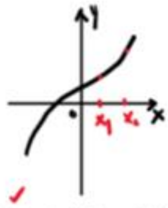
2026 考研数学零基础提前学课堂手迹版讲义

新浪微博：考研数学周洋鑫

零基础提前学（2）

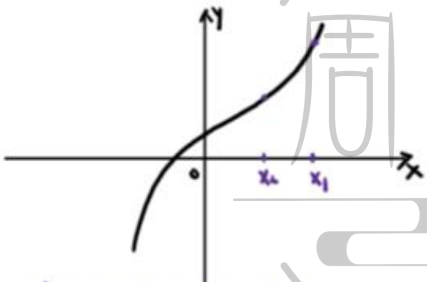


3. 单调性

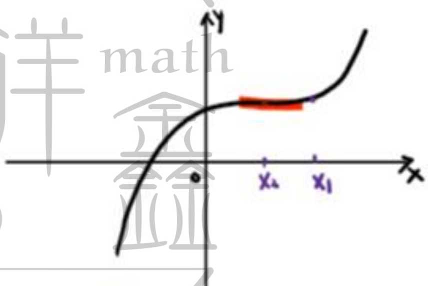
设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义.

若对区间 I 中任意不同的两点 x_1，x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**严格单调递增**.

若对区间 I 中任意不同的两点 x_1，x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**严格单调递减**.



当 $x_1 > x_2$ 时，$f(x_1) > f(x_2)$



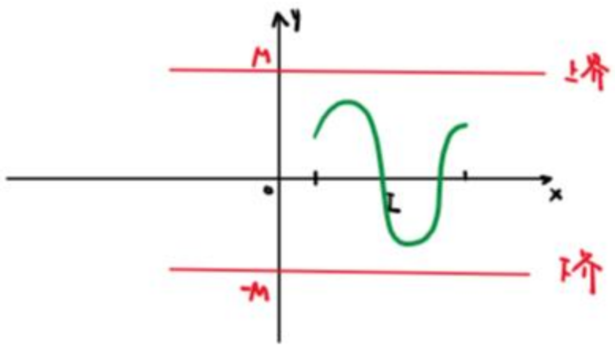
当 $x_1 > x_2$ 时，$f(x_1) \geq f(x_2)$

单调不减

4. 有界性

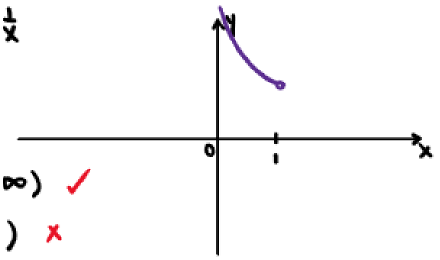
$\forall x \in I$，存在 $M>0$，使得 $|f(x)| \leq M \Rightarrow f(x)$ 在 I 内有界

$-M \leq f(x) \leq M$



【敲重点】函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是：$f(x)$ 在区间 I 上即有上界，也有下界.（从图像上进行理解）

例1. $y=\frac{1}{x}$



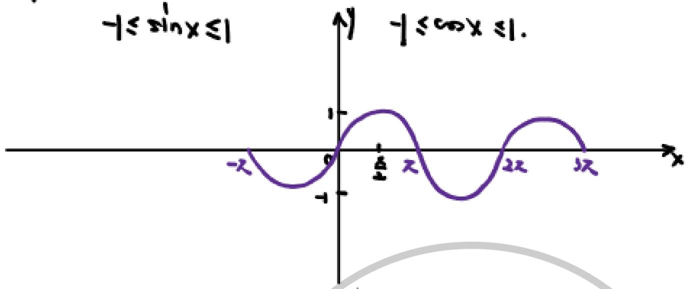
解⇒图

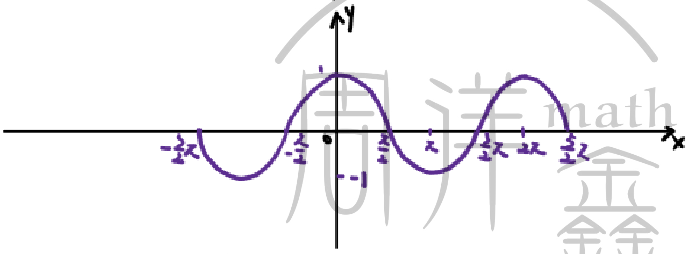
(1) $[1,+\infty)$ ✓

(2) $(0,1)$ ×

例: (1) $y=\sin x$　　$y=\cos x$

$-1\le \sin x\le 1$　　$-1\le \cos x\le 1$.





