2026 考研数学零基础提前学课堂手迹版讲义

新浪微博：考研数学周洋鑫

零基础提前学（4）

【例3.7】 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\boxed{x^3})}{x(1-\cos x)} = \underline{\ 2\ }$.　$\dfrac{0}{0}$　　$\square\to0,\ \ln(1+\square)\sim\square$

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{x\cdot\frac{1}{2}x^2}=2$

【例3.8】 求下列极限：　　$\square\to0,\ e^{\square}-1\sim\square$

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\tan^2x}{(e^{\boxed{2x}}-1)(1-\cos x)}$；$\dfrac{0}{0}$　　（2）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x-1}\right)}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot x^2}{2x\cdot\frac{1}{2}x^2}=1$　　$\square\to0,\ \ln(1+\square)\sim\square$

$\square\to0,\ \arcsin\square\sim\square$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

【例3.9】 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x\cdot\sin^2x\cdot(e^{\boxed{2x}}-1)}{\left(\sqrt{1-x^3}-1\right)(1-\cos x)}=\underline{\qquad}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot x^2\cdot 2x}{-\frac{1}{2}x^3\cdot\frac{1}{2}x^2}$　　$\square\to0,\ e^{\square}-1\sim\square$

$[1+(-x^3)]^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}(-x^3)$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{-\frac{1}{4}x}=\infty$　　$\square\to0,\ (1+\square)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}\square$

【例3.10】 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan\left[\ln\left(1+xe^x\right)\right]}{\sin x}=\underline{\ 1\ }$.　$\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x}{x}$　　$\arctan\left[\ln\left(1+xe^x\right)\right]$

$\sim\ln(1+xe^x)$

$=\lim\limits_{x\to0}e^x=1.$　　$\sim xe^x$

【例3.11】计算 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{5}}{e^{x^2}-1+\sin x^2}=$______. $\frac{0}{0}$

加减法 拆开!

方一：$x\to 0$, $e^{x^2}-1+\sin x^2 \sim x^2+x^2=2x^2$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{5}}{2x^2}$

$=\sqrt{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{5}x^2}-1}{2x^2}$

$=\sqrt{5}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}x^2}{2x^2}=\frac{\sqrt{5}}{20}$.

$\square\to 0$, $(1+\square)^{\alpha}-1\sim\alpha\square$

$(1+\frac{1}{5}x^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}x^2$

凑

方二：$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{5}}{2x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2\cdot(\sqrt{x^2+5}+\sqrt{5})}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(\sqrt{x^2+5}+\sqrt{5})}$

$\overset{\text{已}}{=}\frac{1}{2\cdot 2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{20}$.

【例3.12】考虑下列式子

①$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$. ✗

②$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=0$. ✗ $\sim x$

③$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$ ✓

④$\lim_{x\to\infty}\boxed{\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}=1$. ✗ $-1\le\sin\square\le 1$

0 有界 0·0 已定式 ⇒ 0.

其中正确的个数为( ).

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

解：① $\lim_{x\to\infty}\boxed{\frac{1}{x}}\,\sin x=0$ 　(0，有界)

③ $\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{x}=1$

$x\to\infty$, $\sin\boxed{\frac{1}{x}}\sim\frac{1}{x}$

④ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\boxed{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$

$=0$

【定理】无穷小*有界变量=无穷小量

【问题】无穷大*有界变量~~=~~无穷大量

例：$\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}=1$ (反例)

$\lim_{x\to\infty}(\ )(\ )=?$ 　∞　有界 　未定式 ✓

【考4】无穷小量的阶

若 $x\to 0$ 时, $f(x)\sim A x^{\boxed{k}}$ $(A\neq 0, k>0)$

则 $f(x)$ 是 x 的 k 阶无穷小量.

