上节内容回顾

2.5　零输入响应和零状态响应

2.6　冲激响应与阶跃响应

- **自由响应**—系统特征对应；**强迫响应**—激励信号对应。
- **零输入响应**—系统内部储能引起；**零状态响应**—激励信号引起。
- 零状态响应在LTI系统研究领域有重要意义：
  - 大量的通信和电子系统实际问题只需求零状态响应；
  - 为求零状态响应，可以不用繁琐的经典法，而是利用**卷积**方法。
- 按零输入响应和零状态响应分解有助于理解线性系统的**叠加性**和**齐次性**特征。
  - **零输入响应**对系统的**起始状态**（初始储能）呈**线性**；
  - **零状态响应**对系统的**激励信号**满足**线性**和**时不变**特性。

1. 零输入响应的定义与待定系数确定

①定义：没有外加激励信号作用，完全由起始状态所产生的响应,即 $r_{zi}(t) = H[\{x(0_-)\}$

②满足方程：$c_0 \dfrac{d^n}{dt^n} r_{zi}(t) + \ldots + c_{n-1} \dfrac{d}{dt} r_{zi}(t) + c_n r_{zi}(t) = 0$

故 $r_{zi}(t)$ 是一种齐次解形式，即 $r_{zi}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_{zik} e^{\alpha_k t}$

其中，$\alpha_{1,} \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ 为互不相等的n个系统特征根。

③初始条件：$r_{zi}^{(k)}(0_+) = r_{zi}^{(k)}(0_-) = r^{(k)}(0_-)$

即齐次解$r_{zi}(t)$ 的待定系数用 $r^{(k)}(0_-)$ 确定即可！

2. 零状态响应的定义与待定系数确定

①定义：起始状态为0，只由激励产生的响应 $r_{zs}(t)=H[e(t)]$

②满足方程：

$$c_0\frac{d^n}{dt^n}r_{zs}(t)+\ldots\ldots+c_{n-1}\frac{d}{dt}r_{zs}(t)+c_n r_{zs}(t)=E_0\frac{d^m}{dt^m}c(t)+\ldots\ldots+E_m$$

故 $r_{zs}(t)$ 既含齐次解，又含特解 $r_p(t)$，即 $r_{zs}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zsk}e^{\alpha_k t}+r_p(t)$

③初始条件：

由于$r_{zs}(t)$在0_时刻的$k(k=0,\ldots n\text{-}1)$阶导数均为0，即 $r_{zs}^{(k)}(0_-)=0$,

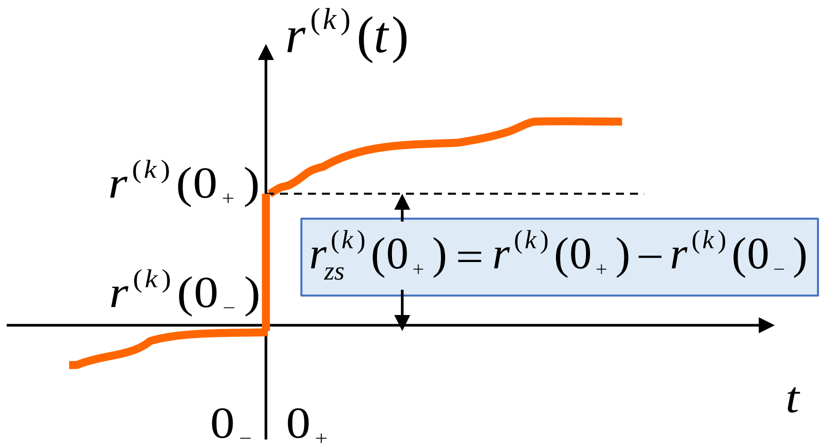
$$r^{(k)}(0_-)=r_{zi}^{(k)}(0_-)+r_{zs}^{(k)}(0_-)=r_{zi}^{(k)}(0_-)$$

$$r^{(k)}(0_+)=r_{zi}^{(k)}(0_+)+r_{zs}^{(k)}(0_+)=r_{zi}^{(k)}(0_-)+r_{zs}^{(k)}(0_+)$$

$$r_{zs}^{(k)}(0_+)=r^{(k)}(0_+)-r^{(k)}(0_-)=\text{跳变值}$$

故 A_{zsk} 由跳变值确定。

2.5 零输入响应与零状态响应



$r^{(k)}(0_+)$：确定全响应的系数

$r^{(k)}(0_-)$：确定零输入响应的系数 ⟸ 重要！

$r_{zs}{}^{(k)}(0_+)$：确定零状态响应的系数

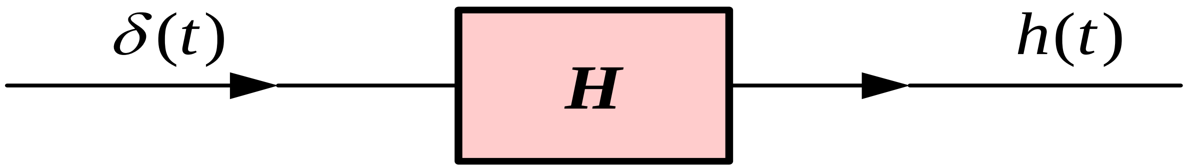
$$r(t)=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{Zik}e^{a_k t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{Zsk}e^{a_k t}+r_p(t)}_{\text{零状态响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(A_{Zik}+A_{Zsk})\ e^{a_k t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{r_p(t)}_{\text{强迫响应}}$$

2.6.1 冲激响应

1. 定义

系统在单位冲激信号$\delta(t)$作用下产生的<u>零状态响应</u>，称为单位冲激响应，简称冲激响应，一般用$\boldsymbol{h(t)}$表示。



说明：在时域，对于不同系统，零状态情况下加同样的激励$\delta(t)$看响应$h(t)$，$h(t)$不同，说明其系统特性不同。冲激响应可以衡量系统的特性。

2. 冲激响应解的形式

$$C_0h^{(n)}(t)+C_1h^{(n-1)}(t)+\cdots+C_{n-1}h^{(1)}(t)+C_nh(t)$$
$$=E_0\delta^{(m)}(t)+E_1\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+E_{m-1}\delta^{(1)}(t)+E_m\delta(t)$$

①与*n*, *m*相对大小有关

一般$n>m$，$h^{(n)}(t)$ 中包含$\delta^{(m)}(t)$项，以便与方程右端匹配，依次有$h^{(n-1)}(t)$ 中包含$\delta^{(m-1)}(t)$ 项，…。若$n=m+1$，$h'(t)$包含$\delta(t)$，而$h(t)$不包含$\delta(t)$ 。

$n>m$	$h(t)$ 不包含$\delta(t)$ 及其各阶导数　（最常见）
$n=m$	$h(t)$ 包含 $\delta(t)$，不包含其各阶导数
$n<m$	$h(t)$ 包含$\delta(t)$ 及其各阶导数（最高为**m-n**阶）

2. 冲激响应解的形式

②与特征根有关

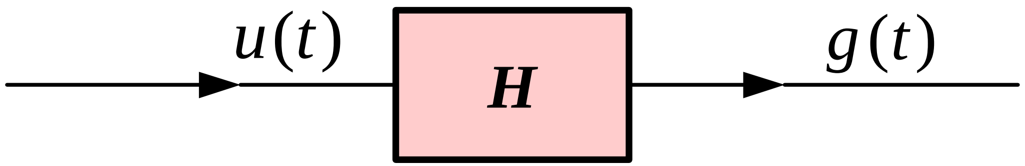
若$n>m$且特征根为简单根（无重根）时，$h(t)=\left[\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\alpha_i t}\right]u(t)$

当$n>m$时，由于δ(t)及其导数在$t>0_+$时为零，即激励不复存在，因而方程式右端的自由项恒等于零，系统的冲激响应形式与零输入响应相同（相当于只求齐次解）。此时，冲激响应是具有零输入响应形式的零状态响应。冲激信号引入的能量存储转换为（等效于）零输入响应的起始条件。

2.6.2 阶跃响应

1. 定义

系统在单位阶跃信号作用下的零状态响应，称为单位阶跃响应，简称阶跃响应。



系统方程的右端包含阶跃函数，所以除了齐次解外，还有特解项。

也可以根据线性时不变系统特性，利用冲激响应与阶跃响应的关系求阶跃响应。

2. 阶跃响应与冲激响应的关系

线性时不变系统满足微、积分特性

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0_-}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$g(t)=\int_{0_-}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau$$ 阶跃响应是冲激响应的积分。

$$h(t)=\frac{dg(t)}{dt}$$ 冲激响应是阶跃响应的微分。

因果系统的充分必要条件：冲激响应或阶跃响应在t<0时为0, 即

$$h(t)=0\quad(t<0)\quad\text{或}\quad g(t)=0\quad(t<0)$$

已知一个LTI系统的微分方程如下，冲激响应$h(t)$和阶跃响应$g(t)$分别为（）。

$$\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=2e(t)$$

A $h(t)=e^{-2t}u(t), g(t)=\left(1+e^{-2t}\right)u(t)$

B $h(t)=e^{-2t}u(t), g(t)=\left(-1+e^{-2t}\right)u(t)$

C $h(t)=2e^{-2t}u(t), g(t)=\left(1-e^{-2t}\right)u(t)$

D $h(t)=2e^{-2t}u(t), g(t)=\left(1+e^{-2t}\right)u(t)$

提交

已知一个LTI系统的微分方程如下，分别求冲激响应$h(t)$和阶跃响应$g(t)$。

$$\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=2e(t)$$

解： 将冲激函数作为激励代入方程右边，得到 $\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)=2\delta(t)$