(2) $y=\sin\frac{1}{x}$　　$-1\le \sin\square\le 1$

有界✓

【例1.2】 设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是（　　）.

A．偶函数　　B．无界函数

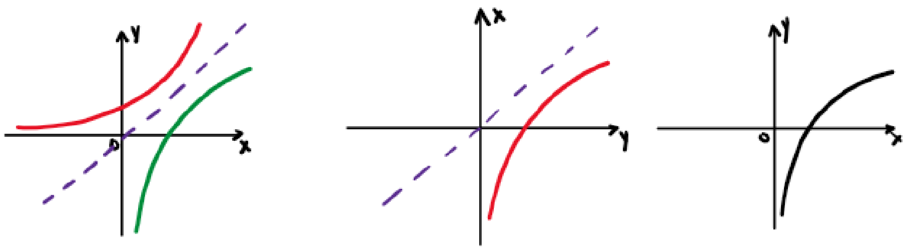
C．周期函数　　D．单调函数

【考点5】反函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_y．若对于任意的 $y\in R_y$，有唯一确定的 $x\in D$，使得 $y=f(x)$，则由此可以确定了一个 y 关于 x 的新函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，并称其为 $y=f(x)$ 的反函数.

第一类反函数　　第二类.

$y=e^x \longrightarrow x=\ln y \xrightarrow{\text{调换}x,y} y=\ln x$



$x\Rightarrow$因　　$y\Rightarrow$因

$y\Rightarrow$自　　$x\Rightarrow$自

$y=f(x) \longrightarrow x=f^{-1}(y) \longrightarrow y=f^{-1}(x)$

【敲重点】 1. 单调的函数一定具有反函数.

2. 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 关于 $y=x$ 对称.

3. 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 定义域与值域互相做调换.

4. 若函数 $y=f^{-1}(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数，则有

$$f^{-1}[f(x)]=x, f[f^{-1}(x)]=x.$$

【例1.6】 求反双曲正弦函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 的反函数.

$f(x)$　奇

解: $e^y = x+\sqrt{x^2+1}$

$(e^y-x)^2 = x^2+1$

$e^{2y}-2xe^y+\cancel{x^2}=\cancel{x^2}+1$

$x=\dfrac{e^{2y}-1}{2e^y}=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

则反函数为 $f^{-1}(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. 奇

双曲正弦

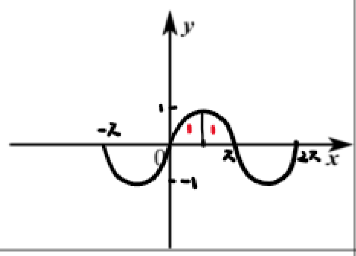
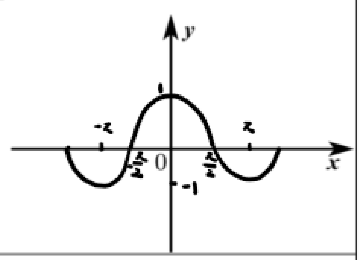
【考点6】基本初等函数　　反对幂三指

基本初等函数包括：反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数、指数函数.

