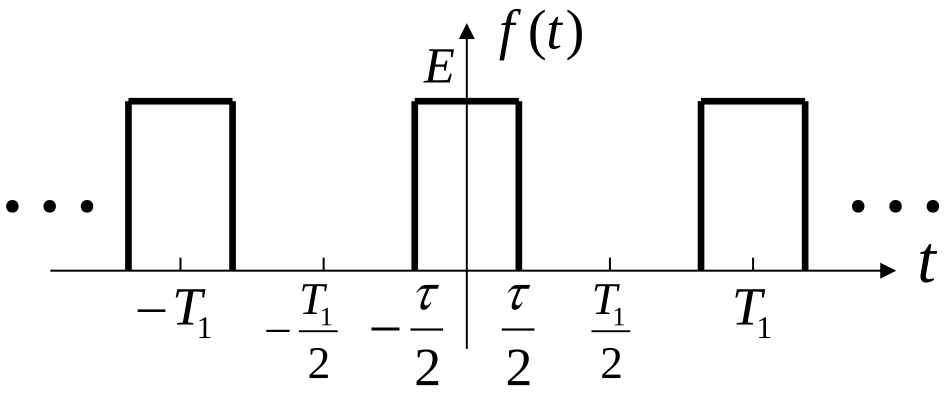
上节内容

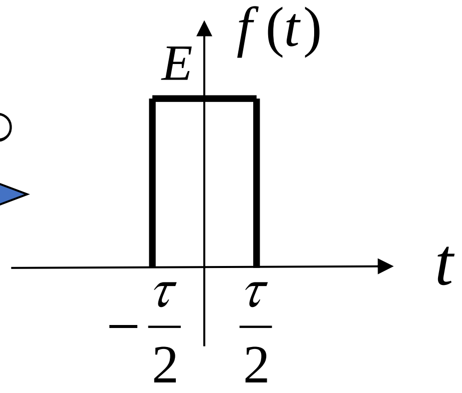
3.4　傅里叶变换

3.5　典型非周期信号的傅里叶变换

3.6　冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换



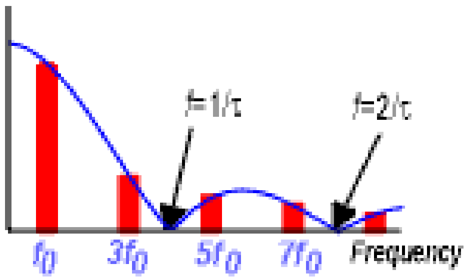
$T_1 \to \infty$

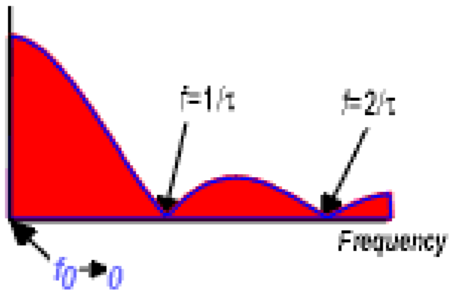


$T_1 \uparrow$ $\quad\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1} \downarrow$ $\quad$谱线间隔$\downarrow$

$T_1 \to \infty$ $\quad\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1} \to 0$ $\quad$谱线间隔$\to 0$

周期信号的离散谱 非周期信号的连续谱





由于 $T_1 \to \infty$, $F_n = \dfrac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt \to 0$

频谱密度函数： $\lim\limits_{T_1\to\infty} F_n T_1 = \lim\limits_{T_1\to\infty}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$

当$T_1 \to \infty$时，离散频率$n\omega_1 \to$连续频率ω

则 $\lim\limits_{T_1\to\infty} F_n T_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

记为

$$\boxed{F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt}$$

--非周期信号f(t)的傅里叶变换

$$\boxed{f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

--傅里叶逆变换

$F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$

$|F(\omega)|$ **--幅度谱**

$\varphi(\omega)$ **--相位谱**

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \qquad f(t)=\int_{0}^{\infty}\underbrace{\frac{|F(\omega)|}{\pi}d\omega}_{振幅}\cos[\omega t+\varphi(\omega)]$$

$$=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{|F(n\Delta\omega)|}{\pi}\Delta\omega}_{振幅}\cos[n\Delta\omega t+\varphi(n\Delta\omega)]$$

$f(t)$为无穷多个振幅为$\left(\frac{1}{\pi}|F(\omega)|d\omega\right)$的无穷小的连续余弦信号之和，频谱范围0--∞。

非周期信号可表示为正弦信号的加权积分，包含了零到无限高的所有连续频率分量。

对于能量有限信号（如单脉冲信号），$\left(\frac{1}{\pi}|F(\omega)|d\omega\right)$趋于无限小，所以频谱不能再用幅度表示，而改用频谱密度函数表示。

单脉冲信号的傅里叶变换：$F_0(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f_0(t)e^{-j\omega t}dt$ --连续谱

周期信号的傅里叶级数展开：$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$ --离散谱

F_n 与 $F_0(\omega)$ 的关系：$\boxed{F_n=\left.\frac{F_0(\omega)}{T_1}\right|_{\omega=n\omega_1}}$

周期脉冲序列的傅里叶级数的系数F_n等于单脉冲的傅里叶变换$F_0(\omega)$在$n\omega_1$频率点的值乘以$1/T_1$或$\omega_1/2\pi$。

傅里叶变换存在的充分不必要条件

$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t=$ 有限值（充分条件）

即 $f(t)$ 绝对可积

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)e^{-j\omega t}\right|\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$$

绝大多数**能量信号**均满足此条件。

当引入 $\delta(\omega)$ 函数的概念后，允许做傅立叶变换的函数类型大大扩展了。

傅里叶级数与傅里叶变换的关系：

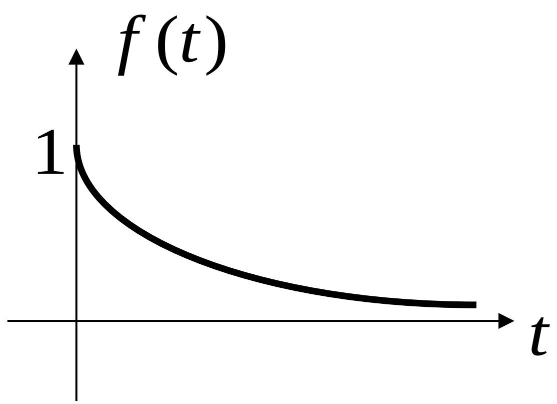
傅里叶级数	傅里叶变换
$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$	$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$
$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$	$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$
频谱（离散）	频谱密度（连续）
$F_n=\lvert F_n\rvert e^{j\varphi_n}$	$F(\omega)=\lvert F(\omega)\rvert e^{j\varphi(\omega)}$
在一个周期内满足狄里赫利条件	在(-∞ , +∞)内满足狄里赫利条件

$$F_n=\frac{1}{T_1}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$$

量纲不同

1. 单边指数信号

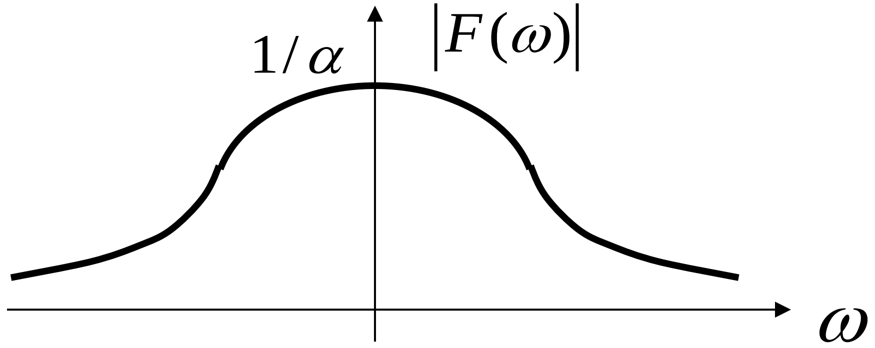
$$f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} = e^{-\alpha t}u(t)$$

