2026 考研数学零基础提前学课堂手迹版讲义

新浪微博：考研数学周洋鑫

零基础提前学（7）

【1】函数极限方法回顾

1. 等价无穷小代换
2. 泰勒公式展开
3. 洛必达法则　$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\ \ \infty$　~~不存在~~
4. 四则运算

【2】两个注意点

1. 非零因子可以先代入算出
2. 加减法中见到存在项就拆开计算

【考】七种未定式极限计算　$\frac{0}{0}\quad\frac{\infty}{\infty}\quad 0\cdot\infty\quad \infty-\infty\quad 1^{\infty}\quad \infty^{0}\quad 0^{0}$

1. 定型—四化—定法
2. 七种未定式每一种计算方法体系

$$\boxed{\lim u^{v}\overset{1^\infty}{=\!=}e^{\lim v(u-1)}}$$

【例4.11】$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=1^{\infty}$

$$I=e^{\lim\limits_{x\to0}\cot x\cdot\left(\frac{1+e^x}{2}-1\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\overset{=1}{\cos x}}{\sin x}\cdot\frac{e^x-1}{2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1\cdot x}{2x}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{e^x-1}{2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{2x}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}}.$$

（5）$0\cdot\infty$ 型未定式　$\begin{cases}\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}\ ✓\\ \frac{\infty}{\frac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty}\ ✓\end{cases}$

【例4.12】求极限 $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x$. $0\cdot\infty$ 极式.

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{洛}{=}} \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}(-x)=0.$$

$$\boxed{\begin{aligned}&【考】\ \lim_{x\to0^+} x\ln x=0\\ &\lim_{x\to0^+} x^p\ln^q x=0\quad(p>0,q>0)\end{aligned}}$$

(6) ∞^0 型未定式 ✓ $\lim\limits_{x\to\square} u^v \overset{1^\infty}{=\!=} \lim\limits_{x\to\square} e^{v\ln u} = e^{\lim\limits_{x\to\square} v(u-1)}$

(7) 0^0 型未定式 ✓ $\lim\limits_{x\to\square} u^v \overset{\infty^0}{\underset{0^0}{=\!=}} \lim\limits_{x\to\square} e^{v\ln u} = e^{\lim\limits_{x\to\square} v\ln u}$

【例4.13】求极限 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x}$ 0^0

$$L=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\cdot\ln x}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}$$
$$=e^0=1$$

【2025 年数学一】若 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-1}{\ln x\ln(1-x)}=$ ___-1___.

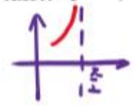
$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{\ln x\cdot(-x)}$$

$x\to0^+$ 时, $\ln[1+(-x)]\sim -x$

$\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x=0$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{-x\ln x}=-1$$

【例1.2】设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$,则 $f(x)$ 是(B).

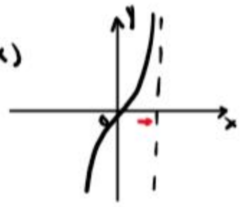


✗A. 偶函数 ✓B. 无界函数

✗C. 周期函数 ✗D. 单调函数

$$f(-x)=(-x)\cdot(-\tan x)e^{-\sin x}=x\tan x\cdot e^{-\sin x}\neq f(x)$$

$f(0)=0$ $f(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $f(\pi)=0$



$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} x\tan x\cdot e^{\sin x}=\infty$$
$$\frac{\pi}{2}\quad +\infty\quad e^1$$

【经验】一般地,函数中如果函数 x^n,一般都不是周期函数.

【考点】无穷大量一定是无界变量.

【考点3】左右开弓法求极限

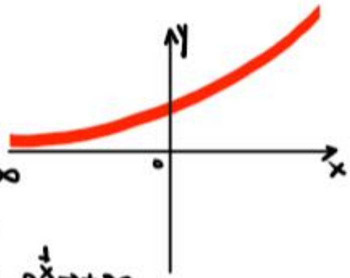
分

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \overset{\text{右}}{\lim\limits_{x\to x_0^+}} f(x)=\overset{\text{左}}{\lim\limits_{x\to x_0^-}} f(x)=a.$

（2）$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=a$

【考】常见的需要分左右极限的形式

1. e^{∞} 型.