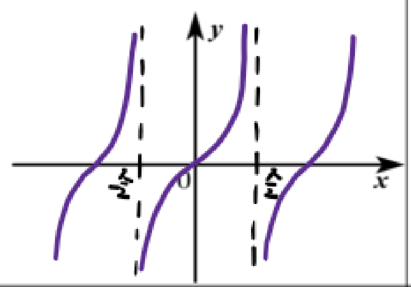
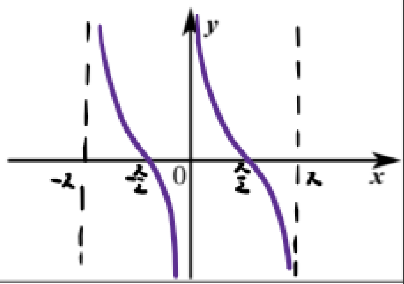
$y=x^{\alpha}$　　$y=a^x$

1. 三角函数

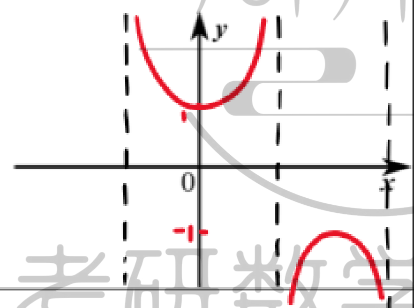
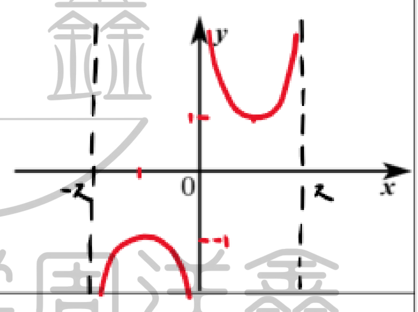
(1) 正（余）弦函数

	正弦函数：$y=\sin x$	余弦函数：$y=\cos x$
图像		
定义域	R	R
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$
奇偶性	奇	偶
有界性	有界	有界

（2）正（余）切函数

	正切函数：$y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$	余切函数：$y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$
图像		
定义域	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k=0,\pm1\cdots)$	$x\neq k\pi\ (k=0,\pm1\cdots)$
值域	R	R
周期性	$T=\pi$	$T=\pi$
奇偶性	奇	奇

（3）正（余）割函数

	正割函数：$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$	余割函数：$y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$
图像		
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$
奇偶性	偶	奇
重点公式	1. $\sec x=\frac{1}{\cos x}$，$\csc x=\frac{1}{\sin x}$ 2. $1+\tan^2 x=\sec^2 x$，$1+\cot^2 x=\csc^2 x$	

（4）诱导公式

① 关于周期性

$\sin(2k\pi+x)=$ $\sin x$，$\cos(2k\pi+x)$ $\cos x$，

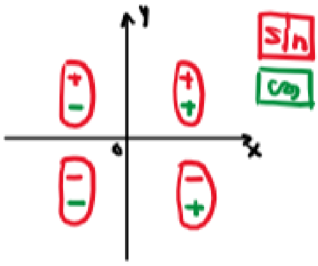
$\tan(k\pi+x)=$ $\tan x$，$\cot(k\pi+x)=$ $\cot x$．$(k\in Z)$

② 关于奇偶性

$\sin(-x)=$ $-\sin x$，$\cos(-x)=$ $\cos x$，

$\tan(-x)=$ $-\tan x$，$\cot(-x)=$ $-\cot x$.

③ 奇变偶不变，符号看象限



$\sin(\boxed{\pi}+x)=$ $-\sin x$，$\cos(\boxed{\pi}+x)=$ $-\cos x$，

$\sin(\boxed{\pi}-x)=$ $+\sin x$，$\cos(\boxed{\pi}-x)=$ $-\cos x$

$\sin(\boxed{\frac{\pi}{2}}+x)=$ $+\cos x$，$\cos(\boxed{\frac{\pi}{2}}+x)=$ $-\sin x$

$\sin(\frac{\pi}{2}-x)=$ $+\cos x$，$\cos(\frac{\pi}{2}-x)=$ $+\sin x$，

$\tan(\pi+\alpha)=$ $+\tan\alpha$，$\tan(\pi-\alpha)=$ $-\tan\alpha$，

$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=$ $-\cot\alpha$，$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=$ $+\cot x$.

