2026 年考研数学零基础提前学同步作业

作业 1•函数性质与常见函数解析

【1】已知函数 $f(\sin x+1)$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{6}\right]$，则函数 $f(x)$ 的定义域为______.

【答案】$\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$

【解析】注意，函数的定义指的是该函数自变量的取值范围.

显然函数 $f(\sin x+1)$ 的自变量为 x，于是在函数 $f(\sin x+1)$ 中 $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{6}$，进而 $-1\le\sin x\le\dfrac{1}{2}$，于是 $0\le\sin x+1\le\dfrac{3}{2}$，因此 $f(x)$ 的定义域为 $\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$.

【2】判断函数的奇偶性.

（1） $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\sin x$

（2） $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

【答案】（1）奇函数；（2）偶函数.

【解析】（1）显然，函数定义域为关于原点对称.

令 $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，因为 $g(-x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=g(x)$，所以 $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 为偶函数.

又函数 $\sin x$ 为奇函数，于是根据奇偶性的性质，知 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\sin x$ 为奇函数.

（2）显然，函数定义域为关于原点对称.

令 $g(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$，因为 $g(-x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}=-\ln\dfrac{1-x}{1+x}$，所以 $g(x)$ 为奇函数.

又 $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 是奇函数，于是 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 为偶函数.

【3】设函数 $f(x)=\tan x$，$f\left[g(x)\right]=x^2-2$，且 $\left|g(x)\right|\le\dfrac{\pi}{4}$，求 $g(x)$ 的表达式，并确该函数的定义域.

【答案】$g(x)=\arctan\left(x^2-2\right)$，定义域为 $\left[-\sqrt{3},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{3}\right]$.

【解析】 由题意可知，$f\left[g(x)\right]=\tan g(x)=x^2-2$. 又$\left|g(x)\right|\le\dfrac{\pi}{4}$，所以

$$g(x)=\arctan\left(x^2-2\right),$$

且

$$-\frac{\pi}{4}\le\arctan\left(x^2-2\right)\le\frac{\pi}{4},$$

即$-1\le g(x)=x^2-2\le1$，解得$-\sqrt{3}\le x\le-1$或$1\le x\le\sqrt{3}$，即$g(x)$的定义域为

$$\left[-\sqrt{3},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{3}\right].$$

【4】 已知$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{x^4+1}$，求$f(x)$，并求极限$\lim\limits_{x\to2}f(x)$.

【答案】 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2}$，　$\lim\limits_{x\to2}f(x)=1$.

【解析】 因为

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+x^3}{x^4+1}=\frac{\frac{1}{x}+x}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{x}+x}{(\frac{1}{x}+x)^2-2},$$

令$t=\dfrac{1}{x}+x$，所以$f(t)=\dfrac{t}{t^2-2}$，即$f(x)=\dfrac{x}{x^2-2}$，因此$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x}{x^2-2}=1$.

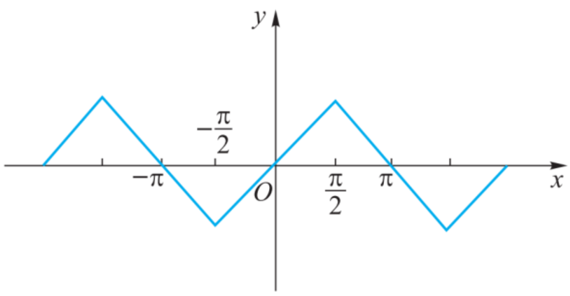
【5】 求$y=\arcsin(\sin x)$表达式，并画出函数的图像.

【解析】 显然$y=\arcsin(\sin x)$是以$T=2\pi$为周期的周期函数，且

当$-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$时，$y=\arcsin(\sin x)=x$.

当$\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{3}{2}\pi$时，$-\dfrac{\pi}{2}<\pi-x\le\dfrac{1}{2}\pi$，于是$y=\arcsin(\sin(\pi-x))=\pi-x$.

所以$y=\arcsin(\sin x)$图像如下图所示.



【6】（2020 年真题）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，且满足 $2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f(x)$.

【答案】$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x>0)$.

