2026 考研数学零基础提前学课堂手迹版讲义

新浪微博：考研数学周洋鑫

零基础提前学（6）

【回顾1】极限定型

（1）未定式 $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $0\cdot\infty$ $\infty-\infty$ 1^∞ ∞^0 0^0 8+6

（2）已定式 代入并极限

【回顾2】无穷小的代换

（1）记住公式（8+6）

（2）乘除法因式可替换 $\square+\square$

（3）加减法慎用替换 $\square+\square$

（4）推广使用

（5）和取低阶原则

【回顾3】泰勒公式

（1）记住公式

（2）相消不为零原则

（3）上下同阶原则

【回顾4】洛必达法则

（1）应用条件 $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

$x\to+\infty$, $a^x >> x^\alpha >> \ln x$. $(a>1, \alpha>0)$

（2）注意bug点

【回顾5】四则运算 $\lim\limits_{x\to\square}[f(x)\pm g(x)] \overset{拆}{=} \lim\limits_{x\to\square}f(x)\pm\lim\limits_{x\to\square}g(x)$

（1）都存在才可以拆开

（2）四则运算性质

$\lim\limits_{x\to\square}f(x)$	$\lim\limits_{x\to\square}g(x)$	$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\square}[f(x)\pm g(x)]$
$\exists$	$\exists$	$\exists$
$\exists$	不$\exists$	不$\exists$
不$\exists$	不$\exists$	未知

证明：假设 $\lim\limits_{x\to\square}[f(x)+g(x)]$ 存在.

$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=\lim\limits_{x\to\square}[\underbrace{f(x)+g(x)}_{\exists}-\underbrace{f(x)}_{\exists}]=$存在

矛盾！故 $\lim\limits_{x\to\square}[f(x)+g(x)]$ 不存在.

【例3.25】判断下列命题的正确性.

（1）若 $\lim\left[f(x)+g(x)\right]$ 存在，则 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 均存在.　　（ ✗ ）

（2）若 $\lim\left[f(x)+g(x)\right]$ 存在，且 $\lim g(x)$ 存在，则 $\lim f(x)$ 存在.　　（ ✓ ）

$\exists$　　$\exists$

相

【大招方法1】加减法中只要见到存在就拆出

$$\lim_{x\to\square}\left[\square+\square+\square\right]=\text{存在}.$$

存在

拆

拆分大法 ⇒ 高手!

【例3.26】若 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^{x}\right]=1$，则 $a=$ C .

A. 0　　　　B. 1

C. 2　　　　D. 3

$$\lim_{x\to0}\Big[\underbrace{\frac{1}{x}}_{\infty}-\underbrace{\frac{1}{x}e^{x}}_{\infty}+\underbrace{ae^{x}}_{a}\Big]\overset{=\exists}{=}1$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}e^{x}\right)+a\lim_{x\to0}e^{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-e^{x}\sim-x}{x}=1-a$$

则 $1-a=-1\Rightarrow a=2$.

【大招方法2】非零因子 → 先算出.

若 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=A\neq0$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=A\lim\limits_{x\to0}g(x)$.

【注】乘除法中非零项可以先算出!

例1: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}\sin^{3}x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^{3}x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{3}}{\frac{1}{6}x^{3}}=6.$

例2: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1-x}{\cos x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1-x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^{2}}{\frac{1}{2}x^{2}}=1.$

例3: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1-x}{x^{2}}$

① $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-1-x}{x^{2}}\cancel{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x}{x^{2}}=\infty$

② $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1-0}{x^{2}}\cancel{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-1\sim x}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty$

【注】只有非零因子可以先代入算出这个部分的极限结果.

