2026 最新版

2026 考研数学周洋鑫

《零基础提前学讲义》

微博/b 站/小红书@考研数学周洋鑫

让零基础的同学可以快速入门，完美衔接 2026 考研数学基础班。

目录

零基础 1·考研必备高中知识衔接

【考点1】函数的概念

设 x 与 y 是两个变量，D 是一个非空的实数集，若存在一个对应法则 f，使得对于每一个 $x \in D$，按照这个对应法则，有唯一确定的实数值 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的一个**函数**，记为 $y=f\left(x\right)$，称 x 为函数的**自变量**，y 为函数的**因变量**，D 为函数的**定义域**，并把相应的函数值的全体 $E=\left\{y\middle|y=f\left(x\right),x\in D\right\}$ 称为函数的**值域**.

【敲重点】1. 若两个函数为同一函数，当且仅当两函数的定义域的对应法则完全相同，例如 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=f\left(t\right)$ 为同一个函数，也说明函数的表示与自变量用什么字母无关.

2. 函数定义域是指函数**自变量的取值范围**，具体问题中务必明确函数自变量是哪个部分，例如函数 $f\left(x^2+5\right)$ 与 $f\left(x\right)$ 的自变量均为 x；

3. 在同一对应法则下，$f\left(\square\right)$ 括号内整体的取值范围是一样的.

【例1.1】设 $f(x)$ 的定义域为 $\left[5,10\right]$，则 $f(x^2+1)$ 的定义域为________.

【例1.2】设函数 $f\left(2x+1\right)$ 的定义域为 $\left[1,3\right]$，则函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为________.

【考点2】函数的四种特性

1. 奇偶性

设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对 $\forall x \in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若对 $\forall x \in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

【敲重点】 1. 若 $f(x)$ 偶函数，则 $f(x)$ 图像关于 y 轴对称.

2. 若 $f(x)$ 奇函数，则 $f(x)$ 图像关于原点 $x=0$ 对称，且当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义时，$f(0)=0$.

3. 设 $f(x)$ 在区间 $(-l,l)$ 内有定义，则

$F(x)=f(x)+f(-x)$ 为偶函数，$G(x)=f(x)-f(-x)$ 为奇函数.

4. 奇函数×奇函数=偶函数；奇函数×偶函数=奇函数；偶函数×偶函数=偶函数.

5. 奇函数±奇函数=奇函数；偶函数±偶函数=偶函数；奇函数±偶函数无法确定.

【例1.1】 以下四个函数：

① $f_1(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；　② $f_2(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

③ $f_3(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；　④ $f_4(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

其中是奇函数的个数是_________. .

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个正数 T，使得对于任意 $x \in D$，有 $x+T \in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，且正数 T 为 $f(x)$ 的周期.

【敲重点】 几个常见的周期函数及其最小正周期 T：

（1）$y=\sin\omega x$，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$；　（2）$y=\cos\omega x$，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$；

（3）$y=\tan\omega x$，$T=\dfrac{\pi}{\omega}$；　（4）$y=\cot\omega x$，$T=\dfrac{\pi}{\omega}$；

（5）$y=|\sin x|, T=\pi$；　（6）$y=\sin^2 x, y=\cos^2 x,\ T=\pi$.

3. 单调性

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义.

若对区间 I 中任意不同的两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**严格单调递增**.

若对区间 I 中任意不同的两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**严格单调递减**.

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，且区间 $I \subset D$. 若存在常数 $M>0$，使得对于任意 $x \in I$ 均有 $|f(x)| \le M$，则称 $f(x)$ 在 I 内**有界**. 否则，则称 $f(x)$ 在 I 内**无界**.

【敲重点】 函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是：$f(x)$ 在区间 I 上即有上界，也有下界.（从图像上进行理解）

【例1.2】 设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是（　）.

A．偶函数　　B．无界函数

C．周期函数　　D．单调函数

【考点3】分段函数

如果自变量的不同变化范围内用不同表达式表示的函数称为**分段函数**，例如 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ e^x-1, & x\le 0\end{cases}$ 或 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

【考点4】复合函数

设函数 $f(u)$ 的定义域为 U，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z. 若 $Z\subseteq U$，则称 $y=f\left[g(x)\right]$ 是定义在 D 上的复合函数，其中 x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量. 此外，$y=f(u)$ 称为外层函数，$u=g(x)$ 为内层函数.

【敲重点】务必掌握两类题型：

题型 1：求一个分段函数复合另一个分段函数的结果.

题型 2：已知复合函数结果，求复合之前的函数.

【例1.3】 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\le 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\ge 0\end{cases}$，故 $g\left[f(x)\right]$ 为（　　）.

A. $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\ge 0\end{cases}$.

B. $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\ge 0\end{cases}$.

C. $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\ge 0\end{cases}$.

D. $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\ge 0\end{cases}$.

【例1.4】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}=$（　　）.

