本次课内容

2.1 引言

2.2 系统数学模型（微分方程）的建立

2.3 用时域经典法求解微分方程

2.4 起始点的跳变-从0-到0+状态的转换

本次课目标

1. 熟悉建立系统微分方程的方法（如何消去中间变量）；
2. 熟练掌握经典法求系统的自由响应和强迫响应；
3. 熟练利用冲激函数匹配法确定起始点状态的跳变量。

第二章 连续时间系统的时域分析

2.1 引言

为什么要进行系统的时域分析？

LTI 系统的时域分析方法：

- 直观、物理概念清楚，是学习各种变换域分析法的基础；
- 计算过程复杂，但计算机和软件的发展使其求解更方便。

信号 → 分解 → 系统 → 叠加 → 响应

对于已知的信号　　**确定的系统**　　**如何得到系统响应?**

1. 系统的数学模型如何建立？	微分方程
2. 系统的响应如何分解？	自由+强迫，零输入+零状态
3. 不同的响应如何求解？	经典解法和卷积解法
4. 信号与系统如何应用？	模拟框图，计算机求解

第二章 连续时间系统的时域分析

2.2 系统数学模型（微分方程）的建立

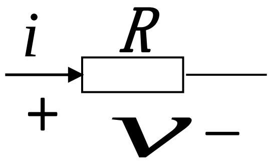
微分方程建立的目的：将系统的**物理特性**进行**数学建模**描述。

电路系统：元件约束特性→网络拓扑约束(方程) →微分方程

1）元件约束特性

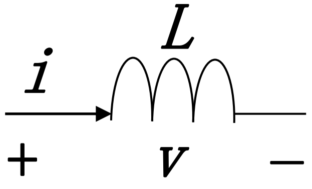
①电路元件

i) 电阻R：



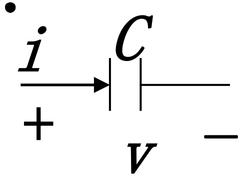
$$v = Ri$$

ii) 电感L：



$$i = \frac{1}{L}\int v\,dt \qquad v = L\,di/dt$$

iii) 电容C：



$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad v = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

2）各电路的电流、电压约束关系

基尔霍夫电流定律（KCL）：在任一瞬时，流向某一结点的电流之和恒等于该结点流出电流之和，即：

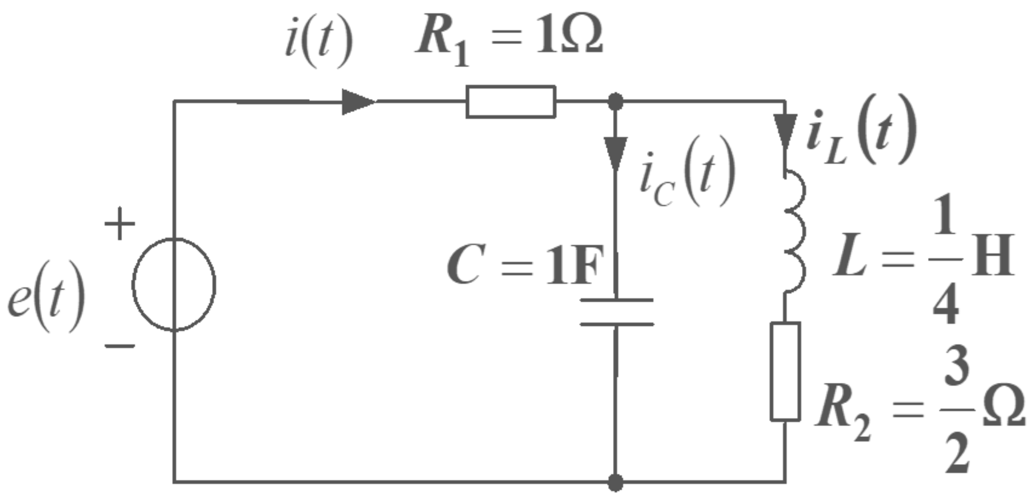
$$\sum I_{入}=\sum I_{出}$$

基尔霍夫电压定律（KVL）：在任一瞬间，沿电路中的任一回路绕行一周，在该回路上电动势之和恒等于各电阻上的电压降之和，即：

$$\sum \mathrm{U}_{电压升}=\sum \mathrm{U}_{电压降}$$

2.2 系统数学模型（微分方程）的建立

例2-1：给定如图所示电路，建立电流 $i(t)$ 的微分方程。



解： 根据电路形式，列回路电压方程

$$R_1 i(t) + v_C(t) = e(t) \qquad (1)$$

$$v_C(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L(t) + i_L(t)R_2 \qquad (2)$$

列结点电流方程

$$i(t) = C\frac{d}{dt}v_C(t) + i_L(t) \qquad (3)$$

难点：如何将三个联立的微分方程变换为一个表征输入为***e*(*t*)**、输出为***i*(*t*)**的微分方程？

如何消去中间变量$v_C(t)$和$i_L(t)$？

$R_1 i(t)+v_C(t)=e(t)$　（1）　$\boxed{\text{最简单，包含}v_C(t)\text{，不包含}v_C(t)\text{的导数。}}$

$v_C(t)=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L(t)+i_L(t)R_2$　（2）包含$i_L(t)$的导数，与$v_C(t)$的二阶导数有关，最复杂。

$i(t)=C\frac{d}{dt}v_C(t)+i_L(t)$　（3）　不包含 $i_L(t)$的导数，包含$v_C(t)$的一阶导数。

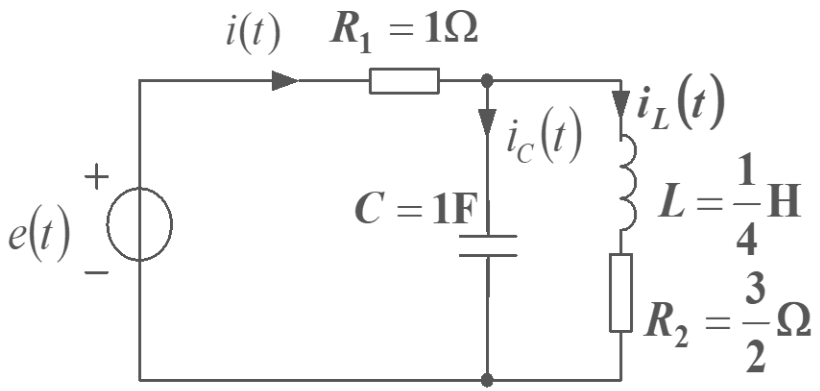
由（1）可得　$v_C(t)=e(t)-R_1 i(t)$　（4）

将（4）代入（3），可得　$i_L(t)=i(t)+CR_1\frac{d}{dt}i(t)-C\frac{d}{dt}e(t)$　（5）

将（4）和（5）代入（2），可得（6）（见下页）。

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+(\frac{1}{R_1C}+\frac{R_2}{L})\frac{d}{dt}i(t)+(\frac{1}{LC}+\frac{R_2}{R_1LC})i(t)$$

$$=\frac{1}{R_1}\frac{d^2}{dt^2}e(t)+\frac{R_2}{R_1L}\frac{d}{dt}e(t)+\frac{1}{R_1LC}e(t) \qquad (6)$$



再把电路参数代入（6），得

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t)$$

第二章 连续时间系统的时域分析

经典法求解微分方程

对于复杂系统，激励信号$x(t)$与响应函数$y(t)$之间的关系，可用下列形式的**常系数一元 *n* 阶线性微分方程**来描述

$$a_n\frac{d^ny(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)$$
$$=b_m\frac{d^mx(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0x(t)$$

此方程的完全解由齐次解（自由响应或固有响应）和特解（强迫响应）两部分组成。

齐次解应满足

$$a_n\frac{d^ny(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=0$$

2.3 用时域经典法求解微分方程

齐次解特征方程为

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

特征根$\alpha_1 \ldots \alpha_n$是系统的"固有频率"。

1）特征根无重根，则微分方程的齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}$$

2）特征根有重根，假设α_1是特征方程的K重根，那么，在齐次解中对应于α_1的部分将有K项

$$(A_1 t^{K-1} + A_2 t^{K-2} + \ldots + A_{K-1} t + A_K)e^{\alpha_1 t}$$

3）若α_1、α_2 为共轭复根，即$\alpha_{1,2} = \alpha \pm j\beta$，那么，在齐次解中对应于$\alpha_1$、$\alpha_2$的部分为

$$e^{\alpha t}(A_1 \cos\beta t + A_2 \sin\beta t)$$

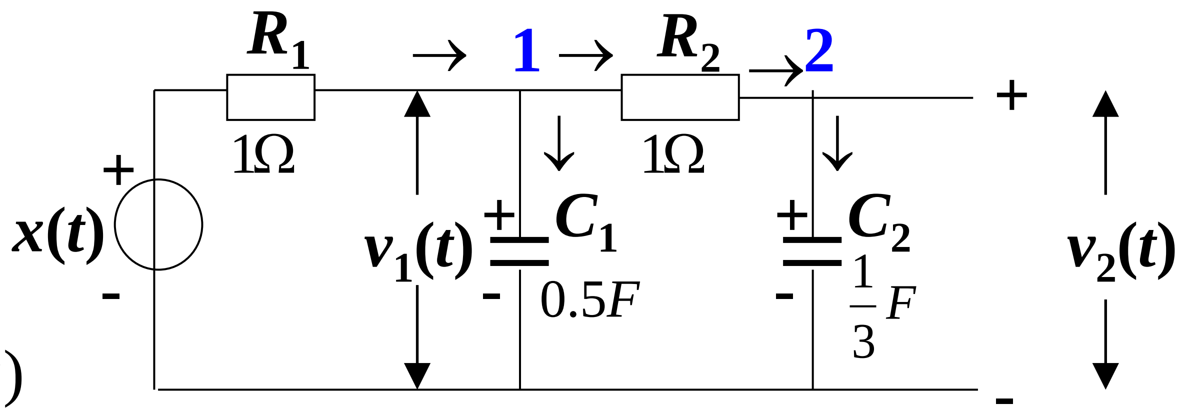
注意：这里只得到齐次解的形式，系数还未知！

2.3 用时域经典法求解微分方程

特解的函数形式与激励的函数形式有关。**将激励信号代入微分方程的右端得到的函数式称为“自由项”**。通常观察自由项，**查表选特解函数式，将其代入方程后求得特解函数式中的待定系数**，即可求出特解。

自由项	特解
E (常数)	B (常数)
t^p	$B_p t^p + B_{p-1} t^{p-1} + \ldots + B_1 t + B_0$
$e^{\alpha t}$	$\begin{cases} Be^{\alpha t} & (\alpha\text{不是特征根}) \\ Bte^{\alpha t} & (\alpha\text{是单特征根}) \\ Bt^2 e^{\alpha t} & (\alpha\text{是二重特征根}) \end{cases}$
$\begin{cases} \cos\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t \end{cases}$	$B_1\cos\omega_0 t + B_2\sin\omega_0 t$

例2-2： 如下图所示电路，已知激励信号$x(t)=\cos(2t)u(t)$, 两个电容上的初始电压均为零，求响应信号$v_2(t)$的表达式。



解:

（a）列写微分方程式为

$$\begin{cases} \text{结点1:} & \dfrac{x(t)-v_1(t)}{R_1}=C_1\dfrac{dv_1(t)}{dt}+\dfrac{v_1(t)-v_2(t)}{R_2} \quad (1) \\ \text{结点2:} & \dfrac{v_1(t)-v_2(t)}{R_2}=C_2\dfrac{dv_2(t)}{dt} \quad (2) \end{cases}$$

由（2）可得 $v_1(t)=R_2C_2\dfrac{dv_2(t)}{dt}+v_2(t)$ (3)

将（3）代入（1）可得 $\dfrac{d^2v_2(t)}{dt^2}+7\dfrac{dv_2(t)}{dt}+6v_2(t)=6\cos 2t\,u(t)$

（b）为求**齐次解**，写出特征方程 $\alpha^2+7\alpha+6=0$

特征根 $\alpha_1=-1,\alpha_2=-6$

齐次解 $A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}$ （A_1、A_2待定）

（c）查表，得**特解**为 $B_1\sin 2t+B_2\cos 2t$

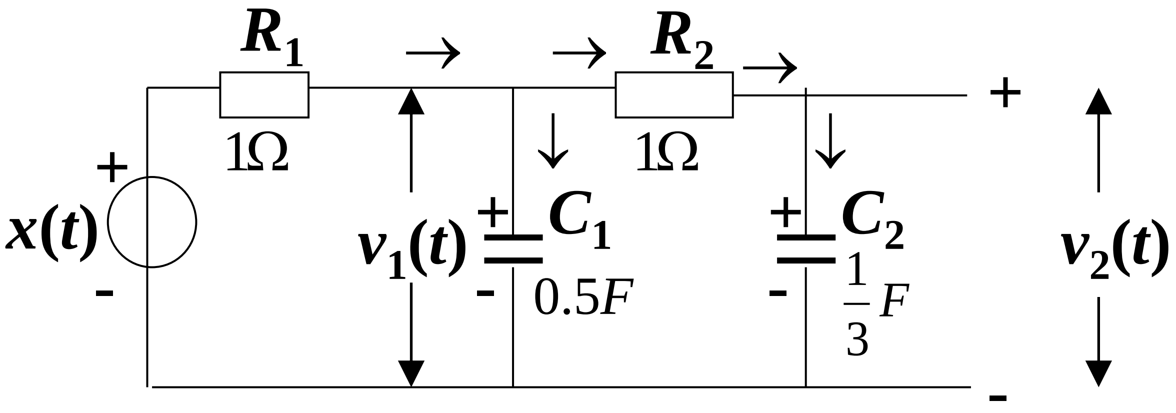
代入原方程左边得 $(2B_1-14B_2)\sin 2t+(14B_1+2B_2)\cos 2t=6\cos 2t$

比较上述方程两边系数，得 $\begin{cases}2B_1-14B_2=0\\14B_1+2B_2=6\end{cases} \longrightarrow B_1=\frac{21}{50},B_2=\frac{3}{50}$

（d）**完全解**为（A_1、A_2待定）

$$v_2(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}+\frac{21}{50}\sin 2t+\frac{3}{50}\cos 2t \qquad (4)$$

（e）**由初始状态确定系数*A***: 由于C_2初始端电压为0，在t=0加入激励时C_2电压不突变，即$v_2(0)=0$; 又因为电容C_1初始端电压为0，在t=0加入激励时C_1电压不突变，R_2、C_2两端的电压也不突变，于是通过R_2、C_2的初始电流也为0，即 $\frac{dv_2(0)}{dt}=0$ 。



$x(t)=\cos(2t)u(t)$

$$v_2(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}+\frac{21}{50}\sin 2t+\frac{3}{50}\cos 2t$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt}=-A_1e^{-t}-6A_2e^{-6t}+\frac{21}{25}\cos 2t-\frac{3}{25}\sin 2t$$

由$v_2(0)=0$得到 $A_1+A_2=-\frac{3}{50}$

由$\frac{dv_2(0)}{dt}=0$ 得到 $A_1+6A_2=\frac{21}{25}$

解得 $A_1=-\frac{6}{25}, A_2=\frac{9}{50}$

（f）完全解为 $v_2(t)=-\frac{6}{25}e^{-t}+\frac{9}{50}e^{-6t}+\frac{21}{50}\sin(2t)+\frac{3}{50}\cos(2t)\quad (t\geq 0)$

2.3 用时域经典法求解微分方程

时域经典法分析电路系统的流程

优点：物理意义清楚；
缺点：过程复杂。

1. 根据基尔霍夫定律列写电路的微分方程
2. 将联立的微分方程化为一元微分方程
3. 求齐次解（系数待定）
4. 查表求特解
5. 完全解 = 齐次解 + 特解，将完全解代入微分方程求齐次解的系数

初始状态

6. 已定系数的完全解—系统的全响应

完全响应的分解：

$$v_2(t) = \underbrace{-\frac{6}{25}e^{-t} + \frac{9}{50}e^{-6t}}_{\text{自由响应（齐次解）}} + \underbrace{\frac{21}{50}\sin(2t) + \frac{3}{50}\cos(2t)}_{\text{强迫响应（特解）}}$$

