2026 考研数学零基础提前学课堂手迹版讲义

新浪微博：考研数学周洋鑫

零基础提前学（9）

【1】导数定义

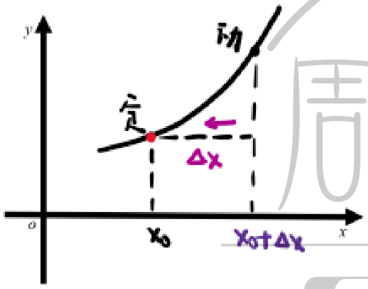
1. 增量定义

2. 计算型定义

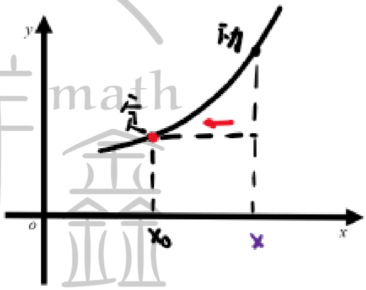
【2】动一定，动点逼近定点

定义形式的不同，是动点坐标选取的不同

【3】单侧导数定义



$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$



$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

【考点3】连续与可导之间的关系

① $\boxed{\text{若 } f(x) \text{ 在 } x=x_0 \text{ 处可导，则 } f(x) \text{ 在 } x=x_0 \text{ 处连续.}}$

证明：$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导 $\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0\to 0}$ 存在.

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

② $\boxed{\text{若}f(x)\text{在}x=x_0\text{处连续}\nRightarrow f(x)\text{在}x=x_0\text{处可导}}$

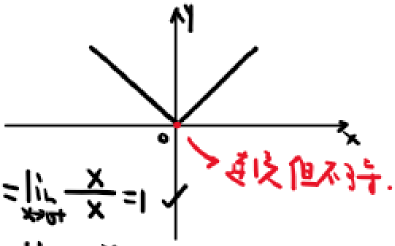
例：$f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处：

(1) 连续 ✓

(2) $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|-0}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$ ✓

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|-0}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$ ✓

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.



【注】注意研究的是哪个对象！！！！

例：(1) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $f'(x)$ 在 x_0 处连续. ✗

(2) 若 $\underline{f'(x_0)\text{存在}}$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

$\Updownarrow$

$f(x)$ 在 x_0 处可导

(3) 若 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

$\Downarrow$

$f'(x_0)\exists$

$\Updownarrow$

$f(x)$ 在 x_0 处可导

【注1】谁可导，谁连续；

【注2】谁在这点存在，低一阶的连续；

【注3】高阶连续可推低阶连续.

【例6.5】 判断下列命题的正确性.

（1）若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

（2）若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $\overset{f(x)}{f'(x)}$ 在 $x=x_0$ 处连续. ✗

（3）若 $f'(x_0)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. ✓

（4）若 $f''(x_0)$ 存在，则 $f''(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. ✗

若 $f''(x_0)$ 存在，则 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. ✓

若 $f''(x_0)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. ✓

【例6.6】 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$，试确定 a、b 的值，$\boxed{\text{使 } f(x) \text{ 在点 } x=1 \text{ 处可导}}$.

$f'_-(1)=f'_+(1)$

解：① $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续

则 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$

即：$\lim\limits_{x\to1^-}x^2=\lim\limits_{x\to1^+}(ax+b)=1$

故 $a+b=1$.

② $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{ax+b-1}{x-1}$

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)=2.$

故 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{ax+b-1}{x-1}=2.$ $\qquad \dfrac{a+b-1=0}{0}$

则 $\lim\limits_{x\to1^+}a=a=2.$

则 $a=2,b=-1.$

【刻意练习】 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+b, x<2, \\ ax+1, x\geqslant 2, \end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $x=2$ 可导，则（　　）.

A．$a=4,b=7$　　B．$a=4,b=1$

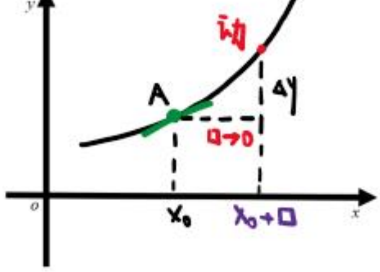
C．$a=4,b=5$　　D．$a=2,b=3$

【考】导数推广定义

$f'(x_0)=\lim\dfrac{f(x_0+\overset{\to 0^+\text{且}0^-}{\square})-f(x_0)}{\square}$

① $f'_+(x_0)=\lim\dfrac{f(x_0+\overset{\to 0^+}{\square})-f(x_0)}{\square}$

② $f'_-(x_0)=\lim\dfrac{f(x_0+\overset{\to 0^-}{\square})-f(x_0)}{\square}$



例1：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(4+3x)-f(4)}{x}=$ ____.

$3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(4+\boxed{3x})-f(4)}{3x}$ （$3x\to 0$）

$=3f'(4)$.

一凑结构
二看0

例2：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+5x^4)-f(1)}{\ln(1+x^4)}=$ ____.

