s+\alpha)},\quad \sigma<-\alpha$$

所以

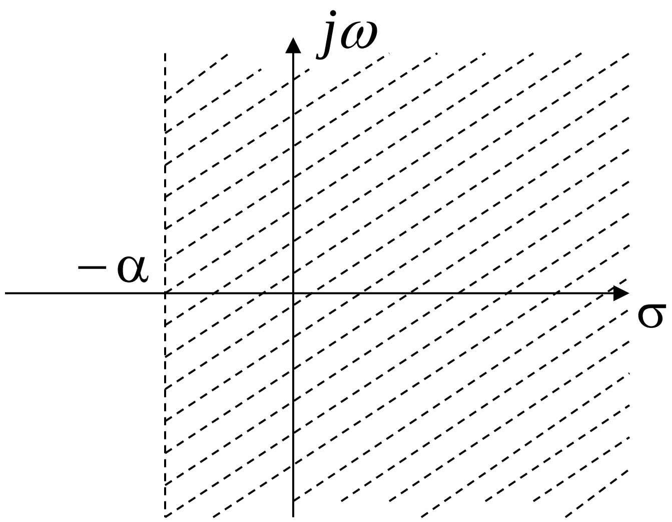
$$-e^{-\alpha t}u(-t) \xleftrightarrow{LT} 1/(s+\alpha),\ \ \mathrm{Re}\{s\} < -\alpha$$

而例4-1求得

$$e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} 1/(s+\alpha),\ \ \mathrm{Re}\{s\} > -\alpha$$

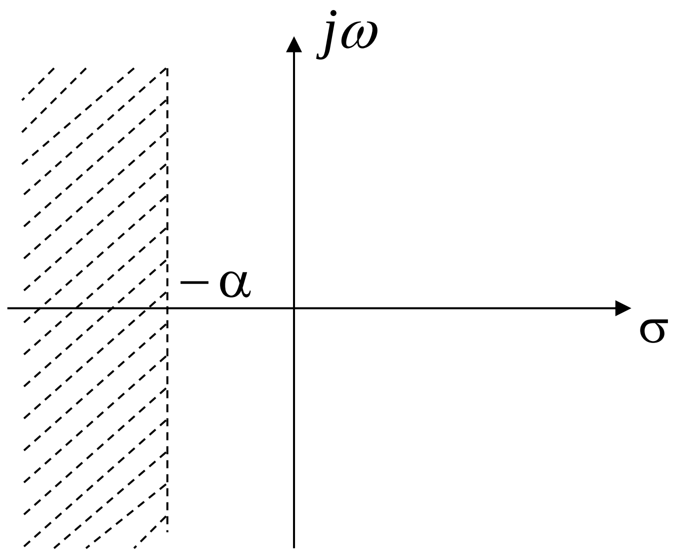
相同的双边拉氏变换式，因为收敛域不同，表示不同的时间信号。因此，在由双边拉氏变换表示其原信号时，必须给定它的收敛域，否则不能确定原信号。

4.12 双边拉普拉斯变换



$e^{-\alpha t}u(t)$双边拉氏变换

收敛域$\sigma>-\alpha$



$-e^{-\alpha t}u(-t)$双边拉氏变换

收敛域$\sigma<-\alpha$

以上两信号的双边拉氏变换收敛域，均是在s平面上的半个开平面。

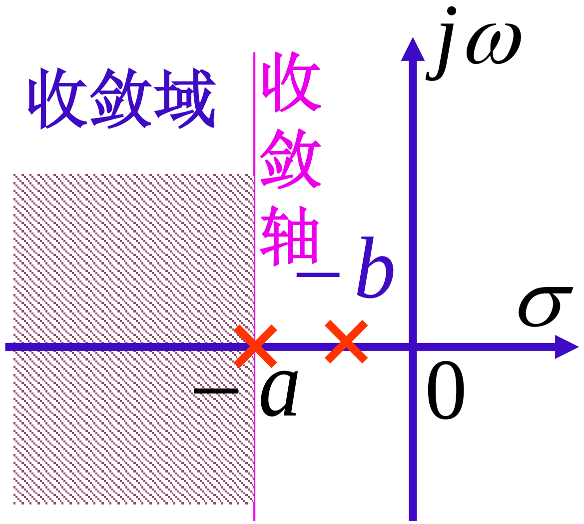
-α称为它们的收敛坐标，$\sigma=\mathrm{Re}\{s\}=-\alpha$称为它们的收敛轴或收敛域边界。