当输入信号为阶跃信号或有始周期信号时，稳定系统的全响应可以分为暂态响应和稳态响应。暂态响应是指激励接入后，全响应中暂时出现的响应，随时间增长逐渐消失。稳态响应通常由阶跃函数和周期函数组成。

$$v_2(t) = \underbrace{-\frac{6}{25}e^{-t} + \frac{9}{50}e^{-6t}}_{\text{暂态响应}} + \underbrace{\frac{21}{50}\sin(2t) + \frac{3}{50}\cos(2t)}_{\text{稳态响应}}$$

第二章 连续时间系统的时域分析

2.1 引言
2.2 系统数学模型（微分方程）的建立
2.3 用时域经典法求解微分方程
2.4 起始点的跳变-从0-到0+状态的转换
2.5 零输入响应和零状态响应
2.6 冲激响应与阶跃响应
2.7 卷积
2.8 卷积的性质
2.9 用算子符号表示微分方程
2.10 以“分配函数”的概念认识冲激函数

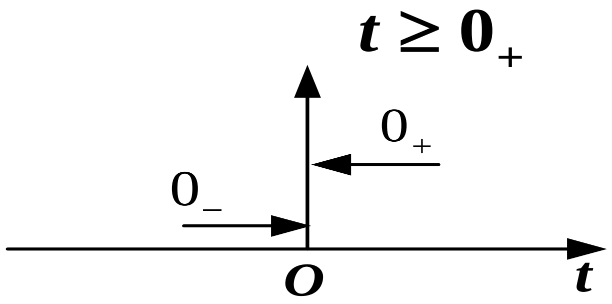
2.4 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换

在系统分析问题中，初始条件要根据激励接入瞬时**系统的状态**决定。

系统在t_0时的状态是一组必须知道的**最少数据量**，根据这组数据、系统的数学模型以及t_0时接入的激励信号，就能够完全确定在t_0以后任意时刻的响应。***n*阶微分方程的状态是响应的0—(*n*-1)阶导数。** （详见第十二章）

0_-状态，**起始状态**（激励接入之前的瞬间）

$$r^{(k)}(0_-)=\left[r(0_-),\frac{\mathrm{d}\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t},\frac{\mathrm{d}^2\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t^2},\cdots\frac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}\right]$$



0_+状态，**初始条件**，导出的起始状态（激励接入之后的瞬间）

$$r^{(k)}(0_+)=\left[r(0_+),\frac{\mathrm{d}\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t},\frac{\mathrm{d}^2\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t^2},\cdots\frac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}\right]$$

用时域经典法求得的微分方程的解在$t\geq 0_+$的时间范围内，因而不能以0_-状态作为初始条件，而应以0_+状态作为初始条件。

2.4 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换

对于具体的电网络，系统的**起始状态就是系统中储能元件的储能情况**。

一般情况下换路期间**电容两端的电压**和流过**电感中的电流不会发生突变**。

这就是在电路分析中的换路定则：

$$v_C(0_-) = v_C(0_+), \quad i_L(0_-) = i_L(0_+)$$

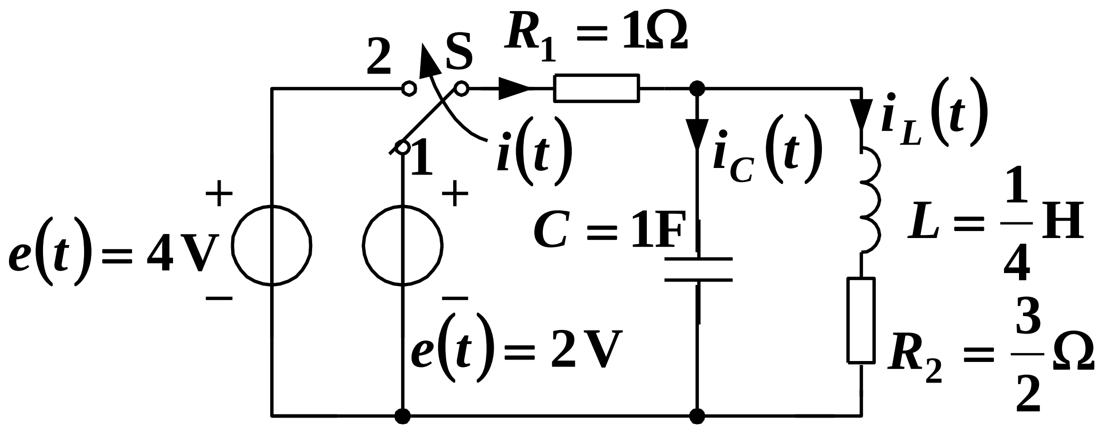
根据上述定则，在例2-2中，从0_-到0_+状态没有发生跳变。

当有冲激电流强迫作用于电容或有冲激电压强迫作用于电感，从0_-到0_+状态就会发生跳变。

重点和难点：如何确定从0_-到0_+状态的跳变量？

2.4 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换

例2-3： 给定如图所示电路，$t<0$ 开关S处于1的位置而且已经达到稳态。当 $t=0$ 时由1转向2。建立电流$i(t)$的微分方程并分解 $i(t)$ 在 $t\geq 0$ 时的变化。

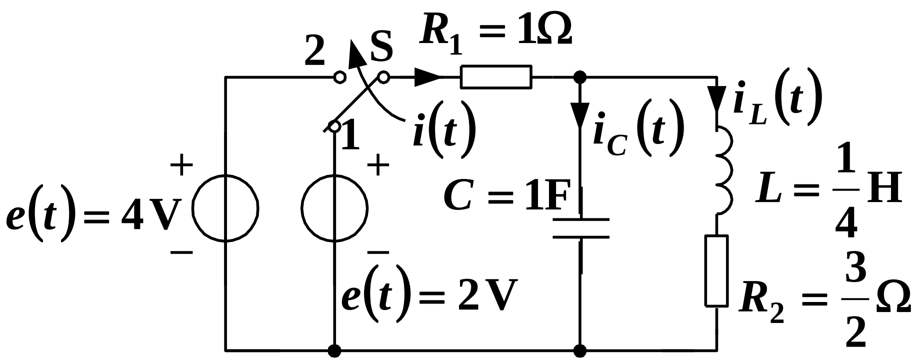


解： （a）列写电路的微分方程

在 $t\geq 0$ 时此电路与例2-1的电路相同，因此电路微分方程相同：

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t) \qquad (1)$$

(b) 求系统的完全响应



系统的特征方程 $\alpha^2 + 7\alpha + 10 = 0$ 即 $(\alpha+2)(\alpha+5) = 0$

特征根 $\alpha_1 = -2,\quad \alpha_2 = -5$

齐次解 $i_h(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} \quad (t \geq 0_+)$

$$\frac{d^2}{dt^2} i(t) + 7\frac{d}{dt} i(t) + 10 i(t) = \frac{d^2}{dt^2} e(t) + 6\frac{d}{dt} e(t) + 4e(t)$$

特解: 由于 $t \geq 0_+$ 时 $e(t) = 4\text{V}$

方程右端自由项为 4×4,因此令特解 $i_p(t) = B$,代入微分方程得到

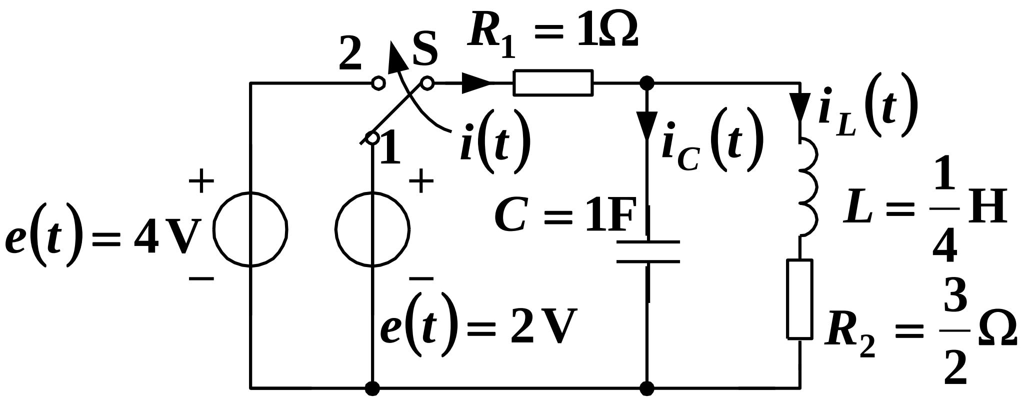
$$10B = 4\times4 \longrightarrow B = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

则系统的完全响应为

$$i(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} + \frac{8}{5} \qquad (t \geq 0_+)$$

2.4 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换

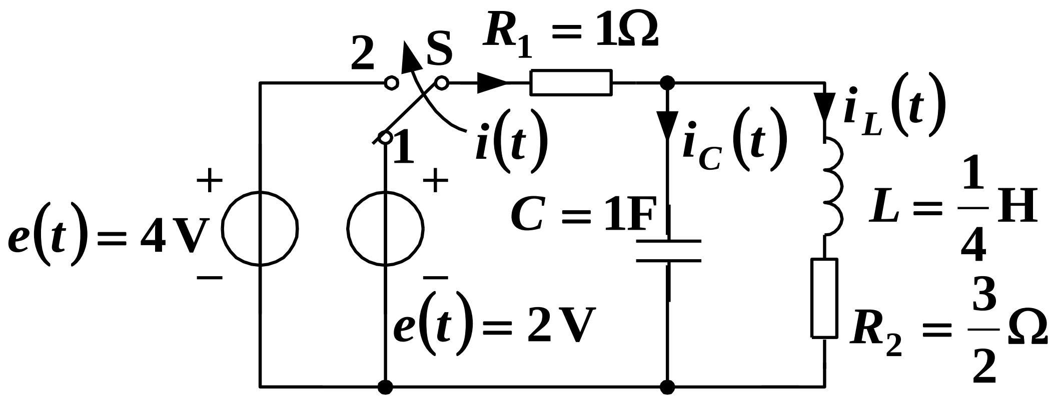
（c）确定换路后的 $i(0_+)$和 $\frac{d}{dt}i(0_+)$



0_-状态（电容开路、电感短路）：$i(0_-) = i_L(0_-) = \frac{2}{R_1 + R_2} = \frac{4}{5}\text{A}$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_-) = 0$　　　　$v_C(0_-) = \frac{2R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6}{5}\text{V}$

换路后的 $i(0_+)$ 和 $\frac{d}{dt}i(0_+)$



由于**电容两端的电压和电感中的电流不会发生突变**, 故有

$$v_C(0_+) = v_C(0_-) = \frac{6}{5}\mathrm{V} \qquad i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{4}{5}\mathrm{A}$$

$$i(0_+) = \frac{1}{R_1}\left[e(0_+) - v_C(0_+)\right] = \frac{1}{1}\left(4 - \frac{6}{5}\right)\mathrm{A} = \frac{14}{5}\mathrm{A}$$

$$\frac{d}{dt}i(0_+) = \frac{1}{R_1}\left[\frac{d}{dt}e(0_+) - \frac{d}{dt}v_C(0_+)\right] = \frac{1}{R_1}\left[0 - \frac{i_C(0_+)}{C}\right]$$

$$= \frac{i_L(0_+) - i(0_+)}{R_1 C} = i_L(0_-) - i(0_+) = \frac{4}{5} - \frac{14}{5} = -2\mathrm{A/s}$$

（d）确定系数A_1、A_2

已知　$i(t)=A_1\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-5t}+\dfrac{8}{5}$　　$\dfrac{d}{dt}i(t)=-2A_1\mathrm{e}^{-2t}-5A_2\mathrm{e}^{-5t}$

$$\begin{cases} i(0_+)=A_1+A_2+\dfrac{8}{5}=\dfrac{14}{5} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(0_+)=-2A_1-5A_2=-2 \end{cases}$$

求得 $\begin{cases} A_1=\dfrac{4}{3} \\ A_2=-\dfrac{2}{15} \end{cases}$

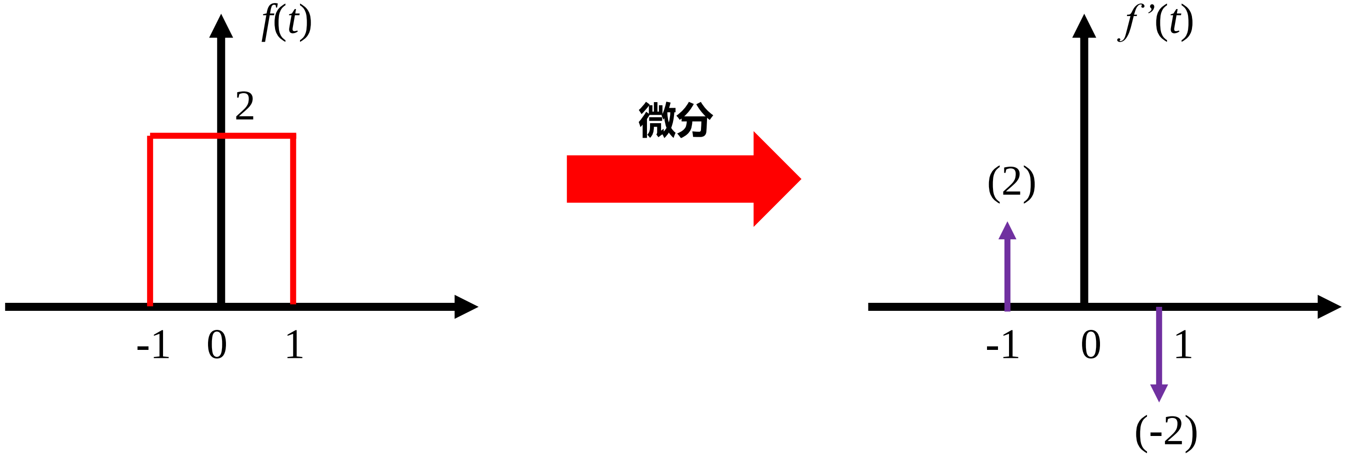
完全响应为

$$i(t)=\left(\frac{4}{3}e^{-2t}-\frac{2}{15}e^{-5t}+\frac{8}{5}\right)A \qquad (t\ge 0_+)$$

2.4 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换

冲激函数匹配法：冲激函数是产生状态跳变的原因（例如，电容中的冲激电流导致其电压跳变），所以 **t =0 时微分方程左右两端的$\delta(t)$及其各阶导数应该平衡。**

(其他项也应该平衡，我们讨论初始条件，只关注引起状态跳变的冲激函数及其导数，因此可以不管其他项。）



$$f(t)=2u(t+1)-2u(t-1)$$

$$\frac{df(t)}{dt}=2\delta(t+1)-2\delta(t-1)$$

跳变的概念：其导数是冲激函数。

例2-4： $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+3r(t)=3\delta'(t)$, 已知 $r(0_-)=1$，求 $r(0_+)$。

解： 方程右端含$3\delta'(t)$项，它一定属于$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)$。

设 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)=3\delta'(t)+a\delta(t)$

则 $r(t)=3\delta(t)+\boxed{a\Delta u(t)}$ ⇐ a--0_-到0_+的状态跳变量

$\Delta u(t)$:相对单位跳变函数
表示0_-到0_+幅度跳变一个单位

代入方程，只保留方程两边的冲激函数及其导数项，

$3\delta'(t)+(a+9)\delta(t)=3\delta'(t)$ ⇒ $a+9=0$ ⇒ $a=-9$

$r(0_+)=r(0_-)+a=1-9=-8$

例2-4若考虑其他项的平衡，

设 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)=3\delta'(t)+a\delta(t)+b\Delta u(t)$$

则 $$r(t)=3\delta(t)+a\Delta u(t)$$

$\Delta u(t)$从$0_$到0_+的积分为0（斜变函数）

代入方程

$$3\delta'(t)+(a+9)\delta(t)+(3a+b)\Delta u(t)=3\delta'(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+9=0 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-9 \\ b=27 \end{cases}$$

$$r(0_+)=r(0\_)+a=1-9=-8$$

因此无需考虑其他项的平衡。

系统微分方程为 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=2\delta(t)$，已知 $r(0_-)$和$r'(0_-)$，求$r(0_+)$和$r'(0_+)$。