$=5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\boxed{5x^4})-f(1)}{5x^4}$ （0^+）

$=5f'_+(1)$

一凑结构
二看0

例3：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overset{定}{f(5)}-\overset{动}{f(5-2x)}}{x}=$ ____.

原：$2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f[5+\boxed{(-2x)}]-f(5)}{-2x}$ （0）

$=2f'(5)$.

【总结】

1. 计算型定义 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
2. 推广型定义 $f'(x_0)=\lim\dfrac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}$ （$\square\to 0$） 单侧
3. 连续与可导的关系

提前学 7·导数的计算

【考点1】必备知识

（1）导数表【必背】

$(c)'=0$　　$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ （α 实常数）

$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$　　$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$

$(\sin x)'=\cos x$　　$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$　　$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$　　$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}\ (a>0, a\neq 1)$　　$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$　　[考] $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

$(a^x)' = a^x \ln a\ (a>0, a\neq 1)$　　$(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}\ (a>0, a\neq 1)$　　$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(a^x)' = a^x \ln a\ (a>0, a\neq 1)$　　$(e^x)' = e^x$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$　　$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$　　$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

（2）求导法则

1. $[u(x)\pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$
2. $[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\, v'(x)$
3. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$.

[2015 年考研真题]

设函数 $u(x)$，$v(x)$ 可导，利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

证明：记 $F(x) = u(x)v(x)$，对于任意 x_0 有：

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{[u(x)-u(x_0)]\,v(x) + u(x_0)[v(x)-v(x_0)]}{x-x_0}$$ 妙！

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\overset{\exists}{\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}}\cdot \overset{\exists}{v(x)} + \overset{\exists}{u(x_0)}\cdot\overset{\exists}{\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}}\right]$$

在 x_0 处连续

$$= u'(x_0)\cdot v(x_0) + u(x_0)\cdot v'(x_0)$$

于是 $F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)\cdot v'(x)$.

【基础】聊聊基本的导数符号 $y=f(x)$

(1) $y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}$

(2) $y''=f''(x)=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$

(3) $y'''=f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}$

(4) $y^{(4)}=f^{(4)}(x)=\frac{d^4y}{dx^4}$

【考点2】复合函数求导

$y=f(u),\ u=g(x)\Rightarrow y=f[g(x)]$.

$y\rightarrow u=g(x)\rightarrow x$

中

则 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

【注】链式求导法则

例: $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 反双曲正弦

$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'$

$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left[1+\left(\sqrt{x^2+1}\right)'\right]$

$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left[1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right]$

$=\frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

【例7.1】求下列函数的导数

（1） $y=\tan e^{x^3}$

（2） $y=\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

(1) $y'=\sec^2e^{x^3}\cdot e^{x^3}\cdot 3x^2$

(2) $y'=\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

【例7.2】 设 $y=\cos\boxed{x^2}\cdot\sin^2\dfrac{1}{x}$，求 y'.

解：$y'=-\sin x^2\cdot 2x\cdot\sin^2\frac{1}{x}+\cos x^2\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2}$

11. 求下列函数的导数：

(1) $y=\mathrm{e}^{-x}(x^2-2x+3)$；

(2) $y=\sin^2x\cdot\sin(x^2)$；

(3) $y=\left(\arctan\dfrac{x}{2}\right)^2$；

(4) $y=\dfrac{\ln x}{x^n}$；

(5) $y=\dfrac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}$；

(6) $y=\ln\cos\dfrac{1}{x}$；

(7) $y=\mathrm{e}^{-\sin^2\frac{1}{x}}$；

(8) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$；

(9) $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$；

(10) $y=\arcsin\dfrac{2t}{1+t^2}$.

解 (1) $y'=-\mathrm{e}^{-x}(x^2-2x+3)+\mathrm{e}^{-x}(2x-2)=\mathrm{e}^{-x}(-x^2+4x-5)$.

(2) $y'=2\sin x\cos x\cdot\sin(x^2)+\sin^2x\cos(x^2)\cdot 2x$
$=\sin 2x\sin(x^2)+2x\sin^2x\cos(x^2)$.

(3) $y'=2\arctan\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{4+x^2}\arctan\dfrac{x}{2}$.

(4) $y'=\dfrac{\dfrac{1}{x}x^n-nx^{n-1}\ln x}{x^{2n}}=\dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$.

(5) $y'=\dfrac{(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})-(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})}{(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})^2}$
$=\dfrac{4}{(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})^2}$.

或 $y'=(\operatorname{th}t)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2t}$.

(6) $y'=\dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{x}}\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{x^2}\tan\dfrac{1}{x}$.

(7) $y' = e^{-\sin^2\frac{1}{x}}\left(-2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$.

(8) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

(9) $$y' = \arcsin\frac{x}{2} + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}.$$

(10) $$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}}\cdot\frac{2(1+t^2)-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{1+t^2}{\sqrt{(1-t^2)^2}}\cdot\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1-t^2)}{|1-t^2|(1+t^2)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{1+t^2}, & |t|<1, \\ -\dfrac{2}{1+t^2}, & |t|>1. \end{cases}$$