特征根 $\alpha_1=-2$

冲激函数匹配法一：从微分方程右边出发，根据右边的冲激函数及其导数项，推导响应的最高阶导数表达式，依次降阶得到响应及其各阶导数的表达式，代入方程左边，使两边的冲激函数平衡。

$$\frac{dh(t)}{dt}=2\delta(t) \qquad h(t)=2\Delta u(t)$$

$h(t)$在0_-到0_+的跳变值为2，$h(0_+)=2$。

冲激响应：$h(t)=\boxed{2e^{\alpha_1 t}}u(t)=2e^{-2t}u(t)$

$h(0_+)=2$是初始值，特征根决定信号衰减的速度。在只有一个特征根时可直接写成这种形式。

$$\frac{dh(t)}{dt}+2h(t)=2\delta(t) \qquad \text{特征根 } \alpha_1=-2$$

冲激函数匹配法二：从微分方程左边出发，把响应表达式代入方程左边，使左右两边的冲激函数匹配，求出齐次解的系数。

冲激响应：$h(t)=A_1e^{-2t}u(t)$

将冲激响应的表达式代入微分方程左边，

$$A_1e^{-2t}\delta(t)-2A_1e^{-2t}u(t)+2A_1e^{-2t}u(t)=2\delta(t)$$

化简得到 $A_1\delta(t)=2\delta(t) \Longrightarrow A_1=2$

冲激响应：$h(t)=2e^{-2t}u(t)$

阶跃响应是冲激响应从0到t的积分，

$$g(t)=\int_{0_-}^{t}h(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{0_-}^{t}2e^{-2\tau}\,\mathrm{d}\tau=-e^{-2\tau}\Big|_0^t=1-e^{-2t}\ \ (t>0) \qquad g(t)=(1-e^{-2t})u(t)$$

本次课内容

2.7 卷积

2.8 卷积的性质

2.9 用算子符号表示微分方程

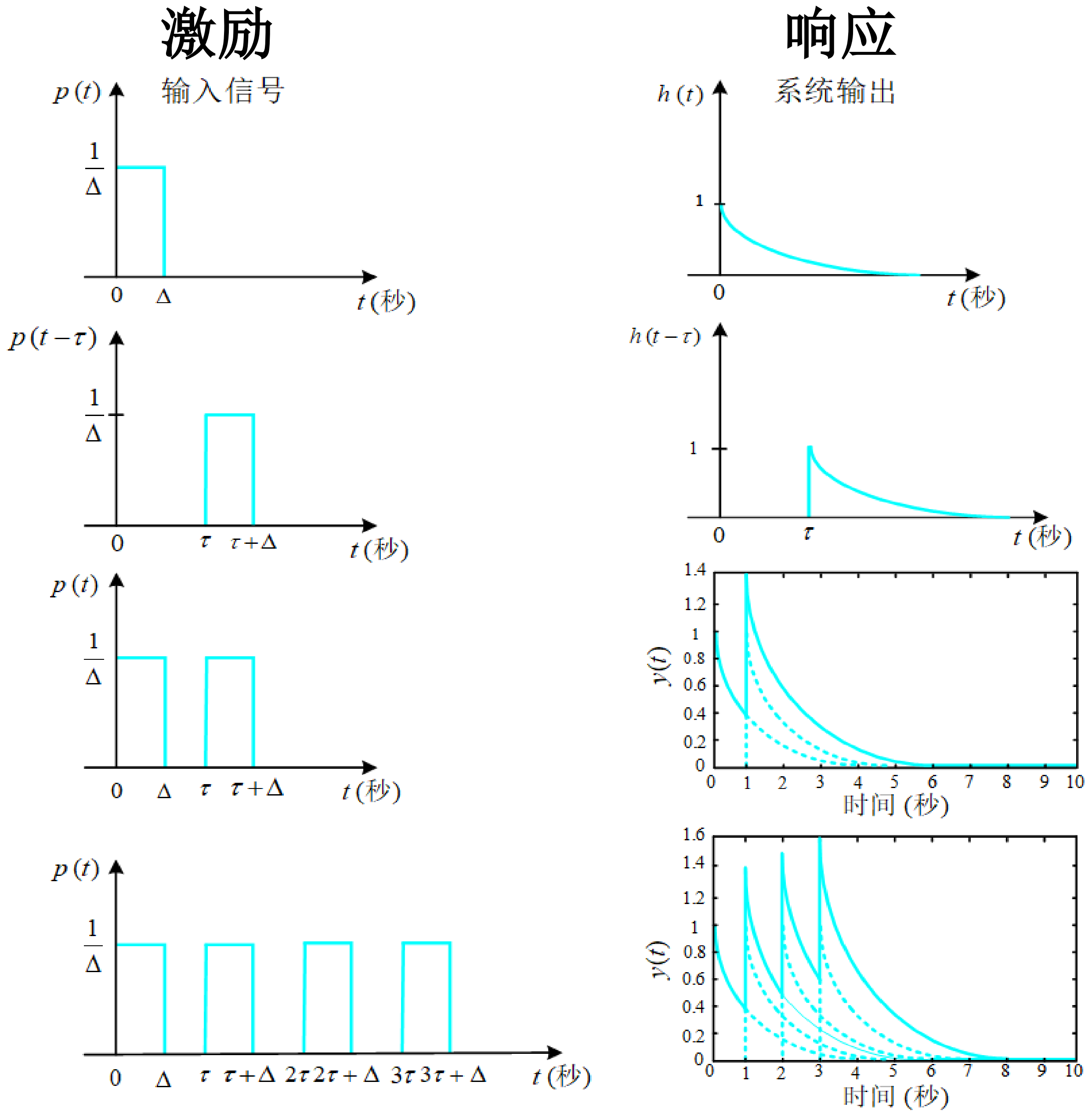
2.10 以“分配函数”的概念认识冲激函数

本次课目标

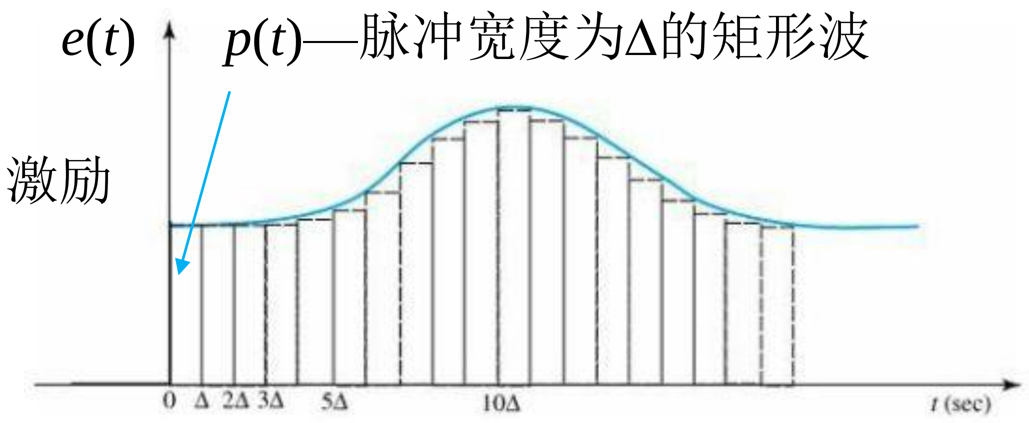
1. 熟练掌握卷积计算方法和性质；
2. 熟练运用卷积求零状态响应；
3. 简单了解用算子法解微分方程的优点及局限性，为运用拉普拉斯变换解微分方程打下基础；
4. 进一步了解冲激函数的性质。

第二章 连续时间系统的时域分析

- **卷积**是一种**数学工具**，是系统分析的核心技术。
- **卷积定理**连接着系统的时域分析和变换域分析，贯彻整门课程，非常重要。



2.7 卷积



$$e(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{\infty}e(i\Delta)\,p(t-i\Delta)$$

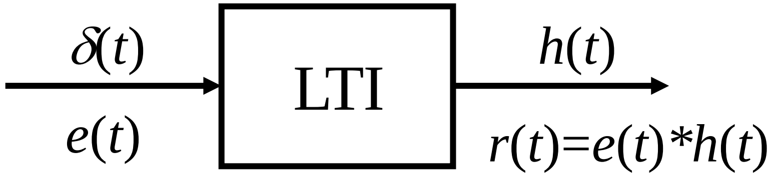
$$=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{\infty}e(i\Delta)\boxed{\frac{u(t-i\Delta t)-u[t-(i+1)\Delta t]}{\Delta}}\Delta$$

$$e(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{\infty}e(i\Delta)\delta(t-i\Delta)\Delta=\int_0^{\infty}e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

利用叠加性、齐次性、时不变性

$$r(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{\infty}e(i\Delta)h(t-i\Delta)\Delta\boxed{=\int_0^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau=e(t)*h(t)}$$