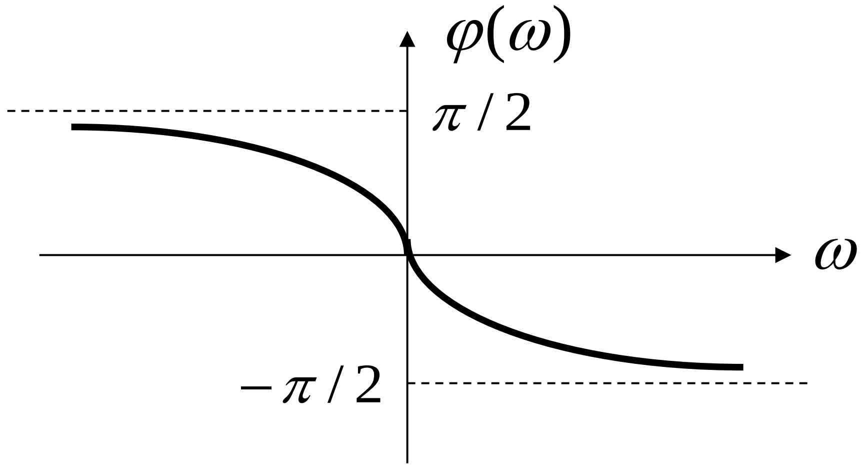


$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

$$|F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

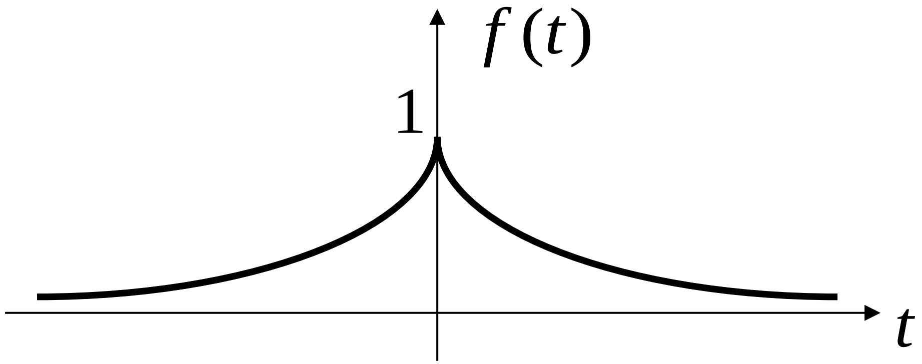
$$\varphi(\omega)=-\arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$



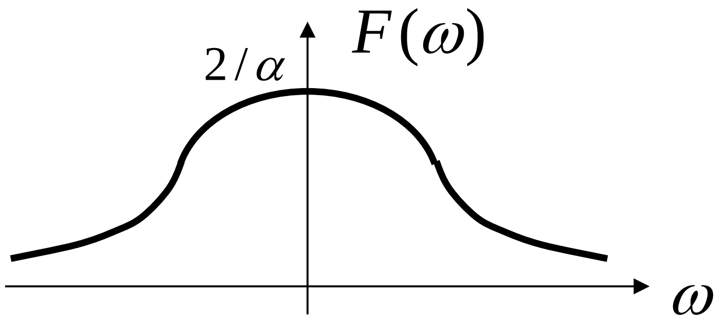


2. 双边指数信号

$$f(t)=e^{-\alpha|t|}\quad(\alpha>0)$$

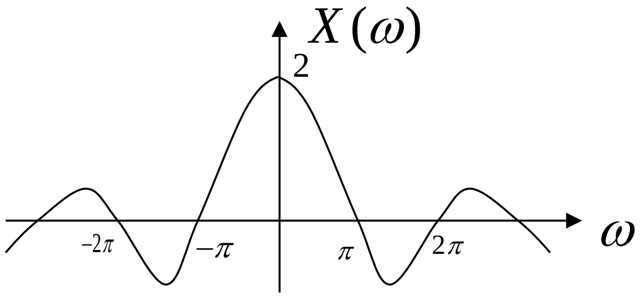


$$F(\omega)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$



$$|F(\omega)|=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\qquad\varphi(\omega)=0$$

已知一个信号$x(t)$的傅里叶变换为如图所示的Sa函数，该信号的时域表达式为（）



A $x(t)= u(t+1)- u(t-1)$

B $x(t)= 2[u(t+1)- u(t-1)]$

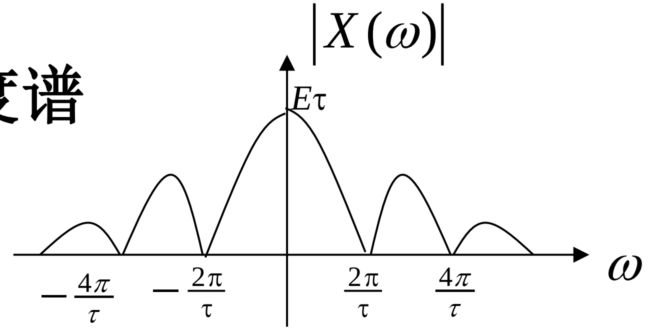
C $x(t)= u(t+1/2)- u(t-1/2)$

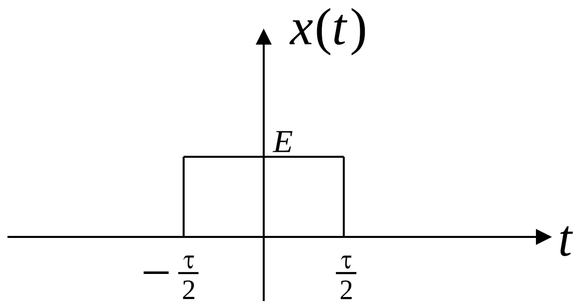
D $x(t)= 2[u(t+1/2)- u(t-1/2)]$

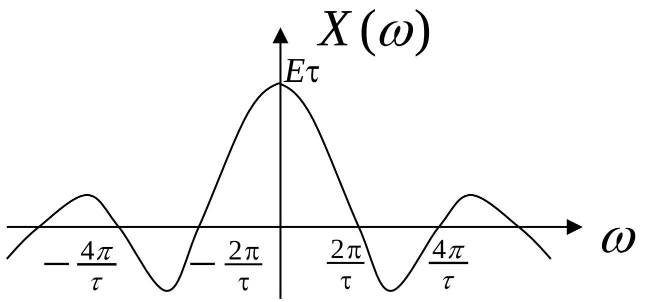
提交

$$E[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})] \xleftrightarrow{FT} E\tau \mathrm{Sa}(\omega\frac{\tau}{2})$$

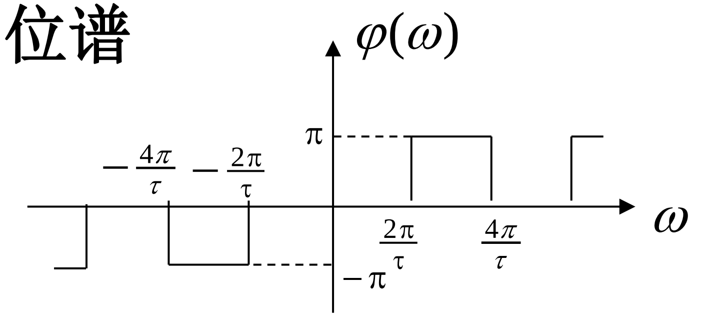
幅度谱







相位谱



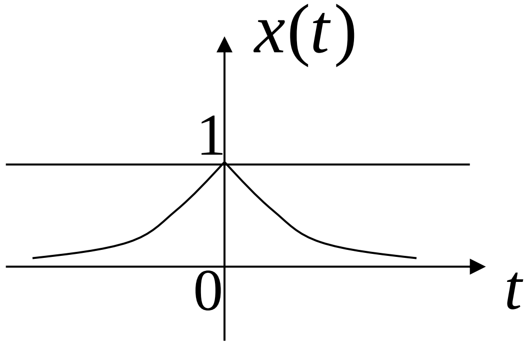
由以上矩形波的频谱图可见，信号的能量主要集中在主瓣所包含的频率范围之内：$0\sim 2\pi/\tau$，所以习惯上称此频段范围是矩形波的等效带宽 B_ω 。

$$B_\omega = \frac{2\pi}{\tau}\ \text{(rad/s) 或 } \frac{1}{\tau}\ \text{(Hz)}$$

4. 直流信号

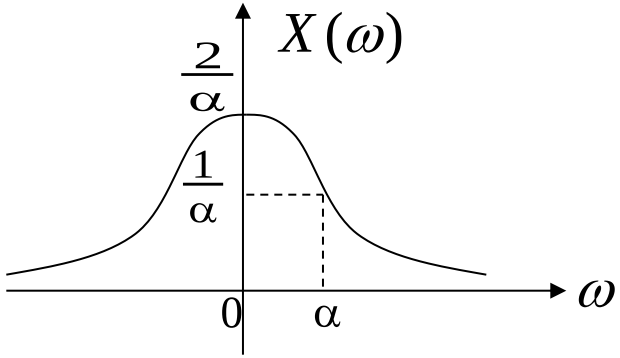
表示直流信号的函数是一常量，这里设常量为1。显然，它不满足绝对可积的条件，不能由积分直接求得其傅里叶变换，可以利用$\delta(\omega)$求傅里叶变换。