若信号为：$f(t)=(e^{-at}+e^{-bt})u(-t) \quad (a>b>0)$

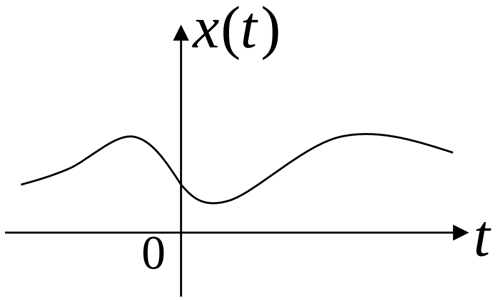
象函数为：$F(s)=\dfrac{-1}{s+a}+\dfrac{-1}{s+b} \quad (\sigma<-a)$

左边信号的收敛域在最左边极点的左侧。

象函数的极点全部位于收敛域右侧。



4.12.3　双边信号的双边拉氏变换

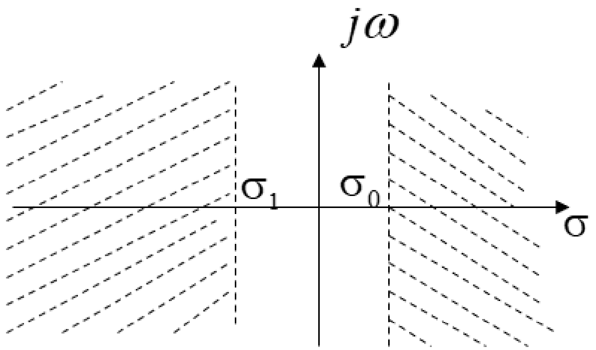


当信号是一双边信号，其双边拉氏变换为：

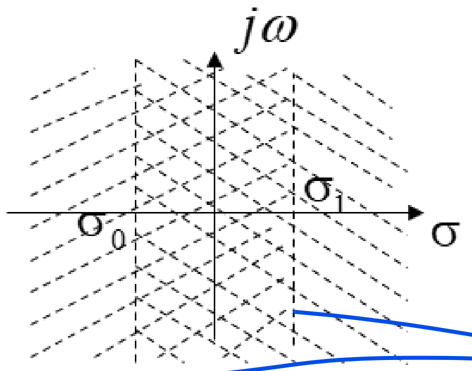
$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$$

如果σ_1使上式第一项满足绝对可积，σ_0使上式第二项满足绝对可积， 即

$$X(s)=\int_{-\infty}^{0}x(t)e^{-\sigma_1 t}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}x(t)e^{-\sigma_0 t}e^{-j\omega t}dt$$



若$\sigma_0>\sigma_1$，$X(s)$不存在



若$\sigma_0<\sigma_1$，$X(s)$存在，
收敛域为 $\sigma_0<\sigma<\sigma_1$

已知$f(t)=u(t)+e^{t}u(-t)$，其双边拉氏变换为（ ）

A $F(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s-1}$ ， $\sigma>0$

B $F(s)=\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s+1}$ ， $0<\sigma<1$

C $F(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s-1}$ ， $0<\sigma<1$

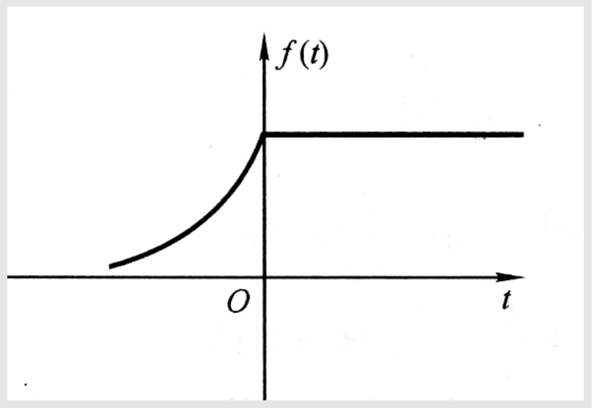
D $F(s)=\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s+1}$ ， $\sigma>-1$