卷积



初始状态为零

系统的零状态响应为激励与冲激响应的卷积。

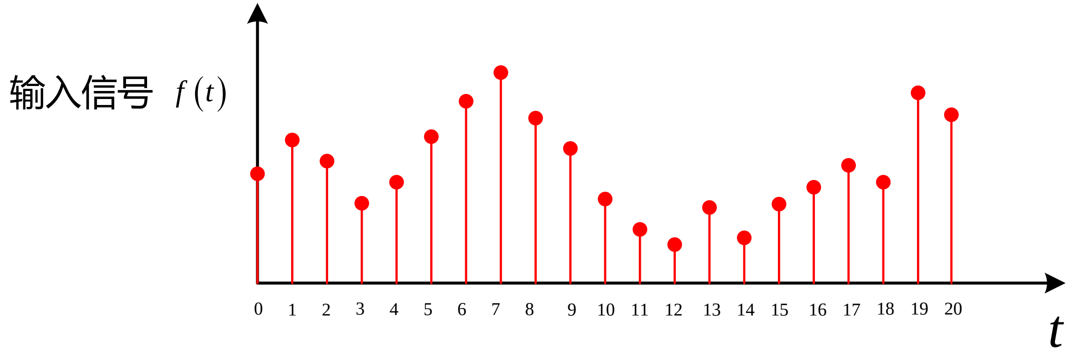
计算方法：将任意信号分解为冲激信号的加权和（积分），求其对应的冲激响应的加权和（积分）。

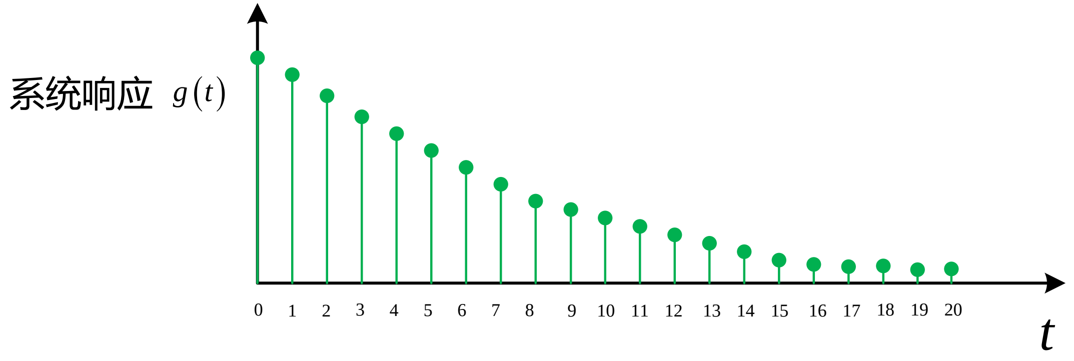
卷积的定义

设有两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，积分 $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

称为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积积分，简称卷积，记为 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$

卷积的物理意义

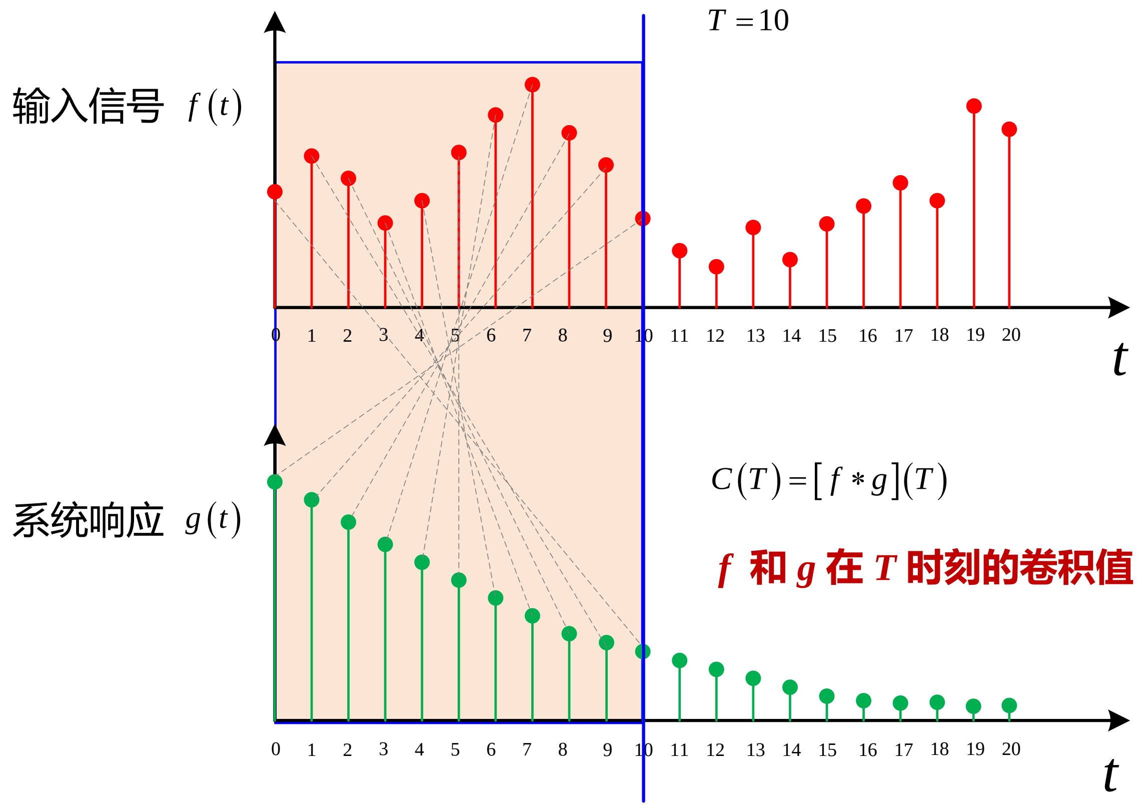




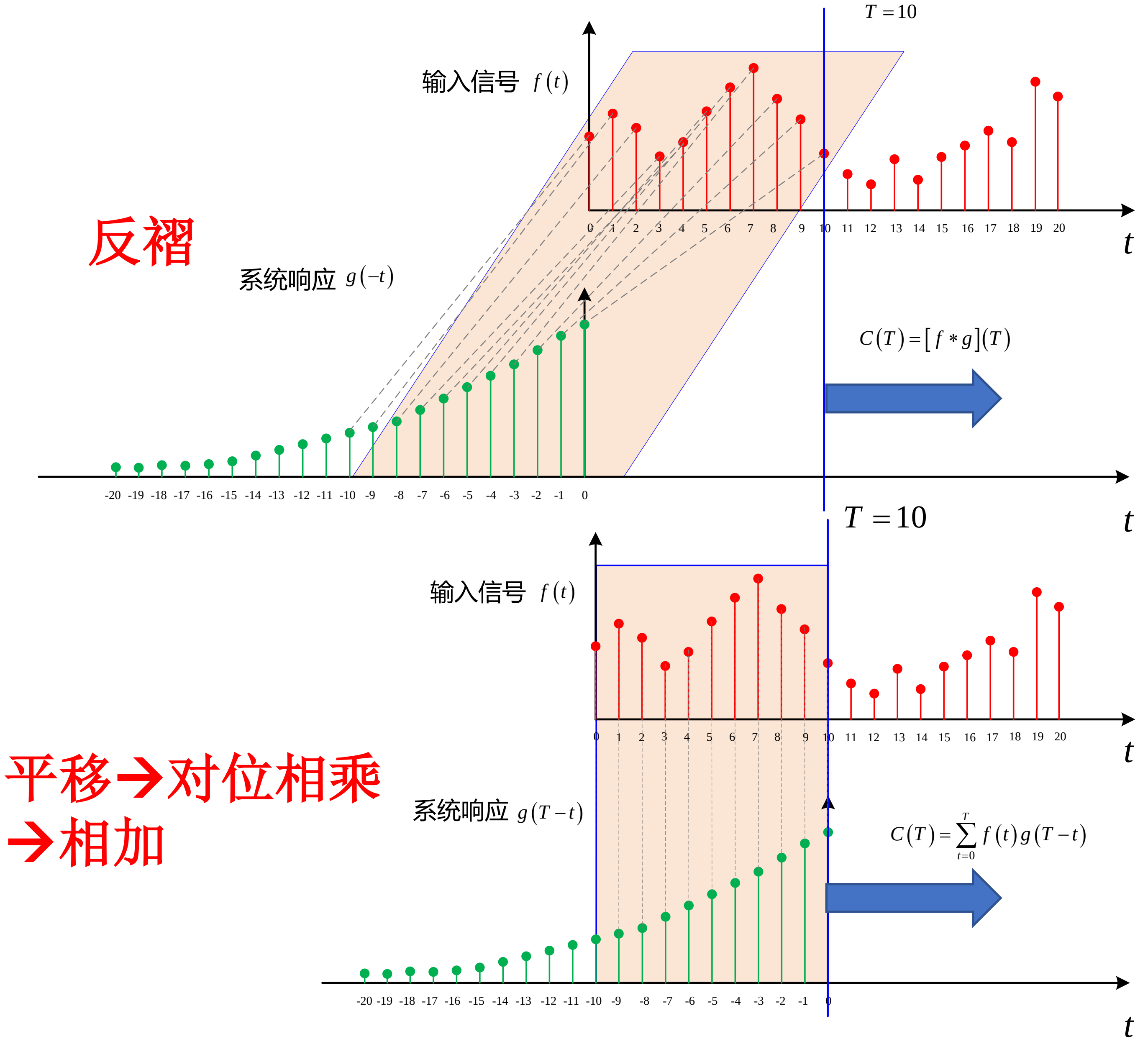
***f*(*t*)**—输入信号。

***g*(*t*)**—表示在某个时刻输入的信号值（考虑为一个冲激信号）的衰减趋势。

在 ***t*=*T*** 时刻，***t*=0** 时刻的输入 ***f*(0)** 的值衰减为 ***f*(0)*g*(*T*)**。



- 因信号是连续输入的，最终输出的是所有之前输入信号的累积效应。
- 如在*T*=10时刻，输出结果跟图中阴影区域整体有关。因为*f*(10) 是刚输入的，所以其输出结果应为*f*(10)*g*(0)；输入*f*(9)只经过了1个时间单位的衰减，产生的输出为 *f*(9)*g*(1)。以此类推，即图中虚线所描述的关系。
- 这些对应点相乘然后累加，就是*T*=10时刻的输出信号值，即为*f*(*t*)和*g*(*t*)两个函数在*T*=10时刻的卷积值。



