

学校代码 10530

分类号 U24; O327

学 号 201330131882

密 级 公开

湘潭大学

# 硕士学位论文

## 基于 MATLAB 的车辆轮轨力数值研究

学位申请人 陆亚平

指导教师 陈锐林 副教授

学院名称 土木工程与力学学院

学科专业 建筑与土木工程

研究方向 道桥工程

二零一六年六月

# **Numerical Study of Wheel-rail Force on Vehicle Based on MATLAB**

**Candidate** \_\_\_\_\_ Lu Ya Ping \_\_\_\_\_

**Supervisor** \_\_\_\_\_ Associate Professor Chen Rui Lin \_\_\_\_\_

**College** \_\_\_\_\_ College of Civil Engineering and Mechanics \_\_\_\_\_

**Program** \_\_\_\_\_ Architecture and Civil Engineering \_\_\_\_\_

**Specialization** \_\_\_\_\_ Road and Bridge Engineering \_\_\_\_\_

**Degree** \_\_\_\_\_ Master of Engineering \_\_\_\_\_

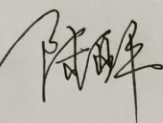
**University** \_\_\_\_\_ Xiang Tan University \_\_\_\_\_

**Date** \_\_\_\_\_ June, 2016 \_\_\_\_\_

## 湘潭大学

### 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

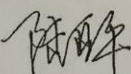
作者签名：

日期 2016 年 6 月 6 日

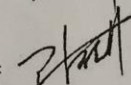
### 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权湘潭大学可以将本学位论文的全部内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

涉密论文按学校规定处理。

作者签名：

日期 2016 年 6 月 6 日

导师签名：

日期：2016 年 6 月 6 日



## 摘 要

众所周知，随着“一带一路”政策的正确引导，我国高铁的运营里程不断刷新。高铁已成功地走出中国，迈向国际市场。所以，为了加大铁路运输的运能，合理缩减运营成本，增强市场竞争优势，高铁提速已是必趋之势。然而，伴随着这种大环境，装配式桥梁结构在铁路线路中的大量使用，铁路车桥耦合振动问题的研究就显得越来越刻不容缓。为了有效评估线路中既有桥梁的运行状态，全面合理地优化设计新建桥梁，分析有列车过桥的车桥耦合振动问题十分必要。列车沿轨道运行时，轮轨起着关键性的作用。轮对在沿着钢轨滚动的接触过程中，不仅承受着较大的载荷，还起到列车的牵引、制动和导向等重要作用。它们之间的作用行为直接影响着列车的运动稳定性和安全。轮轨滚动接触行为和很多因素有关，如轮轨接触表面状态、材料、环境、运动行为和轮轨的几何型面等。所以，轮轨滚动接触是十分复杂的问题。为了确保高速、重载、运输安全，进一步提高运输质量，必须深入细致的研究轮对与轨道的相互作用，而轮轨几何关系的确立则是首要解决的复杂课题。

而在这过程中，弄清楚轮轨之间的耦合关系，并求得精确的轮轨力数值解，是解决轮轨关系问题的必要条件。计算机仿真是一种比较有效和经济的方法。本文运用车辆、桥梁耦合大系统的思想，建立了机车轮轨间的接触模型。借助数值仿真的思想及数学工具矩阵实验室（Matlab），并根据该模型的特点自主编程。重点研究了轮轨接触几何关系，轮轨之间垂向、横向相互作用力。给出了垂向 Hertz 非线性弹性接触力和横向 Kalker 蠕滑理论的推导过程。并着重介绍以迹线法为理论基础，整合耦合振动过程中所需的轮轨接触几何参数及我国标准轮轨互相配合的一些数据、轮轨刚性滚动接触过程中轮轨接触点坐标、接触角、侧滚角等作为边界条件，并利用 Matlab 的数值处理能力来求解蠕滑率及蠕滑力等等。

**关键词：**高速铁路；轮轨关系；迹线法；蠕滑力

## Abstract

As we all know, with the "Belt and Road Initiative" policy guidance, the operational mileage of China's high-speed rail is constantly increasing. High-speed rail has been successfully extended from China to the international market. How to improve the operational speed of high-speed rail, and in the meantime, to increase the railway transport capacity, and to reduce the operating costs is becoming a urgent issue to address. With this kind of environment, the extensive use of prefabricated bridge-structure along lines. Paritcularly, great efforts have been devoted to analyzing the vehicle-bridge coupling theory and phenomena when the vehicles crossing bridges for evaluating the built bridge's function and optimizing the design of the newly built bridge. The wheel-rail plays a key role in the train speed running along the track. In the process of rolling contact, the wheel set not only bears a great weight, but also plays an important role in the train traction, braking and steering. The role of behavior between them affects the stability and safety of direct train movement. Contribute to the wheel-rail rolling contact behavior is related to, Such as the wheel-rail contact surface condition, the material, the environment, the movement behavior and the wheel-Rail Geometry and so on. Therefore, the wheel-rail rolling contact is a very complicated problem. In order to ensure the high speed and heavy load and transport safety, to further improve the quality of transport, interaction between wheel and rail must be studied deeply, and to establish the wheel-rail geometrical relationship is complex problem needed to be solved firstly.

To find out the optimal coupling relationship between the wheel and rail, with the exact numerical solution of the wheel-rail force. This research uses the computer simulation method based on the vehicle bridge coupling system. By using computer simulation method and matrix laboratory mathematical tools (Matlab) as date processing tools. We established the contact model between vehicle and wheel-rail. The model focus on the wheel rail contact geometry relationship between wheel and rail, vertical and lateral interactions. The derivation of vertical contact force and lateral Kalker Hertz nonlinear elastic creep theory is given. And this paper mainly introduces the trace method as the theoretical basis, process data, rigid wheel rail rolling contact rail contact geometry parameters for the coupled vibration in the process of integration in China and cooperate with each other in the standard wheel rail contact point coordinates, contact angle and roll angle as boundary conditions, And the use of numerical processing ability of Matlab to solve the creep rate and creep force etc.

**Key words:** High-speed railway; Wheel-rail relation; Trace line method; Creep-forces

# 目 录

摘 要.....	I
Abstract .....	II
第 1 章 绪论 .....	1
1.1 研究背景和意义 .....	2
1.1.1 研究背景 .....	2
1.1.2 研究意义 .....	2
1.2 国内外研究现状 .....	3
1.3 论文创新点 .....	5
第 2 章 轮轨滚动接触及蛇行运动相关理论 .....	7
2.1 轮对的基本构造 .....	7
2.1.1 轮对的分类 .....	7
2.1.2 车轮踏面 .....	8
2.2 轮轨滚动接触基本理论 .....	8
2.2.1 轮轨滚动接触情形描述 .....	10
2.2.2 轮轨接触几何参数及相关结论的概述 .....	11
2.2.3 轮对运动方程 .....	14
2.2.4 轮轨蠕滑力计算模型 .....	14
2.2.4.1 蠕滑率的计算 .....	15
2.2.4.2 线性 Kalker 理论实现 .....	17
2.2.4.3 Kalker 新简化理论实现 .....	18
2.2.5 轮对微分方程的建立 .....	21
第 3 章 基于 MATLAB 的车辆轮轨力数值研究 .....	24
3.1 MATLAB 介绍 .....	24
3.1.1 MATLAB 的特点 .....	24
3.2 轮轨坐标及其转换 .....	24
3.3 轮轨接触几何参数的数值求解 .....	26
3.3.1 轮轨接触几何参数的求解 .....	26
3.4 轮轨接触作用力的数值求解 .....	31
3.4.1 轮轨法向力的求解 .....	32
3.4.2 轮轨切向蠕滑力的计算 .....	33
3.5 轮轨作用力求解程序编写及验证 .....	36

第 4 章 结论与展望 .....	40
4.1 结论 .....	40
4.2 展望 .....	42
参考文献 .....	43
致谢 .....	46
附录 A 轮轨力计算模型仿真程序语言及注释 .....	47
附录 B 在学期间发表的学术论文及研究成果 .....	54



## 第 1 章 绪论

自 2003 年以来,在过去的 12 年时间,我国和谐号(CRH)系列高速列车经历了一系列速度上的腾飞:从 2007 年处 250km/h 的最高运营速度,到 2008 年 350km/h 的最高运营速度的京津城际、郑西、武广、沪宁城际等高速铁路,以及现阶段普遍以最高速度为 300km/h 稳定运行的多条高速铁路线路<sup>[1]</sup>。据国际铁路联盟(International Union Of Railways)统计,截至 2014 年 3 月,中国是世界上运营里程最长的国家,为 11028km,约占世界总里程的 50%<sup>[2]</sup>。与公路和航空等交通方式相比,高速铁路具有速度快、运量大、效率高、占地少、能耗低等综合优势,高速铁路在未来世界交通运输体系中将发挥越来越重要的骨干作用。在中国,高速铁路已经当之无愧地成为国家客运交通中的最重要组成部分之一<sup>[3]</sup>。

高速列车作为高速铁路系统的核心装备,针对其运动稳定性、运行平稳性和安全性的动力学性能的力学研究一直是世界高速列车界的重要研究课题<sup>[4]</sup>。中国高速列车力学问题的研究,相比于日本、德国、法国等,起步要晚很多。与此相对照的是中国的高速列车运营里程已经达到 10463km(截止 2013 年 12 月中旬),约占世界总里程的 50%。在最初的引进消化吸收基础上,以及国家高速铁路的大区域、长时间运行过程中,积累了大量的试验成果与工程实践经验,也促进了对高速铁路这样一个车一线一网一气流强耦合的复杂大系统中的关键力学问题的理解和研究的全面提升(沈志云 1996)。这一过程是在过去的 10 年时间里通过国家的技术引进、消化吸收、科技创新的政策得以实现的。如果说过去的 10 年时间在研究方向上还可以借鉴其他国家的研究方向与动态,那现在将需要依据国家高速铁路的大区域、长时间运行这样一个国情来开展前沿研究,也意味着之后的研究必将进入引领阶段。

随着现代列车速度的不断提高,桥梁结构在铁路线路中的大量使用,高速铁路车桥耦合振动问题的研究就变得越来越重要。因此,车桥动力学问题也越来越受到学术界关注,有必要对列车过桥的车桥耦合振动问题进行分析<sup>[5]</sup>。

本文在对国内外车桥动力相互作用问题的发展历史和研究现状进行综述的基础上,运用车辆、桥梁耦合系统的思想,研究了轨道与列车之间的相互作用及对车桥耦合系统的影响。主要研究内容包括:

根据轮轨接触几何关系搜索轮轨的接触点,优化了求解接触点的过程。分别求出车轮踏面及轨道踏面的解析表达式,克服了前人利用 CAD 导入图形进行离散并插值的方法的精度不够的缺点,本文利用 Matlab 编程求解的方法更为简洁更为精确。轮轨的横向耦合受赫兹力变化的影响比较明显,本文在编制程序时,对左右侧赫兹力分别求解,并且根据几何关系分别进行投影,用迭代法来确定轮轨力。这样便使得轮轨力对车桥耦合的影响凸现出来了,主要表现在:

(1) 左右侧赫兹力横向合力对车桥的横向耦合起主要作用, 左侧赫兹力在横向的分量方向向右, 右侧赫兹力在横向的分量方向向左。

(2) 蠕滑力的方向取决于轮对横移速度方向, 蠕滑力的方向与速度方向相反, 起到阻碍轮对横移的作用, 使轮对趋于平衡位置, 进而影响到车桥的耦合。蠕滑力的大小受赫兹力的影响, 而蠕滑力又影响轮对的速度, 继而影响轮对的位移, 而轮对的位移直接影响赫兹力, 使轮对趋于平衡位置, 这就是轮轨力对车桥耦合的影响机制。

## 1.1 研究背景和意义

### 1.1.1 研究背景

从力学的角度看, 高速列车的轮轨关系属于典型的接触力学的研究范畴。然而, 对于中低速列车而言, 弓网关系(受电弓与接触网)和流固耦合关系(列车与气流)不是制约列车最高运行速度、影响列车运行过程中的舒适度、影响列车运动行为的主要因素。然而, 随着列车运行速度的提高, 高速列车的气动阻力、气动噪声和气动激励急剧增大, 弓网耦合振动可能带来更频繁的离线和断流, 影响受流质量。弓网关系、流固耦合关系与轮轨关系一样, 也成为制约高速列车最高运行速度, 影响动力学性能的主要因素。事实上, 从世界最早的新干线列车开始至今, 轮轨关系、弓网关系和流固耦合关系便一直是高速列车的三大基础力学研究问题。<sup>[6]</sup>

### 1.1.2 研究意义

铁路运输属于轮轨接触式运输, 轮轨关系是这种运输模式的关键所在。其包含了车辆系统和轨道系统这两个相互关联的子系统, 它们之间的相互作用直接制约着铁路运输的安全、舒适和效率。随着铁路客运高速化和货运重载化的需求日益高涨和逐步实施, 轮轨间势必出现更加剧烈的动荷载作用和动态效应。

铁路机车车辆沿轨道运行时, 轮轨起着关键性的作用。轮对在沿着钢轨滚动的接触过程中, 不仅承受着较大的载荷, 还起到列车的牵引、制动和导向等重要作用。它们之间的作用行为直接影响着列车的运动稳定性和安全。轮轨滚动接触行为和很多因素有关, 如轮轨接触表面状态、材料、环境、运动行为和轮轨的几何型面等。所以, 轮轨滚动接触是十分复杂的问题。为了确保高速、重载、运输安全, 进一步提高运输质量, 必须深入细致的研究轮对与轨道的相互作用, 而轮轨几何关系的确立则是必须首先要解决的复杂课题。

本文着重陈述车—桥耦合振动过程中所需的轮轨接触几何参数及其计算方法、我国标准轮轨互相配合的一些数据以及轮轨型面对接触几何参数的影响、轮轨刚性滚动接触过程中轮轨接触界面相互滑动量的计算等等。

## 1.2 国内外研究现状

### 1.2.1 国外研究现状<sup>[6][7][8]</sup>

由于高速列车的牵引与制动力都依赖轮轨黏着获得,因此轮轨黏着机理和黏着特性是轮轨关系的首要研究问题。Carter 是轮轨滚动接触理论的创始人,20 世纪 20 年代,他假设钢轨为弹性半空间,利用 Hertz 理论解决了二维弹性体滚动接触问题(Carter 1926, 金学松 2001 等),目前仍可用来分析纵向轮轨力。20 世纪中叶,Johnson (1958)将 Carter 的研究推广到三维情形,研究了圆形接触区的三维滚动接触,并首先将自旋概念引入到滚动接触研究中。1964 年,Vermeulen 将该模型从圆形接触区推广到椭圆接触区。其后,Kalker (1964)对轮轨蠕滑理论做出了重要贡献。他先后提出了圆形和椭圆形接触区滚动接触线性理论,但该理论只适用于小蠕滑和小自旋情况,与实际的轮轨接触情况有较大差别<sup>[9]</sup>。为此 Kalker (1973)一方面进行了滚动接触的简化理论研究,开发了仿真程序,一定程度上满足了工程精度的要求;另一方面,他也在继续进行轮轨弹性滚动接触精确理论的研究,先后开发了 DUVOROL 和 CONTACT 等计算程序,可求解 Hertz 和非 Hertz 接触问题(Kalker 1988)。Kalker 提出的这些理论及程序已广泛应用于车辆系统动力学的建模和快速数值仿真中。1983 年,沈志云改进了 Vermeulen-Mmson 的三次曲线型蠕滑率/力计算模型(Shenetal 1983),在国际上得到广泛应用,后来又在 Kalker 简化理论的基础上提出了一种非稳态快速轮轨力计算模型。此后,西南交通大学、中国铁道科学研究院等单位的研究人员对轮轨滚动接触理论进行了全面深入的研究,取得了一系列成果(陈厚嫻 1997,金学松等 1996)。主要是推广和发展了 Kalker 最新理论,修改了 CONTACT 程序;发展了轮轨滚动接触问题的有限元和边界元方法,可考虑材料的非线性及塑性变形;深入研究了水、油等轮轨间第三介质的影响。由于理论模型中难以考虑诸多的复杂因素,世界各国学者在进行理论研究的同时也在积极开展相关的试验研究(Brickie 1973, Sciammarllaetal 1979)。从 20 世纪 70 年代开始,英国、法国等国的研究人员分别采用圆盘试验装置、圆柱型踏面独立轮对试验装置等不同装置进行了滚动接触试验,并与理论结果进行了对比分析。日本学者 Matsumot 等利用滚动试验台和等比例转向架进行了轮轨滚动接触纵横向蠕滑力试验以及张卫华教授牵头的西南交通大学牵引动力国家实验室也建立了滚动试验台,用原型尺寸试验模型进行了多种试验,有力促进了轮轨滚动接触理论的发展<sup>[1]</sup>。

### 1.2.2 国内研究现状<sup>[11][12]</sup>

在我国,许多科研院校的科研人员对车桥动力响应问题进行了大量的理论分析和实测工作,尤其是在“八五”、“九五”和“十五”计划期间,随着高速铁路的修建提上议事日程,关于车桥耦合振动的研究取得了显著的成就。

早在 50 年代,李国豪教授、陈英俊教授、胡人礼高工、何度心研究员等都曾对车桥振动进行过研究。陈英俊采用改进的 Bleich 方法,分析了列车速度的提高对桥梁动力

系数的影响<sup>[13][14]</sup>。

20 世纪 80 年代初期以来,翟婉明及其研究生对车桥系统振动理论进行了深入系统的研究。他们避开了轮轨衔接条件不确定的困难,考虑机车车辆二系弹簧、蠕滑力、重力刚度与重力角刚度及车辆阻尼的影响,建立列车在桥上任意位置时的车桥时变系统总势能的计算式<sup>[15]</sup>;然后,有势能驻值原理及形成矩阵的“对号入座”法则,导出了车桥时变系统的振动方程;再以机车车辆构架实测蛇行波为激励源,求解车桥时变系统的振动响应。提出了结合梁桥振动计算的翼缘混凝土板弹性剪切力法的分析模型及结合梁截面特性计算式,导出了结合梁桥刚度矩阵、质量矩阵和阻尼矩阵的计算式。

铁道部科学研究院程庆国院士、潘家英研究员于 20 世纪 80 年代初开始进行车桥耦合振动进行了系统的研究。他们考虑轨道不平顺的影响,轮轨间横向力采用简化的轮轨接触理论,分别建立车辆体系、转向架、轮对的运动方程组及桥梁振动方程组,用假定的轮轨间位移关系将这两组振动方程联系起来求解,以计算车桥空间振动。1998 年,潘家英指导的博士生按材料非线性原理编制出一套避开传统迭代过程的能自动确定加载步长的梁杆组合结构有限元分析软件<sup>[16]</sup>。

与此同时,张级研究员带领课题组人员结合三大干线的提速试验进行了大量的实桥振动测试工作,并对提速过程中出现的数起列车脱轨事件的原因以及上承式板梁产生的横向摆振的现象进行了剖析。他们还与西南交通大学合作对既有桥梁提高行车速度后桥梁的变化、车辆过桥时走行性以及应采取的对策进行了理论和实测研究分析。

西南交通大学从 80 年代中期开始车桥振动研究工作,其中以强士中<sup>[17]</sup>教授及其研究生所做的工作为代表,1987-1998 年,赵怀耘<sup>[18]</sup>在其硕士、博士论文中详细研究了钢桁架梁桥的车桥空间耦合振动问题,他还就高速铁路线上简支梁桥车桥振动问题做了大量的研究。葛玉梅、袁向荣等根据随机振动理论计算了跨度为 64m 的铁路双线钢桁梁车桥耦合空间振动问题。李乔教授指导的博士生对高速铁路曲线梁桥的车桥振动进行了深入的研究,研究了曲线半径、曲线超高等因素对车桥动力响应的影响,对高速铁路中小跨度曲线桥梁的刚度限值提出了建议。1982 年以来,北京交通大学的夏禾<sup>[19]</sup>教授和陈英俊教授带领的课题组对车桥系统的动力相互作用及其相关问题做了一系列的研究,将车辆简化为一系悬挂系统模型,分别建立了车辆横向与竖向振动分析模型,研究了车—桥—墩体系的动力相互作用问题。

### 1.2.3 轮轨关系相关理论的最新进展

#### 1.2.3.1 轮轨关系模型<sup>[23]</sup>

当前,轮轨关系的处理方法归纳起来主要有以下几种:

(1) 根据实测轨道不平顺和轮对蛇行运动规律假定轮对和轨道之间的相对位移关系。其主要特征参数来自实际数据,因而可以反映轮轨关系的主要特征,是一种常用方法;

(2) 通过简化车轮为锥形踏面, 由轮轨相互位置关系确定轮轨间的相互作用力。利用假定的锥形踏面来确定车轮的滚动圆半径、轮对的侧滚角和左右接触角, 并由此定义重力刚度和重力角刚度。若假定轮对自由横摆和摇头自由度, 就可以在车桥系统相对位移已知的前提下, 利用轮对的重力刚度和重力角刚度来求得轮轨间的相对作用力;

(3) 建立适用于任意轮轨形状的轮轨关系研究方法, 采用样条插值函数来逼近模拟轮对和钢轨的外形特征。常用平面搜索逼近的方法和迹线法来确定轮轨接触点, 然后利用轮轨滚动接触理论, 考虑轮轨间的蠕滑作用, 建立比较详细的轮轨相互作用模型;

(4) 可以用解析的方法, 建立轮轨之间的方程式, 并在特定的简化条件下, 求出某些在工程上具有实用的解析解。此种方法可以用来研究曲线轨道;

