上节内容

7.4 常系数线性差分方程的求解

7.5 离散时间系统的单位样值响应

7.4 常系数线性差分方程的求解

线性时不变离散系统由常系数线性差分方程来描述：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

方程式的阶数等于未知序列变量序号的最高值与最低值之差。

求解方法：

- 迭代法
- 时域经典法：求齐次解和特解
- 卷积法：利用齐次解得零输入响应，再利用卷积和求零状态响应。
- 变换域法（z变换法，第八章）
- 状态变量分析法（第十二章）

时域经典法

1、求齐次解(系统固有的响应)

差分方程的齐次方程： $$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

特征根	差分方程齐次解	微分方程齐次解
不等实根$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$	$\sum_{k=1}^{N} C_k \alpha_k^n$	$\sum_{k=1}^{N} A_k e^{\alpha_k t}$
k重根α_1	$\sum_{i=1}^{k} C_i n^{k-i} \alpha_1^n$	$\sum_{i=1}^{k} A_i t^{k-i} e^{\alpha_1 t}$
共轭复根$\alpha \pm j\beta$	$\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^n [P\cos(n\omega_0) + Q\sin(n\omega_0)]$	$e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t)$

2、求特解：由激励信号的形式决定

自由项（方程右端）	特解形式
α^n	$D\alpha^n$（α不是特征根） $Dn^r\alpha^n$（α是r重特征根）
n^k	$D_0n^k+\cdots+D_{k-1}n+D_k$（1不是特征根） $n^r[D_0n^k+\cdots+D_{k-1}n+D_k]$（1是$r$重特征根）
$\alpha^n n^k$	$[D_0n^k+\cdots+D_{k-1}n+D_k]\alpha^n$（$\alpha$不是特征根） $n^r[D_0n^k+\cdots+D_{k-1}n+D_k]\alpha^n$（$\alpha$是$r$重特征根）
$\cos(n\omega)$或$\sin(n\omega)$	$D_1\cos(n\omega)+D_2\sin(n\omega)$（$e^{\pm j\omega}$不是特征根）
$\alpha^n\cos(n\omega)$或 $\alpha^n\sin(n\omega)$	$\alpha^n[D_1\cos(n\omega)+D_2\sin(n\omega)]$（$\alpha e^{\pm j\omega}$不是特征根）

- 通过观察方程右端**自由项**的函数形式，**试选特解函数式**。
- 将特解代入方程，利用待定系数法来确定D_i。

3、由边界条件确定齐次解待定系数

完全解的一般形式（无重根的情况）：

$$y(n)=C_1\alpha_1^{\ n}+C_2\alpha_2^{\ n}+\cdots+C_N\alpha_N^{\ n}+D(n)=\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n+D(n)$$

C_i须利用**N个给定的边界条件**来确定。例如，

$$\begin{cases} y(0)=C_1+C_2+\cdots+C_N+D(0) \\ y(1)=C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\cdots+C_N\alpha_N+D(1) \\ \cdots\cdots \\ y(N-1)=C_1\alpha_1^{\ N-1}+C_2\alpha_2^{\ N-1}+\cdots+C_N\alpha_N^{\ N-1}+D(N-1) \end{cases}$$

7.4 常系数线性差分方程的求解

完全响应=齐次解　＋特解

完全响应=自由响应＋强迫响应

完全响应=零输入响应+零状态响应

$$y(n)=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_k\alpha_k^n}_{\text{自由响应}}+\underbrace{D(n)}_{\text{强迫响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{N}C_{zik}\alpha_k^n}_{\text{零输入响应}}+\sum_{k=1}^{N}\underbrace{C_{zsk}\alpha_k^n+D(n)}_{\text{零状态响应}}$$

零输入响应和零状态响应

系统全响应=零输入响应+零状态响应

1、零输入响应

➢定义：输入信号为零，仅由系统的起始状态单独作用而产生的响应，用$y_{zi}(n)$表示。

➢数学模型:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=0$$

➢求解方法：根据差分方程的特征根确定零输入响应的形式，再由边界条件求齐次解待定系数。

3、零状态响应

直接求解起始状态为零的差分方程，也可得零状态响应。

$$y_{zs}(n)=\sum_{k=1}^{N}C_{zsk}\alpha_k^n+D(n)$$

对于因果系统（激励信号在$n=0$时接入系统），常给出$y(-1), y(-2), \ldots, y(-N)$作为边界条件。

零状态是指$y(-1),y(-2),y(-3),\ldots,y(-N)$都等于零。

$y(0),y(1),y(2),\ldots,y(N-1)$可用迭代法求出。

对于N阶差分方程，激励在n=0时加入，确定零输入响应或零状态响应的齐次解的系数，需利用边界条件-- N个$y(n)$值。

确定零输入响应的齐次解的系数：起始条件$y(n)$中的n可正可负，且未必连续（例如，教材例7-8中给出了$y(1), y(2), y(3), y(5)$）。$y(-1), y(-2),\ldots y(-N)$或$y(0), y(1),\ldots y(N-1)$作为边界条件均可。$n\geq 0$时的$y(n)$可利用$n<0$时的$y(n)$迭代得到，迭代时须令差分方程右边等于零。

确定零状态响应的齐次解的系数：令$y(-1)=y(-2)=\ldots=y(-N+1)=0$，迭代求$y(0), y(1), \ldots$。假设激励在$n = n_0$时加入，边界条件中需包含至少一个$n\geq n_0$的$y(n)$，且$n < n_0$时的$n$需连续（确保可以迭代得到$n\geq n_0$的$y(n)$）。例如，$n_0 = 0$时，$y(0), y(-1), y(-N+1)$作为边界条件。

7.5 离散时间系统的单位样值响应

单位样值响应：是激励为$\delta(n)$时产生的系统**零状态响应**，用$\boldsymbol{h(n)}$表示。

将单位样值激励信号转化为边界条件

将$\delta(n)$转化为边界条件，于是求单位样值响应转化为求**齐次解**，即**$n>0$时的零输入响应**。

例：

$$y(n)-0.5y(n-1)=x(n)$$

$$\alpha-0.5=0 \qquad \alpha=0.5$$

齐次解为 $h(n)=C(0.5)^n u(n)$

$$h(-1)=0 \qquad h(0)=0.5h(-1)+\delta(0)=1$$

$$h(0)=C(0.5)^0=1 \qquad C=1$$

$$\therefore h(n)=(0.5)^n u(n)$$

利用线性时不变性求单位样值响应

在 $n \neq 0$ 时，接入激励 $\delta(n-1)$，用线性时不变性来计算**h(n)**。

$$y(n)-0.5y(n-1)=\delta(n-1)$$

$$x(n)=\delta(n) \qquad h(n)=(0.5)^n u(n)$$

$$x(n)=\delta(n-1) \qquad r(n)=h(n-1)=(0.5)^{n-1}$$

7.5 离散时间系统的单位样值响应

根据单位样值响应分析系统的因果性和稳定性

因果系统：输出变化不领先于输入变化的系统。即响应只取决于此时及以前的激励。

离散时间线性时不变系统是因果系统的充分必要条件：

$$n < 0 \quad h(n) = 0 \quad \text{或} h(n) = h(n)u(n)$$

稳定系统：输入有界则输出必定有界。

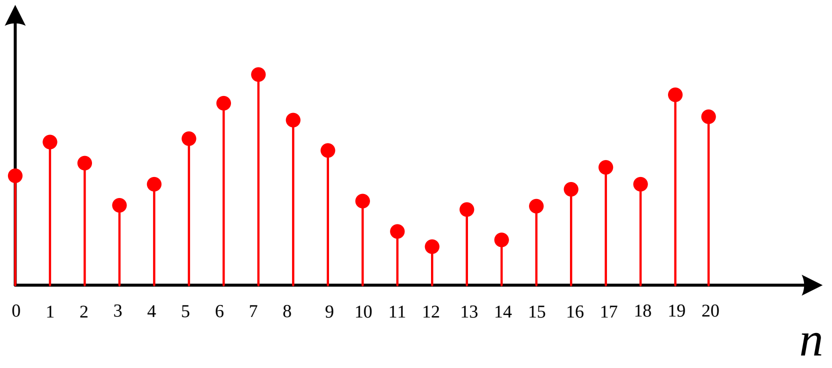
离散实际线性时不变系统是稳定系统的充分必要条件：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leq M, M\text{为有界正值}$$