【解析】记

$$2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad ①$$

利用 $\frac{1}{x}$ 替换上式中 x，得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1+2x}{x\sqrt{1+x^2}}, \quad ②$$

于是

$$2x^2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{x+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}, \quad ③$$

由①式与③式知，消掉 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，即解得 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x>0)$.

【7】设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot\arctan(1+|\cos x|)$，则 $f(x)$ 是（　　）.

（A）偶函数　（B）有界函数　（C）周期函数　（D）单调函数

【答案】注意，本题可留到下节课结束再完成. 应选（A）.

【解析】由

$$f(-x)=(-x)\cdot\tan(-x)\cdot\arctan(1+|\cos(-x)|)$$
$$=x\cdot\tan x\cdot\arctan(1+|\cos x|),$$

知 $f(x)$ 为偶函数，故应选（A）.

因为

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}x\cdot\tan x\cdot\arctan(1+|\cos x|)=\infty,$$

所以 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot\arctan(1+|\cos x|)$ 为无界函数.

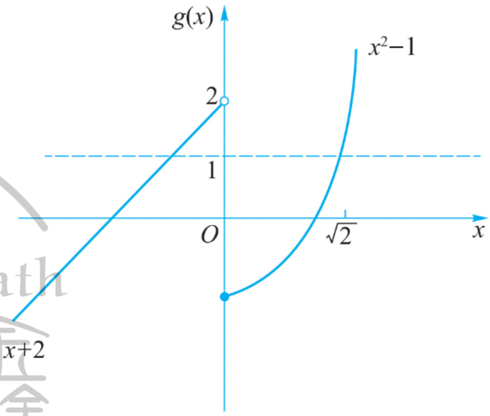
一般地，表达式中含所有 x^n 因子不是周期函数，显然 $f(x)$ 不是周期函数.

一般地，表达式中含有绝对值不是单调函数，显然 $f(x)$ 不是单调函数.

【8】 已知 $f(x)=\begin{cases} e^x, x<1 \\ x, x\ge 1 \end{cases}, g(x)=\begin{cases} x+2, x<0 \\ x^2-1, x\ge 0 \end{cases}$，求 $f[g(x)]$.

【解析】 将 $f(x)$ 作为整体替换 $g(x)$ 中所有自变量 x，得 $f[g(x)]=\begin{cases} e^{g(x)}, g(x)<1 \\ g(x), g(x)\ge 1 \end{cases}$，

根据右图所示的 $g(x)$ 草图，不难看出



当 $x<-1$ 时，$g(x)<1$，$g(x)=x+2$；

当 $0\le x<\sqrt{2}$ 时，$g(x)<1$，$g(x)=x^2-1$；

当 $-1\le x<0$ 时，$g(x)\ge 1$，$g(x)=x+2$；

当 $x\ge\sqrt{2}$ 时，$g(x)\ge 1$，$g(x)=x^2-1$.

因此，$f[g(x)]=\begin{cases} e^{x+2}, x<-1 \\ e^{x^2-1}, 0\le x<\sqrt{2} \\ x+2, -1\le x<0 \\ x^2-1, x\ge\sqrt{2} \end{cases}$.

2026 年考研数学零基础提前学同步作业

作业 2•无穷小量的阶、泰勒公式解析

【9】当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中比其他三个都高阶的是（　　）.

（A）$x\ln(1+x)$　　（B）$2x^2+3x^4$

（C）$\sqrt[3]{1+x^2}-1$　　（D）$\tan x-\sin x$

【答案】应选（D）.

【解析】当 $x\to 0$ 时，$x\ln(1+x)\sim x\cdot x=x^2$，为 x 的 2 阶无穷小.

当 $x\to 0$ 时，$2x^2+3x^4\sim 2x^2$（和取低阶），为 x 的 2 阶无穷小.

当 $x\to 0$ 时，$\left[1+x^2\right]^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}x^2$,为 x 的 2 阶无穷小；

当 $x\to 0$ 时，有

$$\tan x-\sin x=\left[x+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]-\left[x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right]=\frac{1}{2}x^3+o\left(x^3\right)\sim\frac{1}{2}x^3,$$

即为 x 的 3 阶无穷小.

