从卷积到FFT的桥梁---DFT理论

问题

卷积和FFT之间的关系是什么？

$1+2+3...+99+100=?$

$\frac{n(n+1)}{2}$

回顾

DFT：离散傅里叶变换，**FFT**：快速傅里叶变换

卷积：通常指线性卷积，即

$$x_1[n]*x_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_1[k]x_2[n-k]$$

DFT：基于DFT理论，通过循环卷积可以实现线性卷积

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W_N^{-kn},\ X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn},\ W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

FFT：计算循环卷积的快速算法

点题

> $x_1[n]=\{1,2,2\}$，$x_2[n]=\{1,2,3,4\}$，计算：
>
> (1)$x_1[n]*x_2[n]$;
>
> (2)6点循环卷积$x_1[n]⑥x_2[n]$.
>
> (1)线性卷积（翻转、平移、相乘、求和）
>
> 由$x_1[n]*x_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_1[k]x_2[n-k]$可得
>
> | k | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
> | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
> | $x_1[k]$ | | | | 1 | 2 | 2 | | | |

翻转	4	3	2	1						
平移0	4	3	2	1						y_1[0]=1
1		4	3	2	1					y_1[1]=4
2			4	3	2	1				y_1[2]=9
3				4	3	2	1			y_1[3]=14
4					4	3	2	1		y_1[4]=14
5						4	3	2	1	y_1[5]=8

(2)循环卷积（周期延拓再卷积）

先补零使$x_1[n],x_2[n]$成为6点序列，$x_1[m]=\{1,2,2,0,0,0\},x_2[m]=\{1,2,3,4,0,0\}$

再由$x_1[n]⑥x_2[n]=\sum_{m=0}^{5}x_1[m]x_2[(n-m)modulo\ 6]$得

m		-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	
$x_1[m]$								1	2	2	0	0	0					
周期	...	1	2	3	4	0	0	1	2	3	4	0	0	1	2	3	...	
翻转	...	1	0	0	4	3	2	1	0	0	4	3	2	1	0	0	...	
平移0	...	1	0	0	4	3	2	1	0	0	4	3	2	1	0	0	...	$y_2[0]=1$
1	...	2	1	0	0	4	3	2	1	0	0	4	3	2	1	0	...	$y_2[1]=4$
2	...	3	2	1	0	0	4	3	2	1	0	0	4	3	2	1	...	$y_2[2]=9$
3	...	4	3	2	1	0	0	4	3	2	1	0	0	4	3	2	...	$y_2[3]=14$
4	...	0	4	3	2	1	0	0	4	3	2	1	0	0	4	3	...	$y_2[4]=14$
5	...	0	0	4	3	2	1	0	0	4	3	2	1	0	0	4	...	$y_2[5]=8$

预备知识

连续时间周期信号的傅里叶级数表示

离散时间周期信号的傅里叶级数表示

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_ke^{jk\omega_0n}=\sum_{k=<N>}a_ke^{jk(2\pi/N)n}$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\omega_0n}=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$$

非周期信号的表示：连续时间傅里叶变换

非周期信号的表示：离散时间傅里叶变换(DTFT)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

周期序列的表示：离散时间傅里叶变换(DFS)

对一周期为N的周期序列$\tilde{x}[n]$，形如

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n+rN]$$

它的傅里叶级数表达式(DFS方程)为

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{X}[k]W_N^{-kn}$$

所对应的频谱系数($IDFS$方程)为

$$\widetilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]W_N^{kn}$$

为了形式上的简洁，记$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

上述两式就称为一个周期序列的离散傅里叶级数(DFS)表达式

与Z变换的关系

对一有限长序列，长度为N，即

$$x[n] = \begin{cases} 非零, 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0, 其余\ n \end{cases}$$