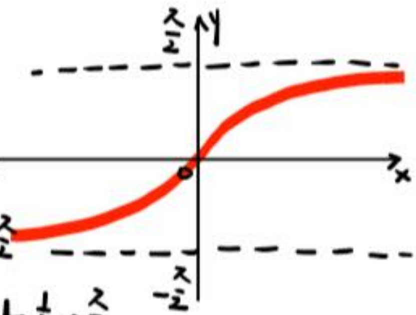


(1) $x\to\infty$ 时，$e^x \Rightarrow \begin{cases} x\to+\infty,\ e^x\to+\infty \\ x\to-\infty,\ e^x\to 0 \end{cases}$

(2) $x\to 0$ 时，$e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \begin{cases} x\to 0^+,\ \frac{1}{x}\to+\infty,\ e^{\frac{1}{x}}\to+\infty \\ x\to 0^-,\ \frac{1}{x}\to-\infty,\ e^{\frac{1}{x}}\to 0 \end{cases}$

(3) $x\to\infty$ 时，$e^{\frac{1}{x}}\to 1$ （不分）

2. $\arctan\infty$ 型.



(1) $x\to\infty$ 时，$\arctan x \Rightarrow \begin{cases} x\to+\infty,\ \arctan x\to\frac{\pi}{2} \\ x\to-\infty,\ \arctan x\to-\frac{\pi}{2} \end{cases}$

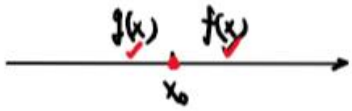
(2) $x\to 0$ 时，$\arctan\frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} x\to 0^+,\ \frac{1}{x}\to+\infty,\ \arctan\frac{1}{x}\to\frac{\pi}{2} \\ x\to 0^-,\ \frac{1}{x}\to-\infty,\ \arctan\frac{1}{x}\to-\frac{\pi}{2} \end{cases}$

3. $|x|$ 型，$x\to 0$ 时.

(1) $x\to 0$ 时，$|x| \Rightarrow \begin{cases} x\to 0^+,\ x>0,\ |x|=x \\ x\to 0^-,\ x<0,\ |x|=-x. \end{cases}$

(2) $x\to 1$ 时，$\underset{x>0}{|x|=x}$ （不分）

4. $F(x)=\begin{cases} f(x), & x>x_0 \\ g(x), & x\le x_0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)$.



$\lim\limits_{x\to x_0^+} F(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0^-} F(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)$

【例4.14】设 $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x-1}, & x>1\\ ax, & x\le 1\end{cases}$，若 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在，则 $a=$ $\underline{\frac{\pi}{2}}$.

解. $\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \arctan\frac{1}{x-1} = \frac{\pi}{2}\\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} ax = a\end{aligned}\right\} =$　　$x\to 1^+,\ x-1\to 0^+,\ \frac{1}{x-1}\to +\infty$

【例4.15】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}=$ $\underline{\frac{\pi}{2}}$.　　e^{∞}　$\arctan\infty$

[分析] $x\to 0^+,\ \frac{1}{x}\to +\infty,\ e^{\frac{1}{x}}\to +\infty,\ \arctan\frac{1}{x}\to \frac{\pi}{2}$

$x\to 0^-,\ \frac{1}{x}\to -\infty,\ e^{\frac{1}{x}}\to 0,\ \arctan\frac{1}{x}\to -\frac{\pi}{2}$

解: $\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\frac{1}{x} &= \frac{\pi}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+\cancel{1}}{e^{\frac{1}{x}}-\cancel{1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{抓}{=}} \frac{\pi}{2}\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\frac{1}{x} &= -\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1} \overset{\frac{1}{-1}}{\underset{代}{=}} \frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\} =$ 存在

