2026 考研数学零基础提前学课堂手迹版讲义

新浪微博：考研数学周洋鑫

零基础提前学（8）

1. 连续

（1）定义：

（2）图像：

（3）意义：

（4）左连续、右连续

（5）判定

（6）闭区间连续

（7）初等函数连续性

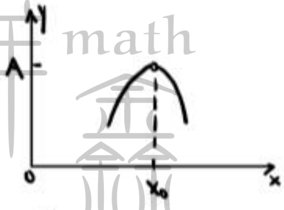
【考点4】间断点

1. 第一类间断点（单侧均存在）

（1）可去间断点

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

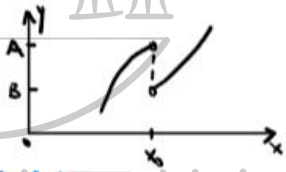
$\exists$



（2）跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

$\exists$　　$\exists$

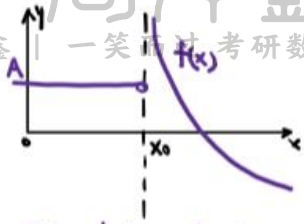


2. 第二类间断点（至少有一侧不存在）

（1）无穷间断点

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 单侧

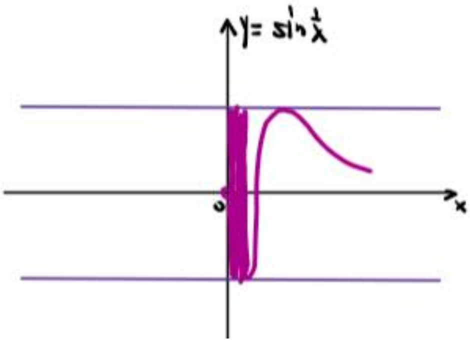
（$x\to x_0^+$ 或 x_0^-）



（2）振荡间断点

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ = 振荡.

例：$\sin\frac{1}{x}$, $\cos\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处.



$x\to 0$, $\frac{1}{x}\to\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$ 振荡.

【考点】函数的无定义点一定是函数的间断点.

分段函数的分段点有可能是间断点.

【解题】

1. 找函数的无定义点（一定是）；分段函数分段点（可能是）

2. 求极限，并判定.

【例5.5】 求下列函数的间断点，并判定间断点的类型.

（1）$f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$；　　（2）$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$；　$x=0$

（3）$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{2}}{2e^{\frac{1}{x}}+1}$；　　（4）$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$.

(1) $x=0$. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{-x}=-1$　$\neq$

则 $x=0$ 为跳跃间断点.

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$　　$x=0$ 为无穷 xxx.

【例5.5】 求下列函数的间断点，并判定间断点的类型.

（1）$f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$；　　（2）$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$；

（3）$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{2}}{2e^{\frac{1}{x}}+1}$；　$x=0$　　（4）$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$.　$x=0$ 振荡.

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+\cancel{\frac{1}{2}}}{2e^{\frac{1}{x}}+\cancel{1}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{2}}{2e^{\frac{1}{x}}+1}\overset{\frac{\frac{1}{2}}{1}}{=}\dfrac{1}{2}$　$=$

$\frac{1}{x}\to+\infty,\ e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$

$\frac{1}{x}\to-\infty,\ e^{\frac{1}{x}}\to0$

e^{∞}

则 $x=0$ 为可去间断点.

【例5.6】 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$ 的间断点，并判定间断点的类型.

解: 间断点: $x=0$, $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=\infty \Rightarrow x=0$ 为无穷×××.　　$\dfrac{x}{x-1}\to 0$

$\dfrac{x}{x-1}\begin{matrix}\to 1\\ \to 0\end{matrix}$ ∞

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=0$　　$\dfrac{x}{x-1}\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\underset{0}{e^{\frac{x}{x-1}}}-1}\overset{\text{已}}{=}\dfrac{1}{-1}=-1$) $\neq$　　$\dfrac{x}{x-1_{0^-}}\to-\infty$

则 $x=1$ 为 $f(x)$ 跳跃×××.

