2026 年考研数学零基础提前学同步作业

作业 4•七种未定式极限专题计算解析

【23】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\tan^2\dfrac{x}{2}}=$________.

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\tan^2\dfrac{x}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\tan^2\dfrac{x}{2}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x})}$ （分子有理化）

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\tan^2\dfrac{x}{2}}$ （非零因子淡化）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(x+2\sin x)}{2\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$ （二倍角公式化简）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2\sin x}{\dfrac{1}{2}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\dfrac{1}{2}x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{\dfrac{1}{2}x}=2+4=6$.

【24】求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1+x^2\arctan\dfrac{1}{x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1+x^2\arctan\dfrac{1}{x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1+x^2\arctan\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{2}x}$ （等价无穷小代换）

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{\dfrac{1}{2}x}+\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\arctan\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{2}x}$ （四则运算法则）

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\dfrac{1}{2}x}+\lim\limits_{x\to 0^+}2x\arctan\dfrac{1}{x}$ （$\arctan\dfrac{1}{x}$ 为有界函数）

$=2+0=2$.

【25】求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x$.

【解析】$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\cdot\sin x$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\cdot\sin x \qquad (\sin x\text{ 为非零因子，可淡化})$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{-\sin x}=1.$$

【26】$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+e^x\right)$.

【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+e^x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=1$.

【27】求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x-1}\right)$.

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x^3}{\left(2x^2-1\right)(2x-1)}\overset{\text{抓大头}}{=}-\frac{1}{4}$.

【28】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

【解析】先定型，本题为1^∞型未定式极限，利用课程讲解的大招方法.

原式$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x+e^x-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\left(1+e^x\right)}=2$.

【29】求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

【解析】先定型，本题为1^∞型未定式极限，利用课程讲解的大招方法.

原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$.

其中 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\frac{2}{x}-\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{2}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$ （四则运算法则）

$$=\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty} x\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2=2-0=2.$$

因此，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=e^2$.

【30】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{x})$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x(1-\mathrm{e}^{-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-\mathrm{e}^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{3}{2}.$$

【31】 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

【解析】 令 $x=\frac{1}{t}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}t^2}{t^2}=\frac{1}{2}$.

【32】 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

【解析】 先定型，本题为1^∞型未定式极限，利用课程讲解的大招方法.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)}{\frac{1}{x}}}\overset{洛}{=}e^{\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$=e^{-\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}}=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

【小课堂】 $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

【33】 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

【解析】 原式$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x\cdot(\sin x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cdot(\sin x-1)}{\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}}$ （$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$非零因子）

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}}=e^0=1.$$

【34】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\ (a>0,b>0,c>0)$.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}}$

$$\overset{洛}{=}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c}{3}}=e^{\frac{\ln a+\ln b+\ln c}{3}}=e^{\frac{1}{3}\ln abc}=\sqrt[3]{abc}.$$

【35】求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x-\sin x}\cdot(\tan x-1)}$.

因为

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x-\sin x}(\tan x-1)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}\overset{洛}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x}{-\sin x-\cos x}=-\sqrt{2},$$

所以，原式 $=e^{-\sqrt{2}}$.

【36】求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x-b)}\right]^x$.

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x-b)}\right]^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left[\frac{x^2}{(x-a)(x-b)}-1\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(a+b)x^2-abx}{x^2-(a+b)x+ab}}=e^{a+b}$.

2026 年考研数学零基础提前学同步作业

作业 5•连续与间断解析

【37】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}\sin\dfrac{x}{\pi},x\neq0,\\ a,x=0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$______.

【解析】 由题意可知，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=a$，因为

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{2}{x}\sin\frac{x}{\pi}=\lim_{x\to0}\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{\pi}=\frac{2}{\pi},$$

所以 $a=\dfrac{2}{\pi}$.

【38】 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\leqslant0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 a,b 需满足_______.

【解析】 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$. 又因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{ax}=\frac{1}{2a},$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)=b,$$

所以 $\dfrac{1}{2a}=b$，即 $ab=\dfrac{1}{2}$.

【39】 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin2x+e^{2ax}-1}{x}, x\neq0\\ a, x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

【解析】 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=a$.

又因为

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x+e^{2ax}-1}{x}\overset{拆}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{e^{2ax}-1}{x}=2+2a=a$$

所以 $a=-2$.

【40】 函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{1}{x-1}, x\neq0且x\neq1\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=1\end{cases}$ 间断点为_______，类型为_______.