利用偶对称双边指数信号的极限表征直流信号：



$$x(t)=1=\lim_{\alpha\to 0} e^{-\alpha|t|}$$

由双边指数信号的傅里叶变换



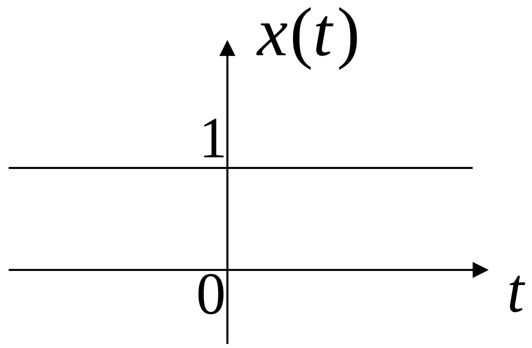
$$X(\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

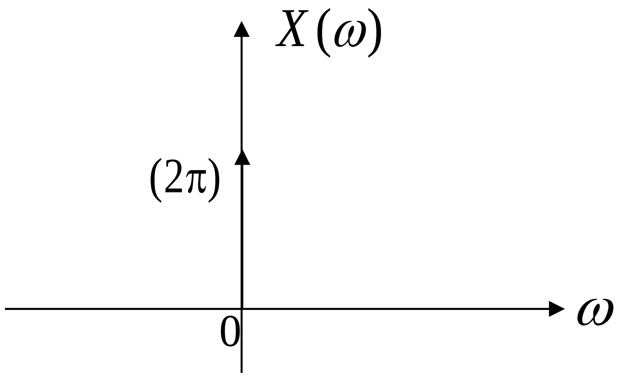
当$\alpha\to 0$，此频谱函数的宽度趋于无穷小，幅度趋于无穷大，是一个冲激函数$A\delta(\omega)$。幅度A等于$X(\omega)$所占的面积。

3.5 典型非周期信号的傅里叶变换

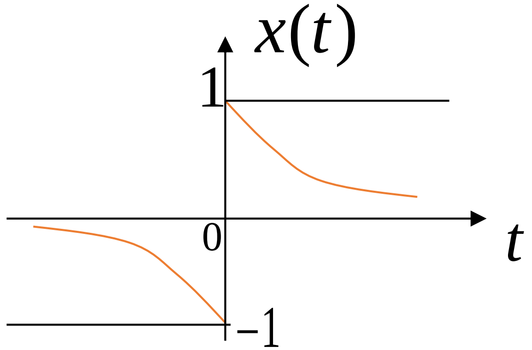
$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=4\int_{0}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=4[\arctan(\infty)-\arctan(0)]=2\pi$$

$$X(\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}=2\pi\delta(\omega)$$





5. 符号函数信号



$$x(t) = \mathrm{sgn}(t)$$

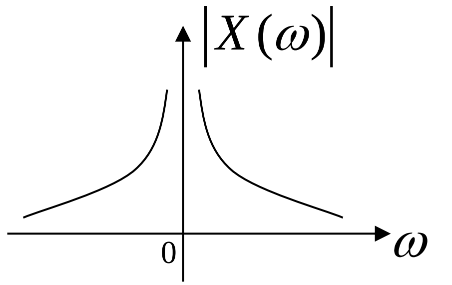
符号函数信号不满足绝对可积的条件，不能由积分直接求得其傅里叶变换。但可以由奇对称双边指数信号的傅里叶变换，取 $\alpha \to 0$求得。

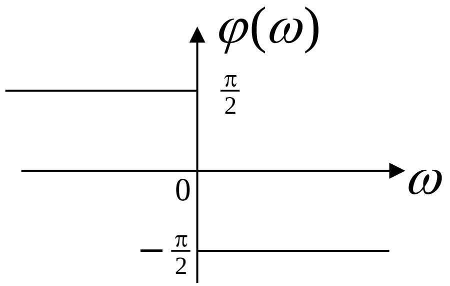
$$x(t) = \mathrm{sgn}(t) = \lim_{\alpha \to 0}[-e^{\alpha t}u(-t) + e^{-\alpha t}u(t)]$$

于是

$$X(\omega) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{-2j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = -j\frac{2}{\omega} = \frac{2}{j\omega}$$

$$|X(\omega)| = \frac{2}{|\omega|}, \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} \pi/2 & \omega < 0 \\ -\pi/2 & \omega > 0 \end{cases}$$





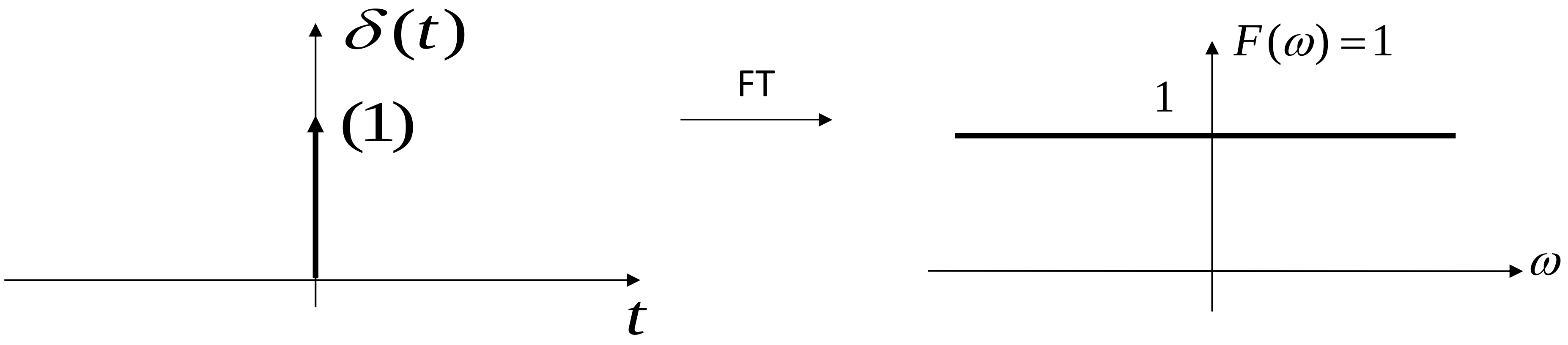
几种常用函数及其傅里叶变换

名称	时间函数	频谱函数
单位冲激	$\delta(t)$	1
单位阶跃	$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+1/j\omega$
符号函数	$\operatorname{sgn} t=u(t)-u(-t)$	$2/(j\omega)$
单位直流	1	$2\pi\delta(\omega)$
单边指数函数	$e^{-\alpha t}u(t)$	$1/(\alpha+j\omega)$
双边指数函数	$e^{-\alpha\|t\|}$	$2\alpha/(\alpha^2+\omega^2)$
单位余弦	$\cos\omega_c t$	$\pi\left[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)\right]$
单位正弦	$\sin\omega_c t$	$j\pi\left[\delta(\omega+\omega_c)-\delta(\omega-\omega_c)\right]$
矩形脉冲（门函数）	$G_r(t)=u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$	$\tau Sa\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)=\tau\frac{\sin(\tau\omega/2)}{\tau\omega/2}$
抽样函数	$Sa\left(\frac{\Omega t}{2}\right)=\frac{\sin(\Omega t/2)}{\Omega t/2}$	$G_\Omega(\omega)=\frac{2\pi}{\Omega}\left[u\left(\omega+\frac{\Omega}{2}\right)-u\left(\omega-\frac{\Omega}{2}\right)\right]$