（5）重点特殊函数数值速记

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	×
$\cot x$	×	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\sec x$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	×
$\csc x$	×	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

（6）二倍角公式（与降幂公式）

① 二倍角公式

$\sin 2x=$ $2\sin x\cos x$，

$\cos 2x=$ $2\cos^2 x-1$ $=$ $1-2\sin^2 x$ $=$ $\cos^2 x-\sin^2 x$.

② 降幂公式

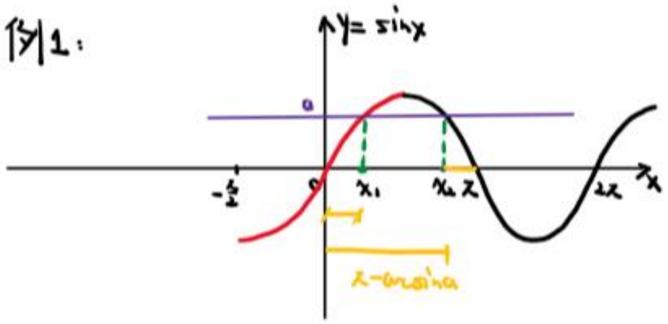
$\sin^2 x=$ $\frac{1-\cos 2x}{2}$，　$\cos^2 x=$ $\frac{1+\cos 2x}{2}$.

③ 两角和、两角差公式

$\sin(x+y)=$ $\sin x\cos y+\cos x\sin y$　$\sin(x-y)=$ $\sin x\cos y-\cos x\sin y$

$\cos(x+y)=$ $\cos x\cos y-\sin x\sin y$　$\cos(x-y)=$ $\cos x\cos y+\sin x\sin y$

例1：



$x_1 = \arcsin a$

$x_2 = \pi - \arcsin a.$

【例1.7】 思考：$y=\sin x$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi\right]$ 内的反函数.

$\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3}{2}\pi$

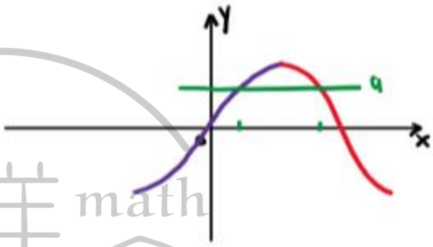
$-\dfrac{\pi}{2} \le \pi - x \le \dfrac{\pi}{2}$

$y = \sin x = \sin(\boxed{\pi - x})$

$\pi - x = \arcsin y$

$x = \pi - \arcsin y$

则 $y = \pi - \arcsin x.$



【例1.8】 求解 $y=\arcsin(\sin x)$. 网红题

$F^{-1}[F(x)] = x$

$y(x+2\pi) = y(x) \Rightarrow T = 2\pi$

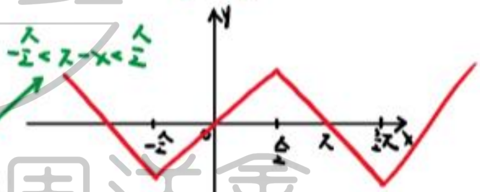
当 $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ 时，$y = \arcsin(\sin x) = x.$

当 $\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{3}{2}\pi$ 时，$y = \arcsin(\sin x)$

$= \arcsin[\sin(\pi - x)]$

$= \pi - x$

$-\dfrac{\pi}{2} < \pi - x < \dfrac{\pi}{2}$



（2）常见函数值

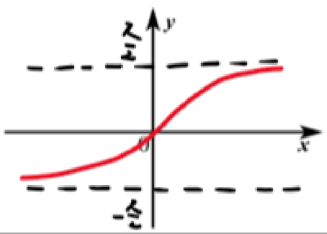
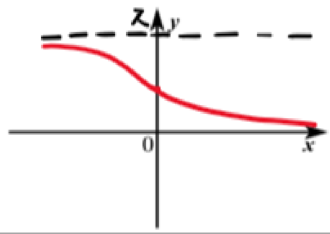
$\arcsin 0 =$ 0，$\arcsin 1 =$ $\dfrac{\pi}{2}$，$\arcsin\dfrac{1}{2} =$ $\dfrac{\pi}{6}$，