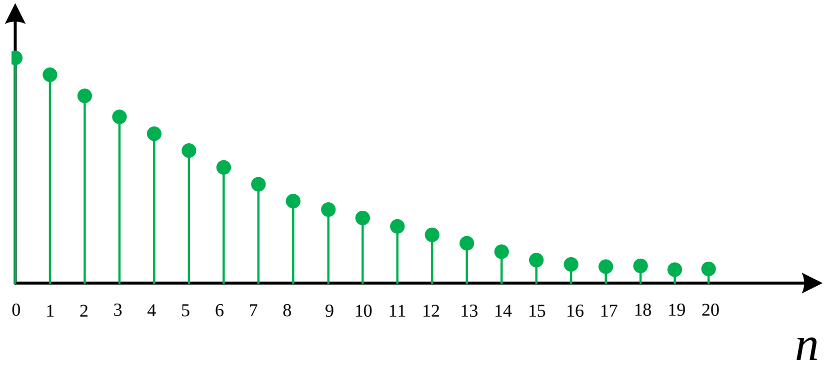
7.6.1 卷积和的定义和物理意义

任意信号$x_1(n)$和$x_2(n)$的卷积和$x(n)=x_1(n)*x_2(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(n-m)$

输入信号$f(n)$



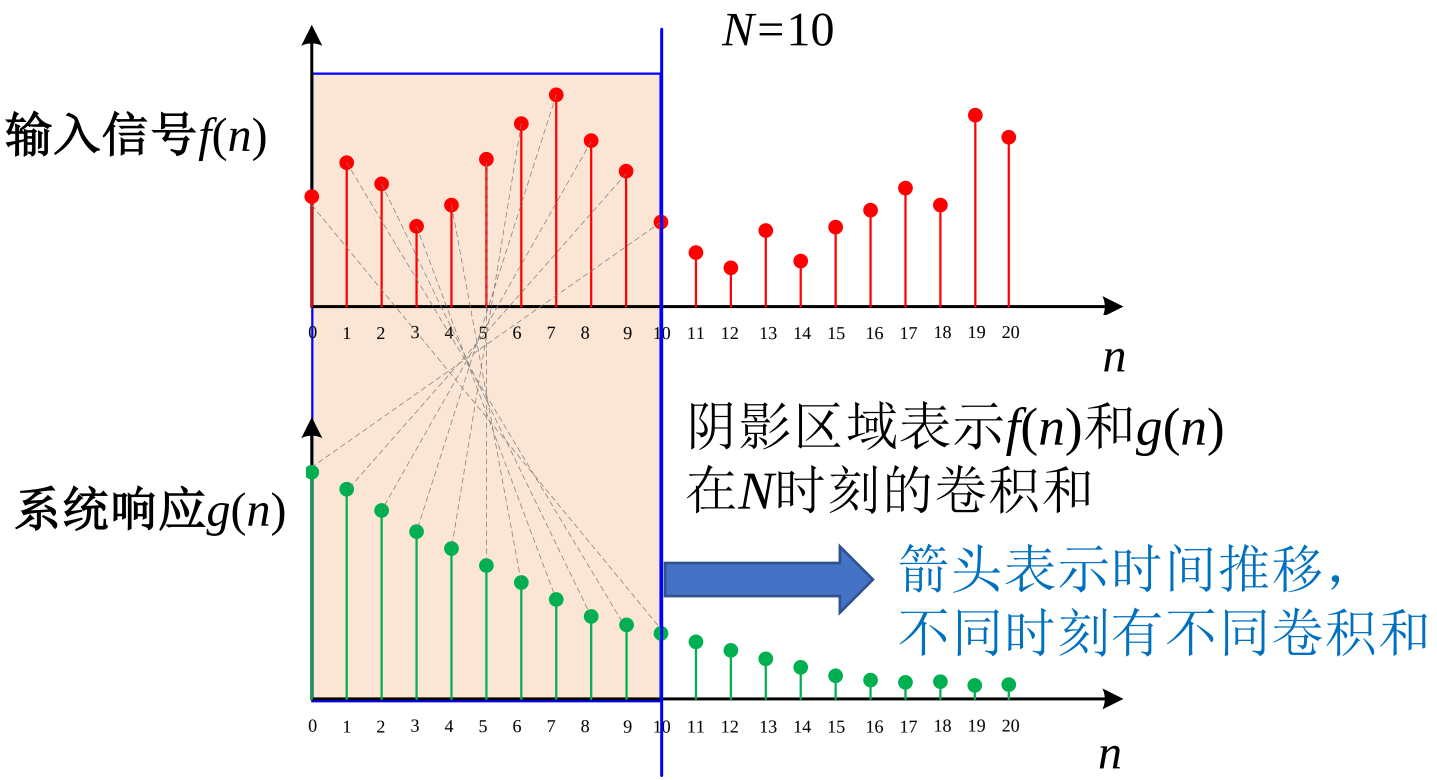
系统响应$g(n)$



$f(n)$—输入信号。

$g(n)$—表示在某个时刻输入的信号值的衰减趋势。

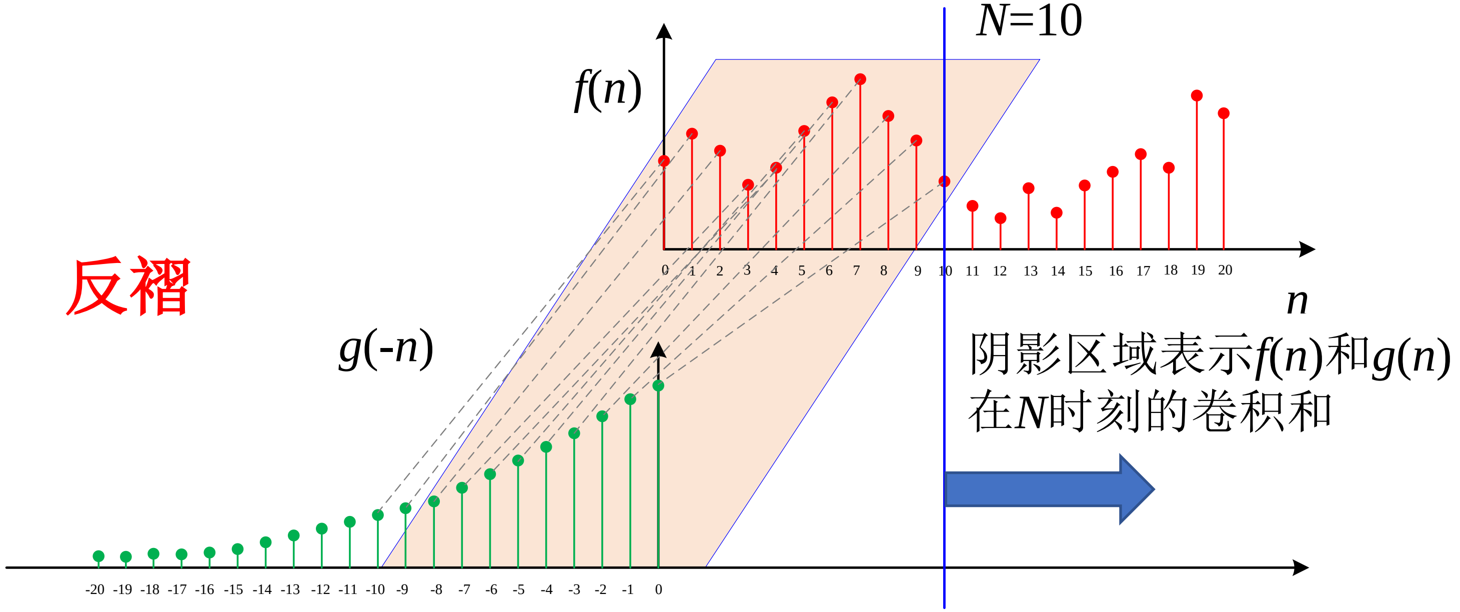
在N时刻，0时刻的输入$f(0)$的值衰减为$f(0)g(N)$。



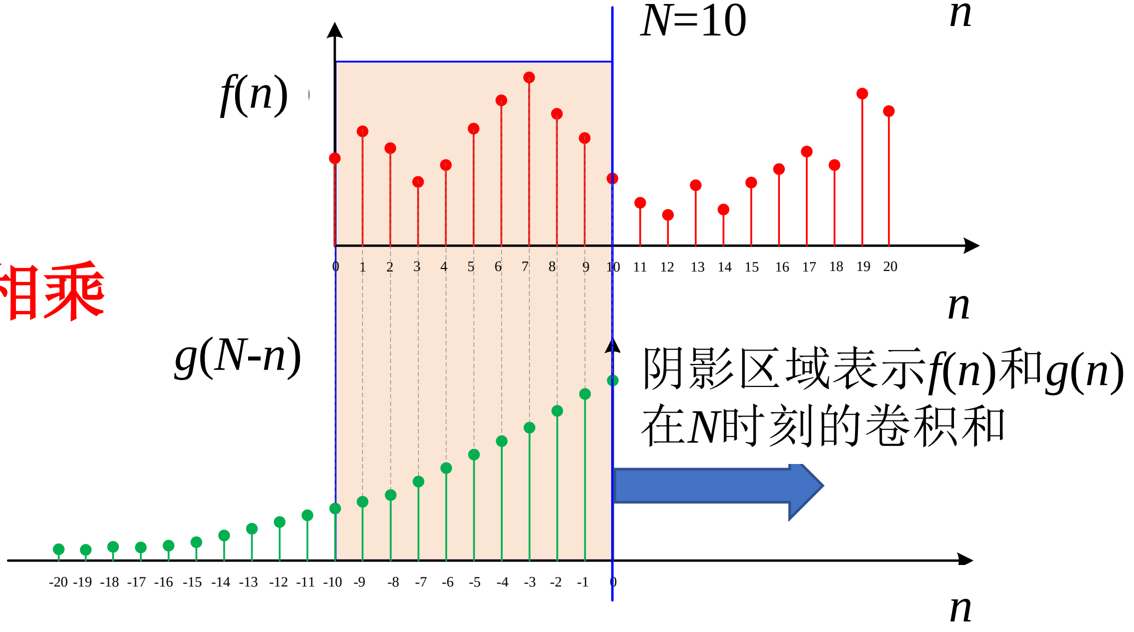
最终输出的是所有之前输入信号的累积效应。在$N=10$时刻，输出结果跟图中阴影区域整体有关。因为$f(10)$ 是刚输入的，所以其输出结果应为$f(10)g(0)$；输入$f(9)$只经过了1个时间单位的衰减，产生的输出为 $f(9)g(1)$。以此类推，即图中虚线所描述的关系。这些对应点相乘然后累加， $f(10)g(0)+ f(9)g(1)+\ldots f(0)g(10)$，就是$N=10$时刻的输出信号值，即为$f(n)$和$g(n)$两个函数在$N=10$时刻的卷积和。

7.6 卷积和

反褶



平移→对位相乘
→相加



卷积和

“卷”--指函数的翻转，从 g(n) 变成 g(-n) 的过程；也包含滑动的意味（N变化使窗口平移）。

“积和” —指相乘求和。

7.6.2 用卷积和求零状态响应

将激励信号分解为单位样值序列的线性组合，利用线性时不变系统的特性，求每个样值序列单独作用在系统上的响应，把这些响应叠加即为系统在任意激励信号下的零状态响应。

任意激励信号表示为单位样值加权和的形式