A $\mathrm{r}(0_+)=r(0_-)$， $r'(0_+)=r'(0_-)$

B $\mathrm{r}(0_+)=r(0_-)$，$r'(0_+)=r'(0_-)+2$

C $\mathrm{r}(0_+)=r(0_-)+2$，$r'(0_+)=r'(0_-)$

D $\mathrm{r}(0_+)=r(0_-)+3$，$r'(0_+)=r'(0_-)+2$

提交

例2-5： 系统微分方程为 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=2\delta(t)$，已知$r(0_-)$和$r'(0_-)$，求$r(0_+)$和$r'(0_+)$。

解： 方法一：设 $r''(t)=a\delta(t)$, $r'(t)=a\Delta u(t)$, $r(t)=0 \quad (t=0)$

$$a\delta(t)+3a\Delta u(t)=2\delta(t) \longrightarrow a=2$$

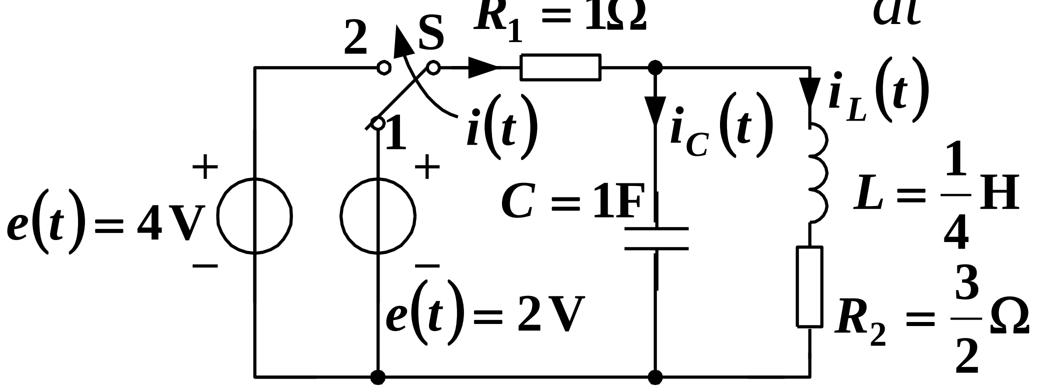
$$r'(0_+)=r'(0_-)+2 \qquad r(0_+)=r(0_-)$$

方法二：方程右端含$2\delta(t)$项，它一定属于$r''(t)$，说明$r'(t)$ 在0时刻发生了**两个单位的跳变**，即$r'(0_+)=r'(0_-)+2$。

而$r(t)$在0时刻没有变化，即 $r(0_+)=r(0_-)$。

用冲激函数匹配法求例2-3中0_-到0_+时的状态变化。

给定如图所示电路，$t<0$ 开关S处于1的位置而且已经达到稳态。当$t=0$ 时由1转向2，建立电流$i(t)$的微分方程并确定换路后的$i(0_+)$和$\dfrac{d}{dt}i(0_+)$。



解： 列写电路的微分方程

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t)$$

0_+时刻附近激励的表达式为：$e(t)=e(0_-)+2\Delta u(t)=2+2\Delta u(t)$,

代入方程右边可得：$\dfrac{d^2}{dt^2}i(t)+7\dfrac{d}{dt}i(t)+10i(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)+8\Delta u(t)+8$

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)+8\Delta u(t)+8$$

令 $\frac{d^2}{dt^2}i(t)=2\delta'(t)+a\delta(t)$，则 $\frac{d}{dt}i(t)=2\delta(t)+\underline{a}\Delta u(t)$， $i(t)=\underline{2}\Delta u(t)$

0_到0+的状态跳变量

将上述表达式代入方程左边，只保留方程两边的冲激函数及其导数项进行匹配，

$$2\delta'(t)+(a+14)\delta(t)=2\delta'(t)+12\delta(t)$$

$$a+14=12\Rightarrow a=-2$$

$$\therefore i(0_+)=i(0_-)+2=\frac{4}{5}+2=\frac{14}{5}\text{ A},\quad \frac{d}{dt}i(0_+)=\frac{d}{dt}i(0_-)-2=0-2=-2\text{ A/s}$$

2.4 起始点的跳变-从0_-到0_+状态的转换

对于一个N阶微分方程 $\frac{d^N r(t)}{dt^N}+\sum_{k=0}^{N-1} a_k \frac{d^k r(t)}{dt^k}=\sum_{r=0}^{N} b_r \frac{d^r \delta(t)}{dt^r}$

令 $\frac{d^N r(t)}{dt^N}=\sum_{r=0}^{N} c_r \frac{d^r \delta(t)}{dt^r}$

$$\frac{d^{N-1} r(t)}{dt^{N-1}}=\sum_{r=1}^{N} c_r \frac{d^{r-1} \delta(t)}{dt^{r-1}}+\boxed{c_0 \Delta u(t)}$$

$$\frac{d^{N-2} r(t)}{dt^{N-2}}=\sum_{r=2}^{N} c_r \frac{d^{r-2} \delta(t)}{dt^{r-2}}+\boxed{c_1 \Delta u(t)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\ r(t)}{dt}=c_N \delta'(t)+c_{N-1}\delta(t)+\boxed{c_{N-2}\Delta u(t)}$$

$$r(t)=c_N \delta(t)+\boxed{c_{N-1}\Delta u(t)}$$

状态跳变

$$\frac{d^{N-1} r(0_+)}{dt^{N-1}}=\frac{d^{N-1} r(0_-)}{dt^{N-1}}+c_0$$

$$\frac{d^{N-2} r(0_+)}{dt^{N-2}}=\frac{d^{N-2} r(0_-)}{dt^{N-2}}+c_1$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\ r(0_+)}{dt}=\frac{d\ r(0_-)}{dt}+c_{N-2}$$

$$r(0_+)=r(0_-)+c_{N-1}$$

将上述公式代入方程左边，

$$c_N \frac{d^N\delta(t)}{dt^N} + \sum_{r=0}^{N-1}\left(c_r + \sum_{k=r+1}^{N}\left(a_{N+r-k}c_k\right)\right)\frac{d^r\delta(t)}{dt^r} = \sum_{r=0}^{N} b_r \frac{d^r\delta(t)}{dt^r}$$

$c_N = b_N, c_r + \sum_{k=r+1}^{N}\left(a_{N+r-k}c_k\right) = b_r\,(r=0,\ldots,N-1)$，求解$c_r\,(r=0\ldots,N-1)$。

$$\frac{d^k r(0_+)}{dt^k} = \frac{d^k r(0_-)}{dt^k} + c_{N-1-k}\,(k=0,\ldots,N-1)$$

特例：若b_1至b_N均为0（方程右边的最高阶为$\delta(t)$），

则c_1至c_N均为0，$c_0 = b_0$。

$$\frac{d^{N-1} r(0_+)}{dt^{N-1}} = \frac{d^{N-1} r(0_-)}{dt^{N-1}} + b_0$$

$$\frac{d^k r(0_+)}{dt^k} = \frac{d^k r(0_-)}{dt^k} \quad (k=0,\ldots,N-2)$$

冲激函数匹配法自主练习题

（1）$2\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+4r(t)=\frac{de(t)}{dt}$

已知 $e(t)=u(t)$，$r(0\_)=1$，$r'(0\_)=1$，求 $r(0_+)$，$r'(0_+)$。

答案： $r(0_+)=1, r'(0_+)=\frac{3}{2}$

（2）$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+5\frac{dr(t)}{dt}+6r(t)=\frac{de(t)}{dt}-2e(t)$

已知 $e(t)=u(t)$，$r(0\_)=1$，$r'(0\_)=2$，求 $r(0_+)$，$r'(0_+)$。

答案： $r(0_+)=1, r'(0_+)=3$

作业

基础题（需提交）：2-1(a)(b)，2-5

加强题（选做，不提交）：2-1(c)(d)

本次课内容

2.5 零输入响应和零状态响应
2.6 冲激响应与阶跃响应

本次课目标

1. 掌握经典法求系统的零输入响应（齐次解）；
2. 熟练掌握用经典法和冲激函数匹配法求零状态响应；
3. 熟练运用冲激函数匹配法求冲激响应；
4. 熟悉冲激响应与阶跃响应的关系。

第二章 连续时间系统的时域分析

2.5 零输入响应与零状态响应

- 经典法求解系统的完全响应可分为：

完全响应=自由响应+强迫响应

$$r(t)=r_h(t)+r_p(t)$$

- 系统的完全响应也可分为：

完全响应=零输入响应+零状态响应

$$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$$

1．零输入响应的定义与待定系数确定

①定义：没有外加激励信号作用，完全由起始状态所产生的响应,即 $r_{zi}(t)=H[\{x(0_-)\}$

②满足方程：$c_0\frac{d^n}{dt^n}r_{zi}(t)+\ldots+c_{n-1}\frac{d}{dt}r_{zi}(t)+c_n r_{zi}(t)=0$

故 $r_{zi}(t)$ 是一种齐次解形式，即 $r_{zi}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zik}e^{\alpha_k t}$

其中，$\alpha_{1,}\alpha_2\ldots\ldots\alpha_n$ 为互不相等的n个系统特征根。

③初始条件：$r_{zi}^{(k)}(0_+)=r_{zi}^{(k)}(0_-)=r^{(k)}(0_-)$

即齐次解$r_{zi}(t)$ 的待定系数用 $r^{(k)}(0_-)$ 确定即可！

2. 零状态响应的定义与待定系数确定

①定义：起始状态为0，只由激励产生的响应 $r_{zs}(t)=H[e(t)]$

②满足方程：

$$c_0\frac{d^n}{dt^n}r_{zs}(t)+\ldots\ldots+c_{n-1}\frac{d}{dt}r_{zs}(t)+c_n r_{zs}(t)=E_0\frac{d^m}{dt^m}c(t)+\ldots..+E_m$$

故 $r_{zs}(t)$ 既含齐次解，又含特解 $r_p(t)$，即 $r_{zs}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zsk}e^{\alpha_k t}+r_p(t)$

③初始条件：

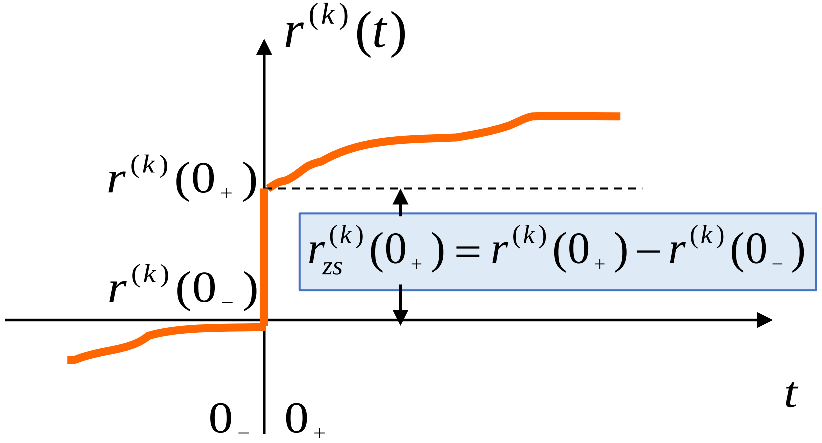
由于$r_{zs}(t)$在0_时刻的$k(k=0,\ldots n\text{-}1)$阶导数均为0，即 $r_{zs}^{(k)}(0\_)=0$,

$$r^{(k)}(0\_)=r_{zi}^{(k)}(0\_)+r_{zs}^{(k)}(0\_)=r_{zi}^{(k)}(0\_)$$

$$r^{(k)}(0_+)=r_{zi}^{(k)}(0_+)+r_{zs}^{(k)}(0_+)=r_{zi}^{(k)}(0\_)+r_{zs}^{(k)}(0_+)$$

$$r_{zs}^{(k)}(0_+)=r^{(k)}(0_+)-r^{(k)}(0\_)=\text{跳变值}$$

故 A_{zsk} 由跳变值确定。



$r^{(k)}(0_+)$：确定全响应的系数

$r^{(k)}(0_-)$：确定零输入响应的系数　⟸　重要！

$r_{zs}^{(k)}(0_+)$：确定零状态响应的系数

$$r(t)=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{Zik}e^{a_k t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{Zsk}e^{a_k t}+r_p(t)}_{\text{零状态响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(A_{Zik}+A_{Zsk}\right)\ e^{a_k t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{r_p(t)}_{\text{强迫响应}}$$

单选题 1分

设置

下列说法**错误**的是:

A 系统的零状态响应包括部分自由响应和强迫响应

B 若系统初始状态为零，系统的响应就是系统的强迫响应

C 零状态响应与系统起始状态无关，是由激励信号产生的

D 零输入响应与系统激励无关，是由系统起始状态产生的

提交

2.5 零输入响应与零状态响应

- 自由响应—系统特征对应；强迫响应—激励信号对应。
- 零输入响应—系统内部储能引起；零状态响应—激励信号引起。
- 零状态响应在LTI系统研究领域有重要意义：
  - 大量的通信和电子系统实际问题只需求零状态响应；
  - 为求零状态响应，可以不用繁琐的经典法，而是利用卷积方法。
- 按零输入响应和零状态响应分解有助于理解线性系统的叠加性和齐次性特征。
  - 零输入响应对系统的起始状态（初始储能）呈线性；
  - 零状态响应对系统的激励信号满足线性和时不变特性。

例2-6： 已知系统的微分方程 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=2e'(t)+6e(t)$，起始状态 $r(0_-)=2$，$r'(0_-)=0$，$e(t)=u(t)$，求该系统的零输入响应和零状态响应。

解：（1）先求零输入响应 $r_{zi}(t)$

$$r_{zi}''(t)+3r_{zi}'(t)+2r_{zi}(t)=0$$

求初始值： $r_{zi}(0_+)=r_{zi}(0_-)=r(0_-)=2$

$$r_{zi}'(0_+)=r_{zi}'(0_-)=r'(0_-)=0$$

由特征根为-1，-2，设定 $r_{zi}(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$

代入初始值，求得系数 $A_1=4$，$A_2=-2$

$$r_{zi}(t)=4e^{-t}-2e^{-2t}\quad(t>0)$$

例2-6： 已知系统的微分方程 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=2e'(t)+6e(t)$， 起始状态 $r(0_-)=2$，$r'(0_-)=0$，$e(t)=u(t)$，求该系统的零输入响应和零状态响应。

（2）再求零状态响应 $r_{zs}(t)$

$$r_{zs}''(t)+3r_{zs}'(t)+2r_{zs}(t)=2\delta(t)+6u(t)$$

$r_{zs}(0_+)=0 \quad r_{zs}'(0_+)=r_{zs}'(0_-)+2=2$ **观察发现 $r(0)$ 不跳变，$r'(0)$ 跳变2个单位。**

当 $t>0$ 时， $r_{zs}''(t)+3r_{zs}'(t)+2r_{zs}(t)=6$

设定齐次解： $r_{zsh}(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

设定特解：常数 B，代入方程，$2B=6$，求得 $B=3$。

$$r_{zs}(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+3 \qquad r_{zs}'(t)=-C_1e^{-t}-2C_2e^{-2t}$$

代入初始值 $r_{zs}(0_+)=0$, $r_{zs}'(0_+)=2$, 求得系数 $C_1=-4$，$C_2=1$

$$r_{zs}(t)=-4e^{-t}+e^{-2t}+3 \quad (t>0)$$

2.5 零输入响应与零状态响应

例2-7： 已知一线性时不变系统，在相同初始条件下，当激励为 $e(t)$时，其全响应为 $r_1(t)=[2e^{-3t}+\sin(2t)]u(t)$；当激励为 $2e(t)$ 时，全响应为$r_2(t)=[e^{-3t}+2\sin(2t)]u(t)$ 。

（1）初始条件不变，求当激励为 $e(t-t_0)$ 时的全响应 $r_3(t)$，t_0 为大于零的实常数。

（2）初始条件增大1倍，求当激励为$0.5e(t)$ 时的全响应 $r_4(t)$。

解： 设零输入响应为$r_{zi}(t)$，零状态响应为 $r_{zs}(t)$，则有

$$\begin{cases} r_1(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=\left[2e^{-3t}+\sin(2t)\right]u(t) \\ r_2(t)=r_{zi}(t)+2r_{zs}(t)=[e^{-3t}+2\sin(2t)]u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_{zi}(t)=3e^{-3t}u(t) \\ r_{zs}(t)=[-e^{-3t}+\sin(2t)]u(t) \end{cases}$$

