2026 考研数学零基础提前学课堂手迹版讲义

新浪微博：考研数学周洋鑫

零基础提前学通关测试卷

1. 已知下列四个函数

① $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$；$=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ 奇
$g(x)-g(-x)$

② $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$；偶
$g(x)+g(-x)$

③ $f(x)=\frac{a^x+1}{a^x-1}(a>0)$； $a^x\neq 1$ $x\neq 0$ 奇

④ $f(x)=x\sin x+\cos x$，偶

其中是奇函数的个数是（ B ）.

A. 1. 　　　　B. 2.

C. 3. 　　　　D. 4.

考：$F(x)=f(x)+f(-x)$ 偶
$G(x)=f(x)-f(-x)$ 奇

③ $f(-x)=\frac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=\frac{1+a^x}{1-a^x}=-\frac{a^x+1}{a^x-1}=-f(x)$

④ $f(-x)=-x\cdot(-\sin x)+\cos x=x\sin x+\cos x$

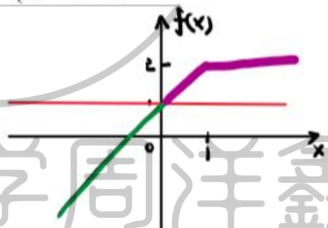
2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, x\le 1,\\ 2, \quad x>1,\end{cases}$ 则（ C ）.

A. $f[f(x)]=\begin{cases}x+1, x\le 0,\\ 2, \quad x>0.\end{cases}$ 　　~~B.~~ $f[f(x)]=\begin{cases}x+1, x\le 1,\\ 2, \quad x>1.\end{cases}$

C. $f[f(x)]=\begin{cases}x+2, x\le 0,\\ 2, \quad x>0.\end{cases}$ 　　~~D.~~ $f[f(x)]=\begin{cases}x+2, x\le 1,\\ 2, \quad x>1.\end{cases}$

$f[f(x)]=\begin{cases}f(x)+1, & f(x)\le 1\\ 2, & f(x)>1\end{cases}$

$=\begin{cases}x+2, & x\le 0\\ 2, & x>0\end{cases}$



3. 当 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^{\sin x}$ 与 $x^n\ln(1+x)$ 是同阶的无穷小，则正整数 $n=$（ B ）.

A. 1. 　　　　B. 2.

C. 3. 　　　　D. 4.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x^n\ln(1+x)}=A\neq 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\cdot[e^{\tan x-\sin x}-1]}{x^{n+1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^{n+1}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^{n+1}}$ $\sim x\cdot\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^3$

则 $n+1=3$ 　$n=2$.

4. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中比其他三个都高阶的是（　　）.

A. $\sqrt{1-x}-1$. 1　　B. $e^{x^2}-\cos x$. 2

C. $\ln(1+x^2)-\sin x$. 1　　D. $\tan x-\arctan x$. 3

A. $[1+(-x)]^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}(-x)$

B. $e^{x^2}-1+1-\cos x\sim x^2+\frac{1}{2}x^2=\frac{3}{2}x^2$

C. $\underset{2}{\ln(1+x^2)}-\underset{1}{\sin x}=-\underset{1}{\sin x}+\underset{2}{\ln(1+x^2)}\sim-\sin x\sim -x$

D. $\tan x-\arctan x=\left[x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]-\left[x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]$

$=\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\sim\frac{2}{3}x^3$

$\tan x-x+x-\arctan x\sim\frac{1}{3}x^3+\left(\frac{1}{3}x^3\right)=\frac{2}{3}x^3$

5. 极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+b\sin x}{c\left(e^{-\sqrt{x}}-1\right)+d\ln(1-x)}=2$，则（ A ）.

A. $a=-2c$　　B. $a=2c$

C. $b=-2d$　　D. $b=d$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a\ln(1+\sqrt{x})}{c(e^{-\sqrt{x}}-1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a\cdot\sqrt{x}}{c\cdot(-\sqrt{x})}=2$

$\dfrac{a}{-c}=2$

6. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\tan x-\tan(\tan x)\right]\overset{\sim x}{\tan x}}{1-\cos x^2}=$（　　）.

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{1}{3}$

C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $-\dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\boxed{\tan x}-\tan\left(\boxed{\tan x}\right)}{\frac{1}{2}x^3}$　$\sim-\frac{1}{3}\tan^3x\sim-\frac{1}{3}x^3$

$x\to 0$, $x-\tan x\sim-\frac{1}{3}x^3$

$\square\to 0$, $\square-\tan\square\sim-\frac{1}{3}\square^3$

$=-\frac{2}{3}$.

7. 下列函数中，以 $x=0$ 为跳跃间断点的是（ C ）.

A. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0,\\ 1, x=0.\end{cases}$ 连

B. $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, x\neq 0,\\ 0, x=0.\end{cases}$ 无

C. $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x}, x\neq 0,\\ 1, x=0.\end{cases}$ ✓

D. $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0,\\ 0, x=0.\end{cases}$ ✗ $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$

A. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1=f(0)$

B. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0\end{cases}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}\end{cases} \neq$

8. 设函数 $f(x)=\max\left(e^x,1\right)$，则 $f'(0)=$（ B ）.