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

$\delta(n)\Rightarrow h(n)$ 由时不变特性：$\delta(n-m)\Rightarrow h(n-m)$

由线性： $$y(n)=T\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)\right\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)=x(n)*h(n)$$

离散时间系统的零状态响应等于激励信号与单位样值响应的卷积和。

7. 6. 3 卷积和运算的图解方法

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

卷积和图解法分为五个步骤：

（1）变量替换：将**x(n)**和**h(n)**中的自变量由 **n**改为**m**，**m**变成函数的自变量；

（2）反褶：把其中一个信号（一般选较简单的信号）反褶；

$$h(m)\xrightarrow{\text{翻转}}h(-m)$$

（3）平移：把反褶后的信号平移；

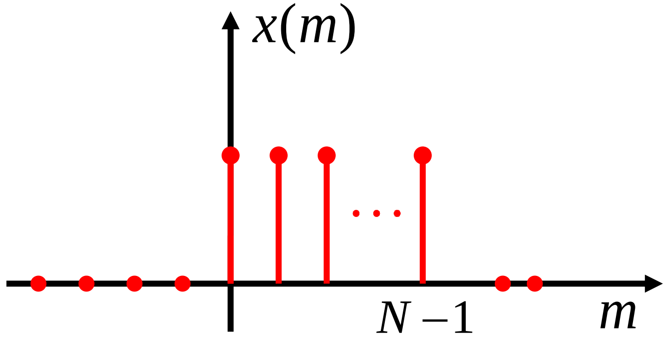
$$h(-m)\xrightarrow{\text{平移}n}h(-(m-n))=h(n-m)$$

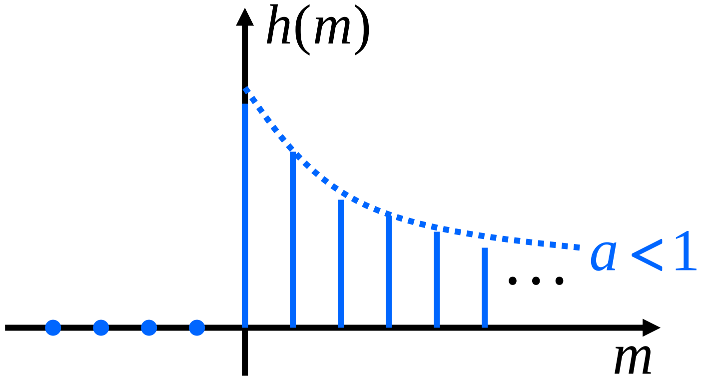
（4）相乘：将**x(m)** 与**h(n-m)**相乘；

（5）相加：对乘积后的图形求和。

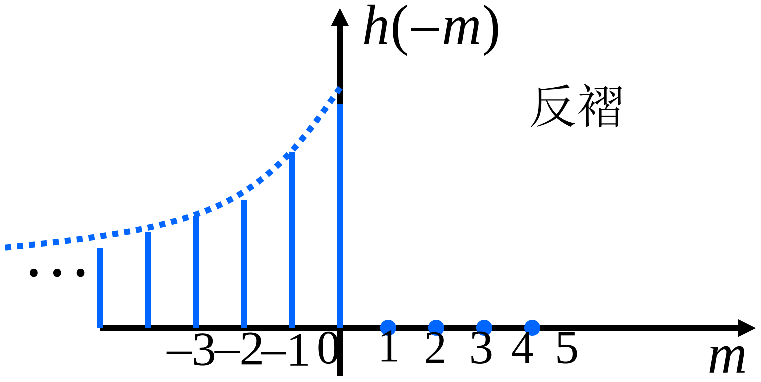
例7-17：已知某系统的单位样值响应为 $h(n)=a^n u(n)$ ，其中 $0<a<1$,
若激励信号为$x(n)=R_N(n)=u(n)-u(n-N)$，求零状态响应。