卷积的含义：

“卷”——指函数的翻转，从 $g(t)$ 变成 $g(-t)$ 的过程；也包含滑动的意味（T 变化使窗口平移）。

“积”—指积分/加权求和，是一种累积效果。

系统的卷积运算分析

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

由上述卷积积分的公式可总结出卷积积分计算步骤。首先将**$x(t)$**和**$h(t)$**的自变量**t**改成 τ，即：$x(t)\to x(\tau),\quad h(t)\to h(\tau)$

再进行如下运算（即卷积积分的四步曲）：

反褶：$h(\tau)\to h(-\tau)$

时移：$h(-\tau)\to h(t-\tau)=h[-(\tau-t)]\begin{cases} t<0, & \text{左移 } t \\ t>0, & \text{右移 } t \end{cases}$

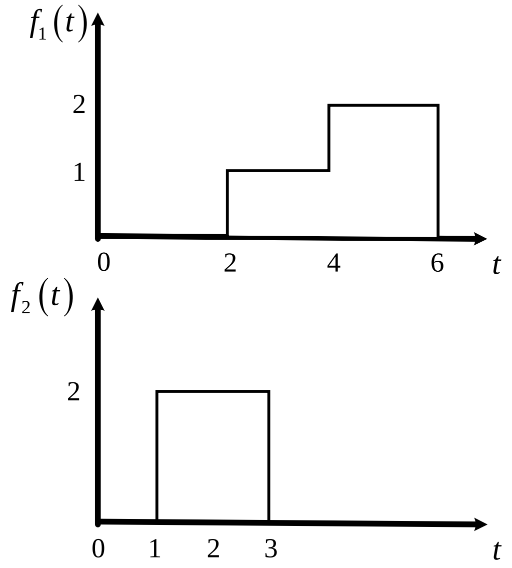
相乘：$x(\tau)h(t-\tau)$

积分：$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

计算卷积积分的关键是定积分限。

设置

已知 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的函数波形如图所示，若 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$ ，则 $s(6)=(\quad)$ 。



A 2

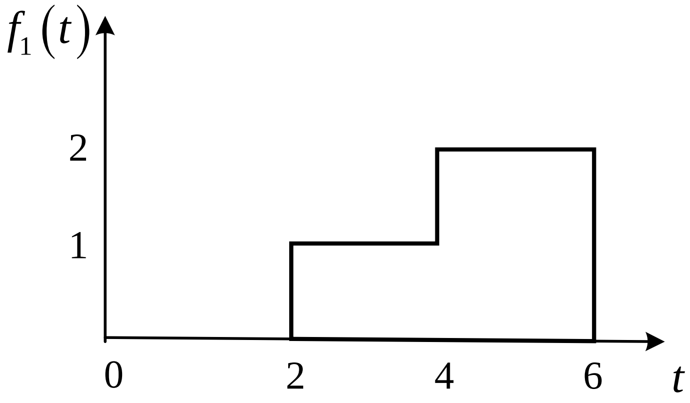
B 3

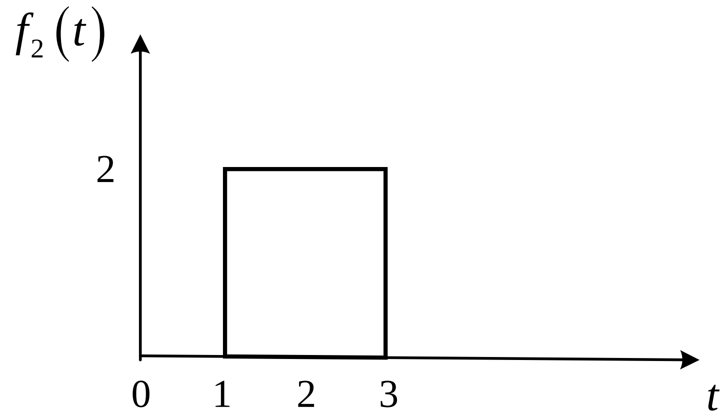
C 4

D 6

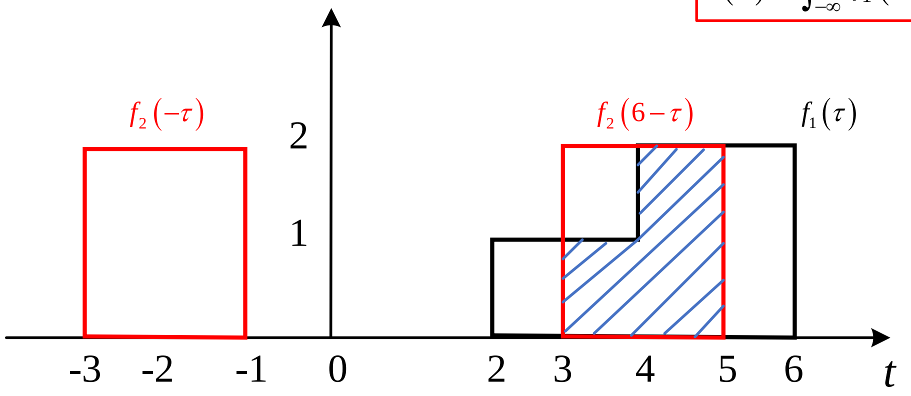
提交

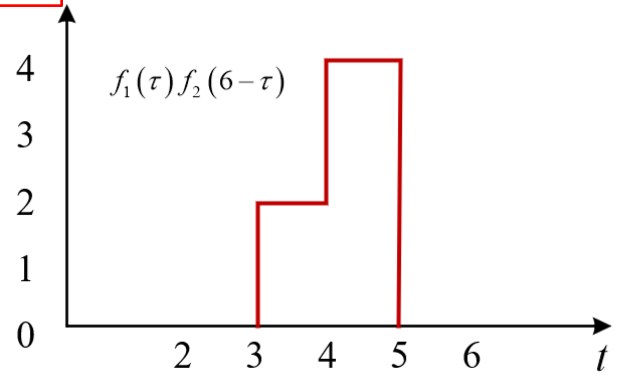
例2-11： 已知 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的函数波形如图所示，若 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$ ，求 $s(6)$。





$$\boxed{s(6)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\, f_2(6-\tau)\, d\tau}$$





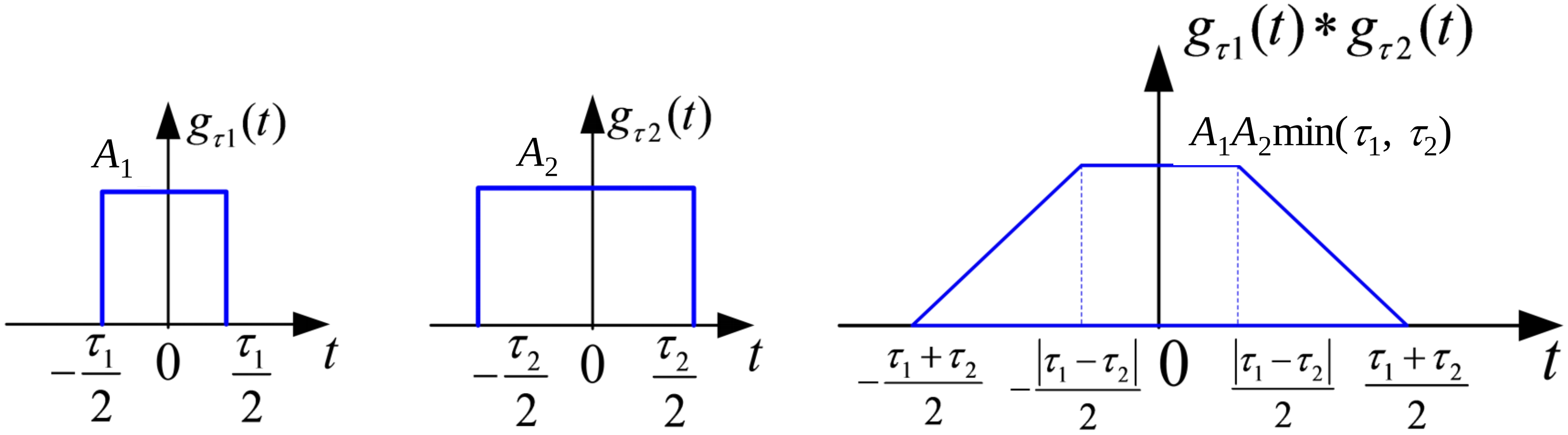
不是面积，是一种乘积值

$$s(6)=2\times1\times1+2\times2\times1=6$$

图解法适用于有限波形，而且求某一时刻的卷积值更为方便。

矩形脉冲卷积产生梯形/三角脉冲

两个矩形脉冲$g_{\tau 1}(t)$和$g_{\tau 2}(t)$，脉冲宽度分别为τ_1和τ_2，幅度分别为A_1和A_2，求卷积$g_{\tau 1}(t)*g_{\tau 2}(t)$。