A. 0　　　　B. 1

C. $f(x)=\begin{cases}0, & |x|\le 1,\\ 1, & |x|>1,\end{cases}$　　　　D. $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$

【例1.5】 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\ge 0$，则（　　）.

A. $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}, x\le 0$.　　　　B. $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}, 0\le x<1$.

C. $\varphi(x)=\ln(1-x), x\le 0$.　　　　D. $\varphi(x)=\ln(1-x), 0\le x<1$.

【刻意练习】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\0, & |x|=1\\-1, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

【考点5】反函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_y. 若对于任意的 $y\in R_y$，有唯一确定的 $x\in D$，使得 $y=f(x)$，则由此可以确定了一个 y 关于 x 的新函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，并称其为 $y=f(x)$ 的**反函数**.

【敲重点】 1. 单调的函数一定具有反函数.

2. 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 关于 $y=x$ 对称.

3. 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 定义域与值域互相做调换.

4. 若函数 $y=f^{-1}(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数，则有

$$f^{-1}[f(x)]=x, f[f^{-1}(x)]=x.$$

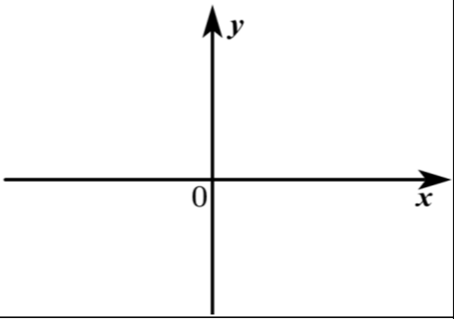
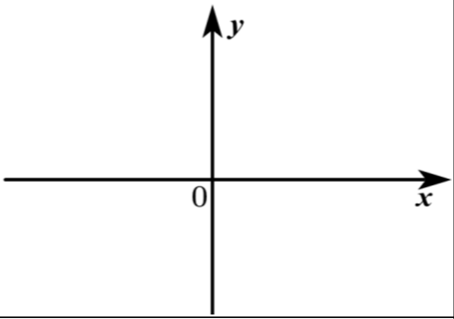
【例1.6】 求反双曲正弦函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 的反函数.

【考点6】基本初等函数

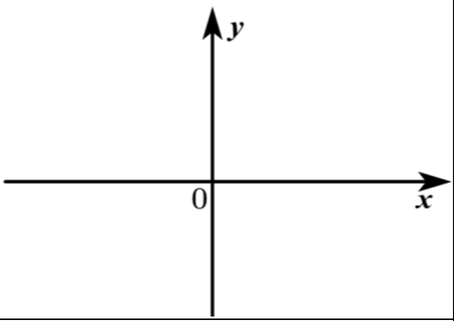
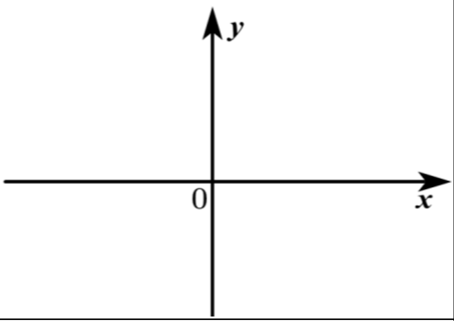
基本初等函数包括：反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数、指数函数.

1. 三角函数

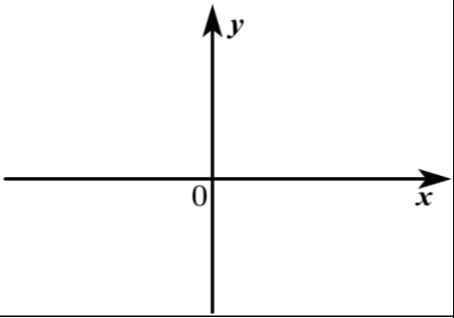
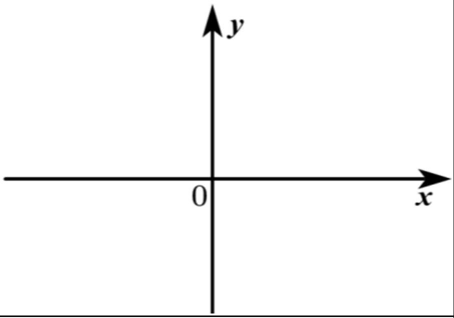
（1）正（余）弦函数