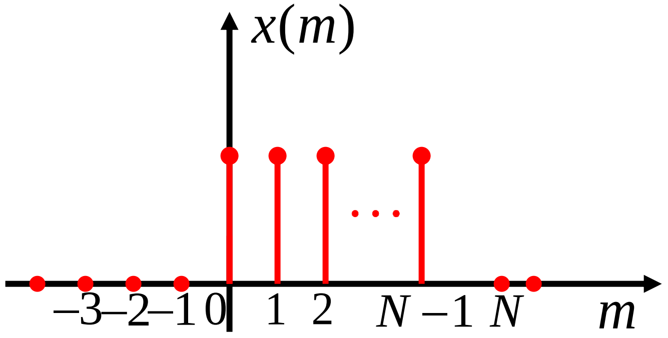
解：



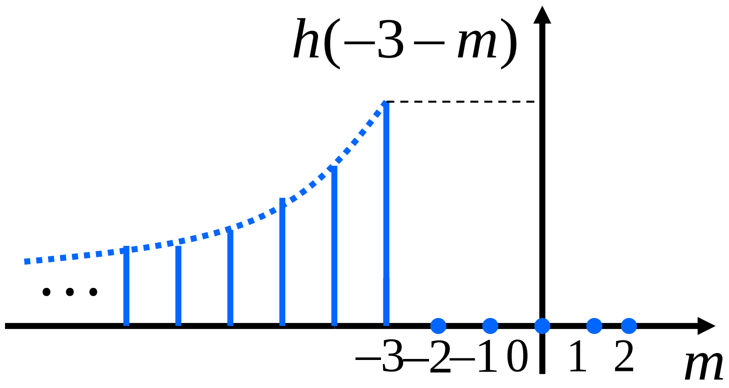


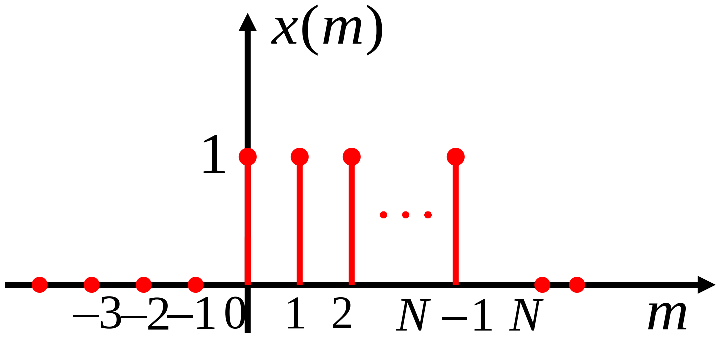
$$y_{zs}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}[u(m)-u(m-N)]a^{n-m}u(n-m)$$





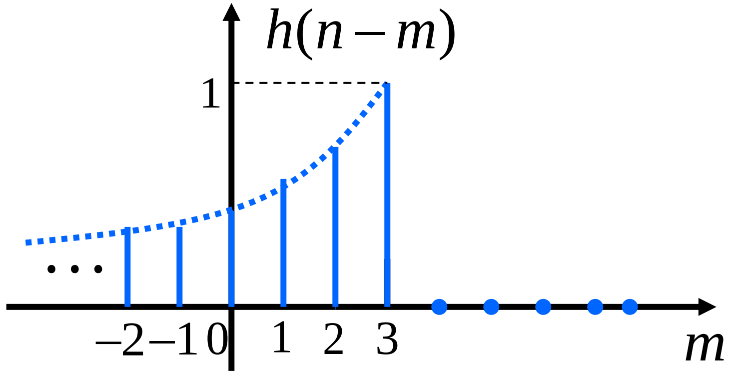
（1）当$n<0$时， $x(m)$与$h(n-m)$无交叠，即 $y_{zs}(n)=0\ (n<0)$

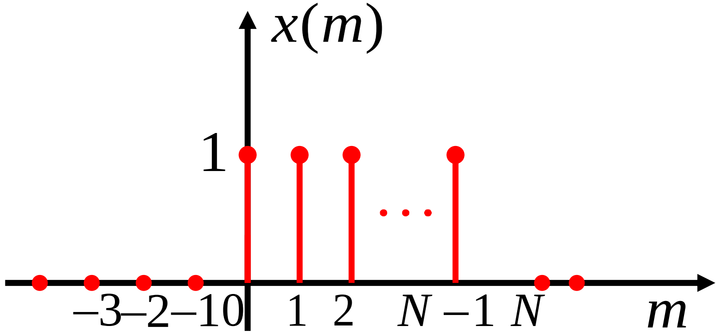




（2）当$0 \le n < N-1$时， $x(m)$与$h(n-m)$在0~n 有交叠

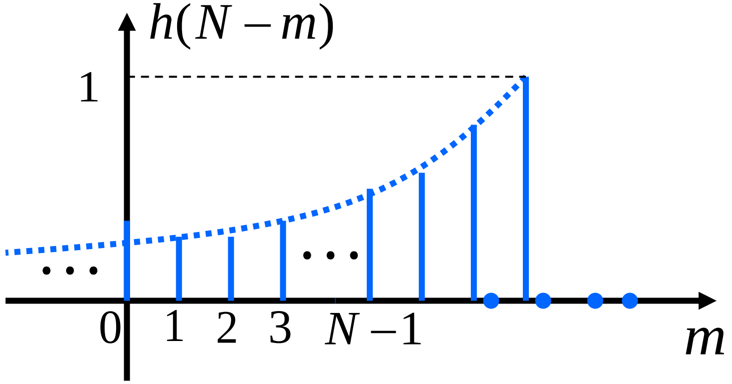
$$y_{zs}(n) = \sum_{m=0}^{n} a^{n-m} = a^n \sum_{m=0}^{n} a^{-m} = a^n \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}} \quad (0 \le n < N-1)$$

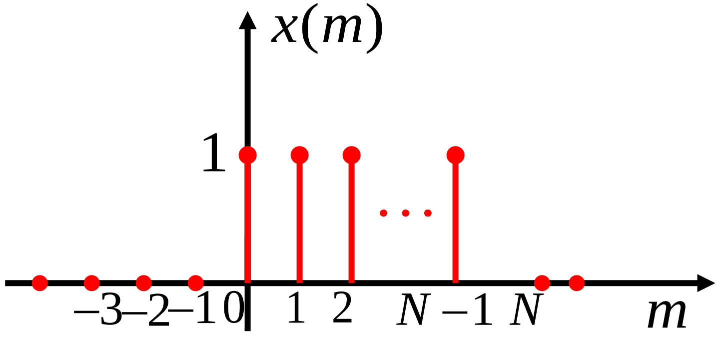




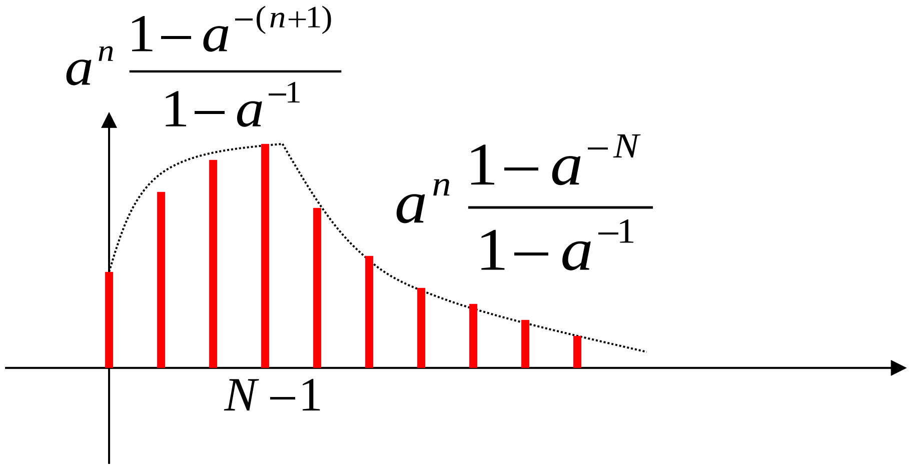
（3）当$n \ge N-1$时， $x(m)$与$h(n-m)$在0~$(N-1)$有交叠

$$y_{zs}(n)=\sum_{m=0}^{N-1} a^{n-m}=a^n\frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}\quad (n\ge N-1)$$