它的Z变换为

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]z^{-n}$$

现在以周期N，周期重复$x[n]$构造一个周期序列$\tilde{x}[n]$，即

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0, 其余\ n \end{cases}$$

由

$$\widetilde{X}[k]=X(Z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

表明，$DFS\widetilde{X}[k]$代表了Z变换$X(Z)$在单位圆上的N个等间隔样本。

与DTFT的关系

$x[n]$有限，绝对可加，它的$DTFT$存在，

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j\omega n}$$

由

$$\widetilde{X}[k]=X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

表明，$DFS\widetilde{X}[k]$ 可以通过以$\omega_0=2\pi/N$ 间隔对$DTFT$ 均匀采样得到。

在Z域的采样和重建

任意绝对可加序列$x[n]$，可以是无限长，它的Z变换给出为

$$X(z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]z^{-m}$$

假定$X(z)$的收敛域ROC包括单位圆。

在单位圆上以$\omega=2\pi/N$的间隔对$X(z)$采样，得到一个DFS序列：

$$\widetilde{X}[k]=X(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}km}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]W_N^{km},k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

接下来计算$\widetilde{X}[k]$的$IDFS$，

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{X}[k]W_N^{-kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\Big(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]W_N^{km}\Big)W_N^{-kn}\\=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{-k(m-n)}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta(n-m-rN)\\=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x[m]\delta(n-m-rN)=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x[n-rN]=\cdots+x[n+N]+x[n]+x[n-N]+\cdots\end{aligned}$$

其中用到了恒等式

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{-k(m-n)}=\begin{cases}1,n-m=rN\\0,\text{其余}\ n\end{cases}$$

这表示当在单位圆上对$X(z)$采样时在时域得到一个周期序列，这个序列是原序列$x[n]$和它的无穷多个移位$\pm N$整数倍复本的线性组合。由此可见，如果$x[n]=0(n<0$和$n\geqslant N)$，那么在时域就不存在混叠，因此就有可能从$\tilde{x}[n]$中恢复出$x[n]$，即

$$x[n]=\tilde{x}[n],0\leqslant n\leqslant N-1$$

时域混叠问题

> 设$x_1[n]=\{6,5,4,3,2,1\}$，它的$DTFT\ \ X_1(e^{j\omega})$在$\omega_k=\frac{2\pi k}{4},k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$
>
> 被采样得到一个DFS序列$\widetilde{X}_2[k]$。求$\widetilde{X}_2[k]$的$IDFS$序列$\tilde{x}_2[n]$。
>
> 解：$\tilde{x}_2[n]=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x_1[n-4r]$

n	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$r=-2$		2	1																	
$r=-1$		6	5	4	3	2	1													
$r=0$						6	5	4	3	2	1									
$r=1$										6	5	4	3	2	1					
$r=2$														6	5	4	3	2	1	
$\tilde{x}_2[n]$	...	8	6	4	3	8	6	4	3	8	6	4	3	8	6	4	3	8	6	...

> 发现$x[4]$混叠到了$x[0]$，$x[5]$混叠到了$x[1]$。

离散傅里叶变换(DFT)

离散傅里叶级数提供了一种数值计算离散时间傅里叶变换的机理，但同时也有时域混叠的潜在问题。前面已经看到，对离散时间傅里叶变换采样就会产生一个周期信号$\tilde{x}[n]$。可以利用实际问题中的非周期、有限长信号构造出一个周期的信号，使它的主值区间就是这个实际的信号，然后对这个构造出来的周期信号应用DFS。这就定义为离散傅里叶变换(DFT)，其实它就是DFS的主值周期。

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn},0\leqslant k\leqslant N-1$$
$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W_N^{-kn},0\leqslant n\leqslant N-1$$

DFT和IDFT的matlab实现

```
function [Xk]=dft(xn,N)
% Computes Discrete Fourier Transform
% Xk=DFT coeff. array over 0<=k<=N-1
% xn=N-point finite-duration sequence
% N=Length of DFT
n=[0:1:N-1];
k=[0:1:N-1];
WN=exp(-j*2*pi/N);
nk=n'*k;
WNnk=WN.^nk;
Xk=xn*WNnk;
end
```

```
function [xn]=idft(Xk,N)
% Computes Inverse Discrete Transform
% xn=N-point sequence over 0<=n<=N-1
% Xk=DFT coeff. array over 0<=k<=N-1
% N=Length of DFT
n=[0:1:N-1];
k=[0:1:N-1];
WN=exp(-j*2*pi/N);
nk=n'*k;
WNnk=WN.^(-nk);
xn=(Xk*WNnk)/N;
end
```

