第一章　　绪论

1．设 $x>0$, x 的相对误差为 δ ，求 $\ln x$ 的误差。

解：近似值 x^* 的相对误差为 δ = $e_r^* = \frac{e*}{x*} = \frac{x*-x}{x*}$

而 $\ln x$ 的误差为 $e\left(\ln x*\right) = \ln x* - \ln x \approx \frac{1}{x*}e*$

进而有 $\varepsilon(\ln x*) \approx \delta$

2．设 x 的相对误差为 2%，求 x^n 的相对误差。

解：设 $f(x) = x^n$ ，则函数的条件数为 $C_p = |\frac{xf'(x)}{f(x)}|$

又Q $f'(x) = nx^{n-1}$， $\therefore C_p = |\frac{x \cdot nx^{n-1}}{n}| = n$

又Q $\varepsilon_r((x*)n) \approx C_p \cdot \varepsilon_r(x*)$

且 $e_r(x*)$ 为 2

$\therefore \varepsilon_r((x*)^n) \approx 0.02n$

3．下列各数都是经过四舍五入得到的近似数，即误差限不超过最后一位的半个单位，试指出它们是几位有效数字： $x_1^* = 1.1021$, $x_2^* = 0.031$， $x_3^* = 385.6$ ， $x_4^* = 56.430$, $x_5^* = 7 \times 1.0.$

解： $x_1^* = 1.1021$ 是五位有效数字；

$x_2^* = 0.031$ 是二位有效数字；

$x_3^* = 385.6$ 是四位有效数字；

$x_4^* = 56.430$ 是五位有效数字；

$x_5^* = 7 \times 1.0.$ 是二位有效数字。

4．利用公式(2.3)求下列各近似值的误差限：(1) $x_1^* + x_2^* + x_4^*$,(2) $x_1^* x_2^* x_3^*$,(3) x_2^* / x_4^*.

其中 $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ 均为第 3 题所给的数。

解：

$$\varepsilon(x_1^*)=\frac{1}{2}\times10^{-4}$$

$$\varepsilon(x_2^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

$$\varepsilon(x_3^*)=\frac{1}{2}\times10^{-1}$$

$$\varepsilon(x_4^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$$

$$\varepsilon(x_5^*)=\frac{1}{2}\times10^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&(1)\varepsilon(x_1^*+x_2^*+x_4^*)\\
&=\varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*)+\varepsilon(x_4^*)\\
&=\frac{1}{2}\times10^{-4}+\frac{1}{2}\times10^{-3}+\frac{1}{2}\times10^{-3}\\
&=1.05\times10^{-3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(2)\varepsilon(x_1^*x_2^*x_3^*)\\
&=\left|x_1^*x_2^*\right|\varepsilon(x_3^*)+\left|x_2^*x_3^*\right|\varepsilon(x_1^*)+\left|x_1^*x_3^*\right|\varepsilon(x_2^*)\\
&=\left|1.1021\times0.031\right|\times\frac{1}{2}\times10^{-1}+\left|0.031\times385.6\right|\times\frac{1}{2}\times10^{-4}+\left|1.1021\times385.6\right|\times\frac{1}{2}\times10^{-3}\\
&\approx0.215
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(3)\varepsilon(x_2^*/x_4^*)\\
&\approx\frac{\left|x_2^*\right|\varepsilon(x_4^*)+\left|x_4^*\right|\varepsilon(x_2^*)}{\left|x_4^*\right|^2}\\
&=\frac{0.031\times\frac{1}{2}\times10^{-3}+56.430\times\frac{1}{2}\times10^{-3}}{56.430\times56.430}\\
&=10^{-5}
\end{aligned}
$$

5 计算球体积要使相对误差限为 1，问度量半径 R 时允许的相对误差限是多少？

解：球体体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

则何种函数的条件数为

$$C_p=\left|\frac{R\cdot V'}{V}\right|=\left|\frac{R\cdot4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right|=3$$

$$\therefore\varepsilon_r(V^*)\approx C_p\cdot\varepsilon_r(R^*)=3\varepsilon_r(R^*)$$

又$\because\ \varepsilon_r(V^*)=1$

故度量半径 R 时允许的相对误差限为$\varepsilon_r(R^*)=\frac{1}{3}\times 1\approx 0.33$

6．设$Y_0=28$，按递推公式$Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$　（n=1,2,…）

计算到Y_{100}。若取$\sqrt{783}\approx 27.982$（5 位有效数字），试问计算Y_{100}将有多大误差？

解：$\because Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

$\therefore Y_{100}=Y_{99}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

$Y_{99}=Y_{98}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

$Y_{98}=Y_{97}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

……

$Y_1=Y_0-\frac{1}{100}\sqrt{783}$

依次代入后，有$Y_{100}=Y_0-100\times\frac{1}{100}\sqrt{783}$

即$Y_{100}=Y_0-\sqrt{783}$，

若取$\sqrt{783}\approx 27.982$，$\therefore Y_{100}=Y_0-27.982$

$\therefore \varepsilon(Y_{100}^*)=\varepsilon(Y_0)+\varepsilon(27.982)=\frac{1}{2}\times 10^{-3}$

$\therefore Y_{100}$的误差限为$\frac{1}{2}\times 10^{-3}$。

7．求方程$x^2-56x+1=0$的两个根，使它至少具有 4 位有效数字（$\sqrt{783}=27.982$）。

解：$x^2-56x+1=0$，

故方程的根应为$x_{1,2}=28\pm\sqrt{783}$

故　$x_1=28+\sqrt{783}\approx 28+27.982=55.982$

$\therefore x_1$具有 5 位有效数字

$$x_2=28-\sqrt{783}=\frac{1}{28+\sqrt{783}}\approx\frac{1}{28+27.982}=\frac{1}{55.982}\approx 0.017863$$

x_2具有 5 位有效数字

8．当 N 充分大时，怎样求$\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}dx$？

解 $\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan(N+1)-\arctan N$

设 $\alpha=\arctan(N+1),\beta=\arctan N$ 。

则 $\tan\alpha=N+1,\tan\beta=N.$

$$\begin{aligned}
&\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}dx\\
&=\alpha-\beta\\
&=\arctan(\tan(\alpha-\beta))\\
&=\arctan\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha \cdot \tan\beta}\\
&=\arctan\frac{N+1-N}{1+(N+1)N}\\
&=\arctan\frac{1}{N^2+N+1}
\end{aligned}$$

9．正方形的边长大约为了 100cm，应怎样测量才能使其面积误差不超过$1cm^2$？

解：正方形的面积函数为 $A(x)=x^2$

$\therefore \varepsilon(A^*)=2A^* \cdot \varepsilon(x^*)$.

当 $x^*=100$ 时，若 $\varepsilon(A^*)\le 1$,

则 $\varepsilon(x^*)\le\frac{1}{2}\times10^{-2}$

故测量中边长误差限不超过 0.005cm 时，才能使其面积误差不超过$1cm^2$

10．设 $S=\frac{1}{2}gt^2$，假定 g 是准确的，而对 t 的测量有 ±0.1秒的误差，证明当 t 增加时 S 的绝对误差增加，而相对误差却减少。

解：$\because S=\frac{1}{2}gt^2,t>0$

$\therefore \varepsilon(S^*)=gt^2 \cdot \varepsilon(t^*)$

当 t^* 增加时，S^* 的绝对误差增加

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_r(S^*)=\frac{\varepsilon(S^*)}{|S^*|}\\
&=\frac{gt^2 \cdot \varepsilon(t^*)}{\frac{1}{2}g(t^*)^2}\\
&=2\frac{\varepsilon(t^*)}{t^*}
\end{aligned}$$

当 t^* 增加时，$\varepsilon(t^*)$ 保持不变，则 S^* 的相对误差减少。

11．序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系 $y_n = 10y_{n-1} - 1$ (n=1,2,…),

若 $y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$（三位有效数字），计算到 y_{10} 时误差有多大？这个计算过程稳定吗？

解：Q $y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$

$\therefore \varepsilon(y_0^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$

又Q $y_n = 10y_{n-1} - 1$

$\therefore y_1 = 10y_0 - 1$

$\therefore \varepsilon(y_1^*) = 10\varepsilon(y_0^*)$

又Q $y_2 = 10y_1 - 1$

$\therefore \varepsilon(y_2^*) = 10\varepsilon(y_1^*)$

$\therefore \varepsilon(y_2^*) = 10^2\varepsilon(y_0^*)$

......

$\therefore \varepsilon(y_{10}^*) = 10^{10}\varepsilon(y_0^*)$

$= 10^{10} \times \frac{1}{2} \times 10^{-2}$

$= \frac{1}{2} \times 10^8$

计算到 y_{10} 时误差为 $\frac{1}{2} \times 10^8$，这个计算过程不稳定。

12．计算 $f = (\sqrt{2} - 1)^6$，取 $\sqrt{2} \approx 1.4$，利用下列等式计算，哪一个得到的结果最好？

$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$，$(3-2\sqrt{2})^3$，$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$，$99 - 70\sqrt{2}$。

解：设 $y = (x-1)^6$，

若 $x = \sqrt{2}$，$x^* = 1.4$，则 $\varepsilon(x^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-1}$。

若通过 $\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$ 计算 y 值，则

$$\varepsilon(y^*) = -\left|-6\times\frac{1}{(x^*+1)^7}\right|\cdot\varepsilon(x^*)$$

$$= \frac{6}{(x^*+1)^7}y^*\varepsilon(x^*)$$

$$= 2.53y^*\varepsilon(x^*)$$

若通过$(3-2\sqrt{2})^3$计算 y 值，则

$$\varepsilon(y^*) = \left|-3\times2\times(3-2x^*)^2\right|\cdot\varepsilon(x^*)$$

$$= \frac{6}{3-2x^*}y^*\cdot\varepsilon(x^*)$$

$$= 30y^*\varepsilon(x^*)$$

若通过$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$计算 y 值，则

$$\varepsilon(y^*) = -\left|-3\times\frac{1}{(3+2x^*)^4}\right|\cdot\varepsilon(x^*)$$

$$= 6\times\frac{1}{(3+2x^*)^7}y^*\varepsilon(x^*)$$

$$= 1.0345y^*\varepsilon(x^*)$$

通过$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$计算后得到的结果最好。

13． $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$,求 $f(30)$ 的值。若开平方用 6 位函数表，问求对数时误差有多大？若改用另一等价公式。$\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

计算，求对数时误差有多大？

解

$\because f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$，$\therefore f(30)=\ln(30-\sqrt{899})$

设$u=\sqrt{899}, y=f(30)$

则$u^*=29.9833$

$\therefore \varepsilon(u^*)=\frac{1}{2}\times10^{-4}$

故

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(y^*) &\approx -\frac{1}{\left|30-u^*\right|}\varepsilon(u^*) \\
&= \frac{1}{0.0167}\cdot\varepsilon(u^*) \\
&\approx 3\times 10^{-3}
\end{aligned}
$$

若改用等价公式

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1}) = -\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

则 $f(30) = -\ln(30+\sqrt{899})$

此时，

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(y^*) &= \left|-\frac{1}{30+u^*}\right|\varepsilon(u^*) \\
&= \frac{1}{59.9833}\cdot\varepsilon(u^*) \\
&\approx 8\times 10^{-7}
\end{aligned}
$$

第二章 插值法

1．当 $x=1,-1,2$ 时， $f(x)=0,-3,4$,求 $f(x)$ 的二次插值多项式。

解：

$$x_0 = 1, x_1 = -1, x_2 = 2,$$

$$f(x_0) = 0, f(x_1) = -3, f(x_2) = 4;$$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{1}{3}(x-1)(x+1)$$

则二次拉格朗日插值多项式为

$$
\begin{aligned}
L_2(x) &= \sum_{k=0}^{2} y_k l_k(x) \\
&= -3l_0(x) + 4l_2(x) \\
&= -\frac{1}{2}(x-1)(x-2) + \frac{4}{3}(x-1)(x+1) \\
&= \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

2．给出 $f(x)=\ln x$ 的数值表

X	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
lnx	-0.916291	-0.693147	-0.510826	-0.356675	-0.223144