综上所述，当 $x\to 0$ 时阶数最高的为 D 选项，故应选（D）.

【10】当 $x\to 0^+$ 时，求出下列无穷小等价的结果，并确定该无穷小的阶数.

（1）$\sqrt[3]{1-\sqrt{\sin x}}-1$.

（2）$x+\sqrt{x}+\ln\left(1+x^2\right)$.

（3）$e^x-\cos\sqrt{x}$.

（4）$\sin x-\arcsin x$.

（5）$\sin x^2+\ln\left(1+x^4\right)$.

（6）$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.

【解析】（1）当 $x\to 0^+$ 时，有

$$\sqrt[3]{1-\sqrt{\sin x}}-1=\left[1+\left(-\sqrt{\sin x}\right)\right]^{\frac{1}{3}}-1\sim-\frac{1}{3}\sqrt{\sin x}\sim-\frac{1}{3}\sqrt{x},$$

即为 x 的 $\frac{1}{2}$ 阶无穷小.

（2）当 $x\to 0^+$ 时，有

$$x+\sqrt{x}+\ln\left(1+x^2\right)\sim\sqrt{x} \text{（和取低阶原则）},$$

即为 x 的 $\frac{1}{2}$ 阶无穷小.

（3）当 $x\to 0^+$ 时，有

$$e^x-\cos\sqrt{x}=e^x-1+1-\cos\sqrt{x}\sim x+\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}x \text{（符合等价无穷小加减法替换准则）}$$

即为 x 的 1 阶无穷小.

（4）当 $x\to 0$ 时，因为

$$\begin{aligned}\sin x-\arcsin x&=\left[x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right]-\left[x+\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right]\\&=-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\sim-\frac{1}{3}x^3,\end{aligned}$$

即为 x 的 3 阶无穷小.

（5）当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x^2-\ln(1+x^4)\sim\sin x^2\sim x^2 \text{（和取低阶原则）},$$

即为 x 的 2 阶无穷小.

（6）当 $x\to 0$ 时，因为

$$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln(1+x)-\ln(1-\sqrt{x})$$

$$\sim-\ln(1-\sqrt{x})\sim-(-\sqrt{x})=x^{\frac{1}{2}} \text{（和取低阶原则）},$$

即为 x 的 $\frac{1}{2}$ 阶无穷小.

【11】 试用确定下面无穷小的等价无穷小.

（1）当 $x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x\sim$__________.（试试用三种方法）

（2）当 $x\to 0$ 时，$x-\tan x+\sin^2 x\sim$__________.

（3）当 $x\to 0$ 时，$x^2-\ln\left(1+x^2\right)\sim$__________.

（4）当 $x\to 0$ 时，$\tan x-\ln\left(1+\tan x\right)\sim$__________.

【解析】（1）**方法一：泰勒展开法.**

当 $x \to 0$ 时，$\tan x - \sin x = \left[x + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right] - \left[x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right]$

$$= \frac{1}{2}x^3 + o\left(x^3\right) \sim \frac{1}{2}x^3$$

方法二：造等价无穷小.

当 $x \to 0$ 时，$\tan x - \sin x = \left(\tan x - x\right) + \left(x - \sin x\right) \sim \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{2}x^3$.

方法三：初等数学化简.

当 $x \to 0$ 时，$\tan x - \sin x = \tan x\left(1 - \cos x\right) \sim \frac{1}{2}x^3$.

（2）当 $x \to 0$ 时，因为 $x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3$（3 阶），$\sin^2 x \sim x^2$（2 阶），所以

$$x - \tan x + \sin^2 x \sim \sin^2 x \sim x^2 \text{（和取低阶）}.$$

（3）当 $\square \to 0$ 时，$\square - \ln\left(1+\square\right) \sim \frac{1}{2}\square^2$，于是当 $x \to 0$ 时，有

$$x^2 - \ln\left(1+x^2\right) \sim \frac{1}{2}\left(x^2\right)^2 = \frac{1}{2}x^4.$$

（4）当 $\square \to 0$ 时，$\square - \ln\left(1+\square\right) \sim \frac{1}{2}\square^2$，于是当 $x \to 0$ 时，有

$$\tan x - \ln\left(1+\tan x\right) \sim \frac{1}{2}\left(\tan x\right)^2 = \frac{1}{2}x^2.$$

【12】 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\sin x^3}$.

