2026 年考研数学零基础提前学同步作业

作业 7•导数计算解析

【50】【解析】（1）$y'=\dfrac{1}{\csc x-\cot x}\left(-\csc x\cot x+\csc^2 x\right)=\csc x$；

（2）$y'=2\arcsin\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

（3）$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}}\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$；

（4）$y'=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$；

（5）$y'=\dfrac{1}{\ln\ln x}\cdot\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}$；

（6）$y'=\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}}\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$；

（7）$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}\cdot\left[-\dfrac{2}{(1+x)^2}\right]=-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$；

（8）$y'=2\sin x\cos x\sin\left(x^2\right)+\sin^2 x\cos\left(x^2\right)2x$；

（9）$y'=\left(e^{\sin x\ln x}\right)'=e^{\sin x\ln x}\left(\sin x\dfrac{1}{x}+\cos x\ln x\right)$；

（10）对数求导法（多乘除、多开方）

两边同时取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}\left[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)\right],$$

所以，方程两边同时对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right],$$

因此，$y'=\dfrac{y}{2}\left[\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}\right]$；

（11）$y'=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}\sec^2\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\sin x\ln\tan x-\cos x\dfrac{\sec^2 x}{\tan x}$

$$=\frac{1}{2}\csc\frac{x}{2}\sec\frac{x}{2}+\sin x\ln\tan x-\csc x;$$

（12）$y'=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\left[e^x+\dfrac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\right]=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

【51】【解析】（1）由题意可知，

$$\frac{dy}{dx}=2xf'\left(x^2\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2f'\left(x^2\right)+4x^2f''\left(x^2\right).$$

（2）由题意可知，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)}{f(x)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}.$$

【52】【解析】（1）方程两边同时对 x 求导，得

$$\frac{dy}{dx}=-\sin(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right),$$

解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$.

（2）方程两边同时对 x 求导，得

$$\frac{dy}{dx}=e^y+xe^y\frac{dy}{dx},$$

解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$.

【53】【答案】D

【解析】显然 $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{2tx}$ 为“1^∞”型未定式极限，于是

$$f(x)=x\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2tx}=xe^{\lim\limits_{t\to\infty}2tx\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}=xe^{2x\lim\limits_{t\to\infty}t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}=xe^{2x},$$

所以 $f'(x)=e^{2x}(2x+1)$，应选 D.

【54】【答案】D

【解析】因为 $g'(x)=3f'(f(1+3x))\cdot f'(1+3x)$，所以

$$g'(0)=3f'(f(1))\cdot f'(1)=3f'(1)\cdot f'(1)=3\cdot2\cdot2=12,$$

应选 D.

【55】【答案】C

【解析】根据复合函数链式求导法则，知 $f'(x)=h'(x)g'[h(x)]$.

令 $x=2$，代入得 $f'(2)=h'(2)g'[h(2)]$，解得 $h'(2)=1$，应选 C.

【56】【答案】A

【解析】由复合函数的链式求导法则，知

$$\frac{df[g(x)]}{dx}=f'[g(x)]\cdot g'(x),$$

于是，$b=f'[g(1)]g'(1)=4f'(a)$.

显然，当 $a=1$时，$b=4f'(1)=4$，应选 A.

【57】【答案】B

【解析】根据复合函数的链式求导法则，知

$$\frac{dy}{dx}=f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)'=f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)\cdot\frac{3}{(x+1)^2}.$$

又 $f'(x)=\ln x^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\ln x$，于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)\cdot\frac{3}{(x+1)^2},$$

故 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=-\frac{1}{4}\ln2$，应选 B.

【58】【解析】方程两边同时对 x 求导，则

$$e^y\cdot y'+6y+6xy'+2x=0 \qquad ①$$

上式两边再对 x 求导，得

$$e^y\cdot(y')^2+e^y\cdot y''+6y'+6y'+6xy''+2=0 \qquad ②$$

由原方程知 $x=0$ 时， $y=0$， 代入①式得 $y'(0)=0$，

再将 $x=0$， $y=0$， $y'(0)=0$ 代入②式得 $y''(0)=-2$.

【59】【解析】 由题意可知，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{3+3t^2}{\frac{1}{1+t^2}}=3\left(1+t^2\right)^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=6\left(1+t^2\right)\cdot 2t\cdot\frac{1}{\frac{1}{1+t^2}}=12t\left(1+t^2\right)^2,$$

因此，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=48$.

