2026 考研数学零基础提前学课堂手迹版讲义

新浪微博：考研数学周洋鑫

零基础提前学（5）

1.无穷小量

（1）定义

（2）比阶

（3）等价无穷小公式——8+6

（4）等价无穷小的替换准则——乘除、加减、推广、和取低阶

（5）无穷小量的阶

（6）高阶无穷小的运算法则

（7）等价无穷小的充要条件

2. 泰勒公式

（1）记住公式，了解什么时候用

（2）原则1：相消不为零原则

例1：$x\to 0$ 时，$e^x-1-\ln(1+x)\sim$ $\underline{x^2}$.　　记公式！！

解：$x\to 0$ 时，$e^x-1-\ln(1+x)$

$$=\left[\cancel{1}+\cancel{x}+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]-\cancel{1}-\left[\cancel{x}-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]$$

$$=x^2+o(x^2)$$

$$\sim x^2$$

[考] $x\to 0$ 时，

(1) $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$　3　　(4) $x-\arcsin x\sim-\frac{1}{6}x^3$　3

(2) $x-\tan x\sim-\frac{1}{3}x^3$　3　　(5) $x-\arctan x\sim\frac{1}{3}x^3$　3

(3) $x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$　2　　(6) $e^x-1-x\sim\frac{1}{2}x^2$.　2

例1：若 $x\to0$ 时，$f(x)$ 为 x 的 m 阶无穷小，$g(x)$ 为 x 的 n 阶无穷小

(1) $f(x)\cdot g(x)$ 为 x 的 $m+n$ 阶无穷小. ✓

(2) $f(x)\pm g(x)$ 为 x 的 $\min(m,n)$ 阶无穷小.

$f(x)\sim Ax^m$　$g(x)\sim Bx^n$

(1) $f(x)g(x)\sim Ax^m\cdot Bx^n=AB\cdot x^{m+n}$

(2) ①当 $m\neq n$ 则 ✓

②当 $m=n$ 则

例：$x\to0$ 时，$x+\sin x\sim x+x=2x$

$x\to0$ 时，$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$

跳阶！

例2. 当 $x\to0$ 时，$(x-\sin x)+\ln(1+x^2)+\ln(1+x^4)\sim\ln(1+x^2)\sim x^2$ ✓

分析：当 $x\to0$ 时，$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$　3

$\ln(1+x^2)\sim x^2$　2

$\ln(1+x^4)\sim x^4$　4

不同阶：

看一看!!

【例3.19】 已知当 $x\to0$ 时，$f(x)=3\sin x-\sin3x$ 与 cx^k 是等价无穷小量，则（　）.

（A）$k=1,c=4$.　（B）$k=1,c=-4$.

（C）$k=3,c=4$.　（D）$k=3,c=-4$.

（E）$k=2,c=-4$.

①等价无穷小替换

②泰勒 ✓

[分析] $f(x)=3\sin x-\sin3x\overset{?}{\sim}\boxed{3x}\boxed{-3x}$ ✗

解：当 $x\to0$ 时，$f(x)=3\sin x-\sin3x$

$=3\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]-\left[3x-\frac{1}{6}(3x)^3+o(x^3)\right]$

$=\left[\cancel{3x}-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\right]-\left[\cancel{3x}-\frac{9}{2}x^3+o(x^3)\right]$

$=4x^3+o(x^3)$

$\sim4x^3=cx^k\Rightarrow c=4,k=3$.

[注] $x\to0$ 时，$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

$\square\to0$ 时，$\sin\square=\square-\frac{1}{6}\square^3+o(\square^3)$

【例3.19】 已知当 $x \to 0$ 时，$f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小量，则（　　）.

（A）$k = 1, c = 4$.　　（B）$k = 1, c = -4$.

（C）$k = 3, c = 4$.　　（D）$k = 3, c = -4$.

（E）$k = 2, c = -4$.

方一：当 $x \to 0$ 时，$f(x) = 3\sin x - \sin 3x$

$$= \boxed{3(\sin x - x)} + \boxed{3x - \sin 3x}$$

$$\overset{?}{\sim} 3\cdot\left(-\frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{6}(3x)^3 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\square}{\square} \neq -1$$

$$= -\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^3 = 4x^3$$

【考】$x \to 0$ 时，$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$

$\square \to 0$ 时，$\square - \sin \square \sim \frac{1}{6}\square^3$.

【考】原则2：上下同阶原则——经验原则

【例3.20】 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x - \arcsin x}{\tan x - \sin x}$.