	正弦函数： $y=\sin x$	余弦函数： $y=\cos x$
图像		
定义域		
值域		
周期性		
奇偶性		
有界性		

（2）正（余）切函数

	正切函数： $y=\tan x$	余切函数： $y=\cot x$
图像		
定义域		
值域		
周期性		
奇偶性		

（3）正（余）割函数

	正割函数：$y=\sec x$	余割函数：$y=\csc x$
图像		
周期性		
奇偶性		
重点公式		

（4）诱导公式

① 关于周期性

$\sin(2k\pi+x)=$__________，$\cos(2k\pi+x)$__________，

$\tan(k\pi+x)=$__________，$\cot(k\pi+x)=$__________．$(k\in Z)$

② 关于奇偶性

$\sin(-x)=$__________，$\cos(-x)=$__________，

$\tan(-x)=$__________，$\cot(-x)=$__________．

③ 奇变偶不变，符号看象限

$\sin(\pi+x)=$__________，$\cos(\pi+x)=$__________，

$\sin(\pi-x)=$__________，$\cos(\pi-x)=$__________，

$\sin(\frac{\pi}{2}+x)=$__________，$\cos(\frac{\pi}{2}+x)=$__________，

$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=$__________，$\cos(\frac{\pi}{2}-x)=$__________，

$\tan(\pi+\alpha)=$__________，$\tan(\pi-\alpha)=$__________，

$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=$__________，$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=$__________.

（5）重点特殊函数值速记

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$					
$\cos x$					
$\tan x$					
$\cot x$					
$\sec x$					
$\csc x$					

（6）二倍角公式（与降幂公式）

① 二倍角公式

$\sin 2x=$______________，

$\cos 2x=$______________$=$______________$=$______________.

② 降幂公式

$\sin^2 x=$__________________，$\cos^2 x=$__________________.

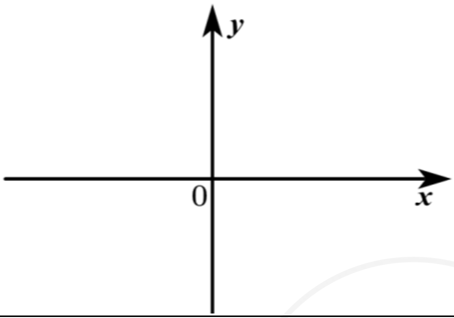
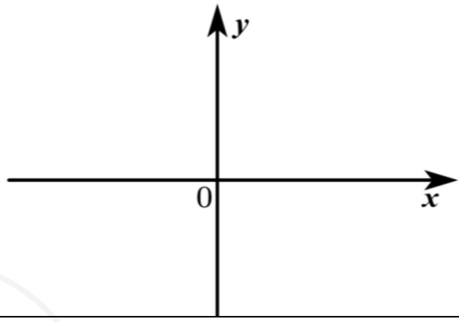
③ 两角和、两角差公式

$\sin(x+y)=$__________________，$\sin(x-y)=$__________________，

$\cos(x+y)=$__________________，$\cos(x-y)=$__________________.

2.反三角函数

（1）反正（余）弦函数

	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$
定义	$y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 内的反函数，记为 $y=\arcsin x$.	$y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 内的反函数，记为 $y=\arccos x$.
图像		
定义域		
值域		
单调性		
奇偶性		
等式		

【例1.7】 思考：$y=\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$ 内的反函数.

【例1.8】 求解 $y=\arcsin(\sin x)$.

（2）常见函数值

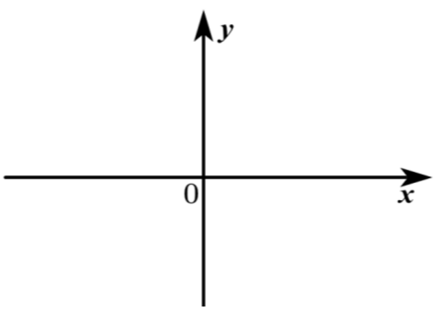
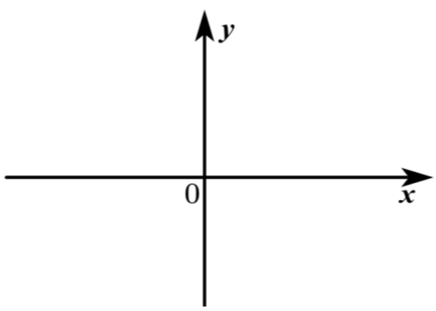
$\arcsin 0=$__________，$\arcsin 1=$__________，$\arcsin\frac{1}{2}=$__________，

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=$__________，$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=$__________，$\arcsin(-1)=$__________，

$\arccos 0=$__________，$\arccos 1=$__________，$\arccos\frac{1}{2}=$__________，

$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=$__________，$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=$__________，$\arccos(-1)=$__________.