用线性插值及二次插值计算 $\ln 0.54$ 的近似值。

解：由表格知，

$$x_0 = 0.4, x_1 = 0.5, x_2 = 0.6, x_3 = 0.7, x_4 = 0.8;$$
$$f(x_0) = -0.916291, f(x_1) = -0.693147$$
$$f(x_2) = -0.510826, f(x_3) = -0.356675$$
$$f(x_4) = -0.223144$$

若采用线性插值法计算 $\ln 0.54$ 即 $f(0.54)$，

则 $0.5 < 0.54 < 0.6$

$$l_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = -10(x - 0.6)$$
$$l_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = -10(x - 0.5)$$
$$L_1(x) = f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x)$$
$$= 6.93147(x - 0.6) - 5.10826(x - 0.5)$$

$$\therefore L_1(0.54) = -0.6202186 \approx -0.620219$$

若采用二次插值法计算 $\ln 0.54$ 时，

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = 50(x - 0.5)(x - 0.6)$$
$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = -100(x - 0.4)(x - 0.6)$$
$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = 50(x - 0.4)(x - 0.5)$$
$$L_2(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x)$$

$$= -50 \times 0.916291(x - 0.5)(x - 0.6) + 69.3147(x - 0.4)(x - 0.6) - 0.510826 \times 50(x - 0.4)(x - 0.5)$$

$$\therefore L_2(0.54) = -0.61531984 \approx -0.615320$$

3．给全 $\cos x, 0^{\circ} \le x \le 90^{\circ}$ 的函数表，步长 $h = 1' = (1/60)^{\circ}$，若函数表具有 5 位有效数字，研究用线性插值求 $\cos x$ 近似值时的总误差界。

解：求解 $\cos x$ 近似值时，误差可以分为两个部分，一方面，x 是近似值，具有 5 位有效数字，在此后的计算过程中产生一定的误差传播；另一方面，利用插值法求函数 $\cos x$ 的近似值时，采用的线性插值法插值余项不为 0，也会有一定的误差。因此，总误差界的计算应综合以上两方面的因素。

当$0^{o} \le x \le 90^{o}$时，

令 $f(x)=\cos x$

取 $x_0=0, h=(\frac{1}{60})^{o}=\frac{1}{60}\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{10800}$

令 $x_i=x_0+ih, i=0,1,...,5400$

则 $x_{5400}=\frac{\pi}{2}=90^{o}$

当 $x\in\left[x_k, x_{k-1}\right]$时，线性插值多项式为

$$L_1(x)=f(x_k)\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+f(x_{k+1})\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

插值余项为

$$R(x)=\left|\cos x-L_1(x)\right|=\left|\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_k)(x-x_{k+1})\right|$$

又Q 在建立函数表时，表中数据具有 5 位有效数字，且$\cos x\in\left[0,1\right]$，故计算中有误差传播过程。

$$\therefore \varepsilon(f^*(x_k))=\frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

$$R_2(x)=\left|\varepsilon(f^*(x_k))\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right|+\left|\varepsilon(f^*(x_{k+1}))\frac{x-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}\right|$$

$$\le \varepsilon(f^*(x_k))(\left|\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right|+\left|\frac{x-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_k}\right|)$$

$$=\varepsilon(f^*(x_k))\frac{1}{h}(x_{k+1}-x+x-x_k)$$

$$=\varepsilon(f^*(x_k))$$

$\therefore$总误差界为

$$
\begin{aligned}
R &= R_1(x) + R_2(x) \\
&= \left|\frac{1}{2}(-\cos\xi)(x - x_k)(x - x_{k+1})\right| + \varepsilon(f^*(x_k)) \\
&\le \frac{1}{2} \times (x - x_k)(x_{k+1} - x) + \varepsilon(f^*(x_k)) \\
&\le \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2}h)^2 + \varepsilon(f^*(x_k)) \\
&= 1.06 \times 10^{-8} + \frac{1}{2} \times 10^{-5} \\
&= 0.50106 \times 10^{-5}
\end{aligned}
$$

4．设为互异节点，求证：

（1） $\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) \equiv x^k \qquad (k = 0,1,\cdots,n);$

（2） $\sum_{j=0}^{n} (x_j - x)^k l_j(x) \equiv 0 \qquad (k = 0,1,\cdots,n);$

证明

（1）　令 $f(x) = x^k$

若插值节点为 $x_j, j = 0,1,\cdots,n$，则函数 $f(x)$ 的 n 次插值多项式为 $L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x)$。

插值余项为 $R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

又 $\because k \le n,$

$\therefore f^{(n+1)}(\xi) = 0$

$\therefore R_n(x) = 0$

$\therefore \sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) = x^k \qquad (k = 0,1,\cdots,n);$

$$
\begin{aligned}
&(2)\sum_{j=0}^{n} (x_j - x)^k l_j(x) \\
&= \sum_{j=0}^{n} (\sum_{i=0}^{n} C_k^j x_j^i (-x)^{k-i}) l_j(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n} C_k^i (-x)^{k-i} (\sum_{j=0}^{n} x_j^i l_j(x))
\end{aligned}
$$

又 $\because 0 \le i \le n$　由上题结论可知

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) = x^i$$

$\therefore$ 原式 $= \sum_{i=0}^{n} C_k^i (-x)^{k-i} x^i$

$= (x-x)^k$

$= 0$

$\therefore$ 得证。

5 设 $f(x) \in C^2[a,b]$ 且 $f(a) = f(b) = 0,$ 求证：

$$\max_{a \le x \le b} |f(x)| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \le x \le b} |f''(x)|.$$

解：令 $x_0 = a, x_1 = b$，以此为插值节点，则线性插值多项式为

$$L_1(x) = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x-x_0}$$

$$== f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{x-a}$$

又Q $f(a) = f(b) = 0$

$\therefore L_1(x) = 0$

插值余项为 $R(x) = f(x) - L_1(x) = \frac{1}{2} f''(x)(x-x_0)(x-x_1)$

$\therefore f(x) = \frac{1}{2} f''(x)(x-x_0)(x-x_1)$

又Q $|(x-x_0)(x-x_1)|$

$\le \left\{\frac{1}{2}\left[(x-x_0)+(x_1-x)\right]\right\}^2$

$= \frac{1}{4}(x_1-x_0)^2$

$= \frac{1}{4}(b-a)^2$

$\therefore \max_{a \le x \le b} |f(x)| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \le x \le b} |f''(x)|.$

6．在 $-4 \le x \le 4$ 上给出 $f(x) = e^x$ 的等距节点函数表，若用二次插值求 e^x 的近似值，要使截断误差不超过10^{-6}，问使用函数表的步长 h 应取多少？

解：若插值节点为 x_{i-1}, x_i 和 x_{i+1}，则分段二次插值多项式的插值余项为

$$R_2(x)=\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})$$

$$\therefore |R_2(x)|\le\frac{1}{6}(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\max_{-4\le x\le 4}|f'''(x)|$$

设步长为 h，即 $x_{i-1}=x_i-h, x_{i+1}=x_i+h$

$$\therefore |R_2(x)|\le\frac{1}{6}e^4\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}h^3=\frac{\sqrt{3}}{27}e^4h^3.$$

若截断误差不超过10^{-6}，则

$$|R_2(x)|\le 10^{-6}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{27}e^4h^3\le 10^{-6}$$

$$\therefore h\le 0.0065.$$

7．若 $y_n=2^n$,求$\Delta^4 y_n$及$\delta^4 y_n$.，

解：根据向前差分算子和中心差分算子的定义进行求解。

$$y_n=2^n$$

$$\begin{aligned}\Delta^4 y_n&=(E-1)^4 y_n\\&=\sum_{j=0}^{4}(-1)^j\binom{4}{j}E^{4-j}y_n\\&=\sum_{j=0}^{4}(-1)^j\binom{4}{j}y_{4+n-j}\\&=\sum_{j=0}^{4}(-1)^j\binom{4}{j}2^{4-j}\cdot y_n\\&=(2-1)^4 y_n\\&=y_n\\&=2^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta^4 y_n&=(E^{\frac{1}{2}}-E^{-\frac{1}{2}})^4 y_n\\&=(E^{-\frac{1}{2}})^4(E-1)^4 y_n\\&=E^{-2}\Delta^4 y_n\\&=y_{n-2}\\&=2^{n-2}\end{aligned}$$

8．如果 $f(x)$ 是 m 次多项式，记 $\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$，证明 $f(x)$ 的 k 阶差分

$\Delta^k f(x)(0 \le k \le m)$ 是 $m-k$ 次多项式，并且 $\Delta^{m+1} f(x)=0$ （l 为正整数）。

解：函数 $f(x)$ 的 $Taylor$ 展式为

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\cdots+\frac{1}{m!}f^{(m)}(x)h^m+\frac{1}{(m+1)!}f^{(m+1)}(\xi)h^{m+1}$$

其中 $\xi \in (x, x+h)$

又 $\because$ $f(x)$ 是次数为 m 的多项式

$$\therefore f^{(m+1)}(\xi)=0$$

$$\therefore \Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$$

$$=f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\cdots+\frac{1}{m!}f^{(m)}(x)h^m$$

$\therefore \Delta f(x)$ 为 $m-1$ 阶多项式

$$\Delta^2 f(x)=\Delta(\Delta f(x))$$

$\therefore \Delta^2 f(x)$ 为 $m-2$ 阶多项式

依此过程递推，得 $\Delta^k f(x)$ 是 $m-k$ 次多项式

$\therefore \Delta^m f(x)$ 是常数

$\therefore$ 当 l 为正整数时，

$$\Delta^{m+1} f(x)=0$$

9．证明 $\Delta(f_k g_k)=f_k\Delta g_k+g_{k+1}\Delta f_k$

证明

$$\begin{aligned}
\Delta(f_k g_k) &= f_{k+1}g_{k+1}-f_k g_k \\
&= f_{k+1}g_{k+1}-f_k g_{k+1}+f_k g_{k+1}-f_k g_k \\
&= g_{k+1}(f_{k+1}-f_k)+f_k(g_{k+1}-g_k) \\
&= g_{k+1}\Delta f_k+f_k\Delta g_k \\
&= f_k\Delta g_k+g_{k+1}\Delta f_k
\end{aligned}$$

$\therefore$ 得证

10．证明 $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k\Delta g_k=f_n g_n-f_0 g_0-\sum\limits_{k=0}^{n-1} g_{k+1}\Delta f_k$

证明：由上题结论可知

$f_k\Delta g_k=\Delta(f_kg_k)-g_{k+1}\Delta f_k$

$\therefore\sum_{k=0}^{n-1}f_k\Delta g_k$

$=\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta(f_kg_k)-g_{k+1}\Delta f_k)$

$=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta(f_kg_k)-\sum_{k=0}^{n-1}g_{k+1}\Delta f_k$

$\because\Delta(f_kg_k)=f_{k+1}g_{k+1}-f_kg_k$

$\therefore\sum_{k=0}^{n-1}\Delta(f_kg_k)$

$=(f_1g_1-f_0g_0)+(f_2g_2-f_1g_1)+\cdots+(f_ng_n-f_{n-1}g_{n-1})$

$=f_ng_n-f_0g_0$

$\therefore\sum_{k=0}^{n-1}f_k\Delta g_k=f_ng_n-f_0g_0-\sum_{k=0}^{n-1}g_{k+1}\Delta f_k$

得证。

11．证明$\sum_{j=0}^{n-1}\Delta^2y_j=\Delta y_n-\Delta y_0$

证明$\sum_{j=0}^{n-1}\Delta^2y_j=\sum_{j=0}^{n-1}(\Delta y_{j+1}-\Delta y_j)$

$$=(\Delta y_1-\Delta y_0)+(\Delta y_2-\Delta y_1)+\cdots+(\Delta y_n-\Delta y_{n-1})$$
$$=\Delta y_n-\Delta y_0$$

得证。

12．若$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$有$n$个不同实根$x_1,x_2,\cdots,x_n$，

证明：$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0,0\le k\le n-2;\\ n_0^{-1},k=n-1\end{cases}$

证明：$\because f(x)$有个不同实根$x_1,x_2,\cdots,x_n$

且$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$

$\therefore f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

令$\omega_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

则$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{a_n\omega_n'(x_j)}$

而 $\omega_n'(x)=(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$

$$+\cdots+(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$$

$\therefore \omega_n'(x_j)=(x_j-x_1)(x_j-x_2)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)$

令 $g(x)=x^k$,

$$g[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\omega_n'(x_j)}$$

则 $g[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{x_j^k}{\omega_n'(x_j)}$

又 $\therefore \sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{x_j^k}{f'(x_j)}=\dfrac{1}{a_n}g[x_1,x_2,\cdots,x_n]$

$$\therefore \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0,0\le k\le n-2;\\ n_0^{-1},k=n-1\end{cases}$$

$\therefore$ 得证。

13．证明 n 阶均差有下列性质：

（1）若 $F(x)=cf(x)$，则 $F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=cf[x_0,x_1,\cdots,x_n]$;

（2）若 $F(x)=f(x)+g(x)$，则 $F[x_0,x_1,\cdots,x_n]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+g[x_0,x_1,\cdots,x_n]$.