提交

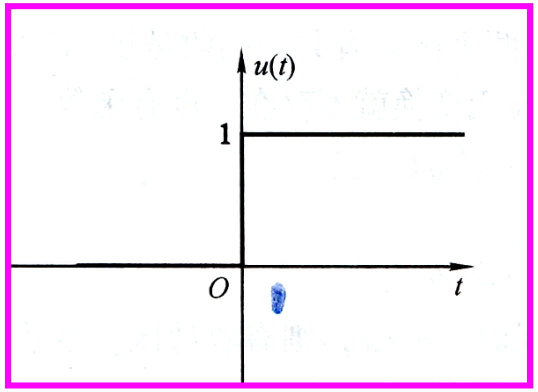
例4-42：已知$f(t)=u(t)+e^{t}u(-t)$，试求其双边拉氏变换。

解：

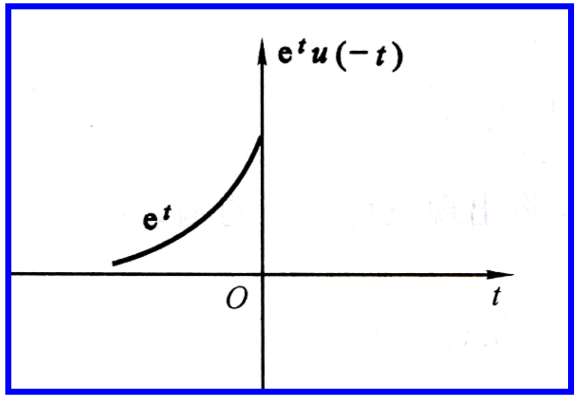
$f(t)$ $\qquad$ $f(t)u(t)$ $\qquad$ $f(t)u(-t)$



=



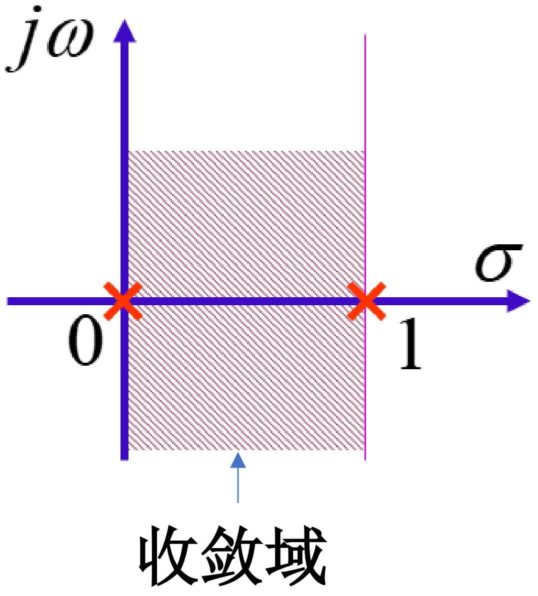
+



$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{t}e^{-st}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{(1-\sigma)t}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$$

为使上式两项满足绝对可积，应有$1-\sigma>0,\sigma>0$，故可得$0<\sigma<1$。

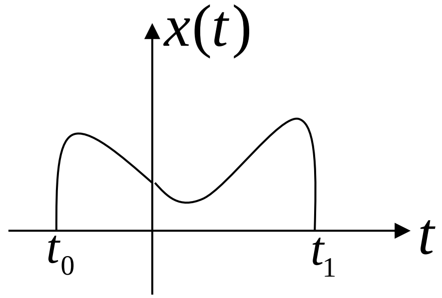
$$F(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{1-s} \qquad (0<\sigma<1)$$



