2026 考研数学零基础提前学课堂手迹版讲义

新浪微博：考研数学周洋鑫

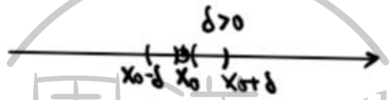
零基础提前学（3）

零基础 2·函数极限定义

【注】 本节零基础提前学阶段要求较低，重点以理解函数极限定义为主，至于函数极限定义的应用以及函数极限的性质将会在基础阶段重点学习，希望大家注意课程体系的安排。

【考点1】函数极限的定义

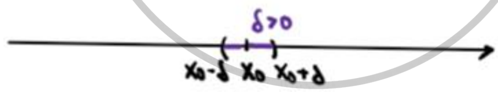
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \boxed{\text{当 } x\to x_0 \text{ 时}}, |f(x)-A|<\varepsilon.$



例1：$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=150.$

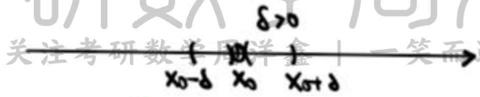
$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 当 $0<|x-4|<\delta$ 时, $|f(x)-150|<\varepsilon.$

【考1】邻域



$\exists \delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时

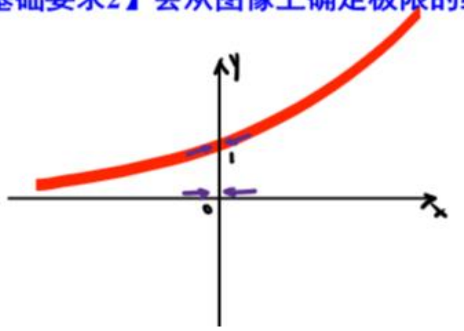
【考2】去心邻域



$\exists \delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

【零基础要求1】理解极限的定义方法 ✓

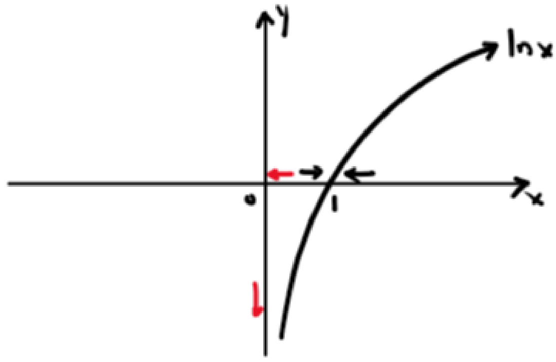
【零基础要求2】会从图像上确定极限的结果



$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

$\lim\limits_{x\to 0} e^x=1$

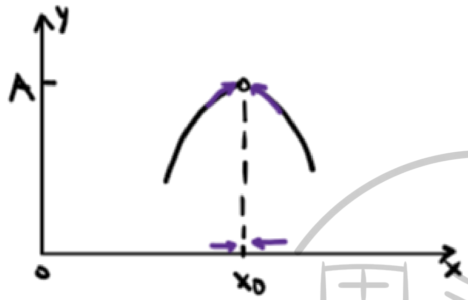


$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$$

$$\lim_{x\to1}\ln x=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$$

【零基础要求3】极限与该点值无关.

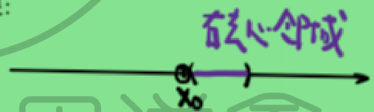


$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \checkmark$$

例: $f(x)=\begin{cases}x, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$ $\quad\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1$ $\quad\boxed{x\neq0}$

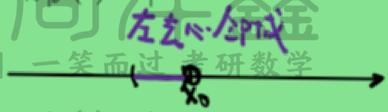
【敲重点】类似地，还有以下几种类型的函数极限:

(1) $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 右极限



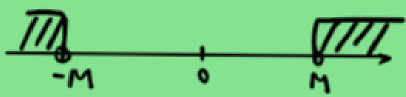
对于任意 $\varepsilon>0$，<u>当 $x\to x_0^+$ 时</u>，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 左极限



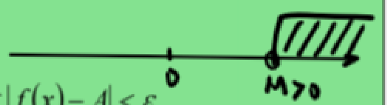
对于任意 $\varepsilon>0$，<u>当 $x\to x_0^-$ 时</u>，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) $\lim_{x\to\infty}f(x)=A$



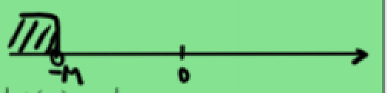
对于任意 $\varepsilon>0$，<u>当 $x\to\infty$ 时</u>，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(4) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$



