2026 考研数学零基础提前学课堂手迹版讲义

新浪微博：考研数学周洋鑫

零基础提前学（1）

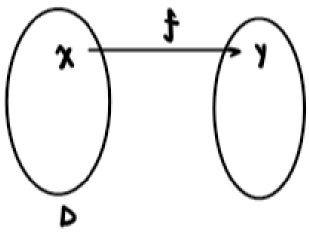
零基础 1·考研必备高中知识衔接

注意：这一节不要飘

【考点1】函数的定义

$\forall x \in D \xrightarrow{f} y(唯一)$

$y=f(x)$



1. 函数三要素：定义域、对应法则、值域

2. 同一个函数：定义域、对应法则相同

例1：$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ ✗

$x^2>0$ $x>0$

$x\neq 0$

例2：$y=f(x)$ 与 $y=f(t)$ 同一个

例：$f(x^2)=x^4+2x^2+1$

令 $x^2=t$ 则

$f(t)=t^2+2t+1$

$\Rightarrow f(x)=x^2+2x+1$

3. 函数与自变量字母选取无关 ✓

【考】函数的定义域永远指的是该函数自变量的范围.

【考】

$f(x^2+1)$	$5\le x^2+1\le 6$
$f(x^2+x+1)$	$5\le x^2+x+1\le 6$
$f(x)$	$5\le x\le 6$

【敲重点】1. 函数定义域是指函数自变量的取值范围，具体问题中务必明确函数自变量是哪个部分；

2. 在同一对应法则下，$f(\square)$ 括号内整体的取值范围是一样的.

【例1.1】设 $f(x)$ 的定义域为 $[5,10]$，则 $f(x^2+1)$ 的定义域为 $\underline{[-3,-2]\cup[2,3]}$

$5\le x\le 10$

$5\le x^2+1\le 10$

$4\le x^2\le 9$

$-3\le x\le -2$ 或 $2\le x\le 3$

【例1.2】设函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $[1,3]$，则函数 $f(x)$ 的定义域为 $\underline{[3,7]}$.

$1\le x\le 3$

$3\le 2x+1\le 7$

$3\le x\le 7$

【考点2】函数的四种特性

1. 奇偶性

设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对 $\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若对 $\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

【注1】函数奇偶性的判定方法

定义域关于0对称 —YES→ $f(-x)=f(x)$ 偶；$f(-x)=-f(x)$ 奇

$f(-x)\ne f(x)$ 且 $-f(x)$ → 非奇非偶函数

定义域关于0对称 —NO→ 非奇非偶函数

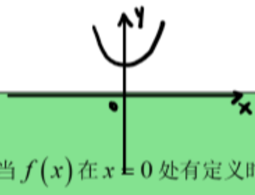
【黄金重点】两个重要奇偶函数

$F(x)=f(x)+f(-x)\Rightarrow$ 偶

$G(x)=f(x)-f(-x)\Rightarrow$ 奇

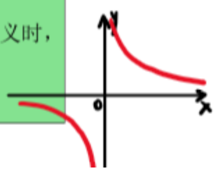
例：$f(x)=\underbrace{\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}}_{偶}+\underbrace{\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}}_{奇}$

【注2】函数奇偶性的性质



1. 若 $f(x)$ 偶函数，则 $f(x)$ 图像关于 y 轴对称.

2. 若 $f(x)$ 奇函数，则 $f(x)$ 图像关于原点 $x=0$ 对称，且当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义时，$f(0)=0$.



【注3】函数奇偶性的运算性质

1. 四则运算性质

奇 × 奇 = 偶　　奇 ± 奇 = 奇

奇 × 偶 = 奇　　偶 ± 偶 = 偶

偶 × 偶 = 偶　　奇 ± 偶 = 未知

2. 复合函数性质

$f[g(x)]$

偶 偶 ⇒ 偶

偶 奇 ⇒ 偶

奇 偶 ⇒ 偶

奇 奇 ⇒ 奇.