证明：

（1）$\because f[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\sum\limits_{j=0}^{n}\dfrac{f(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$

$$F[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\sum_{j=0}^{n}\frac{F(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{cf(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=c(\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)})$$

$$=cf[x_0,x_1,\cdots,x_n]$$

$\therefore$ 得证。

(2)$\because F(x)=f(x)+g(x)$

$$\therefore F\left[x_0,\cdots,x_n\right]=\sum_{j=0}^{n}\frac{F(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x^j)+g(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)})$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\frac{g(x^j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)})$$

$$=f\left[x_0,\cdots,x_n\right]+g\left[x_0,\cdots,x_n\right]$$

$\therefore$得证。

14. $f(x)=x^7+x^4+3x+1$,求 $F\left[2^0,2^1,\cdots,2^7\right]$ 及 $F\left[2^0,2^1,\cdots,2^8\right]$。

解：$\because\ f(x)=x^7+x^4+3x+1$

若 $x_i=2^i, i=0,1,\cdots,8$

则 $f\left[x_0,x_1,\cdots,x_n\right]=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

$$\therefore f\left[x_0,x_1,\cdots,x_7\right]=\frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=\frac{7!}{7!}=1$$

$$f\left[x_0,x_1,\cdots,x_8\right]=\frac{f^{(8)}(\xi)}{8!}=0$$

15. 证明两点三次埃尔米特插值余项是

$$R_3(x)=f^{(4)}(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2/4!,\xi\in(x_k,x_{k+1})$$

解：

若 $x\in[x_k,x_{k+1}]$，且插值多项式满足条件

$$H_3(x_k)=f(x_k),H_3'(x_k)=f'(x_k)$$

$$H_3(x_{k+1})=f(x_{k+1}),H_3'(x_{k+1})=f'(x_{k+1})$$

插值余项为 $R(x)=f(x)-H_3(x)$

由插值条件可知 $R(x_k)=R(x_{k+1})=0$

且 $R'(x_k)=R'(x_{k+1})=0$

$\therefore R(x)$ 可写成 $R(x)=g(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$

其中 $g(x)$ 是关于 x 的待定函数，

现把 x 看成 $[x_k,x_{k+1}]$ 上的一个固定点，作函数

$$\varphi(t)=f(t)-H_3(t)-g(x)(t-x_k)^2(t-x_{k+1})^2$$

根据余项性质，有

$$\varphi(x_k)=0,\varphi(x_{k+1})=0$$

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=f(x)-H_3(x)-g(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2\\&=f(x)-H_3(x)-R(x)\\&=0\end{aligned}$$

$$\varphi'(t)=f'(t)-H_3'(t)-g(x)[2(t-x_k)(t-x_{k+1})^2+2(t-x_{k+1})(t-x_k)^2]$$

$$\therefore \varphi'(x_k)=0$$

$$\varphi'(x_{k+1})=0$$

由罗尔定理可知，存在 $\xi\in(x_k,x)$ 和 $\xi\in(x,x_{k+1})$，使

$$\varphi'(\xi_1)=0,\varphi'(\xi_2)=0$$

即 $\varphi'(x)$ 在 $[x_k,x_{k+1}]$ 上有四个互异零点。

根据罗尔定理，$\varphi''(t)$ 在 $\varphi'(t)$ 的两个零点间至少有一个零点，

故 $\varphi''(t)$ 在 (x_k,x_{k+1}) 内至少有三个互异零点，

依此类推，$\varphi^{(4)}(t)$ 在 (x_k,x_{k+1}) 内至少有一个零点。

记为 $\xi\in(x_k,x_{k+1})$ 使

$$\varphi^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(\xi)-H_3^{(4)}(\xi)-4!g(x)=0$$

又Q $H_3^{(4)}(t)=0$

$$\therefore g(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!},\xi\in(x_k,x_{k+1})$$

其中ξ依赖于x

$$\therefore R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

分段三次埃尔米特插值时，若节点为$x_k(k=0,1,\cdots,n)$，设步长为h，即

$x_k=x_0+kh, k=0,1,\cdots,n$在小区间$[x_k,x_{k+1}]$上

$$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

$$\therefore |R(x)|=\frac{1}{4!}\left|f^{(4)}(\xi)\right|(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$$

$$\begin{aligned}
&\le\frac{1}{4!}(x-x_k)^2(x_{k+1}-x)^2\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|\\
&\le\frac{1}{4!}[(\frac{x-x_k+x_{k+1}-x}{2})^2]^2\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|\\
&=\frac{1}{4!}\times\frac{1}{2^4}h^4\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|\\
&=\frac{h^4}{384}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|
\end{aligned}$$

16．求一个次数不高于 4 次的多项式 P（x），使它满足
$P(0)=P'(0)=0, P(1)=P'(1)=0, P(2)=0$

解：利用埃米尔特插值可得到次数不高于 4 的多项式

$x_0=0, x_1=1$

$y_0=0, y_1=1$

$m_0=0, m_1=1$

$$H_3(x)=\sum_{j=0}^{1}y_j\alpha_j(x)+\sum_{j=0}^{1}m_j\beta_j(x)$$

$$\alpha_0(x)=(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2$$

$$=(1+2x)(x-1)^2$$

$$\alpha_1(x)=(1-2\frac{x-x_1}{x_1-x_0})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2$$

$$=(3-2x)x^2$$

$$\beta_0(x)=x(x-1)^2$$

$$\beta_1(x)=(x-1)x^2$$

$\therefore H_3(x)=(3-2x)x^2+(x-1)x^2=-x^3+2x^2$

设 $P(x)=H_3(x)+A(x-x_0)^2(x-x_1)^2$

其中，A 为待定常数

$\because P(2)=1$

$\therefore P(x)=-x^3+2x^2+Ax^2(x-1)^2$

$\therefore A=\frac{1}{4}$

从而 $P(x)=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2$

17. 设 $f(x)=1/(1+x^2)$，在 $-5\le x\le 5$ 上取 $n=10$，按等距节点求分段线性插值函数 $I_h(x)$，计算各节点间中点处的 $I_h(x)$ 与 $f(x)$ 值，并估计误差。

解：

若 $x_0=-5, x_{10}=5$

则步长 $h=1,$

$x_i=x_0+ih, i=0,1,\cdots,10$

$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

在小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上，分段线性插值函数为

$$I_h(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}f(x_i)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f(x_{i+1})$$

$$=(x_{i+1}-x)\frac{1}{1+x_i^2}+(x-x_i)\frac{1}{1+x_{i+1}^2}$$

各节点间中点处的 $I_h(x)$ 与 $f(x)$ 的值为

当 $x=\pm 4.5$ 时， $f(x)=0.0471, I_h(x)=0.0486$

当 $x=\pm 3.5$ 时， $f(x)=0.0755, I_h(x)=0.0794$

当 $x=\pm 2.5$ 时， $f(x)=0.1379, I_h(x)=0.1500$

当 $x=\pm 1.5$ 时， $f(x)=0.3077, I_h(x)=0.3500$

当 $x=\pm 0.5$ 时， $f(x)=0.8000, I_h(x)=0.7500$

误差

$$\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} \left| f(x) - I_h(x) \right| \le \frac{h^2}{8} \max_{-5 \le x \le 5} \left| f''(\xi) \right|$$

又$\because$ $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\therefore f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$,

$$f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{24x-24x^3}{(1+x^2)^4}$$

令 $f'''(x) = 0$

得 $f''(x)$ 的驻点为 $x_{1,2} = \pm 1$ 和 $x_3 = 0$

$$f''(x_{1,2}) = \frac{1}{2}, f''(x_3) = -2$$

$$\therefore \max_{-5 \le x \le 5} \left| f(x) - I_h(x) \right| \le \frac{1}{4}$$

18．求 $f(x) = x^2$ 在 $[a,b]$ 上分段线性插值函数 $I_h(x)$，并估计误差。

解：

在区间 $[a,b]$ 上， $x_0 = a, x_n = b, h_i = x_{i+1} - x_i, i = 0,1,\cdots,n-1,$

$$h = \max_{0 \le i \le n-1} h_i$$

$\because$ $f(x) = x^2$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上分段线性插值函数为

$$I_h(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1})$$

$$= \frac{1}{h_i} [x_i{}^2 (x_{i+1} - x) + x_{i+1}{}^2 (x - x_i)]$$

误差为

$$\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f(x) - I_h(x)| \le \frac{1}{8} \max_{a \le \xi \le b} |f''(\xi)| \cdot h_i^2$$

$\because f(x) = x^2$

$\therefore f'(x) = 2x, f''(x) = 2$

$$\therefore \max_{a \le x \le b} |f(x) - I_h(x)| \le \frac{h^2}{4}$$

19．求 $f(x) = x^4$ 在 $[a,b]$ 上分段埃尔米特插值，并估计误差。

解：

在 $[a,b]$ 区间上，$x_0 = a, x_n = b, h_i = x_{i+1} - x_i, i = 0,1,\cdots,n-1,$

令 $h = \max\limits_{0 \le i \le n-1} h_i$

$\because f(x) = x^4, f'(x) = 4x^3$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的分段埃尔米特插值函数为

$$I_h(x) = \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 \left(1 + 2\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) f(x_i)$$

$$+ \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 \left(1 + 2\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right) f(x_{i+1})$$

$$+ \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 (x - x_i) f'(x_i)$$

$$+ \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 (x - x_{i+1}) f'(x_{i+1})$$

$$= \frac{x_i^4}{h_i^3}(x - x_{i+1})^2 (h_i + 2x - 2x_i)$$

$$+ \frac{x_{i+1}^4}{h_i^3}(x - x_i)^2 (h_i - 2x + 2x_{i+1})$$

$$+ \frac{4x_i^3}{h_i^2}(x - x_{i+1})^2 (x - x_i)$$

$$+ \frac{4x_{i+1}^3}{h_i^2}(x - x_i)^2 (x - x_{i+1})$$

误差为

$$|f(x) - I_h(x)|$$

$$= \frac{1}{4!} |f^{(4)}(\xi)| (x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2$$

$$\le \frac{1}{24} \max_{a \le x \le b} |f^{(4)}(\xi)| \left(\frac{h_i}{2}\right)^4$$

又Q $f(x)=x^4$

$\therefore f^{(4)}(x)=4!=24$

$\therefore \max\limits_{a\le x\le b}\left|f(x)-I_h(x)\right|\le \max\limits_{0\le i\le n-1}\frac{h_i^4}{16}\le\frac{h^4}{16}$