(1) 初始条件不变，当激励为$e(t-t_0)$ 时的全响应

$$\therefore r_3(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t-t_0)$$

$$=3e^{-3t}u(t)+[-e^{-3(t-t_0)}+\sin(2t-2t_0)]u(t-t_0)$$

（2）初始条件增大1倍，当激励为$0.5e(t)$时的全响应为

$$\therefore r_4(t)=2r_{zi}(t)+0.5r_{zs}(t)$$

$$=2\left[3\mathrm{e}^{-3t}u(t)\right]+0.5\left[-\mathrm{e}^{-3t}+\sin(2t)\right]u(t)$$

$$=\left[5.5\mathrm{e}^{-3t}+0.5\sin(2t)\right]u(t)$$

已知系统微分方程为 $r'(t)+r(t)=e(t)$，在激励信号与初始储能的共同作用下，系统的完全响应为$r(t)=\left(1+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)$, 则系统的强迫响应分量为：

A $e^{-t}u(t)$

B $\frac{1}{2}e^{-t}u(t)$

C $(1-\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$

D $(1+\frac{1}{2}e^{-t})u(t)$

提交

已知系统微分方程为 $r'(t)+r(t)=e(t)$ ，在激励信号与初始储能的共同作用下，系统的完全响应为$r(t)=\left(1+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)$, 求系统的强迫响应分量。

解：

自由响应只与齐次解有关。

系统的特征方程为$\alpha+1=0$，特征根为$\alpha=-1$。因此系统的自由响应为

$\frac{1}{2}e^{-t}u(t)$。

强迫响应分量为全响应减去自由响应：$(1-\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$。

例2-8：假设某线性时不变系统的微分方程为

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=\frac{de(t)}{dt}+3e(t)$$

其中$e(t)$为激励，$r(t)$为响应。已知$e(t)=e^{-t}u(t)$，系统的完全响应为

$$r(t)=[(2t+3)e^{-t}-2e^{-2t}]u(t)$$ 。

（1）直接区分系统的强迫响应分量和自由响应分量，并说明理由。

（2）根据冲激函数匹配法求系统的初始状态$r(0_)$和$r'(0_)$。

（3）求系统的零输入响应和零状态响应。

解：（1）自由响应只与齐次解有关。系统的特征方程为$\alpha^2+3\alpha+2=0$

求解得到特征根为 $\alpha_1=-1,\alpha_1=-2$ 。

因此系统的自由响应为$(3e^{-t}-2e^{-2t})u(t)$。

全响应减去自由响应得到强迫响应为$2te^{-t}u(t)$。（激励中包含特征根）

（2）当 $e(t)=e^{-t}u(t)$ 时，

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=e^{-t}\delta(t)-e^{-t}u(t)+3e^{-t}u(t)$$

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=\delta(t)+2e^{-t}u(t)$$

在 t=0时， $$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=\delta(t)+2\Delta u(t)$$

由冲激函数匹配法可知，在0时刻$r'(t)$ 发生了增量为1的跳变， $r(t)$不跳变。

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}=\delta(t),\quad \frac{dr(t)}{dt}=1\cdot\Delta u(t),\ r(t)=0$$

$\therefore r(0_+)=r(0_-),\quad r'(0_+)=r'(0_-)+1$ 　0₋到0₊的状态跳变量

$$r(t)=[(2t+3)e^{-t}-2e^{-2t}]u(t),\quad r(0_+)=1$$

$$r'(t)=[2e^{-t}-(2t+3)e^{-t}+4e^{-2t}]u(t)=[-(2t+1)e^{-t}+4e^{-2t}]u(t),\quad r'(0_+)=3$$

$$r(0_-)=r(0_+)=1,\quad r'(0_-)=r'(0_+)-1=3-1=2$$

（3）求零输入和零状态响应。

方法一：先求系统的零输入响应。

因系统的特征根为 $\alpha_1=-1,\alpha_1=-2$，所以系统的零输入响应为

$r_{zi}(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}\quad (t>0)$。 $r_{zi}'(t)=-A_1e^{-t}-2A_2e^{-2t}\quad (t>0)$

代入初始条件 $r_{zi}(0_+)=r_{zi}(0_-)=r(0_-)=1,\ r_{zi}'(0_+)=r_{zi}'(0_-)=r'(0_-)=2$

$$\begin{cases}A_1+A_2=1\\-A_1-2A_2=2\end{cases}\longrightarrow A_1=4,A_2=-3$$

所以零输入响应为 $r_{zi}(t)=(4e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$

零状态响应为全响应减去零输入响应：$r_{zs}(t)=[(2t-1)e^{-t}+e^{-2t}]u(t)$

方法二：先求系统的零状态响应。

$$r_{zs}(t)=\underbrace{(A_{zs1}e^{-t}+A_{zs2}e^{-2t})u(t)}_{\text{齐次解}}+\underbrace{Bte^{-t}u(t)}_{\text{特解}}$$

特解即强迫响应，由问题（1）可知B=2。也可将特解和激励分别代入微分方程左侧和右侧求得B=2 。

由问题（2）可知，在0时刻$r(t)$不跳变，$r'(t)$跳变，增量为1。

故$r_{zs}(0_+)=r(0_+)-r(0_-)=0$，$r_{zs}'(0_+)=r'(0_+)-r'(0_-)=1$

$$r_{zs}(0_+)=A_{zs1}+A_{zs2}=0$$

$$r_{zs}'(0_+)=-A_{zs1}-2A_{zs2}+2=1$$

求得A_{zs1}=-1，$A_{zs2}=1$。

$$r_{zs}(t)=(2te^{-t}-e^{-t}+e^{-2t})u(t)$$

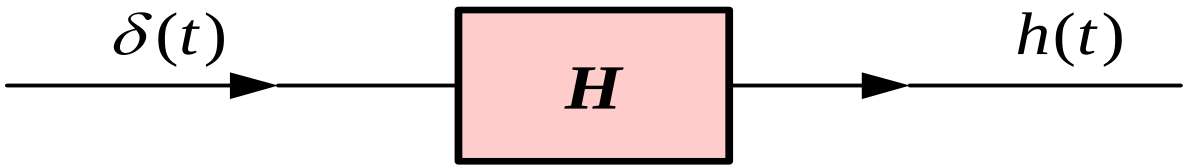
零输入响应为全响应减去零状态响应：$r_{zi}(t)=(4e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$

第二章 连续时间系统的时域分析

2.6.1 冲激响应

1. 定义

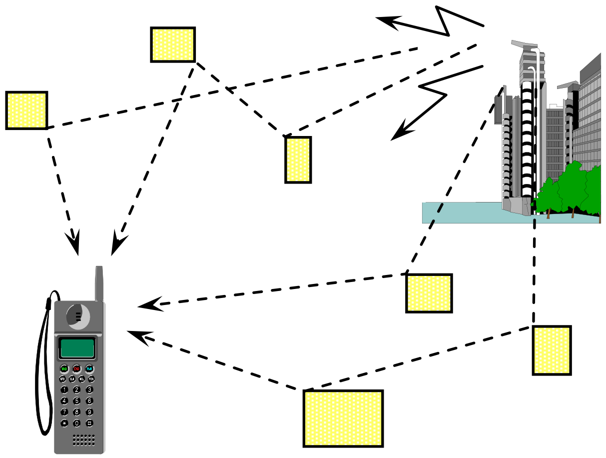
系统在单位冲激信号 $\delta(t)$ 作用下产生的零状态响应，称为单位冲激响应，简称冲激响应，一般用**h(t)**表示。



说明：在时域，对于不同系统，零状态情况下加同样的激励 $\delta(t)$ 看响应 $h(t)$，$h(t)$ 不同，说明其系统特性不同。冲激响应可以衡量系统的特性。

2.6 冲激响应与阶跃响应

思考如何用冲激响应表征一个无线多径信道。



2. 冲激响应的数学模型

对于线性时不变系统, 可以用一个微分方程表示

$$C_0\frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n}+C_1\frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+C_{n-1}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+C_n r(t)=$$

$$E_0\frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m}+E_1\frac{\mathrm{d}^{m-1} e(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+E_{m-1}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+E_m e(t)$$

响应及其各阶导数(最高阶为**n**次)

激励及其各阶导数(最高阶为**m**次)

令 $e(t)=\delta(t)$
则 $r(t)=h(t)$

$$C_0 h^{(n)}(t)+C_1 h^{(n-1)}(t)+\cdots+C_{n-1}h^{(1)}(t)+C_n h(t)$$

$$=E_0\delta^{(m)}(t)+E_1\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+E_{m-1}\delta^{(1)}(t)+E_m\delta(t)$$

多选题 1分

设置

下列说法中有哪些是正确的:

A 冲激响应是激励为单位冲激函数的全响应

B 冲激响应是激励为单位冲激函数的零状态响应

C 当系统微分方程左边比右边阶次更高时，冲激响应形式与零输入响应相同

D 冲激信号可以转换为系统的起始条件

提交

3. 冲激响应解的形式

$$C_0 h^{(n)}(t)+C_1 h^{(n-1)}(t)+\cdots+C_{n-1}h^{(1)}(t)+C_n h(t)$$
$$=E_0\delta^{(m)}(t)+E_1\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+E_{m-1}\delta^{(1)}(t)+E_m\delta(t)$$

①与**n, m**相对大小有关

一般$n>m$, $h^{(n)}(t)$ 中包含$\delta^{(m)}(t)$项，以便与方程右端匹配，依次有$h^{(n-1)}(t)$ 中包含$\delta^{(m-1)}(t)$ 项，…。若$n=m+1$, $h'(t)$包含$\delta(t)$，而$h(t)$不包含$\delta(t)$ 。

$n>m$	$h(t)$ 不包含$\delta(t)$ 及其各阶导数　（最常见）
$n=m$	$h(t)$ 包含 $\delta(t)$，不包含其各阶导数
$n<m$	$h(t)$ 包含$\delta(t)$ 及其各阶导数（最高为**m-n**阶）

3. 冲激响应解的形式

②与特征根有关

若$n>m$且特征根为简单根（无重根）时， $h(t)=\left[\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\alpha_i t}\right]u(t)$

当$n>m$时，由于δ(t)及其导数在$t>0_+$时为零，即激励不复存在，因而方程式右端的自由项恒等于零，系统的冲激响应形式与零输入响应相同（相当于只求齐次解）。此时，冲激响应是具有零输入响应形式的零状态响应。冲激信号引入的能量存储转换为（等效于）零输入响应的起始条件。

例2-9：已知一个系统的微分方程如下，求冲激响应$h(t)$。

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+4\frac{dr(t)}{dt}+3r(t)=\frac{de(t)}{dt}+2e(t)$$

解： 将$e(t)=\delta(t)$代入方程，$\dfrac{d^2h(t)}{dt^2}+4\dfrac{dh(t)}{dt}+3h(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$

特征根：$\alpha_1=-1,\alpha_2=-3$ 齐次解：$h(t)=(A_1e^{-t}+A_2e^{-3t})u(t)$

冲激函数匹配法一：从微分方程右边出发，根据右边的冲激函数及其导数项，推导响应的最高阶导数表达式，依次降阶得到响应及其各阶导数的表达式，代入方程左边，使两边的冲激函数平衡。

令 $\dfrac{d^2h(t)}{dt^2}=\delta'(t)+a\delta(t)$ 则 $\dfrac{dh(t)}{dt}=\delta(t)+a\Delta u(t)$ $h(t)=1\cdot\Delta u(t)$

将 $h(t)$、$h'(t)$、$h''(t)$代入微分方程，利用冲激函数匹配法，

$a+4=2\rightarrow a=-2$ $\therefore h(0_+)=h(0_-)+1=1,\ h'(0_+)=h'(0_-)+a=-2$

$$h(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-3t}\ \ (t>0)$$

$$h(0_+)=1$$

$$\frac{dh(t)}{dt}=-A_1e^{-t}-3A_2e^{-3t}\ \ (t>0)$$

$$\frac{dh(0_+)}{dt}=-2$$

$$\begin{cases}A_1+A_2=1\\A_1+3A_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=1/2\\A_2=1/2\end{cases}$$

所以$h(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{-3t})u(t)$。

例2-9： 已知一个系统的微分方程如下，求冲激响应$h(t)$。

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+4\frac{dr(t)}{dt}+3r(t)=\frac{de(t)}{dt}+2e(t)$$

冲激函数匹配法二（教材P65方法）：从微分方程左边出发，把响应表达式代入方程左边，使左右两边的冲激函数匹配，求出齐次解的系数。

齐次解：$h(t)=(A_1e^{-t}+A_2e^{-3t})u(t)$

$$\frac{dh(t)}{dt}=(A_1e^{-t}+A_2e^{-3t})\delta(t)+(-A_1e^{-t}-3A_2e^{-3t})u(t)$$

$$=(A_1+A_2)\delta(t)+(-A_1e^{-t}-3A_2e^{-3t})u(t)$$

$$\frac{dh^2(t)}{dt^2}=(A_1+A_2)\delta'(t)+(-A_1e^{-t}-3A_2e^{-3t})\delta(t)+(A_1e^{-t}+9A_2e^{-3t})u(t)$$

$$=(A_1+A_2)\delta'(t)+(-A_1-3A_2)\delta(t)+(A_1e^{-t}+9A_2e^{-3t})u(t)$$

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2}+4\frac{dh(t)}{dt}+3h(t)=\delta^{'}(t)+2\delta(t)$$

将 $h(t)$、$h^{'}(t)$、$h^{''}(t)$代入微分方程，只保留冲激函数及其导数项，利用冲激函数匹配法可得：

$$(A_1+A_2)\delta'(t)+(3A_1+A_2)\delta(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

$$\begin{cases} A_1+A_2=1 \\ 3A_1+A_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=1/2 \\ A_2=1/2 \end{cases}$$

所以$h(t)=\dfrac{1}{2}(e^{-t}+e^{-3t})u(t)$。

注：此方法绕开了求$h(0_+)$和$h'(0_+)$。

例2-10： 已知一个LTI系统的微分方程如下，求冲激响应$h(t)$。

$$\frac{dr(t)}{dt}+5r(t)=\frac{de(t)}{dt}+2e(t)$$

解： 将冲激函数作为激励代入方程右边，得到 $\frac{dh(t)}{dt}+5h(t)=\delta^{'}(t)+2\delta(t)$

特征根 $\alpha_1=-5$

冲激函数匹配法一：从微分方程右边出发，根据右边的冲激函数及其导数项，推导响应的最高阶导数表达式，依次降阶得到响应及其各阶导数的表达式，代入方程左边，使两边的冲激函数平衡。

$$\frac{dh(t)}{dt}=\delta'(t)+a\delta(t) \qquad h(t)=\delta(t)+a\Delta u(t)$$

代入方程左边， $a+5=2 \Rightarrow a=-3$

a—$h(t)$在0_-到0_+的跳变值。$h(0_+)=a$。

冲激响应： $h(t)=\delta(t)+\boxed{ae^{\alpha_1 t}}u(t)=\delta(t)-3e^{-5t}u(t)$

a决定初始值，特征根决定信号衰减的速度。在只有一个特征根时可直接写成这种形式。

$$\frac{dh(t)}{dt}+5h(t)=\delta^{'}(t)+2\delta(t)$$

特征根 $\alpha_1=-5$

冲激函数匹配法二：从微分方程左边出发，把响应表达式代入方程左边，使左右两边的冲激函数匹配，求出齐次解的系数。

冲激响应：$h(t)=A_1e^{\alpha_1 t}u(t)+b\delta(t)=A_1e^{-5t}u(t)+\boxed{b\delta(t)}$

此项存在是因方程左右两边阶数相同。δ(t) 的系数**b**与方程右边$\delta'(t)$（对应**h'(t)**项）的系数相同，可观察到**b=1**，也可计算得到**b**。

将冲激响应的表达式代入微分方程，

$$-5A_1e^{-5t}u(t)+A_1e^{-5t}\delta(t)+b\delta'(t)+5A_1e^{-5t}u(t)+5b\delta(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