【例1.1】 以下四个函数：

① $f_1(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；　$x\in R$　偶　　② $f_2(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；　$x\in R$　奇

③ $f_3(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；　奇　　* ④ $f_4(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.　$x\in R$　奇

其中是奇函数的个数是________.

① $f_1(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}=f_1(x)$

② $f_2(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-f_2(x)$

③ $\dfrac{1-x}{1+x}>0 \Rightarrow (1-x)(1+x)>0$

$\Rightarrow -1<x<1$

$f_3(-x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1}$

$=-\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-f_3(x)$

④ $x+\sqrt{x^2+1}>0$

$x\in R$　① 大

$f_4(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}$

$=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$=-f_4(x)$

【考】(1) $\ln A^{\alpha}=\alpha\ln A$,　$A>0$

(2) $\ln AB=\ln A+\ln B$

(3) $\ln\dfrac{A}{B}=\ln A-\ln B$.

【考】$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

反双曲正弦函数.

【例1.1】以下四个函数：

① $f_1(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；　$\underbrace{\frac{e^x}{2}}_{g(x)}+\underbrace{\frac{e^{-x}}{2}}_{g(-x)}$ 偶　　② $f_2(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；　$\frac{e^x}{2}-\frac{e^{-x}}{2}$ 奇

③ $f_3(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；　　④ $f_4(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

其中是奇函数的个数是________.

$\underbrace{\ln(1-x)}_{g(x)}-\underbrace{\ln(1+x)}_{g(-x)}$

奇

2. 周期性　　$f(x+T)=f(x)\Rightarrow T\Rightarrow 2T,3T,4T\cdots$

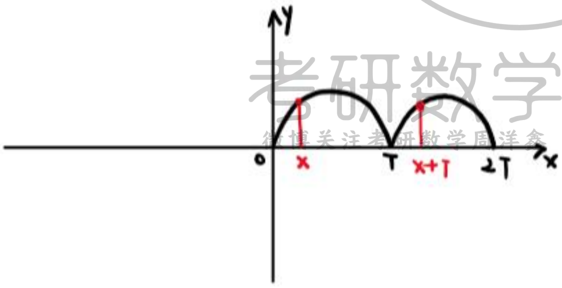
设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个正数 T，使得对于任意 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，且正数 T 为 $f(x)$ 的周期.

【敲重点】几个常见的周期函数及其最小正周期 T：

（1）$y=\sin\omega x$，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$；　　（2）$y=\cos\omega x$，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$；

（3）$y=\tan\omega x$，$T=\dfrac{\pi}{\omega}$；　　（4）$y=\cot\omega x$，$T=\dfrac{\pi}{\omega}$；

（5）$y=|\sin x|, T=\pi$；　　（6）$y=\sin^2 x, y=\cos^2 x$，$T=\pi$.



例：$f(x)=\sin x$　　$T=2\pi$

$f(x)=3^{\sin x}$　　$T=2\pi$

【考】奇偶函数、周期函数导函数特性

$(\text{奇})'=\text{偶}$，$(\text{偶})'=\text{奇}$，$(\underset{T}{\text{周期}})'=\underset{T}{\text{周期}}$.

例1：$f(x)$ 奇　　$f(-x)=-f(x)$

$-f'(-x)=-f'(x)$

$f'(-x)=f'(x)$

例2：$f(x)$ T　　$f(x+T)=f(x)$

$f'(x+T)=f'(x)$

2022 年数三真题（本题数一数二需完成）

13．已知函数 $f(x)=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$，则 $f'''(2\pi)=$ __0__.

$g(x)+g(-x)$

$f(x) \to f'(x) \to f''(x) \to f'''(x)$

偶 奇 偶 奇

$T=2\pi$ $T=2\pi$ $T=2\pi$ $T=2\pi$

$f'''(0)=0=f'''(2\pi)$

$f(x+2\pi)=e^{\sin(x+2\pi)}+e^{-\sin(x+2\pi)}$

$=f(x)$