1. 冲激函数的傅里叶变换

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

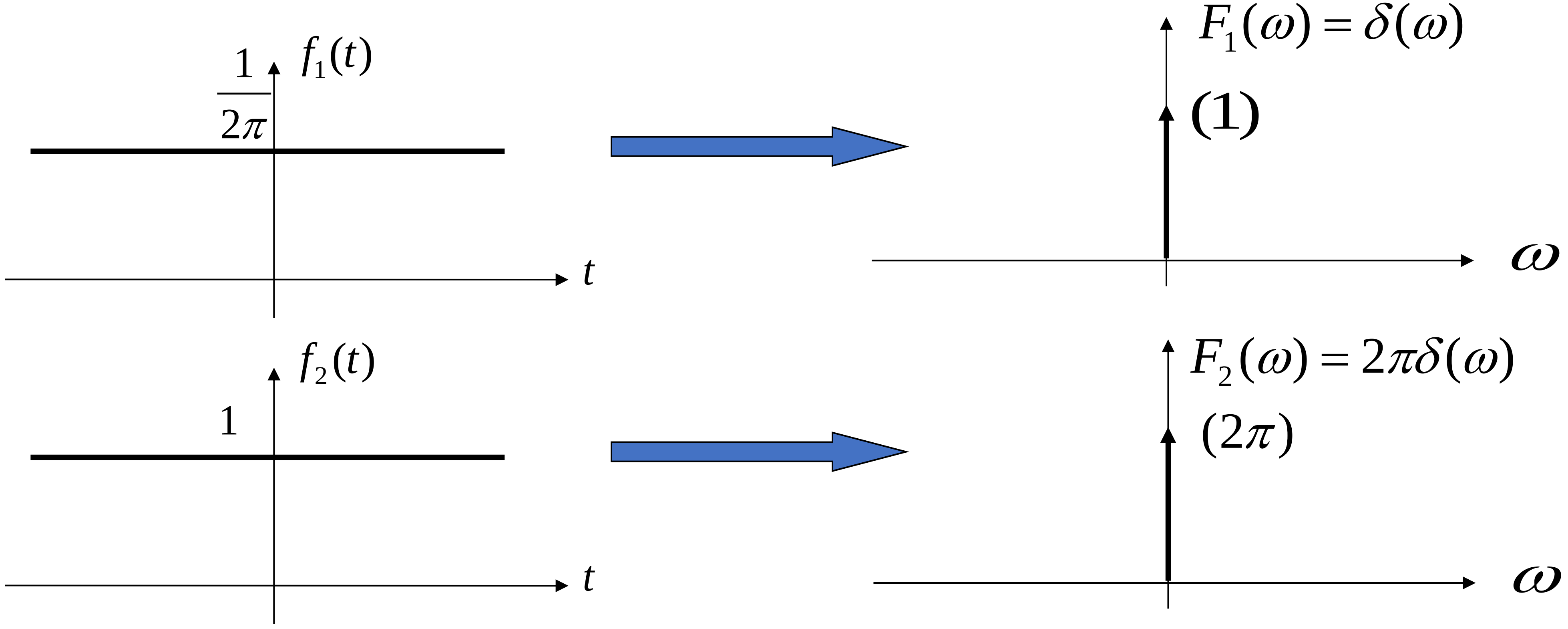
单位冲激函数的频谱等于常数，即在整个频率范围内频谱是均匀的。这种频谱常被叫做“均匀谱”或“白色频谱”。



2. 冲激函数的傅里叶逆变换

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

或 $\mathcal{F}[\frac{1}{2\pi}] = \delta(\omega)$, $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$



3. 冲激偶的傅里叶变换

$\because \ \mathcal{F}[\delta(t)]=1,$　　　即：$\delta(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}d\omega$

上式两边对t求导得：

$$\frac{d}{dt}\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\therefore \mathcal{F}[\delta'(t)]=j\omega$$

同理：

$$\mathcal{F}[\delta^{(n)}(t)]=(j\omega)^{n}$$

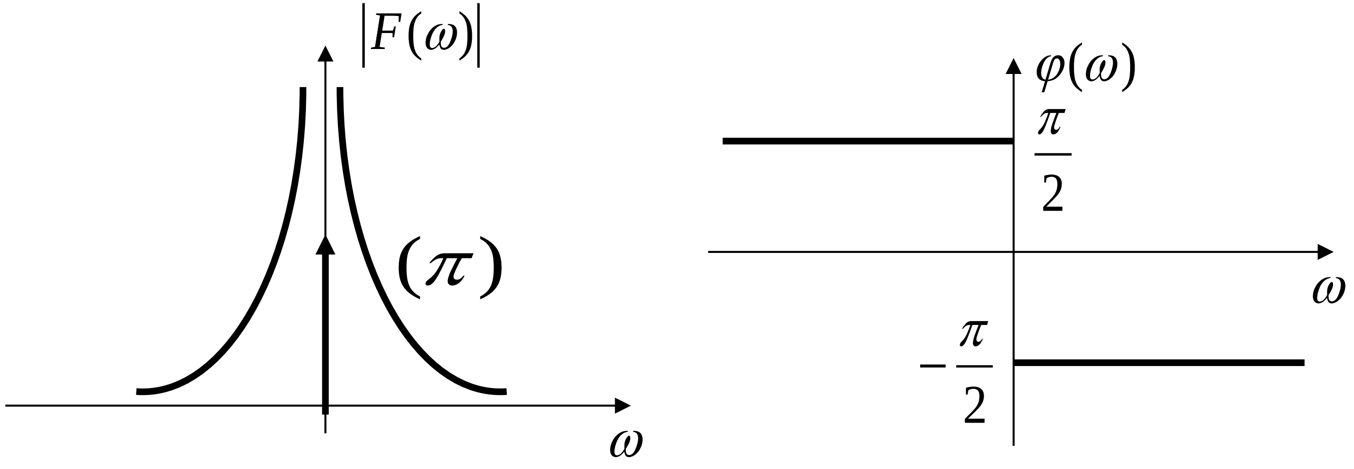
4. 阶跃信号

$$\because u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

$$\therefore\ F(\omega)=\mathcal{F}[u(t)]=\mathcal{F}[\frac{1}{2}]+\mathcal{F}[\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)]$$

$$=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

对应直流分量　　0时刻跳变引起的其他频率分量



本次课内容

3.7 傅里叶变换的基本性质

本次课目标

熟练运用傅里叶变换的各种性质求复杂信号的傅里叶变换（重要！）

- 一个时间函数与它的频谱函数（若存在）具有唯一对应的关系。
- 傅里叶变换的基本性质使我们可以通过典型信号的傅里叶变换得到一些时域较为复杂的信号的傅里叶变换。
- 反之，也可以从频域的运算推测时域的变化。
- 注意：
  - 傅里叶变换存在的必要条件缺失。狄里赫利条件是充分不必要条件。
  - 任意给定一个信号 $f(t)$，无论它是否满足绝对可积条件，傅里叶分析理论都没有限制人们采用任何方法求得一个表面形式上的变换式 $F(\omega)$。但某些变换未必有物理意义。
  - 工程实践表明：绝大多数能量信号的傅里叶变换存在；绝大多数功率有限信号（阶跃信号、符号信号等）的广义傅里叶变换存在；非功率非能量信号的广义傅里叶变换可能不存在。

能量信号：$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t<\infty$　　功率信号：$\lim_{T_1\to\infty}\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t<\infty$

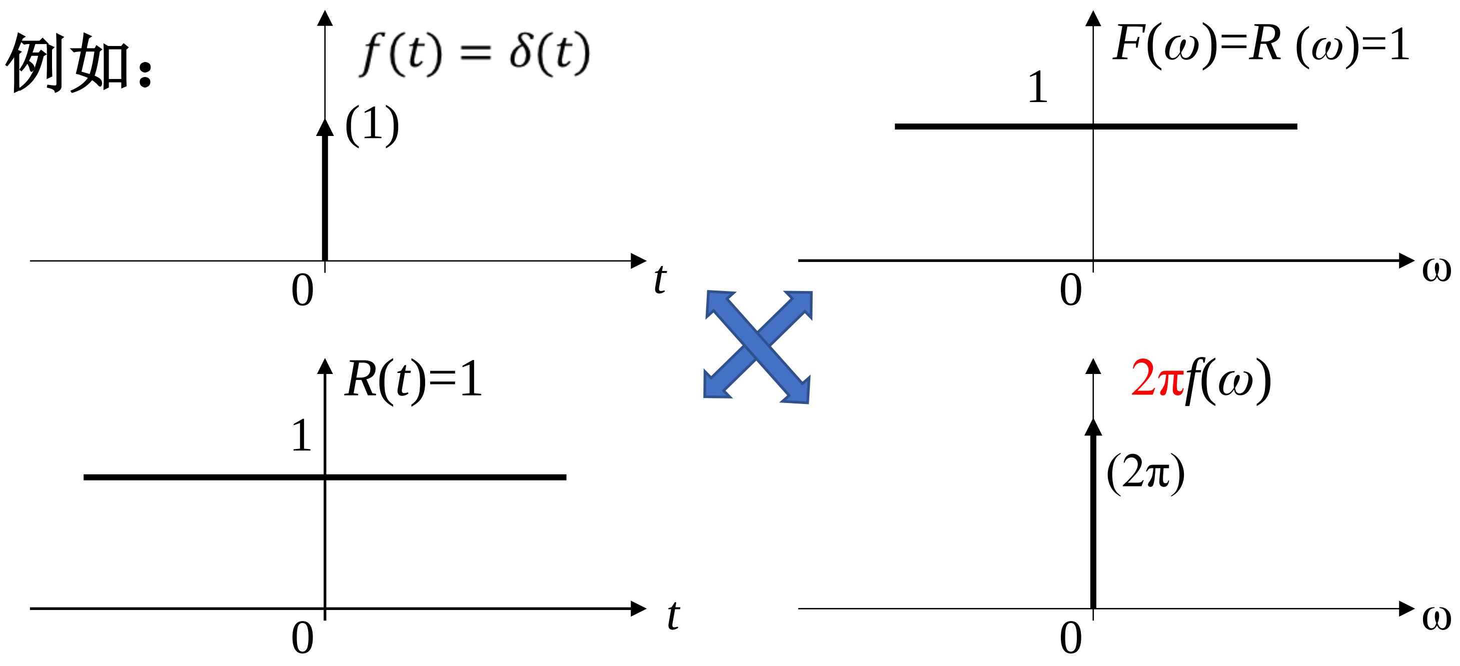
3.7.1 线性

若 $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(\omega),\ \mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(\omega),$