【例3.27】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ $\frac{0}{0}$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$

C. 2 D. 3

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$ 高 低 同

$\frac{0}{0}$ 0 ∞ $A\neq 0$

∃ 不∃ ∃

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{2x}$

拆 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x}{2x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{x}$

$=\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}.$

$-1\le\cos\square\le 1$

$-1\le\cos\frac{1}{x}\le 1$

【例3.27】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$

C. 2 D. 3

高阶 $f(x)$

方二: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{2x}$ $\sim 3\sin x\sim 3x$

$=\frac{3}{2}.$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{3\sin x\sim 3x}$ $\frac{0}{0}$

$=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}$

$=0$

零基础4·七种未定式极限专题

【考点1】方法体系

定型 →(未) 化简(四化) → 计算
①等价无穷小($\square\to 0$, 乘除)
②泰勒公式($x\to 0$, 8个)
③洛必达($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$)
④四则

定型 →(已) 代入求极限

【考】“四化”

（1）非零因子淡化

（2）加减法中存在项可拆化

（3）根式有理化

（4）幂指函数幂指转换化 $u^v=e^{\ln u^v}=e^{v\ln u}.$

例1：$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^3}$

洛 泰
△ △
△

[分析] $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x\cdot1}{x^3}=\cancel{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}}=\frac{1}{6}.$

$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{x}{x^3}-\frac{\sin x\cos x}{x^3}\right]\ \cancel{拆}$

不且

$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$

$\square\to0,\ \square-\sin\square\sim\frac{1}{6}\square^3$

解. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x-\sin 2x}{2x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}(2x)^3}{2x^3}=\frac{2}{3}.$

【考点2】七种未定式专题讲解

（1）$\frac{0}{0}$型未定式　①等价替换 ②泰勒 ③洛 ④四则运算.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}\ \frac{0}{0}$

【例4.1】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=$________.　$\frac{0}{0}$

方一：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{2x\cdot\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-x}{2x\cdot1}=-\frac{1}{2}.$

方二：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$

[考1] $f(x)\to1$，则 $\ln f(x)\sim f(x)-1$.

分析：$\ln f(x)=\ln[1+f(x)-1]\sim f(x)-1$

【例4.2】 限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$.

解. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left[\frac{\sin x}{x}-1\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\frac{1}{6}.$

【例4.3】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{x}}{x(1-\cos x)}$ 　$\frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{x}}{x\cdot\frac{1}{2}x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}\cdot[e^{\tan x-x}-1]}{\frac{1}{2}x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{\frac{1}{2}x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^3}$

$=\frac{2}{3}.$

$\cancel{① \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-1}{\frac{1}{2}x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{\frac{1}{2}x^3}}$

$\cancel{② \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-1+1-e^{x}}{\frac{1}{2}x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{\frac{1}{2}x^3}}$

$\cancel{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-1}{1-e^{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{-x}=-1}$

【方法】"e^f-e^g"型

$e^f-e^g=e^g\cdot[e^{f-g}-1]$

【例4.4】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$. 　$\frac{0}{0}$

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3\cdot\left[\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right]}$ 非零因子 $\neq0$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}$

$=\frac{1}{4}.$

$\cancel{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+\tan x)^{\frac{1}{2}}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\tan x}{x^3}=\infty}$

$\cancel{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+\tan x)^{\frac{1}{2}}-1+1-(1+\sin x)^{\frac{1}{2}}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\tan x+(-\frac{1}{2}\sin x)}{x^3}}$

$\cancel{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\tan x}{-\frac{1}{2}\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x}{-\frac{1}{2}x}=-1}$

【注】 $x\to0$, $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$.

方一：$\tan x(1-\cos x)\sim x\cdot\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^3$

方二：$\left[x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right]-\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]$

$=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\sim\frac{1}{2}x^3.$

方三：$\tan x-\sin x$

$=(\tan x-x)+(x-\sin x)\sim\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^3=\frac{1}{2}x^3.$

（2）$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式　①洛必达　②抓大头　③上下同除最大项

【例4.5】$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$.　$\frac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to\square}\frac{\ln[\bigcirc]}{\ln[\bigcirc]}$　$\frac{\infty}{\infty}$

方一：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}$　$\frac{\infty}{\infty}$　$\underline{e^x>>1}$　$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$.

