



2026 考研数学零基础提前学通关测试卷

试卷共 150 分 考试时间 2 小时

一、前餐题：零基础公式测试（全部答对得 10 分）

- (1) 请默写出 8 个泰勒公式.
- (2) 请默写出 8 个等价无穷小公式以及 6 个由泰勒推出的泰勒公式.
- (3) 请写出导数计算型定义、单侧导数定义、推广定义.
- (4) 写出 $\sec x, \csc x, \tan x, \cot x, \frac{1}{x^2+a^2}, \frac{1}{x^2-a^2}$ 的不定积分结果.

二、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

1. 已知下列四个函数

$$\textcircled{1} f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}; \quad \textcircled{2} f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2};$$

③ $f(x) = \frac{a^x + 1}{a^x - 1} (a > 0)$;

④ $f(x) = x \sin x + \cos x$,

其中是奇函数的个数是 ().

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1, \\ 2, & x > 1, \end{cases}$ 则 ().

A. $f[f(x)] = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ 2, & x > 0. \end{cases}$

C. $f[f(x)] = \begin{cases} x+2, & x \leq 0, \\ 2, & x > 0. \end{cases}$



3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\tan x} - e^{\sin x}$ 与 $x^n \ln(1+x)$ 是同阶的无穷小, 则正整数 $n =$ ().

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小量中比其他三个都高阶的是 ().

A. $\sqrt{1-x} - 1$.B. $e^{x^2} - \cos x$.C. $\ln(1+x^2) - \sin x$.D. $\tan x - \arctan x$.

5. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a \ln(1+\sqrt{x}) + b \sin x}{c(e^{-\sqrt{x}} - 1) + d \ln(1-x)} = 2$, 则 ().

A. $a = -2c$ B. $a = 2c$ C. $b = -2d$ D. $b = d$

6. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\tan x - \tan(\tan x)] \tan x}{1 - \cos x^2} =$ ().

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

7. 下列函数中, 以 $x=0$ 为跳跃间断点的是 ().

A. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

B. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

C. $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

D. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

8. 设函数 $f(x) = \max(e^x, 1)$, 则 $f'(0) =$ ().

A. 1.

B. 不存在, 且不是 ∞ .

C. 0.

D. ∞ .

9. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - 2}{x} = 4$, 则 $f'(0) =$ ().

A. 0.

B. 2.

C. -2.

D. 4.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{1+x^2}, & x \leq 0, \\ \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ().

- A. 极限不存在. B. 极限存在但不连续.
C. 连续但不可导. D. 可导但 $f'(0)=0$.

三、填空题: 9~14 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

11. 设函数 $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x+x^3}{x^4+1}$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x-1}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan 2x + e^{2ax} - 1}{\sqrt{1+x} - 1}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 可导, 且 $g(0)=0$, $g'(0)=1$, $f'(0)=2$. 若 y 与 x 满足方程

$x^3 + y^3 - \sin 3x + 6y = 0$, 且 $u = f[g(x) + \arctan y]$, 则 $\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题: 17~21 小题, 共 60 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 请将答案写在答题纸指定位置上.

17. (5 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$ (n 为正整数).

18. (每题 5 分, 共 10 分) 求下列函数极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x^2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

19. (共 15 分) 求下列函数的导数.

$$(1) (2 \text{ 分}) \quad y = \ln(\csc x - \cot x)$$

$$(2) (2 \text{ 分}) \quad y = \left(\arcsin \frac{x}{2} \right)^2$$

$$(3) (2 \text{ 分}) \quad y = \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$(4) (2 \text{ 分}) \quad \text{设 } y = f(\sin^2 x), \quad f \text{ 可导, 求 } y'.$$

$$(5) (2 \text{ 分}) \quad \text{设 } f(x) = \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x, \quad \text{求 } f'(x) \Big|_{x=\frac{1}{2}}.$$

20. (本题满分 5 分)

设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 - y + 1 = e^y$ 所确定的隐函数, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$.

21. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0, \\ xe^x + 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

22. (本题满分 20 分) 求下列不定积分.

(1) $\int \sin^4 x dx$

(2) $\int \frac{1}{\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)} dx$

(3) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx$

(4) $\int (\arcsin x)^2 dx$

(5) $\int x^2 \arctan x dx$