【答案】 $x=0$，跳跃间断点（或第一类间断点）

【解析】 因为

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{1}{x-1}=-\frac{\pi}{4}\lim_{x\to0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$，即函数在 $x=0$ 处连续.

又因为

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{1}{x-1}=e^{-1}\lim_{x\to 1^+}\arctan\frac{1}{x-1}=e^{-1}\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{1}{x-1}=e^{-1}\lim_{x\to 1^-}\arctan\frac{1}{x-1}=-e^{-1}\frac{\pi}{2},$$

所以 $x=0$ 为函数的跳跃间断点.

【41】 设 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　）.

（A）可去间断点　　（B）跳跃间断点

（C）第二类间断点　　（D）连续点

【解析】 因为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=1,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=-1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$，故 $x=0$ 是跳跃间断点，应选（B）.

2026 年考研数学零基础提前学同步作业

作业 6•导数定义

【42】设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$________.

【解析】由导数定义可知，

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}(x+1)(x+2)\cdots(x+n)=n!.$$

【43】判断 $y=e^{-|x|}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

【分析】连续性判定的核心在于“看 $\lim\limits_{x\to0}f(x)\overset{?}{=}f(0)$”，

可导性判定的核心在于“看 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 是否存在”.

【解析】（连续性）因为

$$\lim_{x\to0}y(x)=\lim_{x\to0}e^{-|x|}=e^0=1，且 y(0)=e^0=1，$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}y(x)=y(0)$，故 $y(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

（可导性）因为

$$y'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-|x|}-1}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-x}-1}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$y'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-|x|}-1}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{x}-1}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x}=1,$$

所以 $y'_+(0)\neq y'_-(0)$，于是 $y(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

【44】若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，判断下列说法的正确性.

（1） $f'(x_0)$ 存在； （ ）

（2） $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续； （ ）

（3） $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. （ ）

【解析】（1）对，（2）对，（3）错

【45】若 $f''(x_0)$ 存在，判断下列说法的正确性.

（1） $f''(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续； （ ）

（2） $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续； （ ）

（3） $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. （ ）

【解析】（1）错，（2）对，（3）对

【46】已知 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个领域内有定义，则

（1） $\lim\limits_{h\to+\infty} h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]=$________.

（2） $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=$________.

（3） $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a+5x)-f(a)}{x}=$________.

（4） $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a+\sin x^2)-f(a)}{x^2}=$________.

（5） $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a+x^3)-f(a)}{x^3}=$________.

【分析】本题重点考察导数的推广定义，核心：一凑结构、二看零，重点回顾课程内容.

【解析】（1） $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]=\lim\limits_{h\to+\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)}{\frac{1}{h}}=f'_+(a)$；

（2） $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+(-h))-f(a)}{-h}=f'(a)$；

（3） $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a+5x)-f(a)}{x}=5\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a+5x)-f(a)}{5x}=5f'(a)$；

（4） $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a+\sin x^2)-f(a)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a+\sin x^2)-f(a)}{\sin x^2}\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(a+\sin x^2)-f(a)}{\sin x^2}=f'_+(a)；$$

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(a+x^3\right)-f\left(a\right)}{x^3}=f'\left(a\right)$.

【47】 已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$______.

【解析】 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(3-h\right)-f\left(3\right)}{2h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(3+\left(-h\right)\right)-f\left(3\right)}{\left(-h\right)\cdot\left(-2\right)}=-\dfrac{1}{2}f'(3)=-1$.

【48】 已知 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}=2026$，则 $f\left(0\right)=$______，

$f'\left(0\right)=$______.

【解析】 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}=2026$，且 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=0$.

又因为 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=f\left(0\right)=0$.

于是，由导数定义知

$$f'\left(0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{x^2}x=2026\cdot 0=0.$$

【49】 设 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}},x\neq 0,\\ 0,x=0,\end{cases}$ 则函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处（　　）.

（A）不连续，且为第一类间断点.

（B）不连续，且为第二类间断点.

（C）连续，且 $f'\left(0\right)$ 存在.

（D）连续，但 $f'\left(0\right)$ 不存在.

【解析】 因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\overset{\left(\frac{0}{\infty}\right)}{=}0\text{（已定式），}\quad\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\overset{\left(\frac{0}{1}\right)}{=}0\text{（已定式），}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=f\left(0\right)=0$，故函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续.

又因为

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(0)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0\text{；}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(0)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1\text{，}$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.