2026 考研数学零基础提前学课堂手迹版讲义

新浪微博：考研数学周洋鑫

零基础提前学（10）

【考1】导数表

【考2】导数四则运算

$(ABC)' = A'BC + A(BC)' = A'BC + AB'C + ABC'$

【考3】复合函数求导法则（链式求导法则）

先对中间变量求导，中间变量再对自变量求导. *

导数定义

1. 增量定义
2. 计算型定义
3. 推广定义
4. 单侧导数定义

$y = f(x)$

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$

【例7.3】已知 $f(x)=\ln\left|(x^3-1)(x^5-2)(x^7-3)\right|$，求 $f'(x)$.

【考】$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$\ln AB = \ln A + \ln B$

解：$f(x) = \ln|x^3-1| + \ln|x^5-2| + \ln|x^7-3|$

$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3-1} + \frac{5x^4}{x^5-2} + \frac{7x^6}{x^7-3}$

【考】辨析两个符号：

1. $[f(x^4)]' = \frac{d f(x^4)}{dx} = f'(x^4)\cdot 4x^3$

2. $f'(x^4) = \frac{d f(x^4)}{dx^4}$

$f(\square)$

【例7.4】设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$，其中 f 可微，求 y'.

$y' = f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\cdot e^{f(x)} + f(\ln x)\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x)$

【考】幂指函数——幂指转换

【例7.5】设 $y=(1+\sin x)^x$，求 y'.

$y = e^{x\ln(1+\sin x)}$

$y' = e^{x\ln(1+\sin x)}\cdot\left[\ln(1+\sin x) + x\cdot\frac{1}{1+\sin x}\cdot\cos x\right]$

【例7.6】设 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$，求 $f'(x)$.

$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

【例7.7】设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f_n(x)=f(f(\cdots f(x)))$（$n$ 个 f），求 $f_n'(x)$.

解：$f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$f_2(x)=f[f_1(x)]=f\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

$f_3(x)=f[f_2(x)]=f\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)=\dfrac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+2x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$

依次类推，$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

则 $f_n'(x)=\dfrac{\sqrt{1+nx^2}-\frac{1}{2\sqrt{1+nx^2}}\cdot 2nx\cdot x}{1+nx^2}$

【考点3】隐函数求导法则

1. 定义：由方程确定的函数 $y=f(x)$

2. 方法：方程两边同时对x求导

3. 注意：y中有x，y是x的函数

【例7.8】函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ ① 所确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$______.

解：$\cos(x^2+y^2)\cdot\left(2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}\right)+e^x-y^2-x\cdot 2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0.$

则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-e^x+y^2-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}$

【例7.9】设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-xe^y$ ① 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ $-e$.

$\dfrac{dy}{dx}=0-e^y-x\cdot e^y\cdot\dfrac{dy}{dx}$

当 $x=0$ 时，代入①中，$y=1$

当 $x=0,y=1$ 时，$\dfrac{dy}{dx}=-e$

【例7.10】设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=\mathrm{e}^y$ ① 所确定的隐函数，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$ ___1___.

解：$2x-y'=e^y\cdot y'$ ②

$2-y''=e^y\cdot y'\cdot y'+e^y\cdot y''$ ③

将 $x=0$ 代入①中，$-y+1=e^y \Rightarrow y=0$. 眼睛瞅.

将 $x=0, y=0$ 代入②中，$-y'=y' \Rightarrow y'=0$

将 $x=0, y=0, y'=0$ 代入③中，$2-y''=y'' \Rightarrow y''(0)=1$

【考点4】参数方程求导（数一、二）

1. 参数方程： $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ 参数 t.

x, y → t

2. 参数方程求导公式

$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ 确定一个函数 $y=f(x)$.

x, y → $\boxed{t}$ *

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)} \Rightarrow t$ 的函数

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}$ 补

【例7.11】设 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$（$t$ 为参数），则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ ___$\sqrt{2}$___.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\cancel{\sin t}+t\cos t-\cancel{\sin t}}{\cos t}=t$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=1\cdot\dfrac{1}{\cos t}\Rightarrow\sqrt{2}$

【考点5】分段函数求导

1. **分段点外**直接计算

2. **分段点上**用导数定义

【例7.12】设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ x, & x\le 0\end{cases}$，求 $f'(x)$.