卷积和的结果

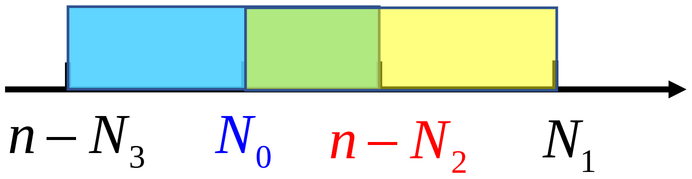


例7-18： 已知一线性时不变系统的单位样值响应$h(n)$只在 $N_0 \le n \le N_1$ 区间内有非零值。而输入$x(n)$只在 $N_2 \le n \le N_3$区间内有非零值。零状态响应$y(n)$只在 $N_4 \le n \le N_5$ 之内有非零值。试用 N_0, N_1, N_2, N_3 来表示N_4与N_5。

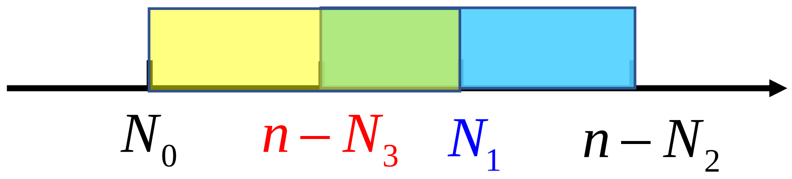
解法一： 令 $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$

当 $n - N_2 \ge N_0$， 即 $n \ge N_0 + N_2$时， $y(n)$有非零值，如图(a)所示。

当 $n - N_3 \le N_1$， 即 $n \le N_1 + N_3$ 时， $y(n)$也有非零值，如图(b)所示。



图(a)



图(b)

综上： $\boxed{N_4 = N_0 + N_2 \quad N_5 = N_1 + N_3}$

解法二： $$y(n)=h(n)*x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)$$

$$N_0\le m\le N_1$$

$$N_2\le n-m\le N_3$$

上面两式相加，

$$N_0+N_2\le n\le N_1+N_3$$

$$N_4=N_0+N_2\qquad N_5=N_1+N_3$$

已知一线性时不变系统的单位样值响应$h(n)$的序列长度为L_1，输入$x(n)$的序列长度为L_2。零状态响应$y(n)$的序列长度为L_3与L_1和L_2之间满足(   )关系。

A $L_3 = L_1 + L_2$

B $L_3 = L_1 + L_2 - 1$

C $L_3 = L_1 + L_2 + 1$

D $L_3 = L_1 + L_2 + 2$

提交

假设单位样值响应***h*(*n*)**只在 $N_0 \le n \le N_1$ 区间内有非零值，序列长度为 $L_1 = N_1 - N_0 + 1$。

输入***x*(*n*)**只在 $N_2 \le n \le N_3$ 区间内有非零值，序列长度为 $L_2 = N_3 - N_2 + 1$。

零状态响应***y*(*n*)**只在$N_0 + N_2 \le n \le N_1 + N_3$内有非零值，序列长度为

$$
\begin{aligned}
L_3 &= (N_1 + N_3) - (N_0 + N_2) + 1 \\
&= (N_1 - N_0) + (N_3 - N_2) + 1 \\
&= (N_1 - N_0 + 1) + (N_3 - N_2 + 1) - 1
\end{aligned}
$$

$$\boxed{L_3 = L_1 + L_2 - 1}$$

连续时间信号的卷积长度为 $L_3 = L_1 + L_2$。

例7-19：已知 $x_1(n)=2\delta(n)+\delta(n-1)+4\delta(n-2)+\delta(n-3)$

$x_2(n)=3\delta(n)+\delta(n-1)+5\delta(n-2)$

求卷积 $y(n)=x_1(n)*x_2(n)$。

解：$\{x_1(n)\}=\{2\quad 1\quad 4\quad 1\}$ $\qquad$ $\{x_2(n)\}=\{3\quad 1\quad 5\}$

$$
\begin{array}{lrrrrrr}
x_1(n): & & & 2 & 1 & 4 & 1 \\
x_2(n): & & & & 3 & 1 & 5 \\
\hline
 & & & 10 & 5 & 20 & 5 \\
 & & 2 & 1 & 4 & 1 & \\
 & 6 & 3 & 12 & 3 & & \\
\hline
y(n): & 6 & 5 & 23 & 12 & 21 & 5
\end{array}
$$

对位相乘求和

相乘求和时不进位

$\{y(n)\}=\{6\quad 5\quad 23\quad 12\quad 21\quad 5\}$

计算 $x(n)=\{1, 2, \overset{\downarrow}{0}, 3, 2\}$与 $h(n)=\{1, \overset{\downarrow}{4}, 2, 3\}$的卷积和。

A $y(n)=\{1, 6, \overset{\downarrow}{10}, 10, 20, 14, 13, 6\}$

B $y(n)=\{1, 8, \overset{\downarrow}{10}, 10, 21, 14, 13, 6\}$

C $y(n)=\{1, 6, 10, \overset{\downarrow}{10}, 20, 14, 13, 6\}$

D $y(n)=\{1, 8, 10, \overset{\downarrow}{10}, 21, 14, 13, 6\}$

提交

例7-20： 计算 $x(n)=\{1,2,\overset{\downarrow}{0},3,2\}$与 $h(n)=\{1,\overset{\downarrow}{4},2,3\}$的卷积和。

解： 对位相乘求和法的另一种形式：

		$x(-2)$	$x(-1)$	$\overset{\downarrow}{x(0)}$	$x(1)$	$x(2)$
		1	2	0	3	2
$h(-1)$	1	1	2	0	3	2
$\rightarrow h(0)$	4	4	8	0	12	8
$h(1)$	2	2	4	0	6	4
$h(2)$	3	3	6	0	9	6

每一条斜线上的数相加

$$y(n)=\{1,6,10,\overset{\downarrow}{10},20,14,13,6\}$$

7.6.4 卷积和的性质

交换律

$$x_1(n)*x_2(n)=x_2(n)*x_1(n)$$

分配律

$$x_1(n)*\left[x_2(n)+x_3(n)\right]=x_1(n)*x_2(n)+x_1(n)*x_3(n)$$

结合律

$$x_1(n)*\left[x_2(n)*x_3(n)\right]=\left[x_1(n)*x_2(n)\right]*x_3(n)$$

与单位样值序列的卷积和

$$x(n)*\delta(n)=x(n)$$

$$x(n)*\delta(n-n_0)=x(n-n_0)$$

与阶跃序列的卷积和

$$x(n)*u(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)$$

7.6.5 利用卷积和求系统的零状态响应

步骤：

1、先求系统的单位样值响应。

2、求激励信号与单位样值响应的卷积和，结果就为系统的零状态响应。

例7-21：若描述某离散系统的差分方程为

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$$

已知激励$x(n)=3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$，求系统的零状态响应$y_{zs}(n)$。