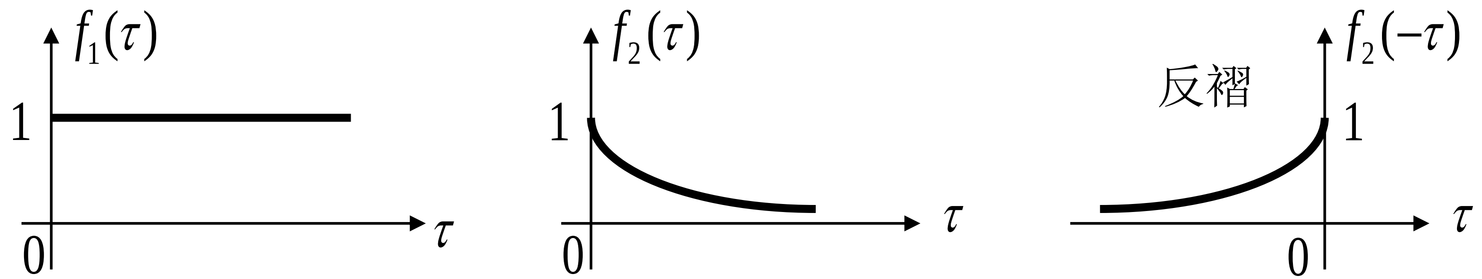


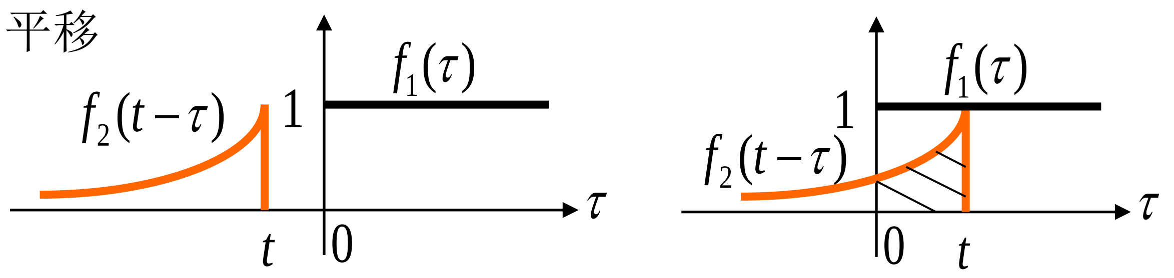
- 两个不等宽的矩形脉冲卷积的结果为梯形函数，梯形函数的高度为两个矩形高度和较窄矩形宽度三者的乘积，其上底为两个矩形宽度之差的绝对值，下底为两个矩形宽度之和。
- 两个等宽的矩形脉冲卷积的结果为三角函数，高度为两个矩形高度和一个矩形宽度的乘积，下底为两个矩形宽度之和（一个矩形宽度的2倍）。

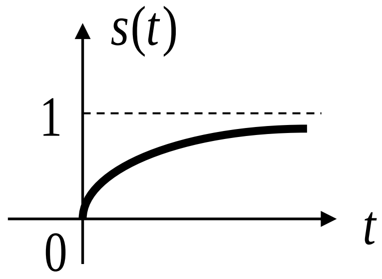
例2-12： 已知 $f_1(t)=u(t)$，$f_2(t)=e^{-t}u(t)$ ，求 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$ 。

解法一：图解法

$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$







1）当 $t<0$ 时，

$$s(t)=0$$

2）当 $t\geq 0$ 时，

$$s(t)=\int_0^t 1\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau =1-e^{-t}$$

$$\therefore s(t)=(1-e^{-t})u(t)$$

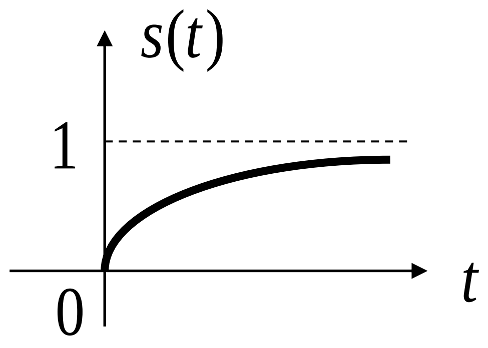
例2-12： 已知 $f_1(t)=u(t)$, $f_2(t)=e^{-t}u(t)$ ，求 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$ 。

解法二：利用u(t)定积分限

$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

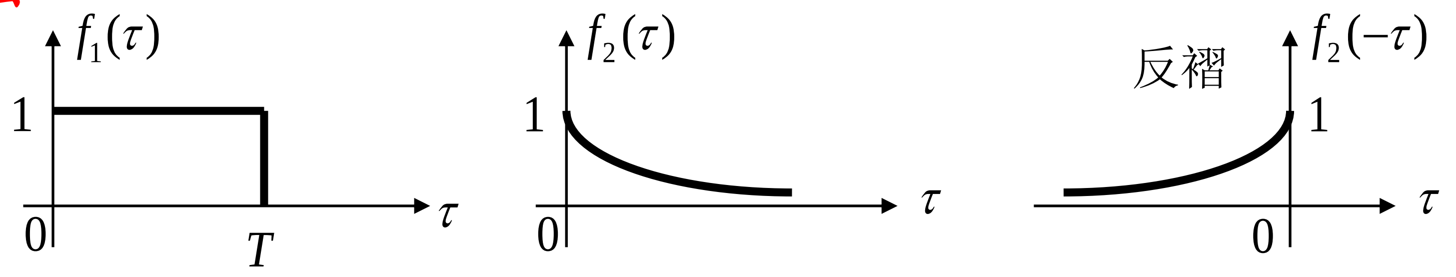
由$u(\tau)$和$u(t-\tau)$的交集部分确定积分限，$0\le\tau\le t$，即t 需满足$t\ge 0$。

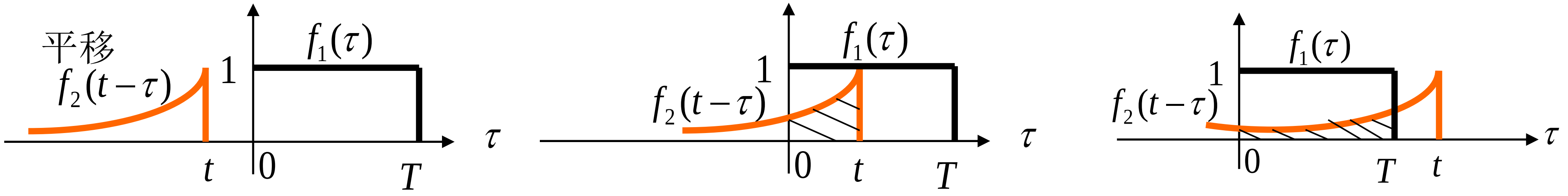
$$s(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau=e^{-t}(e^t-1)=1-e^{-t}\quad(t\ge 0)$$



例2-13： 已知 $f_1(t)=u(t)-u(t-T)$，$f_2(t)=e^{-t}u(t)$，求 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$。

解法一：图解法





1）当 $t<0$ 时，

$$s(t)=0$$

2）当 $0\le t<T$ 时，

$$s(t)=\int_0^t 1\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau \;=1-e^{-t}$$

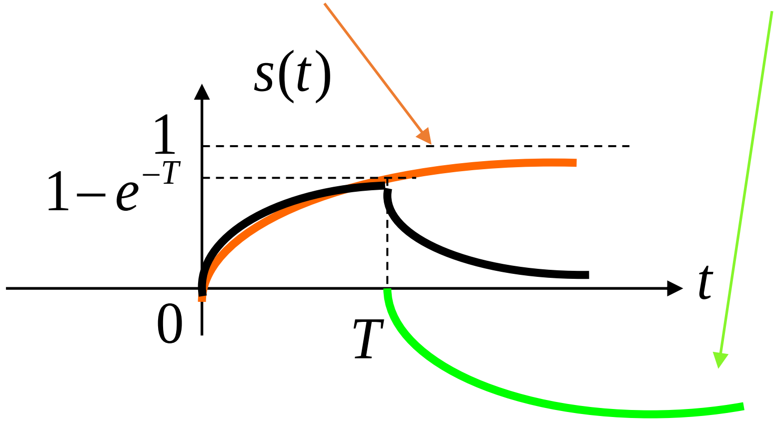
3）当 $t\ge T$ 时，

$$s(t)=\int_0^T 1\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-(t-T)}-e^{-t}$$

$$s(t)=(1-e^{-t})[u(t)-u(t-T)]+[e^{-(t-T)}-e^{-t}]u(t-T)=(1-e^{-t})u(t)-[1-e^{-(t-T)}]u(t-T)$$

$$s(t) = (1-e^{-t})[u(t)-u(t-T)] + [e^{-(t-T)} - e^{-t}]u(t-T)$$

$$= (1-e^{-t})u(t) - [1-e^{-(t-T)}]u(t-T)$$



例2-13： 已知 $f_1(t)=u(t)-u(t-T)$，$f_2(t)=e^{-t}u(t)$，求 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$。