（3）反正（余）切函数

	$y=\arctan x$	$y=\operatorname{arccot} x$
定义	$y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的反函数，记为 $y=\arctan x$.	$y=\cot x$ 在区间 $(0,\pi)$ 内的反函数，记为 $y=\operatorname{arccot} x$.
图像		
定义域		

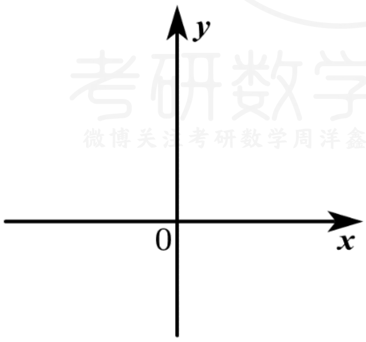
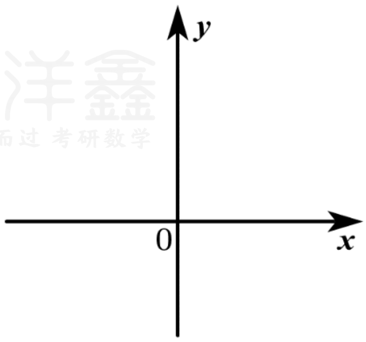
值域		
单调性		
奇偶性		
常用极限	$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=$

（4）常见函数值

$\arctan 0=$__________，$\arctan 1=$__________，$\arctan\sqrt{3}=$__________，

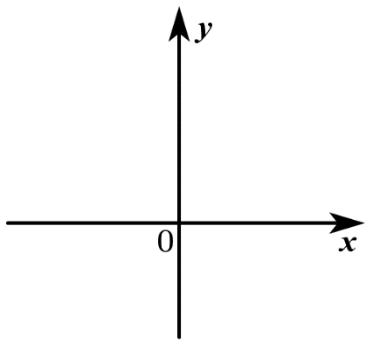
$\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}=$__________，$\arctan(-1)=$__________，$\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=$__________.

3.指数函数

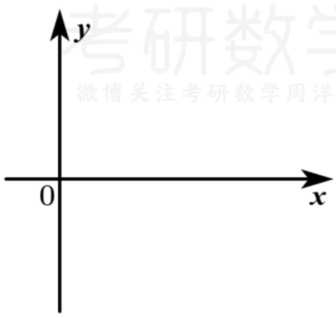
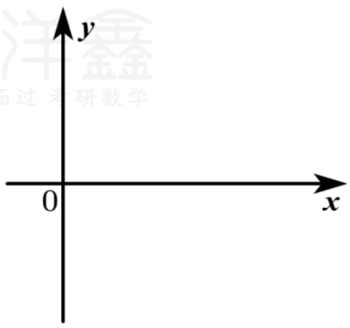
定义	函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 叫做指数函数	
图象	$a>1$	$0<a<1$
		
定义域		
值域		
过定点		
单调性		

极限	$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x =$ ______ , $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x =$ ______ .	$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x =$ ______ , $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x =$ ______ .

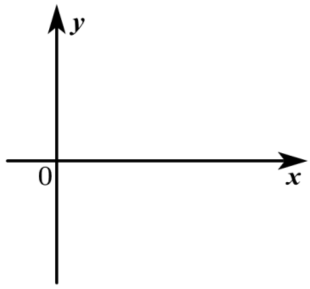
【小课堂】指数函数中常考 $y=e^x$，图像与性质如下：

图象	
极限	

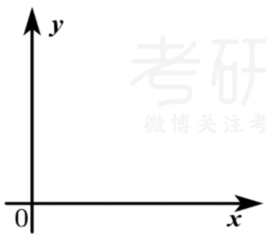
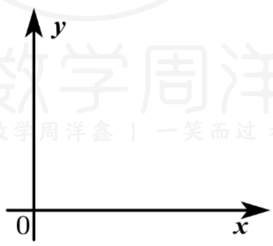
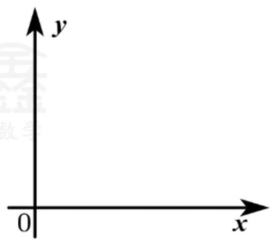
4.对数函数

<table>
<tr><td>定义</td><td colspan="2">函数 $y=\log_a x\,(a>0$ 且 $a\neq1)$叫做对数函数</td></tr>
<tr><td rowspan="2">图象</td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>定义域</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>值域</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>过定点</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>单调性</td><td></td><td></td></tr>
</table>

【小课堂】指数函数中常考 $y=\ln x$，图像与性质如下：

图象	
定义域	
值域	
过定点	
单调性	
运算性质	

5.幂函数

名称	幂函数 $y=x^{\alpha}\left(\alpha\in R\right)$		
第一象限内的函数图象			
过定点			
极限			
运算性质	（1） $x^a\cdot x^b=$__________， （2） $\dfrac{x^a}{x^b}=$__________， （3） $\left(x^a\right)^b=$__________， （4） $x^{-\frac{n}{m}}=$__________.		

【考点7】初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的用一个表达式表示的函数称为**初等函数**，一般地，不能用一个数学式子表达的函数为**非初等函数**，例如分段函数

$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ e^x-1, & x\le 0\end{cases}$，符号函数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 均为非初等函数.