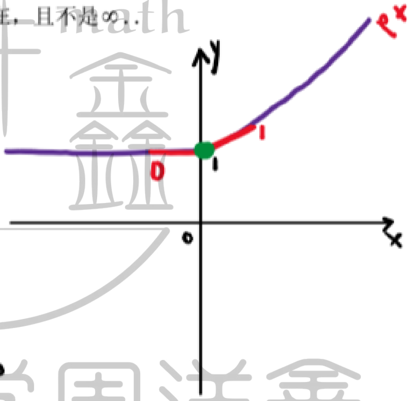
A. 1.　　B. 不存在，且不是 ∞.

C. 0.　　D. ∞.

$f(x)=\begin{cases}e^x, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ （$\sim x$）

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-1}{x}=0$



9. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-2}{x}=4$，则 $f'(0)=$（ B ）.

A. 0.　　B. 2.

C. -2.　　D. 4.

$\lim\limits_{x\to 0}[f(2x)-2]=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(2x)=2 \Rightarrow f(0)=2.$

$\exists$　　$\overset{连}{=} f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(0)}{x}=4$

$2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0+\boxed{2x})-f(0)}{2x}$

$=2f'(0)=4 \Rightarrow f'(0)=2.$

10. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{1+x^2}, x\le 0, \\ \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, x>0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ D ）.　$f(0)=0$

A. 极限不存在.　　B. 极限存在但不连续.

C. 连续但不可导.　　D. 可导但 $f'(0)=0$.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}}=0$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-} \underset{0}{x^2}\sin\frac{1}{1+x^2}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0} f(x)=0=f(0)$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2\sin\frac{1}{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to0^-}x\sin\frac{1}{1+x^2}=0$$

11. 设函数 $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$ 不存在,但不为 ∞.　e^{∞}

$$\lim_{x\to0^+}\underset{0\cdot\infty}{xe^{\frac{t}{x}}}\xlongequal{令\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{t\to+\infty}e^t=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}\underset{0\cdot0}{xe^{\frac{1}{x}}}\xlongequal{2}0$$

12. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{x^4+1}$，则极限 $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=$ 1.

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}+x}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{x+\frac{1}{x}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$$

$$f(t)=\frac{t}{t^2-2}\Rightarrow f(x)=\frac{x}{x^2-2}$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{2}{x^2-2}\xlongequal{2}\frac{2}{2}=1$$

13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x-1}\right)=$________.

令 $x=-t$ 则

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2+t-1}\right)$

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{-2t+2}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+t-1}}$　　$\dfrac{\infty}{\infty}$

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{-2t}{\sqrt{t^2}+\sqrt{t^2}}$

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{-2t}{t+t}=-1$

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 则 $f'(0)=$__0__.

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}-1}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\sim-\frac{1}{6}x^3}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{6}x^3}{x^2}=0.$

15. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan 2x+e^{2ax}-1}{\sqrt{1+x}-1}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$__$-\frac{4}{3}$__.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan2x+e^{2ax}-1}{\sqrt{1+x}-1}=a$　　$(1+x)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}x$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan2x+e^{2ax}-1}{\frac{1}{2}x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan2x}{\frac{1}{2}x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2ax}-1}{\frac{1}{2}x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\frac{1}{2}x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2ax}{\frac{1}{2}x}$

$=4+4a=a$

16. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 可导，且 $g(0)=0$，$g'(0)=1$，$f'(0)=2$. 若 y 与 x 满足方程 $x^3+y^3-\sin 3x+6y=0$，且 $u=f\left[g(x)+\arctan y\right]$，则 $\left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=0}=$ ___3___.

$$\frac{du}{dx}=f'[g(x)+\arctan y]\cdot\left[g'(x)+\frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right]$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0}=f'(0)\cdot\left[g'(0)+\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}\right]$$

$$=2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=3$$

$x^3+y^3-\sin 3x+6y=0$

$$3x^2+3y^2\cdot\frac{dy}{dx}-3\cos 3x+6\frac{dy}{dx}=0$$

当 $x=0$ 时，$y^3+6y=0\Rightarrow y(y^2+6)=0\Rightarrow y=0$

当 $x=0,y=0$ 时，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}$.

17. （5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$（$n$ 为正整数）. 1^∞

$$I=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}-1\right]}$$

$$=e^{\frac{1}{n}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{x}}\quad \frac{0}{0}$$

$$=e^{\frac{1}{n}\lim\limits_{x\to0}\left(e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}\right)}$$

$$=e^{\frac{1}{n}\cdot[1+2+\cdots+n]}$$

$$=e^{\frac{1}{n}\cdot\frac{(1+n)n}{2}}=e^{\frac{n+1}{2}}$$

$$I=e^{\frac{1}{n}\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{x}}$$

$$=e^{\frac{1}{n}\lim\limits_{x\to0}\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)}{x}}$$

$$=e^{\frac{1}{n}\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}+\cdots+\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{nx}-1}{x}\right)}$$

$$=e^{\frac{1}{n}[1+2+\cdots+n]}$$

18. （每题 5 分，共 10 分）求下列函数极限.