4.12.4 时限信号的双边拉氏变换

当信号是一时限信号，即$t_0>t>t_1$，$x(t)=0$，其拉氏变换：

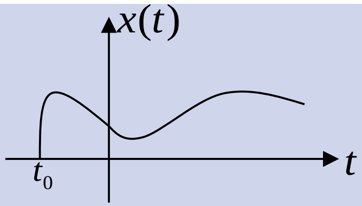
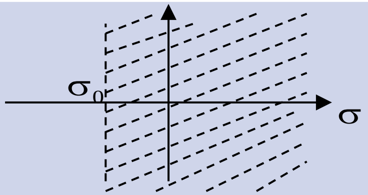
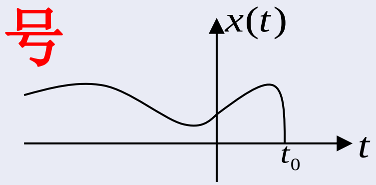
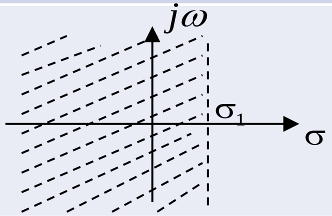
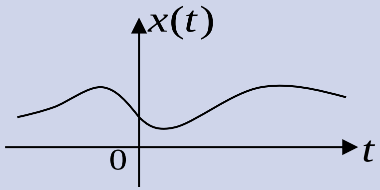
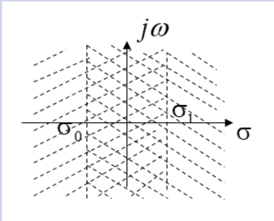
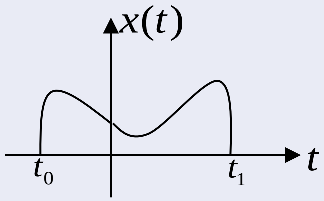
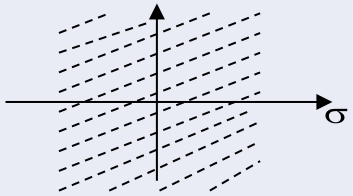
$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt=\int_{t_0}^{t_1}x(t)e^{-st}dt=\int_{t_0}^{t_1}x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$$



此时，若$x(t)$是绝对可积的，$x(t)e^{-\sigma t}$总是满足绝对可积的，所以其双边拉氏变换在整个s平面上均存在，即收敛域是s全平面。

4.12.5 双边拉氏变换收敛域的特点

双边拉氏变换要考虑收敛域的存在性，必须注明收敛域。

信号类别		双边拉氏变换的收敛域	
右边信号		象函数最右边极点的右侧	
左边信号		象函数最左边极点的左侧	
双边信号		两个极点之间的带状区域（若双边拉氏变换存在）	
时限信号		s全平面	

4.12 双边拉普拉斯变换

同样的象函数若收敛域不同，对应的原信号也不同。

F(s)	收敛域	f(t)
1/s	σ>0	u(t)
1/s	σ<0	-u(-t)
1/(s+α)	σ>-α	$e^{-\alpha t}$ u(t)
1/(s+α)	σ<-α	$-e^{-\alpha t}$ u(-t)

例：$$F(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s+\alpha}\quad(\alpha>0)$$

$\sigma>0$　　$f(t)=u(t)+e^{-\alpha t}u(t)$

$-\alpha<\sigma<0$　　$f(t)=-u(-t)+e^{-\alpha t}u(t)$

$\sigma<-\alpha$　　$f(t)=-u(-t)-e^{-\alpha t}u(-t)$

4.12.5 双边拉氏逆变换

可以根据收敛域和极点的情况来求解：

(1)对象函数进行部分分式展开；

(2)根据极点的情况对象函数取逆变换；

(3)收敛域左边的极点对应右边信号，收敛域右边极点对应左边信号。

例4-43：已知 $F(s)=\dfrac{2s+3}{s(s+2)(s+3)}$，求其所有可能的双边拉氏逆变换。

解：
$$F(s)=\frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)}=\frac{1}{2s}+\frac{1}{2(s+2)}-\frac{1}{s+3}$$