解：当 $x>0$ 时，$f'(x)=\cos x$

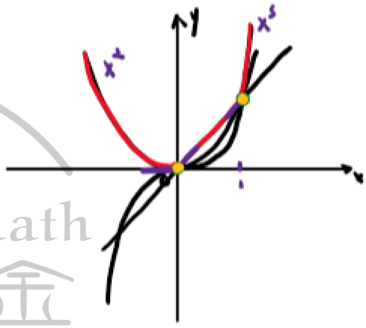
当 $x<0$ 时，$f'(x)=1$

当 $x=0$ 时，

$$\left.\begin{aligned} f'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1\\ f'_-(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow f'(0)=1$$

则 $f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x>0\\ 1, & x\le 0\end{cases}$

【例7.13】设 $f(x)=\max\{x,x^2,x^3\}$，求 $f'(x)$.



解：$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ x, & 0\le x\le 1\\ x^3, & x>1\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ 1, & 0<x<1\\ 3x^2, & x>1\end{cases}$

其中：

$$\left.\begin{aligned} f'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=1\\ f'_-(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-0}{x-0}=0\end{aligned}\right\}\neq \text{不}\exists$$

$$\left.\begin{aligned} f'_+(1)&=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}3x^2=3\\ f'_-(1)&=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x-1}=1\end{aligned}\right\}\neq \text{不}\exists.$$

【例7.14】已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)+f'(1)=$ $\underline{\cos 1-\sin 1}$

上 外

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=0$$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{\cos x\cdot x-\sin x}{x^2}$

$f'(1)=\cos 1-\sin 1$

【例7.15】设 $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1+x^2\right)^{\frac{2}{x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则（ D ）.　　$\ln u^v$

(A) $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.　　(B) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但不可导.

(C) $f'(0)$ 不存在.　　(D) $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.　$\lim\limits_{x\to0}f'(x)\overset{?}{=}f'(0)$

外　　上

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x}\ln(1+x^2), & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{2\ln(1+x^2)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to0}2x=0=f(0)\Rightarrow 连续$$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{x}\ln(1+x^2)-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\ln(1+x^2)}{x^2}=2.$$

当 $x\neq0$ 时，$f'(x)=\left[\frac{2\ln(1+x^2)}{x}\right]'=2\frac{\frac{2x}{1+x^2}\cdot x-\ln(1+x^2)}{x^2}$

$$=\frac{4}{1+x^2}-\frac{2\ln(1+x^2)}{x^2}$$

于是 $f'(x)=\begin{cases}\frac{4}{1+x^2}-\frac{2\ln(1+x^2)}{x^2}, & x\neq0\\ \boxed{2}, & x=0\end{cases}$

$$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{4}{1+x^2}-\frac{2\ln(1+x^2)}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4}{1+x^2}-2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$

$$=\frac{4}{1}-2=2.$$

$$=f'(0)\Rightarrow f'(x)\text{ 在 }x=0\text{ 处连续.}$$

【零基础的浅学】一元函数的微分

$y=f(x)$　微分 $dy=\frac{dy}{dx}\cdot dx=f'(x)\cdot dx$

例1：$d(\sin x)=\cos x\cdot dx$

例2：$d(\tan x)=\sec^2 x\cdot dx$

例3：$d(e^{t^2})=e^{t^2}\cdot 2t\cdot dt$

提前学 8· 不定积分 ⟨ ①定义与性质 ②计算

【考点1】原函数的定义

若 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数.

$F(x) \to x \to f(x)$

父

$$[\underline{F(x)+C}]'=f(x)$$

全体原函数.

【例8.1】（1）证明：$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 的一个原函数；

（2）证明：$\ln|x|$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数.

(1) $\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$

【考点2】不定积分定义

若 $F'(x)=f(x)$ 则

$$\int f(x)\,dx=\underline{F(x)+C}$$

全体原函数.

$F(x)+C \to x \to f(x)$

$\int$ — 积分限

d — 微分

例1：$(\sin x)'=\cos x$

$\int \cos x\,dx=\sin x+C.$

例2：$(x^4)'=4x^3$

$\int 4x^3\,dx=x^4+C.$

例3：$\int \underline{x^4}\,d\underline{x}=\underline{\frac{1}{5}x^5}+C.$

被积函数　积分变量

$\int \underline{\sec^2 x}\,d\underline{x}=\underline{\tan x}+C.$

$\int \underline{\frac{1}{x}}\,d\underline{x}=\underline{\ln|x|}+C.$

$\int \underline{\cos x}\,d\underline{x}=\underline{\sin x}+C.$