20．给定数据表如下：

X_j	0.25	0.30	0.39	0.45	0.53
Y_j	0.5000	0.5477	0.6245	0.6708	0.7280

试求三次样条插值，并满足条件：

$(1)S'(0.25)=1.0000, S'(0.53)=0.6868;$

$(2)S''(0.25)=S''(0.53)=0.$

解：

$h_0=x_1-x_0=0.05$

$h_1=x_2-x_1=0.09$

$h_2=x_3-x_2=0.06$

$h_3=x_4-x_3=0.08$

Q $\mu_j=\frac{h_{j-1}}{h_{j-1}-h_j}, \lambda_j=\frac{h_j}{h_{j-1}-h_j}$

$\therefore \mu_1=\frac{5}{14}, \mu_2=\frac{3}{5}, \mu_3=\frac{3}{7}, \mu_4=1$

$\lambda_1=\frac{9}{14}, \lambda_2=\frac{2}{5}, \lambda_3=\frac{4}{7}, \lambda_0=1$

$f\left[x_0,x_1\right]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=0.9540$

$f\left[x_1,x_2\right]=0.8533$

$f\left[x_2,x_3\right]=0.7717$

$f\left[x_3,x_4\right]=0.7150$

$$(1) S'(x_0)=1.0000, S'(x_4)=0.6868$$

$$d_0=\frac{6}{h_0}(f[x_1,x_2]-f_0')=-5.5200$$

$$d_1=6\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{h_0+h_1}=-4.3157$$

$$d_2=6\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{h_1+h_2}=-3.2640$$

$$d_3=6\frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{h_2+h_3}=-2.4300$$

$$d_4=\frac{6}{h_3}(f_4'-f[x_3,x_4])=-2.1150$$

由此得矩阵形式的方程组为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ \frac{5}{14} & 2 & \frac{9}{14} & & \\ & \frac{3}{5} & 2 & \frac{2}{5} & \\ & & \frac{3}{7} & 2 & \frac{4}{7} \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{M}_0 \\ \mathrm{M}_1 \\ \mathrm{M}_2 \\ \mathrm{M}_3 \\ \mathrm{M}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.5200 \\ -4.3157 \\ -3.2640 \\ -2.4300 \\ -2.1150 \end{pmatrix}$$

求解此方程组得

$$M_0=-2.0278, M_1=-1.4643$$
$$M_2=-1.0313, M_3=-0.8070, M_4=-0.6539$$

Q 三次样条表达式为

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}$$
$$+(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j}(j=0,1,\mathrm{L}\ ,n-1)$$

$\therefore$ 将 M_0,M_1,M_2,M_3,M_4 代入得

$$S(x)=\begin{cases}-6.7593(0.30-x)^3-4.8810(x-0.25)^3+10.0169(0.30-x)+10.9662(x-0.25)\\ x\in[0.25,0.30]\\ -2.7117(0.39-x)^3-1.9098(x-0.30)^3+6.1075(0.39-x)+6.9544(x-0.30)\\ x\in[0.30,0.39]\\ -2.8647(0.45-x)^3-2.2422(x-0.39)^3+10.4186(0.45-x)+10.9662(x-0.39)\\ x\in[0.39,0.45]\\ -1.6817(0.53-x)^3-1.3623(x-0.45)^3+8.3958(0.53-x)+9.1087(x-0.45)\\ x\in[0.45,0.53]\end{cases}$$

$(2)S''(x_0)=0,S''(x_4)=0$

$d_0=2f_0''=0,d_1=-4.3157,d_2=-3.2640$

$d_3=-2.4300,d_4=2f_4''=0$

$\lambda_0=\mu_4=0$

由此得矩阵开工的方程组为

$M_0=M_4=0$

$$\begin{pmatrix}2 & \frac{9}{14} & 0\\ \frac{3}{5} & 2 & \frac{2}{5}\\ 0 & \frac{3}{7} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\\ M_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4.3157\\ -3.2640\\ -2.4300\end{pmatrix}$$

求解此方程组，得

$M_0=0,M_1=-1.8809$

$M_2=-0.8616,M_3=-1.0304,M_4=0$

又Q 三次样条表达式为

$$S(x)=M_j\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j}+M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}$$
$$+(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j}$$

将 M_0,M_1,M_2,M_3,M_4 代入得

$$\therefore S(x)=\begin{cases}-6.2697(x-0.25)^3+10(0.3-x)+10.9697(x-0.25)\\ x\in[0.25,0.30]\\ -3.4831(0.39-x)^3-1.5956(x-0.3)^3+6.1138(0.39-x)+6.9518(x-0.30)\\ x\in[0.30,0.39]\\ -2.3933(0.45-x)^3-2.8622(x-0.39)^3+10.4186(0.45-x)+11.1903(x-0.39)\\ x\in[0.39,0.45]\\ -2.1467(0.53-x)^3+8.3987(0.53-x)+9.1(x-0.45)\\ x\in[0.45,0.53]\end{cases}$$

21．若 $f(x)\in C^2[a,b],S(x)$ 是三次样条函数，证明：

$$(1)\int_a^b[f''(x)]^2dx-\int_a^b[S''(x)]^2dx$$
$$=\int_a^b[f''(x)-S''(x)]^2dx+2\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]^2dx$$

(2) 若 $f(x_i)=S(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$，式中 x_i 为插值节点，且 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，则

$$\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]dx$$
$$=S''(b)[f'(b)-S'(b)]-S''(a)[f'(a)-S'(a)]$$

证明：

$$(1)\int_a^b[f''(x)-S''(x)]^2dx$$
$$=\int_a^b[f''(x)]^2dx+\int_a^b[S''(x)]^2dx-2\int_a^b f''(x)S''(x)dx$$
$$=\int_a^b[f''(x)]^2dx-\int_a^b[S''(x)]^2dx-2\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]dx$$

从而有

$$\int_a^b[f''(x)]^2dx-\int_a^b[S''(x)]^2dx$$
$$=\int_a^b[f''(x)-S''(x)]^2dx+2\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]dx$$

第三章 函数逼近与曲线拟合

1． $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$，给出 $[0,1]$ 上的伯恩斯坦多项式 $B_1(f,x)$ 及 $B_3(f,x)$。

解：

$\because f(x)=\sin\frac{\pi}{2},\ x\in[0,1]$

伯恩斯坦多项式为

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})P_k(x)$$

其中 $P_k(x)=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k}$

当 $n=1$ 时，

$$P_0(x)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1-x)$$

$$P_1(x)=x$$

$$\therefore B_1(f,x)= f(0)P_0(x)+ f(1)P_1(x)$$

$$=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1-x)\sin(\frac{\pi}{2}\times 0)+x\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=x$$

当 $n=3$ 时，

$$P_0(x)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1-x)^3$$

$$P_1(x)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}x(1-x)^2=3x(1-x)^2$$

$$P_2(x)=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}x^2(1-x)=3x^2(1-x)$$

$$P_3(x)=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}x^3=x^3$$

$$\therefore B_3(f,x)=\sum_{k=0}^{3} f(\frac{k}{n})P_k(x)$$

$$=0+3x(1-x)^2 g\sin\frac{\pi}{6}+3x^2(1-x) g\sin\frac{\pi}{3}+x^3\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{3}{2}x(1-x)^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2(1-x)+x^3$$

$$=\frac{5-3\sqrt{3}}{2}x^3+\frac{3\sqrt{3}-6}{2}x^2+\frac{3}{2}x$$

$$\approx 1.5x-0.402x^2-0.098x^3$$

2． 当 $f(x)=x$ 时，求证 $B_n(f,x)=x$

证明：

若 $f(x)=x$，则

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})P_k(x)$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)\cdots[(n-1)-(k-1)+1]}{(k-1)!}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=x\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\
&=x[x+(1-x)]^{n-1}\\
&=x
\end{aligned}
$$

3．证明函数$1,x,\cdots,x^n$线性无关

证明：

若$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0,\forall x\in R$

分别取$x^k(k=0,1,2,\cdots,n)$，对上式两端在$[0,1]$上作带权$\rho(x)\equiv 1$的内积，得

$$
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & \frac{1}{n+1}\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n+1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}
$$

$\because$此方程组的系数矩阵为希尔伯特矩阵，对称正定非奇异，

$\therefore$只有零解 a=0。

$\therefore$函数$1,x,\cdots,x^n$线性无关。

4。计算下列函数$f(x)$关于$C[0,1]$的$\|f\|_\infty,\|f\|_1$与$\|f\|_2$：

(1) $f(x)=(x-1)^3,x\in[0,1]$

(2) $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|,$

(3) $f(x)=x^m(1-x)^n$, m 与 n 为正整数，

(4) $f(x)=(x+1)^{10}e^{-x}$

解：

(1) 若 $f(x)=(x-1)^3,x\in[0,1]$，则

$$f'(x)=3(x-1)^2\geq 0$$

$\therefore\ f(x)=(x-1)^3$ 在 $(0,1)$ 内单调递增

$$\|f\|_\infty=\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$$
$$=\max\{|f(0)|,|f(1)|\}$$
$$=\max\{0,1\}=1$$

$$\|f\|_\infty=\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$$
$$=\max\{|f(0)|,|f(1)|\}$$
$$=\max\{0,1\}=1$$

$$\|f\|_2=(\int_0^1(1-x)^6dx)^{\frac{1}{2}}$$
$$=[\frac{1}{7}(1-x)^7\Big|_0^1]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

(2) 若 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|, x\in[0,1]$，则

$$\|f\|_\infty=\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|=\frac{1}{2}$$
$$\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|dx$$
$$=2\int_{\frac{1}{2}}^1(x-\frac{1}{2})dx$$
$$=\frac{1}{4}$$
$$\|f\|_2=(\int_0^1 f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$$
$$=[\int_0^1(x-\frac{1}{2})^2dx]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

(3) 若 $f(x)=x^m(1-x)^n$, m 与 n 为正整数

当 $x\in[0,1]$ 时, $f(x)\geq 0$

$$f'(x)=mx^{m-1}(1-x)^{n}+x^{m}n(1-x)^{n-1}(-1)$$
$$=x^{m-1}(1-x)^{n-1}m(1-\frac{n+m}{m}x)$$

当 $x\in(0,\frac{m}{n+m})$ 时，$f'(x)>0$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(0,\frac{m}{n+m})$ 内单调递减

当 $x\in(\frac{m}{n+m},1)$ 时，$f'(x)<0$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(\frac{m}{n+m},1)$ 内单调递减。

$$x\in(\frac{m}{n+m},1)\ f'(x)<0$$
$$\|f\|_{\infty}=\max_{0\le x\le 1}|f(x)|=$$
$$=\max\left\{|f(0)|,\left|f(\frac{m}{n+m})\right|\right\}$$
$$=\frac{m^{m}\cdot n^{n}}{(m+n)^{m+n}}$$

$$\|f\|_{1}=\int_{0}^{1}|f(x)|dx$$
$$=\int_{0}^{1}x^{m}(1-x)^{n}dx$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{2}t)^{m}(1-\sin^{2}t)^{n}d\sin^{2}t$$
$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}t\cos^{2n}t\cos t\cdot 2\cdot\sin t dt$$
$$=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

$$\|f\|_{2}=[\int_{0}^{1}x^{2m}(1-x)^{2n}dx]^{\frac{1}{2}}$$
$$=[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{4m}t\cos^{4n}td(\sin^{2}t)]^{\frac{1}{2}}$$
$$=[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\sin^{4m+1}t\cos^{4n+1}tdt]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{(2n)!(2m)!}{[2(n+m)+1]!}}$$

(4) 若 $f(x)=(x+1)^{10}e^{-x}$

当 $x\in[0,1]$ 时， $f(x)>0$

$$f'(x)=10(x+1)^9e^{-x}+(x+1)^{10}(-e^{-x})$$
$$=(x+1)^9e^{-x}(9-x)$$
$$>0$$

$\therefore$ $f(x)$ 在$[0,1]$内单调递减。

$$\|f\|_\infty=\max_{0\le x\le 1}|f(x)|=$$
$$=\max\{|f(0)|,|f(1)|\}$$
$$=\frac{2^{10}}{e}$$
$$\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|dx$$
$$=\int_0^1(x+1)^{10}e^{-x}dx$$
$$=-(x+1)^{10}e^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 10(x+1)^9e^{-x}dx$$
$$=5-\frac{10}{e}$$
$$\|f\|_2=[\int_0^1(x+1)^{20}e^{-2x}dx]^{\frac{1}{2}}$$
$$=7(\frac{3}{4}-\frac{4}{e^2})$$