零基础 2·函数极限定义

【注】本节零基础提前学阶段要求较低，重点以理解函数极限定义为主，至于函数极限定义的应用以及函数极限的性质将会在基础阶段重点学习，希望大家注意课程体系的安排。

【考点1】函数极限的定义

【敲重点】类似地，还有以下几种类型的函数极限:

（1）$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$

对于任意 $\varepsilon > 0$，____________________，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

（2）$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$

对于任意 $\varepsilon > 0$，____________________，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

（3）$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$

对于任意 $\varepsilon > 0$，____________________，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

（4）$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$

对于任意 $\varepsilon > 0$，____________________，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

（5）$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

对于任意 $\varepsilon > 0$，____________________，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

零基础 3·函数极限计算

【考点1】极限定型

【例3.1】$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2+1}$.

【例3.2】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+3e^x}{7x+\cos x}$.

【例3.3】$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

【例3.4】$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

【例3.5】（经典题）$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=$（ ）.

A. ∞　　B. 3

C. -1　　D. -3

E. 1

【考点2】无穷小量

1. 定义

若$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=0$，则称$f(x)$为$x\to\square$时的无穷小.

2. 无穷小量比阶

若$\lim\limits_{x\to\square}\alpha(x)=0,\lim\limits_{x\to\square}\beta(x)=0,$ 且$\beta(x)\neq 0$，对于$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$，

（1）若$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称$\alpha(x)$为$\beta(x)$的高阶无穷小，记为$\alpha(x)=o(\beta(x))$；

（2）若$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称$\alpha(x)$为$\beta(x)$的低阶无穷小；

（3）若$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$，则称$\alpha(x)$为$\beta(x)$的同阶无穷小，

（4）当$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$时，称$\alpha(x)$与$\beta(x)$互为等价无穷小，记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

3. 常见等价无穷小

当$x\to 0$时，有：

$$\sin x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arctan x\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x.$$

【敲重点】

【例3.6】当 $x\to 0$ 时，确定下列无穷小量的等价无穷小.

（1）$\sin x^2\cdot(1-\cos x)\sim$ ________.

（2）$\sqrt{1-x^2}-1\sim$ ________.

（3）$\dfrac{\arctan x^3}{e^{x^2}-1}\sim$ ________.

（4）$\tan x-\sin x\sim$ ________.

4. 利用等价无穷小替换求极限

【例3.7】计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)}{x(1-\cos x)}=$ ________.

【例3.8】求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan^2 x}{\left(e^{2x}-1\right)(1-\cos x)}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x-1}\right)}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$

【例3.9】 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x\cdot\sin^2 x\cdot\left(e^{2x}-1\right)}{\left(\sqrt{1-x^3}-1\right)(1-\cos x)}=$ ________.

【例3.10】 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan\left[\ln\left(1+xe^x\right)\right]}{\sin x}=$ ________.

【例3.11】 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{5}}{e^{x^2}-1+\sin x^2}=$ ________.

【例3.12】考虑下列式子

① $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$.　　② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=0$.

③ $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　　④ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=1$.

其中正确的个数为（　　）.

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

【例3.13】$x\to 0$ 时，下列无穷小中哪项是其它三个的高阶无穷小量（　　）.

A. $\ln\left(1-x^2\right)$　　B. $1-\cos x$

C. $\sqrt{1-x^2}-1$　　D. $x-\tan x$

【例3.14】设 $\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)$，$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}),\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$. 当 $x\to 0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是（　　）.

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　B. $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$.

C. $\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$.　　D. $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$.

5. 无穷小的重要性质

无穷小与有界变量乘积仍是无穷小.

6. 高阶无穷小运算法则

设m,n为正整数，

（1）加减法的**低阶吸收原则**	$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^l),l=\min\{m,n\}$
（2）乘法的**叠加原则**	$o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$ $x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$
（3）数乘的**无关原则**	$o(x^m)=o(kx^m)=ko(x^m)$ ，$(k\neq 0)$

【例3.15】 当$x\to 0$时，用“$o(x)$”表示比x高阶的无穷小量，则下列式子中错误的是（　　）.

A. $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$.　　B. $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$.

C. $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$.　　D. $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

7. 等价无穷小充分必要条件

【考点3】利用泰勒公式求极限

【例3.16】证明：$x \to 0$ 时，$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$.

【例3.17】证明：$x \to 0$ 时，$x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3, x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$

【例3.18】求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【敲重点】务必记住由泰勒公式推出的 6 个等价无穷小公式（理解）

当 $x \to 0$ 时，有

（1）$x - \sin x \sim$ ________.

（2）$x - \tan x \sim$ ________.

（3）$x - \ln(1+x) \sim$ ________.

（4）$x - \arcsin x \sim$ ________.