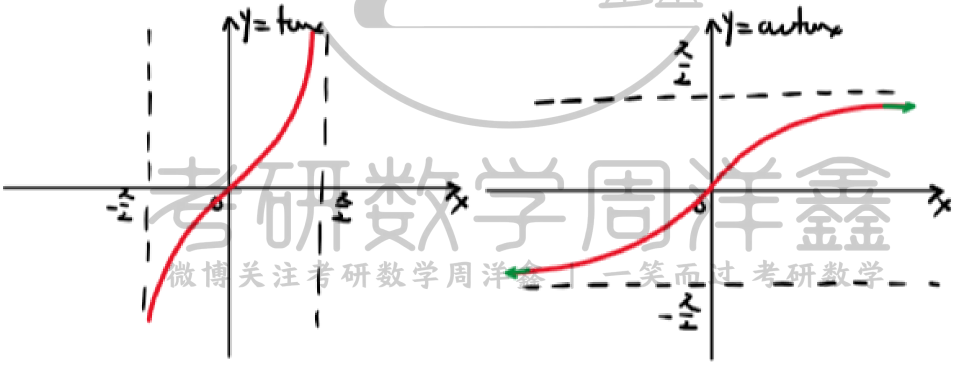
$\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} =$ $\dfrac{\pi}{4}$，$\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} =$ $\dfrac{\pi}{3}$，$\arcsin(-1) =$ $-\dfrac{\pi}{2}$，

$\arccos 0 =$ $\dfrac{\pi}{2}$，$\arccos 1 =$ 0，$\arccos\dfrac{1}{2} =$ $\dfrac{\pi}{3}$，

$\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} =$ $\dfrac{\pi}{4}$，$\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} =$ $\dfrac{\pi}{6}$，$\arccos(-1) =$ π.

（3）反正（余）切函数

	$y=\arctan x$	$y=\operatorname{arccot} x$
定义	$y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的反函数，记为 $y=\arctan x$．	$y=\cot x$ 在区间 $(0,\pi)$ 内的反函数，记为 $y=\operatorname{arccot} x$．
图像		
定义域	R	R
值域	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
单调性	↗	↘
奇偶性	奇	×
常用极限	$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0$

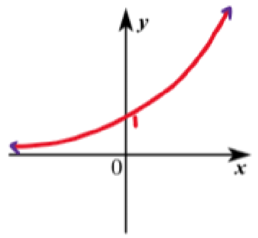
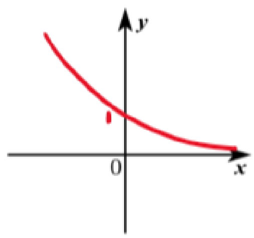


（4）常见函数值

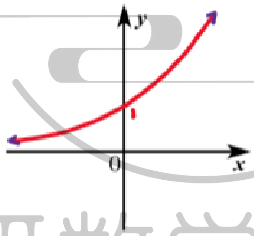
$\arctan 0=$ 0，$\arctan 1=$ $\frac{\pi}{4}$，$\arctan\sqrt{3}=$ $\frac{\pi}{3}$，

$\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=$ $\frac{\pi}{6}$，$\arctan(-1)=$ $-\frac{\pi}{4}$，$\arctan(-\sqrt{3})=$ $-\frac{\pi}{3}$．

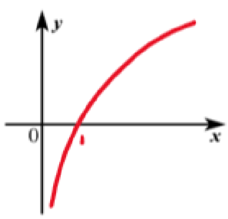
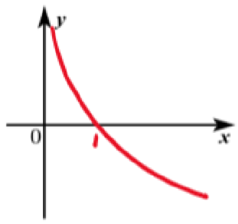
3.指数函数

定义	函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 叫做指数函数	
图象	$a>1$	$0<a<1$
		
定义域	R	
值域	$(0,+\infty)$	
过定点	$(0,1)$	
单调性	↗	↘
极限	$\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=$ $+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=$ 0 .	$\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=$ 0 ，$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=$ $+\infty$.