5。证明$\|f-g\|\ge\|f\|-\|g\|$

证明：

$$\|f\|$$
$$=\|(f-g)+g\|$$
$$\le\|f-g\|+\|g\|$$
$$\therefore\|f-g\|\ge\|f\|-\|g\|$$

6。对 $f(x),g(x)\in C^1[a,b]$，定义

$$(1)(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)dx$$
$$(2)(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)dx+f(a)g(a)$$

问它们是否构成内积。

解：

(1) 令 $f(x)\equiv C$（C 为常数，且$C\neq 0$）

则 $f'(x)=0$

而$(f,f)=\int_a^b f'(x)f'(x)dx$

这与当且仅当$f\equiv 0$时，$(f,f)=0$矛盾

$\therefore$不能构成$C^1[a,b]$上的内积。

(2)若$(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)dx+f(a)g(a)$，则

$$(g,f)=\int_a^b g'(x)f'(x)dx+g(a)f(a)=(f,g),\forall\alpha\in K$$
$$(\alpha f,g)=\int_a^b[\alpha f(x)]'g'(x)dx+af(a)g(a)$$
$$=\alpha[\int_a^b f'(x)g'(x)dx+f(a)g(a)]$$
$$=\alpha(f,g)$$

$\forall h\in C^1[a,b]$,则

$$(f+g,h)=\int_a^b[f(x)+g(x)]'h'(x)dx+[f(a)g(a)]h(a)$$
$$=\int_a^b f'(x)h'(x)dx+f(a)h(a)+\int_a^b f'(x)h'(x)dx+g(a)h(a)$$
$$=(f,h)+(h,g)$$

$$(f,f)=\int_a^b[f'(x)]^2dx+f^2(a)\geq 0$$

若$(f,f)=0$，则

$\int_a^b[f'(x)]^2dx=0$,且$f^2(a)=0$

$\therefore f'(x)\equiv 0, f(a)=0$

$\therefore f(x)\equiv 0$

即当且仅当$f=0$时，$(f,f)=0$.

故可以构成$C^1[a,b]$上的内积。

7。令$T_n^*(x)=T_n(2x-1),x\in[0,1]$，试证$\left\{T_n^*(x)\right\}$是在$[0,1]$上带权$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$的正交多项式，并求$T_0^*(x),T_1^*(x),T_2^*(x),T_3^*(x)$。

解：

若$T_n^*(x)=T_n(2x-1),x\in[0,1]$，则

$$\int_0^1 T_n^*(x)T_m^*(x)P(x)dx$$
$$=\int_0^1 T_n(2x-1)T_m(2x-1)\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx$$

令 $t=(2x-1)$，则 $t\in[-1,1]$，且 $x=\frac{t+1}{2}$，故

$$\int_0^1 T_n^*(x)T_m^*(x)\rho(x)dx$$
$$=\int_{-1}^1 T_n(t)T_m(t)\frac{1}{\sqrt{\frac{t+1}{2}-(\frac{t+1}{2})^2}}d(\frac{t+1}{2})$$
$$=\int_{-1}^1 T_n(t)T_m(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

又Q 切比雪夫多项式 $\left\{T_k^*(x)\right\}$ 在区间 $[0,1]$ 上带权 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 正交，且

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)d\frac{x}{\sqrt{1-t^2}}=\begin{cases}0,n\neq m\\ \frac{\pi}{2},n=m\neq 0\\ \pi,n=m=0\end{cases}$$

$\therefore\left\{T_n^*(x)\right\}$ 是在 $[0,1]$ 上带权 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的正交多项式。

又Q $T_0(x)=1,x\in[-1,1]$

$\therefore T_0^*(x)=T_0(2x-1)=1,x\in[0,1]$

Q $T_1(x)=x,x\in[-1,1]$

$\therefore T_1^*(x)=T_1(2x-1)=2x-1,x\in[0,1]$

Q $T_2(x)=2x^2-1,x\in[-1,1]$

$\therefore T_2^*(x)=T_2(2x-1)$

$=2(2x-1)^2-1$

$=8x^2-8x-1,x\in[0,1]$

Q $T_3(x)=4x^3-3x,x\in[-1,1]$

$\therefore T_3^*(x)=T_3(2x-1)$

$=4(2x-1)^3-3(2x-1)$

$=32x^3-48x^2+18x-1,x\in[0,1]$

8。对权函数 $\rho(x)=1-x^2$，区间 $[-1,1]$，试求首项系数为 1 的正交多项式 $\varphi_n(x),n=0,1,2,3.$

解：

若 $\rho(x)=1-x^2$，则区间 $[-1,1]$ 上内积为

$$(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\rho(x)dx$$

定义 $\varphi_0(x)=1$，则

$$\varphi_{n+1}(x)=(x-\alpha_n)\varphi_n(x)-\beta_n\varphi_{n-1}(x)$$

其中

$$\alpha_n=(x\varphi_n(x),\varphi_n(x))/(\varphi_n(x),\varphi_n(x))$$
$$\beta_n=(\varphi_n(x),\varphi_n(x))/(\varphi_{n-1}(x),\varphi_{n-1}(x))$$
$$\therefore \alpha_0=(x,1)/(1,1)$$
$$=\frac{\int_{-1}^{1} x(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx}$$
$$=0$$
$$\therefore \varphi_1(x)=x$$
$$\alpha_1=(x^2,x)/(x,x)$$
$$=\frac{\int_{-1}^{1} x^3(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1} x^2(1+x^2)dx}$$
$$=0$$
$$\beta_1=(x,x)/(1,1)$$
$$=\frac{\int_{-1}^{1} x^2(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(1+x^2)dx}$$
$$=\frac{\frac{16}{15}}{\frac{8}{3}}=\frac{2}{5}$$
$$\therefore \varphi_2(x)=x^2-\frac{2}{5}$$

$$\alpha_2=(x^3-\frac{2}{5}x,x^2-\frac{2}{5})/(x^2-\frac{2}{5},x^2-\frac{2}{5})$$

$$=\frac{\int_{-1}^{1}(x^3-\frac{2}{5}x)(x^2-\frac{2}{5})(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{2}{5})(x^2-\frac{2}{5})(1+x^2)dx}$$

$$=0$$

$$\beta_2=(x^2-\frac{2}{5},x^2-\frac{2}{5})/(x,x)$$

$$=\frac{\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{2}{5})(x^2-\frac{2}{5})(1+x^2)dx}{\int_{-1}^{1}x^2(1+x^2)dx}$$

$$=\frac{\frac{136}{525}}{\frac{16}{15}}=\frac{17}{70}$$

$$\therefore \varphi_3(x)=x^3-\frac{2}{5}x^2-\frac{17}{70}x=x^3-\frac{9}{14}x$$

9。试证明由教材式 (2.14) 给出的第二类切比雪夫多项式族 $\{u_n(x)\}$ 是 [0,1] 上带权 $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的正交多项式。

证明：

若$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$

令 $x=\cos\theta$，可得

$$\int_{-1}^{1}U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{\sin[(m+1)\arccos x]\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int_{\pi}^{0}\frac{\sin[(m+1)\theta\sin[(n+1)\theta]}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi}\sin[(m+1)\theta\sin[(n+1)\theta]d\theta$$

当 $m=n$ 时，

$$\int_{0}^{\pi}\sin^2[(m+1)\theta d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos[2(m+1)\theta]}{2}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

当 $m\neq n$ 时，

$$\int_0^{\pi}\sin[(m+1)\theta\sin[(n+1)\theta]d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\sin[(m+1)\theta d\{\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta\}$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta d\{\sin[(m+1)\theta]\}$$

$$=\int_0^{\pi}-\frac{m+1}{n+1}\cos(n+1)\theta\cos(m+1)\theta d\theta$$

$$=-\int_0^{\pi}\frac{m+1}{n+1}\cos[(m+1)\theta]d\{\frac{1}{n+1}\sin[(n+1)\theta]\}$$

$$=-\int_0^{\pi}\frac{m+1}{(n+1)^2}\sin[(n+1)]\theta d\{\cos[(m+1)\theta]\}$$

$$=\int_0^{\pi}(\frac{m+1}{n+1})^2\sin[(n+1)\theta]\sin[(m+1)\theta]d\theta$$

$$=0$$

$$\therefore[1-(\frac{m+1}{n+1})^2]\int_0^{\pi}\sin[(n+1)\theta]\sin[(m+1)\theta]d\theta=0$$

又Q $m\neq n$，故$(\frac{m+1}{n+1})^2\neq 1$

$$\therefore\int_0^{\pi}\sin[(n+1)\theta]\sin[(m+1)\theta]d\theta=0$$

得证。

10。证明切比雪夫多项式$T_n(x)$满足微分方程

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0$$

证明：

切比雪夫多项式为

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),|x|\leq 1$$

从而有

$$T_n'(x) = -\sin(n\arccos x) g n g(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}})$$

$$= \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x)$$

$$T_n''(x) = \frac{n}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(n\arccos x) - \frac{n^2}{1-x^2}\cos(n\arccos x)$$

$$\therefore (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x)$$

$$= \frac{nx}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x) - n^2\cos(n\arccos x)$$

$$-\frac{nx}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x) + n^2\cos(n\arccos x)$$

$$= 0$$

得证。

11。假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，求 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式？

解：

Q $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续

$\therefore$ 存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$，使

$$f(x_1) = \min_{a\le x\le b} f(x),$$

$$f(x_2) = \max_{a\le x\le b} f(x),$$

取 $P = \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$

则 x_1 和 x_2 是 $[a,b]$ 上的 2 个轮流为“正”、“负”的偏差点。

由切比雪夫定理知

P 为 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式。

12。选取常数 a，使 $\max\limits_{0\le x\le 1}\left|x^3 - ax\right|$ 达到极小，又问这个解是否唯一？

解：

令 $f(x) = x^3 - ax$

则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为奇函数

$$\therefore \max_{0\le x\le 1}\left|x^3 - ax\right|$$

$$= \max_{-1\le x\le 1}\left|x^3 - ax\right|$$

$$= \|f\|_\infty$$

又$\because$ $f(x)$的最高次项系数为1，且为3次多项式。

$\therefore\ \omega_3(x)=\frac{1}{2^3}T_3(x)$与0的偏差最小。

$\omega_3(x)=\frac{1}{4}T_3(x)=x^3-\frac{3}{4}x$

从而有$a=\frac{3}{4}$

13。求$f(x)=\sin x$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最佳一次逼近多项式，并估计误差。

解：

$\because\ f(x)=\sin x, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$f'(x)=\cos x, f''(x)=-\sin x\le 0$

$a_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{2}{\pi},$

$\cos x_2=\frac{2}{\pi},$

$\therefore\ x_2=\arccos\frac{2}{\pi}\approx 0.88069$

$f(x_2)=0.77118$

$a_0=\frac{f(a)+f(x_2)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{a+x_2}{2}$

$=0.10526$

于是得$f(x)$的最佳一次逼近多项式为

$P_1(x)=0.10526+\frac{2}{\pi}x$

即

$\sin x\approx 0.10526+\frac{2}{\pi}x, 0\le x\le\frac{\pi}{2}$

误差限为

$\|\sin x-P_1(x)\|_\infty$

$=|\sin 0-P_1(0)|$

$=0.10526$

14。求$f(x)=e^x\left[0,1\right]$在$\left[0,1\right]$上的最佳一次逼近多项式。

解：

$\because\ f(x)=e^x, x\in\left[0,1\right]$

$\therefore\ f'(x)=e^x,$

$f''(x)=e^x>0$

$$a_1=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=e-1$$

$$e^{x_2}=e-1$$

$$x_2=\ln(e-1)$$

$$f(x_2)=e^{x_2}=e-1$$

$$a_0=\frac{f(a)+f(x_2)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{a+x_2}{2}$$

$$=\frac{1+(e-1)}{2}-(e-1)\frac{\ln(e-1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(e-1)$$