【60】【解析】 当 $x<0$ 时， $f'(x)=-\sin x$；当 $x>0$ 时， $f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$，

当 $x=0$ 时，因为

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\lim_{x\to0^-}\frac{\cos x-0}{x-0}=\infty \text{（不存在）},$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. 因此

$$f'(x)=\begin{cases}-\sin x, & x<0\\ \frac{2x}{1+x^2}, & x>0\end{cases}$$

又因为

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{1+x^2}=0,$$

$$\lim_{x\to0^-}f'(x)=\lim_{x\to0^-}(-\sin x)=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)\neq f'(0)$，即 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

【小课堂】 当然，根据 $f'(0)$ 不存在，也可以秒判 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处一定不连续，这是因为函数要在该点连续，前提得有定义.

【61】【解析】 当 $x\neq0$ 时， $f'(x)=\left(-2x^{-3}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$，

当 $x=0$ 时， $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}\overset{\text{令}x=\frac{1}{t}}{=}\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^{t^2}}$，

又当 $t\to\infty$ 时， $t^2\to+\infty$， $e^{t^2}\to+\infty$， $e^{t^2}\gg t$， 于是 $f'(0)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^{t^2}}=0$.

所以， $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0\\ 0, \qquad x=0\end{cases}$

又因为

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}\overset{\text{令}x=\frac{1}{t}}{=}2\lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{e^{t^2}}=0=f'(0)$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【62】【答案】D

【解析】当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

当 $x=0$ 时，由导数定义知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^2}=0，$$

进而，再利用导数定义可得

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-x+x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\cos x-1)}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\frac{1}{3}，$$

应选 D.

【63】【答案】D

【解析】当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)=\arctan\dfrac{1}{x^2}+x\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\cdot\dfrac{-2}{x^3}=\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{1+x^4}$.

当 $x=0$ 时， $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arctan\frac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\pi}{2}$.

又因为

$$\lim_{x\to0} f'(x)=\lim_{x\to0}\left(\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}\right)=\lim_{x\to0}\arctan\frac{1}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{1+x^4}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2},$$

所以 $\lim\limits_{x\to0} f'(x)=f'(0)$，即 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，应选 D.

2026 年考研数学零基础提前学同步作业

作业 8•不定积分计算提前学训练 40 题解析

【解析】（1）$\int(1+x)^{15}\mathrm{d}x=\int(1+x)^{15}\mathrm{d}(x+1)=\frac{1}{16}(1+x)^{16}+C$.

（2）$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x-5)^5}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(2x-5)^5}d(2x-5)=-\frac{1}{8}(2x-5)^{-4}+C$.

（3）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2}}\mathrm{d}\left(\sqrt{2}x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}x+C$.（套公式）

（4）$\int\frac{\mathrm{d}x}{9+2x^2}=\int\frac{1}{3^3+\left(\sqrt{2}x\right)^2}d\left(\sqrt{2}x\right)=\frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}x+C$.（套公式）

（5）$\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}\left(x^2+1\right)=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$

（6）$\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+e^x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}\left(1+\mathrm{e}^x\right)=\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)+C$.

（7）$\int\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^4}}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}}d\left(1+x^4\right)=\frac{3}{8}\left(1+x^4\right)^{\frac{2}{3}}+C$

（8）$\int\frac{e^x\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}}=\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}de^x=\arctan\mathrm{e}^x+C$.

（9）$\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\mathrm{d}x=\int\sqrt{\ln x}\mathrm{d}\ln x=\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$

（10）$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\arctan x\,\mathrm{d}\arctan x=\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$.

（11）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}=\int\sec^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\int\sec^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)d\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{1}{2}\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+C$$

（12）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}=\int\frac{\sec^2 x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\tan x}}=\int\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}}\mathrm{d}\tan x$

$$=2\int\frac{1}{2\sqrt{1+\tan x}}\mathrm{d}\left(\tan x+1\right)=2\sqrt{1+\tan x}+C$$

（13）$\int\frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\sin x}}=\int\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}}\mathrm{d}\sin x=\int\left(\sin x\right)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}\sin x=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\sin^2 x}+C$.

（14）$\int\frac{e^x\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}}=\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}de^x=\arctan\mathrm{e}^x+C$.