(5) 绕过轮滚相互作用, 直接研究轨道和转向架之间的关系, 将实测转向架波作为车桥系统的输入。

### 1.2.3.2 轮轨力模型

在车桥耦合动力学分析中, 用于轮轨力分析的滚动接触蠕滑理论大多数是基于 Hertz 接触理论的<sup>[24]</sup>。目前国际上关于轮轨蠕滑率/力的计算模型, 得到广泛应用的, 归纳起来主要有以下几种, 主要是 Carter 的二维滚动接触的理论模型、Vermeulen-Johnson 无自旋三维滚动接触理论模型、Kalker 线性理论、沈志云-Hedrick-Elkins 小自旋三维滚动接触理论及其他相应的数值方法。目前还有基于有限元理论或者边界元理论发展起来的轮轨三维弹性或弹塑性滚动接触理论及其相应的数值方法, 但这方面的理论还不够成熟。

### 1.2.3.3 数值计算方法与轨道不平顺的数值模拟

常采用的数值积分方法有 Newmark- $\beta$  法, Wilson- $\theta$  法、Runge-Kutta 法、Park 法、Gill 法, 以及基于上述方法的一些改进算法等<sup>[38]</sup>。

轨道不平顺中, 随机不平顺是主要的激励源, 对于随机不平顺的数值模拟, 一般可以采用以轨道不平顺功率谱为依据, 进行时域与频域的转换, 得到轨道不平顺的时间函数。常用的方法有三角级数法、周期图法、白噪声滤波法、二次滤波法、AR 模型法、ARMA 模型法、Blackman-Tukey 法等等。

## 1.3 论文创新点

本文以高速铁路车桥耦合动力系统为研究对象, 以车辆动力学、桥梁动力学、有限元建模技术等为基础, 以轮轨几何关系、轮轨间作用力为联系纽带, 将机车车辆、桥梁作为一个大系统, 应用计算机数值仿真方法来研究高速行车条件下车辆及桥梁的动力特性及相关影响因素之间的内在联系。本论文的主要研究内容如下:

(1) 鉴于轮轨接触关系在高速铁路车桥耦合课题中的重要性, 本文详细的论述了

轮轨接触几何参数及其求解方法、接触状态；轮轨接触点的求解方法和过程，包括具有特殊几何型面（锥形、单一圆弧型面）的解析解的推导、任意几何型面的空间搜索迭代逼近法和迹线法的过程及程序流程说明；轮轨接触几何参数的一些影响因素等等。

（2）基于弹性力学理论，详细地给出并推导了轮轨法向力及其在车桥耦合系统中的应用表达式；给出了用于计算轮轨切向蠕滑力的 **Kalker** 理论，并且给出了轮轨几何参数与轮轨接触力的特定关系。

（3）基于蠕滑理论和迹线法原理，运用 **Matlab** 自主编辑轮轨力求解程序。

（4）本文的章节安排如下：

第一章：给出本课题的研究的相关背景及最新研究成果。

第二章：给出详细的轮轨接触几何关系的内容；给出轮轨接触力的推导过程及其应用于车桥耦合系统中的结论；

第三章：简单介绍 **Matlab**；并基于第二章的理论基础运用 **Matlab** 编辑程序求解轮轨几何参数和蠕滑力等；并运用工程实验的数据结果来验证程序计算数据的正确性，并对程序计算结果进行相关的分析。

第四章：结论与展望

## 第 2 章 轮轨滚动接触及蛇行运动相关理论

由于车速的提高和轴重的加大，列车和轨道结构材料服役环境恶化，各种隐患问题日趋严重。轮对和钢轨是铁路运输工具的关键零部件，轮轨滚动接触过程中的作用行为直接影响到列车运动的稳定性、乘客的舒适度、运营成本和生活环境。所以世界铁路发达国家特别注重轮轨关系问题的研究。轮对沿轨道滚动时不仅相对钢轨作纵、横向滑动，而且相对钢轨作自旋运动，滚动接触力学行为较为复杂。轮对的蛇行运动与轮轨滚动接触有着密不可分的关系，在轮轨接触点处，车轮相对于钢轨发生横移滑动时，轮对的蛇行运动也就发生了。

### 2.1 轮对的基本构造

轮对是机车车辆上与钢轨相接触的部分，主要由车轮和车轴组成。轮对的作用是保证机车车辆在钢轨上的运行和转向，承受来自机车车辆的全部静、动载荷，把它传递给钢轨，并将因线路不平顺产生的载荷传递给机车车辆各零部件，此外，机车车辆的驱动和制动也是通过轮对起作用的。

#### 2.1.1 轮对的分类

轮对按车轴适用的轴承类型可分为滚动轴承轮对和滑动轴承轮对。中国铁路的客车已全部采用滚动轴承轮对，采用滚动轴承轮对的货车也日益增多。按照最大允许轴重的不同，货车滑动轴承轮对分为 B、C、D、E 四种型别，各型轮对的车轴和车轮的各部尺寸除车轮直径外均不相同；客、货车滚动轴承轮对也有 RC、RD 和 RE 三种型别，而且同型轮对中还因装用滚动轴承的型号不同而有不同的轴颈长度，用下标号区别，如 RC4、RD33 等。

轮对按左右车轮是否可以相互独立地绕车轴旋转分为自由轮对传统轮对、独立轮对和耦合轮对。自由轮对的两个车轮固定压装在同一根车轴上，其两个车轮的旋转速度相同，摇头角也是相同的，具有构造简单、运用可靠的特点。本文分析的单轮对指的就是自由轮对，其主要优点是可以利用左右车轮滚动半径的变化和轮轨蠕滑力的作用，使轮对在直线上通过蛇行运动的形式自动调节其对中性。独立轮对是将左右车轮解耦，使左右车轮可以相互各自独立地绕车轴旋转的轮对。左右车轮完全独立转动，不产生蛇行运动，虽然临界速度提高了，但蛇行自动对中性能亦同时消失了。耦合轮对是将轮对的左右车轮既不完全固结在一起，也不完全独立，而是通过耦合器达到适当程度的联系，从而发挥自由轮对和独立轮对的优点，克服或减轻二者的不足，达到较理想的动力学性能要求。

## 2.1.2 车轮踏面

我国车辆上使用的车轮按结构可分为整体轮和轮箍轮两大类，如图一所示。车轮直径以滚动圆（与车轮内侧面平行并相距的平面与车轮踏面相交所成的圆处）的直径为其公称值。我国铁路目前使用的货车轮径为 840mm，客车轮径为 915mm，柴油机车轮径为 1050mm，电力机车轮径为 1250mm。

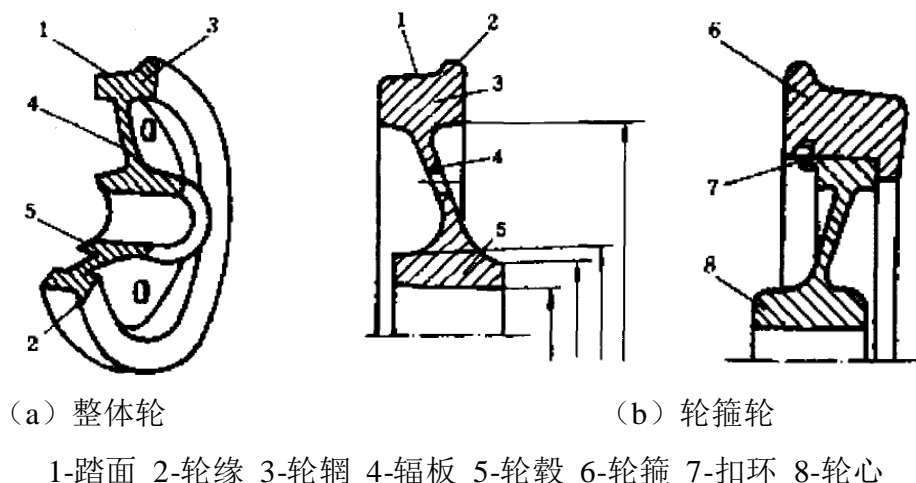


图 2.1 机车车轮示意图

车轮踏面有锥形踏面和磨耗型踏面两种形式。锥形踏面的母线是直线，由 1:20 和 1:10 两段斜坡组成。其中 1:20 的一段是经常和钢轨顶面接触的部分，1:10 的一段只在小半径曲线上，轨距加宽很大时才与钢轨顶面接触。磨耗型踏面是曲线型踏面，即将踏面制成与钢轨顶面基本吻合的曲线形状。这种踏面具有轮轨磨耗小、接触应力低以及改善机车车辆转向性能等优点。

## 2.2 轮轨滚动接触基本理论

轮轨滚动接触基本理论主要包括反映轮轨滚动接触力学行为的经典轮轨蠕滑理论和近代发展中轮轨三维弹塑性滚动接触理论。反映轮轨滚动接触行为的经典理论模型有 5 个。第一是由 Carter 于 1926 年发表的轮轨一维滚动接触模型，该模型刻画了轮轨滚动方向的轮轨蠕滑率和蠕滑力之间的非线性关系定律（Carter 1926）。该理论模型适合轮轨接触表面严重磨损后，轮轨接触斑在横向显得细长的情况。该模型在轮轨关系研究方面仍然得到普遍应用。Carter 模型的重要理论贡献是它采用了这样的假设，即轮轨接触斑滑动从接触斑后沿开始，随着蠕滑率的增大后向接触斑前沿扩展，这个假设后来验证是正确的。后续的赫兹型轮轨蠕滑理论基本采用了该模型的研究思路。Vermeulen-Mmson 和 Johnson 根据 Carter 研究思想，发展了轮轨滚动接触过程中纵横向轮轨蠕滑率/力模型，该模型是二维非线性的，并忽略了轮轨自旋蠕滑率的影响（Vermeulent 1964）。轮对的滚动角速度和轮轨接触角引起的轮轨界面之间的相对转动，在轮轨蠕滑理论中定义为轮轨自旋蠕滑率，自旋蠕滑率对轮轨纵横向蠕滑力的大小和分布有很大的影响（Kalker



1990)。1967年, Kalker 在他的博士论文中借助于级数理论发展了考虑自旋效应的线性轮轨蠕滑理论模型, 该模型建立了轮轨纵横向蠕滑率/力、轮轨蠕滑力偶/自旋线性关系定律 (Kalker 1967)。由于在推导该理论模型时, Kalker 还不能引入 Coulomb 摩擦限制定律, 所以, Kalker 的线性蠕滑理论反映了轮轨蠕滑力将随轮轨接触斑滑动量增长将无限制的增长, 这不符合 Coulomb 摩擦定律, 应用时应该注意它只适合小蠕滑情形 (Kalker 1967, 金学松 2006)。借助 Vermeulen-Johnson 的二维非线性理论模型和 Kalker 的三维线性理论模型, 沈志云等发展了三维考虑小自旋影响的非线性轮轨蠕滑率模型 (Shen et al. 1983)。特别强调该模型适合轮轨滚动接触小自旋情形, 即轮轨接触角  $\delta_L$ ,  $R$  较小的情形, 因为接触角  $\delta_L$ ,  $R$  大, 就意味着轮轨发生了车轮轮缘与钢轨轨距角接触, 接触斑的公法线和轮对轴线或轮轨滚动角速度方向的夹角远远偏离  $90^\circ$ ; 所以, 轮对角速度在接触斑公法线上投影分量较大, 轮轨接触斑处切面相对转动量较大, 即自旋蠕滑率较大。第 5 个轮轨蠕滑理论模型叫做“简化理论”模型, 该模型的发展借助于 Kalker 的线性蠕滑理论模型, 并假设法向力的分布与接触斑处轮轨界面法向间隙变化相协调, 压力的分布函数不再是椭球分布形式, 而是二次抛物面分布形式, 这与前述的 3 个经典赫兹型蠕滑率/力模型建立过程中所考虑的轮轨法向力分布是不同的。同时假设接触斑上的 3 个面力分量和接触面的位移差 3 个分量成线性关系, 忽略相互之间耦合影响 (Kalker 1982)。利用该模型不仅能够计算轮轨蠕滑率/力之间的关系, 还能计算轮轨椭圆接触斑上滑动量的分布和切向力的分布。但计算速度低于前面 4 个理论模型。值得注意的是上述 5 种理论模型在考虑法向力的影响时借助于 Hertz 接触理论假设, 故它们是 Hertz 型的计算模型。另外, 这些模型中没有考虑速度的影响、运动和力学行为的瞬态过程。所以, 应用范围受到了限制, 也不能用来解决较复杂的轮轨接触问题。

近代轮轨三维弹塑性滚动接触理论和相应的数值方法发展迅速。20 世纪 70 年代, Kalker 根据变分原理, 利用了变分不等式表达了具有摩擦的弹性体滚动接触问题, 通过求解满足 2 个弹性接触物体最小余能原理的接触斑上力密度分量来确定滚动接触问题的解。相应数值程序叫做“CANTACT”, 该程序目前已经被世界铁路广泛用于轮轨滚动接触行为分析 (Kalker 1990 金学松)。利用该程序能够得到上述 5 个经典理论得不到的关于轮轨行为的相关信息 (金学松), 如磨损后的轮轨接触斑真实形状、黏滑区分布、切向力和法向力的大小和分布、滑动量的大小和分布、摩擦功的分布、轮轨体内应力场分布等。但是, 相对经典蠕滑力模型它的计算速度较慢。该理论模型的建立不依赖于 Hertz 接触理论的假设条件, 所以, 叫做非 Hertz 滚动接触理论。且数值实现过程基于了弹性力学半空间理论, 轮轨法向力的数值结果要大于目前有限元模型的结果, 这是因为将轮轨看作弹性半空间物体, 实际夸大了轮轨的接触刚度。该模型不能考虑滚动速度影响和动态过程, 也忽略了轮轨系统结构变形的影响、轮轨表面状态 (粗糙度、第三介质)、环境状态 (温度、湿度、气流) 的影响。

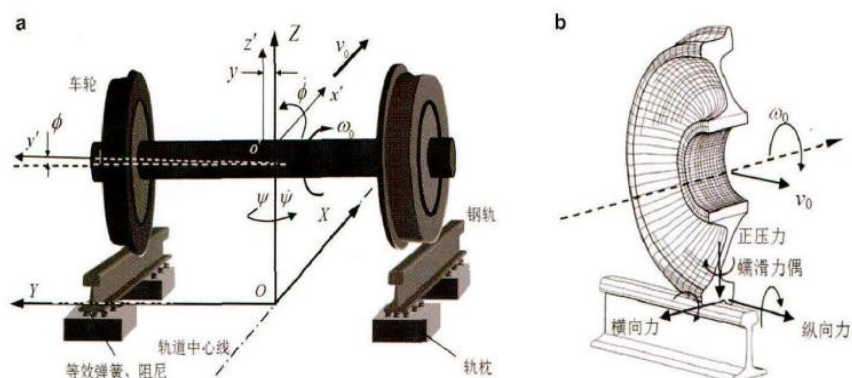
金学松等将上述其中 5 个计算模型的轮轨滚动数值分析结果进行了详细分析比较

(Carter 模型除外), 轮对相对轨道运动状态具有一般性, 数值结果显示, 除了 Kalker 的线性理论模型的结果差异较大外, 其余几个模型的结果较接近(金学松 2006, 金学松等 1988)。考虑车辆轨道耦合动力学快速仿真的需求, 尤其是高速列车车辆轨道耦合动力学仿真, 沈志云等的轮轨蠕滑率/力模型不仅考虑因素全面, 计算效率也高, 因为它是解析表达式, 即使在轮缘接触情况下, 即在较大接触角或较大自旋情况下, 和 CONTACT 的结果相比差异不大。后来金学松等利用有限元模型进一步推进 Kalker 的“CONTACT”的模型(Jin.et.al. 2001, 金学松 2006, 张书瑞等 2013), 推进的模型能够考虑到轮轨接触点外边界条件对滚动接触行为的影响。

借助于参变量变分原理、二次规划法和有限元方法, 钟万勰和张洪武发展的计算方法能够用来分析轮轨弹塑性滚动接触问题(钟万勰等 1997)。参变量变分原理较经典的变分原理应用更加广泛, 它可以避免材料塑性理论中所用到的 Dmcker 假设, 能有效处理弹塑性材料流动不可逆的问题和滑动情况下摩擦接触问题。目前该方法成功用于分析车轮在瞬态制动和驱动时轮轨弹塑性接触行为(张军等 2000)。

### 2.2.1 轮轨滚动接触情形描述

列车的牵引、制动和运行都要靠轮轨的滚动接触作用得以实现。轮轨之间的作用品质直接影响到列车的运行品质和安全以及铁路运输的成本。而在轮轨之间的 100 多平方毫米接触斑上, 将要承受和传递数吨甚至数十吨载荷。



(a) 单轮对沿轨道运动; (b) 轮轨之间作用力

图 2.2 单轮对沿轨道运动的滚动接触情形

图 2-2 所示单轮对沿轨道运动的滚动接触情形。图中  $OXYZ$  坐标系是轨道坐标系,  $X$  轴指向车轮滚动的方向,  $Y$  轴为轨道的横向,  $Z$  轴为铅垂向上,  $o$ 、 $x$ 、 $y$ 、 $z$  为原点与轮对中心重合且  $y'$  轴与轮对轴线重合轮对坐标系,  $y$  是轮对中心相对轨道中心线的横移量,  $\phi$  和  $\dot{\phi}$  必为轮对绕  $x'$  轴转动的角度和角速度, 或叫轮对测滚角位移和角速度,  $\psi$  和  $\dot{\psi}$  轮对绕  $z$  轴转动的角度和角速度, 或叫做轮对摇头角,  $v_0$  是轮对的滚动速度。轮对滚动过程中, 不仅存在相对钢轨有横向滑动和纵向滑动, 而且在轮轨接触界面之间存在相对转动(如图 2-2 所示的  $\omega_n$ )这种转动主要是由车轮滚动的角速度  $\omega$ 、轮轨接触面法向

(如图 2-2 所示的  $n$ ) 和轮对滚动轴线相互处于非垂直状态引起的。

由于考虑到轮对应具有的较好的过曲线性能和在直线轨道运行时自动恢复对中性能,所以在车轮踏面上(滚动接触工作表面)设计成外侧小内侧大的锥形踏面。如果轮对发生横移时,左右车轮滚动的半径不同,由此而导致左右车轮相对钢轨沿轨道纵向具有方向相反的微小滑动;如果不考虑轨道结构的柔性变形,则轮对在沿钢轨滚动过程中轮轨接触点处界面的滑动量包含了车轮瞬时滚动半径  $r$ 、 $\phi$ 、 $\dot{\phi}$ 、 $\psi$ 、 $\dot{\psi}$ 、 $\omega_0$ 、 $v_0$  以及轮轨接触角  $\delta_i$ ,即可用包含这些量的显式数学式来表示轮轨接触斑处纵横向滑动量和相对转动滑动量。事实上,轮对和轨道结构在工作过程中要产生很大变形,同时钢轨要发生较大的横移、下沉和翻转,直接影响轮轨接触位置和轮轨接触斑粘滑效果。当轮对发生横向运动和摇头运动时,尤其是车辆通过小半径曲线、轨缝和道岔时,轮轨之间将要发生冲击振动。

### 2.2.2 轮轨接触几何参数及相关结论的概述

铁道车辆沿钢轨运行时,其运行性能与轮轨接触几何关系和轮轨之间的相互作用有着密切的关系。世界各国铁路都根据本国实践经验,确定本国铁路或本公司铁路的钢轨轨头和车轮踏面形状。过去对机车车辆系统进行动力学仿真时,相应地提出了“等效踏面锥度”、“等效轮轨接触角”等概念,对非线性的轮轨关系采用线性化处理。事实上,即使是锥形踏面在横移量较大时,车轮轮缘常常是贴靠钢轨的,轮轨接触几何关系明显是非线性的。现在越来越多的机车车辆采用磨耗型踏面来提高轮对的运行性能和使用寿命。

本文采用目前国内机车中大量使用的 JM3 型车轮踏面(磨耗型踏面)与 60Km/m 钢轨配合来对轮对纵向动力学性能进行研究。

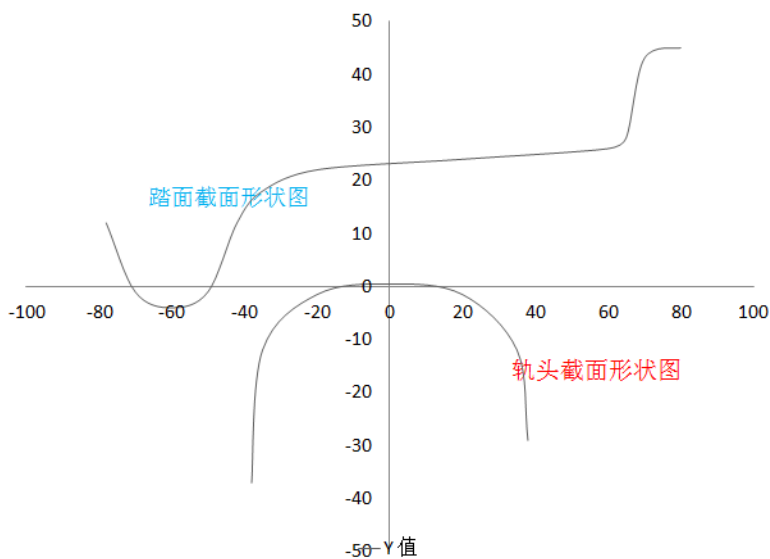


图 2.3 JM3 型车轮踏面与 60Km/m 钢轨配合情况

由于车辆的行车稳定性与和轮轨接触关系相关。轮轨接触关系与钢轨轨头、车轮踏

面的形状以及接触状态有关。车轮和钢轨之间的接触状态（见图 3.1）有一点接触（车轮踏面与钢轨顶面相接触）和二点接触（车轮踏面和轮缘同时与钢轨顶面和侧面接触）。当车辆轮对相对于轨道的横移量较小时，一般就会出现“一点接触”；当车辆轮对相对于轨道的横移量和摇头角超限值时，一般就会出现“两点接触”。



图 2.4 轮轨一点和两点接触状态

轮轨接触几何参数（wheel-rail contact geometry parameters）由轮对和钢轨接触几何关系所确定的轮对和钢轨上的一系列几何量。主要参数简述如下，具体含义参看图 3.2：