（5）$x - \arctan x \sim$ ________.

（6）$e^x - 1 - x \sim$ ________.

【例3.19】已知当 $x \to 0$ 时，$f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小量，则（　　）.

（A）$k=1, c=4$.

（B）$k=1, c=-4$.

（C）$k=3, c=4$.

（D）$k=3, c=-4$.

（E）$k=2, c=-4$.

【例3.20】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - \arcsin x}{\tan x - \sin x}$.

【考点4】洛必达法则

【注意】（1）洛必达法则的要求是极其严格的，虽然在大学学习过程中我们广泛地利用该方法求解函数极限，但经过多年教学发现这其实是很多同学的短板，很多同学对洛必达法则的理解只是浅显地停留在第一个基本要求上.

（2）要想学习洛必达法则，就不得不使用到基本的函数的导数计算，在微积分教材的编排上导数极限将会在第二章进行学习，但作为考研的同学，一开始的学习不掌握洛必达法则这一方法，函数极限计算的基本体系就难以形成，大家也不用担心，在零基础阶段适用洛必达法则都是一些非常基本的导数计算，大家都可以直接入手！

（3）要注意，这一定义在基础阶段我们将会更加深入地进行探讨.

1. 法则 1：（$\frac{0}{0}$ 型）

若满足

（1）$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\square} g(x)=0$，

（2）在 $x\to\square$ 时，$f'(x)$，$g'(x)$ 均存在且 $g'(x)\neq 0$，

（3）$\lim\limits_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞），

则 $\lim\limits_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=A$（或 ∞）.

2. 法则 2：（$\frac{\infty}{\infty}$ 型）

若满足

（1）$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\square} g(x)=\infty$，

（2）在 $x\to\square$ 时，$f'(x)$，$g'(x)$ 均存在且 $g'(x)\neq 0$，

（3）$\lim\limits_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞），

则 $\lim\limits_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=A$（或 ∞）.

【敲重点】若极限 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 是不存在，且不是无穷大量的情形时，则不能得出 $\lim\limits_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在且不是无穷大量情形.

【例3.21】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-e^{x}+1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1}$

【例3.22】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=$________.

【例3.23】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}=$________.

【例3.24】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$____________.

A．0　　B．1

C．2　　D．3

【考点5】极限四则运算

若 $\lim f(x)=A$， $\lim g(x)=B$，则：

（1） $\lim\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

（2） $\lim\left[f(x)g(x)\right]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$

（3） $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

【例3.25】判断下列命题的正确性.

（1）若 $\lim\left[f(x)+g(x)\right]$ 存在，则 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 均存在.　　（　　）

（2）若 $\lim\left[f(x)+g(x)\right]$ 存在，且 $\lim g(x)$ 存在，则 $\lim f(x)$ 存在.　　（　　）

【例3.26】若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^{x}\right]=1$，则 $a=$

A． 0　　B． 1

C． 2　　D． 3

【例3.27】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}$

C. 2　　D. 3

零基础 4· 七种未定式极限专题

【考点1】方法体系（先定型后定法，定法之前先四化）

【考点2】七种未定式专题讲解

（1）$\dfrac{0}{0}$型未定式

【例4.1】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$__________.

【例4.2】限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

【例4.3】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x(1-\cos x)}$

【例4.4】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

（2）$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

【例4.5】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+e^{x}\right)}{x}$.

【例4.6】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{4}+x^{3}+2\right)}{\ln\left(x^{8}+5x^{4}+1\right)}$.

（3）$\infty-\infty$ 型未定式

【例4.7】 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{x^{2}}-\frac{1}{x\tan x})$

【例4.8】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^{2}(e^{\frac{1}{x}}-1)-x\right]$

（4）1^{∞}型未定式（重要）

【大招总结】

【例4.9】$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

【例4.10】$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

【例4.11】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$__________.

（5）$0\cdot\infty$ 型未定式

【例4.12】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.

（6）∞^0 型未定式

（7）0^0 型未定式

【例4.13】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

【考点3】左右开弓法求极限

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a.$

（2）$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=a$

【注】常见的需要分左右极限的形式

【例4.14】设 $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x-1}, & x>1\\ ax, & x\le 1\end{cases}$，若 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在，则 $a=$______.

【例4.15】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}=$______.

【例4.16】$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=$______.

零基础 5·连续与间断

【考点1】函数连续的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个领域内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

【例5.1】 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

【例5.2】 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则

A．$ab=\dfrac{1}{2}$　　B．$ab=-\dfrac{1}{2}$

C．$ab=0$　　D．$ab=2$

【例5.3】设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ ae^{2x}, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$______.

【考点2】闭区间函数连续

【考点3】初等函数的连续性

【例5.4】若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$______.

【考点4】函数的间断点及其分类

【例5.5】求下列函数的间断点，并判定间断点的类型.