解：步骤1：求系统的单位样值响应。

$$h(n)+3h(n-1)+2h(n-2)=\delta(n)$$

特征根为-1，-2，$\therefore h(n)=\left[C_1(-1)^n+C_2(-2)^n\right]u(n)$

$h(-1)=0,\ h(-2)=0,$ 迭代求得$h(0)=1$。

用$h(0)$，$h(-1)$求得$C_1=-1$，$C_2=2$。

$$\therefore h(n)=\left[-(-1)^n+2(-2)^n\right]u(n)$$

步骤2：求激励信号与单位样值响应的卷积和，得到零状态响应。

$$
\begin{aligned}
y_{zs}(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^m u(m)\cdot[-(-1)^{n-m}+2(-2)^{n-m}]u(n-m) \\
&= \begin{cases} -3(-1)^n \sum_{m=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^m + 6(-2)^n \sum_{m=0}^{n}\left(-\frac{1}{4}\right)^m, & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \\
&= \left[-2(-1)^n + \frac{24}{5}(-2)^n + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)
\end{aligned}
$$

作业

基础题：7-26，7-30，7-32。

加强题：7-22，7-35。

- 离散信号的复频域分析
  - 8.1 z变换的定义
  - 8.2 典型序列的z变换
  - 8.3 z变换的收敛域
  - 8.4 逆z变换
  - 8.5 z变换的基本性质
- 8.6 z变换与拉普拉斯变换的关系
- 离散系统的复频域分析
  - 8.7 利用z变换解差分方程
  - 8.8 离散时间系统的系统函数
- 离散信号的频域分析
  - 8.9 序列的傅里叶变换
- 离散系统的频域分析
  - 8.10 离散时间系统的频率响应特性

本次课内容

8.1 z变换的定义

8.2 典型序列的z变换

8.3 z变换的收敛域

本次课目标

1. 了解z变换与拉氏变换的关联；
2. 熟悉常见序列的z变换及其收敛域；
3. 会分析各种类型序列的收敛域。

离散信号的复频域分析

- 8.1 z变换的定义
- 8.2 典型序列的z变换
- 8.3 z变换的收敛域
- 8.4 逆z变换
- 8.5 z变换的基本性质
- 8.6 z变换与拉普拉斯变换的关系

离散系统的复频域分析

- 8.7 利用z变换解差分方程
- 8.8 离散时间系统的系统函数

离散信号的频域分析

- 8.9 序列的傅里叶变换

离散系统的频域分析

- 8.10 离散时间系统的频率响应特性

为什么引入z变换?

- z变换是求解差分方程的有力工具（把差分方程转换成代数方程），类似于连续时间系统中的拉普拉斯变换。
- z变换还用于数字滤波器的分析与设计，及各种类型的数字信号处理问题。

z变换的产生和发展：

- 18世纪有初步认识
- 20世纪50--60年代进一步发展和应用

z变换是借助于抽样信号的拉氏变换引出。

连续因果信号x(t)经均匀冲激抽样，则抽样信号$x_s(t)$的表示式为

$$x_s(t)=x(t)\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

T为抽样间隔。

单边拉氏变换

$$X_s(s)=\int_0^{\infty}x_s(t)e^{-st}dt=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)\int_0^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)e^{-snT}$$

令 $z=e^{sT}$,其中z为一个复变量，抽样信号的拉氏变换与序列的 z 变换的关系：

$$\boxed{X(z)\Big|_{z=e^{sT}}=X_s(s)}$$

8.1 z变换的定义

$$z = e^{sT}\,,\quad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}$$

通常令*T*=1，$z = e^{s}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

单边z变换

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

双边z变换

序列的z变换是复变量 z^{-1} 的幂级数，其系数是*x*(*n*)。

因果序列的单边和双边z变换等同。

着重单边，兼顾双边！

在任何条件下，序列的z变换都有意义。此说法（）

A 正确

B 错误

提交

离散信号的复频域分析

- 8.1 z变换的定义
- 8.2 典型序列的z变换
- 8.3 z变换的收敛域
- 8.4 逆z变换
- 8.5 z变换的基本性质
- 8.6 z变换与拉普拉斯变换的关系

离散系统的复频域分析

- 8.7 利用z变换解差分方程
- 8.8 离散时间系统的系统函数

离散信号的频域分析

- 8.9 序列的傅里叶变换

离散系统的频域分析

- 8.10 离散时间系统的频率响应特性

1、单位样值序列的 z 变换

单边（双边）z变换

$$ZT[\delta(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1 \quad (0\le|z|\le\infty，全平面收敛)$$

$$ZT[\delta(n-1)]=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n-1)z^{-n}=z^{-1} \quad (|z|>0)$$

单边（双边）z变换

$$ZT[\delta(n+1)] =\sum_{n=-\infty}^{-1}\delta(n+1)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n+1)z^{-n}=z^{1}+0=z \quad (|z|<\infty)$$

双边z变换

2、单位阶跃序列的 z 变换

$$ZT[u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\boxed{\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1} \quad (|z^{-1}|<1\rightarrow|z|>1)}$$

单边（双边）z变换

序列 $a^n u(n)$ $(|a| \neq 1)$的z变换为

A $\frac{z}{a-z}$ $(|z| < |a|)$

B $\frac{z}{a-z}$ $(|z| > |a|)$

C $\frac{z}{z-a}$ $(|z| < |a|)$

D $\frac{z}{z-a}$ $(|z| > |a|)$

提交

3、单边指数序列的 z 变换

$$ZT[a^n u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \boxed{\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad \left(\left|az^{-1}\right| < 1 \rightarrow |z| > |a|\right)}$$

4、斜变序列的 z 变换

$$ZT[nu(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} nu(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$$

由 $\sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \dfrac{1}{1-z^{-1}} \quad (|z|>1)$ （1）

（1）两边对z-1求导，$\sum_{n=0}^{\infty} n(z^{-1})^{n-1} = \dfrac{1}{(1-z^{-1})^2}$ （2）

（2）两边乘以z-1，$ZT[nu(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} = \dfrac{z}{(z-1)^2} \quad (|z|>1)$

5、单边复指数序列的 z 变换

$$ZT[e^{j\omega_0 n}u(n)] = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} \qquad |z| > \left|e^{j\omega_0}\right| = 1$$

$$ZT[e^{-j\omega_0 n}u(n)] = \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \qquad |z| > \left|e^{-j\omega_0}\right| = 1$$

$$ZT[\beta^n e^{j\omega_0 n}u(n)] = \frac{z}{z - \beta e^{j\omega_0}} \qquad |z| > \left|\beta e^{j\omega_0}\right| = |\beta|$$

$$ZT[\beta^n e^{-j\omega_0 n}u(n)] = \frac{z}{z - \beta e^{-j\omega_0}} \qquad |z| > \left|\beta e^{-j\omega_0}\right| = |\beta|$$

6、单边正（余）弦序列的 z 变换

$$ZT[\cos(\omega_0 n)u(n)] = ZT[(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})/2 \cdot u(n)]$$

$$= \left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right)/2$$

$$\boxed{= \frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1} \qquad (|z|>1)}$$

$$ZT[\sin(\omega_0 n)u(n)] = ZT[(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n})/(2j) \cdot u(n)]$$

$$= \left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0}} - \frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right)/2j$$

$$\boxed{= \frac{z\sin\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1} \qquad (|z|>1)}$$

8.2 典型序列的z变换

7、单边指数正（余）弦序列的z变换

$$ZT[\beta^n \cos(\omega_0 n)u(n)] = ZT[\beta^n (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})/2]$$

$$= (\frac{z}{z-\beta e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z-\beta e^{-j\omega_0}})/2$$

$$= \frac{z(z-\beta\cos\omega_0)}{z^2 - 2z\beta\cos\omega_0 + \beta^2} \quad (|z| > |\beta|)$$

$$ZT[\beta^n \sin(\omega_0 n)u(n)] = ZT[\beta^n (e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n})/2j]$$

$$= (\frac{z}{z-\beta e^{j\omega_0}} - \frac{z}{z-\beta e^{-j\omega_0}})/2j$$

$$= \frac{z\beta\sin\omega_0}{z^2 - 2z\beta\cos\omega_0 + \beta^2} \quad (|z| > |\beta|)$$

