2026 考研数学零基础提前学课堂手迹版讲义

新浪微博：考研数学周洋鑫

零基础提前学（12）

100

【考点1】原函数

【考点2】不定积分 ✓ $\int f(x)dx = F(x)+C$

【考点3】不定积分的至高理解 $\int \_ \, d \_ = \_ + C$ 反讨!

【考点4】积分表（要记住）✓

【考点5】凑微分法

1. 为什么要凑微分？ 例：$\int \cos\square \, d\square = \sin\square + C$

2. 什么是凑微分？ $\square' dx = d\square$

3. 常见的凑微分 $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = d\sqrt{x}$ $\frac{1}{x^2}dx = d\frac{1}{x}$

[考] $\sin^n x$ 与 $\cos^n x$ 不定积分.

(1) 奇次方—凑分 $\sin x\,dx = -d\cos x$ $\cos x\,dx = d\sin x$

(2) 偶次方—降幂 $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ ✓

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ ✓

【例8.17】 求下列不定积分

（1）$\int \cos^2 xdx$ （2）$\int \sin^3 xdx$.

解. (1) $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$= \int \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}\int \cos \boxed{2x}\, dx$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

【例8.17】 求下列不定积分

（1）$\int \cos^2 xdx$ （2）$\int \sin^3 xdx$.

(2) $\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \underline{\cos x dx}$

$= \int (1-\sin^2 x)\, d\sin x$

$= \int 1\, d\sin x - \int \sin^2 x\, d\sin x$

$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

例1：$\int \cos^5 x\,dx$ $\qquad (\cos^2 x)^2$

$= \int \cos^4 x \underline{\cos x dx}$

$= \int (1-\sin^2 x)^2 d\sin x$

$= \int (1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\, d\sin x$

$= \int 1\, d\sin x - 2\int \sin^2 x\, d\sin x + \int \sin^4 x\, d\sin x$

$= \sin x - 2\cdot\frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$

【考点6】第二类换元积分法

1. 为什么要使用换元法？

例1：$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} d(-x^2+1) = -\sqrt{1-x^2}+C.$

例2：$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ？

~~凑微分~~ ⇒ 难点？ ⇒ $\sqrt{1-x^2}$ ⇒ 去掉 ⇒ 换元 $x=\sin t$ ✓

$x=\cos t$

已知 $x=\varphi(t)$ 可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，若 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t)+C$，则

$$\int f(x)dx \xlongequal{令x=\varphi(t)} \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t)+C = G(\varphi^{-1}(x))+C.$$

其中，$t=\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数.

2. 常见的换元法1——三角代换

【思考】目的是开根号

（1）积分含有 $\sqrt{1-x^2}$**，令** $x=\sin t$

（2）积分含有 $\sqrt{1+x^2}$**，令** $x=\tan t$

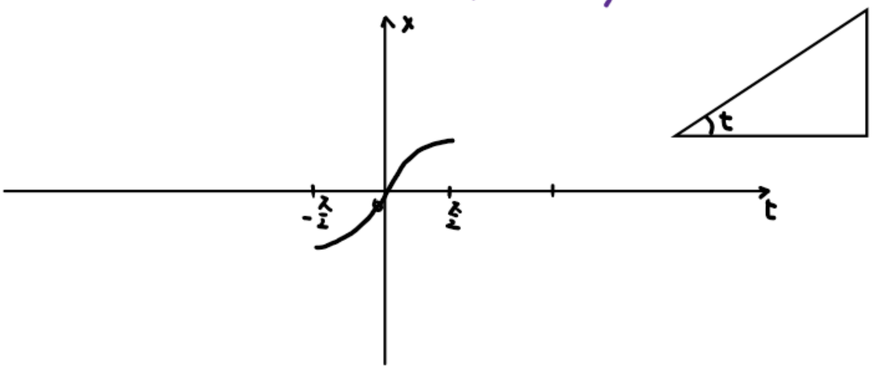
（3）积分含有 $\sqrt{x^2-1}$**，令** $x=\sec t$

【考 1】三角代换：具有标志，目的是开根号

（1）积分含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，令 $x=a\sin t$ $\left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t=\arcsin\frac{x}{a}$ 开心!

（2）积分含有 $\sqrt{a^2+x^2}$，令 $x=a\tan t$ $\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$

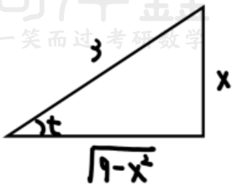
（3）积分含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，令 $x=a\sec t$ $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$



【例8. 18】 求不定积分 $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$.