提前学 6·导数的定义

【引1】瞬时变化率

A处平均变化率: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

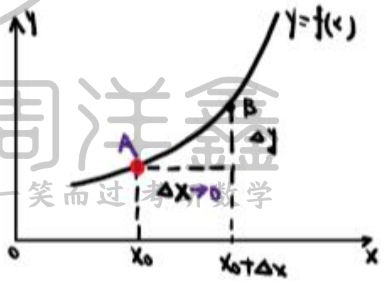
A处瞬时变化率: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

⇓

称为A处导数

⇓

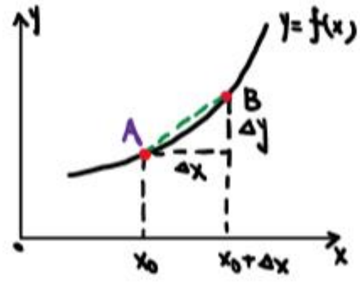
记为 $f'(x_0)$



【引2】切线斜率

割线斜率: $k_{割}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

切线 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



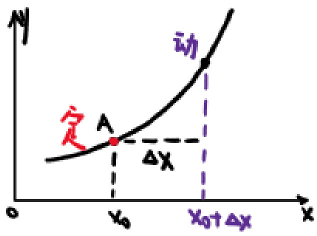
割线

【考点1】导数定义

1. 核心定义 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

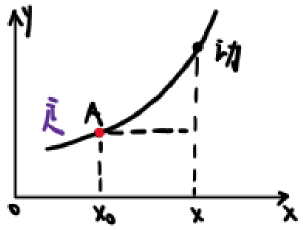
2. 增量定义

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$



3. 计算型定义

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



【考】$f(x)$ 在 x_0 处可导

$\Leftrightarrow f'(x_0)$ 存在

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在.

【例6.1】已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{\cos x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=$______.

【考】分段函数在分段点处的导数计算——导数定义.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{x}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{2x}-\sin\boxed{2x}}{2x^3}\sim\frac{1}{6}(2x)^3$$

$$=\frac{2}{3}.$$

【例6.2】设函数 $f(x)=\underbrace{(e^x-1)}_{0}\underbrace{(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}_{g(x)}$，其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$______.

方一：$f(x)=(e^x-1)g(x)$

$f'(x)=e^x g(x)+\underbrace{(e^x-1)}_{0}g'(x)$

$f'(0)=g(0)=(-1)\cdot(-2)\cdots[-(n-1)]=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$

方二：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$　　$f(0)=0$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\underbrace{(e^x-1)}_{\sim x}(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\underbrace{(e^{2x}-2)}_{-1}\underbrace{(e^{3x}-3)}_{-2}\cdots\underbrace{(e^{nx}-n)}_{1-n}$

$=(-1)\cdot(-2)\cdots[-(n-1)]$

$=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$

【考】比值极限性质

已知 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

(1) 若 $\lim g(x)=0$ 则 $\lim f(x)=0$.

(2) 若 $\lim f(x)=0$，且 $A\neq 0$，则 $\lim g(x)=0$.

记！

(2004 年，数三，4 分) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$ __1__，$b=$ __-4__.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\cos x-b)}{e^x-a}=5$

则 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=0\Rightarrow 1-a=0\Rightarrow a=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\cos x-b)}{\underbrace{e^x-1}_{\sim x}}=5\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-b)=5$

$\Rightarrow 1-b=5$

$\Rightarrow b=-4$

【例6.3】设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{\underbrace{x^2-4}_{0}}=1$，求 $f'(2)=$ __4__.

解：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x^2-4}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0$.

导数 ↔ 极限

又 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$

故 $f(2)=0$.

$f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\underbrace{\dfrac{f(x)}{(x-2)(x+2)}}_{1}\cdot\underbrace{(x+2)}_{4}=1\times 4=4.$

【考点2】单侧导数定义

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

【注】$f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow f'(x_0)$ 存在

$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在　① 不分

$\Leftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$（存在）　② 分

【例6.4】设 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3, x\le 1\\ x^2,\ x>1\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的（ B ）.

$f(1)=\frac{2}{3}$

A. 左、右导数都存在　　B. 左导数存在、右导数不存在

C. 左导数不存在、右导数存在　　D. 左、右导数都不存在

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}\overset{\frac{1/3}{0}}{=}\infty$ 不∃.

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}2x^2=2$

70. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{1+x^2}, x\leqslant 0,\\ \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, x>0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ D ）.

$f(0)=0$

A. 极限不存在　　B. 极限存在但不连续

C. 连续但不可导　　D. 可导

解：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2\sin\frac{1}{1+x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}}=0$

则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 又 $f(0)=0$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^{\frac{3}{2}}}=0$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{1+x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{1+x^2}=0$

则 $f'(0)$ ∃ 且为 0.