解法二：利用u(t)定积分限

$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}[u(\tau)-u(\tau-T)]e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

由$u(\tau),u(t-T)$和$u(t-\tau)$的交集部分确定积分限，已知$0\le\tau$，$\tau\le T$，$\tau\le t$。

若$0\le t<T$，$s(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau=e^{-t}(e^t-1)=1-e^{-t}$

若$t\ge T$，$s(t)=\int_0^T e^{-(t-\tau)}d\tau=e^{-t}\int_0^T e^{\tau}d\tau=e^{-t}(e^T-1)=e^{-(t-T)}-e^{-t}$

$$s(t)=(1-e^{-t})[u(t)-u(t-T)]+[e^{-(t-T)}-e^{-t}]u(t-T)$$

$$=(1-e^{-t})u(t)-[1-e^{-(t-T)}]u(t-T)$$

例2-14： 已知微分方程为

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=\frac{de(t)}{dt}+3e(t)$$

已知激励$e(t)=e^{-t}u(t)$，利用例2-9中求出的冲激响应 $h(t)=(2e^{-t}\text{-}e^{-2t})u(t)$

求零状态响应，并与例2-8中的结果进行比较。

解： 系统的零状态响应为：

$$r_{zs}(t)=e(t)*h(t)$$

$$=2\int_0^t e^{-\tau}e^{-(t-\tau)}d\tau-\int_0^t e^{-\tau}e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

$$=2e^{-t}\int_0^t d\tau-e^{-2t}\int_0^t e^{\tau}d\tau$$

$$=2te^{-t}-e^{-2t}(e^{t}-1)$$

$$=(2t-1)e^{-t}+e^{-2t}\quad(t>0)$$

结果与例2-8相同。

某LTI系统，当激励为$f(t)$时，系统的冲激响应为$h(t)$，零状态响应为$y_{zs}(t)$，零输入响应为$y_{zi}(t)$。若初始状态不变，输入激励变为$2f(t)$，系统的全响应为：

A $y_{zi}(t) + 2y_{zs}(t)$

B $y_{zi}(t) + 2f(t) * h(t)$

C $y_{zs}(t) + 2y_{zi}(t)$

D $y_{zs}(t) + 2f(t) * h(t)$

提交

例2-15： 某LTI系统，当激励为$f(t)$时，系统的冲激响应为$h(t)$，零状态响应为$y_{zs}(t)$，零输入响应为$y_{zi}(t)$。若初始状态不变，输入激励变为$2f(t)$，求系统的全响应。

解：

零输入响应只与系统的初始状态有关，系统初始状态不变，则第二次的零输入响应还是$y_{zi}(t)$。

系统零状态响应可由输入信号与冲激响应卷积得到，即$2f(t)*h(t)$，同时由线性系统的性质也可将其表示为$2y_{zs}(t)$。

故对应第二次输入的全响应可表示为：

$$y_{zi}(t)+2y_{zs}(t) \text{ 或 } y_{zi}(t)+2f(t)*h(t)$$

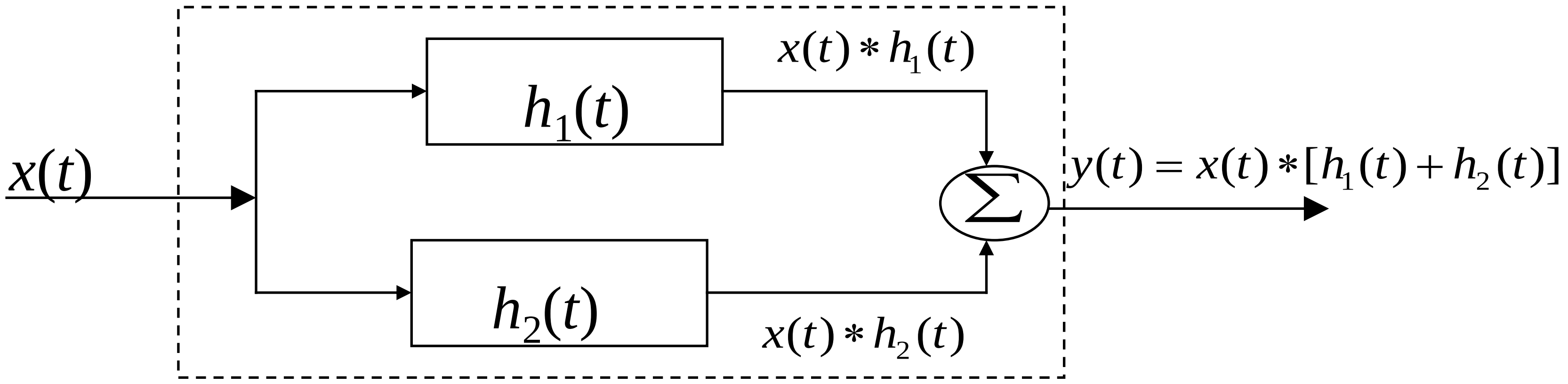
第二章 连续时间系统的时域分析

2.8.1 卷积积分的代数性质

（1）交换律 $$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

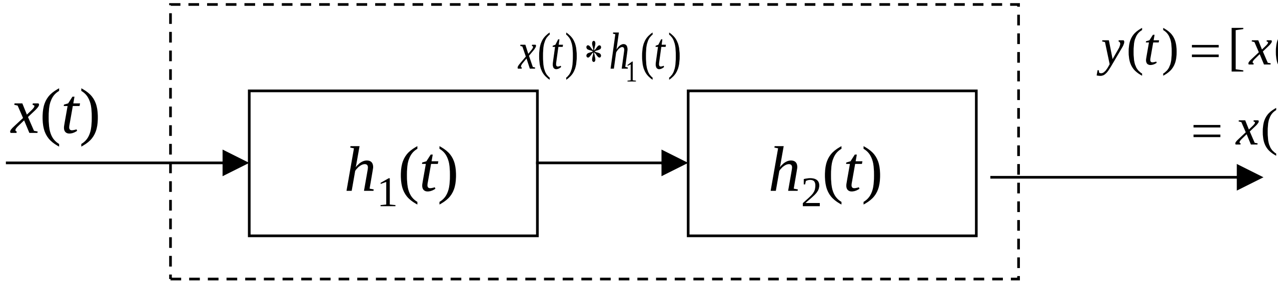
（2）分配律 $$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

分配律用于系统分析，相当于并联系统的冲激响应等于组成并联系统的各子系统冲激响应之和。



（3）结合律 $[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$

结合律用于系统分析，相当于串联系统的冲激响应等于组成串联系统的各子系统冲激响应的卷积。



$$y(t)=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$$
$$=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

2.8.2 卷积积分的微分与积分

$$\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)]=f_1(t)*\frac{df_2(t)}{dt}=\frac{df_1(t)}{dt}*f_2(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\lambda)*f_2(\lambda)]d\lambda=f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)d\lambda=\int_{-\infty}^{t}f_1(\lambda)d\lambda*f_2(t)$$

$$f_1(t)*f_2(t)=\frac{df_1(t)}{dt}*\int_{-\infty}^{t}f_2(\lambda)d\lambda \qquad f_1(t)*f_2(t)=f_1^{(1)}(t)*f_2^{(-1)}(t)$$

$f_1(t), f_2(t)$应满足时间受限条件，即$t\to-\infty$时函数值应为0。试做习题2-19(b)。

2.8 卷积的性质

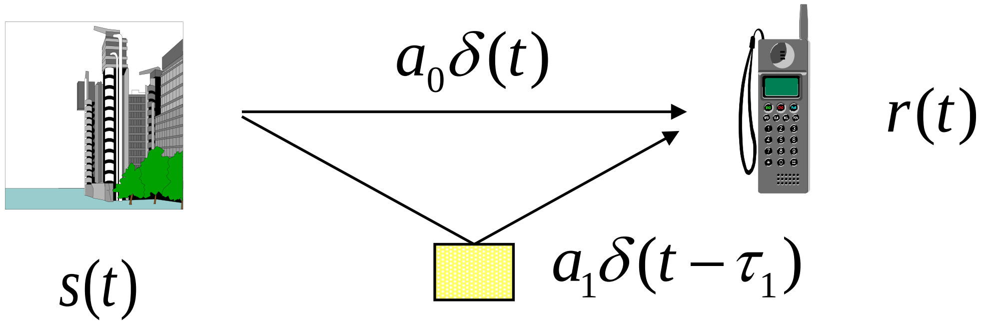
2.8.3 $f(t)$与冲激函数的卷积

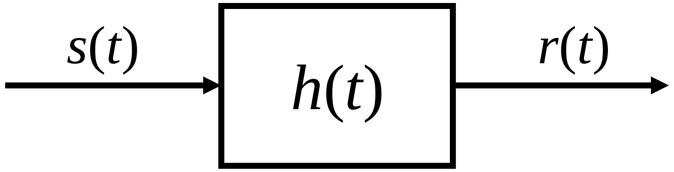
由冲激函数的筛选性质，得 $\boxed{f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)}$

$$\boxed{f(t)*\delta(t-t_0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau-t_0)d\tau = f(t-t_0)}$$