补零运算

> 分别计算$x[n] = \{1, 1, 1, 1\}$的4点、8点和32点DFT。

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\omega n} = 1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega} = \frac{sin(2\omega)}{sin(\omega/2)}e^{-j3\omega/2}$$

```
w=[0:499]*2*pi/500;
magX=abs(sin(2*w)./sin(w/2));
x1=[1,1,1,1];N=4;Xk1=dft(x1,N);magXk1=abs(Xk1);
k1=[0:3];
figure;subplot(3,1,1);plot(w/pi,magX,'--');
hold on;stem(2*pi/N*k1/pi,magXk1);
x2=[1,1,1,1,zeros(1,4)];N=8;Xk2=dft(x2,N);magXk2=abs(Xk2);
k2=[0:7];
subplot(3,1,2);plot(w/pi,magX,'--');
hold on;stem(2*pi/N*k2/pi,magXk2);
x3=[1,1,1,1,zeros(1,28)];N=32;Xk3=dft(x3,N);magXk3=abs(Xk3);
k3=[0:31];
subplot(3,1,3);plot(w/pi,magX,'--');
hold on;stem(2*pi/N*k3/pi,magXk3);
```

> 通过补零运算能够增加采样密度，只是增加了频谱的密度，并不能增加频谱的分辨率。

```
n=[0:99];
x=cos(0.48*pi*n)+cos(0.52*pi*n);
% 10点序列
n1=[0:9];y1=x(1:10);
figure;subplot(2,1,1);stem(n1,y1);
Y1=dft(y1,10);
magY1=abs(Y1(1:6));
k1=0:5;w1=2*k1/10;
subplot(2,1,2);stem(w1,magY1);
% 补零至100点序列
n2=[0:99];y2=[x(1:10),zeros(1,90)];
figure;subplot(2,1,1);stem(n2,y2);
Y2=dft(y2,100);
magY2=abs(Y2(1:51));
k2=0:50;w2=2*k2/100;
subplot(2,1,2);stem(w2,magY2);
% 原始100点序列
figure;subplot(2,1,1);stem(n,x);
X=dft(x,100);magX=abs(X(1:51));
k=0:50;w=2*k/100;
subplot(2,1,2);stem(w,magX);
```

利用DFT实现线性卷积

序列的循环移位

首先将$x[n]$转换为它的周期延拓$\tilde{x}[n]$，然后再移动m个样本：

$$\tilde{x}[n-m] = x[mod(n-m,N)] = x[[n-m]]_N$$

这称为$\tilde{x}[n]$的周期移位。最后再将周期移位转换为N点序列：

$$\tilde{x}[n-m]R_N[n] = x[[n-m]]_N R_N[n]$$

称为$x[n]$的循环移位。

这里$R_N[n]$定义为一个窗函数，只保留在区间$[0, N-1]$的样本值。

循环移位的matlab实现

```
function y=cirshftt(x,m,N)
% Method: y[n]=x[mod(n-m,N)]
if length(x)>N
    error('N must be >= the length of x')
end
x=[x,zeros(1,N-length(x))];
n=[0:N-1];
n=mod(n-m,N);
y=x(n+1);
end
```

循环卷积

包含循环移位的卷积运算称为循环卷积：

$$x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[[n-m]]_N, 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

性质：当两个N点的DFT在频域相乘时，在时域就得到循环卷积

$$DFT(x_1[n] \circledast x_2[n]) = X_1[k] X_2[k]$$

令$x_1[n]$是N_1点序列，$x_2[n]$是N_2点序列，它们的线性卷积

$$x_3[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] x_2[n-k] = \sum_{k=0}^{N_1-1} x_1[k] x_2[n-k]$$