则 $\mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$

3.7.2 对称性

例如：



利用傅里叶变换的对称性，可将求傅里叶逆变换的问题转化为求傅里叶变换来进行。

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$

则 $\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$

证明：$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$，$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)e^{-j\lambda t}d\lambda$

$$\mathcal{F}[F(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)e^{-j\lambda t}d\lambda\right]e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\lambda+\omega)t}dt\right]f(\lambda)d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\lambda+\omega)f(\lambda)d\lambda = 2\pi f(-\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\lambda+\omega)d\lambda$$

$$= 2\pi f(-\omega)$$

即 $f(-\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}[F(t)]$， ω换为$-t$， $f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}[F(t)]\Big|_{\omega=-t}$

若 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$

则 $\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$

$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

$\dfrac{F(t)}{2\pi} \leftrightarrow f(\omega)$ （f为偶函数）

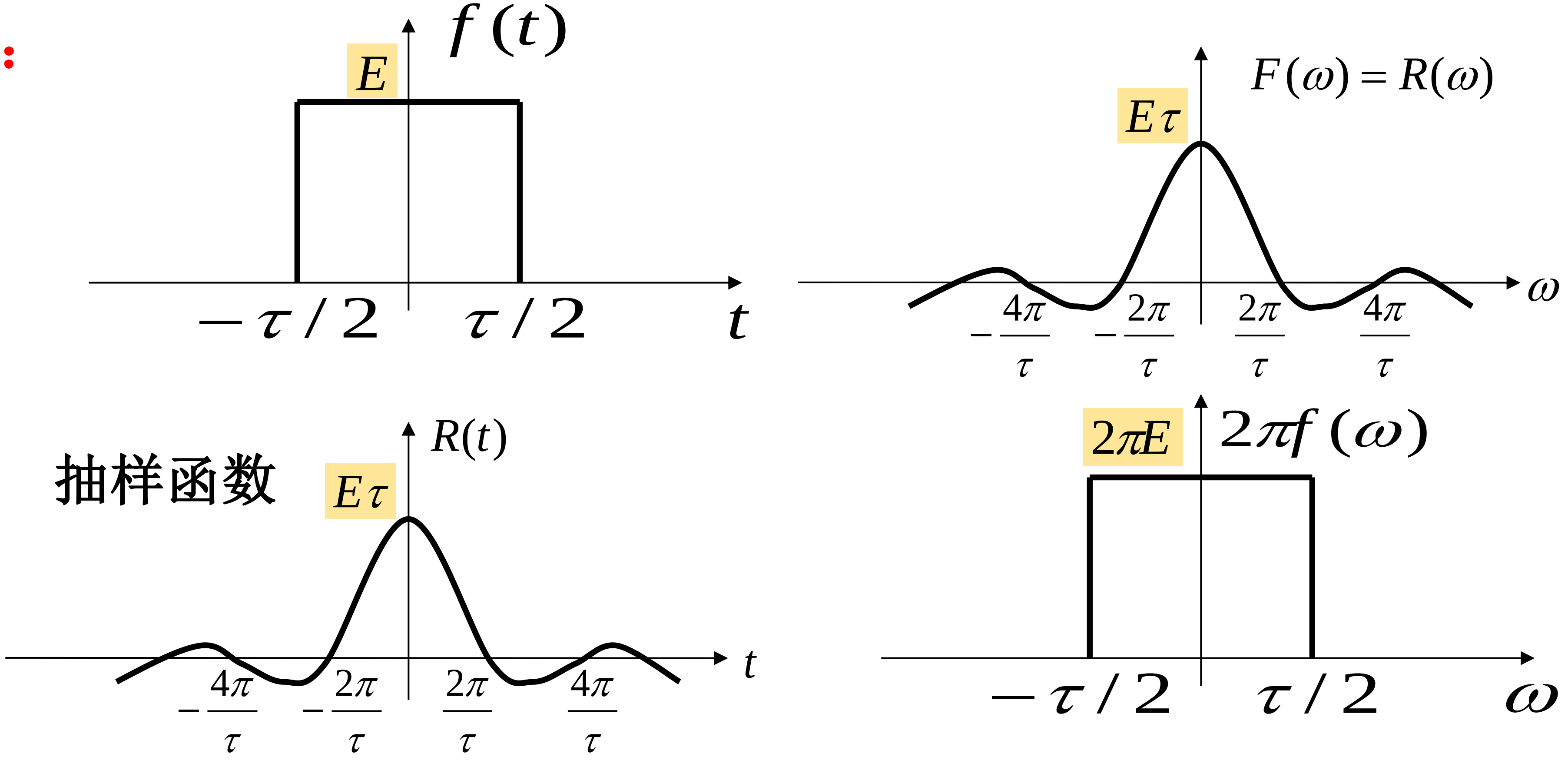
$\dfrac{-F(t)}{2\pi} \leftrightarrow f(\omega)$ （f为奇函数）

$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$ （f为偶函数）

$F(t) \leftrightarrow -2\pi f(\omega)$ （f为奇函数）

例如：



$$f(t)=E[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]\to R(\omega)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$R(t)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{t\tau}{2})\to F[R(t)]=2\pi E[u(\omega+\frac{\tau}{2})-u(\omega-\frac{\tau}{2})]$$

单选题 1分

设置

已知 $\mathrm{F}[\mathrm{sgn}(t)] = \dfrac{2}{j\omega}$，求 $\mathrm{F}^{-1}[j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)]$。

A $\dfrac{1}{t}$

B $\dfrac{2\pi}{t}$

C $-\dfrac{2\pi}{t}$

D $-\dfrac{1}{t}$

提交

例3-2：求 $\mathcal{F}^{-1}[j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)]$。

解：$\because F(t)=j\pi\,\mathrm{sgn}(t)$

$$\mathcal{F}[F(t)]=j\pi\frac{2}{j\omega}=\frac{2\pi}{\omega}$$

$$\therefore \mathcal{F}^{-1}[j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[F(t)]\Big|_{\omega=-t}=\frac{1}{2\pi}[\frac{2\pi}{\omega}]\Big|_{\omega=-t}=-\frac{1}{t}$$

$$j\pi\,\mathrm{sgn}(t)\leftrightarrow\frac{2\pi}{\omega}$$

$$\frac{-1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{t}\right)\leftrightarrow j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

$$-\frac{1}{t}\leftrightarrow j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

sgn(t)是奇函数

例3-3：设$y(t)=x(t)\cos t$，且已知$Y(\omega)=u(\omega+2)-u(\omega-2)$，求$x(t)$。

解：利用时域和频域的对称性，

$$u(t+2)-u(t-2)\xleftrightarrow{FT}4Sa(2\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi}4Sa(2t)\xleftrightarrow{FT}[u(\omega+2)-u(\omega-2)]$$（偶函数）

$$\therefore y(t)=\frac{2}{\pi}Sa(2t)=\frac{\sin(2t)}{\pi t}=\frac{2\sin(t)\cos(t)}{\pi t}=x(t)\cos(t)$$

$$\therefore x(t)=\frac{2\sin(t)}{\pi t}=\frac{2}{\pi}Sa(t)$$

3.7.3 奇偶虚实性

设 $F(\omega)=\left|F(\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)}=R(\omega)+jX(\omega)$

其中 $\left|F(\omega)\right|=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)},\ \varphi(\omega)=\arctan\dfrac{X(\omega)}{R(\omega)}$