于是得 $f(x)$ 的最佳一次逼近多项式为

$$P_1(x)=\frac{e}{2}+(e-1)[x-\frac{1}{2}\ln(e-1)]$$

$$=(e-1)x+\frac{1}{2}[e-(e-1)\ln(e-1)]$$

15。求 $f(x)=x^4+3x^3-1$ 在区间 $[0,1]$ 上的三次最佳一致逼近多项式。

解：

$\because\ f(x)=x^4+3x^3-1, x\in[0,1]$

令 $t=2(x-\frac{1}{2})$，则 $t\in[-1,1]$

且 $x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$

$$\therefore\ f(t)=(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2})^4+3(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2})^3-1$$

$$=\frac{1}{16}(t^4+10t^3+24t^2 22t-9)$$

令 $g(t)=16f(t)$，则 $g(t)=t^4+10t^3+24t^2+22t-9$

若 $g(t)$ 为区间 $[-1,1]$ 上的最佳三次逼近多项式 $P_3^*(t)$ 应满足

$$\max_{-1\le t\le 1}\left|g(t)-P_3^*(t)\right|=\min$$

当 $g(t)-P_3^*(t)=\frac{1}{2^3}T_4(t)=\frac{1}{8}(8t^4-8t^2+1)$

时，多项式 $g(t)-P_3^*(t)$ 与零偏差最小，故

$$
{}^{*}_{3}(t) = g(t) - \frac{1}{2^3}T_4(t)
$$
$$
= 10t^3 + 25t^2 + 22t - \frac{73}{8}
$$

进而，$f(x)$ 的三次最佳一致逼近多项式为 $\frac{1}{16}P_3^*(t)$，则 $f(x)$ 的三次最佳一致逼近多项式为

$$
P_3^*(t) = \frac{1}{16}[10(2x-1)^3 + 25(2x-1)^2 + 22(2x-1) - \frac{73}{8}]
$$
$$
= 5x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{129}{128}
$$

16。$f(x) = |x|$，在 $[-1,1]$ 上求关于 $\Phi = span\{1, x^2, x^4\}$ 的最佳平方逼近多项式。

解：

Q $f(x) = |x|, x \in [-1,1]$

若 $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x^2, \varphi_2 = x^4$，则

$$
\|\varphi_0\|_2^2 = 2, \|\varphi_1\|_2^2 = \frac{2}{5}, \|\varphi_2\|_2^2 = \frac{2}{9},
$$
$$
(f,\varphi_0) = 1, (f,\varphi_1) = \frac{1}{2}, (f,\varphi_2) = \frac{1}{3},
$$
$$
(\varphi_0,\varphi_1) = 1, (\varphi_0,\varphi_2) = \frac{2}{5}, (\varphi_1,\varphi_2) = \frac{2}{7},
$$

则法方程组为

$$
\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}
$$

解得

$$
\begin{cases} a_0 = 0.1171875 \\ a_1 = 1.640625 \\ a_2 = -0.8203125 \end{cases}
$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi = span\{1, x^2, x^4\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x)=a_0+a_1x^2+a_2x^4$$
$$=0.1171875+1.640625x^2-0.8203125x^4$$

17。求函数 $f(x)$ 在指定区间上对于 $\Phi=span\{1,x\}$ 的最佳逼近多项式：

$$(1)\, f(x)=\frac{1}{x},[1,3];(2)\, f(x)=e^x,[0,1];$$
$$(3)\, f(x)=\cos\pi x,[0,1];(4)\, f(x)=\ln x,[1,2];$$

解：

$(1)\because\ f(x)=\frac{1}{x},[1,3];$

若 $(f,g)=\int_1^3 f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0=1,\varphi_1=x,$，则有

$$\|\varphi_0\|_2^2=2,\|\varphi_1\|_2^2=\frac{26}{3},$$
$$(\varphi_0,\varphi_1)=4,$$
$$(f,\varphi_0)=\ln 3,(f,\varphi_1)=2,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & \frac{26}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ln 3\\ 2\end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases}a_0=1.1410\\ a_1=-0.2958\end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi=span\{1,x\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x)=a_0+a_1x$$
$$=1.1410-0.2958x$$

$(2)\because\ f(x)=e^x,[0,1]$

若 $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0=1,\varphi_1=x,$，则有

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 1, \|\varphi_1\|_2^2 = \frac{1}{3},$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{2},$$

$$(f, \varphi_0) = e - 1, (f, \varphi_1) = 1,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a_0 = 0.1878 \\ a_1 = 1.6244 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi = span\{1, x\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$S^*(x) = a_0 + a_1 x$$
$$= 0.1878 + 1.6244x$$

(3)Q $f(x) = \cos \pi x, x \in [0,1]$

若 $(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$

且 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x,$ ，则有

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 1, \|\varphi_1\|_2^2 = \frac{1}{3},$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{2},$$

$$(f, \varphi_0) = 0, (f, \varphi_1) = -\frac{2}{\pi^2},$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\pi^2} \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a_0 = 1.2159 \\ a_1 = -0.24317 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi = span\{1,x\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$
\begin{aligned}
S^*(x) &= a_0 + a_1 x \\
&= 1.2159 - 0.24317x
\end{aligned}
$$

(4)Q $f(x) = \ln x, x \in [1,2]$

若 $(f,g) = \int_1^2 f(x)g(x)dx$

且 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x,$ 则有

$$
\begin{aligned}
&\|\varphi_0\|_2^2 = 1, \|\varphi_1\|_2^2 = \frac{7}{3}, \\
&(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{3}{2}, \\
&(f, \varphi_0) = 2\ln 2 - 1, (f, \varphi_1) = 2\ln 2 - \frac{3}{4},
\end{aligned}
$$

则法方程组为

$$
\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ln 2 - 1 \\ 2\ln 2 - \frac{3}{4} \end{pmatrix}
$$

从而解得

$$
\begin{cases} a_0 = -0.6371 \\ a_1 = 0.6822 \end{cases}
$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi = span\{1,x\}$ 最佳平方逼近多项式为

$$
\begin{aligned}
S^*(x) &= a_0 + a_1 x \\
&= -0.6371 + 0.6822x
\end{aligned}
$$

18。 $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$，在 $[-1,1]$ 上按勒让德多项式展开求三次最佳平方逼近多项式。

解：

Q $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x, x \in [-1,1]$

按勒让德多项式 $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ 展开

$$(f(x),P_0(x))=\int_{-1}^{1}\sin\frac{\pi}{2}xdx=\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\Big|_{1}^{-1}=0$$

$$(f(x),P_1(x))=\int_{-1}^{1}x\sin\frac{\pi}{2}xdx=\frac{8}{\pi^2}$$

$$(f(x),P_2(x))=\int_{-1}^{1}(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})\sin\frac{\pi}{2}xdx=0$$

$$(f(x),P_3(x))=\int_{-1}^{1}(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x)\sin\frac{\pi}{2}xdx=\frac{48(\pi^2-10)}{\pi^4}$$

则

$$a_0^*=(f(x),P_0(x))/2=0$$

$$a_1^*=3(f(x),P_1(x))/2=\frac{12}{\pi^2}$$

$$a_2^*=5(f(x),P_2(x))/2=0$$

$$a_3^*=7(f(x),P_3(x))/2=\frac{168(\pi^2-10)}{\pi^4}$$

从而 $f(x)$ 的三次最佳平方逼近多项式为

$$S_3^*(x)=a_0^*P_0(x)+a_1^*P_1(x)+a_2^*P_2(x)+a_3^*P_3(x)$$
$$=\frac{12}{\pi^2}x+\frac{168(\pi^2-10)}{\pi^4}(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x)$$
$$=\frac{420(\pi^2-10)}{\pi^4}x^3+\frac{120(21-2\pi^2)}{\pi^4}$$
$$\approx 1.5531913x-0.5622285x^3$$

19。观测物体的直线运动，得出以下数据：

时间 t(s)	0	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
距离 s(m)	0	10	30	50	80	110

求运动方程。

解：

被观测物体的运动距离与运动时间大体为线性函数关系，从而选择线性方程

$$s=a+bt$$

令 $\Phi=span\{1,t\}$

则

$$\|\varphi_0\|_2^2=6,\|\varphi_1\|_2^2=53.63,$$
$$(\varphi_0,\varphi_1)=14.7,$$
$$(\varphi_0,s)=280,(\varphi_1,s)=1078,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix}6 & 14.7\\ 14.7 & 53.63\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}280\\ 1078\end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a = -7.855048 \\ b = 22.25376 \end{cases}$$

故物体运动方程为

$$S = 22.25376t - 7.855048$$

20。已知实验数据如下：

x_i	19	25	31	38	44
y_j	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

用最小二乘法求形如 $s = a + bx^2$ 的经验公式，并计算均方误差。

解：

若 $s = a + bx^2$，则

$$\Phi = span\left\{1, x^2\right\}$$

则

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 5, \|\varphi_1\|_2^2 = 7277699,$$
$$(\varphi_0, \varphi_1) = 5327,$$
$$(f, \varphi_0) = 271.4, (f, \varphi_1) = 369321.5,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a = 0.9726046 \\ b = 0.0500351 \end{cases}$$

故 $y = 0.9726046 + 0.0500351x^2$

均方误差为 $\delta = [\sum_{j=0}^{4}(y(x_j) - y_j)^2]^{\frac{1}{2}} = 0.1226$

21。在某佛堂反应中，由实验得分解物浓度与时间关系如下：

时间 t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
浓度 $y(\times 10^{-4})$	0	1.27	2.16	2.86	3.44	3.87	4.15	4.37	4.51	4.58	4.62	4.64

用最小二乘法求 $y = f(t)$。

解：

观察所给数据的特点，采用方程

$$y = ae^{\frac{-b}{t}}, (a, b > 0)$$

两边同时取对数，则

$$\ln y = \ln a - \frac{b}{t}$$

取 $\Phi = span\left\{1, -\frac{1}{t}\right\}, S = \ln y, x = -\frac{1}{t}$

则 $S = a^* + b^* x$

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 11, \|\varphi_1\|_2^2 = 0.062321,$$
$$(\varphi_0, \varphi_1) = -0.603975,$$
$$(\varphi_0, f) = -87.674095, (\varphi_1, f) = 5.032489,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 11 & -0.603975 \\ -0.603975 & 0.062321 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -87.674095 \\ 5.032489 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a^* = -7.5587812 \\ b^* = 7.4961692 \end{cases}$$

因此

$$a = e^{a^*} = 5.2151048$$
$$b = b^* = 7.4961692$$

$$\therefore y = 5.2151048 e^{-\frac{7.4961692}{t}}$$

22。给出一张记录 $\{f_k\} = (4,3,2,1,0,1,2,3)$, 用 FFT 算法求 $\{c_k\}$ 的离散谱。

解：

$$\{f_k\} = (4,3,2,1,0,1,2,3),$$

则 $k = 0,1,\cdots,7, N = 8$

$$\omega^0 = \omega^4 = 1,$$

$$\omega^1 = \omega^5 = e^{-\frac{\pi}{4}i},$$

$$\omega^2 = \omega^6 = e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i,$$

$$\omega^3 = \omega^7 = e^{-\frac{3\pi}{4}i},$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	4	3	2	1	0	1	2	3
A_1	4	4	4	2ω	4	0	4	$-2\omega^3$
A_2	8	4	0	4	8	$2\sqrt{2}$	0	$-2\sqrt{2}$
C_j	16	$4+2\sqrt{2}$	0	$4-2\sqrt{2}$	0	$4-2\sqrt{2}$	0	$4+2\sqrt{2}$

23，用辗转相除法将 $R_{22}(x)=\dfrac{3x^2+6x}{x^2+6x+6}$ 化为连分式。

解

$$\begin{aligned}
R_{22}(x)&=\frac{3x^2+6x}{x^2+6x+6}\\
&=3-\frac{12x+18}{x^2+6x+6}\\
&=3-\cfrac{12}{x+\cfrac{9}{2}-\cfrac{\frac{3}{4}}{x+\frac{3}{2}}}\\
&=3-\frac{12}{x+4.5}-\frac{0.75}{x+1.5}
\end{aligned}$$