解：令 $x=3\sin t\ \left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$ 则 $\sin t=\frac{x}{3}\Rightarrow t=\arcsin\frac{x}{3}$ ①

$$I=\int\sqrt{9-9\sin^2 t}\,d(3\sin t)$$
$$=\int\sqrt{9\cos^2 t}\,3\cos t\,dt$$
$$=9\int\cos^2 t\,dt$$ ② 开心!
$$=9\cdot\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$
$$=\int\frac{9}{2}dt+\frac{9}{2}\int\cos 2t\,dt$$
$$=\frac{9}{2}t+\frac{9}{4}\sin 2t+C.$$
$$=\frac{9}{2}t+\frac{9}{2}\sin t\cos t+C$$
$$=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}+C.$$



【例8.19】求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$　　　凑✓ $\sqrt{x^2+a^2}$

解. 令 $x=2\tan t$ 则 $\tan t=\frac{x}{2}$

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{4\tan^2 t+4}}\,d(2\tan t)$$

$$=\int \frac{1}{2\sec t}\,2\sec^2 t\,dt$$

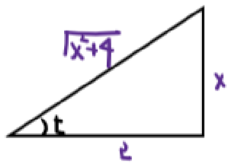
$$=\int \sec t\,dt$$

$$=\ln|\sec t+\tan t|+C.$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{x}{2}\right|+C$$

$$=\ln\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)-\ln 2+C.$$

$$=\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+C_1.$$



$\sec t=\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$

【例8.20】$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$.

解: 令 $x=\sec t$ 则　$\frac{1}{\cos t}=x \Rightarrow \cos t=\frac{1}{x}$

$$I=\int \frac{1}{\sec t\tan t}\,d\sec t$$

$$=\int \frac{1}{\sec t\cdot\tan t}\cdot\sec t\cdot\tan t\,dt$$

$$=\int 1\,dt=t+C$$

$$=\arccos\frac{1}{x}+C.$$

3. 常见的换元法2——无理根式换元

$\sqrt[n]{ax+b},\ \sqrt[n]{x},\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow t$

【例8.21】计算不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

方1: $2\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$$=4\int \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}+1}}\,d(\sqrt{x}+1)$$

$$=4\sqrt{\sqrt{x}+1}+C.$$

方2: 令 $\sqrt{x}=t$ 则 $x=t^2$

$$I=\int \frac{1}{t\cdot\sqrt{1+t}}\,dt^2$$

$$=\int \frac{2t}{t\cdot\sqrt{1+t}}\,dt$$

$$=4\int \frac{1}{2\sqrt{t+1}}\,d(t+1)$$

$$=4\sqrt{t+1}+C.$$

$$=4\sqrt{\sqrt{x}+1}+C.$$

【例8.22】$\int \frac{1}{1+\sqrt{2x}}dx$.

解：令 $\sqrt{2x}=t$ 则 $x=\frac{1}{2}t^2$

$$I=\int \frac{1}{1+t}d\left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

$$=\int \frac{t}{t+1}dt \qquad 假分式 \Rightarrow 真分式.$$

$$=\int \frac{t+1-1}{t+1}dt$$

$$=\int 1\,dt-\int \frac{1}{t+1}dt$$

$$=t-\ln|t+1|+C.$$

$$=\sqrt{2x}-\ln(\sqrt{2x}+1)+C.$$

【考点6】分部积分法

1. 分部积分法内容 $\boxed{\int \underline{u}\,d\underline{v}=uv-\int \underline{v}\,d\underline{u}}$

证明：$(uv)'=u'v+u\cdot v'$

$$\int (uv)'dx=\int u'v\,dx+\int uv'dx$$

$$uv=\int v\,du+\int u\,dv$$

则 $\int u\,dv=uv-\int v\,du.$

2. 经验： 两类不同函数相乘除，常选分部积分法.