（1） $f\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{\left|x\right|}$；（2） $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{x}}$；

（3） $f\left(x\right)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{2}}{2e^{\frac{1}{x}}+1}$；（4） $f\left(x\right)=\sin\dfrac{1}{x}$.

【例5.6】求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}-1}$ 的间断点，并判定间断点的类型.

提前学 6·导数的定义

【考点1】导数的定义

若函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的某个邻域内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

也记做 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

【敲重点】导数定义也可取不同的形式，在解题中常用的有：

（1）增量定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

（2）计算型定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

（3）若判定函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是否可导，仅需判定极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 是否存在.

【例6.1】已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\cos x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=$______.

【例6.2】设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$______.

【例6.3】设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x^2-4}=1$，求 $f'(2)=$______.

【考点2】单侧导数

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

【敲重点】

（1）**定理：** $f'(x_0)=A\Leftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=A$.

（2）若判定函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是否可导，仅需判定 $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$ 是否均存在，且相等.

【例6.4】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, x\le 1\\ x^2,\ x>1\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的（　　）.

A．左、右导数都存在　　B．左导数存在、右导数不存在

C．左导数不存在、右导数存在　　D．左、右导数都不存在

【考点3】函数的可导性与连续性之间的关系

若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，反之不成立.

【例6.5】判断下列命题的正确性.

（1）若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

（2）若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

（3）若 $f'(x_0)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

（4）若 $f''(x_0)$ 存在，则 $f''(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

若 $f''(x_0)$ 存在，则 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

若 $f''(x_0)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

【例6.6】设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$，试确定 a、b 的值，使 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导.

【刻意练习】设 $f(x)=\begin{cases} x^2+b, x<2, \\ ax+1, x\geqslant 2, \end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $x=2$ 可导，则（　　）.

A．$a=4,b=7$　　B．$a=4,b=1$

C．$a=4,b=5$　　D．$a=2,b=3$

提前学 7·导数的计算

【考点1】必备知识

（1）导数表【必背】

$(c)' = 0$　　　　$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$　（α 实常数）

$(\sin x)' = \cos x$　　　　$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$　　　　$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$　　　　$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}\ (a>0, a\neq 1)$　　　　$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(a^x)' = a^x \ln a\ (a>0, a\neq 1)$　　　　$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　　　$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$　　　　$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$　　　　$\left[\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

（2）求导法则

$$[f(x)\pm g(x)]' = f'(x)\pm g'(x)$$

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\quad (g(x)\neq 0)$$

【考点2】复合函数求导

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，如果 $\varphi(x)$ 在 x 处可导，$f(u)$ 在对应点 u 处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导，且有 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$.

【例7.1】求下列函数的导数

（1） $y=\tan e^{x^3}$

（2） $y=\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

【例7.2】设 $y=\cos x^2\cdot\sin^2\dfrac{1}{x}$，求 y'.

【例7.3】已知 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$，求 $f'(x)$.

【例7.4】设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$，其中 f 可微，求 y'.

【例7.5】设 $y=(1+\sin x)^x$，求 y'.

【例7.6】设 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$，求 $f'(x)$.

【例7.7】设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f_n(x)=f(f(\cdots f(x)))$（$n$ 个 f），求 $f_n'(x)$.

【考点3】隐函数求导法则

【例7.8】函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定，则 $\frac{dy}{dx}=$________.

【例7.9】设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-xe^y$ 确定，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$________.

【例7.10】设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=\mathrm{e}^y$ 所确定的隐函数, $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$__________.

【考点4】参数方程求导（数一、二）

【例7.11】设$\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$（$t$为参数），则$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$____________.

【考点5】分段函数求导

【例7.12】设$f(x)=\begin{cases} \sin x, x>0 \\ x \quad, x\le 0 \end{cases}$，求$f'(x)$.

【例7.13】 设 $f(x)=\max\{x,x^2,x^3\}$，求 $f'(x)$.

【例7.14】 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)+f'(1)=$________.

【例7.15】 设 $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1+x^2\right)^{\frac{2}{x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则（　　）.

（A） $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.　　（B） $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但不可导.

（C） $f'(0)$ 不存在.　　（D） $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

提前学 8· 不定积分

【考点1】原函数的定义

若对 $\forall x \in I$，有 $F'(x) = f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

【例8.1】（1）证明：$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 的一个原函数；

（2）证明：$\ln|x|$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数.

【考点2】不定积分定义

函数 $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数 $F(x)+C$（C 为任意常数）称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记为 $\int f(x)dx$，即 $\int f(x)dx = F(x)+C$.

【例8.2】判断下列不定积分是否正确.

（1）$\int \sin x \cos x dx = \dfrac{1}{2}\sin^2 x + C$；

（2）$\int \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$.

（3）$\int f'(ax)dx = f(ax)+C$.