找等价！

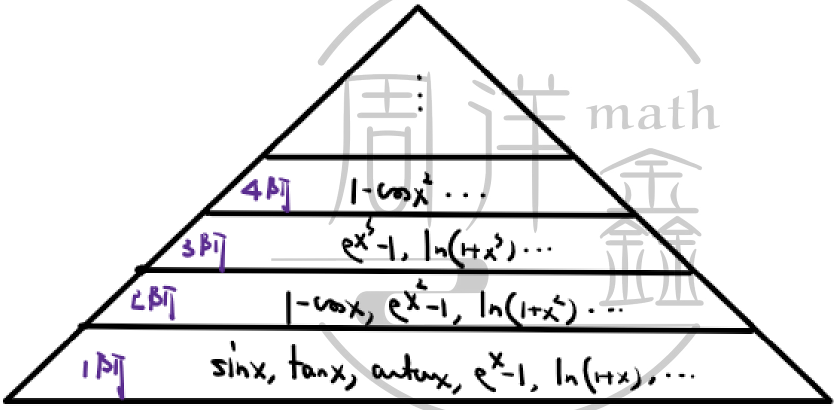
例: $x\to 0$ 时, (1) $\sin x \sim x^1 \Rightarrow$ 1阶

(2) $\sin x^4 \sim x^4 \Rightarrow$ 4阶

(3) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow$ 2阶

(4) $e^{x^2}-\cos x \Rightarrow$ 2阶

$e^{x^2}-1+1-\cos x \sim x^2+\frac{1}{2}x^2=\frac{3}{2}x^2$ ✓



当 $x\to 0$ 时

【例3.13】 $x\to 0$ 时，下列无穷小中哪项是其它三个的高阶无穷小量（ D ）

A. $\ln(1-x^2)$ 2　　B. $1-\cos x$ 2

C. $\sqrt{1-x^2}-1$ 2　　D. $x-\tan x$

方一: 定义法 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0,\infty,A\neq 0,1$

方二: 找等价定阶.

$x\to 0$ 时, $\ln[1+(-x^2)]\sim -x^2$

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

$[1+(-x^2)]^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}(-x^2)=-\frac{1}{2}x^2$

~~当 $x\to 0$ 时, $x-\tan x\sim x-\boxed{x}=0$~~

【例3.14】设 $\alpha_1 = x(\cos\sqrt{x}-1)$，$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$，$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$. 当 $x\to 0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是（　）.

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　B. $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$.

C. $\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$.　　D. $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$.

$$\text{当 } x\to 0^+ \text{ 时}, \alpha_1=-x(1-\cos\sqrt{x}) \sim -x\cdot\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{x})^2=-\frac{1}{2}x^2$$

$$\alpha_2=\sqrt{x}\cdot\ln(1+\sqrt[3]{x})\sim\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{6}}$$

$$\alpha_3=(1+x)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}x$$

则低→高：$\alpha_2\Rightarrow\alpha_3\Rightarrow\alpha_1$

【考5】无穷小的和取低阶原则

若 $\lim\limits_{x\to\square}\alpha(x)=0$，且 $\beta_i(x)=o[\alpha(x)]$ $(i=1,2,3\cdots n)$

则 $\alpha(x)+\beta_1(x)+\beta_2(x)+\beta_3(x)+\cdots+\beta_n(x)\sim \underline{\alpha(x)}$

证明：$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)+\beta_1(x)+\beta_2(x)+\beta_3(x)+\cdots+\beta_n(x)}{\alpha(x)}$

$=1+0+0+\cdots+0=1$

必须应用于不同阶的情形

例1：当 $x\to0$ 时，$x+x^2+x^3+x^4\sim \underline{x}$. 无穷小问题—和取低阶

当 $x\to\infty$ 时，$x+x^2+x^3+x^4\sim x^4$ 无穷大问题—抓大头

例2：当 $x\to0$ 时，$\sin x+e^{x^2}-1+\ln(1+x^3)\sim \underline{\sin x\sim x}$

（1994 年，数一，3 分）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq0$，则必有 D

(A) $b=4d$.　　(B) $b=-4d$.

(C) $a=4c$.　　(D) $a=-4c$.