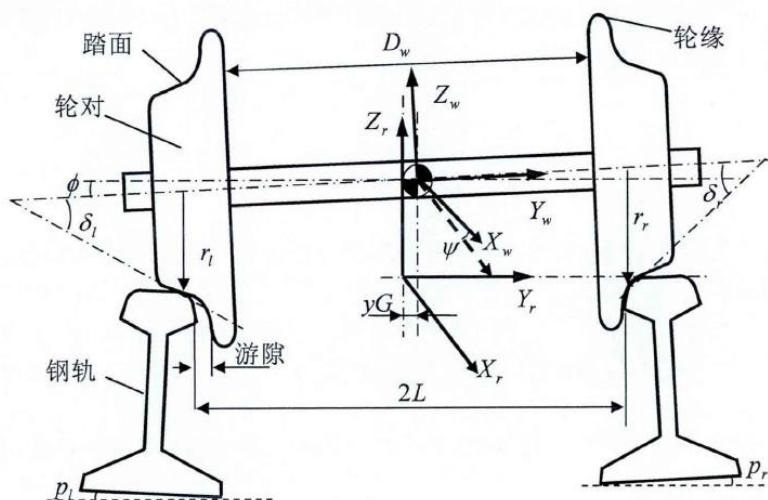


图 2.5 轮轨接触几何参数

轮轨接触角：接触点或接触斑处的公切线和车轴中心线之间的角度（图3.2中的 $\delta_L$ 和 $\delta_R$ ），在车辆运行过程中它是一个不断变化的量。

车轮踏面曲率半径：接触点或接触斑处车轮踏面横断面外形的曲率半径（图3.2中的 $\rho_{WL}$ 和 $\rho_{WR}$ ）。对于锥形踏面车轮，车轮踏面曲率半径为无穷大。

轨头截面曲率半径：轮轨接触点处轨头横断面外形的曲率半径（图3.2中的 $\rho_{RL}$ 和 $\rho_{RR}$ ）。

轮对侧滚角：如果轮对偏离轨道中心线位置而相对于导轨横向移动，由于车轮踏面具有锥度，该轮的左，右轮滚动接触会有区别。相对于车轴中心到其原始水平位置将产生一个角度，这个角度被定义为车轮滚动角（图3.2中的 $\phi_w$ ）。

轮对中心上下位移 $z_w$ ：轮对中心上下位移的改变会引起车辆前后转向架和车体的垂向位移。

轮对横移量：由于车轮踏面有锥度，轮对沿轨道向前运动时总是会伴随轮对相对轨道中心线横向移动，此移动量即为轮对横移量（图3.2中的 $y_w$ ）。

轮对摇头角：由于车轮踏面锥度的存在，轮对沿轨道向前运动时除了伴随轮对相对铁轨中心线横移之外，同时还绕其质量中心的铅垂轴而转动，转动的角度即为轮对摇头角。

轮缘内侧距：轮对两轮缘的内侧面间的距离即为轮缘内侧距，对于标准轨距，轮缘内侧距为  $(1\ 353 \pm 2)$  mm。

轨距：两根钢轨头部内侧间与轨道中心线相垂直的水平距离，并规定在轨顶下16mm处测量。世界上大部分国家均采用1435mm的标准轨距，即标准轨。大于1435mm的称为宽轨，国外有1676mm、1524mm的轨距。小于1435mm的称为窄轨，如1067mm、1000mm等。

轨底坡：由于车轮踏面是有一定锥度的，且车轮均是外侧直径小内侧直径大，为了使车轮和钢轨合理配合并具有好的轮轨接触几何关系，轨道要设置轨底坡（一般轨底坡定为1:40），使轨头内倾，以适应车轮踏面的形状。

目前，在工程当中求解任意轮廓外形的轮轨接触几何参数的方法主要有左右轮轨等间距迭代法和迹线法，尤以迹线法居多。左右轮轨等间距迭代法假设轮对和钢轨均为刚体，轮轨接触几何关系可以考虑成平面和空间两种情况。如果假设轮轨接触几何关系只是轮对横移量的函数，则是平面问题。如果综合考虑轮对横移、摇头对轮轨接触几何关系的影响，则为空间问题。左右轮轨等间距迭代法的基本思路是过轮对轴线做一铅垂面切割车轮，车轮外廓与切割面的交线称为车轮主轮廓线。作一垂直轨道中心线的平面切割钢轨，钢轨轮廓与切割面的交线为钢轨轮廓线。用实测或计算可以得到车轮和钢轨主轮廓线上各点的坐标值。分别过主轮廓线上各点可以确定四条样条函数来拟合左右车轮踏面和轨头的轮廓线。只要把代表轮轨外形的离散坐标点安排得足够密集，样条函数中所给出的边界条件就接近实际情况，由样条函数表示的轮轨外形就越精确。已知轮轨的拟合曲线后，就可以用样条插值来得到轮轨上任意点的坐标。

当考虑到平面问题时，先人为把轮对向上平移足够距离保证轮轨不相互嵌入，把求解轮轨接触点问题转化为求轮轨之间垂向位移最小而且两者垂向位移相等的问题。如果找到了两点的位置，则轮对向下平移这个距离，轮轨就发生接触，所找到的两点就是左右轮轨的接触点。当轮对发生横移后，循环计算左右轮轨主轮廓线各坐标点的垂向距离，得到最小垂向距离。这一过程称为扫描过程。当左右轮轨最小垂向距离相等时，说明这几个点正好是轮轨的几何接触点。如果左右轮轨最小垂向距离不相等，则通过迭代轮对侧滚角，使得最终两边垂向距离相等，得到轮轨接触点位置。

如果考虑空间几何接触问题，车轮踏面接触点可能不处在主轮廓线上。但是由于车轮踏面是个回转面，可以假设在纵向方向上依次有多个铅垂面切割车轮时，得到一系列轮廓线，通过几何关系可以很容易求得这些轮廓线上各点的坐标。求解轮轨接触点时，通过扫描各条轮廓线上的点，可以得到左右轮轨的最小垂向距离，并通过迭代轮对侧滚角直到左右轮轨最小垂向距离相等为止。



迹线法是进行轮轨空间接触几何计算的常用方法，其数值过程也是基于试凑逼近法的原理。基本思路是轮轨空间接触点只可能是一条空间曲线，这条曲线称为迹线，所以通过轮轨几何约束关系先找出这条迹线来代替整个踏面区域，从而利用迹线在一维区域空间曲线内的扫描来代替在二维区域曲面内的扫描。由于在一维区域扫描，计算速度比试凑逼近法快。

本论文考虑的是轮轨的空间接触，通过迹线法实现了踏面和轨的空间几何接触问题，具体算法程序框图见3.12。但是采用传统车辆动力学方法求解轮轨接触几何关系时，是基于两点基本假设认为轮、轨均为刚体，车轮表面任意点均不能嵌入钢轨内部认为同一轮对的左轮与左轨、右轮与右轨同时接触，即轮轨不脱离。这样，再用试凑逼近法和迹线法扫描左右轮轨，从而得到轮轨接触点及其它轮轨接触参数。

### 2.2.3 轮对运动方程

轮对是铁道车辆的核心部件之一，研究单轮对纵向振动行为是揭示机车车辆的颤振问题的基本要求，本节将详细推导完整的轮对运动方程，并通过数值分析方法对单轮对纵向动力学模型进行仿真模型。本节的推导方法主要引自文献[34]弹性定位单轮对在直线轨道的物理模型如图所示：

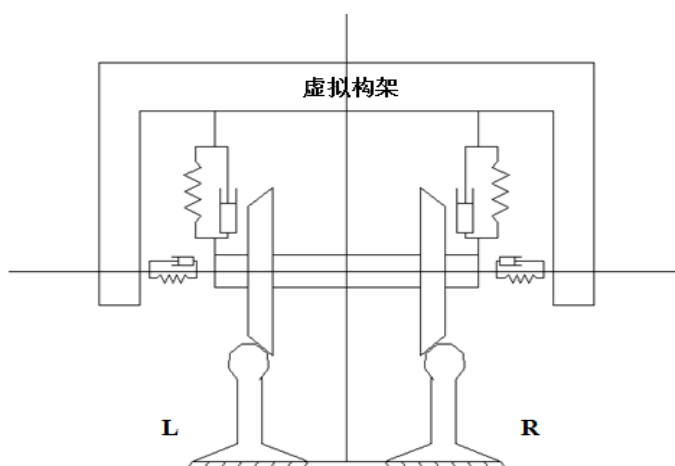


图 2.6 单轮对模型

系统具有六个自由度，包括沿轨道方向的运动  $x$ 、横移  $y$ 、垂向运动  $z$ 、侧滚  $\phi$ 、绕车轴旋转扰动  $\beta$  和轮对的摇头  $\psi$ 。传统的车辆动力学仿真中，总是假定前进速度为恒定值，往往不考虑轮对纵向方向的自由度。但是实际轮对的前进速度不是恒定值，应该是一个名义滚动速度上叠加一个沿轨道方向速度的随机振动分量。本文建立的模型重点在于研究轮对纵向振动。

### 2.2.4 轮轨蠕滑力计算模型

轮轨间由于蠕滑率的存在而产生蠕滑力，蠕滑力的计算有多种模型，如早期的Carter

理论、后来的Johnson-vermeulen理论、Kalker理论、线性理论、Kalker简化理论、Kalker精确理论和沈氏理论等等。

### 2.2.4.1 蠕滑率的计算

一般来说，蠕滑力总是在轮轨接触平面内来定义（在轮轨接触点坐标上定义）。然而，当坐标变换后，蠕滑力和蠕滑力矩则表示为沿平衡坐标轴的分量，即要按式2-5和式2-6进行坐标变换。在平衡坐标系中蠕滑力和蠕滑力矩为：

$$\text{左轮:} \begin{cases} F_{CLx} = F'_{CLx} \cos \psi - F'_{CLy} \cos(\delta_L + \phi) \sin \psi \\ F_{CLy} = F'_{CLx} \sin \psi - F'_{CLy} \cos(\delta_L + \phi) \cos \psi \\ F_{CLz} = F'_{CLy} \sin(\delta_L + \phi) \\ M_{Lx} = M'_{Lz} \sin(\delta_L + \phi) \sin \psi \\ M_{Ly} = -M'_{Lz} \sin(\delta_L + \phi) \cos \psi \\ M_{Lz} = M'_{Lz} \cos(\delta_L + \phi) \end{cases} \quad (2.1a)$$

$$\text{右轮:} \begin{cases} F_{CLx} = F'_{CLx} \cos \psi - F'_{CLy} \cos(\delta_R - \phi) \sin \psi \\ F_{CLy} = F'_{CLx} \sin \psi + F'_{CLy} \cos(\delta_R - \phi) \cos \psi \\ F_{CLz} = -F'_{CLy} \sin(\delta_R - \phi) \\ M_{Rx} = -M'_{Rz} \sin(\delta_R - \phi) \sin \psi \\ M_{Ly} = M'_{Rz} \sin(\delta_R - \phi) \cos \psi \\ M_{Lz} = M'_{Rz} \cos(\delta_R - \phi) \end{cases} \quad (2.1b)$$

$F_{Cxi}$ ,  $F_{Cxi}$ —表示右侧和左侧接触点坐标系内蠕滑力的第*i*个分量,  $i=x, y, z$ ;

$M_{Li}$ ,  $M_{Ri}$ —表示右侧和左侧接触点坐标系内蠕滑力矩的第*i*个分量,  $i=x, y, z$ ;

上述方程中，蠕滑力和蠕滑力矩为蠕滑率的函数。每一轮对均发生横向纵向和自旋蠕滑率，其定义为轮轨之间相对的线位移和角位移。在接触点坐标、系内定义蠕滑率，以轮轨接触椭圆中心*C*为原点，建立*C-e<sub>1</sub>e<sub>2</sub>e<sub>3</sub>* 坐标系，如图所示。*Ce<sub>1</sub>* 轴为车轮的前进速度方向，与*Cx* 轴重合 *Ce<sub>2</sub>* 轴在轮轨接触平面内，与*Cy* 轴夹角在左接触点为占  $\delta + \phi$ ，在右接触点为  $\delta - \phi$ ；*Ce<sub>3</sub>* 轴为接触面法向。设在车轮上的接触椭圆沿 *Ce<sub>1</sub>* 轴、*Ce<sub>2</sub>* 轴和 *Ce<sub>3</sub>* 轴的刚体速度分别为  $V_{w1}$ 、 $V_{w2}$ ，和  $\Omega \omega_3$ ，相应地钢轨上接触椭圆地刚体速度分别为  $V_{r1}$ 、 $V_{r2}$ ，和  $\Omega r_3$ 。于是，纵向（ $\xi_x$ ）、横向（ $\xi_y$ ）和自旋（ $\xi_{sp}$ ）蠕滑率由下列各式给出：

$$\begin{cases} \xi_x = \frac{2(V_{r1} - V_{w1})}{V_{r1} + V_{w1}} \\ \xi_y = \frac{2(V_{r2} - V_{w2})}{V_{r1} + V_{w2}} \\ \xi_{sp} = \frac{2(\Omega_{w3} - \Omega_{r3})}{V_{r1} + V_{w1}} \end{cases} \quad (2.2)$$

上式中  $\frac{2}{V_{r1} + V_{w1}}$  指的是轮对沿钢轨运行的平均速度。设  $\vec{R}_L$  和  $\vec{R}_R$  为左右接触点在平衡坐标系上的位置矢量，而接触点坐标系和平衡坐标系之间的转换关系为：

$$\begin{Bmatrix} i_{Lc} \\ j_{Lc} \\ k_{Lc} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi_w & \sin\psi_w & 0 \\ -\cos(\delta_L + \phi_w) \sin\psi_w & \cos(\delta_L + \phi_w) \cos\psi_w & \sin(\delta_L + \phi_w) \\ \sin(\delta_L + \phi_w) \sin\psi_w & -\sin(\delta_L + \phi_w) \cos\psi_w & \cos(\delta_L + \phi_w) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\begin{Bmatrix} i_{Rc} \\ j_{Rc} \\ k_{Rc} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi_w & \sin\psi_w & 0 \\ -\cos(\delta_R - \phi_w) \sin\psi_w & \cos(\delta_R - \phi_w) \cos\psi_w & -\sin(\delta_R - \phi_w) \\ -\sin(\delta_R - \phi_w) \sin\psi_w & \sin(\delta_R - \phi_w) \cos\psi_w & \cos(\delta_R - \phi_w) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

则左侧车轮：

$$\begin{aligned} \vec{R}_L = x\vec{i}_1 + y\vec{j}_1 + z\vec{k}_1 + a\vec{j}_3 - r_L\vec{k}_3 = (x - a\cos\phi\sin\psi - r_L\sin\phi\sin\psi)\vec{i}_1 \\ + (y + a\cos\phi\sin\psi + r_L\sin\phi\sin\psi)\vec{j}_1 + (z + a\sin\phi - r_L\cos\phi)\vec{k}_1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

于是

$$\begin{cases} \xi_{xL} = [\vec{R}_L \cdot \vec{i}_{1L} - \dot{x}(r_L/r_0)\cos\psi] / v_a \\ \xi_{yL} = (\vec{R}_L \cdot \vec{j}_{2L}) / v_a \\ \xi_{spL} = (\vec{\omega} \cdot \vec{k}_{3L}) / v_a \end{cases} \quad (2.6)$$

式中，黑圆点（·）代表矢量间的点积，由式（2.3）继而可以得到：

$$\begin{cases} \vec{i}_{1L} = \cos\psi\vec{i}_1 + \sin\psi\vec{j}_1 \\ \vec{j}_{2L} = -\cos(\delta_L + \phi)\sin\psi\vec{j}_1 + \cos(\delta_L + \phi)\cos\psi\vec{j}_1 + \sin(\delta_L + \phi)\vec{k}_1 \\ \vec{k}_{3L} = \sin\delta_L\vec{j}_3 + \cos\delta_L\vec{k}_3 \\ \vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{i}_3 + \left( \frac{\dot{x}}{r_0} + \dot{\beta} + \dot{\psi}\sin\phi \right) \vec{j}_3 + \dot{\psi}\cos\phi\vec{k}_3 \end{cases} \quad (2.7)$$

则右侧车轮：

$$\begin{aligned} \vec{R}_R = x\vec{i}_1 + y\vec{j}_1 + z\vec{k}_1 + a\vec{j}_3 - r_R\vec{k}_3 = (x + a\cos\phi\sin\psi - r_R\sin\phi\sin\psi)\vec{i}_1 \\ + (y - a\cos\phi\cos\psi + r_R\sin\phi\cos\psi)\vec{j}_1 + (z + a\sin\phi - r_R\cos\phi)\vec{k}_1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

于是

$$\begin{cases} \xi_{xR} = [\vec{R}_R \cdot \vec{i}_{1R} - \dot{x}(r_R/r_0)\cos\psi] / v_a \\ \xi_{yR} = (\vec{R}_R \cdot \vec{j}_{2R}) / v_a \\ \xi_{spR} = (\vec{\omega} \cdot \vec{k}_{3R}) / v_a \end{cases} \quad (2.9)$$

式中，黑圆点代表矢量间的点积，由式（2.4）继而可以得到：

$$\begin{cases} \vec{i}_{1R} = \cos\psi\vec{i}_1 + \sin\psi\vec{j}_1 \\ \vec{j}_{2R} = -\cos(\delta_R - \phi)\sin\psi\vec{j}_1 + \cos(\delta_R - \phi)\cos\psi\vec{j}_1 - \sin(\delta_R - \phi)\vec{k}_1 \\ \vec{k}_{3R} = \sin\delta_R\vec{j}_3 + \cos\delta_R\vec{k}_3 \\ \vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{i}_3 + \left( \frac{\dot{x}}{r_0} + \dot{\beta} + \dot{\psi}\sin\phi \right) \vec{j}_3 + \dot{\psi}\cos\phi\vec{k}_3 \end{cases} \quad (2.10)$$



通过代数运算并略去高阶项后，可以推导得出蠕滑率的表达式：

$$\text{左侧车轮: } \begin{cases} \xi_{xL} = (1/v_{aL}) [\dot{x}(1-r_L/r_0) - (a \cos \phi \cos \psi) \dot{\psi}] \cos \psi \\ \xi_{yL} = (1/v_{aL}) [\dot{y} \cos \psi + r_L \cos \phi \cos^2 \psi \dot{\phi} - \dot{x} \sin \psi] \cos(\delta_L + \phi) \\ + (1/v_{aL}) [\dot{z} + a \cos \phi \dot{\phi}] \sin(\delta_L + \phi) \\ \xi_{spL} = (1/v_{aL}) \left[ \dot{\psi} \cos(\delta_L + \phi) - \left( \frac{\dot{x}}{r_0} + \dot{\beta} \right) \sin \delta_L \right] \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\text{左侧车轮: } \begin{cases} \xi_{xR} = (1/v_{aR}) [\dot{x}(1-r_R/r_0) - (a \cos \phi \cos \psi) \dot{\psi}] \cos \psi \\ \xi_{yR} = (1/v_{aR}) [\dot{y} \cos \psi + r_R \cos \phi \cos^2 \psi \dot{\phi} - \dot{x} \sin \psi] \cos(\delta_R - \phi) \\ + (1/v_{aR}) [\dot{z} - a \cos \phi \dot{\phi}] \sin(\delta_R - \phi) \\ \xi_{spR} = (1/v_{aR}) \left[ \dot{\psi} \cos(\delta_R - \phi) - \left( \frac{\dot{x}}{r_0} + \dot{\beta} \right) \sin \delta_R \right] \end{cases} \quad (2.12)$$

对于小侧滚和摇头角情况，左右轮蠕滑率的表达式可以简化成：

$$\text{左侧车轮: } \begin{cases} \xi_{xL} = (1/v_{aL}) [\dot{x}(1-r_L/r_0) - a \dot{\psi}] \\ \xi_{yL} = (1/v_{aL}) [\dot{y} + r_L \dot{\phi} - \dot{x} \psi] \cos(\delta_L + \phi) \\ \xi_{spL} = (1/v_{aL}) \left[ \dot{\psi} \cos(\delta_L + \phi) - \left( \frac{\dot{x}}{r_0} + \dot{\beta} \right) \sin \delta_L \right] \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\text{左侧车轮: } \begin{cases} \xi_{xR} = (1/v_{aR}) [\dot{x}(1-r_R/r_0) - a \dot{\psi}] \\ \xi_{yR} = (1/v_{aR}) [\dot{y} + r_R \dot{\phi} - \dot{x} \psi] \cos(\delta_R - \phi) \\ \xi_{spR} = (1/v_{aR}) \left[ \dot{\psi} \cos(\delta_R - \phi) - \left( \frac{\dot{x}}{r_0} + \dot{\beta} \right) \sin \delta_R \right] \end{cases} \quad (2.14)$$

式中  $v_{ai}$  表示左右轮名义前进速度， $i = L, R$ ，故：

$$v_{ai} = (\dot{x} + (r_i/r_0) \dot{x} \cos \psi) / 2 \quad (2.15)$$

#### 2.2.4.2 线性 Kalker 理论实现

根据线性蠕滑理论<sup>[36]</sup>，轮轨之间的蠕滑力在线性范围内表达为：

$$\begin{cases} F_x = -f_{11} \xi_x \\ F_y = -f_{22} \xi_y - f_{23} \xi_{sp} \\ M_z = f_{23} \xi_y - f_{33} \xi_{sp} \end{cases} \quad (2.16)$$