根据象函数极点的情况，它的收敛域有四种可能的情况，不同的收敛域取逆变换得到不同的时域形式。

$\sigma>0$ $$f(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-3t}\right)u(t)$$

$-2<\sigma<0$ $$f(t)=-\frac{1}{2}u(-t)+\left(\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-3t}\right)u(t)$$

$-3<\sigma<-2$ $$f(t)=-\frac{1}{2}\left(1+e^{-2t}\right)u(-t)-e^{-3t}u(t)$$

$\sigma<-3$ $$f(t)=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}-e^{-3t}\right)u(-t)$$

4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

拉普拉斯变换是傅里叶变换由实频率ω至复频率$s=\sigma+j\omega$上的推广，傅里叶变换是拉普拉斯变换在s平面虚轴上的特例。

$$X(s)=\mathcal{L}\{x(t)\}=\mathcal{F}\left\{x(t)e^{-\sigma t}\right\}=X(\sigma+j\omega)$$

许多信号，将其傅里叶变换式中的jω换成s就是它的拉普拉斯变换，反之亦然。例如单边指数衰减信号：

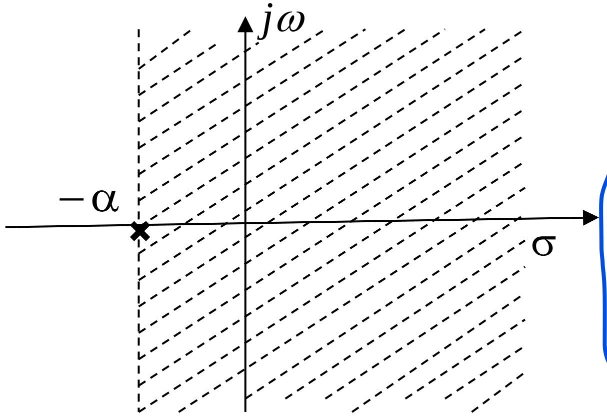
$$e^{-\alpha t}u(t)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{j\omega+\alpha}\qquad \therefore e^{-\alpha t}u(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{s+\alpha}$$

然而也有特例。例如单位阶跃信号：

$$u(t)\xleftrightarrow{FT}\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\qquad u(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{s}$$

如果信号的拉氏变换的收敛域包含了虚轴，可将拉氏变换中的s代以$j\omega$求得其傅里叶变换。

例如，单边指数衰减的信号极点位于负实轴上。



$e^{-\alpha t}u(t)$ 拉氏变换收敛域

负实轴上的重极点的例子：

$$te^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{(j\omega+\alpha)^2}$$

$$te^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

负实部的共轭复数极点的例子：

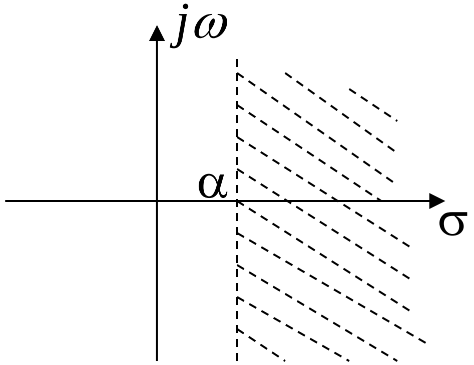
$$e^{-\alpha t}\cos(\Omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{j\omega+\alpha}{(j\omega+\alpha)^2+\Omega_0^2}$$

$$e^{-\alpha t}\cos(\Omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\Omega_0^2}$$

4.13 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

当拉氏变换收敛域不包含虚轴时，即信号的拉氏变换的极点在s平面上虚轴的右半平面，其傅里叶变换不存在。

例如，单边指数增长的信号，其极点位于正实轴上。



$e^{\alpha t}u(t)$的拉氏变换收敛域

$$e^{\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s-\alpha}$$

由于信号呈指数增长，不满足绝对可积的条件，其傅里叶变换不存在。

当信号的拉氏变换的极点**有位于s平面虚轴上的极点，不能简单的将jω代替s以得到其傅里叶变换。**例如，单位阶跃信号***u*(t)**：

$$u(t) \xleftrightarrow{LT} \frac{1}{s} \qquad u(t) \xleftrightarrow{FT} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