其他典型序列的单边z变换见教材附录五。

$$X(z)=ZT[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

当 $x(n)$为有界时，令上述级数收敛的所有z值的集合称为收敛域(**region of convergence, ROC**)。

级数收敛的充要条件是满足绝对可和条件。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right|<\infty$$

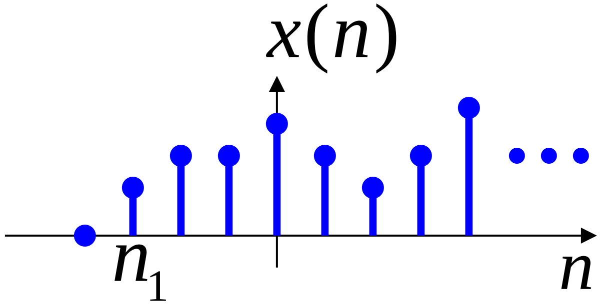
左边构成正项级数，可利用正项级数收敛的常用判定方法，

比值判定法: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$

根值判定法: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$

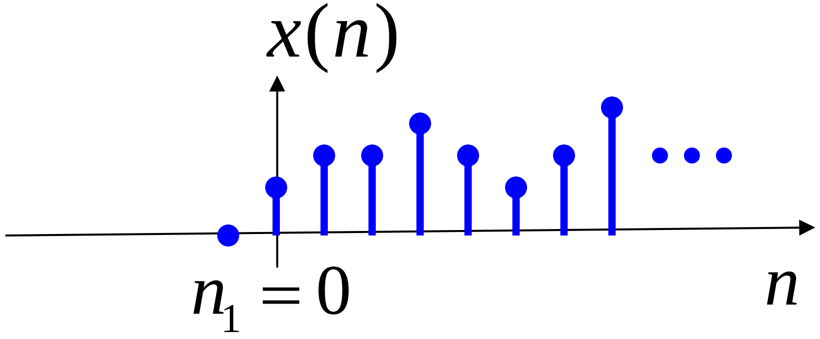
8.3 z变换的收敛域

1、右边序列：只在 $n \geq n_1$ 区间内，有非零的有限值的序列。

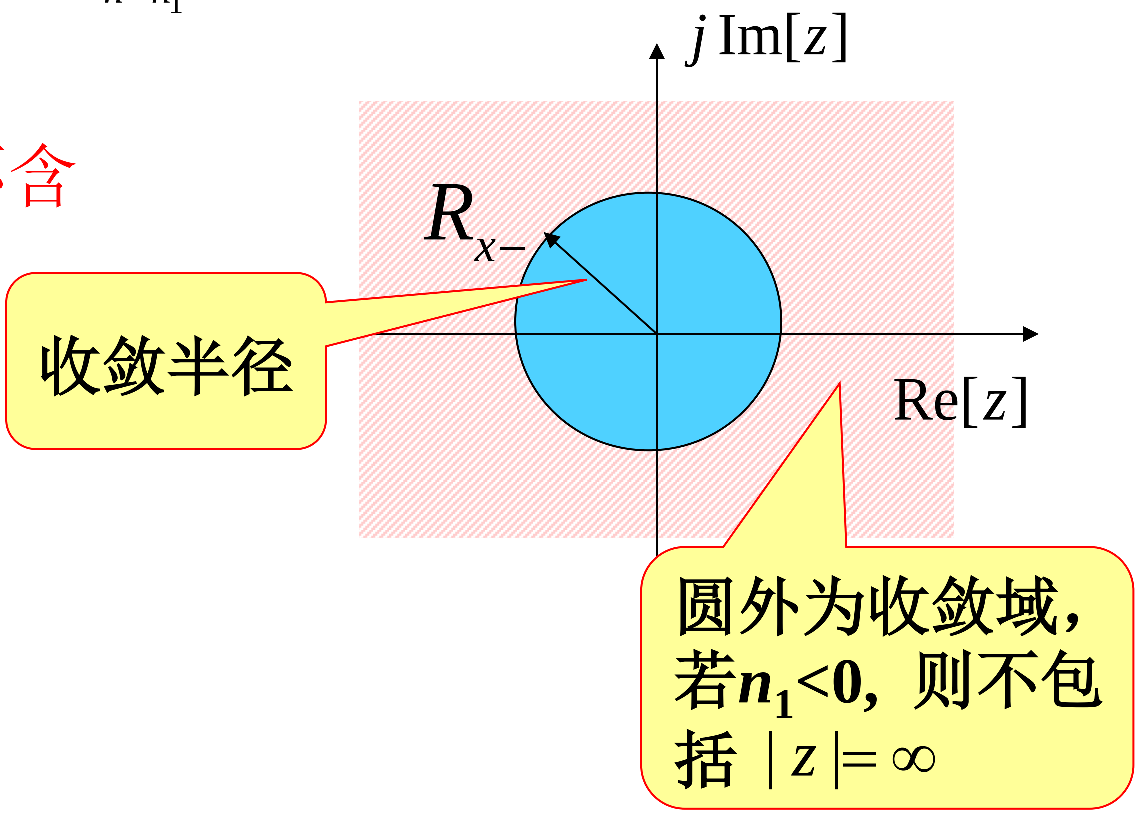


$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad n_1 \leq n \leq \infty$$