是一个(N_1+N_2-1)点序列。定义一个(N_1+N_2-1)点循环卷积

$$\begin{aligned} x_4[n] = x_1[n] \circledast x_2[n] &= \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[[n-m]]_N\right) R_N[n] \\ &= \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_2[n-m-rN]\right) R_N[n] \\ &= \left(\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[n-m-rN]\right) R_N[n] \\ &= \left(\sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_3(n-rN)\right) R_N[n] \end{aligned}$$

一般来说，循环卷积是线性卷积混叠的结果。现在，因为$x_3[n]$是一个$N=N_1+N_2-1$点序列，而有

$$x_4[n] = x_3[n], 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

即时域不存在混叠现象。

结论：如果将$x_1[n]$与$x_2[n]$通过补上适当个数的零值而成为$N=N_1+N_2-1$点序列，那么循环卷积就与线性卷积结果一致。

循环卷积的matlab实现

```
function y=circonvt(x1,x2,N)
% Circular convolution in the time domain
if length(x1)>N
    error('N must be <= the length of x1')
end
if length(x2)>N
    error('N must be <= the length of x2')
end
x1=[x1,zeros(1,N-length(x1))];
x2=[x2,zeros(1,N-length(x2))];
m=[0:N-1];
x2=x2(mod(-m,N)+1);
H=zeros(N,N);
for n=1:N
    H(n,:)=cirshftt(x2,n-1,N);
end
y=x1*conj(H');
end
```

线性卷积conv()与循环卷积circonvt()的结果对比

```
x1=[1,2,2];x2=[1,2,3,4];
y=conv(x1,x2)
y=circonvt(x1,x2,4)
y=circonvt(x1,x2,5)
y=circonvt(x1,x2,6)
y=circonvt(x1,x2,7)
```

快速傅里叶变换

利用因子W_N^{nk}的周期性

$$W_N^{nk}=W_N^{k(n+N)}=W_N^{(k+N)n}$$

和对称性

$$W_N^{kn+N/2}=-W_N^{kn}$$

按时间抽取的FFT(DIT-FFT)算法

令$N=2^{\nu}$，将$x[n]$分为两个$N/2$点序列：

$$g_1[n]=x[2n];g_2[n]=x[2n+1],0\leqslant n\leqslant\frac{N}{2}-1$$

序列$g_1[n]$包括$x[n]$的偶数样本，序列$g_2[n]$则包括$x[n]$的奇数数样本，

$$X[k]=G_1[k]+W_N^kG_2[k],0\leqslant k\leqslant N-1$$

上式将两个$N/2$点的DFT合并为一个N点的DFT。

重复这个过程，在每一步都对序列进行抽取，并且较小的DFT都被合并。

(更详细的FFT算法将在另外的视频中描述)