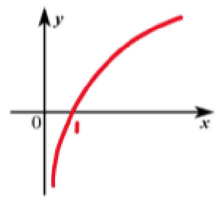
【小课堂】指数函数中常考 $y=e^x$，图像与性质如下：　$e\approx2.718$

图象	
极限	$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

4.对数函数

定义	函数 $y=\log_a x\,(a>0$ 且 $a\neq 1)$叫做对数函数	
图象	$a>1$	$0<a<1$
		
定义域	$x>0$	
值域	R	
过定点	$(1,0)$	
单调性	↗	↘

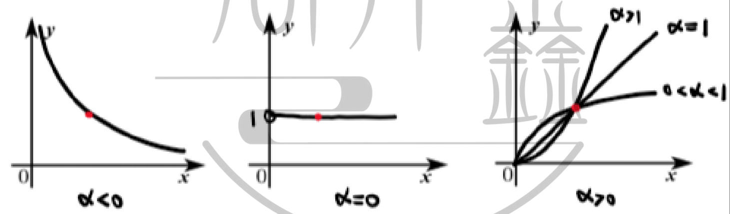
【小课堂】指数函数中常考 $y=\ln x$，图像与性质如下： $\ln x=\log_e x$

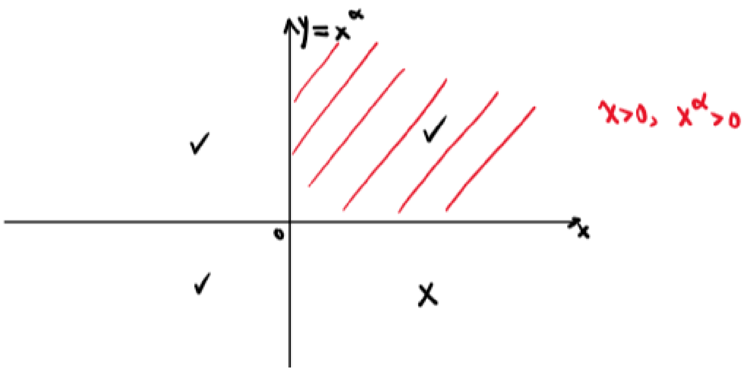
图象	
定义域	$x>0$
值域	R
过定点	$(1,0)$
单调性	$\nearrow$
运算性质	① $\ln A^\alpha=\alpha\ln A\ (A>0)$

② $\ln AB=\ln A+\ln B$

③ $\ln\frac{A}{B}=\ln A-\ln B$.

5.幂函数

名称	幂函数 $y=x^\alpha\ (\alpha\in R)$
第一象限内的函数图象	
过定点	$(1,1)$
极限	$\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=\begin{cases}0, & \alpha<0\\ 1, & \alpha=0\\ +\infty, & \alpha>0\end{cases}$
运算性质	（1）$x^a\cdot x^b=$ x^{a+b}，（2）$\frac{x^a}{x^b}=$ x^{a-b}， （3）$\left(x^a\right)^b=$ x^{ab}，（4）$x^{-\frac{n}{m}}=$ $\frac{1}{x^{\frac{n}{m}}}=\frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$



【考点7】初等函数

反对幂三指

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的用一个表达式表示的函数称为**初等函数**，一般地，不能用一个数学式子表达的函数为**非初等函数**，例如分段函数

$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ e^x-1, & x\le 0\end{cases}$，符号函数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 均为非初等函数.

例：(1) $y=\dfrac{e^{x^2}\sin x\cdot\ln x}{x^2+\cos x}$ ✓

(2) $y=|x|=\sqrt{x^2}=(x^2)^{\frac{1}{2}}$

(3) $y=x^{2x}=e^{2x\ln x}$

【考】幂指函数——见到幂指函数，立即幂指转换

$y=f(x)^{g(x)}=e^{\ln f(x)^{g(x)}}=e^{g(x)\ln f(x)}$

$(f(x)>0)$

例：(1) $y=x^{2x}=e^{2x\ln x}$

(2) $y=\sin x^{\cos x}=e^{\cos x\cdot\ln\sin x}$