对于任意 $\varepsilon>0$，<u>当 $x\to+\infty$ 时</u>，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(5) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$

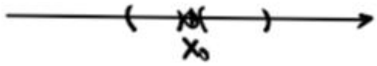


对于任意 $\varepsilon>0$，<u>当 $x\to-\infty$ 时</u>，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

[总结] $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$　　六种

$\forall\varepsilon>0$, $\boxed{\exists x\to\square\text{时}}$, $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(1) $x\to x_0$

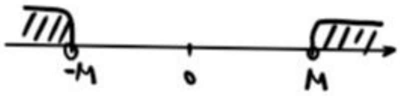


(2) $x\to x_0^+$ ✓

(3) $x\to x_0^-$ ✓

(4) $x\to+\infty$

(5) $x\to-\infty$



(6) $x\to\infty$

零基础 3·函数极限计算

【考点1】极限定型

(1) 已定式极限：代入求极限

(2) 未定式极限：$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0.

例1: (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$　$\frac{0}{0}$　　$\lim\limits_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}$　$\frac{0}{0}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x}=2$　$\frac{0}{0}$　　未定式极限

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x}=0$　$\frac{0}{0}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x^2}=\infty$　$\frac{0}{0}$

【例3.1】 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2+1}=\frac{0}{10}=0$

【例3.2】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x+3e^x}{7x+\cos x}=\frac{3}{1}=3$　　先定型，后定法

【例3.3】 $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty$ ✓

【例3.4】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 极式.

方一：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}} \overset{\text{已}}{=} \dfrac{3}{7}$

【例3.4】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+\cancel{4x^2}+\cancel{2}}{7x^3+\cancel{5x^2}-\cancel{3}}$ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 极式✓ $x\to\infty$ $3x^3 \gg 4x^2 \gg 2$, $7x^3 \gg 5x^2 \gg -3$

方二：$\dfrac{3}{7}$.

【注】"抓大头"理论 适用于$\frac{\infty}{\infty}$型极式极限

① 若在$x\to\square$下，$A\gg B$ 则 $A\pm B$ "取" A.

② 若 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{A^{\infty}}{B_{\infty}}=\infty$ 则 $A\gg B$.

③ 当 $x\to\infty$时，主次上：$x^4 \gg x^3 \gg x^2 \gg x \gg$ 数 / 常数

例1：当$x\to\infty$时，$2x^2 \not\gg x^2$. $2\sqrt{x}\gg x$

当$x\to\infty$时，$x^5 \gg x^4$. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5}{x^4}=\infty$

"主阶"

【例3.5】（经典题）$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=$（ ）. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 极式

方法一：抓大头 $x\to-\infty$时，$4x^2 \gg x \gg 1$ $x^2 \gg \sin x$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2}+x}{\sqrt{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2|x|+x}{|x|}$ $x\to-\infty$, $x<0$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x+x}{-x}=1$

~~$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+x}{x}=3$.~~

【注】$\sqrt{x^2}=|x|$
$=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

方法二：上下同除最大项

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\boxed{\frac{1}{x}}\sqrt{4x^2+x-1}+1+\frac{1}{x}}{\boxed{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+\sin x}}$$

$x\to-\infty$

$\frac{1}{x}<0$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}\sin x}}$$

$$\overset{\text{已}}{=}\frac{-\sqrt{4}+1}{-\sqrt{1}}$$

$$=1.$$

【例3.5】（经典题）$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=$（　　）.

坑！！！

方法三：负代换

令 $x=-t$ 则 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4t^2-t-1}-t+1}{\sqrt{t^2-\sin t}}$　$\frac{\infty}{\infty}$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{4t^2}-t}{\sqrt{t^2}}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{2t-t}{t}=1$$

【框架预览】求极限的基本方法

1. 等价无穷小替换 ✓
2. 泰勒公式
3. 洛必达法则
4. 四则运算

【考点2】无穷小量

1. 无穷小的定义

若 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为 $x\to\square$ 时的无穷小.

【注1】无穷小量必须要与趋向挂钩.

例1: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)=0$　　$\arctan x-\frac{\pi}{2}$ 在 $x\to+\infty$ 时是无穷小量.

$\lim\limits_{x\to0}\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$　　$\arctan x-\frac{\pi}{2}$ 在 $x\to0$ 时不是无穷小量.