3. 经验： 反—对—幂—三—指 $\int u\,dv$

【例8.23】求下列不定积分

（1）$\int \underset{u}{x}e^x dx$ $\quad e^x dx=de^x$ （2）$\int x^2e^x dx$

(1) $\int xe^x dx=\int \underset{u}{x}\,d\underset{v}{e^x}=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C.$

(2) $\int x^2e^x dx=\int \underset{u}{x^2}\,d\underset{v}{e^x}$

$$=x^2e^x-\int e^x dx^2$$

$$=x^2e^x-2\int e^x x\,dx$$

$$=x^2e^x-2\int \underset{u}{x}\,d\underset{v}{e^x}$$

$$=x^2e^x-2xe^x+2\int e^x dx$$

$$=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C.$$

【例8.24】求下列不定积分

（1）$\int \underset{u}{x}\cos x\mathrm{d}x$　$\cos x dx = d\sin x$　（2）$\int x\cos^2 x\mathrm{d}x$

(1) $\int \underset{u}{x}\, d\underset{v}{\sin x} = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$

【例8.24】求下列不定积分

（1）$\int x\cos x\mathrm{d}x$　（2）$\int x\cos^2 x\mathrm{d}x$

(2) $\int x\cdot \frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$= \int x\cdot\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}\int x\cos 2x\, dx$

$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\int x\, d\sin 2x$

$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{4}\int \sin 2x\, dx$

$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C.$

$\cos 2x\, dx$
$= \frac{1}{2}\cos 2x\, d(2x)$
$= \frac{1}{2} d\sin 2x$

【例8.25】求下列不定积分

（1）$\int x\underset{u}{\ln x}\mathrm{d}x$　$xdx = \frac{1}{2}dx^2$　（2）$\int x^2\ln x\mathrm{d}x$

(1) $\frac{1}{2}\int \underset{u}{\ln x}\, d\underset{v}{x^2} = \frac{1}{2}\ln x\cdot x^2 - \frac{1}{2}\int x^2 d\ln x$　微分

$= \frac{1}{2}\ln x\cdot x^2 - \frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx$

$= \frac{1}{2}\ln x\cdot x^2 - \frac{1}{4}x^2 + C.$

(2) $\int \ln x\cdot x^2 dx = \frac{1}{3}\int \underset{u}{\ln x}\, d\underset{v}{x^3}$

$= \frac{1}{3}\ln x\cdot x^3 - \frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx$

$= \frac{1}{3}\ln x\cdot x^3 - \frac{1}{9}x^3 + C.$

【例8.26】求下列不定积分

（1）$\int x\underset{u}{\arctan x}\mathrm{d}x$　$xdx = \frac{1}{2}dx^2$　（2）$\int x^2\arctan x\mathrm{d}x$

(1) $\frac{1}{2}\int \underset{u}{\arctan x}\, d\underset{v}{x^2} = \frac{1}{2}\arctan x\cdot x^2 - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$= \frac{1}{2}\arctan x\cdot x^2 - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$

$= \frac{1}{2}\arctan x\cdot x^2 - \frac{1}{2}\int 1dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx$

$= \frac{1}{2}\arctan x\cdot x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C.$

【例8.26】求下列不定积分

（1）$\int x\arctan x dx$　　　　（2）$\int x^2 \underbrace{\arctan x}_{u} dx$

(2) $\frac{1}{3}\int \underbrace{\arctan x}_{u}\, d\underbrace{x^3}_{v} = \frac{1}{3}\arctan x\cdot x^3 - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$

$= \frac{1}{3}\arctan x\cdot x^3 - \frac{1}{3}\int \frac{x^2\cdot x}{x^2+1}dx$

$= \frac{1}{3}\arctan x\cdot x^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx^2$

$= \frac{1}{3}\arctan x\cdot x^3 - \frac{1}{6}\int 1\, dx^2 + \frac{1}{6}\int \frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)$

$= \frac{1}{3}\arctan x\cdot x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(x^2+1) + C.$

方二：$\frac{1}{3}\arctan x\cdot x^3 - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$

$= \frac{1}{3}\arctan x\cdot x^3 - \frac{1}{3}\int \frac{x\cdot(x^2+1)-x}{x^2+1}dx$

$= \frac{1}{3}\arctan x\cdot x^3 - \frac{1}{3}\int x\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2+1}dx$

$= \frac{1}{3}\arctan x\cdot x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(x^2+1) + C.$

【例8.27】求下列不定积分

（1）$\int \underbrace{\ln x}_{u}\, d\underbrace{x}_{v}$　　　　（2）$\int \underbrace{\arctan x}_{u}\, d\underbrace{x}_{v}$

(1) $x\ln x - \int x\, d\ln x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C.$

(2) $x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$

$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$