推广： $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$ $\qquad f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\lambda)d\lambda$

例：假设一个无线信道包括两条路径。





$$h(t)=a_0\delta(t)+a_1\delta(t-\tau_1)$$

利用分配律和冲激函数的卷积性质，

$$r(t)=s(t)*h(t)=s(t)*\left[a_0\delta(t)+a_1\delta(t-\tau_1)\right]=a_0 s(t)+a_1 s(t-\tau_1)$$

请自学教材2.9节的多径失真消除方法。

例2-16（习题2-10）： 已知一个**LTI**系统的微分方程如下，

$$\frac{dr(t)}{dt}+5r(t)=\int_{-\infty}^{-\infty}e(\tau)f(t-\tau)d\tau-e(t)$$

其中 $f(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$，求冲激响应$h(t)$。

解： 利用卷积的定义，微分方程等效于 $\frac{dr(t)}{dt}+5r(t)=e(t)*f(t)-e(t)$

将冲激函数作为激励代入方程右边，得到 $\frac{dh(t)}{dt}+5h(t)=e^{-t}u(t)+2\delta(t)$

特解 $Be^{-t}\ (t>0)$，$\boxed{4B=1\Rightarrow B=1/4}$ （冲激响应中包含特解是由于$e^{-t}u(t)$的作用）

利用冲激函数匹配法，$\frac{dh(t)}{dt}=2\delta(t)$ $h(t)=2\Delta u(t)$ $\longrightarrow$ $h(0_+)=h(0_-)+2=2$

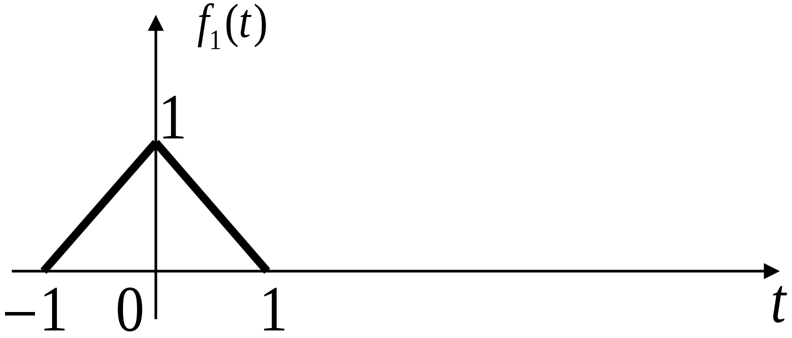
冲激响应：$h(t)=A_1e^{-5t}u(t)+\frac{1}{4}e^{-t}u(t)$ $\boxed{h(0_+)=A_1+\frac{1}{4}=2}$ $A_1=\frac{7}{4}$

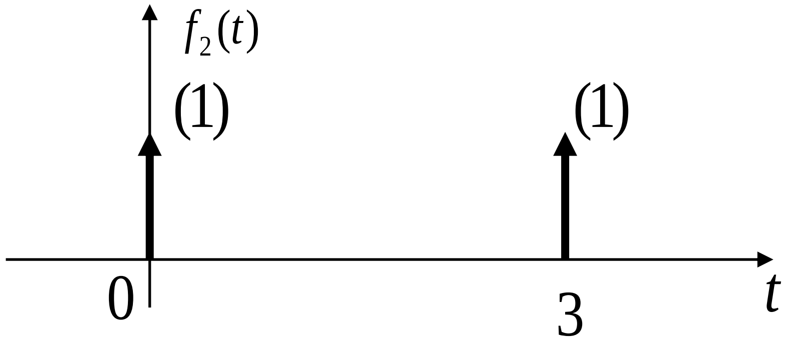
冲激响应：$h(t)=\left(\frac{7}{4}e^{-5t}+\frac{1}{4}e^{-t}\right)u(t)$

2.8.4 卷积积分的时移性质

若 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$, 则 $\boxed{f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)=f_1(t-t_2)*f_2(t-t_1)=f(t-t_1-t_2)}$

例2-17：已知 $f_1(t)$、$f_2(t)$如图所示，求$s(t)=f_1(t)*f_2(t)$，并画出 $s(t)$ 的波形。



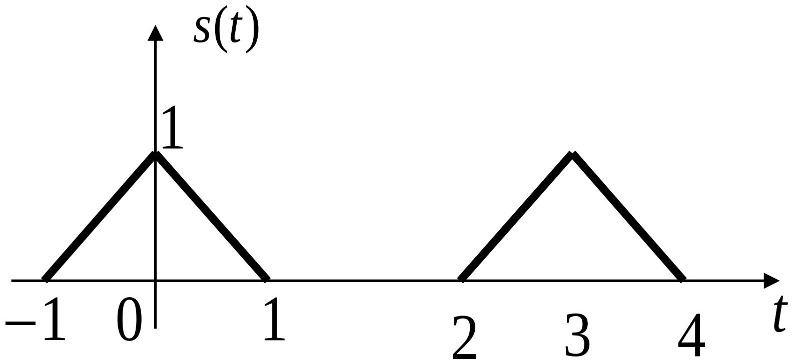


解：$f_2(t) = [\delta(t)+\delta(t-3)]$，则

$$s(t) = f_1(t)*[\delta(t)+\delta(t-3)]$$

$$= f_1(t)*\delta(t)+ f_1(t) *\delta(t-3)$$

$$= f_1(t)+ f_1(t-3)$$



已知$f(t) = u(t-1) + u(t-3)$，$x(t) = \delta(t-3)$, 则$f(t) * x(t) = ?$

A $\delta(t-4) + \delta(t-6)$

B $u(t-1) + u(t-3)$

C $u(t-4) + u(t-6)$

D $\delta(t-1) + \delta(t-3)$

提交

2.8.5 卷积积分的时间范围

例2-18：已知 $f_1(t)$ 在 $t_1 \le t \le t_2$内有非零值， $f_2(t)$ 在 $t_3 \le t \le t_4$内有非零值，$f(t)=f_1(t)*f_2(t)$，求$f(t)$取非零值的时间范围。

解：

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

由$f_1(\tau)$和$f_2(t-\tau)$的时间交集部分确定积分限

$$t_1 \le \tau \le t_2,$$

$$t_3 \le t-\tau \le t_4 \to t-t_4 \le \tau \le t-t_3$$

若$t-t_4 > t_2$即$t > t_2+t_4$，或$t-t_3 < t_1$即$t < t_1+t_3$，则$f_1(\tau)$和$f_2(t-\tau)$的时间区间无交集，积分为0。

反之，$f(t)$有非零值的时间范围是$t_1+t_3 \le t \le t_2+t_4$ ，区间的长度为$(t_2-t_1)+(t_4-t_3)$，即$f_1(t)$和$f_2(t)$取非零值的时间区间长度之和。

常用卷积公式：教材附录一

(1) $K*f(t)=K\cdot\left[f(t)\text{的净面积}\right]$

(2) $f(t)*\delta(t)=f(t)$

(3) $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$

(4) $f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$

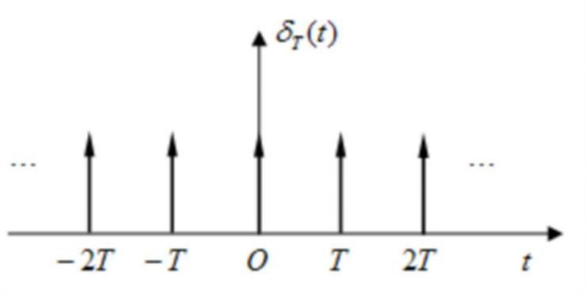
(5) $u(t)*u(t)=tu(t)$

(6) $u(t)*e^{at}u(t)=-\frac{1}{a}\left[1-e^{at}\right]u(t)$

(7) $e^{at}u(t)*e^{at}u(t)=te^{at}u(t)$

(8) $e^{a_1t}u(t)*e^{a_2t}u(t)=\frac{1}{a_1-a_2}\left[e^{a_1t}-e^{a_2t}\right]u(t)\quad a_1\neq a_2$

(9) $f(t)*\delta_T(t)=f(t)*\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(t-mT)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}f(t-mT)$



第二章 连续时间系统的时域分析

2.9.1 用算子符号表示微分方程

算子符号表示规定

若把微分方程中的微分与积分用下示符号表示:

$$p=\frac{d}{dt} \qquad \frac{1}{p}=\int_{-\infty}^{t}(\quad)d\tau$$

则有 $px=\frac{dx}{dt} \qquad p^n x=\frac{d^n x}{dt^n} \qquad \frac{1}{p}x=\int_{-\infty}^{t}(x)d\tau$

用算子符号表示微分方程

运用上述算子符号表示规定，下述微分方程

$$C_0\frac{d^n r(t)}{dt^n}+C_1\frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+C_{n-1}\frac{d r(t)}{dt}+C_n r(t)=E_0\frac{d^m e(t)}{dt^m}+E_1\frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+E_{m-1}\frac{d e(t)}{dt}+E_m e(t)$$