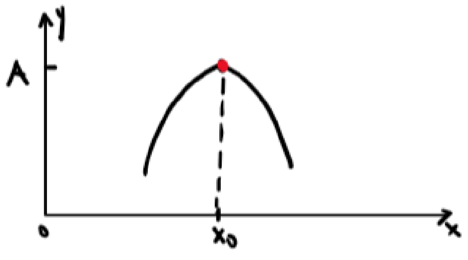
零基础 5 连续与间断

【考点1】函数的连续

1. 函数连续的定义

若 $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

2. 几何上的理解



$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
A

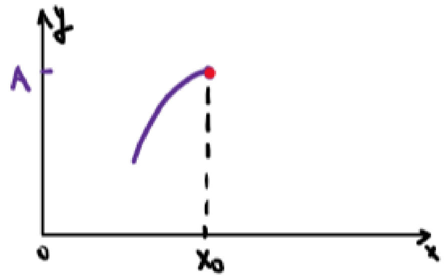
3. 连续的包含的信息

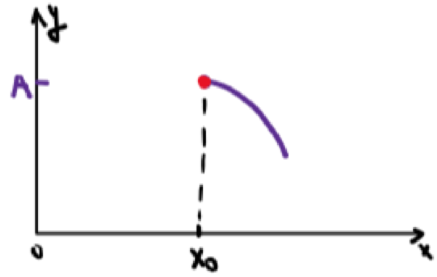
若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续 $\Rightarrow \begin{cases}① \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \text{ 存在.}\\ ② f(x_0) \text{ 存在.}\\ ③ \text{相等}\end{cases}$

【注1】左连续 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

【注2】右连续 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

$\Leftrightarrow$ 连续.





4. 连续的判定

不需要分左右： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

需要分左右时： $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

【例5.1】 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ $e^{-\frac{1}{2}}$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = a$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \overset{1^\infty}{=\!=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\cos x - 1)}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)} = e^{-\frac{1}{2}}$

【例5.2】 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 A

A. $ab=\frac{1}{2}$　　　　B. $ab=-\frac{1}{2}$

C. $ab=0$　　　　D. $ab=2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos\boxed{\sqrt{x}}}{ax} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{ax} = \dfrac{1}{2a}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} b = b$

$f(0) = b$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2a} = b$

【例5.3】设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ ae^{2x}, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ $\underline{-2}$.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^-} f(x)=f(0)$$

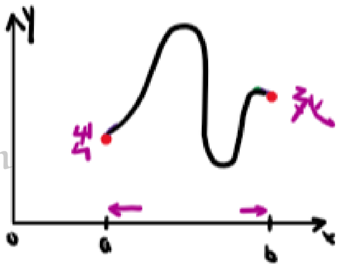
$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\boxed{\tan x}}}{\arcsin\boxed{\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x}{\frac{1}{2}x}=-2$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-} ae^{2x}=a$$

$$f(0)=a$$

【考点2】闭区间连续

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续 $\Leftrightarrow$ ① (a,b) 连续 ② $x=a$ 处右连续 ③ $x=b$ 处左连续.



【考点3】初等函数的连续性

1. 什么是初等函数？要会判断
2. 定理：初等函数在定义区间内均是连续的.
3. 对于初等函数而言，求连续区间不就是求"定义区间".

例：求 $y=\arcsin\frac{2x-1}{2}$ 连续区间.

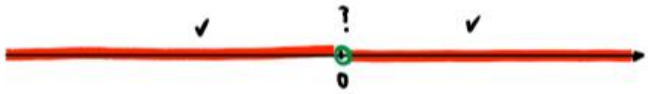
解：初等函数.

$-1\le\frac{2x-1}{2}\le1 \Rightarrow -\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$

连续区间为 $[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$.

单侧　单侧

【例5.4】 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$ ___-2___ ✓



f(x)在x=0处连续 ⇒ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=a$

又 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \boxed{2x}}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\boxed{2ax}}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2ax}{x}$

$=2+2a$

则 $2+2a=a\Rightarrow a=-2$.