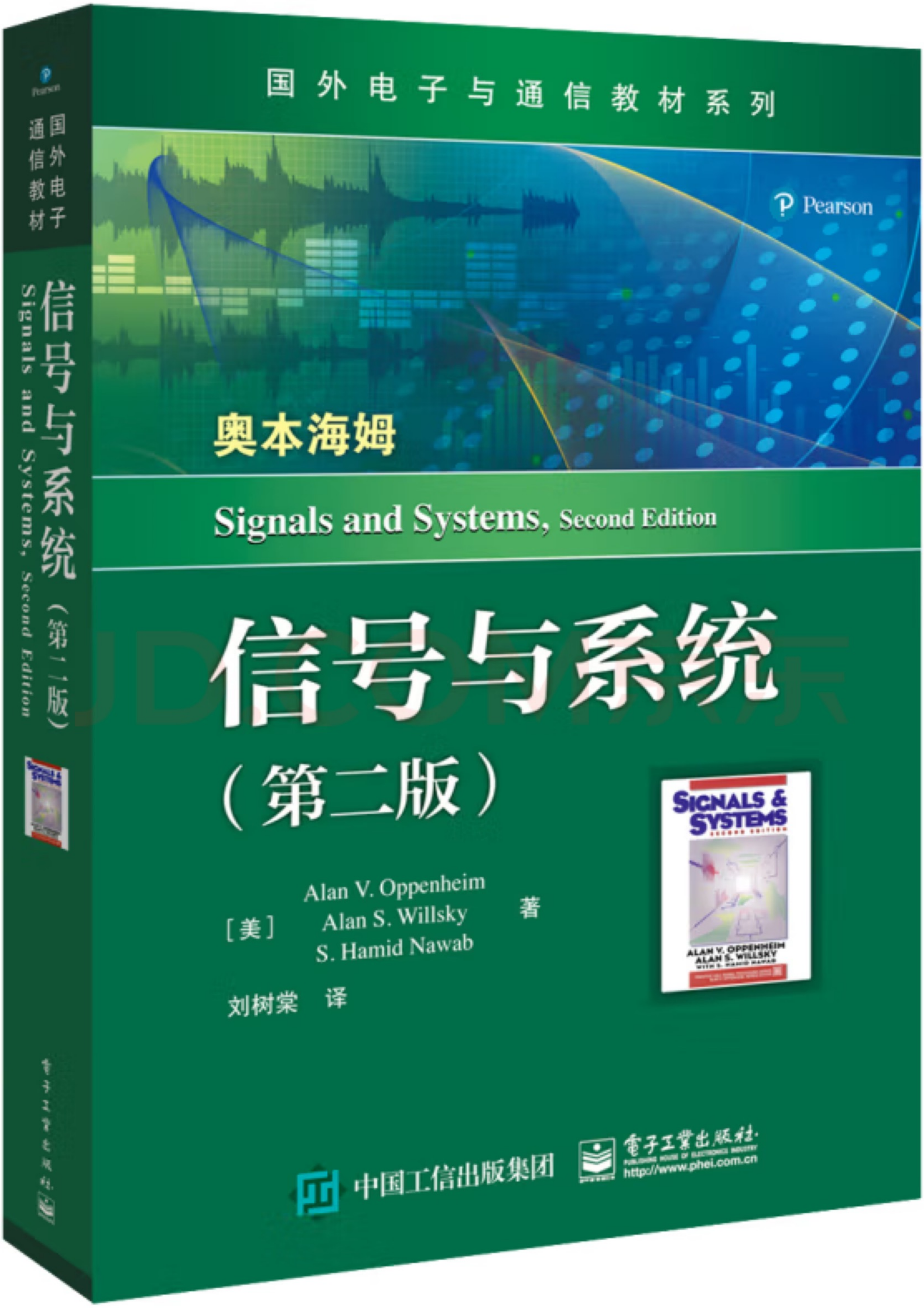
快速卷积

快速卷积算法：应用循环卷积实现线性卷积，并应用FFT实现循环卷积

具体而言就是，线性卷积$x_1[n]*x_2[n]$能用两个N点的FFT，一个N点的点乘和一个N点的$IFFT$来实现：

$$x_1[n]*x_2[n]=IFFT\Big[FFT[x_1[n]]FFT[x_2[n]]\Big]$$

参考



国外电子与通信教材系列
Pearson
奥本海姆
Signals and Systems, Second Edition
信号与系统
（第二版）
［美］ Alan V. Oppenheim
Alan S. Willsky
S. Hamid Nawab 著
刘树棠 译
SIGNALS & SYSTEMS
SECOND EDITION
ALAN V. OPPENHEIM
ALAN S. WILLSKY
WITH S. HAMID NAWAB
中国工信出版集团
電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn
国外电子通信教材
信号与系统（第二版）
Signals and Systems, Second Edition
电子工业出版社