式中： $F_x$ ， $F_y$ ， $M_z$ ——纵向、横向蠕滑力和自旋蠕滑力矩；

$\xi_x$ ， $\xi_y$ ， $\xi_{sp}$ ——纵向、横向和自旋蠕滑率；

$f_{11}$ ， $f_{22}$ ， $f_{33}$ ——纵向、横向和自旋蠕滑系数；

$f_{23}$ ——横向-自旋蠕滑系数。

蠕滑系数的计算由式 (3.3) 确定:

$$\begin{cases} f_{11} = C_{11}Eab \\ f_{22} = C_{22}Eab \\ f_{23} = C_{23}E(ab)^{3/2} \\ f_{33} = C_{33}E(ab)^2 \end{cases} \quad (2.17)$$

式中:  $E$ ——弹性模量, 因为车轮和轨道均为钢材, 则取  $E = 210GPa$ ;

$a, b$ ——轮轨接触斑椭圆的长半轴和短半轴;

$C_{ij}$ ——Kalker系数, 与泊松比和  $a/b$  有关。

大量的实验证明了轮轨蠕滑力和蠕滑率之间, 只有在蠕滑率不大情况下两者才成线性关系。换言之就是Kalker线性蠕滑理论一般只在小蠕滑率和小自旋的情形下才采用。在大蠕滑率、大自旋或完全滑动的情形下, 两者间不存在线性关系。随着蠕滑率的增大, 蠕滑力不能以相同比例增加而最后趋于滑动摩擦力 (sliding- friction) 这一饱和极限。为了确定出轮轨非线性蠕滑力和蠕滑率的关系, 我们可采用沈氏理论进行修正。

将纵向蠕滑力  $F_x$  和横向蠕滑力  $F_y$  合成为式 (2.18)。

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2.18)$$

令

$$F' = \begin{cases} fN \left[ \frac{F}{fN} - \frac{1}{3} \left( \frac{F}{fN} \right)^2 + \frac{1}{27} \left( \frac{F}{fN} \right)^3 \right] & (F \leq 3fN) \\ fN & (F > 3fN) \end{cases} \quad (2.19)$$

式中:  $f$  是轮轨间的摩擦系数。引入修正系数:

$$\varepsilon = \frac{F'}{F} \quad (2.20)$$

则修正以后的蠕滑力和蠕滑力矩为

$$\begin{cases} F'_x = \varepsilon F_x \\ F'_y = \varepsilon F_y \\ M'_z = \varepsilon M_z \end{cases} \quad (2.21)$$

蠕滑力的修正一般采用沈氏理论, 此理论能使蠕滑力计算方法广泛地用于任意蠕滑率和任意自旋的情形, 从而更好的有利于车轮与钢轨之间的相互作用的实际工况的仿真计算。

### 2.2.4.3 Kalker 新简化理论实现

Kalker 于 1973 年借助于线性理论模型既发展了一种快速计算模型——简化理论, 又站在前人的基础上, 编制了相应的计算机程序 SIMROL。在 1981 年, Kalker 又对简化理论进一步的加以修正, 被称作新型 Kalker 简化理论。并且, 在此基础上, 研制了相

应的快速计算程序 FASTSIM, 在实际运行中, 它的计算速度比 SIMROL 程序快了 15—20 倍, 可谓是 SIMROL 的升级版。Kalker 为了建立这一理论, 开始引入了柔度系数  $L_i$ , 并假设该接触区中的任一点弹性位移仅仅和作用在该点的作用力有关, 同时沿某方向的位移仅与之同方向的力有关, 并且假设成线性关系。经过推导<sup>[4]</sup>, 可以得出此区域接触斑上三个方向的柔度系数:

$$L_1 = \frac{8a}{3C_{11}G} \quad L_2 = \frac{8a}{3C_{22}G} \quad L'_2 = \frac{\pi a \sqrt{\frac{a}{b}}}{4C_{23}G} \quad L_3 = \frac{\pi ab}{2p} \delta$$

式中:  $L_i$ ——接触斑坐标系中三个方向的柔度系数,  $i=1、2、3$ ;

$a, b$ ——接触椭圆的长、短轴;

$C_{ij}$ ——无因次的 Kalker 系数;

$\delta$ ——轮轨总的挤压变形量;

$G$ ——剪切弹性模;

这里  $L_2$  有两个不同的值, 且  $L_1 \neq L'_2$ 。从理论上说在无限大弹性半空间的表面上, 它们应当相等。

在考虑稳态情况下的基本滑动方程:

$$\begin{cases} w_1 = \frac{\gamma_1}{v} = \xi_x - x_2 \xi_{sp} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ w_2 = \frac{\gamma_2}{v} = \xi_y + x_1 \xi_{sp} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{cases} \quad (2.22)$$

或者

$$\begin{cases} \frac{\gamma_1}{L_1 v} = \frac{\xi_x}{L_1} - \frac{\xi_{sp}}{L_1} x_2 - \frac{\partial p_1}{\partial x_1} \\ \frac{\gamma_2}{L_2 v} = \frac{\xi_y}{L_2} + \frac{\xi_{sp}}{L_2} x_1 - \frac{\partial p_2}{\partial x_1} \end{cases} \quad (2.23)$$

式中: 由于  $L_1 \neq L'_2$ , 因此 Kalker 在数值计算中做了修正,  $\xi_{sp}$  对接触斑粘滑区的影响与  $L'_1$  相关, 因此上式 (2.23) 第一式左边第二项  $L_1$  由  $L'_2$  替代, 第二式右边第二项  $L_2$  由  $L'_2$  替代。于是上式 (2.23) 可以写成:

$$\begin{cases} \frac{\gamma_1}{L_1 v} = \frac{\xi_x}{L_1} - \frac{\xi_{sp}}{L'_2} x_2 - \frac{\partial p_1}{\partial x_1} \\ \frac{\gamma_2}{L_2 v} = \frac{\xi_y}{L_2} + \frac{\xi_{sp}}{L'_2} x_1 - \frac{\partial p_2}{\partial x_1} \end{cases} \quad (2.24)$$

为了求得任意蠕滑和自旋条件下的法向力和切向力, 可以用数值方法求解方程。做如下无量纲处理, 令:

$$x'_1 = \frac{x_1}{a}, \quad x'_2 = \frac{x_2}{b}, \quad p'_1 = \frac{p_1}{fz_0}, \quad p'_2 = \frac{p_2}{fz_0}, \quad z_0 = \frac{2p}{\pi ab}, \quad n_1 = \frac{a\xi_x}{fz_0 L_1}, \quad n_2 = \frac{a\xi_y}{fz_0 L_2},$$

$$\phi_1 = \frac{ab\xi_{sp}}{fz_0L'_2}, \quad \phi_2 = \frac{a^2\xi_{sp}}{fz_0L'_2}, \quad \omega_i = \frac{\gamma_i a}{fz_0 v L_i};$$

则上式 (2.24) 可以改写成:

$$\begin{cases} w'_1 = n_1 - \phi_1 x'_1 - \frac{\partial p'_1}{\partial x'_1} \\ w'_2 = n_2 + \phi_2 x'_1 - \frac{\partial p'_2}{\partial x'_1} \end{cases} \quad (2-25)$$

或者可以写成矢量的形式:

$$\vec{w} = \vec{s} - \frac{\partial \vec{p}'}{\partial x'_1} \quad (2-26)$$

而式中  $\vec{w} = (w'_1 \ w'_2)'$ ,  $\vec{s} = (n_1 - \phi_1 x'_1 \ n_2 + \phi_2 x'_1)'$ ,  $\frac{\partial \vec{p}'}{\partial x'_1} = \left( \frac{\partial p'_1}{\partial x'_1} \ \frac{\partial p'_2}{\partial x'_1} \right)'$ , 运用上述无量纲

化, 就可以把椭圆接触斑转化为单位圆接触斑, 如下图 (2-7)。Kalker 开发的快速计算程序 FASTSIM 计算方法如下:

在微分方程组中, 当接触斑内的任一点位置确定后, 则刚性滑移量  $\vec{s}$  可以确定, 但  $\vec{p}'$  和  $\vec{w}$  是未知的。现考虑图 (2-7) 中单位圆上任何平行于  $x'_1$  轴且宽为  $dx'_2$  的长方形带, 从带中任一点  $x'_1 = (x'_0 - h)$  到  $x'_0$ , 对式 (2-37) 进行积分, 只要步长取得足够小, 则积分结果可以近似写成:

$$\vec{w}_2^1 = \vec{s}_2^1 + \vec{p}'_1 - \vec{p}'_0 \quad (2-27)$$

式中:

$$\vec{w}_2^1 = \vec{s}_2^1 + \vec{p}'_1 - \vec{p}'_0, \quad \vec{w}_2^1 = h \vec{w} \Big|_{x'_1=x'_0-h/2}, \quad \vec{s}_2^1 = h \vec{s} \Big|_{x'_1=x'_0-h/2},$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1(x'_1) \quad \vec{p}_1 = \vec{p}_1(x'_1)$$

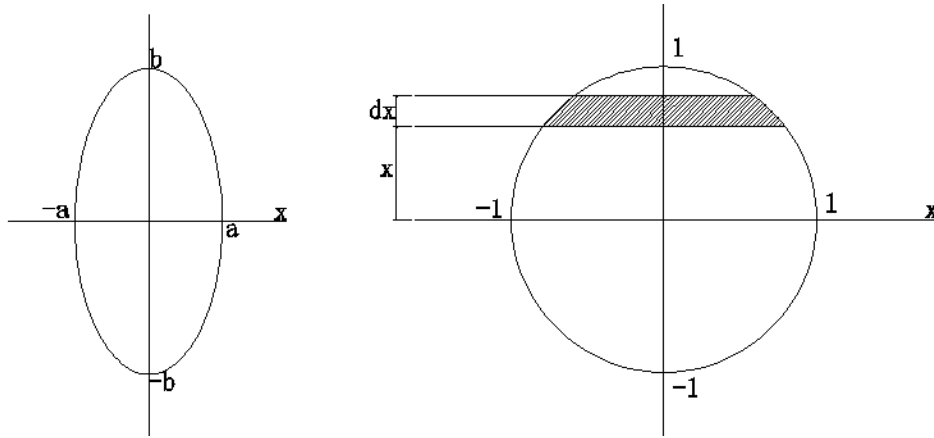


图 2.7 椭圆接触斑正则为单位圆接触斑

在数值计算中, 取步长  $h$  大约为矩形条长度的  $1/10$ 。考虑到接触区的前沿

$x_0 = \sqrt{1-x_2'^2}$ , 有  $p_0' = 0$ , 所以  $p_1'$  求解过程应从  $x_0 = \sqrt{1-x_2'^2}$  开始, 一直向后沿  $x_0 - h$ ,  $x_0 - 2h, \dots, -\sqrt{1-x_2'^2}$ , 以此类推逐一确定。但即使在每一矩形条上作第一步计算时, 表示滑动量的  $\vec{w}_2^1$  时未知的, 这里需要考虑到接触斑的切向力必须满足库仑摩擦定律。

对于接触斑上的每一点, 仅有如下两种情形:

- (1)  $\vec{w}_2^1 = 0$ ,  $|\vec{p}_1'| \leq fz'$ ;
- (2)  $\vec{w}_2^1 \neq 0$ ,  $|\vec{p}_1'| = fz'$ ; 取  $\vec{w}_2^1 = -\lambda \vec{p}_1'$ ,  $\lambda > 0$  (待定)。

式中:  $z' = p_3 / z_0$ 。定义:  $\vec{p}_H = \vec{p}_0' - \vec{s}_2^1$ , 若  $|\vec{p}_H| \leq fz'$ , 则无滑移, 有  $\vec{w}_2^1 = \vec{p}_1' + \vec{s}_2^1 - \vec{p}_0' = \vec{p}_1' - \vec{p}_H = 0 \Rightarrow \vec{p}_1' = \vec{p}_H$ ; 若  $|\vec{p}_H| > fz'$ , 取  $\vec{p}_1' = (fz' / |\vec{p}_H|) \vec{p}_H$ ,  $\vec{w}_2^1 \neq 0$  且  $\vec{w}_2^1 = \vec{p}_1' + \vec{s}_2^1 - \vec{p}_0' = \vec{p}_1' - \vec{p}_H = \vec{p}_1' [1 - |\vec{p}_H| / (fz')] = -\lambda \vec{p}_1'$ , 这里  $\lambda = |\vec{p}_H| / (fz') - 1$ , 且  $\lambda > 0$ 。

通过上述方程, 不仅可以求出各点的切向力, 并且可以求出总的切向力  $F_{cx}'$ 、 $F_{cy}'$  和切向力矩  $M_z'$ , 而且可以得出粘滑区的分布情况。

## 2.2.5 轮对微分方程的建立

前人在推导运动方程时作了如下假定<sup>[45]</sup>:

1. 自由轮对沿着轨距不变、刚性路基上的平直钢轨作匀速运动;
2. 轮对为一刚体, 其两个车轮连续不断地与钢轨相接触;
3. 轮对的运动属微幅振动, 因此轮轨接触几何关系、蠕滑率-力规律均为线性, 且认为纵向蠕滑系数与横向蠕滑系数相等  $f_{11} = f_{22} = f$ ;
4. 轮对的运动属微幅振动, 因此轮轨接触几何关系、蠕滑率-力规律均为线性, 且认为纵向蠕滑系数与横向蠕滑系数相等;

自由轮对在平直钢轨上匀速运动时, 除轮对绕自身轴线转动产生纵向运动外, 其主要的自由度有两个, 即横移  $y_w$ 、摇头  $\psi_w$ , 这两者的耦合为蛇形运动。但是, 由于轮对踏面有斜度, 轮对在横移时, 伴随产生侧滚, 同时其质心产生一种摆动而轮对在摇头时, 质心作上下运动。当轮轨接触几何关系已知时, 这些运动规律均可求得, 因此, 它们不是独立的自由度。

作用在自由轮对上的力有惯性力和轮轨间的蠕滑力<sup>[37]</sup>。根据上述假定, 蠕滑率/力规律为线性, 即  $T \propto \frac{\Delta V}{V}$  当  $V$  为常数时, 只需求出轮对位移  $y_w$ 、摇头  $\psi_w$  时的滑移速度  $\Delta V$ , 即可以得到蠕滑率  $V = \frac{\Delta V}{V}$ , 从而可以算出蠕滑力  $T = -fv$ 。

设轮对的前进速度为  $V$ , 角速度为  $\omega$ , 其标称滚动圆半径为  $r_0$ , 踏面斜率为  $\lambda$ , 轮对两滚动圆间横向距离为  $2b$ , 由横移  $y_w$  和摇头  $\psi_w$  引起的轮对蠕滑率和蠕滑力如下表 (2-1) (2-2) 所示。

表（2-1）由轮对横移  $y_w$  和摇头  $\psi_w$  引起的轮对蠕滑率<sup>[43]</sup>

		左轮	右轮
横移 $y_w$	纵向蠕滑率	$\lambda y_w / r_0$	$\lambda y_w / r_0$
	横向蠕滑率	$y_w / V$	
摇头 $\psi_w$	纵向蠕滑率	$b \psi_w / V$	$-b \psi_w / V$
	横向蠕滑率	$-\psi_w$	

表（2-2）由轮对横移和摇头引起的轮对蠕滑力<sup>[46]</sup>

	左轮	右轮
纵向蠕滑力 $T_x$	$-f \left( \frac{\lambda y_w}{r_0} + \frac{b \dot{\psi}_w}{V} \right)$	$f \left( \frac{\lambda y_w}{r_0} + \frac{b \dot{\psi}_w}{V} \right)$
横向蠕滑力 $T_y$	$-f \left( \frac{\dot{y}_w}{V} - \psi_w \right)$	
旋转蠕滑力矩 $M_z$	$2f \left( \frac{\lambda b}{r_0} y_w + \frac{b^2 \dot{\psi}_w}{V} \right)$	

应用牛顿定律，列出运动微分方程如下：

$$\text{轮对横移: } M_w \ddot{y}_w = -2f \left( \frac{\dot{y}_w}{V} - \psi_w \right) \quad (2-32)$$

$$\text{轮对摇头: } J_w \ddot{\psi}_w = 2f \left( \frac{\lambda b}{r_0} y_w + \frac{b^2 \dot{\psi}_w}{V} \right) \quad (2-33)$$

式中  $M_w$ 、 $J_{wz}$  分别为一个轮对的质量及 Z 绕轴的摇头转动惯量。当速度很低时，这时可略去惯性力项。于是方程（1）可简化成：

$$\begin{cases} y_w - V \psi_w = 0 \\ \dot{\psi}_w + \frac{\lambda b}{r_0} y_w = 0 \end{cases} \quad (2-34)$$

$$\text{其解为: } \begin{cases} y_w = y_0 \sin(\omega_0 t + \beta) \\ \psi_w = \psi_0 \cos(\omega_0 t + \beta) \end{cases} \quad (2-35)$$

式中  $y_0$ 、 $\omega_0$ 、 $\beta$  由初始条件给出，因此可以求出自由轮对低速运行情况下：

$$\text{蛇形运动的频率: } \omega_{\omega} = \sqrt{\frac{\lambda}{br_0}} V \quad (2-36)$$

$$\text{蛇形运动的波长: } L_{\omega} = \frac{2\pi V}{\omega_{\omega}} = 2\pi \sqrt{\frac{br_0}{\lambda}} \quad (2-37)$$

## 第 3 章 基于 MATLAB 的车辆轮轨力数值研究

高速行驶的列车，其实际的车辆-轨道动力相互作用是极其复杂的。列车和轨道结构及其附属设施共同形成了一个大的振动系统。在系统的模型当中，轨道模型与车辆模型之间是通过轮轨接触关系来确定的。本章主要进行基于MATLAB的车辆与轨道之间的轮轨作用力的数值研究。

### 3.1 MATLAB 介绍

MATLAB是矩阵实验室(Matrix Laboratory)的简称，是美国MathWorks公司出品的商业数学软件，用于算法开发、数据可视化、数据分析以及数值计算的高级技术计算语言和交互式环境，主要包括MATLAB和Simulink两大部分<sup>[39]</sup>。

#### 3.1.1 MATLAB的特点

被称为第四代计算机语言的MATLAB，利用其丰富的函数资源，使编程人员从烦琐的程序代码中解放出来。MATLAB最突出的特点就是简洁，它用更直观的、符合人们思维习惯的代码，代替了C和Fortran语言的冗长代码，给用户带来最直观、最简洁的程序开发环境。自20世纪70年代中期开发以来，MATLAB版本经过不断的更新，目前具有以下特点：

- (1) 友好的工作平台和编程环境；
- (2) 高效的编程效率；
- (3) 简单易用的程序语言；
- (4) 强大的科学计算机数据处理能力；
- (5) 出色的图形处理功能和灵活的绘图功能；
- (6) 应用广泛的模块集合工具箱；
- (7) 实用的程序接口和发布平台；
- (8) 应用软件(包含用户界面)的开发；
- (9) 源程序的开放性和可扩展性；
- (10) 可以直接处理声言和图形文件；
- (11) 具有完善的联机帮助功能。

### 3.2 轮轨坐标及其转换

列车轮对的踏面与钢轨接触时产生的轮轨接触力是一对作用力与反作用力。接触点即为轮轨力的作用点，作用在车辆轮对和钢轨上的力和力矩大小是相等的，但其方向相



反。轮轨接触关系的基础便是要建立轮轨系统坐标系以及它们之间的相互转换。轮轨接触相关坐标系定义如下：

(1) 绝对坐标系  $O-XYZ$ ：x轴沿列车前进方向，z轴竖直向下，y轴由右手定则确定，原点位于任意处。最终计算出来的轮轨力将体现在该坐标系上。绝对坐标系如图3-1所示。绝对坐标系固结于初始轮对无运动且轮轨刚好接触但不形成压缩时的轮对质心处，不随轮对的运动而移动。单位矢量为  $e = [i, j, k]$ 。

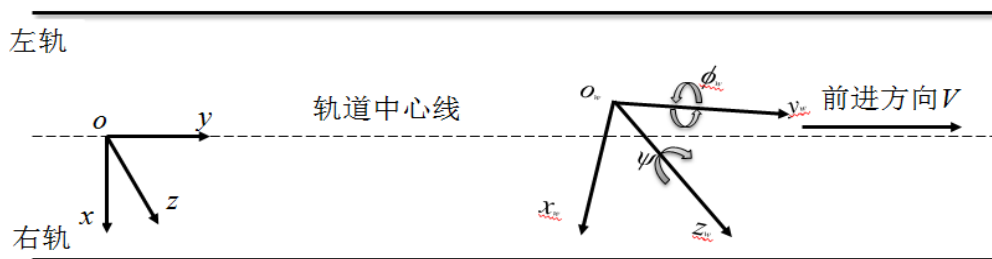


图 3.1 绝对坐标系

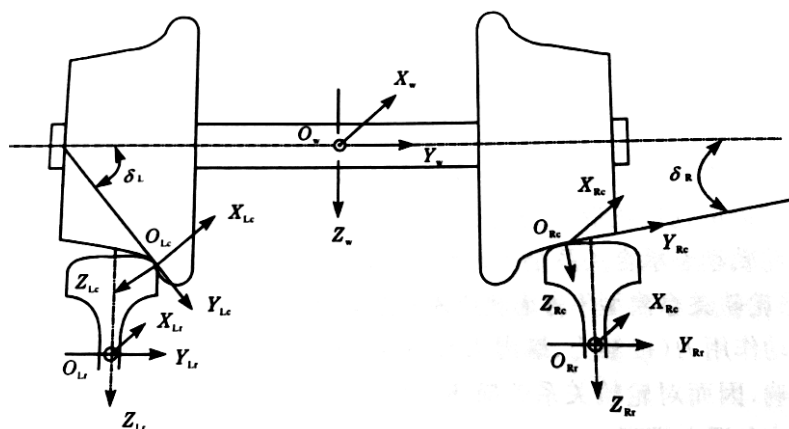


图 3.2 轮轨坐标系

轮轨坐标系如图3-2所示。其中包含以下坐标系。

(2) 轮对坐标系  $O_w - X_w Y_w Z_w$ ：原点位于轮对中心处，随轮对运动而移动。相对于固定坐标系而言，有沿着x，y，z三个方向的平行移动以及绕x轴、z轴的转动。其单位矢量为  $e_w = [i_w, j_w, k_w]$ 。