24。求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的 $(3,3)$ 阶帕德逼近 $R_{33}(x)$。

解：

由 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

得 $C_0=0,$

$$C_1=1,$$
$$C_2=0,$$
$$C_3=-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6},$$
$$C_4=0,$$
$$C_5=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120},$$

$C_6 = 0,$

从而

$$-C_1 b_3 - C_2 b_2 - C_3 b_1 = C_4$$
$$-C_2 b_3 - C_3 b_2 - C_4 b_1 = C_5$$
$$-C_3 b_3 - C_4 b_2 - C_5 b_1 = C_6$$

即

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{120} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{120} \\ 0 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} b_3 = 0 \\ b_2 = \dfrac{1}{20} \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

又Q $a_k = \sum_{j=0}^{k-1} C_j b_{k-j} + C_k \, (k = 0,1,2,3)$

则

$$a_0 = C_0 = 0$$
$$a_1 = C_0 b_1 + C_1 = 0$$
$$a_2 = C_0 b_2 + C_1 b_1 = 0$$
$$a_3 = C_0 b_3 + C_1 b_2 + C_2 b_1 + C_3 = -\frac{7}{60}$$

故

$$R_{33}(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3}{1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3}$$

$$=\frac{x-\frac{7}{60}x^3}{1+\frac{1}{20}x^2}$$

$$=\frac{60x-7x^3}{60+3x^3}$$

25。求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的 $(2,1)$ 阶帕德逼近 $R_{21}(x)$。

解：

由 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开为

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

得

$$C_0=1,$$

$$C_1=1,$$

$$C_2=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2},$$

$$C_3=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6},$$

从而

$$-C_2b_1=C_3$$

即

$$-\frac{1}{2}b_1=\frac{1}{6}$$

解得

$$b_1=-\frac{1}{3}$$

又$\because$ $a_k=\sum_{j=0}^{k-1}C_jb_{k-j}+C_k(k=0,1,2)$

则

$$a_0=C_0=1$$

$$a_1=C_0b_1+C_1=\frac{2}{3}$$

$$a_2=C_1b_1+C_2=\frac{1}{6}$$

故

$$R_{21}(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{1+b_1x}$$

$$=\frac{1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}{1-\frac{1}{3}x}$$

$$=\frac{6+4x+x^2}{6-2x}$$

$$(2)\int_a^b S''(x)\left[f''(x)-S''(x)\right]dx$$

$$=\int_a^b S''(x)d\left[f'(x)-S'(x)\right]$$

$$=S''(x)\left[f'(x)-S'(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b\left[f'(x)-S'(x)\right]d[S''(x)]$$

$$=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]-\int_a^b S'''(x)\left[f'(x)-S'(x)\right]dx$$

$$=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]-\sum_{k=0}^{n-1}S'''(\frac{x_k+x_{k+1}}{2})\mathrm{g}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[f'(x)-S'(x)\right]dx$$

$$=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]-\sum_{k=0}^{n-1}S'''(\frac{x_k+x_{k+1}}{2})\mathrm{g}\left[f'(x)-S'(x)\right]\Big|_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]$$

第四章　　数值积分与数值微分

1.确定下列求积公式中的特定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度：

$$(1)\int_{-h}^{h}f(x)dx\approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h);$$

$$(2)\int_{-2h}^{2h}f(x)dx\approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h);$$

$$(3)\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]/3;$$

$$(4)\int_0^h f(x)dx\approx h[f(0)+f(h)]/2+ah^2[f'(0)-f'(h)];$$

解：

求解求积公式的代数精度时，应根据代数精度的定义，即求积公式对于次数不超过 m 的多项式均能准确地成立，但对于 m+1 次多项式就不准确成立，进行验证性求解。

（1）若 $(1)\int_{-h}^{h}f(x)dx\approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$

令 $f(x)=1$，则

$$2h=A_{-1}+A_0+A_1$$

令 $f(x)=x$，则

$$0=-A_{-1}h+A_1h$$

令 $f(x)=x^2$，则

$$\frac{2}{3}h^3=h^2A_{-1}+h^2A_1$$

从而解得

$$\begin{cases}A_0=\dfrac{4}{3}h\\ A_1=\dfrac{1}{3}h\\ A_{-1}=\dfrac{1}{3}h\end{cases}$$

令 $f(x)=x^3$，则

$$\int_{-h}^{h}f(x)dx=\int_{-h}^{h}x^3dx=0$$

$$A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)=0$$

故 $\int_{-h}^{h}f(x)dx=A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$ 成立。

令 $f(x)=x^4$，则

$$\int_{-h}^{h}f(x)dx=\int_{-h}^{h}x^4dx=\frac{2}{5}h^5$$

$$A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)=\frac{2}{3}h^5$$

故此时，

$$\int_{-h}^{h}f(x)dx\neq A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$$

故 $\int_{-h}^{h}f(x)dx\approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$

具有 3 次代数精度。

（2）若 $\int_{-2h}^{2h}f(x)dx\approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$

令 $f(x)=1$，则

$$4h=A_{-1}+A_0+A_1$$

令 $f(x)=x$，则

$$0=-A_{-1}h+A_1 h$$

令 $f(x)=x^2$，则

$$\frac{16}{3}h^3=h^2A_{-1}+h^2A_1$$

从而解得

$$\begin{cases} A_0=-\frac{4}{3}h \\ A_1=\frac{8}{3}h \\ A_{-1}=\frac{8}{3}h \end{cases}$$

令 $f(x)=x^3$，则

$$\int_{-2h}^{2h}f(x)dx=\int_{-2h}^{2h}x^3dx=0$$

$$A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)=0$$

故 $\int_{-2h}^{2h}f(x)dx=A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$ 成立。

令 $f(x)=x^4$，则

$$\int_{-2h}^{2h}f(x)dx=\int_{-2h}^{2h}x^4dx=\frac{64}{5}h^5$$

$$A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)=\frac{16}{3}h^5$$

故此时，

$$\int_{-2h}^{2h}f(x)dx\neq A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$$

因此，

$$\int_{-2h}^{2h}f(x)dx\approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$$

具有 3 次代数精度。

（3）若 $\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]/3$

令 $f(x)=1$，则

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2=[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]/3$$

令 $f(x)=x$，则

$$0=-1+2x_1+3x_2$$

令 $f(x)=x^2$，则

$$2=1+2x_1^2+3x_2^2$$

从而解得

$$\begin{cases}x_1=-0.2899\\x_2=0.5266\end{cases} \text{或} \begin{cases}x_1=0.6899\\x_2=0.1266\end{cases}$$

令 $f(x)=x^3$，则

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}x^3dx=0$$

$$[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]/3\neq 0$$

故 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]/3$ 不成立。

因此，原求积公式具有 2 次代数精度。

（4）若 $\int_0^h f(x)dx\approx h[f(0)+f(h)]/2+ah^2[f'(0)-f'(h)]$

令 $f(x)=1$，则

$$\int_0^h f(x)dx=h,$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+ah^2[f'(0)-f'(h)]=h$$

令 $f(x)=x$，则

$$\int_0^h f(x)dx=\int_0^h xdx=\frac{1}{2}h^2$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+ah^2[f'(0)-f'(h)]=\frac{1}{2}h^2$$

令 $f(x)=x^2$，则

$$\int_0^h f(x)dx=\int_0^h x^2dx=\frac{1}{3}h^3$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+ah^2[f'(0)-f'(h)]=\frac{1}{2}h^3-2ah^2$$

故有

$$\frac{1}{3}h^3=\frac{1}{2}h^3-2ah^2$$

$$a=\frac{1}{12}$$

令 $f(x)=x^3$，则

$$\int_0^h f(x)dx=\int_0^h x^3dx=\frac{1}{4}h^4$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)]=\frac{1}{2}h^4-\frac{1}{4}h^4=\frac{1}{4}h^4$$

令 $f(x)=x^4$，则

$$\int_0^h f(x)dx=\int_0^h x^4dx=\frac{1}{5}h^5$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)]=\frac{1}{2}h^5-\frac{1}{3}h^5=\frac{1}{6}h^5$$

故此时，

$$\int_0^h f(x)dx\neq h[f(0)+f(h)]/2+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)],$$

因此，$\int_0^h f(x)dx\approx h[f(0)+f(h)]/2+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)]$

具有 3 次代数精度。

2.分别用梯形公式和辛普森公式计算下列积分：

$$(1)\int_0^1\frac{x}{4+x^2}dx,n=8;$$

$$(2)\int_0^1\frac{(1-e^{-x})^{\frac{1}{2}}}{x}dx,n=10;$$

$$(3)\int_1^9\sqrt{x}dx,n=4;$$

$$(4)\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-\sin^2\varphi}d\varphi,n=6;$$

解：

$$(1)n=8,a=0,b=1,h=\frac{1}{8},f(x)=\frac{x}{4+x^2}$$

复化梯形公式为

$$T_8=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(b)]=0.11140$$

复化辛普森公式为

$$S_8=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{7}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)+f(b)]=0.11157$$

$$(2)n=10,a=0,b=1,h=\frac{1}{10},f(x)=\frac{(1-e^{-x})^{\frac{1}{2}}}{x}$$

复化梯形公式为

$$T_{10}=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{9}f(x_k)+f(b)]=1.39148$$

复化辛普森公式为

$$S_{10}=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{9}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{9}f(x_k)+f(b)]=1.45471$$

$(3)n=4,a=1,b=9,h=2,f(x)=\sqrt{x},$

复化梯形公式为

$$T_4=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{3}f(x_k)+f(b)]=17.22774$$

复化辛普森公式为

$$S_4=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{3}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{3}f(x_k)+f(b)]=17.32222$$

$(4)n=6,a=0,b=\frac{\pi}{6},h=\frac{\pi}{36},f(x)=\sqrt{4-\sin^2\varphi}$

复化梯形公式为

$$T_6=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{5}f(x_k)+f(b)]=1.03562$$

复化辛普森公式为

$$S_6=\frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{5}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{5}f(x_k)+f(b)]=1.03577$$

3。直接验证柯特斯教材公式（2。4）具有 5 交代数精度。

证明：

柯特斯公式为

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

令 $f(x)=1$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{90}$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]=b-a$$

令 $f(x)=x$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xdx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

令 $f(x)=x^2$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

令 $f(x)=x^3$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^3dx=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$$

令 $f(x)=x^4$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^4dx=\frac{1}{5}(b^5-a^5)$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]=\frac{1}{5}(b^5-a^5)$$

令 $f(x)=x^5$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^5dx=\frac{1}{6}(b^6-a^6)$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]=\frac{1}{6}(b^6-a^6)$$

令 $f(x)=x^6$，则

$$\int_0^h f(x)dx\neq\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

因此，该柯特斯公式具有 5 次代数精度。

4。用辛普森公式求积分 $\int_0^1 e^{-x}dx$ 并估计误差。

解：

辛普森公式为

$$S=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

此时，

$$a=0,b=1,f(x)=e^{-x},$$

从而有

$$S=\frac{1}{6}(1+4e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1})=0.63233$$

误差为

$$|R(f)|=\left|-\frac{b-a}{180}(\frac{b-a}{2})^4f^{(4)}(\eta)\right|$$

$$\le\frac{1}{180}\times\frac{1}{2^4}\times e^0=0.00035,\eta\in(0,1)$$

5。推导下列三种矩形求积公式：

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2;$$

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(b)-\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2;$$

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3;$$

证明：

$$(1)\because f(x)=f(a)+f'(\eta)(x-a),\eta\in(a,b)$$

两边同时在$[a,b]$上积分，得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+f'(\eta)\int_a^b(x-a)dx$$

即

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

$$(2)\because f(x)=f(b)-f'(\eta)(b-x),\eta\in(a,b)$$

两边同时在$[a,b]$上积分，得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)-f'(\eta)\int_a^b(b-x)dx$$

即

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(b)-\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

$$(3)\because f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\eta)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2,\eta\in(a,b)$$