方二：当 $x\to+\infty$ 时，$e^x>>1$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$.

【例4.6】$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^4+x^3+2)}{\ln(x^8+5x^4+1)}$.　$\frac{+\infty}{+\infty}$

解：当 $x\to+\infty$ 时，$x^4>>x^3>>2$，$x^8>>5x^4>>1$

则 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x^4}{\ln x^8}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4\ln x}{8\ln x}=\frac{1}{2}$.

（3）$\infty-\infty$ 型未定式　$\lim\limits_{x\to\square}[f(x)-g(x)]$　$\infty-\infty$

①通分

②令 $x=\frac{1}{t}$.

③泰勒法.

【例4.7】$\lim\limits_{x\to 0}(\underset{\infty}{\frac{1}{x^2}}-\underset{\infty}{\frac{1}{x\tan x}})$

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\frac{1}{3}$.

【例4.8】$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x\right]$　$\infty-\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}x^2(e^{\boxed{\frac{1}{x}}}-1)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}x$

$=\infty$

解：令 $x=\frac{1}{t}$ 则

$\lim\limits_{t\to0}\left[\frac{1}{t^2}(e^t-1)-\frac{1}{t}\right]$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{e^t-1-t\sim\frac{1}{2}t^2}{t^2}$

$=\frac{1}{2}$.

$t\to0$，$e^t-1-t\sim\frac{1}{2}t^2$

【例4.8】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x\right]$　$\infty-\infty$　提公因式　"配凑法"

方: $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left[\underbrace{e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}}_{e^{\square}-1-\square}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{2}$

（4）1^∞ 型未定式（重要）　　$\lim f(x)^{g(x)\to\infty}$, $f(x)\to 1$

【大招总结】 $\boxed{\lim u^v \overset{1^\infty}{=\!=} e^{\lim v\cdot(u-1)}}$

[分析] $\lim\limits_{x\to\square}u(x)^{v(x)}\overset{1^\infty}{=\!=}\lim\limits_{x\to\square}e^{v(x)\ln u(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}v(x)\ln u(x)}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\square}v(x)\cdot[u(x)-1]}$

例1. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot x}=e$　1^∞

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$；$1^\infty$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；$1^\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}$；$1^\infty$　$=\frac{1}{x}+1$　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{kx}$（$k$ 为正整数）. 1^∞

(1) $e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}(-x)}=e^{-1}$

(2) $e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot2x}=e^2$

(3) $e^{\lim\limits_{x\to\infty}2x\cdot\frac{1}{x}}=e^2$

(4) $e^{\lim\limits_{x\to\infty}kx\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}=e^{-k}$

2019 年数二真题（本题数一数三均需完成）

9. $\lim\limits_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=$________. 1^∞

$I=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x}(x+2^x-1)}$

$=e^{2\lim\limits_{x\to0}\frac{x+2^x-1}{x}}$

$=e^{2\lim\limits_{x\to0}(1+2^x\ln2)}$

$=e^{2(1+\ln2)}$

$=e^{2+2\ln2}$

$=e^2\cdot e^{2\ln2}=e^2\cdot\cancel{e}^{\ln2^2}=4e^2.$

$\boxed{x\to0,\ a^x-1\sim x\ln a}$

$a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a$

$e^{2\lim\limits_{x\to0}\frac{x+2^x-1}{x}}$

$=e^{2\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}\right)}$

$=e^{2\left(1+\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln2}{x}\right)}$

$=e^{2(1+\ln2)}$

【例4.9】$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$. 1^∞

解：$I=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x^2)}\cdot(\cos x-1)}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot(-\frac{1}{2}x^2)}$

$=e^{-\frac{1}{2}}$.

【例4.10】$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$. 1^∞

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$

解：$I=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^x-1}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{(e^x-1)x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x\cdot x}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}$.