(3) 左、右接触斑坐标系  $O_{Lc} - X_{Lc} Y_{Lc} Z_{Lc}$ ， $O_{Rc} - X_{Rc} Y_{Rc} Z_{Rc}$ ：随轮对运动而移动，随接触点变化而变化。其单位矢量分别为  $e_{Lc} = [i_{Lc}, j_{Lc}, k_{Lc}]$ ，

$$e_{Rc} = [i_{Rc}, j_{Rc}, k_{Rc}]。$$

(4) 左、右侧钢轨坐标系  $O_{Lr} - X_{Lr} Y_{Lr} Z_{Lr}$ ， $O_{Rr} - X_{Rr} Y_{Rr} Z_{Rr}$ ：原点固结在左右钢轨的质心，随钢轨运动而变化，能反映出钢轨在横向、垂向平行移动以及绕质心的转动。

其单位矢量分别为  $e_{Lr} = [i_{Lr}, j_{Lr}, k_{Lr}]$ ,  $e_{Rr} = [i_{Rr}, j_{Rr}, k_{Rr}]$ 。

各坐标系之间的旋转变换关系如下：

$$\begin{Bmatrix} i_w \\ j_w \\ k_w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi_w & \sin\psi_w & 0 \\ -\cos\phi_w \sin\psi_w & \cos\phi_w \cos\psi_w & \sin\phi_w \\ \sin\phi_w \sin\psi_w & -\sin\phi_w \cos\psi_w & \cos\phi_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\begin{Bmatrix} i_{Lc} \\ j_{Lc} \\ k_{Lc} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi_w & \sin\psi_w & 0 \\ -\cos(\delta_L + \phi_w) \sin\psi_w & \cos(\delta_L + \phi_w) \cos\psi_w & \sin(\delta_L + \phi_w) \\ \sin(\delta_L + \phi_w) \sin\psi_w & -\sin(\delta_L + \phi_w) \cos\psi_w & \cos(\delta_L + \phi_w) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\begin{Bmatrix} i_{Rc} \\ j_{Rc} \\ k_{Rc} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi_w & \sin\psi_w & 0 \\ -\cos(\delta_R - \phi_w) \sin\psi_w & \cos(\delta_R - \phi_w) \cos\psi_w & -\sin(\delta_R - \phi_w) \\ -\sin(\delta_R - \phi_w) \sin\psi_w & \sin(\delta_R - \phi_w) \cos\psi_w & \cos(\delta_R - \phi_w) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\begin{Bmatrix} i_{Lr} \\ j_{Lr} \\ k_{Lr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_{rL} + \phi_0) & \sin(\phi_{rL} + \phi_0) \\ 0 & -\sin(\phi_{rL} + \phi_0) & \cos(\phi_{rL} + \phi_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\begin{Bmatrix} i_{Rr} \\ j_{Rr} \\ k_{Rr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_{rR} - \phi_0) & \sin(\phi_{rR} - \phi_0) \\ 0 & -\sin(\phi_{rR} - \phi_0) & \cos(\phi_{rR} - \phi_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

式中： $\phi_w$ ——轮对绕x轴旋转的角度；

$\psi_w$ ——轮对绕z轴旋转的角度；

$\delta_L$ ——左侧轮轨接触角；

$\delta_R$ ——右侧轮轨接触角；

$\phi_{rL}$ ——左侧钢轨扭转角；

$\phi_{rR}$ ——右侧钢轨扭转角；

$\phi_0$ ——钢轨的标准轨底坡。

### 3.3 轮轨接触几何参数的数值求解

列车在轨道上运行，车辆的轮对相对于轨道来说做横向运动和侧滚运动。在不同的横向位移和侧滚位移条件下，左右轮轨之间的接触点位置不同，轮轨之间的接触参数也相应变化，而这些参数在研究机车车辆运行动力学时是必不可少的。轮轨接触几何参数（wheel-rail contact geometry parameters）由轮轨接触几何关系所确定的轮对和钢轨上的一系列几何量。

#### 3.3.1 轮轨接触几何参数的求解

轮轨的轮廓外形很多，有些可以用简单解析式表示其形状，有些则不行。比如磨损后的轮轨轮廓形状就只能通过实测轮轨表面各点的坐标来表示。早起的很多研究就给出了确定锥形踏面配合单圆弧形钢轨截面的轮轨接触几何参数的解析方法。但铁路工程中

更常见的磨耗型车轮踏面配合多圆弧钢轨截面的情况，则无法通过解析方法一次计算得到所有的轮轨接触几何参数。

目前工程中确定任意轮廓外形轮轨接触几何参数的方法大致有两种：左右轮轨等间距迭代法和迹线法。迹线法是目前利用计算机来求解轮轨接触几何关系的常用方法。该方法是将轮对踏面进行数值化离散，根据轮轨的几何约束方程，通过数值迭代解约束方程得到轮轨接触点坐标，从而求得接触几何参数。其基本原理是轮轨空间接触点只可能在一条空间曲线上（这条曲线称为迹线），可以通过寻求一条迹线来代替整个踏面区域，从而利用迹线在一维区域（空间曲线）扫描以代替在二维区域（曲面）内扫描。

轮轨接触几何约束条件：

- （1）轮对和钢轨表面上任意点均不能相互嵌入内部；
- （2）左右轮轨同时接触，不可脱离；
- （3）车轮上的接触点与钢轨上的接触点具有相同的空间位置；
- （4）在轮轨接触点处，车轮和钢轨具有公切面。

本文在上述理论基础上利用Matlab软件编写了车辆在轨道上运行时轮轨耦合振动分析程序。程序主要分为输入、计算和输出三个模块。其中计算轮轨接触几何参数的子程序的主要计算流程如图3.3所示。该子程序可计算任意形状轮轨接触几何关系。主要的计算结果有：轮轨接触点或接触斑处的接触角、轮轨曲面的曲率半径、车轮滚动圆半径等。

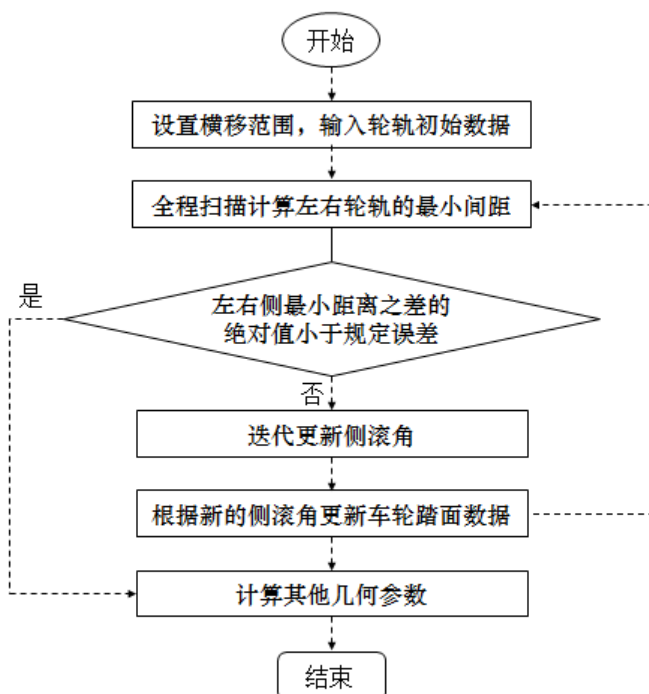


图 3.3 轮轨接触几何关系的计算流程图

算例1：轮轨内侧距取值1353mm，轮对摇头角为0°，轨距为1435mm，车轮采用中国车轮LM<sub>A</sub>踏面，钢轨采用中国铁路CHN60钢轨，滚动圆直径915/860mm。接触角差、滚动半径差、车轮踏面接触点位置和轨头接触点位置的计算结果如图3.4~3.7所示。

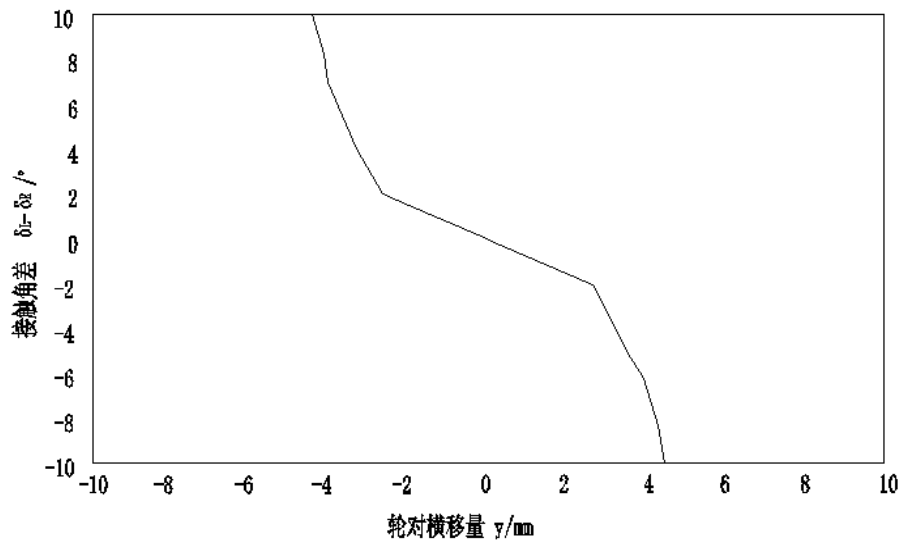


图 3.4 轮轨接触几何关系的接触角差计算结果（LMA/CHN60）

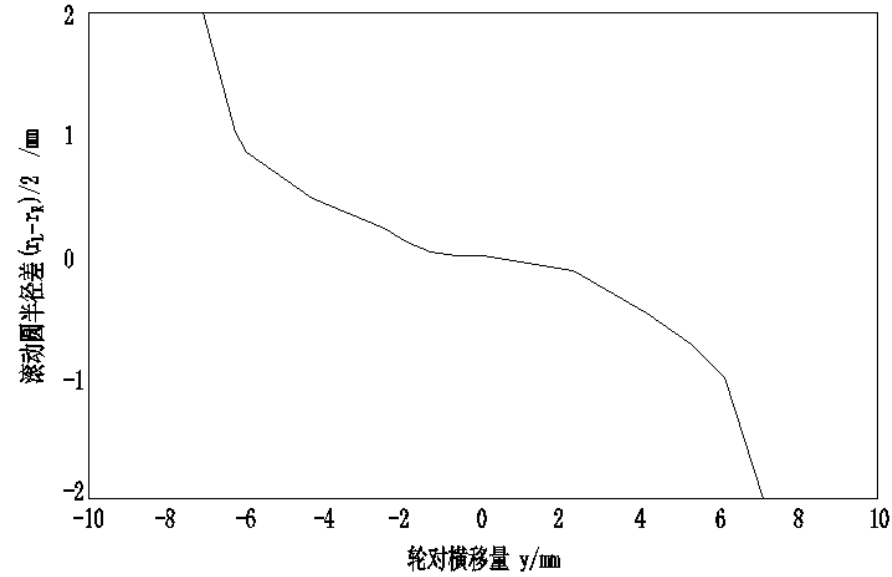


图 3.5 轮轨接触几何关系的滚动轮半径差计算结果（LMA/CHN60）

由图3.4和3.5可知，轮轨接触角差和滚动轮半径差随着轮对横移量的增大而增大。

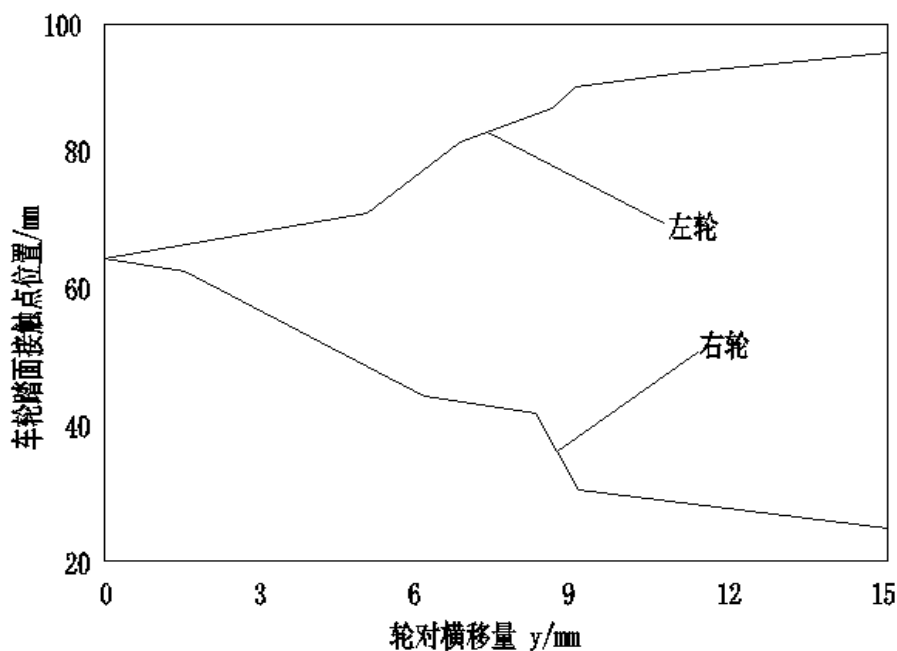


图 3.6 轮轨接触几何关系的车轮踏面接触点计算结果 (LMA/CHN60)

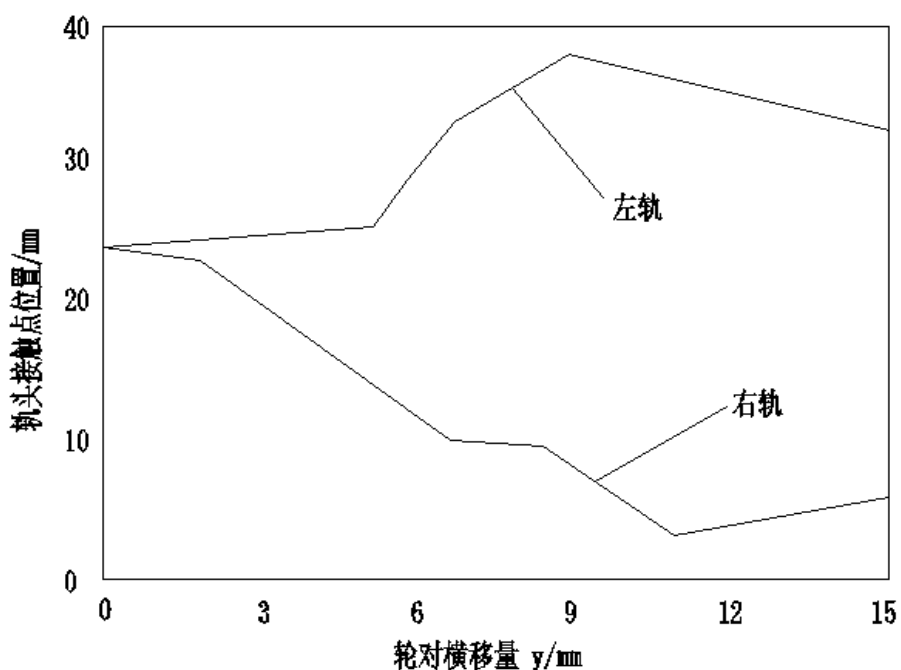


图 3.7 轮轨接触几何关系的轨头接触点计算结果 (LMA/CHN60)

由图3.6和3.7可知，车轮踏面接触点和轨头接触点的左右两侧大致成对称分布。接触点在车轮踏面和钢轨上变化均匀而且连续。在轮缘根部与钢轨接触以前接触范围非常大，表明磨耗比较均匀。

算例2：LM型踏面，60 kg/m钢轨，车轮名义直径统一取为915 mm，轮缘内侧距为1353mm，轨距为1435 mm，轨底坡设置为1：40。车轮踏面接触点位置、轨头接触点位置和左侧轮对接触角的计算结果如图3.8~3.10所示。

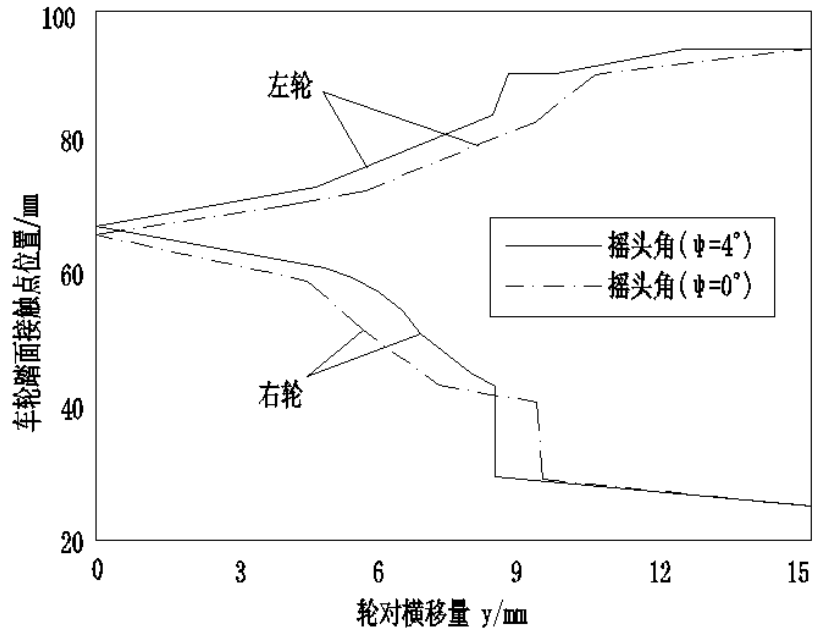


图 3.8 不同摇头角时车轮踏面接触点计算结果 (LM/CHN60)

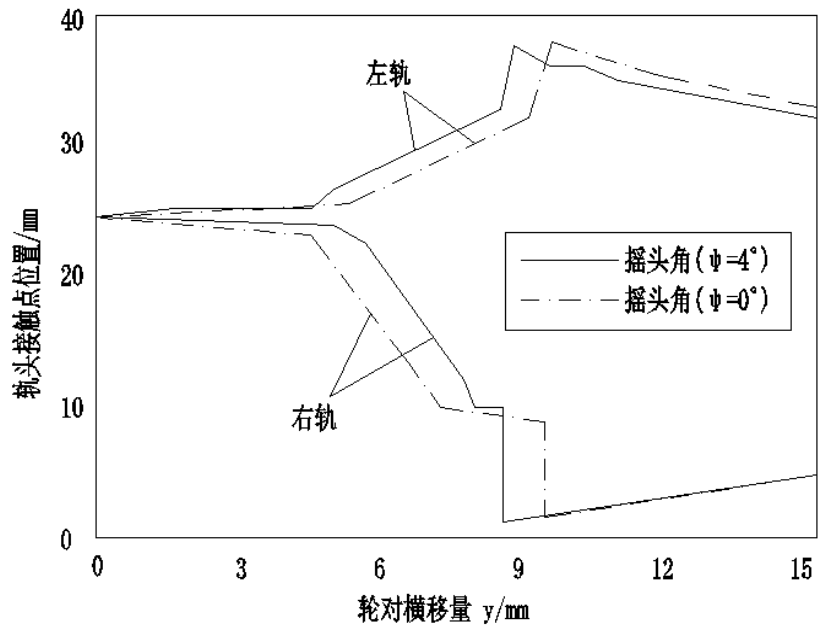


图 3.9 不同摇头角时轨头接触点计算结果 (LM/CHN60)

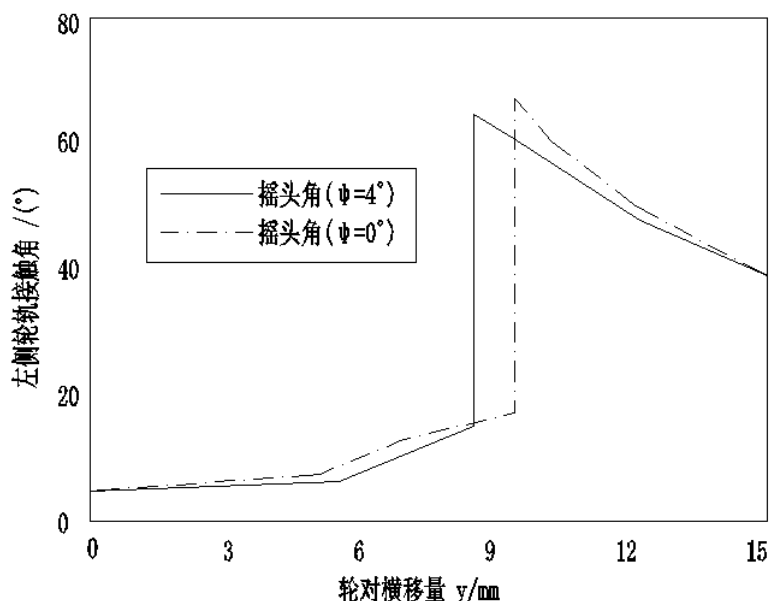


图 3.10 不同摇头角时左侧轮轨接触角计算结果 (LM/CHN60)

由图3.8和3.9可知，车轮踏面接触点和轨头接触点的左右两侧大致成对称分布。接触点在车轮踏面和钢轨上变化随着摇头角的增加而增加。由图3.10可知，轮轨接触角受摇头角的变化影响比较小。

### 3.4 轮轨接触作用力的数值求解

轮轨接触作用力即车轮与钢轨接触时的相互作用力，其作用点在轮轨接触点处，作用在轮对和钢轨上的力和力矩大小相等，方向相反。轮轨接触作用力包括法向和切向接触力（即蠕滑力），两者应分别计算。本文采用Hertz接触理论来计算轮轨间法向接触力，采用Kalker线性理论和沈氏理论计算切向接触力。