国外电子与通信教材系列

PEARSON

奥本海姆

Discrete-Time Signal Processing, Third Edition

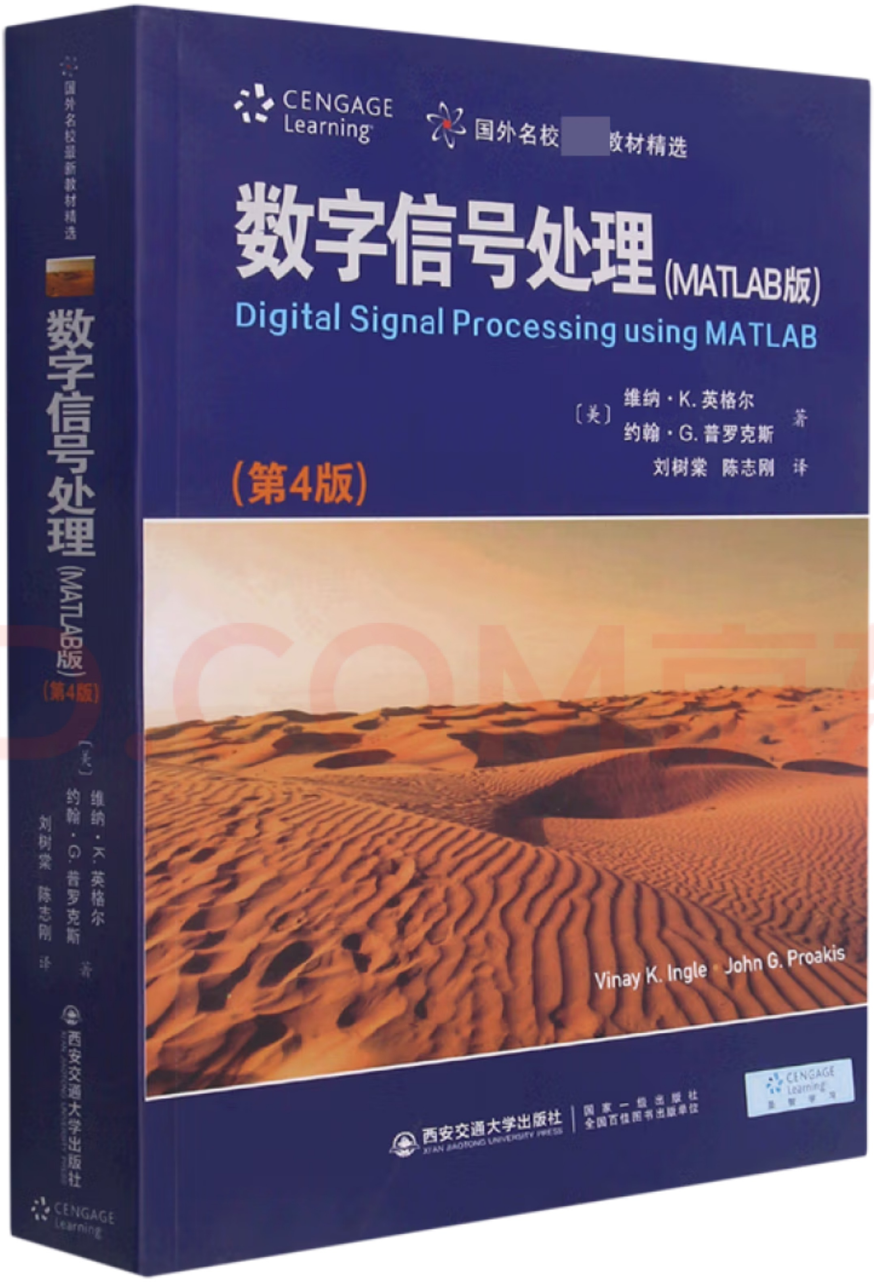
离散时间信号处理

（第三版）

[美] Alan V. Oppenheim
Ronald W. Schafer 著

黄建国 刘树棠 张国梅 译

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn


CENGAGE Learning
国外名校 教材精选
数字信号处理(MATLAB版)
Digital Signal Processing using MATLAB
〔美〕维纳·K. 英格尔 约翰·G. 普罗克斯 著
刘树棠 陈志刚 译
(第4版)
Vinay K. Ingle · John G. Proakis
西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位
国外名校最新教材精选
数字信号处理(MATLAB版)
(第4版)
〔美〕维纳·K. 英格尔 约翰·G. 普罗克斯 著
刘树棠 陈志刚 译
西安交通大学出版社
CENGAGE Learning