因为 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

所以 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\omega t)dt-j\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(\omega t)dt$

则 $\begin{cases}R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\omega t)dt\\X(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(\omega t)dt\end{cases}$

若$f(t)$为实函数，$R(\omega)$为偶函数，$X(\omega)$为奇函数。

两种特定关系：

1. 若 $f(t)$是实函数，或虚函数 $[f(t)=jg(t)]$，则 $|F(\omega)|$是偶函数，$\varphi(\omega)$ 是奇函数。

2. 若 $f(t)$是t的实偶函数，则 $F(\omega)$ 必为 ω的实偶函数：

$$[F(\omega)=R(\omega)]$$

若 $f(t)$ 是t的实奇函数，则 $F(\omega)$ 必为 ω 的虚奇函数：

$$[F(\omega)=jX(\omega)]$$

例如：

$$f(t)=e^{-\alpha|t|} \quad \text{（实偶）} \qquad f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & t>0 \\ -e^{\alpha t} & t<0 \end{cases} \quad \text{（实奇）}$$

$$F(\omega)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \quad \text{（实偶）} \qquad F(\omega)=\frac{-2j\omega}{\alpha^2+\omega^2} \quad \text{（虚奇）}$$

3.7.4 位移特性

（1）时移特性

若 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$

则 $$\mathcal{F}[f(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t}dt=e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega(t-t_0)}d(t-t_0)$$

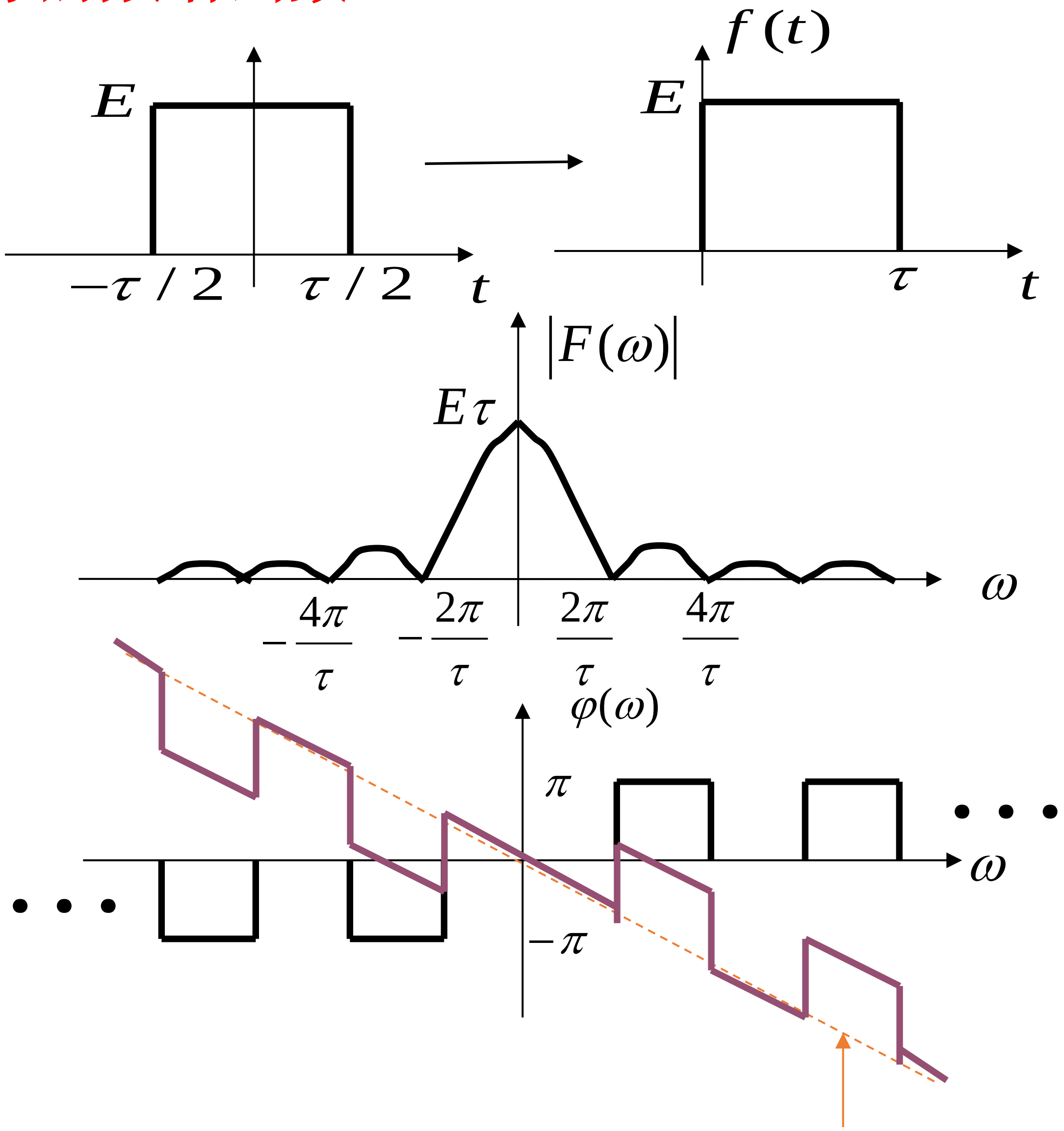
$-j\omega t_0$

$$=F(\omega)e^{-j\omega t_0}=|F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}e^{-j\omega t_0}$$

幅度谱不变，相位谱产生附加相移$-\omega t_0$。

同理 $\mathcal{F}[f(t+t_0)]=F(\omega)e^{j\omega t_0}$

例3-4：求下图所示的单边矩形脉冲信号的频谱函数。



解：因为对称矩形脉冲信号 $EG_\tau(t)$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[EG_\tau(t)] = E\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

根据时移特性

$$\mathcal{F}[f(t)] = E\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$

幅度谱保持不变，相位谱产生附加相移 $-\omega\tau/2$。

信号 $x(t)=e^{-t+2}u(t\text{-}2)$ 的傅里叶变换为

A $e^{-j2\omega}\dfrac{1}{1+j2\omega}$

B $e^{-j2\omega}\dfrac{1}{1+j\omega}$

C $e^{-j\omega}\dfrac{1}{1+j2\omega}$

D $2e^{-j\omega}\dfrac{1}{1+j\omega}$

提交

（2）频移特性（调制原理）

若 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$

则 $$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}]=F(\omega-\omega_0)$$

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-j\omega_0 t}]=F(\omega+\omega_0)$$

例3-5：利用频移特性求 $e^{j\omega_0 t}$，$\cos\omega_0 t$，$\sin\omega_0 t$ 的频谱。

解：$\mathcal{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$ $\qquad$ $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$$\because \cos\omega_0 t=\frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}] \qquad \therefore \mathcal{F}[\cos\omega_0 t]=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\because \sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}] \qquad \therefore \mathcal{F}[\sin\omega_0 t]=j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