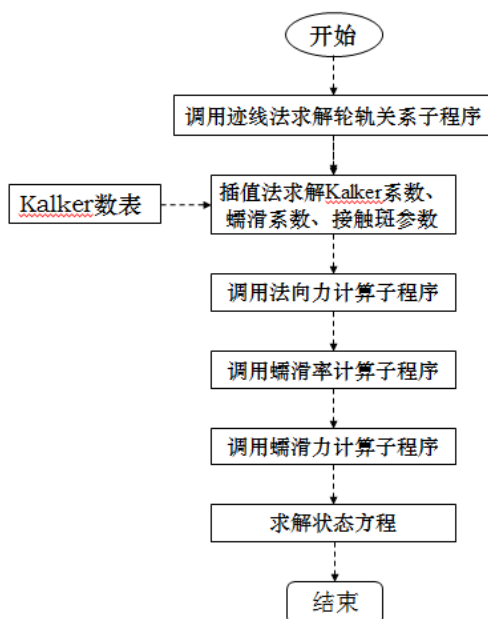


图3.11 数值仿真主程序流程图

### 3.4.1 轮轨法向力的求解

现今，轮轨法向力的求解一般是取用Hertz非线性弹性接触理论，Hertz理论所作的假定有：

- (1) 两接触物体的表面都是连续性不间断的；
- (2) 小应变： $a \ll R$ ；
- (3) 将每个物体都可以看作是一个弹性板空间；
- (4) 当作表面无摩擦；

由于 $xOY$ 和 $xOZ$ 两个面对称于垂直轴，故钢轨在车辆荷载作用下的竖、横向振动可表示成在 $xOY$ 和 $xOZ$ 两个主惯性平面内各自独立的两组主振动。轮轨法向接触力在 $Z$ 轴上的分量由著名的赫兹非线性弹性接触理论所确定。

由弹性力学中的布西内斯克问题的特例——半无限体表面圆形区域内受均布压力作用的位移解 $(u)_{z=0} = \frac{(1-\nu^2)q}{\pi E} \iint d\phi ds$ ，可以求得：

即通过轮轨之间的法向压缩量来计算法向力：

$$P_N(t) = \left[ \frac{1}{G} \delta N(t) \right]^{3/2} \quad (3.6)$$

式中： $P_N(t)$ ——轮轨间的法向力；

$G$  ——轮轨接触常数( $m/N^{2/3}$ )。

对于锥形踏面车轮  $G = 4.75R^{-0.149} \times 10^{-8} m/N^{2/3}$ ；

对于磨耗形踏面车轮  $G = 3.86R^{-0.115} \times 10^{-8} m/N^{2/3}$ ；

$R$  为车轮滚动圆半径；

$\delta N(t)$ ——轮轨接触点的法向弹性压缩量(m)；

由式(3.1)可知，要计算轮轨法向力需计算不同时刻轮轨接触点处的法向弹性压缩量。轮轨之间的弹性压缩量包含了车轮的静压缩量 $\delta Z_0$ 和轮轨相对运动位移 $\delta Z_{ob}(t)$ 两部分，即：

$$\delta N(t) = \delta Z_0 + \delta Z_{ob}(t) ; \quad (3.8)$$

$$\text{而} \begin{cases} \delta Z_0 = G_{HZ} P_0^{2/3} \\ \delta Z_{ob}(t) = z_b(t) + z_c(t) - z_w(t) \\ z_c(t) = z_p(t) + z_g(t) \end{cases} \quad (3.9)$$

式中： $P_0$  — 静轮载；

$z_b(t)$  —t时刻轮轨接触点处桥梁的位移；

$z_p(t)$  —t时刻轮轨接触点处轨道不平顺值；

$z_g(t)$  —t时刻轮轨接触点处轨道变形量；

$z_w(t)$  —t时刻轮对位移。

然而车轮静压量则可以通过轮轨接触点或接触斑处的铁轨和轮对的位移来计算。特别地，当 $\delta N(t) < 0$ 时，表面轮轨已相互脱离，此时轮轨法向力为零。



由于赫兹力的求解是在整个计算体系中完成的,所以不能单纯的利用上述公式求解,需要对列车的左右侧车轮所受赫兹力分别计算,再求得它们在横向分量的合力,这样接触关系和赫兹力的变化才可以整个计算过程中起到相应的作用。程序流程图如下所示:

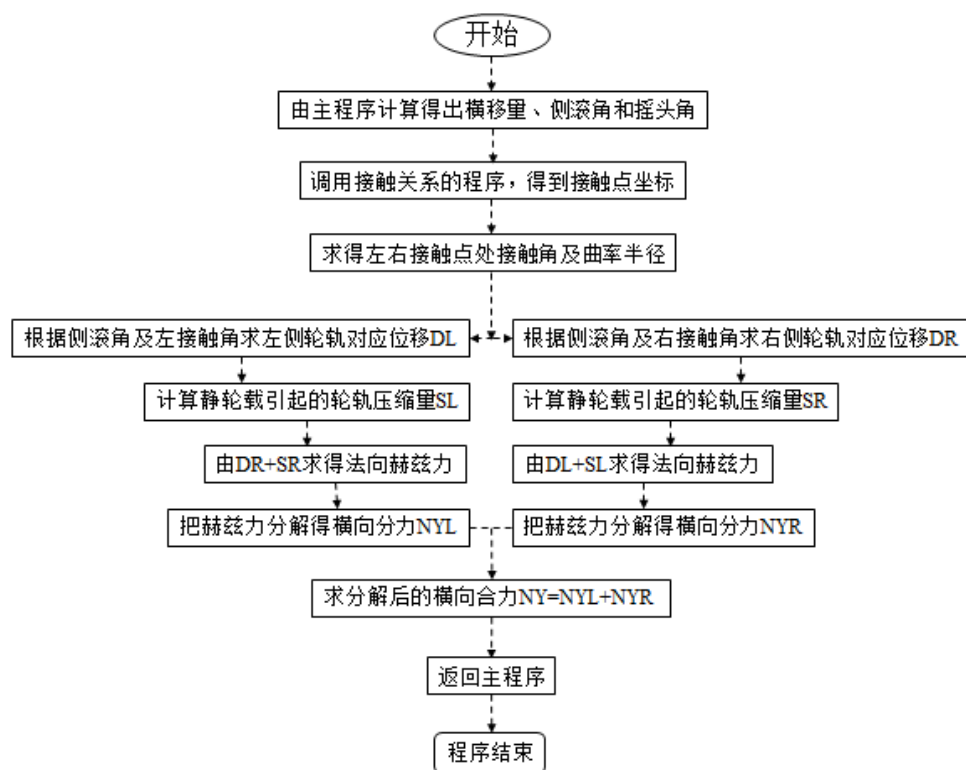


图 3.12 赫兹力求解程序流程图

### 3.4.2 轮轨切向蠕滑力的计算

现代研究成果说明,因车轮和钢轨都属于弹性体,滚动时轮轨间的切向力将在接触斑面上形成黏着区和滑动区这两种性质不同的区域。当切向力比较小的时候主要表现为粘着区。随着切向力进一步的加大,滑动区慢慢的扩大,黏着区逐渐的缩小。当切向力超过某一极限值时就只剩滑动区,此时车轮在钢轨上开始出现明显的滑动。根据Hertz静态理论可以得知接触区为一个椭圆。椭圆的长半轴 $a$ 和短半轴 $b$ 之比( $a/b$ )可由回转物体曲率半径求解出来。

在弹性的钢轨上以恒定速度 $v$ 运行的车轮在与钢轨接触的范围会产生非常复杂的物理现象,即蠕滑现象。因粘滑区的存在使得车轮轮周上接触点的水平速度与钢轨轨头上所对应接触点处相对应轮心的水平速度并不相同,他们之间存在一个微小的滑动——蠕滑(Creep)。在宏观上,车轮轮周速度与轮心的水平速度不一致。打个比方,以同样的转速走行在硬质路面和沙地上的两辆自行车他们前进速度就不一样。当车轮受到横向外力作用时,车轮产生微小的横向移动也是这种蠕滑的现象。当车轮的轮子绕着接触斑的垂向主轴旋转时,会形成旋转蠕滑率,同样会产生旋转蠕滑力矩。

在不同条件和环境下进行的纵向蠕滑试验表明蠕滑率与切向力(蠕滑力)的关系曲线

是有差别的。清洁轮轨接触面条件下获得的蠕滑率与蠕滑力关系与Kalker的理论曲线相近，天气干燥、潮湿等因素都会影响切向力的大小。在小蠕滑下，蠕滑力与蠕滑率成线性关系。因此，得到轮轨纵向、横向蠕滑率和自旋蠕滑率之后，可根据Kalker线性蠕滑理论计算出纵向蠕滑力、横向蠕滑力以及自旋（spin）蠕滑力/力矩。计算表达式如式（3.10）：

$$\begin{cases} F_x = -f_{11}\xi_x \\ F_y = -f_{22}\xi_y - f_{23}\xi_{sp} \\ M_z = f_{23}\xi_y - f_{33}\xi_{sp} \end{cases} \quad (3.10)$$

式中：  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $M_z$ ——纵向、横向蠕滑力和自旋蠕滑力矩；

$\xi_x$ ,  $\xi_y$ ,  $\xi_{sp}$ ——纵向、横向和自旋蠕滑率；

$f_{11}$ ,  $f_{22}$ ,  $f_{33}$ ——纵向、横向和自旋蠕滑系数；

$f_{23}$ ——横向-自旋蠕滑系数。

蠕滑系数的计算由式（3.9）确定：

$$\begin{cases} f_{11} = C_{11}Eab \\ f_{22} = C_{22}Eab \\ f_{23} = C_{23}E(ab)^{3/2} \\ f_{33} = C_{33}E(ab)^2 \end{cases} \quad (3.11)$$

式中：  $E$ ——弹性模量，因为车轮和轨道均为钢材，则取  $E = 210GPa$ ；

$a$ ,  $b$ ——轮轨接触斑椭圆的长半轴和短半轴；

$C_{ij}$ ——Kalker系数，与泊松比和  $a/b$  有关。

大量的实验证明了轮轨蠕滑力和蠕滑率之间，只有在蠕滑率不大情况下两者才成线性关系。换言之就是Kalker线性蠕滑理论一般只在小蠕滑率和小自旋的情形下才采用。在大蠕滑率、大自旋或完全滑动的情形下，两者间不存在线性关系。随着蠕滑率的增大，蠕滑力不能以相同比例增加而最后趋于滑动摩擦力（sliding friction）这一饱和极限。为了确定出轮轨非线性蠕滑力和蠕滑率的关系，我们可采用沈氏理论进行修正。

将纵向蠕滑力  $F_x$  和横向蠕滑力  $F_y$  合成为式（3.10）。

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (3.12)$$

令

$$F' = \begin{cases} fN \left[ \frac{F}{fN} - \frac{1}{3} \left( \frac{F}{fN} \right)^2 + \frac{1}{27} \left( \frac{F}{fN} \right)^3 \right] & (F \leq 3fN) \\ fN & (F > 3fN) \end{cases} \quad (3.13)$$

式中：  $f$  是轮轨间的摩擦系数。

引入修正系数：

$$\varepsilon = \frac{F'}{F} \quad (3.14)$$

则修正以后的蠕滑力和蠕滑力矩为

$$\begin{cases} F'_x = \varepsilon F_x \\ F'_y = \varepsilon F_y \\ M'_z = \varepsilon M_z \end{cases} \quad (3.15)$$

蠕滑力的修正一般采用沈氏理论,此理论能使蠕滑力计算方式能广泛的用于任意蠕滑率和任意自旋的情形,从而更好的有利于车轮与钢轨之间的相互作用的实际工况的仿真计算。计算机计算中,我们把接触斑离散成  $i \times j$  个单元,令  $i = j = 10$ : 于是可以:

接触斑椭圆半径计算程序如下:

```

Clc
Clear all
Rw1=input('请输入车轮平均直径 Rw1: ')
Rw2=input('请输入轮踏面横向曲率半径 Rw2:')
Rr2=input('请输入轨头横向曲率半径 Rr2:')
W=input('请输入轴重质量 W/t: ')
AB=@(Rw1, Rw2, Rr2) (1/Rr2+1/Rw1-1/Rw2)/2;
BA=@(Rw1, Rw2, Rr2) (1/Rw1+1/Rw2-1/Rr2)/2;
AjiaB=AB(Rw1, Rw2, Rr2);
BjianA=BA(Rw1, Rw2, Rr2);
C=BjianA/AjiaB;
seta=acos(C);
seta=seta*180/pi;
seta1=[30 40 50 60 70 80 90];
mm=[2.73 2.14 1.75 1.49 1.28 1.13 1.00];
nn=[0.49 0.57 0.64 0.72 0.80 0.89 1.00];
m=spline(seta1, mm, seta);
n=spline(seta1, nn, seta);
P=W/2;
P=P*1e3;
k12=2*(1-0.09)/(pi*2.1e4);
a=m*(3*pi*P*k12/(4*AjiaB))^(1/3);
b=n*(3*pi*P*k12/(4*AjiaB))^(1/3);
a
b

```

接触斑内总的蠕滑力和蠕滑力矩求解子程序流程图：

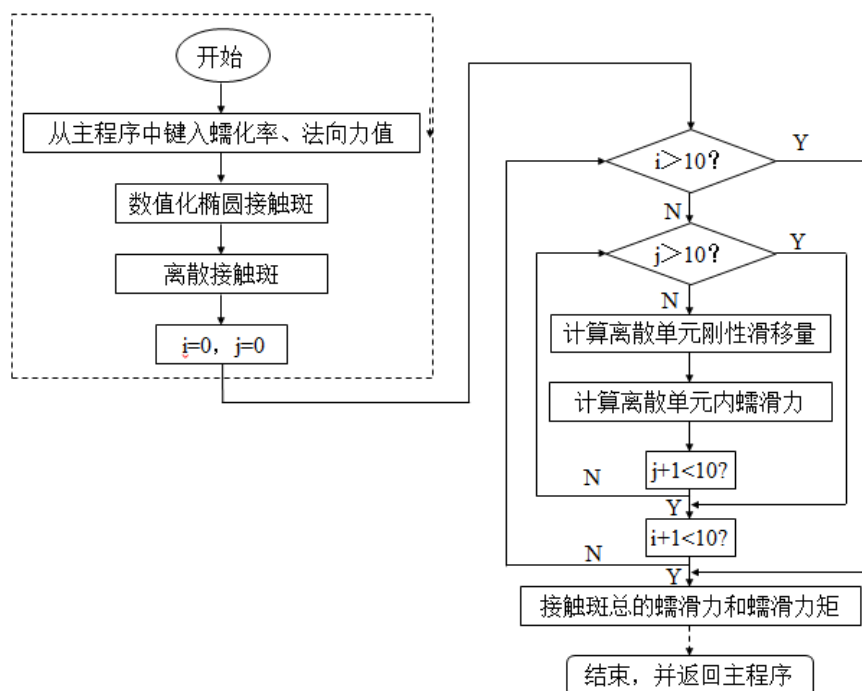


图 3.13 接触斑内总的蠕滑力和蠕滑力矩求解子程序流程图

### 3.5 轮轨作用力求解程序编写及验证

当列车以一定的速度在桥梁轨道上行驶时，车辆通过轮轨相互作用将轮轨力传递给桥梁。因此，车辆荷载是由每一个轮对组成的车辆轴重形成按一定距离排列而成的荷载列。轮轨之间的相互作用力与车速、车辆编组和荷载列等相关。由中华之星动车和CRH系列动车组的车辆轴重组成的荷载排列情形可知：轮对在轨道上运行时，因轨道对车辆轮对有约束作用（例如轮对的垂向运动被约束），所以，车辆轮对的侧滚可根据轮轨的几何接触关系来确定。轮对的自旋和纵向运动因对车桥动力响应的贡献很小故可忽略，故在本文的研究过程当中只考虑轮对横摆和摇头两个自由度。

根据2.2节、3.3.14至3.3.15节等内容，本文在此基础上利用Matlab软件编写了车辆在轨道上运行时轮轨耦合振动仿真分析程序。轮轨力求解程序共包括6个子程序，主要分为输入、计算和输出三个模块。其主要计算流程如图3.12所示。该程序可计算任意编组列车以任意速度在轨道上行驶时轮轨接触几何关系和轮轨之间的相互作用力。主要的计算结果有：轮轨接触点或接触斑处的接触角、轮轨曲面的曲率半径、车轮滚动圆半径、左右轮的各方向的蠕滑率和蠕滑力/力矩和轮轨法向力等。

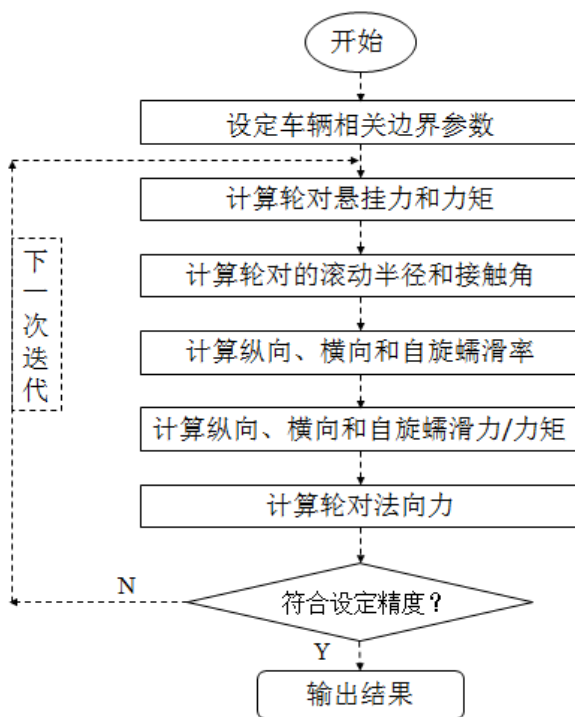


图 3.14 轮轨力计算程序流程图

下面以单轮对轮轨力计算为例来验证程序的准确性。文献[1]进行了机车车辆滚动振动试验台的单轮对蠕滑力试验，实时记录了轮对的转速、轮轨力和悬挂力。试验中采用了国产LM踏面轮对和60kg轨头型面接触，轨距1435mm，轨底坡1/40，滚轮直径1370mm，轴重156kN。轮对横移取值0~14mm，轮对摇头取值0~0.5°。

图3.12为轮对摇头角为零时，随轮对横移时的纵向蠕滑力计算和文献对比曲线。图3.13为轮对横移量为零时，随轮对摇头角变化时的横向蠕滑力计算和文献对比曲线。

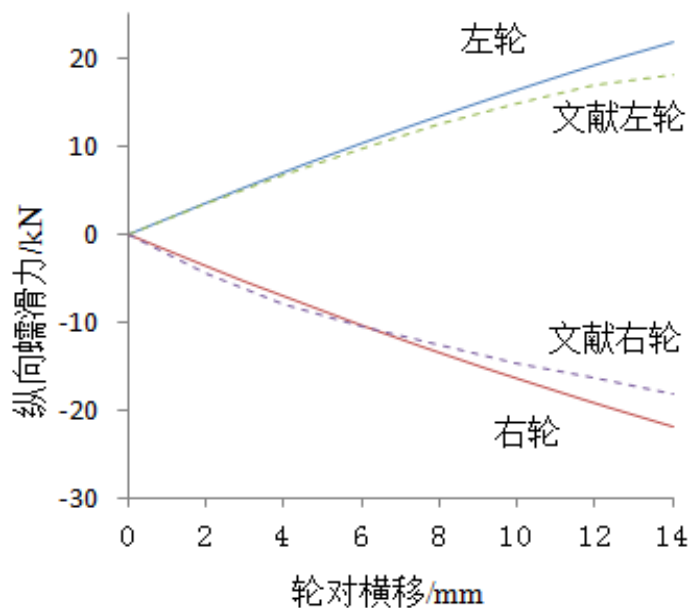


图3.15 随轮对横移时的纵向蠕滑力变化

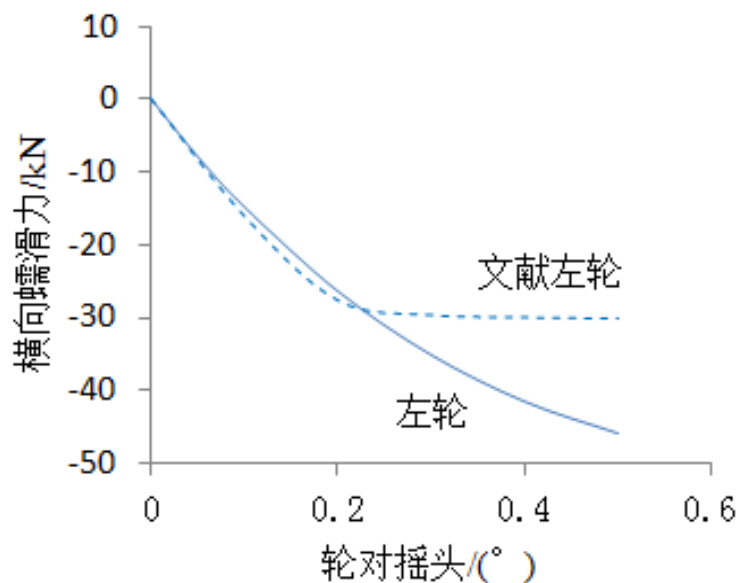


图3.16 随轮对摇头时的横向蠕滑力变化

从图3.15可知，本文计算出来的纵向蠕滑力与文献试验出来的结果吻合程度较好。图3.16中，文献[1]试验结果显示当摇头角接近 $0.3^{\circ}$ 时，横向蠕滑力开始进入饱和状态，因本程序未考虑饱和状态故横向蠕滑力继续线性增长，但这时对应的横向蠕滑率仍然随摇头增大接近线性增大。