例2：$\frac{x+4}{x^2+3x+1}$ 在 $x\to\infty$ 时是无穷小？✓

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+4}{x^2+3x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

$\frac{x+4}{x^2+3x+1}$ 在 $x\to 0$ 时是无穷小？✗

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+4}{x^2+3x+1}\overset{\text{代}}{=}\frac{4}{1}=4\neq 0$

【注2】0是最特殊的无穷小量.

$\lim\limits_{x\to\square}0=0$

【注3】无穷小量*有界变量=无穷小量.

例1：$\lim\limits_{x\to 0}\underset{0}{\boxed{x}}\,\underset{\text{有界}}{\underline{\arctan\frac{1}{x}}}=0$ $\quad -\frac{\pi}{2}<\arctan\square<\frac{\pi}{2}$

2. 无穷小的比阶

若 $\lim\limits_{x\to\square}\alpha(x)=0,\lim\limits_{x\to\square}\beta(x)=0$，且 $\beta(x)\neq 0$

$\lim\limits_{x\to\square}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$（$\frac{0}{0}$）$=$
- $0\Rightarrow$ $\alpha(x)$ 称为 $\beta(x)$ 高阶无穷小，记作 $\alpha(x)=o[\beta(x)]$
- $\infty\Rightarrow$ $\alpha(x)$ 称为 $\beta(x)$ 低阶无穷小
- $A\neq 0\Rightarrow$ $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 互为同阶无穷小.
- $1\Rightarrow$ $\boxed{\alpha(x)\text{ 与 }\beta(x)\text{ 互为等价无穷小 } \alpha(x)\sim\beta(x)}$

3. 常见的等价无穷小公式（重要、必须记住）

当 $x\to 0$ 时，	推广 $\rightarrow$	当 $\square\to 0$ 时，
① $\sin x\sim x$		① $\sin\square\sim\square$
② $\arcsin x\sim x$		② $\arcsin\square\sim\square$
③ $\tan x\sim x$		③ $\tan\square\sim\square$
④ $\arctan x\sim x$		④ $\arctan\square\sim\square$
⑤ $e^x-1\sim x$		⑤ $e^\square-1\sim\square$
⑥ $\ln(1+x)\sim x$		⑥ $\ln(1+\square)\sim\square$
⑦ $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$		⑦ $1-\cos\square\sim\frac{1}{2}\square^2$
⑧ $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$		⑧ $(1+\square)^\alpha-1\sim\alpha\square$

【黄金重点】等价无穷小的替换准则

1. 准则1——乘除法因式可用等价无穷小替换

若 $x\to 0$ 时，$f\sim A$，$g\sim B$，则

$$f\cdot g\sim A\cdot B,\quad \frac{f}{g}\sim\frac{A}{B}.$$

例1：$x\to 0$ 时，$(e^x-1)\cdot\sin x\sim x\cdot x=x^2$

$x\to 0$ 时，$\dfrac{\sin x\cdot\tan x}{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}\sim\dfrac{x\cdot x}{\frac{1}{2}x}=2x.$

2. 准则2——加减法中慎用等价无穷小替换

若 $x\to 0$ 时，$f\sim A$，$g\sim B$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f}{g}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{A}{B}\neq -1$ 则

$$f+g\sim A+B.$$

例1：当 $x\to 0$ 时，$\tan x+\sin x\sim x+x=2x$

$\tan x-\sin x\ \cancel{\sim}\ \boxed{x}\boxed{-x}=0$

例2：当 $x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x$

$=\tan x(1-\cos x)$

$\sim x\cdot\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^3.$

例3：当 $\boxed{x}\to 0$ 时，$\sin\boxed{x}\sim\boxed{x}$

当 $\boxed{x^2}\to 0$ 时，$\sin\boxed{x^2}\sim x^2$

当 $\boxed{x^4}\to 0$ 时，$\sin\boxed{x^4}\sim x^4$

$\square\to 0$ 时，$\sin\square\sim\square.$

推广

3. 准则3——等价无穷小替换公式可推广使用

【例3.6】当 $x\to 0$ 时，确定下列无穷小量的等价无穷小.

（1）$\sin\boxed{x^2}\cdot(1-\cos x)\sim$ $x^2\cdot\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^4$

（2）$\sqrt{1-x^2}-1\sim$ $-\frac{1}{2}x^2$.

（3）$\dfrac{\arctan x^3}{e^{x^2}-1}\sim$ $\dfrac{x^3}{x^2}=x$

（4）$\tan x-\sin x\sim$ $x\cdot\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^3$ ✓

$(1+\square)^{\alpha}-1\sim\alpha\square\quad(\square\to 0)$

$[1+(-x^2)]^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}(-x^2)$