（15）$\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^3}}=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}\left(1+x^3\right)=\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}+C$.

（16）$\int\frac{x^2}{4+x^6}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{1}{2^2+\left(x^3\right)^2}\mathrm{d}\left(x^3\right)=\frac{1}{6}\arctan\frac{x^3}{2}+C$.

（17）$\int\cos^3 x\mathrm{d}x=\int\left(1-\sin^2 x\right)\mathrm{d}\sin x=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

（18）$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\xlongequal{令x=\sin t}\int\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t+C$

$=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$.

（19）$\int x\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\cos 2x=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

（20）$\int x^2\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\ln x\mathrm{d}x^3=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$.

（21）$\int x\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-3x}=-\frac{1}{3}x\mathrm{e}^{-3x}+\frac{1}{3}\int\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}x\mathrm{e}^{-3x}-\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3x}+c$.

（22）$\int x\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\arctan x\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

（23）$\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx=\int e^x dx-\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=e^x-2\sqrt{x}+C$

（24）$\int 3^x e^x dx=\int\left(3e\right)^x dx=\frac{1}{\ln(3e)}\left(3e\right)^x+C=\frac{1}{1+\ln 3}3^x e^x+C$

（25）$\int\frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}dx=2\int 1dx-5\int(\frac{2}{3})^x dx=2x-\frac{5}{\ln\frac{2}{3}}(\frac{2}{3})^x+C$

$$=2x-\frac{5}{\ln 2-\ln 3}(\frac{2}{3})^x+C.$$

（26）$\int \cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{x+\sin x}{2}+C$

（27）$\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx=\sin x-\cos x+C$

（28）$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int(\csc^2 x-\sec^2 x)dx$

$$=-(\cot x+\tan x)+C$$

（29）$\int\tan^{10}x\cdot\sec^2 xdx=\int\tan^{10}xd(\tan x)=\frac{1}{11}\tan^{11}x+C$

（30）$\int\frac{1}{(\arcsin x)^2\cdot\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2}=-\frac{1}{\arcsin x}+C$

（31）$\int\cos^2(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)dx=-\frac{1}{\omega}\int\cos^2(\omega t+\varphi)d[\cos(\omega t+\varphi)]$

$$=-\frac{1}{3\omega}\cos^3(\omega t+\varphi)+C$$

（32）$\int\frac{x^3}{9+x^2}dx=\int\frac{x(x^2+9)-9x}{9+x^2}dx=\int xdx-9\int\frac{x}{9+x^2}dx$

$$=\int xdx-\frac{9}{2}\int\frac{1}{x^2+9}d(x^2+9)=\frac{x^2}{2}-\frac{9}{2}\ln(x^2+9)+C$$

（33）$\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$

（34）令 $x=3\sec t$，所以

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx=\int 3\tan^2 tdt=3\int(\sec^2 t-1)dt=3\tan t-3t+C$$

因此，回代得原式 $=\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+C$.

（35）$\int x\tan^2 xdx=\int x\left(\sec^2 x-1\right)dx=\int xd\tan x-\frac{1}{2}x^2$

$$=x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{1}{2}x^2+C$$

（36）$\int x^2\cos xdx=\int x^2 d\sin x=x^2\sin x-\int 2x\sin xdx=x^2\sin x+\int 2xd\cos x$

$$=x^2\sin x+2x\cos x-\int 2\cos xdx=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$$

（37）$\int\ln^2 xdx=x\ln^2 x-2\int\ln xdx=x\ln^2 x-2x\ln x+\int 2dx$

$$=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$$

（38）$\int x\sin x\cos xdx=\int -\frac{x}{4}d\cos 2x=-\frac{x\cos 2x}{4}+\frac{1}{4}\int\cos 2xdx$

$$=-\frac{x\cos 2x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}+C$$

（39）$\int x\cos\frac{x}{2}dx=2\int xd\sin\frac{x}{2}=2x\sin\frac{x}{2}-2\int\sin\frac{x}{2}dx=2x\sin\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C$

（40）$\int\left(x^2-1\right)\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\int\left(x^2-1\right)d\cos 2x$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\cos 2x+\int x\cos 2xdx$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\cos 2x+\frac{1}{2}\int xd\sin 2x$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2xdx$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{3}{2}\right)\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+C$$