由图3.15和图3.16可知，程序计算出来的左右轮对随轮对横移时的纵向蠕滑力和随轮对摇头角变化时的横向蠕滑力与文献试验结果表现出较好的吻合和良好的一致性。

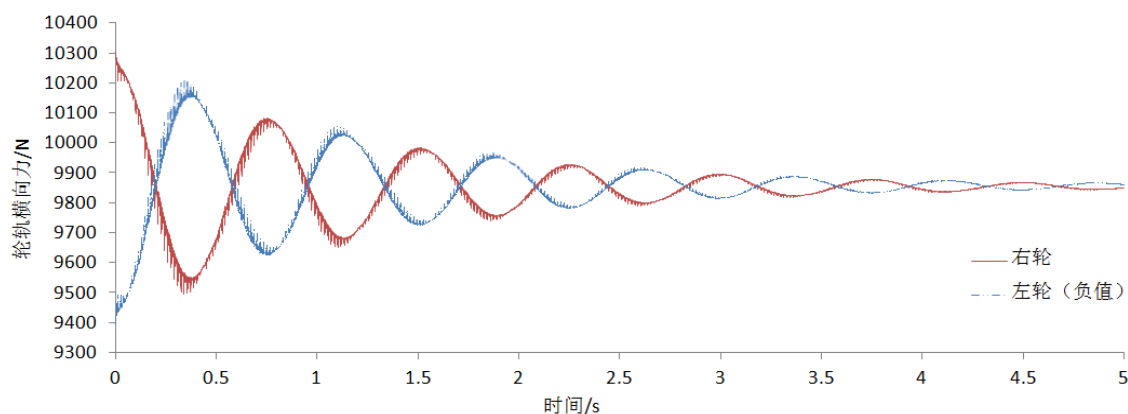


图3.17 轮轨横向力变化曲线

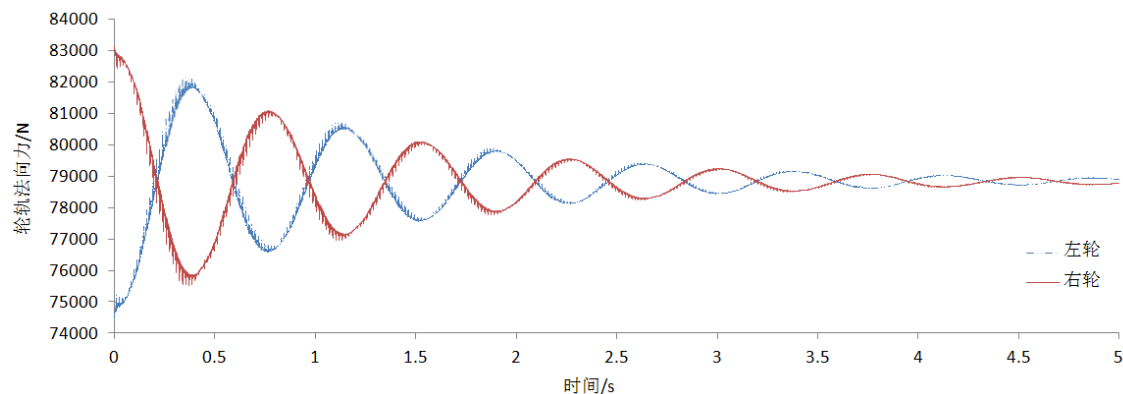


图3.18 轮轨法向力变化曲线

图3.17为轮对横移6mm，轮对摇头取值 $0.15^\circ$ 时的轮轨横向力；图3.7为轮对横移6mm，轮对摇头取值 $0.15^\circ$ 时的轮轨法向力。

图3.18中，左轮计算出来的横向力均为负值，在此取其绝对值与右轮计算出的横向力对比布置在同一图中。在图3.14中左轮横向力的绝对值与右轮横向力大致成反对称状态，说明轮轨整体的横向力比较小，这与“当轮对横移而摇头角为零时，主要验证纵向蠕滑力(这时的横向蠕滑力很小)；当轮对置中改变摇头角时，主要验证横向蠕滑力与文献[1]所述内容相同。在图3.18中左轮法向力与右轮法向力大致成反对称状态，其和值接近收敛于试验中的轴重156kN，说明法向力的计算不失其正确性。由图3.17和图3.18可知，程序计算出来的左右轮对横向力和法向力都具有良好的收敛性，这与轮对在无激励作用下最后趋于稳定运动也是一致的。综上所述，可知本文编写的轮轨力计算程序具有良好的准确性，可用于计算轮轨之间的几何参数和轮轨力。

## 第 4 章 结论与展望

随着我国经济的快速发展及对运输服务质量要求的逐渐提高,修建高速铁路已经被正式提上议事日程。我国在跟踪国外高速铁路技术研究的同时,积极规划高速铁路的同时,通过新的高速客运专线,大力加强现有线路技术改造,大大提高了列车运行速度,但随之而来的轮轨系统动力作用、线路桥梁结构使用安全性问题也越来越突出,这在我国还没有足够的理论研究和工程实践。因此开展铁路车桥系统耦合轮轨接触理论和其动力仿真的课题,具有非常重要的理论和实际意义。

由于列车行进在轨道上时,轮轨起着关键性的作用。轮对在沿着钢轨滚动的接触过程中,不仅承受着较大的载荷,还起到列车的牵引、制动和导向等重要作用。它们之间的作用行为直接影响着列车的运动稳定性和安全。轮轨滚动接触行为和很多因素有关,如轮轨接触表面状态、材料、环境、运动行为和轮轨的几何型面等。所以,轮轨滚动接触是十分复杂的问题。为了确保高速、重载、运输安全,进一步提高运输质量,必须深入细致的研究轮对与轨道的相互作用,而轮轨几何关系的确立和轮轨力快速精确的求解则是必须首先要解决的复杂课题。

### 4.1 结论

1、详细推导了轮轨接触几何关系,给出了轮轨接触几何关系中涉及到的各个接触参数、接触状态;给出了求解轮轨接触点的几种处理方法,即针对特殊轮轨型面的几何解析方法,针对任意形状的空间搜索迭代方法和迹线搜索法,本文在具体实施过程中,对迭代方法进行了改进,对判据条件进行了改进,使其更加符合实际条件,最后给出了特定条件下,轮轨几何接触参数间的关系图。

2、基于弹性力学、接触力学的理论,推导了轮轨间的垂向接触力,得到了轮轨垂向力的计算公式、轮轨接触椭圆斑的长短轴计算公式。根据Kalker线性蠕滑假设,推导了蠕滑力的公式推导过程。

3、主要针对客车,以二系悬挂四轴机车车辆为研究对象,建立了包含31个自由度的车辆分析体系,机车车辆的车体、前后转向架、轮对都看作刚体。车体和转向架由沉浮、点头、横摆、摇头、侧滚五个自由度组成;各个轮对由沉浮、侧滚、横摆、摇头四个自由度组成。机车动力学分析模型通过达朗贝尔原理建立,并写成了矩阵形式,最后编写了相应的计算程序。

4、给出了几种常见的数值积分方法,如Newmark- $\beta$ 法、wilson- $\theta$ 法、一种新型的显式积分方法等,根据各个程序的特点,编制了相关的计算程序,作为求解器。

5、根据蠕滑理论并结合matlab进行自主编程,通过轮轨相互作用关系求解出行驶在桥梁上的不同类型的和谐号动车组的轮轨力,如法向力和切向蠕滑力,并与相关文献的



轮轨力试验结果进行了对比,结果表明轮轨力的计算程序具有良好的准确性且具有足够的精度。

6、根据轮轨接触几何关系搜索轮轨的接触点。优化了求解接触点的过程。分别求出车轮踏面及轨道踏面的解析表达式,相对于前人的利用CAD导入图形进行离散并插值的方法,本文的方法更为简洁更为精确。求出接触点坐标后,根据几何关系求得接触点处的接触角、侧滚角及蠕滑率等,为轮轨力的求解与分解提供依据。文中叙述了计算原理和计算机迭代求解过程。

7、改进了轮轨接触力的耦合计算模式。理想情况下,耦合力包括赫兹力和蠕滑力。对于轮轨的横向耦合,在赫兹力的变化上体现得比较明显,所以本文在编制程序时,对左右侧赫兹力分别求解,并且根据第三章得到的几何关系分别进行投影,用迭代法来确定轮轨力,相比于前人的计算结果,这种新方法的计算结果更加合理。

8、利用我们编制的相关程序做了若干计算及整体算例,并进行了分析。得到以下几点结论:

a) 在横移量-10mm和10mm时,轮轨接触角、轮对侧滚角及X、Y方向的蠕滑率分别发生较大变化,此时相应的轮轨接触力的横向分量也会产生较大变化,这样既满足了车体回复的刚度需求,又为减少轮轨局部磨损提供了韧性条件。

b) 左右侧赫兹力横向合力对车桥的横向耦合起主要作用,左侧赫兹力在横向的分量方向向右,右侧赫兹力在横向的分量方向向左。当轮对向左横移超过2mm的时候,根据几何接触关系可知,左侧的接触角变大,右侧接触角变小,此时左侧赫兹力在横向的分量增大,右侧赫兹力在横向的分量减小,左右侧横向合力向右,推动轮对向右移动,趋于平衡位置。当轮对向右横移超过2mm的时候,左右侧横向合力恰好相反,推动轮对向左移动,趋于平衡位置。

c) 蠕滑力的方向取决于轮对横移速度方向,蠕滑力的方向与速度方向相反,起到阻碍轮对横移的作用,使轮对趋于平衡位置,进而影响到车桥的耦合。

d) 蠕滑力的大小受赫兹力的影响,而蠕滑力又影响轮对的速度,继而影响轮对的位移,而轮对的位移直接影响赫兹力,使轮对趋于平衡位置,这就是轮轨力对车桥耦合的影响机制。

## 4.2 展望

车辆轮轨接触是一个十分复杂的问题，它所涉及到的学科领域非常的多，比如桥梁工程、结构动力学、铁道与铁路工程、车辆工程、空气动力学、接触力学等。如果现在要完全真实地反应出车桥耦合振动系统的相互作用关系，这就需要综合考虑诸多方面的相互作用及平衡关系，同时也表明这样的分析计算求解是比较复杂的。尽管本文在计算车辆轮轨力研究方面有一定的进步，但与实际情况还有一定差距，因此仍然还需要在以下几个方面做进一步的研究：本文在研究车辆轮轨力的时候，未考虑钢轨的参振，对于参振的道渣、轨道板以及桥梁的桥墩、桥墩与土体的相互作用等因素对车桥耦合振动响应的影响，出了模型的简化考虑，也未详细的考虑。本文也未涉及。这些都是亟待解决的复杂问题。

## 参考文献

- [1] 张卫华, 金学松, 薛弼一. 单轮对试验台试验及轮轨蠕滑力计算模型的验证[J]. 铁道车辆, 1997, 05:3-6+11.
- [2] 董锡明, 近代高速列车技术进展[J] 铁道机车车辆, 2006, 26(5): 1-11
- [3] 乔英忍, 世界铁路动车组的技术进步、水平和展望(待续)[J] 国外铁道车辆, 2007, 44 (2): 1-7
- [4] 乔英忍, 世界铁路动车组的技术进步、水平和展望(续完)[J] 国外铁道车辆, 2007, 44(3): 7-12
- [5] 陈泽深, 王成国 完整的车辆—轨道系统动力学研究是铁路发展的迫切需要(1)[J] 铁道机车车辆, 2004, 24(2): 1-8
- [6] 任尊松, 车辆系统动力学[M] 北京: 中国铁道出版社, 2007
- [7] 杨国伟, 魏宇杰, 赵桂林, 刘玉标, 曾晓辉等 高速列车的关键力学问题[J] 力学进展, 2015, 00:217-460
- [8] 曹素功, 风和列车荷载作用下大跨桥梁动力分析[D] 湘潭大学, 2014
- [9] 陈锐林, 强风作用下列车脱轨分析[D] 中南大学, 2008
- [10] 沈志云, 张卫华, 金学松, 曾京, 张立民 轮轨接触力学研究的最新进展[J] 中国铁道科学, 2001, 02:4-17
- [11] 张卫华, 金学松, 薛弼一, 单轮对试验台试验及轮轨蠕滑力计算模型的验证[J] 铁道车辆, 1997, 05:3-6+11
- [12] 金学松, 张雪珊, 张剑, 孙丽萍, 王生武, 轮轨关系研究中的力学问题[J] 机械强度, 2005, 27(4):408-418
- [13] 李小珍, 高速铁路列车—桥梁系统耦合振动理论及应用研究: [博士学位论文], 成都: 西南交通大学, 2000
- [14] 王开云, 翟婉明等, 机车车辆横向动力学性能仿真——车辆—轨道耦合模型与传统车辆模型的比较, 四川成都西南交通大学学报 2003, 38(1) -17-21
- [15] 王雨权, 高速铁路车桥耦合系统轮轨接触理论及动力仿真分析, [硕士学位论文], 天津: 天津大学 2007
- [16] 王贵春, 潘家英, 轨道不平顺导致的车桥耦合振动分析, 北京: 铁道工程学报 2006(8) -30-33, 57
- [17] 任尊松, 车辆系统动力学, 北京: 中国铁道出版社, 2007
- [18] 赵怀耘, 刘建新, 翟婉明, 板式轨道动力响应分析方法, 四川成都: 交通运输工程学报 2007, 7(5) -19-23
- [19] 晋智斌, 强士中, 李小珍, 高速列车-桥梁竖向随机振动的时域分析方法, 四川成都: 地震工程与工程振动 2008, 28(3) -110-115

- [20] 夏禾, 张宏杰, 曹艳梅, 等. 车桥耦合系统在随机激励下的动力分析及其应用[J]. 工程力学, 2003, 20(1): 142—149.
- [21] Hans T Dynamics of a rolling wheelset appl mech rev , 1993, 46(7): 438-444
- [22] 金学松, 沈志云轮轨滚动接触力学的发展 力学进展, 2001, 31(1):33-46
- [23] 翟婉明, 国际铁道车辆系统动力学研究新进展 铁道车辆 2004, 42 (1):1
- [24] 金学松, 温泽峰, 张卫华轮对运动状态对轮轨接触应力的影响 工程力学 2004(21):165-173
- [25] 金学松, 温泽峰, 张卫华两种型面轮轨滚动接触应力分析 机械工程学报 2004(2)
- [26] Anant Mohan, Mehdi Ahmadian Nonlinear investigation of the effect of primary suspension on the hunting stability of a real wheelset Proceedings of the 2004 ASME/IEEE Joint Rail Conference, 2004:53-61
- [27] Kalker J J A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact Vehicles System Dynamics, 1982, 11:1-13
- [28] 顾理生, 车桥耦合振动中的轮轨力研究: [硕士学位论文], 石家庄: 石家庄铁道学院, 2006
- [29] 严隽, 王开文, 任意形轮轨接触关系的计算, 铁道车辆, No 2, 1984
- [30] 王开文, 车轮接触点迹线及轮对接触几何参数的计算, 西南交通大学学报, No 1, 1984
- [31] I Y Shevtsov, V L Markine and C Esvelde Optimal design of wheel profile for railway vehicles Wear, 2005, 258:1022~1030
- [32] Xia He, et al Computer simulation for dynamics of railway track structures[A] 4th Annual Railway Transportation Conference[C] 2000, Tehran, Iran, 169~176
- [33] T X Mei, Z Nagy, R M Goodall, A H Wickens Mechatronic solutions for high-speed railway vehicles Control Engineering, Practice, 2002, 10: 1023~1028
- [34] 翟婉明, 车辆—轨道耦合动力学 (第二版), 北京: 中国铁道出版社, 2002
- [35] Li SL, Wang WD Dynamic analysis of articulated vehicles considering car-body elasticity J China Railway Sci 1997; 18(2):77-85
- [36] 沈志云, 张卫华, 金学松等, 轮轨接触力学研究的最新进展, 中国铁道科学, 2001, 22 (2) 1: 14
- [37] 夏富杰, 詹斐生, 张卫华, 轮轨几何接触的通解研究, 机械工程学报, 2000, 36 (8) 51: 54
- [38] 柳拥军, 丁莉芬, 付秀通, 轮轨几何接触数值解法的分析与改进, 北方交通大学学报, 2003, 27(1):21-24
- [39] 王珏, 李治, 一种轮轨接触几何算法, 西南交通大学学报, 2003, 38 (2) 132: 137
- [40] 王开云, 翟婉明, 蔡成标, 轮轨型面及系统参数对轮轨空间接触几何关系的影响, 2002, 40 (2) 14: 18
- [41] 王雨权, 铁路车桥耦合轮轨接触理论及动力仿真[D] 天津大学, 2007
- [42] 曹保, 单轮对通过客运专线 18 号道岔的蛇行运动及三维动画研究[D] 西南交通大

- [43] 严晓明, 单轮对纵向颤振计算机仿真研究[D] 西南交通大学, 2006
- [44] 王向平, 轮轨作用力对高速铁路车桥耦合的影响[D] 天津大学, 2009
- [45] 陈锐林, 曾庆元. 横风对列车通过曲线限制速度影响的数值研究[J]. 铁道学报, 2009, 01:40-45.
- [46] R.L.Chen, R.H.Gao, S.G.Cao et al. Review and the trend of study on dynamic equations and its algorithm of train-bridge time-varying system[A].The First International Conference on Railway Technology: Research, Development and Maintenance[C].Las Palmas de Gran Canaria: Civil—Comp Press, 2012.
- [47] Sugong Cao, Ruilin Chen, Zhang Tang et al.Comparison Analysis of Train Derailment Between Bridges and Lines[J].Applied Mechanics and Materials, 2013, 423-426:2941-2945.
- [48] Jun, Xiang, and Zeng Qingyuan. A study on mechanical mechanism of train derailment and preventive measures for derailment[J]. Vehicle system dynamics, 2005, 43(2):121-147.
- [49] Xiang, Jun, Qing-yuan Zeng, and Ping Lou.Theory of random energy analysis for train derailment[J]. Journal of Central South University of Technology, 2003, 10(2):134-139.
- [50] Chen, RuiLin, et al.Analysis theory of random energy of train derailment in wind[J]. Science China Physics, Mechanics and Astronomy 2010, 53(4):751-757.
- [51] XIANG, Jun, and Q. Y. Zeng. Mechanism and energy random analysis of train derailment on railway bridges[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2009, 9(4):585-605.
- [52] Xiang, Jun, Qingyuan Zeng, and Ping Lou. Transverse vibration of train-bridge and train-track time varying system and the theory of random energy analysis for train derailment[J]. Vehicle System Dynamics, 2004, 41(2):129-155.
- [53] 陈锐林, 强风作用下列车脱轨分析[D].中南大学, 2008

## 致谢

本论文的工作是在我的导师陈锐林老师的悉心指导下完成的。陈老师对待学术的热爱及其严谨态度对我的影响很大，读硕士期间从陈老师这里学到的科学的工作方法及严谨的治学态度将使我终生受益。在此衷心感谢这三年中陈老师对我学习和生活上的关心和指导。

在硕士课程学习及论文撰写期间，感谢师兄曹素功以同门陈欢、戴可以、任海龙、对我论文中的程序设计工作提出了许多的宝贵建议，在此向他们表达我的感激之情。感谢师兄唐世江和师弟胡迪、夏祥忠、在学习中的帮助和支持。感谢师母黄蝶女士和师妹陈可意在生活上给予的热情帮助。

在此还要特别感谢金发科技工程部靳丽晓部长在实习期间上给予的帮助和支持。

感谢湘潭大学土木工程与力学学院游世辉老师、董辉老师、印长俊老师、赵荣国老师、谭红霞老师、周靖老师、龙志林老师、杨栋老师、刘望老师和张慧老师等的辛勤工作，为我硕士阶段的学习和生活提供了许多帮助。

最后，特别感谢我的家人，他们的理解和支持使我能够有充足的时间和精力专心完成我的学业。

## 附录 A 轮轨力计算模型仿真程序语言及注释

```

% M 文件名:轮轨力计算模型仿真 ( wheelset.m )
% M 文件类型: 函数文件
% 这个函数文件识别单点(踏面接触)和两点(踏面和轮缘接触)方程, 构成单轮对在直线轨道上滚动的动力分析数学模型。该方程由状态空间形式推出。这个函数被'equations.m'函数文件调用用来求解轮对运动微分方程。轮对横向、摇头位移和速度, 和左、右轨道横向位移作为此函数的输入参数来求解轮对响应。此外, 车轮悬挂力和悬挂力矩也是输入参数。
% 此函数需要调用下列函数文件'rolling_radius', 'contact_angle', 'onept_creep', 'onept_normal', 'twopt_creep', and 'twopt_normal'.
function [xdot1,xdot2,xdot3,xdot4,xdot5,xdot6,phi]=wheelset(x1,x2,x3,x4,x5,x6,Fsuspyw,Msuspyw)
% 模拟所用参数
% V: 轮对前进速度 (m/sec)
% lambda: 车轮踏面锥度
% a: 轴距 (m)
% r0: 车轮中心滚动半径 (m)
% yfc: 轮缘间隙或轮缘宽度 (m)
% yfctol: 为了促进数值模拟而增加到轮缘间隙的横向公差 (m)
% mw: 轮对质量 (kg)
% Iwz: 轮对摇头主惯性矩 (kg-m2)
% Iwy: 轮对点头主惯性矩 (kg-m2)
% krail: 轨道有效横向刚度 (N/m)
% crail: 轨道有效横向阻尼 (N/m)
% g: 重力加速度 (m/s2)
% 指示变量的全局特性, 这意味着变量的值不需要在这个函数文件中指定。这些值从主程序文件'single_wheelset.m'中自动得到。
global V lambda a r0 yfc yfctol mw Iwz Iwy krail crail g;
% Nomenclature:
% rlt: 左轮踏面接触斑的滚动半径
% rlf: 左轮翼缘接触斑的滚动半径
% rrt: 右轮踏面接触斑的滚动半径
% rrf: 右轮翼缘接触斑的滚动半径
% deltalt: 左轮踏面接触斑的接触角
% deltalf: 左轮翼缘接触斑的接触角
% deltart: 右轮踏面接触斑的接触角
% deltarf: 右轮翼缘接触斑的接触角
% rl: 左轮接触斑的滚动半径(单点接触)
% rr: 右轮接触斑的滚动半径(单点接触)
% deltal: 补偿轮对滚动角之后的左轮接触斑有效接触角 (单点接触)
% deltatl: 补偿轮对滚动角之后的左轮踏面接触斑有效接触角 (两点接触)
% deltafl: 补偿轮对滚动角之后的左轮轮缘接触斑有效接触角 (两点接触)
% deltar: 补偿轮对滚动角之后的右轮接触斑有效接触角 (单点接触)
% deltatr: 补偿轮对滚动角之后的右轮踏面接触斑有效接触角 (两点接触)
% deltafr: 补偿轮对滚动角之后的右轮轮缘接触斑有效接触角 (两点接触)
% lambdal: 左轮接触斑切线斜率(单点接触)
% lambdalt: 左轮踏面接触斑切线斜率(两点接触)
% lambdalf: 左轮轮缘接触斑切线斜率(两点接触)
% lambdar: 右轮接触斑切线斜率(单点接触)
% lambdart: 右轮踏面接触斑切线斜率(两点接触)
% lambdarf: 右轮轮缘接触斑切线斜率(两点接触)