可表示为:

$$C_0 p^n r(t)+C_1 p^{n-1} r(t)+\cdots+C_{n-1} p r(t)+C_n r(t)=E_0 p^m e(t)+E_1 p^{m-1} e(t)+\cdots+E_{m-1} p e(t)+E_m e(t)$$

2.9 用算子符号表示微分方程

$$C_0 p^n r(t) + C_1 p^{n-1} r(t) + \cdots + C_{n-1} p r(t) + C_n r(t) = E_0 p^m e(t) + E_1 p^{m-1} e(t) + \cdots + E_{m-1} p e(t) + E_m e(t)$$

可简化为：$$\underbrace{(C_0 p^n + C_1 p^{n-1} + \cdots + C_{n-1} p + C_n)}_{D(p)} r(t) = \underbrace{(E_0 p^m + E_1 p^{m-1} + \cdots + E_{m-1} p + E_m)}_{N(p)} e(t)$$

进一步简化为：$$D(p)[r(t)] = N(p)[e(t)]$$

注意：这种表示不是代数方程，而是微分方程。

2.9.2 算子符号的基本规则

算子符号表示的算子多项式仅仅是一种运算符号，代数方程中的运算规则有的适用于算子多项式，有的不适用。

1. 算子多项式可以进行类似于代数运算的因式分解或因式相乘展开。

例如：

$$(p+3)(p+2)x=(\frac{d}{dt}+3)(\frac{d}{dt}x+2x)=\frac{d}{dt}[\frac{d}{dt}x+2x]+3[\frac{d}{dt}x+2x]$$

$$=\frac{d^2}{dt^2}x+5\frac{d}{dt}x+6x=(p^2+5p+6)x$$

因此有： $(p+3)(p+2)=p^2+5p+6$

2. 算子多项式**等式两端的公共因式不能随意相消。**

例如：$\frac{d}{dt}x = \frac{d}{dt}y$ 的算子方程表示为 $px = py$ ，而对微分方程两边的积分后有 $x = y + C$ 。

3. 算子多项式中的**算子乘除顺序不可随意颠倒。**

即：　$\boxed{p\frac{1}{p}x \neq \frac{1}{p}px}$

理由是：　$p\frac{1}{p}x = \frac{d}{dt}\cdot\int_{-\infty}^{t} x d\tau = x$

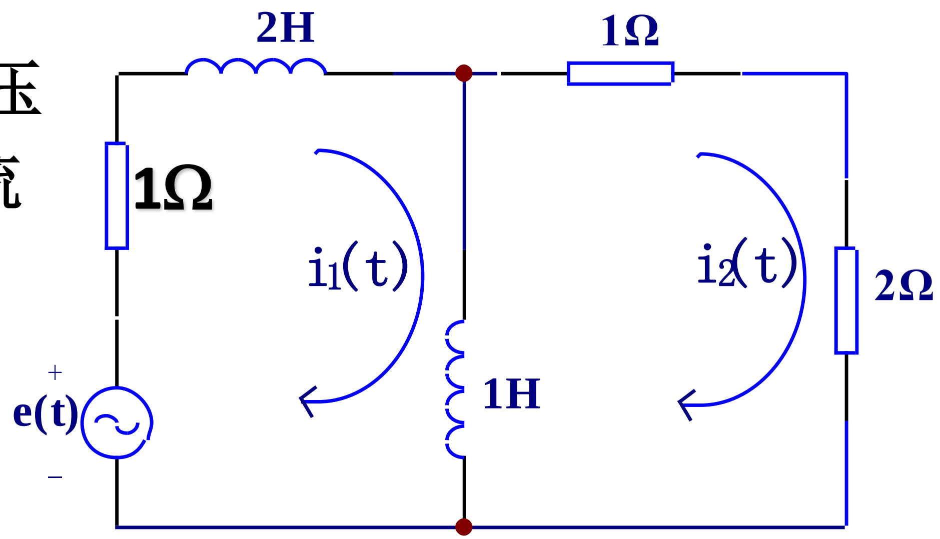
而　$\frac{1}{p}px = \int_{-\infty}^{t}(\frac{d}{dt}x)\cdot d\tau = x(t) - x(-\infty) \neq x$

这表明**“先乘后除”的算子运算（先微分后积分）不能相消**，而“先除后乘”（先积分后微分）可以相消。

2.9.3 用算子符号建立微分方程

运用算子符号表示微分方程，不仅使书写简便，而且在建立系统数学模型时便于由联立方程消元构成一元高阶微分方程。

例2-19： 如图所示电路，激励电压为$e(t)$，请用算子符号列写求电流$i_2(t)$的微分方程。



解： 列出2个网孔的回路方程

$$\begin{cases} 3\dfrac{di_1(t)}{dt}+i_1(t)-\dfrac{di_2(t)}{dt}=e(t) \\ -\dfrac{di_1(t)}{dt}+\dfrac{di_2(t)}{dt}+3i_2(t)=0 \end{cases}$$

写成算子形式

$$\begin{cases} (3p+1)i_1(t)-pi_2(t)=e(t) \\ -pi_1(t)+(p+3)i_2(t)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3p+1 & -p \\ -p & p+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(t) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3p+1 & -p \\ -p & p+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow i_2(t) = \frac{p}{(2p^2+10p+3)} e(t) \Rightarrow (2p^2+10p+3) i_2(t) = pe(t)$$

即：$2\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 10\frac{di_2(t)}{dt} + 3i_2(t) = \frac{d}{dt}e(t)$

注意：

1）多项式两端的***p***不能随意消去；

2）求解时，应先将微积分方程组化成微分方程组。

2.9.4　传输算子概念

对于线性时不变系统，一般讲，激励信号$e(t)$与响应$r(t)$之间的关系可用算子形式写成如下的微分方程：

$$D(p)r(t)=N(p)e(t) \quad \text{或} \quad r(t)=\frac{N(p)}{D(p)}e(t)$$

则 $H(p)=\dfrac{N(p)}{D(p)}$ 就定义为传输算子。

当求系统的零输入响应时，就是解齐次方程 $D(p)r(t)=0$

当求系统的零状态响应时，则要解 $r(t)=H(p)e(t)$ 的非齐次方程。

由上述可以看出：在时域分析中，算子符号形式提供了简单易行的辅助分析手段，但本质上与经典法分析系统相同，而形式上又与第四章的拉普拉斯变换分析相似。

第二章 连续时间系统的时域分析

$\delta(t)$的性质：

(1) 相加：$a\delta(t)+b\delta(t)=(a+b)\delta(t)$

(2) 相乘：$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ （筛选特性）

(3) 反褶：$\delta(t)=\delta(-t)$ 偶函数

(4) 时间尺度变换：$\delta(at)=1/|a|\cdot\delta(t)$ （习题1-24）

(5) 时间位移运算：$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$ （筛选特性）

(6) 积分是阶跃函数：$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$

(7) 微分是冲激偶：$\frac{d}{dt}\delta(t)=\delta'(t)$

(8) 卷积运算：任意两个冲激信号相乘没有意义，但卷积存在

$$\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-t_1)\delta(t-\tau-t_2)d\tau=\delta(t-t_1-t_2)$$

(9) $\delta(t)$的复合函数 $\delta\left[f(t)\right]$ 的性质：$\delta\left[f(t)\right]$ 可以化简为一系列冲激的叠加。

$f(t)$ 是普通函数，若 $f(t)=0$有n个互不相等的实根$t_1, t_2 \ldots\ t_n$，则有

$$\delta[f(t)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i)$$

冲激函数是“分配函数”

证明：若在$t = t_1$时刻$f(t) = 0$，则在t_1足够小的区域内，$f(t)$可展开为泰勒级数

$$f(t)=f(t_1)+f'(t_1)(t-t_1)+f''(t_1)(t-t_1)^2+\cdots\approx f'(t_1)(t-t_1)$$

由尺度变换性质，

$$\delta[f(t)]=\delta(t-t_1)/\left|f'(t_1)\right|$$

例2-20：化简 $\delta\left(t^2-1\right)$。

解：$f(t)=t^2-1$，有两个根，$t_1=1$ ，$t_2=-1$

$$|f'(t_1)|=|2t|_{t_1=1}=2 \qquad |f'(t_2)|=|2t|_{t_2=-1}=2$$

$$\delta(t^2-1)=\frac{1}{2}[\delta(t-1)+\delta(t+1)]$$

2.10 以“分配函数”的概念认识冲激函数

冲激偶的性质

（1）奇函数 $\delta'(-t) = -\delta'(t)$

（2）相乘 $f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$

（3）时间尺度变换

$$\delta'(at) = \frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a}\delta'(t) \qquad \delta^{(k)}(at) = \frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a^k}\delta^{(k)}(t)$$

（4）卷积运算

$$f(t) * \delta'(t) = f'(t)$$

作业

基础题（需提交）：2-13(1)(2)(4)，2-15，2-18，2-19(a)(c)，2-21

加强题（选做，不用交）：2-13(3)(5)，2-17，2-19(f)，2-23

习题错误订正：

2-18：输入信号为$e(t)=2e^{-3t}u(t)$, 且响应r(t)为零状态响应。其他内容不变。

2-21：补充条件“假设初始状态为零”。