$n_1<0, \quad R_{x-}<|z|<\infty$（收敛域不含 $|z|=\infty$，因∞的$-n_1$次幂为无穷）



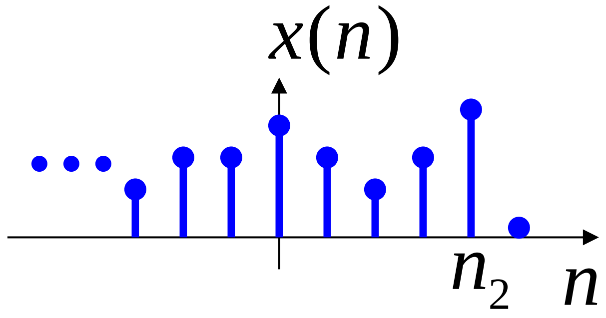
$n_1=0, \quad |z|>R_{x-}$



因果序列是右边序列的一种特殊情况，它的收敛域为$|z|>R_{x-}$。

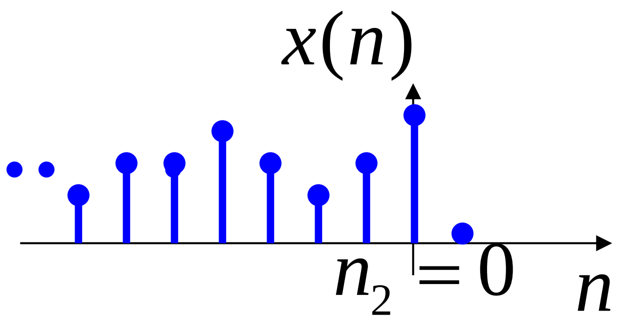
8.3 z变换的收敛域

2、**左边序列：**只在 $n \le n_2$ 区间内，有非零的有限值的序列 $x(n)$。

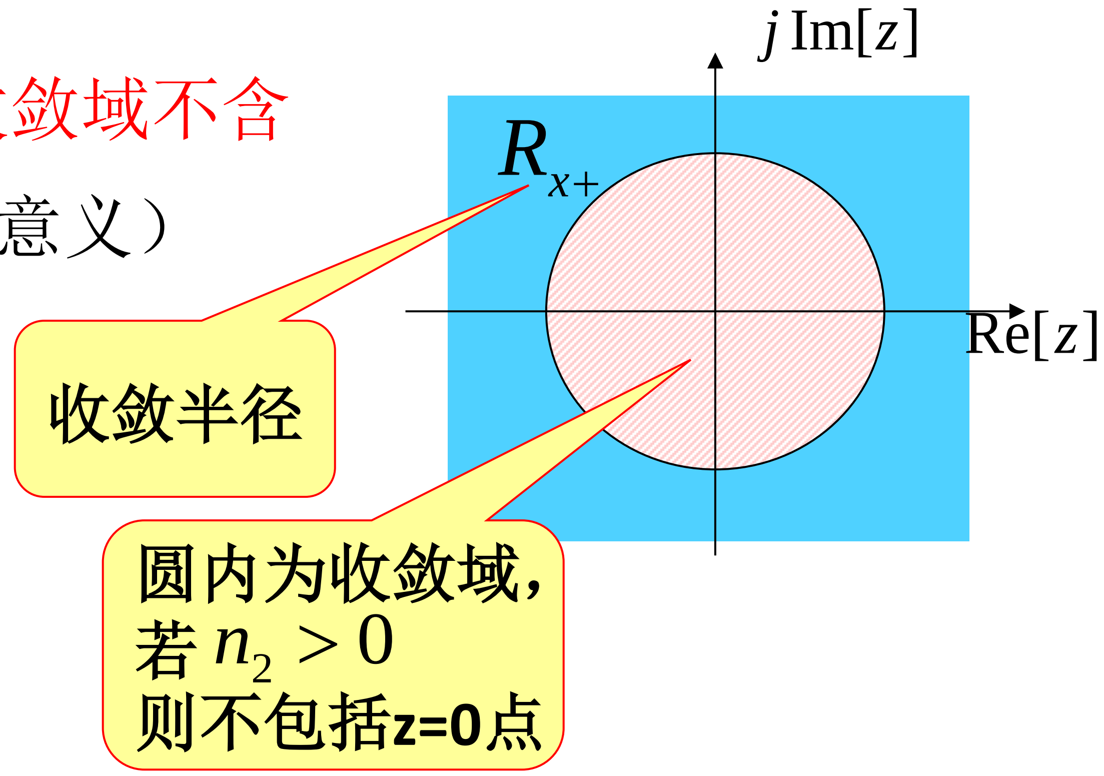


$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} \qquad -\infty \le n \le n_2$$

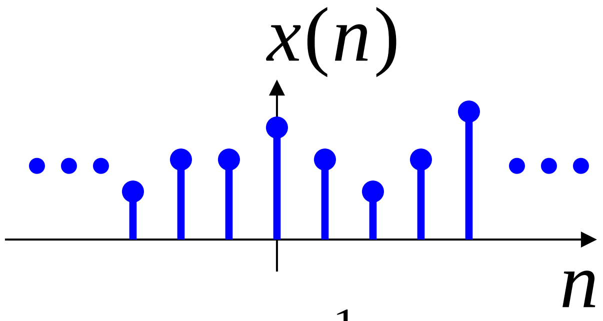
$n_2>0,\quad 0<|z|<R_{x+}$ （收敛域不含 $z=0$，因0的负指数幂无意义）



$n_2=0,\quad |z|<R_{x+}$



3、双边序列：在 $-\infty \le n \le \infty$ 区间内，有非零的有限值的序列



$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad -\infty \le n \le \infty$$

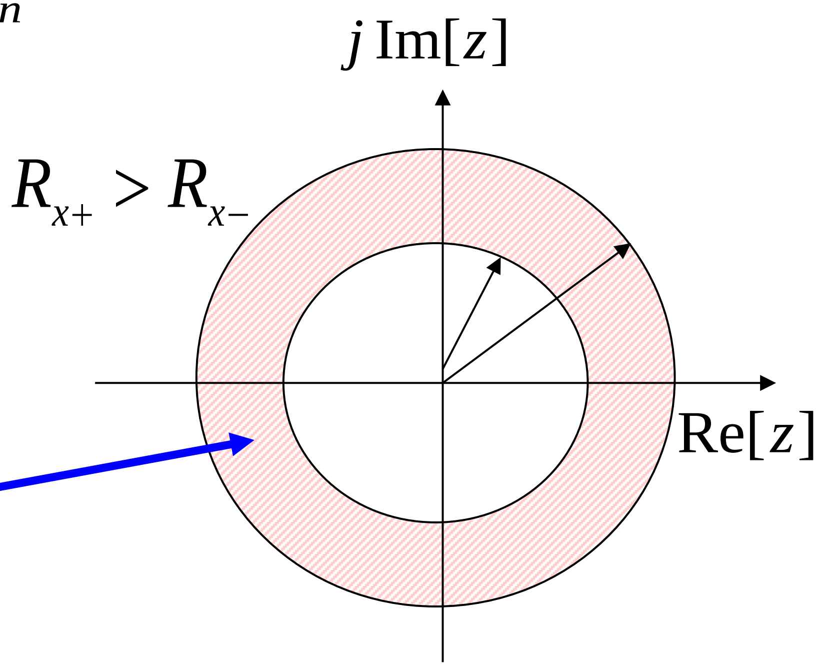
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

圆内收敛 $|z|<R_{x+}$

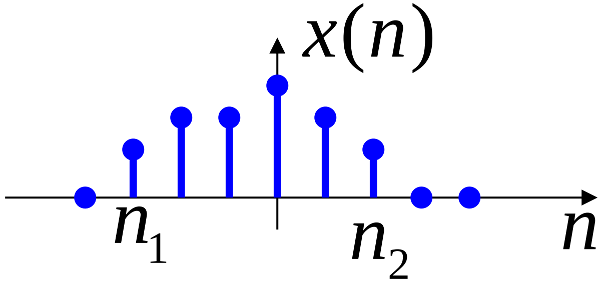
圆外收敛 $|z|>R_{x-}$

$R_{x+}>R_{x-}$ 有环状收敛域

$R_{x+}<R_{x-}$ 没有收敛域



4、有限长序列：在有限区间 $n_1 \le n \le n_2$ 内，有非零的有限值的序列



$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n} \qquad n_1 \le n \le n_2$$

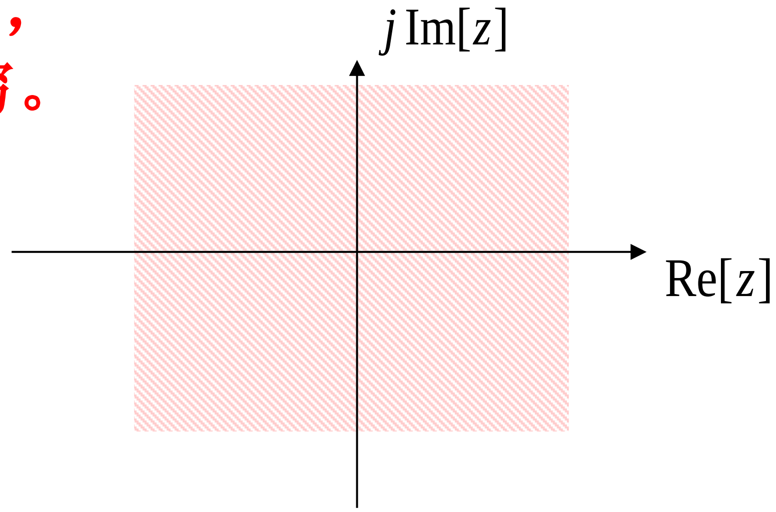
分为三种情况：

$n_1<0, n_2>0 \quad 0<|z|<\infty$

$n_1 \ge 0, n_2>0 \quad 0<|z|\le\infty$

$n_1<0, n_2 \le 0 \quad 0\le|z|<\infty$

0^{-n}在$n>0$时无意义，
∞^{-n}在$n<0$时为无穷。



收敛域至少为除了0和∞外的整个z平面（若零极点相消，收敛域扩大为整个z平面）。

多选题 1分

设置

下列说法正确的有（ ）

A 单边z变换的变换式与序列唯一对应。

B 单边z变换的变换式有唯一的收敛域。

C 双边z变换的变换式与序列唯一对应。

D 双边z变换的变换式可能对应不同的序列。

提交

作业

基础题：8-1，8-3，8-7
加强题：无