调制原理

若 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$

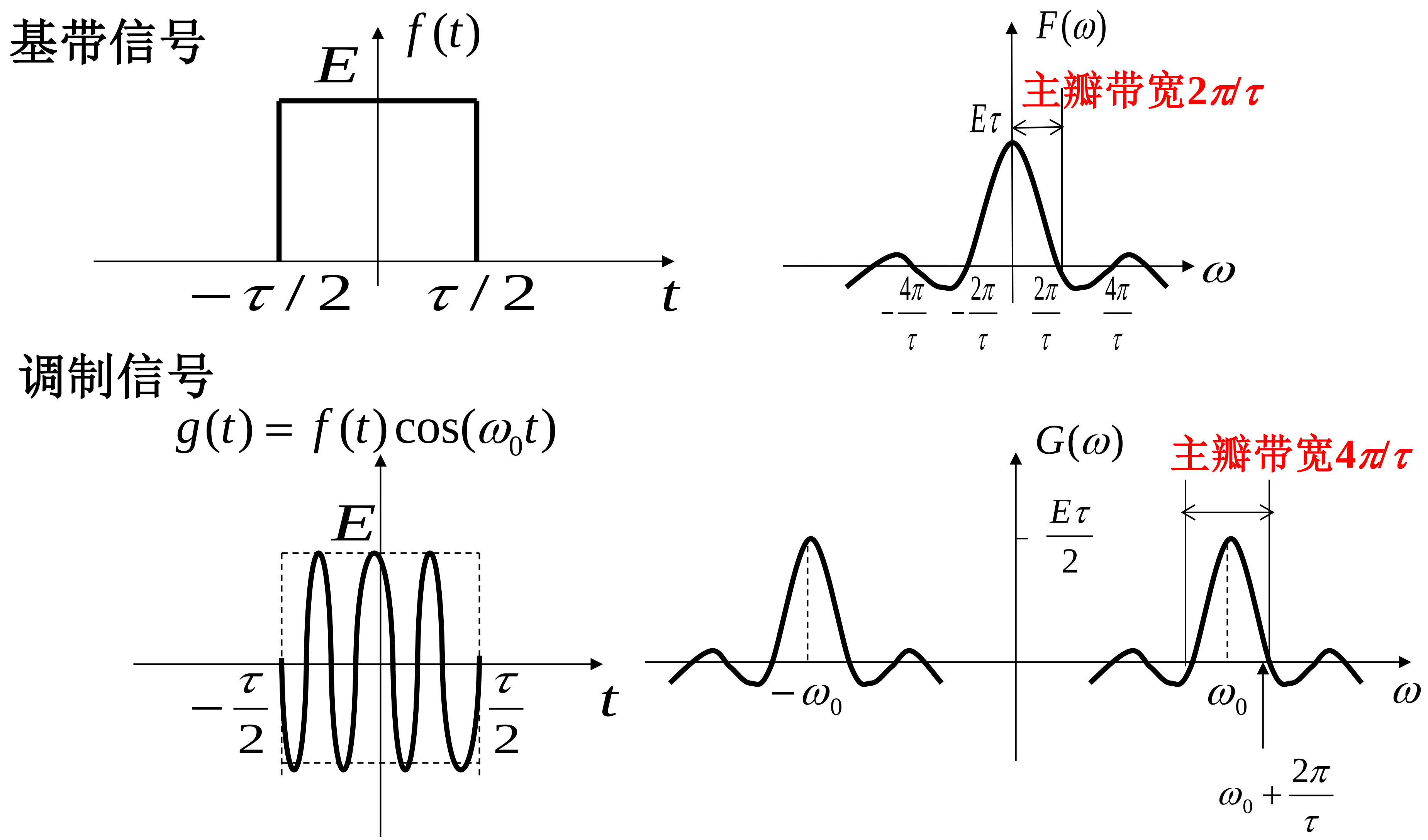
则 $\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}]=F(\omega-\omega_0)$ $\qquad\mathcal{F}[f(t)e^{-j\omega_0 t}]=F(\omega+\omega_0)$

$$\because \cos\omega_0 t=\frac{1}{2}[e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}] \qquad \sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}]$$

$$\therefore \mathcal{F}[f(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathcal{F}[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{j}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)]$$

例3-6：求矩形脉冲幅度键控（ASK）调制信号的频谱函数，已知矩形脉冲脉幅为E，脉宽为τ,载波信号的频率为ω_0。



$$F(\omega)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$G(\omega)=\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$$

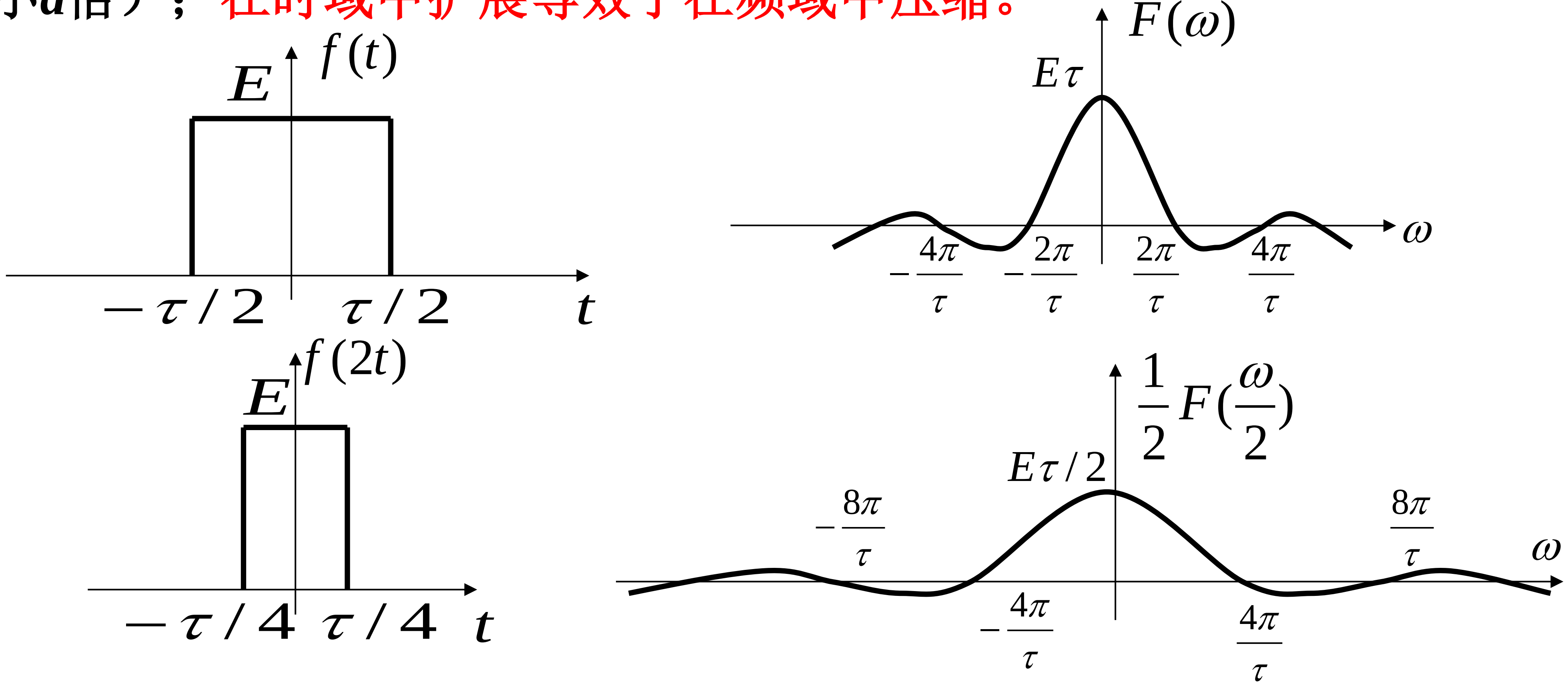
$$=\frac{E\tau}{2}\{\mathrm{Sa}[(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}]+\mathrm{Sa}[(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}]\}$$

在调制过程中带宽增加一倍，频谱密度减小一半。

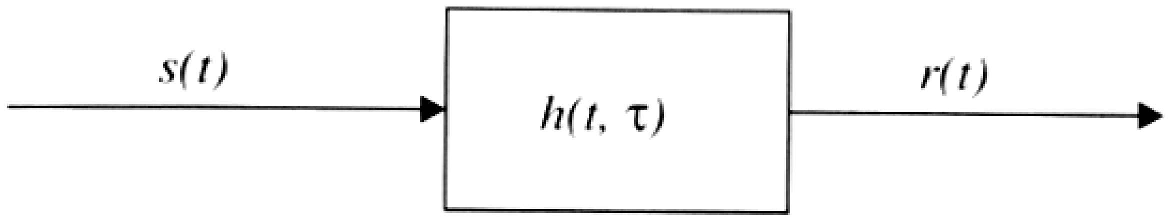
3.7.5 尺度变换特性

若 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$　　则 $\mathcal{F}[f(at)]=\dfrac{1}{|a|}F(\dfrac{\omega}{a})$

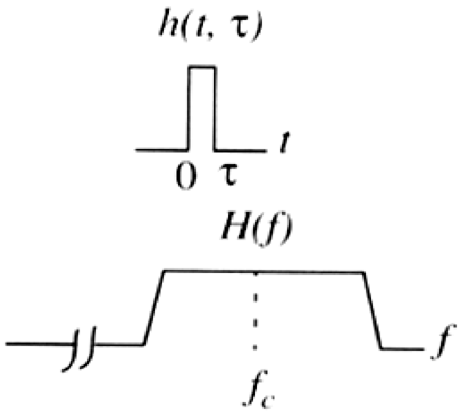
信号在时域中压缩等效于在频域中扩展（波形压缩a倍，信号随时间变化加快a倍，所包含的频率分量增加a倍，频谱展宽a倍。根据能量守恒定律，各频率分量的大小减小a倍）；在时域中扩展等效于在频域中压缩。