【例8.3】 已知 $\int f(x)dx = e^{\sin x} + C$，则 $f(x) =$ ______.

【例8.4】 利用不定积分定义求下列不定积分.（多动脑想！）

（1）$\int x^3 dx =$ ______________.

（2）$\int \frac{1}{x} dx =$ ______________.

（3）$\int a^x dx =$ ______________.

（4）$\int e^x dx =$ ______________.

（5）$\int \sin x dx =$ ______________.

（6）$\int \cos x dx =$ ______________.

（7）$\int \sec^2 x dx$ ______________.

（8）$\int \csc^2 x dx =$ ______________.

（9）$\int \sec x \tan x dx$ ______________.

（10）$\int \csc x \cot x dx =$ ______________.

（11）$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ______________.

（12）$\int \frac{1}{1+x^2} dx =$ ______________.

（13）$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$ ______________.

（14）$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$ ______________.

【考点3】不定积分运算性质

（1）数乘：$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

（2）加减法：$\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

【考点4】基本积分表（不定积分运算基础，必记！）

1．$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1，实常数)$

2．$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$

3．$\int a^{x}dx = \frac{1}{\ln a}a^{x}+C \quad (a>0, a\neq 1)$

4．$\int e^{x}dx = e^{x}+C$

5．$\int \sin xdx = -\cos x + C$

6．$\int \cos xdx = \sin x + C$

7．$\int \tan xdx = -\ln|\cos x| + C$

8．$\int \cot xdx = \ln|\sin x| + C$

9．$\int \sec xdx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

10．$\int \csc xdx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

11．$\int \sec^2 xdx = \tan x + C$

12．$\int \csc^2 xdx = -\cot x + C$

13．$\int \tan x \sec xdx = \sec x + C$

14．$\int \cot x \csc xdx = -\csc x + C$

15．$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C \quad (a>0)$

16．$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

17．$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \ (a>0)$

18．$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C \ (a>0)$

18．$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C \ (a>0)$

【例8.5】求不定积分$\int\left(x^3+e^x+3\sin x\right)dx$.

【例8.6】求不定积分$\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$.

【例8.7】求不定积分$\int\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx$.

【例8.8】求不定积分$\int\left(2^x-3^x\right)^2dx$.

【例8. 9】求不定积分 $\int \tan^2 x dx$.

【例8. 10】求不定积分 $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$.

【例8. 11】求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$.

【考点5】第一类换元积分法（凑微分法）

1. 内容

已知 $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C$，且 $\varphi(x)$ 可导，则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) \overset{u=\varphi(x)}{=} \int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+\mathrm{C} = F(\varphi(x))+\mathrm{C}.$$

2. 常见的凑微分形式

（1）$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$

（2）$\int f(\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2}\mathrm{d}x=\int f(\frac{1}{x})\mathrm{d}\frac{1}{x}$

（3）$\int f(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x}$

（4）$\int \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$

（5）$\int x^{n-1}f(x^n)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\mathrm{d}x^n$，$n\neq 0$

【例8.12】 求下列不定积分.

（1）$\int \sin 2x dx$　　（2）$\int e^{5x-7}dx$

【例8.13】 求下列不定积分.

（1）$\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$　　（2）$\int \frac{\sec^2\frac{1}{x}}{x^2}dx$

【例8.14】求下列不定积分.

（1）$\int \cos e^x \cdot e^x dx$ （2）$\int \frac{\ln x}{x} dx$

【例8.15】求下列不定积分.

（1）$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ （2）$\int \frac{\sin \sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}} dx$

【例8.16】求下列不定积分

（1）$\int x\sqrt{1-x^2} dx$ （2）$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

【例8.17】求下列不定积分

（1）$\int \cos^2 x dx$ （2）$\int \sin^3 x dx$.

【考点6】第二类换元积分法

已知 $x=\varphi(t)$ 可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，若 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t)+\mathrm{C}$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令}x=\varphi(t)} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t)+\mathrm{C} = G(\varphi^{-1}(x))+\mathrm{C}.$$

其中，$t=\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数.

【例8.18】求不定积分 $\int \sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$.

【例8.19】求不定积分$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$

【例8.20】$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$.

【例8.21】计算不定积分$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

【例8.22】$\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}} dx$.

【考点7】分部积分法

【例8.23】求下列不定积分

（1）$\int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ （2）$\int x^2\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$

【例8.24】求下列不定积分

（1）$\int x\cos x\mathrm{d}x$ （2）$\int x\cos^2 x\mathrm{d}x$

【例8.25】求下列不定积分

（1）$\int x\ln x dx$ （2）$\int x^x \ln x dx$

【例8.26】求下列不定积分

（1）$\int x\arctan x dx$ （2）$\int x^2 \arctan x dx$

【例8.27】求下列不定积分

（1）$\int \ln x dx$ （2）$\int \arctan x dx$