$\ln[1+(-2x)]\sim-2x$

$-(e^{-x^2}-1)\sim-(-x^2)=x^2$

$$\lim_{x\to0}\frac{a\tan x}{c\ln(1-2x)}=\lim_{x\to0}\frac{ax}{-2cx}=\frac{a}{-2c}=2$$

$\Rightarrow a=-4c$

【总结】无穷小的替换准则

1.乘除法——一定可以用

2.加减法——慎用，要检验

3.推广使用

4.和取低阶的原则

【考6】高阶无穷小之间的运算法则

1. 加减的低阶吸收原则

$$o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l),\ l = \min(m,n)$$

例 (1) $o(x^2) + o(x^3) = o(x^2)$

(2) $o(x^3) - o(x^4) = o(x^3)$

(3) $o(x^3) - o(x^3) = o(x^3)$

2. 乘法的叠加原则

$$o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$$

$$x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$$

例 (1): $o(x^4) \cdot o(x^5) = o(x^9)$

(2) $x^6 \cdot o(x^4) = o(x^{10})$

3. 数乘无关原则

$$k\,o(x^n) = o(x^n)$$

$$o(kx^n) = o(x^n)$$

$(k \neq 0)$

例: (1) $o(\frac{1}{6}x^3) = o(x^3)$

(2) $\frac{1}{6}o(x^3) = o(x^3)$

【例3.15】 当 $x \to 0$ 时，用"$o(x)$"表示比 x 高阶的无穷小量，则下列式子中错误的是（ D ）.

A. $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$. ✓　　　　B. $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$. ✓

C. $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$. ✓　　　　D. $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$ ✗

【考7】等价无穷小的充要条件

若 $f(x)\sim g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)+o[g(x)]$

例：当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x \Leftrightarrow \sin x = x+o(x)$.

【考点3】利用泰勒公式求极限（当 $x\to 0$ 时，8个，2个）　记⇒用！

1°. $\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+o(x^7)$

2°. $\arcsin x = x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3) \Rightarrow$ 无条件.

3°. $\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3) \Rightarrow$ 无条件.

4°. $\arctan x = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+o(x^7)$

5°. $e^x = 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$

6°. $\ln(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o(x^4)$

7°. $\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$

8°. $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)$.

例1：当 $x\to 0$ 时，$\sin x = x+o(x) \Leftrightarrow \sin x\sim x$

$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)$

$x-\sin x = \frac{1}{6}x^3-o(x^3)$

$x-\sin x = \frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

$x-\sin x\sim \frac{1}{6}x^3$

【原则1】相消不为零原则　　泰+高+等价 ★

例1：$x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x\sim \underline{\frac{1}{2}x^3}$.

$x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x$

$= \left[x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]-\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]$

$= \frac{1}{2}x^3+o(x^3)$

$\sim \frac{1}{2}x^3$

【例3.16】 证明：$x\to 0$ 时，$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$.

$$x\to 0\text{时},\ x-\sin x=x-\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]=\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\sim\frac{1}{6}x^3.$$

【例3.17】 证明：$x\to 0$ 时，$x-\tan x\sim-\frac{1}{3}x^3, x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$

$$x\to 0\text{时},\ x-\tan x=x-\left[x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]=-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\sim-\frac{1}{3}x^3$$

$$x-\ln(1+x)=x-\left[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\sim\frac{1}{2}x^2.$$

【例3.18】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\underbrace{\sin x}_{\sim x}}{x^4}$. $\frac{0}{0}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$　　$\square\to 0,\ \square-\sin\square\sim\frac{1}{6}\square^3.$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}(\sin x)^3}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\frac{1}{6}.$

【敲重点】 务必记住由泰勒公式推出的 6 个等价无穷小公式（理解）

当 $x\to 0$ 时，有

（1）$x-\sin x\sim$ $\frac{1}{6}x^3$.　　（4）$x-\arcsin x\sim$ $-\frac{1}{6}x^3$.

（2）$x-\tan x\sim$ $-\frac{1}{3}x^3$.　　（5）$x-\arctan x\sim$ $\frac{1}{3}x^3$.

（3）$x-\ln(1+x)\sim$ $\frac{1}{2}x^2$.　　（6）$e^x-1-x\sim$ $\frac{1}{2}x^2$.