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\left[x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right] - \left[x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right]}{\left[x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right] - \left[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \sim \frac{1}{2}x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{2}x^3}$$

$$= -1.$$

【例3.20】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-\arcsin x}{\tan x-\sin x}$.

方二：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\arctan x-x)+(x-\arcsin x)}{(\tan x-x)+(x-\sin x)}$　$\overset{?}{\sim}$ $-\frac{1}{3}x^3$　$-\frac{1}{6}x^3$；$\sim$ $\frac{1}{3}x^3$　$\frac{1}{6}x^3$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{3}x^3+(-\frac{1}{6}x^3)}{\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{2}x^3}=-1.$

【考点4】洛必达法则

若：(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.　　$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\overset{?}{=}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$　$\frac{0}{0}$　$\frac{\infty}{\infty}$

(2) 在 $x\to x_0$ 下 $f(x)$ 与 $g(x)$ 可导，

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 为 A 或 ∞,

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

[考] $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\begin{cases}存在\Rightarrow A(数)\\ 不存在\begin{cases}① \infty\\ ② 不确定.\end{cases}\end{cases}$　不存在且不为 ∞ ✓

例1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\frac{1}{6}x^3}$

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\frac{1}{6}x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=1$　$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

①$\frac{0}{0}$　②③

例2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-\ln(1+x)}{x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+\frac{1}{(1+x)^2}}{2}=1$ ✓

$\frac{0}{0}$　$\frac{0}{0}$　$\frac{1+1}{2}$

例3: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}\overset{抓}{=}1$

[分析] $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}\overset{洛}{\cancel{=}}\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)=$ 不确定.

$\frac{\infty}{\infty}$

【考】如果函数好求导的时候，为何不洛必达！

【考】我们要掌握洛必达法则bug，这些bug是为了让我们更好地学会这个内容！

【例3.21】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}-e^{x}+1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1}$ $\frac{0}{0}$ 送分题！

解：$\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1=(1-x^2)^{\frac{1}{3}}-1$

$=[1+(-x^2)]^{\frac{1}{3}}-1$

$\sim\frac{1}{3}(-x^2)=-\frac{1}{3}x^2$

则 $I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}-e^{x}+1}{-\frac{1}{3}x^2}$ $\frac{0}{0}$ 洛！

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}}{-\frac{2}{3}x}$ $\frac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{9e^{3x}-4e^{2x}-e^{x}}{-\frac{2}{3}}$

$\overset{\text{已}}{=}\frac{9-4-1}{-\frac{2}{3}}=-6.$

【例3.22】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=$ 0 $\quad$ $+\infty$ $+\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $e^x>>x^2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}\overset{\text{已}}{=}0$

【例3.23】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=$ 0 $\quad$ $+\infty$ $+\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $x^3>>\ln x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}\overset{\text{洛}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3x^3}=0$

【考】当 $x\to+\infty$ 时，$\underset{+\infty}{\ln x}<<\underset{+\infty}{x^{\alpha}}<<\underset{+\infty}{a^x}$ $(\alpha>0,a>1)$

秒：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{100}}{e^x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^{100}x}{x^4}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^{1000}x}{\frac{1}{x^{1000}}}\overset{\infty}{=}0$

【例3.24】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$ ___A___.

有界

A. 0　　　　B. 1

C. 2　　　　D. 3

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{抓大头}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2^x}\overset{洛}{=}0\Rightarrow$ 无穷小.

其中: $|\sin x+\cos x|\le|\sin x|+|\cos x|$

$\le 1+1=2$

则 $\sin x+\cos x$ 为有界变量.

[注] 三角不等式

$\big||x|-|y|\big|\le|x\pm y|\le|x|+|y|.$

【考点5】极限四则运算

1. 四则运算法则内容

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]\overset{拆}{=}\lim f(x)\pm\lim g(x)$

(2) $\lim[f(x)g(x)]\overset{拆}{=}\overset{\exists}{\lim f(x)}\cdot\overset{\exists}{\lim g(x)}$

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}\overset{拆}{=}\dfrac{\overset{\exists}{\lim f(x)}}{\underset{\exists}{\lim g(x)}}=\dfrac{A}{B}\ (B\ne0)$

例1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

[分析] $\lim\limits_{x\to0}\left[\overset{\infty}{\dfrac{\tan x}{x^3}}-\overset{\infty}{\dfrac{\sin x}{x^3}}\right]$ ✓

$\ne\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x^3}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^3}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^3}$ ✓

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}$ ✓

$=\infty-\infty$? ✓

$\boxed{不可拆开计算}$.

例 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x+\ln(1+x^2)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x-1-x}{x^2}+\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right]$$

$$\overset{\text{拆}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$$