两连边同时在$[a,b]$上积分，得

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})dx + \frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^2 dx$$

即

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3;$$

6。若用复化梯形公式计算积分 $I=\int_0^1 e^x dx$，问区间 $[0,1]$ 应人多少等分才能使截断误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-5}$？若改用复化辛普森公式，要达到同样精度区间 $[0,1]$ 应分多少等分？

解：

采用复化梯形公式时，余项为

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta), \eta \in (a,b)$$

又Q $I=\int_0^1 e^x dx$

故 $f(x)=e^x, f''(x)=e^x, a=0, b=1.$

$$\therefore |R_n(f)| = \frac{1}{12}h^2 |f''(\eta)| \le \frac{e}{12}h^2$$

若 $|R_n(f)| \le \frac{1}{2}\times 10^{-5}$，则

$$h^2 \le \frac{6}{e}\times 10^{-5}$$

当对区间 $[0,1]$ 进行等分时，

$$h=\frac{1}{n},$$

故有

$$n \ge \sqrt{\frac{e}{6}\times 10^{-5}} = 212.85$$

因此，将区间 213 等分时可以满足误差要求

采用复化辛普森公式时，余项为

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{180}(\frac{h}{2})^4 f^{(4)}(\eta), \eta \in (a,b)$$

又Q $f(x)=e^x,$

$$\therefore f^{(4)}(x)=e^x,$$

$$\therefore |R_n(f)| = -\frac{1}{2880}h^4 \, | f^{(4)}(\eta) | \le \frac{e}{2880}h^4$$

若 $|R_n(f)| \le \frac{1}{2}\times 10^{-5}$，则

$$h^4 \le \frac{1440}{e} \times 10^{-5}$$

当对区间$[0,1]$进行等分时

$$n = \frac{1}{h}$$

故有

$$n \ge (\frac{1440}{e} \times 10^5)^{\frac{1}{4}} = 3.71$$

因此，将区间 8 等分时可以满足误差要求。

7。如果 $f''(x) > 0$，证明用梯形公式计算积分 $I = \int_a^b f(x)dx$ 所得结果比准确值 I 大，并说明其几何意义。

解：采用梯形公式计算积分时，余项为

$$R_T = -\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3, \eta \in [a,b]$$

又Q $f''(x) > 0$ 且 $b > a$

$$\therefore R_T < 0$$

又Q $R_T = 1 - T$

$$\therefore I < T$$

即计算值比准确值大。

其几何意义为， $f''(x) > 0$ 为下凸函数，梯形面积大于曲边梯形面积。

8。用龙贝格求积方法计算下列积分，使误差不超过10^{-5}.

$$(1)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x}dx$$

$$(2)\int_0^{2\pi} x\sin x dx$$

$$(3)\int_0^3 x\sqrt{1+x^2}dx.$$

解：

$$(1)I = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-x}dx$$

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$
0	0.7717433			
1	0.7280699	0.7135121		
2	0.7169828	0.7132870	0.7132720	

3	0.7142002	0.7132726	0.7132717	0.7132717

因此$I = 0.713727$

$(2) I = \int_0^{2\pi} x \sin x dx$

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$
0	3.451313×10^{-6}	
1	8.628283×10^{-7}	-4.446923×10^{-21}

因此$I \approx 0$

$(3) I = \int_0^3 x\sqrt{1+x^2} dx$

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$	$T_5^{(k)}$
0	14.2302495					
1	11.1713699	10.1517434				
2	10.4437969	10.2012725	10.2045744			
3	10.2663672	10.2072240	10.2076207	10.2076691		
4	10.2222702	10.2075712	10.2075943	10.2075939	10.2075936	
5	10.2112607	10.2075909	10.2075922	10.2075922	10.2075922	10.2075922

因此$I \approx 10.2075922$

9。用$n = 2,3$的高斯-勒让德公式计算积分

$$\int_1^3 e^x \sin x dx.$$

解：

$$I = \int_1^3 e^x \sin x dx.$$

Q $x \in [1,3]$, 令$t = x - 2$，则$t \in [-1,1]$

用$n = 2$的高斯—勒让德公式计算积分

$$I \approx 0.5555556 \times [f(-0.7745967) + f(0.7745967)] + 0.8888889 \times f(0)$$
$$\approx 10.9484$$

用$n = 3$的高斯—勒让德公式计算积分

$$I \approx 0.3478548 \times [f(-0.8611363) + f(0.8611363)]$$
$$+0.6521452 \times [f(-0.3399810) + f(0.3399810)]$$
$$\approx 10.95014$$

10 地球卫星轨道是一个椭圆，椭圆周长的计算公式是

$$S = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\frac{c}{a})^2 \sin^2\theta} d\theta,$$

这是 a 是椭圆的半径轴，c 是地球中心与轨道中心（椭圆中心）的距离，记 h 为近地点距离，H 为远地点距离，R=6371（km）为地球半径，则

$$a=(2R+H+h)/2, c=(H-h)/2.$$

我国第一颗地球卫星近地点距离 h=439(km)，远地点距离 H=2384(km)。试求卫星轨道的周长。

解：

$$\because R=6371, h=439, H=2384$$

从而有。

$$a=(2R+H+h)/2=7782.5$$
$$c=(H-h)/2=972.5$$
$$S=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-(\frac{c}{a})^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$
0	1.564640		
1	1.564646	1.564648	
2	1.564646	1.564646	1.564646

$$I\approx 1.564646$$
$$S\approx 48708(km)$$

即人造卫星轨道的周长为 48708km

11。证明等式

$$n\sin\frac{\pi}{n}=\pi-\frac{\pi^3}{3!n^2}+\frac{\pi^5}{5!n^4}-\cdots$$

试依据 $n\sin(\frac{\pi}{n})(n=3,6,12)$ 的值，用外推算法求 π 的近似值。

解

若 $f(n)=n\sin\frac{\pi}{n}$,

又 $\because \sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots$

$\therefore$ 此函数的泰勒展式为

$$f(n)=n\sin\frac{\pi}{n}$$
$$=n[\frac{\pi}{n}-\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{n})^3+\frac{1}{5!}(\frac{\pi}{n})^5-\cdots]$$
$$=\pi-\frac{\pi^3}{3!n^2}+\frac{\pi^5}{5!n^4}-\cdots$$

$T_n^{(k)} \approx \pi$

当 $n=3$ 时，$n\sin\dfrac{\pi}{n}=2.598076$

当 $n=6$ 时，$n\sin\dfrac{\pi}{n}=3$

当 $n=12$ 时，$n\sin\dfrac{\pi}{n}=3.105829$

由外推法可得

n	$T_0^{(n)}$	$T_1^{(n)}$	$T_2^{(n)}$
3	2.598076		
6	3.000000	3.133975	
9	3.105829	3.141105	3.141580

故 $\pi \approx 3.14158$

12。用下列方法计算积分 $\int_1^3 \dfrac{dy}{y}$，并比较结果。

(1)龙贝格方法；
(2)三点及五点高斯公式；
(3)将积分区间分为四等分，用复化两点高斯公式。
解

$$I=\int_1^3 \frac{dy}{y}$$

(1)采用龙贝格方法可得

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$
0	1.333333				
1	1.166667	1.099259			
2	1.116667	1.100000	1.099259		
3	1.103211	1.098726	1.098641	1.098613	
4	1.099768	1.098620	1.098613	1.098613	1.098613

故有 $I \approx 1.098613$
(2)采用高斯公式时

$$I=\int_1^3 \frac{dy}{y}$$

此时 $y\in[1,3]$,

令 $x=y-z$, 则 $x\in[-1,1]$,

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+2}dx,$$

$$f(x)=\frac{1}{x+2},$$

利用三点高斯公式，则

$$I=0.5555556\times[f(-0.7745967)+f(0.7745967)]+0.8888889\times f(0)$$
$$\approx 1.098039$$

利用五点高斯公式，则

$$I\approx 0.2369239\times[f(-0.9061798)+f(0.9061798)]$$
$$+0.4786287\times[f(-0.5384693)+f(0.5384693)]+0.5688889\times f(0)$$
$$\approx 1.098609$$

(3)采用复化两点高斯公式

将区间 $[1,3]$ 四等分，得

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4$$
$$=\int_{1}^{1.5}\frac{dy}{y}+\int_{1.5}^{2}\frac{dy}{y}+\int_{2}^{2.5}\frac{dy}{y}+\int_{2.5}^{3}\frac{dy}{y}$$

作变换 $y=\frac{x+5}{4}$，则

$$I_1=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+5}dx,$$

$$f(x)=\frac{1}{x+5},$$

$$I_1\approx f(-0.5773503)+f(0.5773503)\approx 0.4054054$$

作变换 $y=\frac{x+7}{4}$，则

$$I_2=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+7}dx,$$

$$f(x)=\frac{1}{x+7},$$

$$I_2\approx f(-0.5773503)+f(0.5773503)\approx 0.2876712$$

作变换 $y=\frac{x+9}{4}$，则

$$I_3=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+9}dx,$$

$$f(x)=\frac{1}{x+9},$$

$$I_3\approx f(-0.5773503)+f(0.5773503)\approx 0.2231405$$

作变换 $y=\frac{x+11}{4}$，则

$$I_4=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+11}dx,$$

$$f(x)=\frac{1}{x+11},$$

$$I_4\approx f(-0.5773503)+f(0.5773503)\approx 0.1823204$$

因此，有

$$I\approx 1.098538$$

13.用三点公式和积分公式求 $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ 在 $x=1.0,1.1$，和 1.2 处的导数值，并估计误差。

$f(x)$ 的值由下表给出：

x	1.0	1.1	1.2
F(x)	0.2500	0.2268	0.2066

解：

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$$

由带余项的三点求导公式可知

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

$$f'(x_1)=\frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)]-\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)]+\frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

又Q $f(x_0)=0.2500, f(x_1)=0.2268, f(x_2)=0.2066,$

$$\therefore f'(x_0)\approx\frac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]=0.247$$

$$f'(x_1)\approx\frac{1}{2h}[-f(x_0)+f(x_2)]=-0.217$$

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)]=-0.187$$

又Q $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

$$\therefore f'''(x)=\frac{-24}{(1+x)^5}$$

又Q $x \in [1.0, 1.2]$

$\therefore \left| f'''(\xi) \right| \le 0.75$

故误差分别为

$$\left| R(x_0) \right| = \left| \frac{h^2}{3} f'''(\xi) \right| \le 2.5 \times 10^{-3}$$

$$\left| R(x_1) \right| = \left| \frac{h^2}{6} f'''(\xi) \right| \le 1.25 \times 10^{-3}$$

$$\left| R(x_2) \right| = \left| \frac{h^2}{3} f'''(\xi) \right| \le 2.5 \times 10^{-3}$$

利用数值积分求导，

设 $\varphi(x) = f'(x)$

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x) dx$$

由梯形求积公式得

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x) dx = \frac{h}{2} [\varphi(x_k) + \varphi(x_{k+1})]$$

从而有

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + \frac{h}{2} [\varphi(x_k) + \varphi(x_{k+1})]$$

故

$$\varphi(x_0) + \varphi(x_1) = \frac{2}{h} [f(x_1) - f(x_0)]$$

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \frac{2}{h} [f(x_2) - f(x_1)]$$

又Q $f(x_{k+1}) = f(x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \varphi(x) dx$

且 $\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \varphi(x) dx = h[\varphi(x_{k-1}) + \varphi(x_{k+1})]$

从而有

$$f(x_{k+1}) = f(x_{k-1}) + h[\varphi(x_{k-1}) + \varphi(x_{k+1})]$$

故 $\varphi(x_0) + \varphi(x_2) = \frac{1}{h} [f(x_2) - f(x_0)]$

即

$$\begin{cases} \varphi(x_0) + \varphi(x_1) = -0.464 \\ \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = -0.404 \\ \varphi(x_0) + \varphi(x_2) = -0.434 \end{cases}$$

解方程组可得

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = -0.247 \\ \varphi(x_1) = -0.217 \\ \varphi(x_2) = -0.187 \end{cases}$$