化简得到

$$b\delta'(t)+(A_1+5b)\delta(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

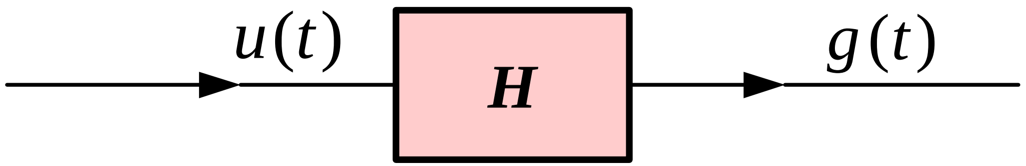
利用冲激函数匹配法， $b=1, A_1=-3$

冲激响应： $h(t)=\delta(t)-3e^{-5t}u(t)$

2.6.2 阶跃响应

1. 定义

系统在单位阶跃信号作用下的零状态响应，称为单位阶跃响应，简称阶跃响应。



系统方程的右端包含阶跃函数，所以除了齐次解外，还有特解项。

也可以根据线性时不变系统特性，利用冲激响应与阶跃响应的关系求阶跃响应。

2. 阶跃响应与冲激响应的关系

线性时不变系统满足**微、积分**特性

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{0_-}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$g(t)=\int_{0_-}^{t}h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$ 阶跃响应是冲激响应的积分。

$$h(t)=\frac{dg(t)}{dt}$$ 冲激响应是阶跃响应的微分。

因果系统的充分必要条件：冲激响应或阶跃响应在$t<0$时为0, 即

$$h(t)=0\quad(t<0)\quad \text{或}\quad g(t)=0\quad(t<0)$$

设置

已知一个LTI系统的微分方程如下，冲激响应$h(t)$和阶跃响应$g(t)$分别为（）。

$$\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=2e(t)$$

A $h(t)=e^{-2t}u(t), g(t)=\left(1+e^{-2t}\right)u(t)$

B $h(t)=e^{-2t}u(t), g(t)=\left(-1+e^{-2t}\right)u(t)$

C $h(t)=2e^{-2t}u(t), g(t)=\left(1-e^{-2t}\right)u(t)$

D $h(t)=2e^{-2t}u(t), g(t)=\left(1-e^{-t}\right)u(t)$

提交

已知一个LTI系统的微分方程如下，分别求冲激响应$h(t)$和阶跃响应$g(t)$。

$$\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=2e(t)$$

解：将冲激函数作为激励代入方程右边，得到 $\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)=2\delta(t)$

特征根 $\alpha_1=-2$

冲激函数匹配法一：从微分方程右边出发，根据右边的冲激函数及其导数项，推导响应的最高阶导数表达式，依次降阶得到响应及其各阶导数的表达式，代入方程左边，使两边的冲激函数平衡。

$$\frac{dh(t)}{dt}=2\delta(t) \qquad h(t)=2\Delta u(t)$$

$h(t)$在0_-到0_+的跳变值为2，$h(0_+)=2$。

冲激响应：$h(t)=\boxed{2e^{\alpha_1 t}}u(t)=2e^{-2t}u(t)$

$h(0_+)=2$是初始值，特征根决定信号衰减的速度。在只有一个特征根时可直接写成这种形式。

$$\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)=2\delta(t) \qquad \text{特征根 } \alpha_1=-2$$

冲激函数匹配法二：从微分方程左边出发，把响应表达式代入方程左边，使左右两边的冲激函数匹配，求出齐次解的系数。

冲激响应：$h(t)=A_1e^{-2t}u(t)$

将冲激响应的表达式代入微分方程左边，

$$A_1e^{-2t}\delta(t)-2A_1e^{-2t}u(t)+2A_1e^{-2t}u(t)=2\delta(t)$$

化简得到 $A_1\delta(t)=2\delta(t) \Longrightarrow A_1=2$

冲激响应：$h(t)=2e^{-2t}u(t)$

阶跃响应是冲激响应从0到t的积分，

$$g(t)=\int_{0_-}^{t}h(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{0_-}^{t}2e^{-2\tau}\,\mathrm{d}\tau=-e^{-2\tau}\Big|_0^t=1-e^{-2t}\ \ (t>0) \qquad g(t)=(1-e^{-2t})u(t)$$

作业

基础题（需提交）：2-4，2-6，2-8，2-9

加强题（选做，不提交）：2-7

本次课内容

2.7 卷积

2.8 卷积的性质

2.9 用算子符号表示微分方程

2.10 以“分配函数”的概念认识冲激函数

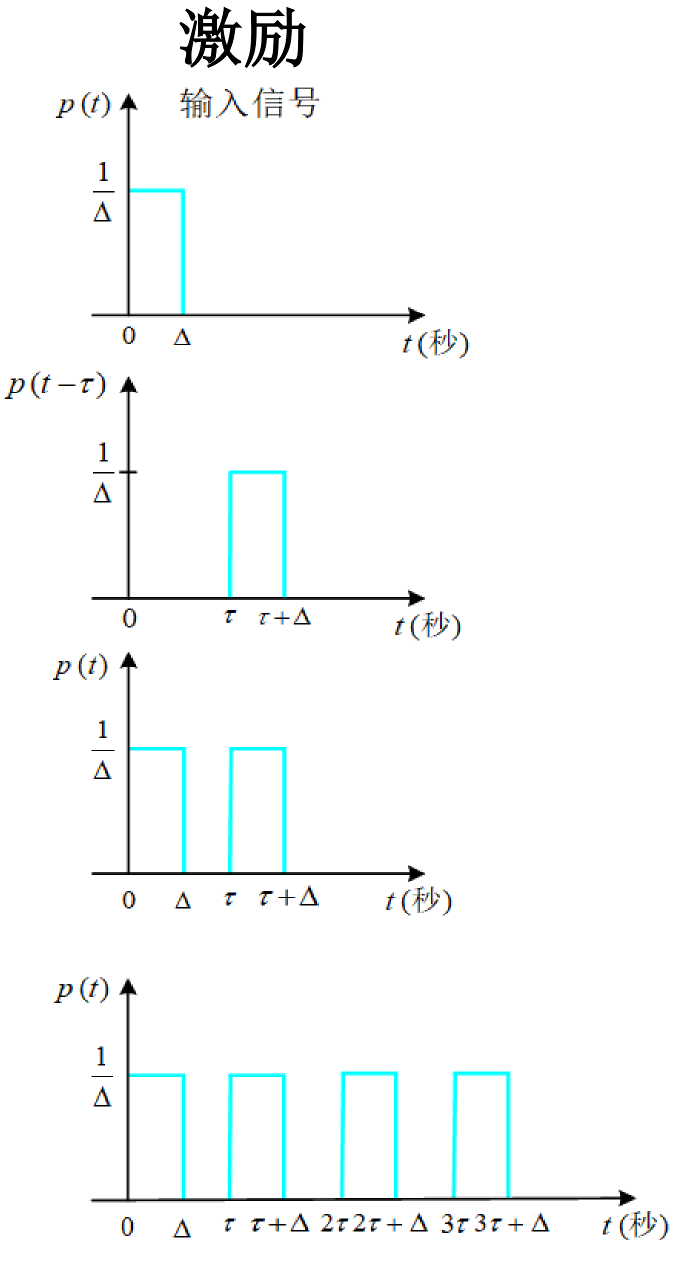
本次课目标

1. 熟练掌握卷积计算方法和性质；
2. 熟练运用卷积求零状态响应；
3. 简单了解用算子法解微分方程的优点及局限性，为运用拉普拉斯变换解微分方程打下基础；
4. 进一步了解冲激函数的性质。

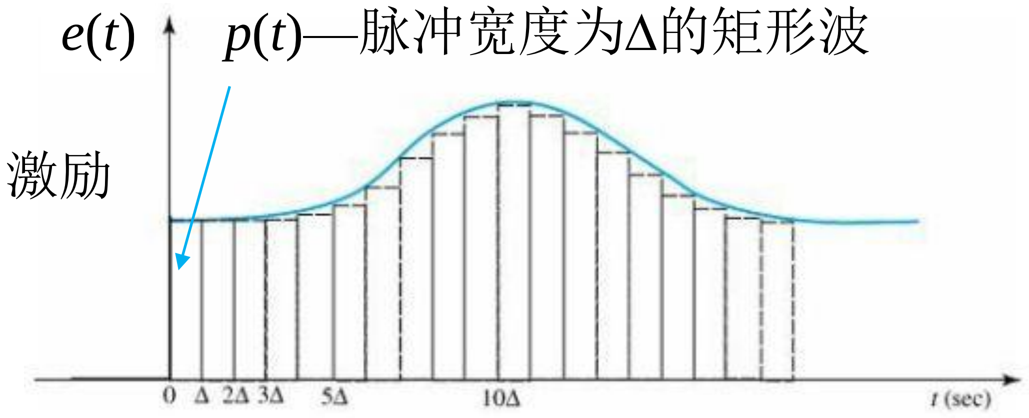
第二章 连续时间系统的时域分析

2.7 卷积

- 卷积是一种数学工具，是系统分析的核心技术。
- 卷积定理连接着系统的时域分析和变换域分析，贯彻整门课程，非常重要。



2.7 卷积



$$e(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{\infty}e(i\Delta)\,p(t-i\Delta)$$

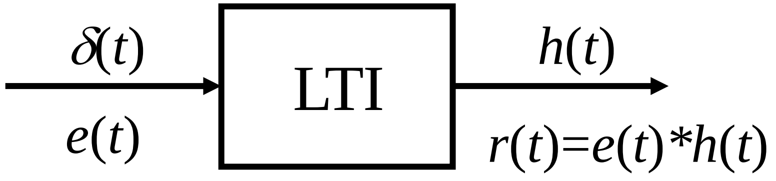
$$=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{\infty}e(i\Delta)\boxed{\frac{u(t-i\Delta t)-u[t-(i+1)\Delta t]}{\Delta}}\Delta$$

$$e(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{\infty}e(i\Delta)\delta(t-i\Delta)\Delta=\int_0^{\infty}e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

利用叠加性、齐次性、时不变性

$$r(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{\infty}e(i\Delta)h(t-i\Delta)\Delta\boxed{=\int_0^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau=e(t)*h(t)}$$

卷积



初始状态为零

系统的零状态响应为激励与冲激响应的卷积。

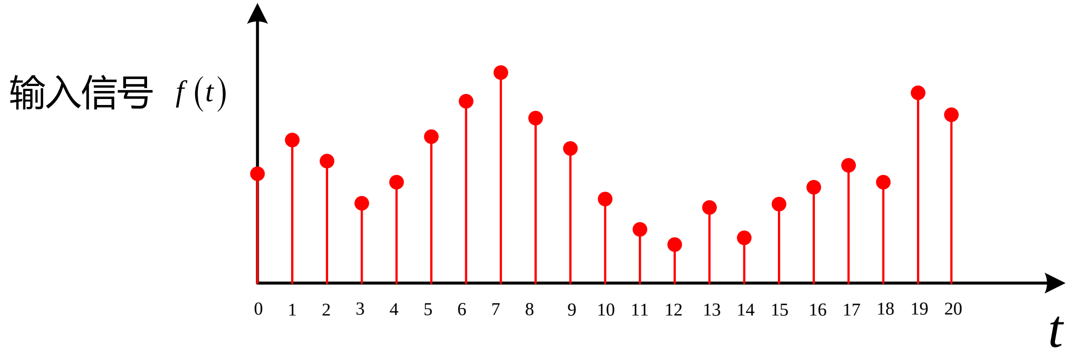
计算方法：将任意信号分解为冲激信号的加权和（积分），求其对应的冲激响应的加权和（积分）。

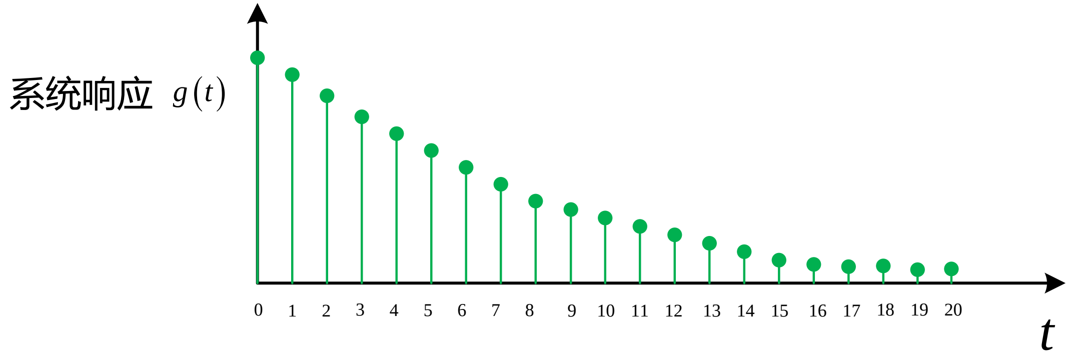
卷积的定义

设有两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，积分 $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

称为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积积分，简称卷积，记为 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$