信道的时间-频率压缩与扩展

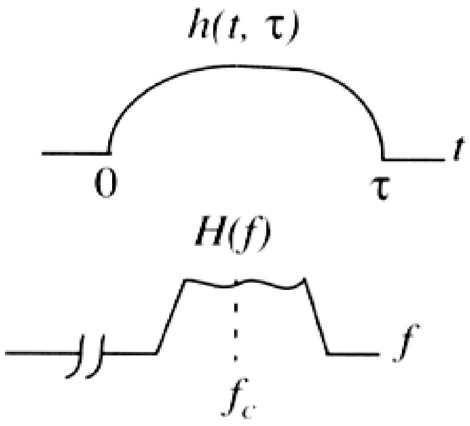


信道时延较小



信道带宽较大

信道时延较大



信道带宽较小

特例：$\mathcal{F}[f(-t)] = F(-\omega)$ （反褶， **a=-1**）

综合时移特性和尺度变换特性：

$$\boxed{\mathcal{F}[f(at-t_0)] = \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}}$$

证明：

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

先尺度变换 $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$

再时移 $f\left[a(t-\frac{t_0}{a})\right] \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

先时移 $f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$

再尺度变换 $f(at-t_0) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$

3.7.6 微分与积分特性

（1）时域微分特性

若 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$

则 $\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=j\omega F(\omega)$, $\quad\mathcal{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right]=(j\omega)^n F(\omega)$

证明：

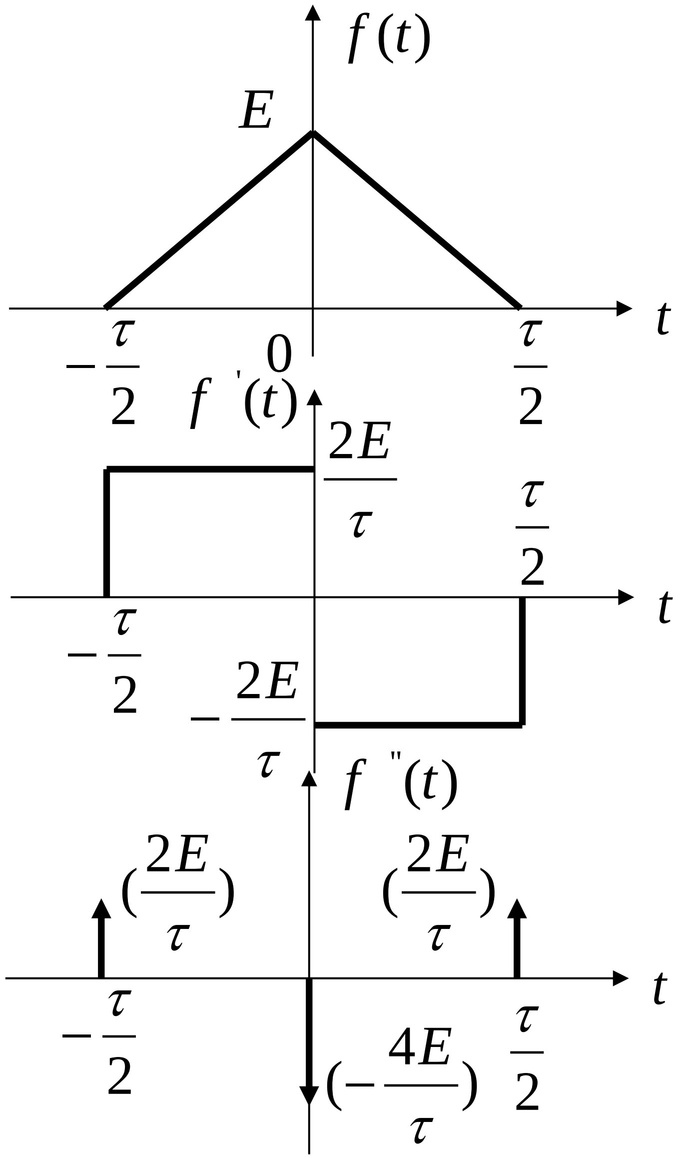
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

上式两边对t求导得，$\frac{d}{dt}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$$\mathcal{F}[f'(t)]=j\omega F(\omega)$$

例如， $\mathcal{F}[\delta(t)]=1$ $\quad\mathcal{F}[\delta'(t)]=j\omega$ $\quad\mathcal{F}[\delta^{(n)}(t)]=(j\omega)^n$

例3-7：求下图所示三角脉冲信号的傅里叶变换。



解：

$$f'(t)=\begin{cases}\frac{2E}{\tau} & -\frac{\tau}{2}<t<0\\ -\frac{2E}{\tau} & 0<t<\frac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$$

$$f''(t)=\frac{2E}{\tau}[\delta(t+\frac{\tau}{2})+\delta(t-\frac{\tau}{2})-2\delta(t)]$$

对上式两边取傅里叶变换：

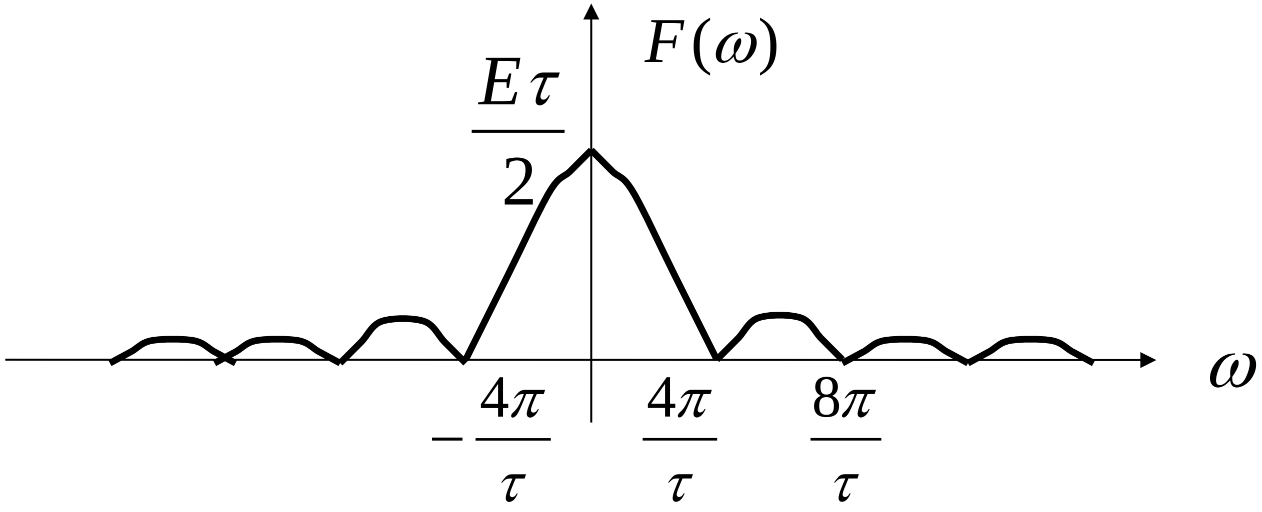
$$(j\omega)^2F(\omega)=\frac{2E}{\tau}(e^{j\omega\frac{\tau}{2}}+e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-2)=\frac{4E}{\tau}\left[\cos\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)-1\right]$$

$$=-\frac{\omega^2E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

3.7 傅里叶变换的基本性质

$$(j\omega)^2 F(\omega) = -\frac{\omega^2 E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

$$\therefore \quad F(\omega) = \frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})$$



（2）时域积分特性

若 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$

则 $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$

其中 $F(0)=F(\omega)\big|_{\omega=0}$ **直流分量**

若 $F(0)=0$

则 $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(\omega)}{j\omega}$

（3）频域微分特性

若 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$

则 $\mathcal{F}[(-jt)f(t)]=\dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$,

$$\mathcal{F}[(-jt)^n f(t)]=\frac{d^nF(\omega)}{d\omega^n}$$

$$\boxed{\mathcal{F}[t^n f(t)]=j^n\frac{d^nF(\omega)}{d\omega^n}}$$

例： $\because \quad \mathcal{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$

$\therefore \quad \mathcal{F}[t]=j2\pi\delta'(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n]=2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$

（4）频域积分特性

若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$

则 $\mathscr{F}^{-1}[\int_{-\infty}^{\omega}F(u)du]=\dfrac{f(t)}{-jt}+\pi f(0)\delta(t)$

若 $f(0)=0$

则 $\mathscr{F}^{-1}[\int_{-\infty}^{\omega}F(u)du]=\dfrac{f(t)}{-jt}$

作业

基础题（需提交）：3-17（a）（d）（f），3-21，3-22（3），3-25（1）（2），3-29（3）（4）（6）（7）。

加强题（选做，不提交）：3-17（b）（c）（e），3-20，3-25（3）（4），3-26，3-28，3-33。