2.9.1 四元数

翻译:fangcun

2018 年 9 月 26 日

目录

1 2.9.1 四元数

四元数是一个四元组。

$$\mathbf{q} = (x, y, z, w) = w + xi + yj + zk \tag{1}$$

i,j 和 k 满足表达式 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$。除此之外，还有它们之间还有一些很有用的关系，比如 $ij = k$ 和 $ji = -k$，这也表明四元数乘法不支持交换律。

四元数可以表示为 $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{q}_z, \mathbf{q}_w)$ 或 $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_{xyz}, \mathbf{q}_w)$，$\mathbf{q}_{xyz}$ 是一个三维向量，表示虚部，$\mathbf{q}_w$ 表示实部。在本章这两种表示形式都被我们使用。

两个四元数的乘积可以通过定义展开它们自身得到：

$$\mathbf{q}\mathbf{q}^{'} = (\mathbf{q}_w + \mathbf{q}_x i + \mathbf{q}_y j + \mathbf{q}_z k)(\mathbf{q}^{'}_w + \mathbf{q}^{'}_x i + \mathbf{q}^{'}_y j + \mathbf{q}^{'}_z k) \tag{2}$$

合并同类项和化简后，可以得到如下**叉积**和**点积**形式:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{q}\mathbf{q}^{'})_{xyz} &= \mathbf{q}_{xyz} \times \mathbf{q}^{'}_{xyz} + \mathbf{q}_w \mathbf{q}^{'}_{xyz} + \mathbf{q}^{'}_w \mathbf{q}^{'}_{xyz} \\
(\mathbf{q}\mathbf{q}^{'})_w &= \mathbf{q}_w \mathbf{q}^{'}_w - (\mathbf{q}_{xyz} \cdot \mathbf{q}^{'}_{xyz})
\end{aligned} \tag{3}$$

单位四元数 (满足 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ 的四元数) 和三维旋转空间 $\mathbb{R}^3$ 之间存在一个有用的关系：关于轴 $\hat{\mathrm{v}}$ 旋转 2θ 可以被映射为单位四元数 $(\hat{\mathrm{v}} \sin\theta, \cos\theta)$，对一个齐次坐标下的点进行旋转可以使用下面的公式:

$$\mathrm{p}^{'} = \mathbf{q}\mathrm{p}\mathbf{q}^{-1} \tag{4}$$

此外，多个四元数的相乘产生的四元数的旋转效果和按顺序进行相应旋转的效果相同，也就是说它们是等价的。

可以由四元数计算它的旋转矩阵表示。

从四元数推导旋转矩阵，我们需要从 $\mathrm{p}^{'} = \mathbf{q}\mathrm{p}\mathbf{q}^{-1}$ 入手。我们想要得到一个矩阵 $\mathbf{M}$ 来执行 $\mathrm{p}^{'} = \mathbf{M}\mathrm{p}$。我们使用 3来展开 $\mathbf{q}\mathrm{p}\mathbf{q}^{-1}$，然后合并同类型，化简，最后使用矩阵来表示这个结果，就得到了下面这个旋转矩阵：

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1-2(\mathbf{q}_y^2+\mathbf{q}_z^2) & 2(\mathbf{q}_x\mathbf{q}_y+\mathbf{q}_z\mathbf{q}_w) & 2\mathbf{q}_x\mathbf{q}_z-\mathbf{q}_y\mathbf{q}_w) \\ 2(\mathbf{q}_x\mathbf{q}_y-\mathbf{q}_z\mathbf{q}_w) & 1-2(\mathbf{q}_x^2+\mathbf{q}_z^2) & 2(\mathbf{q}_y\mathbf{q}_z+\mathbf{q}_x\mathbf{q}_w) \\ 2(\mathbf{q}_x\mathbf{q}_z+\mathbf{q}_y\mathbf{q}_w) & 2(\mathbf{q}_y\mathbf{q}_z-\mathbf{q}_x\mathbf{q}_w) & 1-2(\mathbf{q}_x^2+\mathbf{q}_y^2) \end{pmatrix} \tag{5}$$

我们还可以利用 $(\mathbf{q}_{xyz}\sin\theta, \cos\theta)$ 来计算旋转矩阵。首先，我们可以得到 $\theta = 2\arccos\mathbf{q}_w$，然后使用旋转函数计算绕轴 $\hat{\mathbf{q}}_{xyz}$ 旋转 θ 角的旋转矩阵即可。但是，这种方法不够高效，它使用多次三角函数，而上面介绍的方法只使用了浮点加法，减法和乘法。

从一个**旋转矩阵**创建一个**四元数**也很有用。我们可以通过公式 5来推导出**旋转矩阵**创建**四元数**的方法。

2 2.9.2 四元数插值

$Slerp()$ 是最后一个我们定义的关于**四元数**的函数，它使用球面线性插值来计算两个**四元数**之间的插值。球面线性插值沿着球面最大圆弧使用恒定速度进行，因而它有下面两个特点:

- 它使用球面最大圆弧进行插值。
- 它具有恒定的角速度。

四元数的**球面线性插值**最初由 Shoemake(1985) 发表：给定四元数 $\mathbf{q}_1$ 和 $\mathbf{q}_2$，以及参数 $t \in [0,1]$，那么：

$$slerp(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, t) = \frac{\mathbf{q}_1\sin((1-t)\theta) + \mathbf{q}_2\sin(t\theta)}{\sin\theta} \tag{6}$$

一个直观的理解 $Slerp()$ 函数的方法在 2004 年被 Blow 发表。给定**四元数**$\mathbf{q}_1$ 和 $\mathbf{q}_2$，计算它们之间的插值，假定它们之间的角度为 θ，插值参数 $t \in [0,1]$，我们要找的插值四元数为 $\mathbf{q}'$，它和 $\mathbf{q}^1$ 之间的角度 θ 满足 $\theta' = \theta t$。$\mathbf{q}'$ 的旋转路径为从 $\mathbf{q}_1$ 到 $\mathbf{q}_2$。

一个简单的计算 $\mathbf{q}'$ 的方法是构造一个以 $\mathbf{q}_1$ 和 $\mathbf{q}_2$ 为坐标轴的正交坐标系。首先，我们使用 $\mathbf{q}_1$ 作为一个坐标轴，然后找一个垂直于 $\mathbf{q}_1$ 的轴，这两个轴构成了一个基。然后，相对于 $\mathbf{q}_1$ 进行旋转即可。垂直于 $\mathbf{q}_1$ 的轴 $\mathbf{q}_\perp$ 可以通过计算 $\mathbf{q}_1$ 在 $\mathbf{q}_2$ 方向上的投影减去 $\mathbf{q}_2$ 的正交投影得到：

$$\mathbf{q}_{\perp} = \mathbf{q}_2 - (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2)\mathbf{q}_1 \tag{7}$$

然后

$$\mathbf{q}^{'} = \mathbf{q}_1 \cos(\theta t) + \mathbf{q}_{\perp} \sin(\theta t) \tag{8}$$