卷积的物理意义

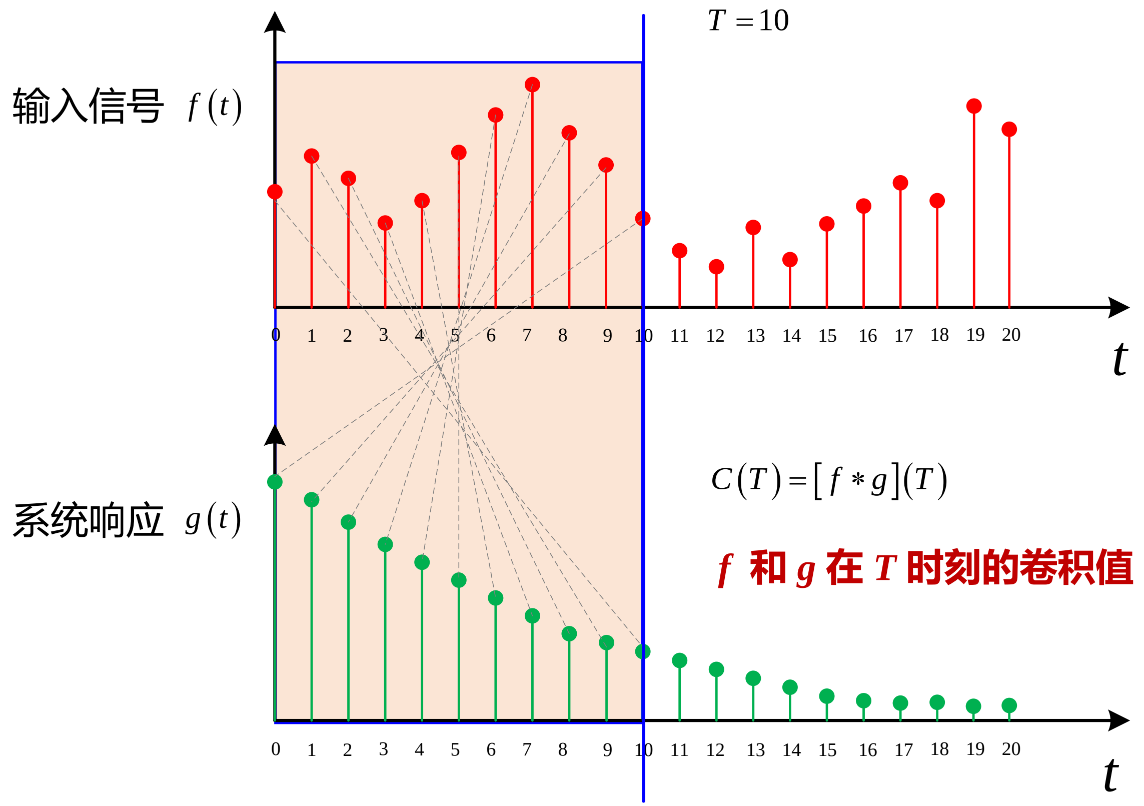




***f*(*t*)**—输入信号。

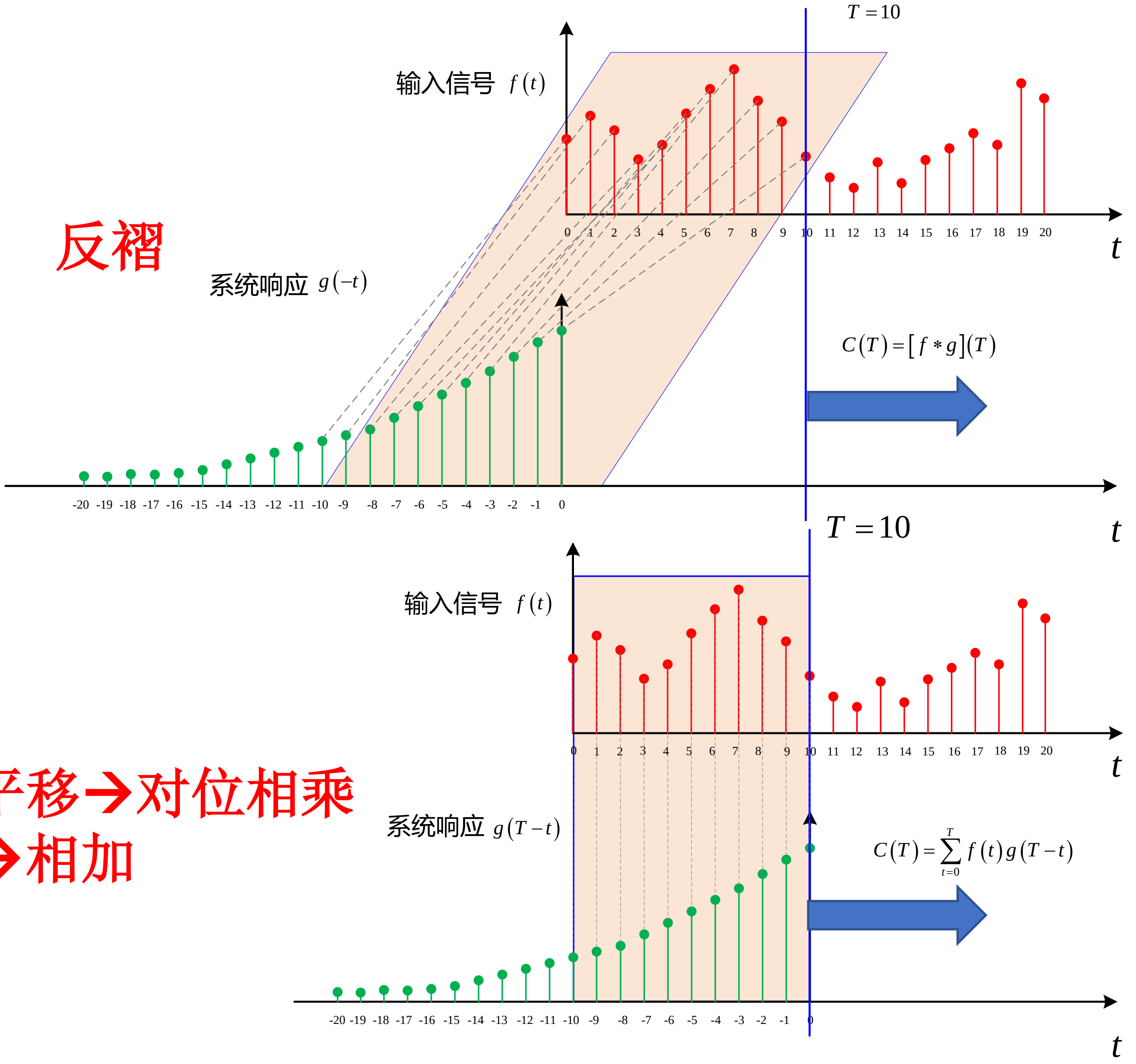
***g*(*t*)**—表示在某个时刻输入的信号值（考虑为一个冲激信号）的衰减趋势。

在***t*=*T***时刻，***t*=0** 时刻的输入***f*(0)**的值衰减为***f*(0)*g*(*T*)**。



- 因信号是连续输入的，最终输出的是所有之前输入信号的累积效应。
- 如在 T=10时刻，输出结果跟图中阴影区域整体有关。因为 $f(10)$ 是刚输入的，所以其输出结果应为 $f(10)g(0)$；输入 $f(9)$ 只经过了1个时间单位的衰减，产生的输出为 $f(9)g(1)$。以此类推，即图中虚线所描述的关系。
- 这些对应点相乘然后累加，就是 T=10时刻的输出信号值，即为 $f(t)$ 和 $g(t)$ 两个函数在 T=10时刻的卷积值。

反褶



平移→对位相乘
→相加

卷积的含义：

“卷”——指函数的翻转，从 **g(t)** 变成 **g(-t)** 的过程；也包含滑动的意味（***T*** 变化使窗口平移）。

“积”—指积分/加权求和，是一种累积效果。

系统的卷积运算分析

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

由上述卷积积分的公式可总结出卷积积分计算步骤。首先将**$x(t)$**和**$h(t)$**的自变量**t**改成 τ，即：$x(t)\to x(\tau),\quad h(t)\to h(\tau)$

再进行如下运算（即卷积积分的四步曲）：

反褶：$h(\tau)\to h(-\tau)$

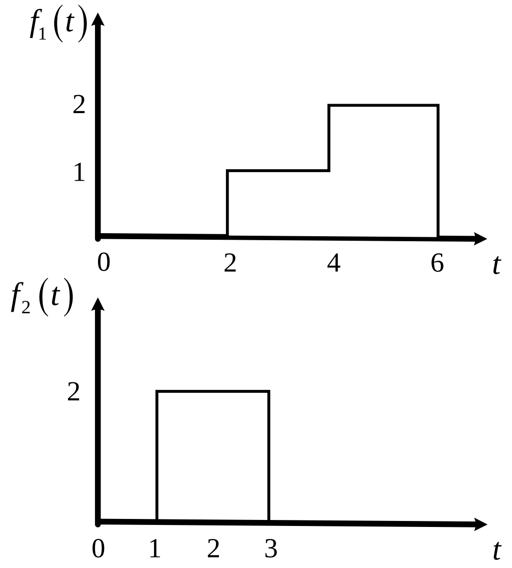
时移：$h(-\tau)\to h(t-\tau)=h[-(\tau-t)]\begin{cases}t<0, & \text{左移 } t\\ t>0, & \text{右移 } t\end{cases}$

相乘：$x(\tau)h(t-\tau)$

积分：$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

计算卷积积分的关键是定积分限。

已知 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的函数波形如图所示，若 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$ ，则 $s(6)=(\ \ )$ 。



A 2

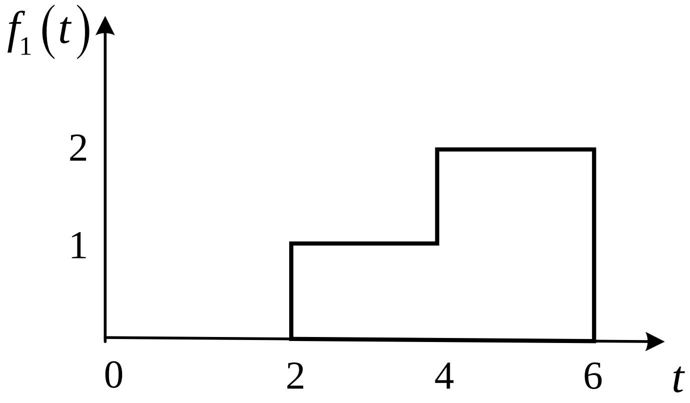
B 3

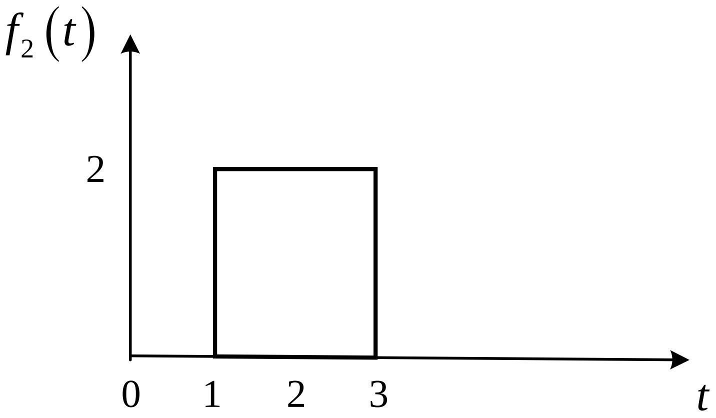
C 4

D 6

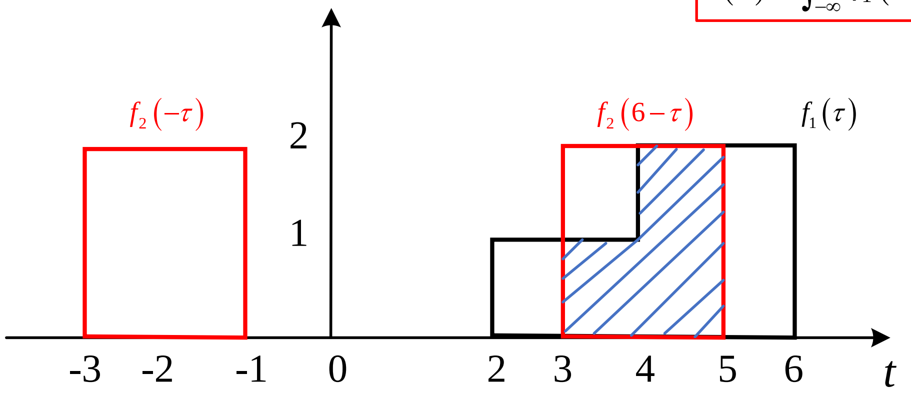
提交

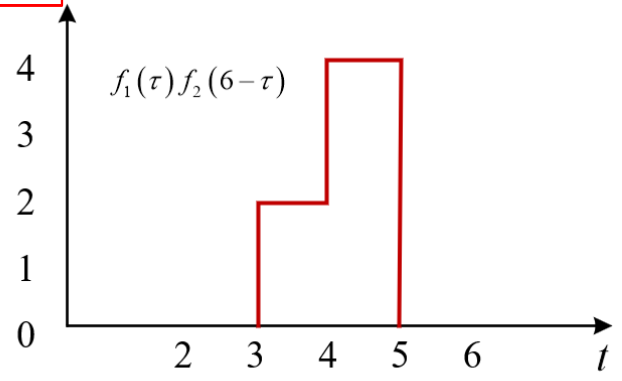
例2-11： 已知 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的函数波形如图所示，若 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$，求 $s(6)$。





$$\boxed{s(6)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\, f_2(6-\tau)\, d\tau}$$



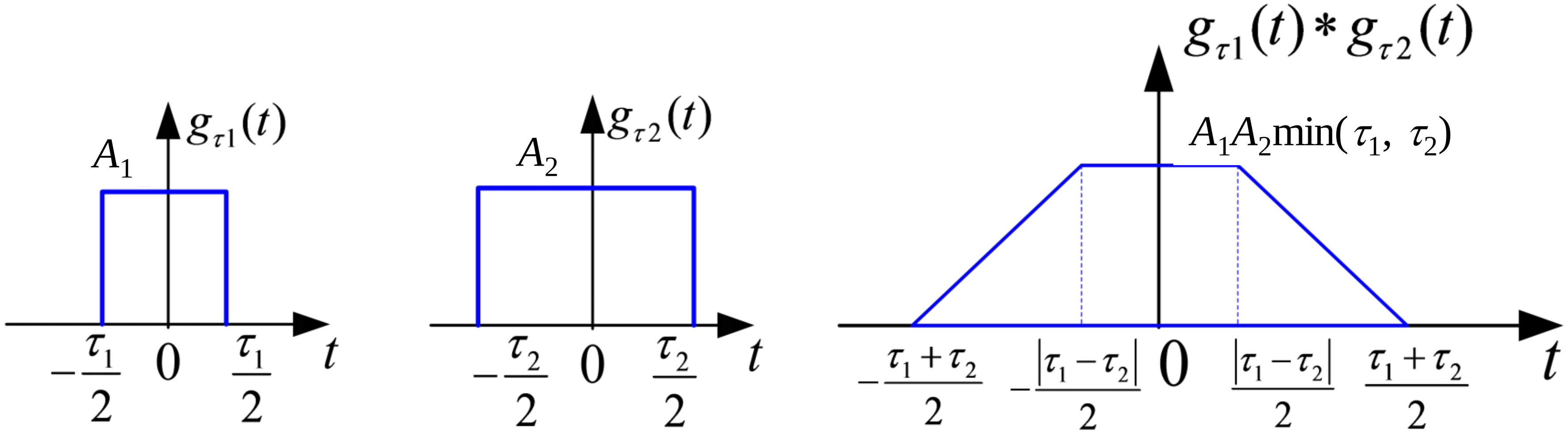


$$s(6)=2\times1\times1+2\times2\times1=6$$

图解法适用于有限波形，而且求某一时刻的卷积值更为方便。

矩形脉冲卷积产生梯形/三角脉冲

两个矩形脉冲$g_{\tau1}(t)$和$g_{\tau2}(t)$，脉冲宽度分别为τ_1和τ_2，幅度分别为A_1和A_2，求卷积$g_{\tau1}(t)*g_{\tau2}(t)$。

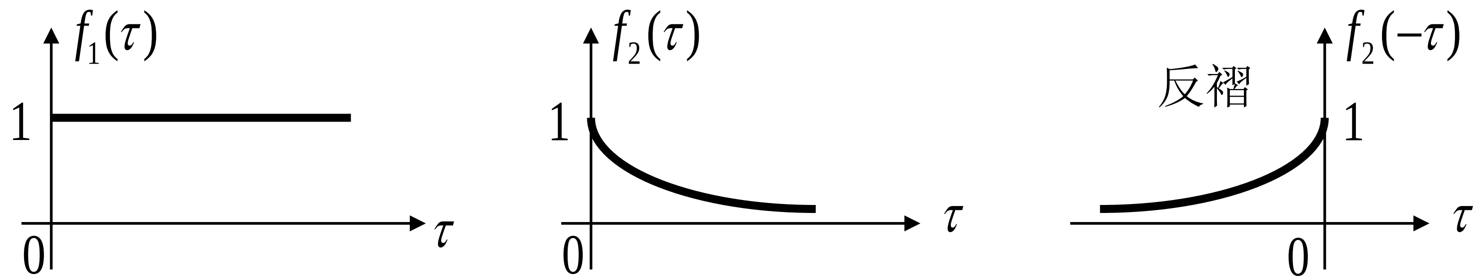


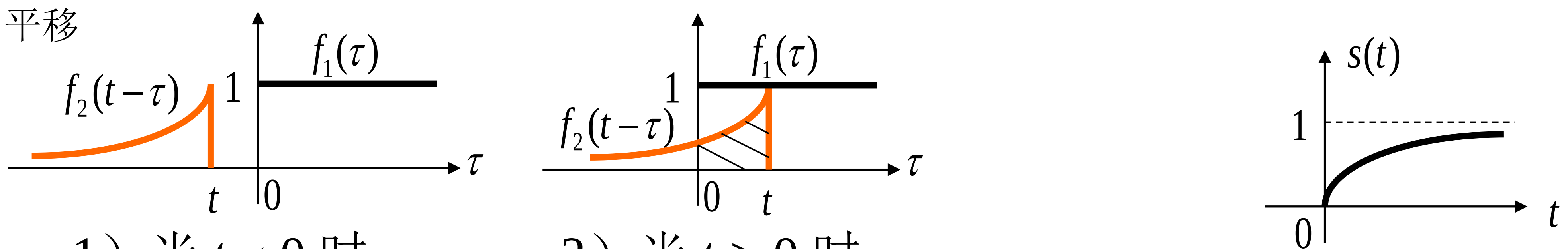
- 两个不等宽的矩形脉冲卷积的结果为梯形函数，梯形函数的高度为两个矩形高度和较窄矩形宽度三者的乘积，其上底为两个矩形宽度之差的绝对值，下底为两个矩形宽度之和。
- 两个等宽的矩形脉冲卷积的结果为三角函数，高度为两个矩形高度和一个矩形宽度的乘积，下底为两个矩形宽度之和（一个矩形宽度的2倍）。

例2-12： 已知 $f_1(t)=u(t)$，$f_2(t)=e^{-t}u(t)$ ，求 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$ 。