【解析】 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\sin x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\left[x - \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right] - \left[x - \frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)\right]}{x^3}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o\left(x^3\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

【13】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[x-\dfrac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right]-\left[x+\dfrac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]}{\dfrac{1}{3}x^2\cdot\dfrac{1}{2}\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{1}{2}x^3+o\left(x^3\right)}{\dfrac{1}{6}x^3}=-3$.

【14】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[2x+\dfrac{1}{6}(2x)^3+o\left(x^3\right)\right]-2\left[x+\dfrac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right]}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3+o\left(x^3\right)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^3}=1.$$

【15】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{1}{2}\left(-x^2\right)}{e^x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{e^x-\cos x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{e^x-1+1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{e^x-1}\quad\text{（和取低阶原则）}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=0.$$

【16】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos\sqrt{\tan x-\sin x}}{\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos\sqrt{\tan x-\sin x}}{\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}(\tan x-\sin x)}{\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{3}}}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\left[x+\dfrac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]-\left[x-\dfrac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right]}{\left[1+\dfrac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]-\left[1-\dfrac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3+o\left(x^3\right)}{\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{2}{3}x^3}=\frac{3}{8}.$$

【小课堂】遇本题中，若按照下面等价的方法会会更简单！

当 $x\to 0$ 时，有

$$\sqrt[3]{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}=\left[\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]-\left[\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]\sim\frac{1}{3}x^3-\left(-\frac{1}{3}x^3\right)=\frac{2}{3}x^2;$$

$\tan x-\sin x=\tan x\left(1-\cos x\right)\sim\frac{1}{2}x^3$（第一题，你还记得么？）

所以，原式$==\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{2}{3}x^3}=\frac{3}{8}$.

2026 年考研数学零基础提前学同步作业

作业 3•洛必达法则、四则运算法则解析

【1】 求下列函数的极限.

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=$________.　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{100}}{e^x}=$________.

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^x}=$________.　　（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+2x^2+4}{e^x+x^2+1}=$________.

【解析】（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{100}}{e^x}=0$.

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^x}=0$.

（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+2x^2+4}{e^x+x^2+1}\overset{\text{抓大头}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=0$.

【小课堂】 当 $x\to+\infty$ 时，以下函数趋向 $+\infty$ 由慢到快的速度（至少快一个量级）为

$$\ln x\to x^a\left(a>0\right)\to a^x\left(a>1\right).$$

【2】 设函数 $f\left(x\right)=2^x+3^x-2$，当 $x\to0$ 时（　）.

（A）$f\left(x\right)$ 与 x 是等价无穷小量.

（B）$f\left(x\right)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量.

（C）$f\left(x\right)$ 是比 x 觉高阶的无穷小量.

（D）$f\left(x\right)$ 是比 x 较低阶的无穷小量.

【解析】 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x+3^x-2}{x}\overset{\text{洛}}{=}\lim_{x\to0}\left(2^x\ln2+3^x\ln3\right)\overset{\text{已}}{=}\ln2+\ln3=\ln6,$$

所以 $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量，故应选（B）.

【3】求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}-4}{x}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}-4}{x}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+4e^{4x}\right)=1+2+3+4=10$.

【4】求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x}$.

【解析】**方法一：** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x}\overset{拆}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1-1=0$.

方法二： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left[e^x+xe^x-\dfrac{1}{1+x}\right]=1+0-1=0$.

【5】求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1+\ln(1+x^2)}{x^2}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1+\ln(1+x^2)}{x^2}\overset{拆}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$$

【6】求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+\ln(1+x^2)+\cos x-1}{x^2}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+\ln(1+x^2)+\cos x-1}{x^2}$

$$\overset{拆}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$$

$$=1+1+\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$