

要理解“贴现后的期权价值是贴现收益在风险中性测度下的条件期望”，需结合 **无套利复制**、**鞅的性质**和**风险中性测度**的核心逻辑，分步骤推导：

步骤 1：构造“复制期权”的自融资组合

为给期权定价，我们构造一个**自融资投资组合** (ϕ_t, ψ_t) ：

- ϕ_t ：时刻 t 持有“连续可交易资产 S_t ”的数量；
- ψ_t ：时刻 t 持有“无风险现金债券 $B_t = e^{rt}$ ”的数量。

组合的**即时价值**为：

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t$$

若组合能 **复制期权收益**（到期日 T 时， $V_T = X$ ，其中 X 是期权到期收益），则无套利要求“期权价值等于复制组合的价值”。

步骤 2：贴现组合价值，消除无风险趋势

对组合价值 除以**无风险现金债券** B_t （即“贴现”），得到 **贴现价值**：

$$E_t = \frac{V_t}{B_t} = \phi_t Z_t + \psi_t$$

其中 $Z_t = \frac{S_t}{B_t}$ 是 S_t 的 **贴现价格**（反映 S_t 相对无风险资产的“超额价值”）。

自融资组合的核心条件是：组合价值变化仅来自资产价格波动，无外部资金注入 / 抽出。用“贴现价值”表述，自融资条件为：

$$dE_t = \phi_t dZ_t$$

步骤 3：风险中性测度下，贴现资产价格是“鞅”

在**无套利市场**中，通过**Girsanov 定理**可构造“风险中性测度 \mathbb{Q} ”，使得：

贴现后的资产价格 Z_t 是 \mathbb{Q} 下的**鞅**。

“鞅”的核心性质是：对任意 $s \leq t$ ，有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_t | \mathcal{F}_s] = Z_s$$

（“未来贴现价值的条件期望等于当前贴现价值”）。

步骤 4：自融资组合的贴现价值也是鞅

由自融资条件 $dE_t = \phi_t dZ_t$ ， E_t 可看作“对鞅 Z_t 的随机积分”（ ϕ_t 是“可预测过程”，即基于历史信息交易策略）。

根据 **鞅的随机积分性质**：对鞅的随机积分仍为鞅。因此， E_t 也是 \mathbb{Q} 下的鞅。

步骤 5：鞅的条件期望与期权定价

鞅的另一核心性质是：对鞅 E_t ，有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[E_T | \mathcal{F}_t] = E_t$$

而期权到期时，组合价值需复制期权收益： $V_T = X$ ，因此到期日的贴现价值为：

$$E_T = \frac{V_T}{B_T} = \frac{X}{B_T}$$

将 $E_T = \frac{X}{B_T}$ 代入鞅的条件期望公式，得：

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X}{B_T} | \mathcal{F}_t\right] = E_t$$

注意到 $E_t = \frac{V_t}{B_t}$ ，而 V_t 正是 **期权在时刻 t 的价值**。因此：

期权在时刻 t 的贴现价值，等于“贴现后的期权收益 $\frac{X}{B_T}$ 在风险中性测度 \mathbb{Q} 下关于 \mathcal{F}_t 的条件期望”。

总结逻辑链

无套利复制 → 自融资组合 → 贴现消除无风险趋势 → 风险中性测度下贴现资产是鞅 → 自融资组合的贴现价值是鞅 → 鞅的条件期望性质 → 贴现期权价值 = 贴现收益的风险中性条件期望。