解法一：图解法

$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$





1）当 $t<0$ 时，

$s(t)=0$

2）当 $t\geq 0$ 时，

$$s(t)=\int_0^t 1\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau=1-e^{-t}$$

$$\therefore s(t)=(1-e^{-t})u(t)$$

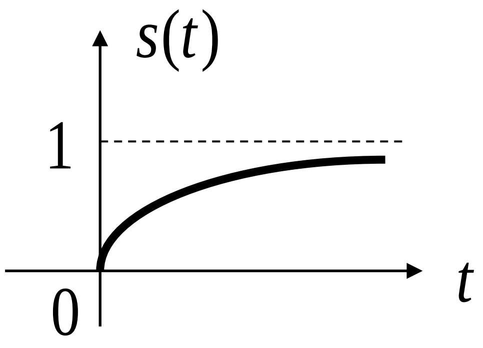
例2-12： 已知 $f_1(t)=u(t),\ f_2(t)=e^{-t}u(t)$ ，求 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$ 。

解法二：利用u(t)定积分限

$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

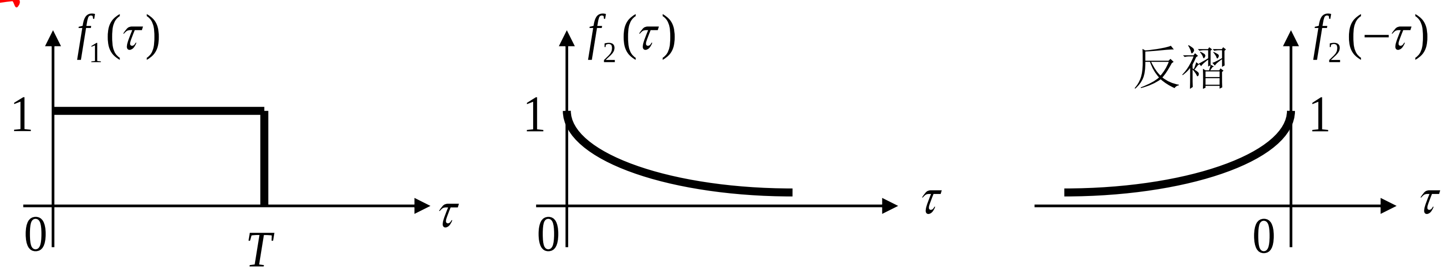
由$u(\tau)$和$u(t-\tau)$的交集部分确定积分限，$0\le\tau\le t$，即t 需满足$t\ge 0$。

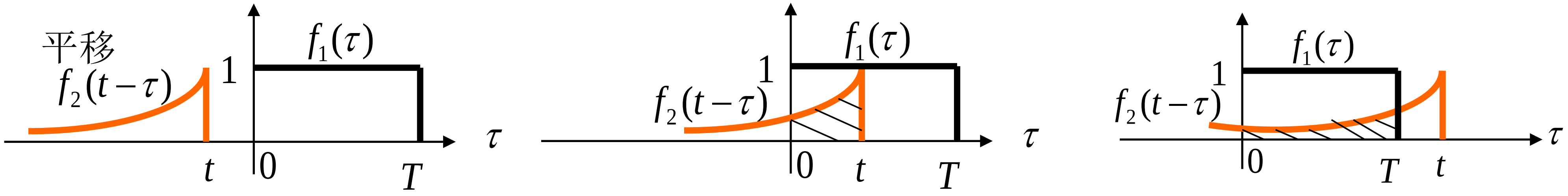
$$s(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau=e^{-t}(e^{t}-1)=1-e^{-t}\ \ (t\ge 0)$$



例2-13： 已知 $f_1(t)=u(t)-u(t-T)$，$f_2(t)=e^{-t}u(t)$，求 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$。

解法一：图解法





1）当 $t<0$ 时，

$$s(t)=0$$

2）当 $0\le t<T$ 时，

$$s(t)=\int_0^t 1\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau \;=1-e^{-t}$$

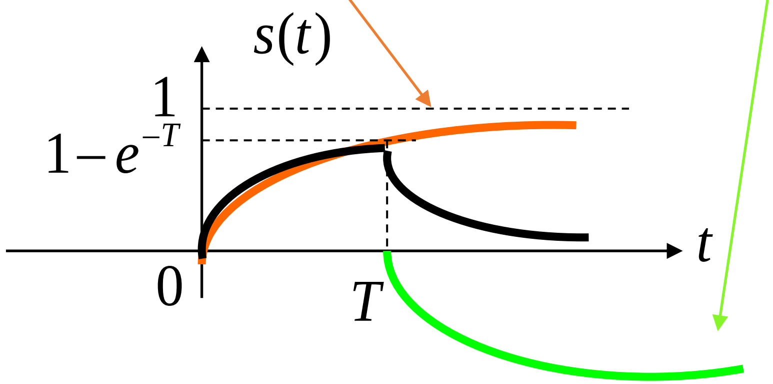
3）当 $t\ge T$ 时，

$$s(t)=\int_0^T 1\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-(t-T)}-e^{-t}$$

$$s(t)=(1-e^{-t})[u(t)-u(t-T)]+[e^{-(t-T)}-e^{-t}]u(t-T)=(1-e^{-t})u(t)-[1-e^{-(t-T)}]u(t-T)$$

$$s(t)=(1-e^{-t})[u(t)-u(t-T)]+[e^{-(t-T)}-e^{-t}]u(t-T)$$

$$=(1-e^{-t})u(t)-[1-e^{-(t-T)}]u(t-T)$$



例2-13： 已知 $f_1(t)=u(t)-u(t-T)$，$f_2(t)=e^{-t}u(t)$，求 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$。

解法二：利用u(t)定积分限

$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}[u(\tau)-u(\tau-T)]e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

由$u(\tau),u(t-T)$和$u(t-\tau)$的交集部分确定积分限，已知$0\le\tau$，$\tau\le T$，$\tau\le t$。

若$0\le t<T$，$s(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau=e^{-t}(e^t-1)=1-e^{-t}$

若$t\ge T$，$s(t)=\int_0^T e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-t}\int_0^T e^{\tau}d\tau=e^{-t}(e^T-1)=e^{-(t-T)}-e^{-t}$

$$s(t)=(1-e^{-t})[u(t)-u(t-T)]+[e^{-(t-T)}-e^{-t}]u(t-T)$$

$$=(1-e^{-t})u(t)-[1-e^{-(t-T)}]u(t-T)$$

例2-14： 已知微分方程为

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=\frac{de(t)}{dt}+3e(t)$$

已知激励 $e(t)=e^{-t}u(t)$ ，利用例2-9中求出的冲激响应 $h(t)=(2e^{-t}\text{-}e^{-2t})u(t)$

求零状态响应，并与例2-8中的结果进行比较。

解： 系统的零状态响应为：

$$r_{zs}(t)=e(t)*h(t)$$

$$=2\int_0^t e^{-\tau}e^{-(t-\tau)}d\tau-\int_0^t e^{-\tau}e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

$$=2e^{-t}\int_0^t d\tau-e^{-2t}\int_0^t e^{\tau}d\tau$$

$$=2te^{-t}-e^{-2t}(e^{t}-1)$$

$$=(2t-1)e^{-t}+e^{-2t}\quad(t>0)$$

结果与例2-8相同。

设置

某LTI系统，当激励为$f(t)$时，系统的冲激响应为$h(t)$，零状态响应为$y_{zs}(t)$，零输入响应为$y_{zi}(t)$。若初始状态不变，输入激励变为$2f(t)$，系统的全响应为：

A $y_{zi}(t) + 2y_{zs}(t)$

B $y_{zi}(t) + 2f(t) * h(t)$

C $y_{zs}(t) + 2y_{zi}(t)$

D $y_{zs}(t) + 2f(t) * h(t)$

提交

例2-15： 某LTI系统，当激励为$f(t)$时，系统的冲激响应为$h(t)$，零状态响应为$y_{zs}(t)$，零输入响应为$y_{zi}(t)$。若初始状态不变，输入激励变为$2f(t)$，求系统的全响应。

解：

零输入响应只与系统的初始状态有关，系统初始状态不变，则第二次的零输入响应还是$y_{zi}(t)$。

系统零状态响应可由输入信号与冲激响应卷积得到，即$2f(t)*h(t)$，同时由线性系统的性质也可将其表示为$2y_{zs}(t)$。

故对应第二次输入的全响应可表示为：

$$y_{zi}(t)+2y_{zs}(t) \text{ 或 } y_{zi}(t)+2f(t)*h(t)$$

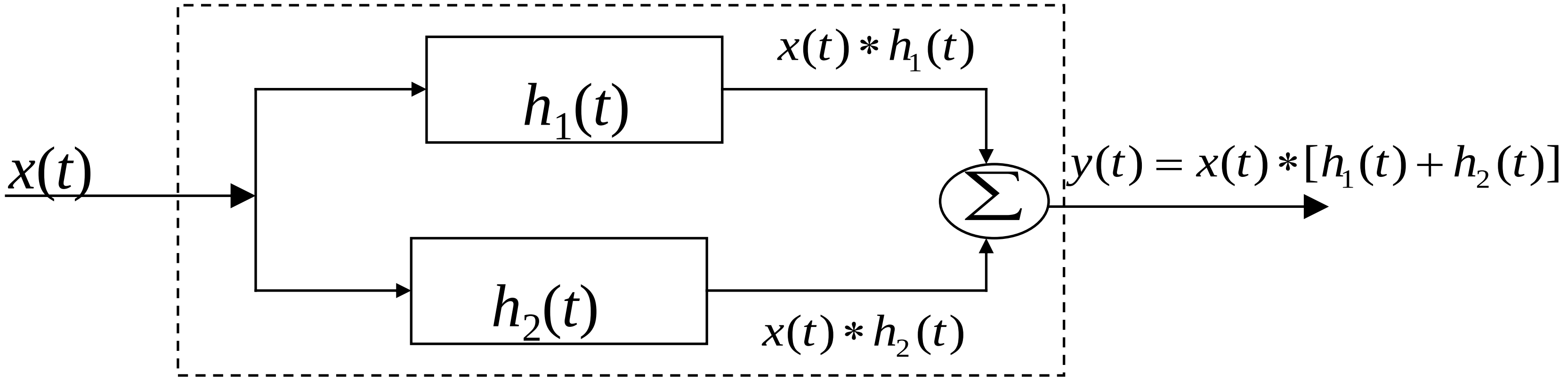
第二章 连续时间系统的时域分析

2.8.1 卷积积分的代数性质

（1）交换律 $$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$$

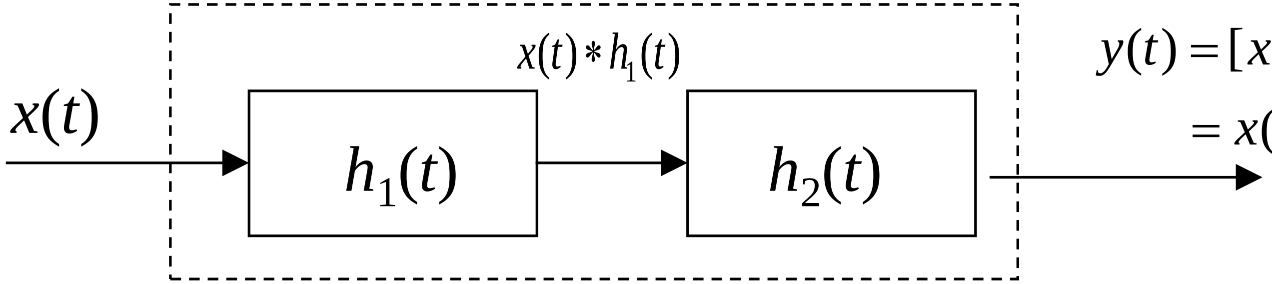
（2）分配律 $$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$

分配律用于系统分析，相当于并联系统的冲激响应等于组成并联系统的各子系统冲激响应之和。



（3）结合律 $[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$

结合律用于系统分析，相当于串联系统的冲激响应等于组成串联系统的各子系统冲激响应的卷积。



$$y(t)=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$$
$$=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

2.8.2 卷积积分的微分与积分

$$\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=f_1(t)*\frac{df_2(t)}{dt}=\frac{df_1(t)}{dt}*f_2(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\lambda)*f_2(\lambda)]d\lambda=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)d\lambda=\int_{-\infty}^{t}f_1(\lambda)d\lambda*f_2(t)$$

$$f_1(t)*f_2(t)=\frac{df_1(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)d\lambda \qquad f_1(t)*f_2(t)=f_1^{(1)}(t)*f_2^{(-1)}(t)$$

$f_1(t), f_2(t)$应满足时间受限条件，即$t\to-\infty$时函数值应为0。试做习题2-19(b)。

2.8.3 $f(t)$与冲激函数的卷积

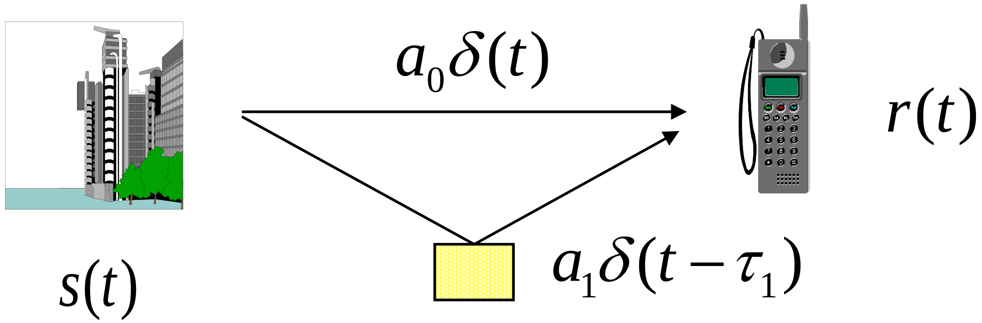
由冲激函数的筛选性质，得

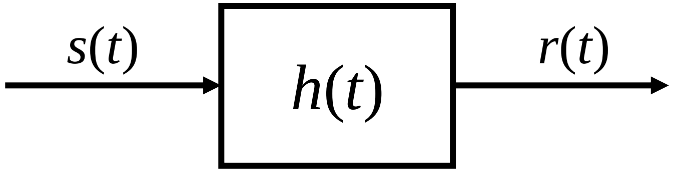
$$\boxed{f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=f(t)}$$

$$\boxed{f(t)*\delta(t-t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau-t_0)d\tau=f(t-t_0)}$$

推广： $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$　　$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\lambda)d\lambda$

例：假设一个无线信道包括两条路径。





$$h(t)=a_0\delta(t)+a_1\delta(t-\tau_1)$$

利用分配律和冲激函数的卷积性质，

$$r(t)=s(t)*h(t)=s(t)*\left[a_0\delta(t)+a_1\delta(t-\tau_1)\right]=a_0s(t)+a_1s(t-\tau_1)$$

请自学教材2.9节的多径失真消除方法。

例2-16（习题2-10）： 已知一个LTI系统的微分方程如下，

$$\frac{dr(t)}{dt}+5r(t)=\int_{-\infty}^{-\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$$

其中 $f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，求冲激响应$h(t)$。

解： 利用卷积的定义，微分方程等效于 $\frac{dr(t)}{dt}+5r(t)=e(t)*f(t)-e(t)$

将冲激函数作为激励代入方程右边，得到 $\frac{dh(t)}{dt}+5h(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$

特解 $Be^{-t}\ (t>0)$， $4B=1\Rightarrow B=1/4$ （冲激响应中包含特解是由于$e^{-t}u(t)$的作用）

利用冲激函数匹配法， $\frac{dh(t)}{dt}=2\delta(t)$ $\quad h(t)=2\Delta u(t)\longrightarrow h(0_+)=h(0_-)+2=2$