设信号***x*(*t*)**的拉氏变换为***X*(s)**，它有虚轴上的*N*个单极点**j**Ω_i，

$$X(s) = X_1(s) + \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{s - j\Omega_i} \qquad x(t) = x_1(t) + \sum_{i=1}^{N} A_i e^{j\Omega_i t} u(t)$$

极点位于虚轴的左侧

频域卷积定理

$$X(\omega) = X_1(\omega) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{N} 2\pi A_i \delta(\omega - \Omega_i) * [\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)]$$

$$= \underbrace{X_1(\omega) + \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{j(\omega - \Omega_i)}}_{X(s)|_{s=j\omega}} + \pi \sum_{i=1}^{N} A_i \delta(\omega - \Omega_i)$$

对应虚轴上单极点的冲激信号

设信号$x(t)$的拉氏变换$X(s)$有虚轴上的k重极点:$j\Omega_0$

$$X(s)=X_1(s)+\frac{A_0}{(s-j\Omega_0)^k}$$

极点位于虚轴的左侧

可以证明，其对应的傅里叶变换为:

$$X(\omega)=X(s)|_{s=j\omega}+\frac{\pi A_0 j^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}(\omega-\Omega_0)$$

例如，单位斜变信号

$$tu(t)\xleftrightarrow{LT}\frac{1}{s^2}$$

$$tu(t)\xleftrightarrow{FT}-\frac{1}{\omega^2}+j\pi\delta'(\omega)$$

❖ 单边拉氏变换的应用

单边拉氏变换在系统分析时，我们均设定系统是因果的。单边拉氏变换在系统的瞬态分析、系统函数及其s域分析应用十分普遍。

❖ 系统的复频域分析方法（用拉氏变换求解系统的响应）

分2种情况：

- 给定微分方程

  利用拉氏变换的时域微分特性，可分零状态响应和零输入响应求解。

- 给定电路图

  1. 去掉系统的激励，将系统的初始条件等效为激励源，画出S域等效电路，可得到零输入响应；
  2. 去掉系统的初始条件，保留激励源，画出S域等效电路，可得到零状态响应。

本章小结

❖ 系统函数H(s)的求解方法

1. H(s) = $\mathscr{L}$[h(t)]
2. H(s) = 零状态响应的拉氏变换/激励的拉氏变换
3. 由微分方程求解
4. 由电路图求解
5. 由s域模拟框图求解
6. 由零、极点图+初始条件求解

模拟框图中的基本单元

	时 域	S 域
积分器	$f(t) \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$F(s) \longrightarrow \boxed{s^{-1}} \longrightarrow Y(s)=\frac{F(s)}{s}$
加法器	$f_1(t)\ (+),\ f_2(t)\ (-) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow f_1(t)-f_2(t)$	$F_1(s)\ (+),\ F_2(s)\ (-) \longrightarrow \boxed{\Sigma} \longrightarrow F_1(s)-F_2(s)$
数乘器	$f(t) \longrightarrow \boxed{a} \longrightarrow af(t)$	$F(s) \longrightarrow \boxed{a} \longrightarrow aF(s)$

❖ 用系统函数H(s)分析线性时不变系统

1. h(t)的时域波形
2. 频响特性 H(ω)（幅频特性、相频特性）
3. 系统的稳定性判别

系统函数分析法的局限性

系统函数反映的是系统零状态响应的外特性，不反映系统内部全部特性。

在很多情况之下，难以建立确切的系统函数模型，此分析方法也就失效。如高阶线性系统求系统函数太烦琐，非线性，时变系统以及模糊现象不能采用系统函数的方法。

解决方法：状态变量分析法（第十二章）

作业

基础题：4-50。

加强题：4-51。