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

$$(1)\ \lim_{x\to0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{x^2\cdot\left[\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right]}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\sin x+1-\cos x}{x^2}\sim x^2+\frac{1}{2}x^2=\frac{3}{2}x^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right]\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}.$$

18. （每题 5 分，共 10 分）求下列函数极限.

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$　　（2）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$　1^∞

$$(2)\ I=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin x}\cdot\left[\frac{1+\tan x}{1+\sin x}-1\right]}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x\cdot(1+\sin x)}}\quad \tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3,\ \sin x\sim x,\ 1+\sin x\to1$$

$$=e^0=1$$

19. （共 15 分）求下列函数的导数.

（1）（2 分）$y=\ln(\csc x-\cot x)$

（2）（2 分）$y=\left(\arcsin\dfrac{x}{2}\right)^2$

（3）（2 分）$y=\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

（4）（2 分）设 $y=f(\sin^2x)$，f 可导，求 y'.

（5）（2 分）设 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x$，求 $f'(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}}$.

$$(1)\ y'=\frac{1}{\csc x-\cot x}\left(-\csc x\cdot\cot x+\csc^2x\right)$$

$$(2)\ y'=2\arcsin\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$(3)\ y'=\frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$$

$$(4)\ y'=f'(\sin^2x)\cdot2\sin x\cdot\cos x$$

$$(5)\ f(x)=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)}$$

$$f'(x)=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)}\cdot\left[\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{x^2}\right]$$

20. （本题满分 5 分）

设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$．

解：$2x-y'=e^y\cdot y'$　①

$2-y''=e^y\cdot y'\cdot y'+e^y\cdot y''$　②

当 $x=0$ 时，$-y+1=e^y \Rightarrow y=0$．

当 $x=0,y=0$ 代入①则．$-y'=y' \Rightarrow y'=0$

当 $x=0,y=0,y'=0$ 代入②则 $2-y''=y'' \Rightarrow y''(0)=1$

21. （本题满分 10 分）

$f(0)=1$

已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}, & x>0, \\ xe^x+1, & x\leqslant 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$．

解：当 $x>0$ 时，$f'(x)=(x^{2x})'=(e^{2x\ln x})'=e^{2x\ln x}\cdot 2(\ln x+x\cdot\frac{1}{x})$

当 $x<0$ 时，$f'(x)=e^x+xe^x$

当 $x=0$ 时，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{2x}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\boxed{2x\ln x}}-1}{x}$　　$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x\ln x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}2\ln x=\infty$ 不存在

则 $f'(x)=\begin{cases} 2e^{2x\ln x}(\ln x+1), & x>0 \\ e^x(x+1) & x<0 \end{cases}$

22. （本题满分 20 分）求下列不定积分.

（1）$\int \sin^4 x dx$　　　　（2）$\int \frac{1}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$

（3）$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$　　　　（4）$\int (\arcsin x)^2 dx$

（5）$\int x^2 \arctan x dx$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

(1) $\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx$

$= \frac{1}{4}\int 1\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \int \frac{1}{8}dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

22. （本题满分 20 分）求下列不定积分.

（1）$\int \sin^4 x dx$　　　　（2）$\int \frac{1}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}dx$

（3）$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$　　　　（4）$\int (\arcsin x)^2 dx$

（5）$\int x^2 \arctan x dx$

(2) $\frac{1}{2}\int \sec^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) d\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

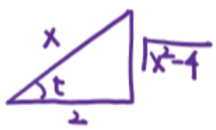
$= \frac{1}{2}\cdot \tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+C.$

(3) 令 $x=2\sec t$ 则

$I = \int \frac{2\tan t}{2\sec t} d(2\sec t)$

$\sec t = \frac{x}{2} \Rightarrow \cos t = \frac{2}{x}$

$= \int \frac{\tan t}{\sec t}\cdot 2\sec t\cdot \tan t\, dt$



$= 2\int \tan^2 t\, dt$

$= 2\cdot\int\left(\sec^2 t-1\right)dt$

$= 2\left(\tan t - t\right)+C.$

$= 2\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} - \arccos\frac{2}{x}\right)+C.$

22. （本题满分 20 分）求下列不定积分.

（1）$\int \sin^4 x dx$ （2）$\int \frac{1}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)} dx$

（3）$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$ （4）$\int \underbrace{(\arcsin x)^2}_{u} \underbrace{dx}_{v}$

（5）$\int x^2 \arctan x dx$

(4) $x(\arcsin x)^2 - \int x \cdot 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= x(\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} d(-x^2+1)$

$= x(\arcsin x)^2 + 2\int \underbrace{\arcsin x}_{u} \, d\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{v}$

$= x(\arcsin x)^2 + 2\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2} - 2\int \cancel{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} dx$

$= x(\arcsin x)^2 + 2\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2} - 2x + C.$

22. （本题满分 20 分）求下列不定积分.

（1）$\int \sin^4 x dx$ （2）$\int \frac{1}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)} dx$

（3）$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$ （4）$\int (\arcsin x)^2 dx$

（5）$\int x^2 \arctan x dx$