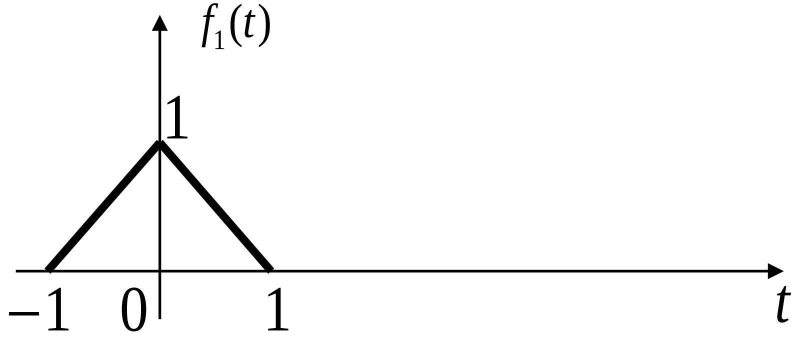
冲激响应：$h(t)=A_1e^{-5t}u(t)+\frac{1}{4}e^{-t}u(t)$ $\quad h(0_+)=A_1+\frac{1}{4}=2$ $\quad A_1=\frac{7}{4}$

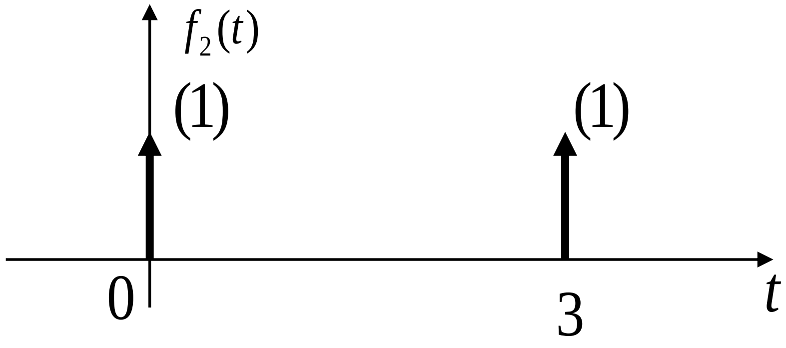
冲激响应：$h(t)=\left(\frac{7}{4}e^{-5t}+\frac{1}{4}e^{-t}\right)u(t)$

2.8.4 卷积积分的时移性质

若 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$，则 $\boxed{f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)=f_1(t-t_2)*f_2(t-t_1)=f(t-t_1-t_2)}$

例2-17： 已知 $f_1(t)$、$f_2(t)$如图所示，求$s(t)=f_1(t)*f_2(t)$，并画出 $s(t)$ 的波形。



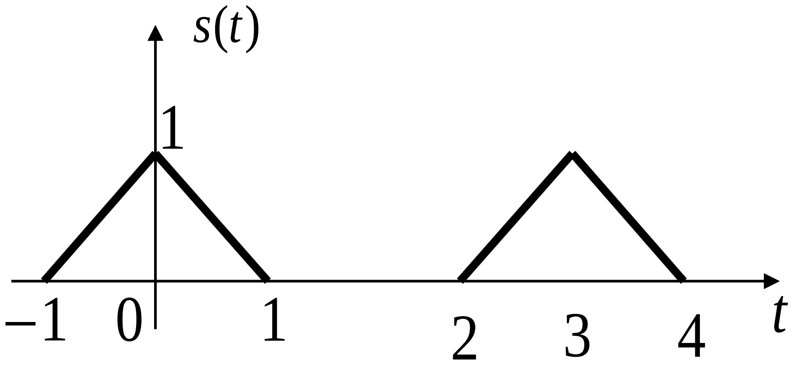


解： $f_2(t)=[\delta(t)+\delta(t-3)]$，则

$$s(t)=f_1(t)*[\delta(t)+\delta(t-3)]$$

$$=f_1(t)*\delta(t)+f_1(t)*\delta(t-3)$$

$$=f_1(t)+f_1(t-3)$$



已知$f(t)=u(t-1)+u(t-3)$，$x(t)=\delta(t-3)$, 则$f(t)*x(t)=?$

A $\delta(t-4)+\delta(t-6)$

B $u(t-1)+u(t-3)$

C $u(t-4)+u(t-6)$

D $\delta(t-1)+\delta(t-3)$

提交

2.8.5 卷积积分的时间范围

例2-18： 已知 $f_1(t)$ 在 $t_1 \le t \le t_2$内有非零值， $f_2(t)$ 在 $t_3 \le t \le t_4$内有非零值，$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$，求$f(t)$取非零值的时间范围。

解：
$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

由$f_1(\tau)$和$f_2(t-\tau)$的时间交集部分确定积分限

$$t_1 \le \tau \le t_2,$$
$$t_3 \le t-\tau \le t_4 \rightarrow t-t_4 \le \tau \le t-t_3$$

若$t-t_4 > t_2$即$t > t_2+t_4$，或$t-t_3 < t_1$即$t < t_1+t_3$，则$f_1(\tau)$和$f_2(t-\tau)$的时间区间无交集，积分为0。

反之，$f(t)$有非零值的时间范围是$t_1+t_3 \le t \le t_2+t_4$，区间的长度为$(t_2-t_1)+(t_4-t_3)$，即$f_1(t)$和$f_2(t)$取非零值的时间区间长度之和。

常用卷积公式：教材附录一

(1) $K * f(t) = K \cdot [f(t)\text{的净面积}]$

(2) $f(t) * \delta(t) = f(t)$

(3) $f(t) * \delta'(t) = f'(t)$

(4) $f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$

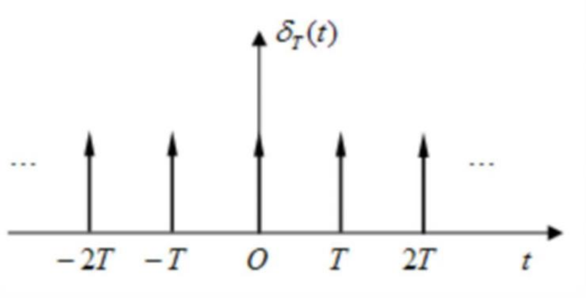
(5) $u(t) * u(t) = tu(t)$

(6) $u(t) * e^{at}u(t) = -\frac{1}{a}\left[1 - e^{at}\right]u(t)$

(7) $e^{at}u(t) * e^{at}u(t) = te^{at}u(t)$

(8) $e^{a_1 t}u(t) * e^{a_2 t}u(t) = \frac{1}{a_1 - a_2}\left[e^{a_1 t} - e^{a_2 t}\right]u(t) \quad a_1 \neq a_2$

(9) $f(t) * \delta_T(t) = f(t) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(t - mT)$



第二章 连续时间系统的时域分析

2.9.1 用算子符号表示微分方程

算子符号表示规定

若把微分方程中的微分与积分用下示符号表示:

$$p = \frac{d}{dt} \qquad \frac{1}{p} = \int_{-\infty}^{t} (\quad) d\tau$$

则有 $px = \dfrac{dx}{dt}$ $p^n x = \dfrac{d^n x}{dt^n}$ $\dfrac{1}{p} x = \int_{-\infty}^{t} (x) d\tau$

用算子符号表示微分方程

运用上述算子符号表示规定，下述微分方程

$$C_0 \frac{d^n r(t)}{dt^n} + C_1 \frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + C_{n-1} \frac{d r(t)}{dt} + C_n r(t) = E_0 \frac{d^m e(t)}{dt^m} + E_1 \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + E_{m-1} \frac{d e(t)}{dt} + E_m e(t)$$

可表示为:

$$C_0 p^n r(t) + C_1 p^{n-1} r(t) + \cdots + C_{n-1} p r(t) + C_n r(t) = E_0 p^m e(t) + E_1 p^{m-1} e(t) + \cdots + E_{m-1} p e(t) + E_m e(t)$$

2.9 用算子符号表示微分方程

$$C_0 p^n r(t) + C_1 p^{n-1} r(t) + \cdots + C_{n-1} p r(t) + C_n r(t) = E_0 p^m e(t) + E_1 p^{m-1} e(t) + \cdots + E_{m-1} p e(t) + E_m e(t)$$

可简化为：$$(\underbrace{C_0 p^n + C_1 p^{n-1} + \cdots + C_{n-1} p + C_n}_{D(p)}) r(t) = (\underbrace{E_0 p^m + E_1 p^{m-1} + \cdots + E_{m-1} p + E_m}_{N(p)}) e(t)$$

进一步简化为：$$D(p)[r(t)] = N(p)[e(t)]$$

注意：这种表示不是代数方程，而是微分方程。

2.9.2 算子符号的基本规则

算子符号表示的算子多项式仅仅是一种运算符号，代数方程中的运算规则有的适用于算子多项式，有的不适用。

1. 算子多项式可以进行类似于代数运算的因式分解或因式相乘展开。

例如：

$$(p+3)(p+2)x=(\frac{d}{dt}+3)(\frac{d}{dt}x+2x)=\frac{d}{dt}[\frac{d}{dt}x+2x]+3[\frac{d}{dt}x+2x]$$

$$=\frac{d^2}{dt^2}x+5\frac{d}{dt}x+6x=(p^2+5p+6)x$$

因此有： $(p+3)(p+2)=p^2+5p+6$

2. 算子多项式等式两端的公共因式不能随意相消。

例如：$\frac{d}{dt}x=\frac{d}{dt}y$的算子方程表示为 $px=py$ ，而对微分方程两边的积分后有$x=y+C$ 。

3. 算子多项式中的算子乘除顺序不可随意颠倒。

即：$\boxed{p\frac{1}{p}x\neq\frac{1}{p}px}$

理由是：$p\frac{1}{p}x=\frac{d}{dt}\cdot\int_{-\infty}^{t}xd\tau=x$

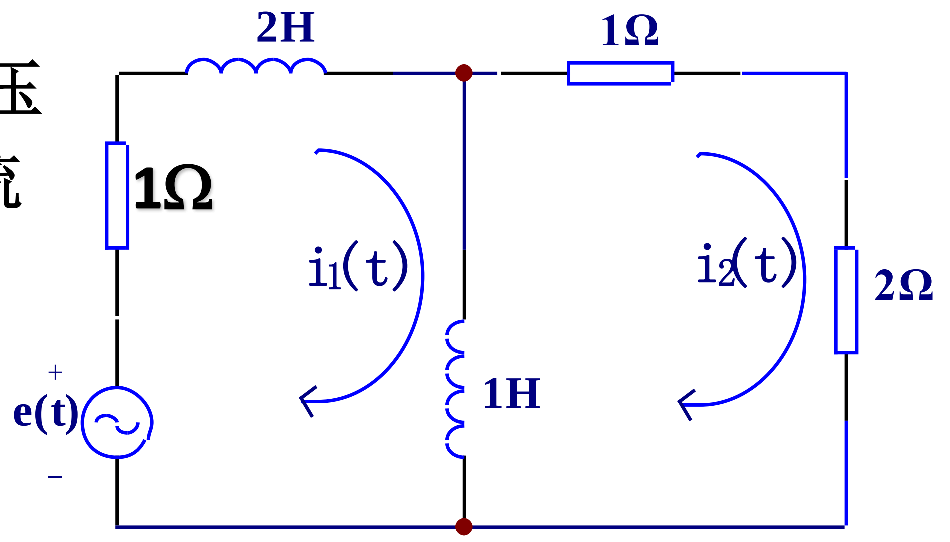
而 $\frac{1}{p}px=\int_{-\infty}^{t}(\frac{d}{dt}x)\cdot d\tau=x(t)-x(-\infty)\neq x$

这表明“先乘后除”的算子运算（先微分后积分）不能相消，而“先除后乘”（先积分后微分）可以相消。

2.9.3 用算子符号建立微分方程

运用算子符号表示微分方程，不仅使书写简便，而且在建立系统数学模型时便于由联立方程消元构成一元高阶微分方程。

例2-19： 如图所示电路，激励电压为$e(t)$，请用算子符号列写求电流$i_2(t)$的微分方程。



解： 列出2个网孔的回路方程

$$\begin{cases} 3\dfrac{di_1(t)}{dt}+i_1(t)-\dfrac{di_2(t)}{dt}=e(t) \\ -\dfrac{di_1(t)}{dt}+\dfrac{di_2(t)}{dt}+3i_2(t)=0 \end{cases}$$

写成算子形式

$$\begin{cases} (3p+1)i_1(t)-pi_2(t)=e(t) \\ -pi_1(t)+(p+3)i_2(t)=0 \end{cases}$$

2.9 用算子符号表示微分方程

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3p+1 & -p \\ -p & p+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(t) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3p+1 & -p \\ -p & p+3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} e(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow i_2(t) = \frac{p}{(2p^2+10p+3)}e(t) \Rightarrow (2p^2+10p+3)i_2(t) = pe(t)$$

即：$$2\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 10\frac{di_2(t)}{dt} + 3i_2(t) = \frac{d}{dt}e(t)$$

注意：

1）多项式两端的***p***不能随意消去；

2）求解时，应先将微积分方程组化成微分方程组。

2.9.4 传输算子概念

对于线性时不变系统，一般讲，激励信号$e(t)$与响应$r(t)$之间的关系可用算子形式写成如下的微分方程：

$$D(p)r(t)=N(p)e(t) \qquad \text{或} \qquad r(t)=\frac{N(p)}{D(p)}e(t)$$

则 $H(p)=\dfrac{N(p)}{D(p)}$ 就定义为传输算子。

当求系统的零输入响应时，就是解齐次方程 $D(p)r(t)=0$

当求系统的零状态响应时，则要解 $r(t)=H(p)e(t)$ 的非齐次方程。

由上述可以看出：在时域分析中，算子符号形式提供了简单易行的辅助分析手段，但本质上与经典法分析系统相同，而形式上又与第四章的拉普拉斯变换分析相似。

第二章 连续时间系统的时域分析

$\delta(t)$的性质：

(1) 相加： $a\delta(t)+b\delta(t)=(a+b)\delta(t)$

(2) 相乘： $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ （筛选特性）

(3) 反褶： $\delta(t)=\delta(-t)$ 偶函数

(4) 时间尺度变换： $\delta(at)=1/|a|\cdot\delta(t)$ （习题1-24）

(5) 时间位移运算： $f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$ （筛选特性）

(6) 积分是阶跃函数： $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$

(7) 微分是冲激偶： $\frac{d}{dt}\delta(t)=\delta'(t)$

(8) 卷积运算：任意两个冲激信号相乘没有意义，但卷积存在

$$\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-t_1)\delta(t-\tau-t_2)d\tau=\delta(t-t_1-t_2)$$

(9) $\delta(t)$的**复合函数** $\delta\left[f(t)\right]$ 的性质：$\delta\left[f(t)\right]$ 可以**化简为一系列冲激的叠加**。

$f(t)$ 是普通函数，若 $f(t)=0$有n个互不相等的实根$t_1, t_2 \ldots\ t_n$，则有

$$\delta[f(t)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i)$$

冲激函数是“分配函数”

证明：若在$t = t_1$时刻$f(t) = 0$，则在t_1足够小的区域内，$f(t)$可展开为泰勒级数

$$f(t) = f(t_1) + f'(t_1)(t-t_1) + f''(t_1)(t-t_1)^2 + \cdots \approx f'(t_1)(t-t_1)$$

由尺度变换性质，

$$\delta[f(t)] = \delta(t-t_1)/\left|f'(t_1)\right|$$

例2-20： 化简 $\delta\left(t^2-1\right)$。

解：$f(t)=t^2-1$，有两个根，$t_1=1$，$t_2=-1$

$$|f'(t_1)| = |2t|_{t_1=1} = 2 \qquad |f'(t_2)| = |2t|_{t_2=-1} = 2$$

$$\delta(t^2-1) = \frac{1}{2}[\delta(t-1)+\delta(t+1)]$$

冲激偶的性质

（1）奇函数 $\delta'(-t) = -\delta'(t)$

（2）相乘 $f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$

（3）时间尺度变换

$$\delta'(at) = \frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a}\delta'(t) \qquad \delta^{(k)}(at) = \frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a^k}\delta^{(k)}(t)$$

（4）卷积运算

$$f(t) * \delta'(t) = f'(t)$$

作业

基础题（需提交）：2-13(1)(2)(4)，2-15，2-18，2-19(a)(c)，2-21

加强题（选做，不用交）：2-13(3)(5)，2-17，2-19(f)，2-23

习题错误订正：

2-18：输入信号为$e(t)=2e^{-3t}u(t)$, 且响应r(t)为零状态响应。其他内容不变。

2-21：补充条件“假设初始状态为零”。