```

```

% phi: 轮对滚动角
% dphi: 轮对滚动角变化率
% etaxl: 左轮接触斑纵向蠕滑率(单点接触)
% etaxlt: 左轮踏面接触斑纵向蠕滑率(两点接触)
% etaxlf: 左轮轮缘接触斑纵向蠕滑率(两点接触)
% etayl: 左轮接触斑横向蠕滑率(单点接触)
% etaylt: 左轮踏面接触斑横向蠕滑率(两点接触)
% etaylf: 左轮轮缘接触斑横向蠕滑率(两点接触)
% etaspl: 左轮接触斑横自旋蠕滑率(单点接触)
% etasplt: 左轮踏面接触斑自旋蠕滑率(两点接触)
% etasplf: 左轮轮缘接触斑自旋蠕滑率(两点接触)
% etaxr: 右轮接触斑纵向蠕滑率(单点接触)
% etaxrt: 右轮踏面接触斑纵向蠕滑率(两点接触)
% etaxrf: 右轮轮缘接触斑纵向蠕滑率(两点接触)
% etayr: 右轮接触斑横向蠕滑率(单点接触)
% etayrt: 右轮踏面接触斑横向蠕滑率(两点接触)
% etayrf: 右轮轮缘接触斑横向蠕滑率(两点接触)
% etaspr: 右轮接触斑横自旋蠕滑率(单点接触)
% etasprt: 右轮踏面接触斑自旋蠕滑率(两点接触)
% etasprf: 右轮轮缘接触斑自旋蠕滑率(两点接触)
% Fcxl: 左轮接触斑纵向蠕滑力(单点接触)
% Fcxlt: 左轮踏面接触斑纵向蠕滑力(两点接触)
% Fcxlf: 左轮轮缘接触斑纵向蠕滑力(两点接触)
% Fcyl: 左轮接触斑横向蠕滑力(单点接触)
% Fcylt: 左轮踏面接触斑横向蠕滑力(两点接触)
% Fcylf: 左轮轮缘接触斑横向蠕滑力(两点接触)
% Fczl: 左轮接触斑垂向蠕滑力(单点接触)
% Fczlt: 左轮踏面接触斑垂向蠕滑力(两点接触)
% Fczlf: 左轮轮缘接触斑垂向蠕滑力(两点接触)
% Mcxl: 左轮接触斑纵向蠕滑力矩(单点接触)
% Mcxlt: 左轮踏面接触斑纵向蠕滑力矩(两点接触)
% Mcxlf: 左轮轮缘接触斑纵向蠕滑力矩(两点接触)
% Mcyl: 左轮接触斑横向蠕滑力矩(单点接触)
% Mcylt: 左轮踏面接触斑横向蠕滑力矩(两点接触)
% Mcylf: 左轮轮缘接触斑横向蠕滑力矩(两点接触)
% Mczl: 左轮接触斑垂向蠕滑力矩(单点接触)
% Mczlt: 左轮踏面接触斑垂向蠕滑力矩(两点接触)
% Mczlf: 左轮轮缘接触斑垂向蠕滑力矩(两点接触)
% Fcxr: 右轮接触斑纵向蠕滑力(单点接触)
% Fcxrt: 右轮踏面接触斑纵向蠕滑力(两点接触)
% Fcxrf: 右轮轮缘接触斑纵向蠕滑力(两点接触)
% Fcyr: 右轮接触斑横向蠕滑力(单点接触)
% Fcyrt: 右轮踏面接触斑横向蠕滑力(两点接触)
% Fcyrf: 右轮轮缘接触斑横向蠕滑力(两点接触)
% Fcyr: 右轮接触斑垂向蠕滑力(单点接触)
% Fczrt: 右轮踏面接触斑垂向蠕滑力(两点接触)
% Fczrf: 右轮轮缘接触斑垂向蠕滑力(两点接触)
% Mcxr: 右轮接触斑纵向蠕滑力矩(单点接触)
% Mcxrt: 右轮踏面接触斑纵向蠕滑力矩(两点接触)
% Mcxrf: 右轮轮缘接触斑纵向蠕滑力矩(两点接触)
% Mcyr: 右轮接触斑横向蠕滑力矩(单点接触)
% Mcyrt: 右轮踏面接触斑横向蠕滑力矩(两点接触)

```



```

% Mcyrf: 右轮轮缘接触斑横向蠕滑力矩(两点接触)
% Mczr: 右轮接触斑垂向蠕滑力矩(单点接触)
% Mczrt: 右轮踏面接触斑垂向蠕滑力矩(两点接触)
% Mczrf: 右轮轮缘接触斑垂向蠕滑力矩(两点接触)
% Fnlyl: 左轮接触斑横向法向力(单点接触)
% Fnlylt: 左轮踏面接触斑横向法向力(两点接触)
% Fnlylf: 左轮轮缘接触斑横向法向力(两点接触)
% Fnztl: 左轮接触斑垂向法向力(单点接触)
% Fnzlt: 左轮踏面接触斑垂向法向力(两点接触)
% Fnzlf: 左轮轮缘接触斑垂向法向力(两点接触)
% Fnlyr: 右轮接触斑横向法向力(单点接触)
% Fnlyrt: 右轮踏面接触斑横向法向力(两点接触)
% Fnlyrf: 右轮轮缘接触斑横向法向力(两点接触)
% Fnzr: 右轮接触斑垂向法向力(单点接触)
% Fnzrt: 右轮踏面接触斑垂向法向力(两点接触)
% Fnzrf: 右轮轮缘接触斑垂向法向力(两点接触)
% 从'rolling_radius'函数文件和'contact_angle'函数文件中获取/调用左、右轮接触斑滚动半径和接触角。
[rlt,rlf,rrt,rrf]=rolling_radius(x1,x1-x5,x6-x1);
[deltalt,deltalf,deltart,deltarf]=contact_angle(x1,x1-x5,x6-x1);
% 根据上一个时间步长结束时的单点或两点接触条件选择 1 组微分方程求解。
% 单点接触方程—右轮轮缘接触和左轮踏面接触
if (x6-x1)>(yfc+yfctol)
    % 指定变量名称, 左、右轮接触斑的轧制半径
    rl=rlt;
    rr=rrf;
    % 计算左、右轮接触斑的切线斜率
    lambdal=tan(deltalt);
    lambdar=tan(deltarf);
    % 计算轮对滚动角及其变化率
    phi=(rl-rr)/(2*a);
    dphi=(lambdal+lambdar)*(x3/(2*a));
    % 通过补偿轮对滚动角计算左、右轮接触斑的有效接触角
    deltal=deltalt+phi;
    deltar=deltarf-phi;
    % 计算左轮踏面接触斑纵向、横向和自旋蠕滑率
    etaxl=-a*(x4/V)+(1-rl/r0);
    etayl=((x3/V)-x2*(rl/r0)+rl*dphi/V)/cos(deltal);
    etaspl=((x4/V)+(phi/r0))*cos(deltal)-(1/r0)*sin(deltal);
    % 计算右轮轮缘接触斑纵向、横向和自旋蠕滑率
    etaxr=a*(x4/V)+(1-rr/r0);
    etayr=((x3/V)-x2*(rr/r0)+rr*dphi/V)/cos(deltar);
    etaspr=((x4/V)+(phi/r0))*cos(deltar)+(1/r0)*sin(deltar);
    % 从'onept_creep'函数文件中获取/调用左、右轮接触斑蠕滑力和蠕滑力矩。

[Fcxl,Fcyl,Fczl,Mcxl,Mcyl,Mczl,Fcxr,Fcyr,Fczr,Mcxr,Mcyr,Mcyr,Mczt]=onept_creep(etaxl,etayl,etaspl,etaxr,etayr,etaspr,deltal,deltar);
% 从'onept_normal'函数文件中获取/调用左、右轮接触斑法向力。

[Fnlyl,Fnzl,Fnyr,Fnzt]=onept_normal(x2,x4,deltal,deltar,rl,rr,Fcxl,Fcxr,Fcyl,Fcyr,Fczl,Fczr,Mcyl,Mcyr);
% 建立状态空间形式的单点方程
xdot1=x3;
xdot2=x4;
xdot3=1/mw*(Fcyl+Fcyr+Fnlyl+Fnyr+Fsuspyw-mw*g*lambda*x1/a);

```

```

xdot4=1/Iwz*((-Iwy*V/r0*dphi)-a*(Fcxl-Fcxr)-x2*((a-rl*tan(deltal))*(Fcyl+Fnyl)-(a-rr*tan(deltar))*(Fcyr
+Fnyr))+Mczl+Mczr+Msuspzw);
    xdot5=(1/crail)*(-Fnyl-Fcyl-krail*x5);
    xdot6=(1/crail)*(-Fnyr-Fcyr-krail*x6);
    % 两点接触方程—右轮两点接触和左轮踏面接触
elseif (x6-x1)>yfc
    % 指定变量名称, 左轮接触斑轧制半径
    rl=rlt;
    % 计算左、右轮接触斑切线斜率
    lambdal=tan(deltalt);
    lambdalt=tan(deltart);
    lambdarf=tan(deltarf);
    % 计算轮对滚动角及其变化率
    phi=(rl-rrt)/(2*a);
    dphi=(lambdal+lambdarf)*(x3/(2*a));
    % 通过补偿轮对滚动角计算左、右轮接触斑的有效接触角
    deltal=deltal+phi;
    deltatr=deltart-phi;
    deltafr=deltarf-phi;
    % 计算右轮踏面、轮缘接触斑的纵向、横向和自旋蠕滑率
    etaxrt=a*(x4/V)+(1-rrt/r0);
    etayrt=((x3/V)-x2*(rrt/r0)+rrt*dphi/V)/cos(deltatr);
    etasprt=((x4/V)+(phi/r0))*cos(deltatr)+(1/r0)*sin(deltatr);
    etaxrf=a*(x4/V)+(1-rrf/r0);
    etayrf=((x3/V)-x2*(rrf/r0)+rrf*dphi/V)/cos(deltafr);
    etasprf=((x4/V)+(phi/r0))*cos(deltafr)+(1/r0)*sin(deltafr);
    % 计算左轮踏面接触斑纵向、横向和自旋蠕滑率
    etaxl=-a*(x4/V)+(1-rl/r0);
    etayl=((x3/V)-x2*(rl/r0)+rl*dphi/V)/cos(deltal);
    etaspl=((x4/V)+(phi/r0))*cos(deltal)-(1/r0)*sin(deltal);
    % 从'twopt_creep'函数文件中获取/调用左、右轮接触斑蠕滑力和蠕滑力矩。

[Fcxrt,Fcyrt,Fczrt,Mcxrt,Mcyrt,Mczrt,Fcxrf,Fcyrf,Fczrf,Mcxrf,Mcyrf,Mczrf,Fcxl,Fcyl,Fczl,Mcxl,Mcyl,Mc
zl]=twopt_creep(x1,etaxrt,etayrt,etasprt,etaxrf,etayrf,etasprf,etaxl,etayl,etaspl,deltatr,deltafr,deltal);
    % 当车辆右轮两点接触时, 修正垂向蠕滑力分量符号。
    Fczrt=-Fczrt; Fczrf=-Fczrf; Fczl=-Fczl;
    Mcyrt=-Mcyrt; Mcyrf=-Mcyrf; Mcyl=-Mcyl;
    % 反转横向蠕滑力值的符号, 以适应'正确'条件下的'twopt_normal'函数
    yfc=-yfc;Fcyrt=-Fcyrt;Fcyrf=-Fcyrf;Fcyl=-Fcyl;
    % 反转 X1, X2, X3, X4 的符号, 允许左右横移的镜像效应
    x1=-x1;x2=-x2;x3=-x3;x4=-x4;
    % 从'twopt_normal'函数文件中获取/调用左、右轮接触斑法向力。

[Fnyrt,Fnzrt,Fnyrf,Fnzrf,Fnyl,Fnzl]=twopt_normal(x1,x2,x3,x4,deltatr,deltafr,deltal,rrt,rrf,rl,Fcxrt,Fcyrt,Fc
zrt,Fcxrf,Fcyrf,Fczrf,Fcxl,Fcyl,Fczl,Mcyrt,Mcyrf,Mcyl);
    % 修正横向法向力符号来调整镜像效应, 恢复横向蠕滑力的符号
    Fnyrt=-Fnyrt; Fnyrf=-Fnyrf; Fnyl=-Fnyl; Fcyrt=-Fcyrt; Fcyrf=-Fcyrf; Fcyl=-Fcyl;
    % 恢复 X1, X2, X3, X4 的符号
    x1=-x1;x2=-x2;x3=-x3;x4=-x4;
    % 建立状态空间形式的右轮两点接触两点方程
    xdot1=x3;
    xdot2=x4;
    xdot3=1/mw*(Fcyrt+Fcyrf+Fcyl+Fnyrt+Fnyrf+Fnyl+Fsuspyw-mw*g*lambda*x1/a);

xdot4=1/Iwz*((-Iwy*V/r0*dphi)+a*(Fcxrt+Fcxrf-Fcxl)+x2*((a-rrt*tan(deltatr))*(Fcyrt+Fnyrt)+(a-rrf*tan(
deltafr))*(Fcyrf+Fnyrf)-(a-rl*tan(deltal))*(Fcyl+Fnyl))+Mczrt+Mczrf+Msuspzw);
    xdot5=(1/crail)*(-Fnyl-Fcyl-krail*x5);

```

```

xdot6=(1/crail)*(-Fnyrt-Fnyrf-Fcyrt-Fcyrf-krail*x6);
% 单点接触方程—右轮踏面接触和左轮轮缘接触
elseif (x1-x5)>(yfc+yfctol)
    % 指定变量名称, 左、右轮接触斑轧制半径
    rl=rlf;
    rr=rrt;
    % 计算左、右轮接触斑切线斜率
    lambdal=tan(deltalf);
    lambdar=tan(deltart);
    % 计算轮对滚动角及其变化率
    phi=(rl-rr)/(2*a);
    dphi=(lambdal+lambdar)*(x3/(2*a));
    % 通过补偿轮对滚动角计算左、右轮接触斑的有效接触角
    deltal=deltalf+phi;
    deltar=deltart-phi;
    % 计算左轮轮缘接触斑的纵向、横向和自旋蠕滑率
    etaxl=-a*(x4/V)+(1-rl/r0);
    etayl=((x3/V)-x2*(rl/r0)+rl*dphi/V)/cos(deltal);
    etaspl=((x4/V)+(phi/r0))*cos(deltal)-(1/r0)*sin(deltal);
    % 计算右轮踏面接触斑的纵向、横向和自旋蠕滑率
    etaxr=a*(x4/V)+(1-rr/r0);
    etayr=((x3/V)-x2*(rr/r0)+rr*dphi/V)/cos(deltar);
    etaspr=((x4/V)+(phi/r0))*cos(deltar)+(1/r0)*sin(deltar);
    % 从'onept_creep'函数文件中获取/调用左、右轮接触斑蠕滑力和蠕滑力矩。

[Fcxl,Fcyl,Fcxl,Mcxl,Mcyl,Mcxl,Fcxr,Fcyr,Fcyr,Mcxr,Mcyr,Mcyr]=onept_creep(etaxl,etayl,etaspl,etaxr,etayr,etaspr,deltal,deltar);

% 从'onept_normal'函数文件中获取/调用左、右轮接触斑法向力。

[Fnyl,Fnzl,Fnyr,Fnzh]=onept_normal(x2,x4,deltal,deltar,rl,rr,Fcxl,Fcxr,Fcyl,Fcyr,Fcyl,Fcyr,Mcyl,Mcyr);

% 建立状态空间形式的单点方程
xdot1=x3;
xdot2=x4;
xdot3=1/mw*(Fcyl+Fcyr+Fnyl+Fnyr+Fsuspyw-mw*g*lambdax1/a);

xdot4=1/Iwz*((-Iwy*V/r0*dphi)-a*(Fcxl-Fcxr)-x2*((a-rl*tan(deltal))*(Fcyl+Fnyl)-(a-rr*tan(deltar))*(Fcyr+Fnyr))+Mcxl+Mczr+Msuspzw);
xdot5=(1/crail)*(-Fnyl-Fcyl-krail*x5);
xdot6=(1/crail)*(-Fnyr-Fcyr-krail*x6);
% 两点接触方程—右轮踏面接触和左轮两点接触
elseif (x1-x5)>yfc
    % 指定变量名称, 右轮接触斑轧制半径
    rr=rrt;
    % 计算左、右轮接触斑切线斜率
    lambdar=tan(deltart);
    lambdalt=tan(deltalt);
    lambdalf=tan(deltalf);
    % 计算轮对滚动角及其变化率
    phi=(rlt-rr)/(2*a);
    dphi=(lambdalf+lambdar)*(x3/(2*a));
    % 通过补偿轮对滚动角计算左、右轮接触斑的有效接触角
    deltatl=deltalt+phi;
    deltafl=deltalf+phi;
    deltar=deltart-phi;
    % 计算右轮踏面接触斑的纵向、横向和自旋蠕滑率

```

```

etaxr=a*(x4/V)+(1-rr/r0);
etayr=((x3/V)-x2*(rr/r0)+rr*dphi/V)/cos(deltar);
etaspr=((x4/V)+(phi/r0))*cos(deltar)+(1/r0)*sin(deltar);
% 计算左轮踏面、轮缘接触斑的纵向、横向和自旋蠕滑率
etaxlt=-a*(x4/V)+(1-rlt/r0);
etaylt=((x3/V)-x2*(rlt/r0)+rlt*dphi/V)/cos(deltatl);
etasplt=((x4/V)+(phi/r0))*cos(deltatl)-(1/r0)*sin(deltatl);
etaxlf=-a*(x4/V)+(1-rlf/r0);
etaylf=((x3/V)-x2*(rlf/r0)+rlf*dphi/V)/cos(deltafl);
etasplf=((x4/V)+(phi/r0))*cos(deltafl)-(1/r0)*sin(deltafl);
% 从'twopt_creep'函数文件中获取/调用左、右轮接触斑蠕滑力和蠕滑力矩。

[Fcslt,Fcylt,Fczlt,Mcslt,Mcylt,Mcslt,Fcslf,Fcylf,Fczlf,Mcslf,Mcylf,Mczlf,Fcxr,Fcyr,Fczt,Mcxr,Mcyr,Mczt]
=twopt_creep(x1,etaxlt,etaylt,etasplt,etaxlf,etaylf,etasplf,etaxr,etayr,etaspr,deltatl,deltafl,deltar);
% 从'twopt_normal'函数文件中获取/调用左、右轮接触斑法向力。

[Fnylt,Fnzlt,Fnylf,Fnzlf,Fnyr,Fnzt,Fnzt,Fnzt]=twopt_normal(x1,x2,x3,x4,deltatl,deltafl,deltar,rlt,rlf,rr,Fcslt,Fcylt,Fczl
t,Fcslf,Fcylf,Fczlf,Fcxr,Fcyr,Fczt,Mcxr,Mcyr,Mczt);
% 建立状态空间形式的左轮两点接触两点方程
xdot1=x3;
xdot2=x4;

xdot3=1/mw*(Fcylt+Fcylf+Fcyr+Fnylt+Fnylf+Fnyr+Fsuspyw-mw*g*lambda*x1/a);

xdot4=1/Iwz*((-Iwy*V/r0*dphi)-a*(Fcslt+Fcslf-Fcxr)-x2*((a-rlt*tan(deltatl))*(Fcylt+Fnylt)+(a-rlf*tan(delta
fl))*(Fcylf+Fnylf)-(a-rr*tan(deltar))*(Fcyr+Fnyr))+Mcslt+Mczlf+Msuspw);
xdot5=(1/crail)*(-Fnylt-Fnylf-Fcylt-Fcylf-krail*x5);
xdot6=(1/crail)*(-Fnyr-Fcyr-krail*x6);
% 单点接触方程—右轮踏面接触和左轮踏面接触
else
% 指定变量名称，左、右轮接触斑轧制半径
rl=rlt;
rr=rrt;
% 计算左、右轮接触斑切线斜率
lambdal=tan(deltalt);
lambdar=tan(deltart);
% 计算轮对滚动角及其变化率
phi=(rl-rr)/(2*a);
dphi=(lambdal+lambdar)*(x3/(2*a));
% 通过补偿轮对滚动角计算左、右轮接触斑的有效接触角
deltal=deltalt+phi;
deltar=deltart-phi;
% 计算左轮踏面接触斑的纵向、横向和自旋蠕滑率
etaxl=-a*(x4/V)+(1-rl/r0);
etayl=((x3/V)-x2*(rl/r0)+rl*dphi/V)/cos(deltal);
etaspl=((x4/V)+(phi/r0))*cos(deltal)-(1/r0)*sin(deltal);
% 计算右轮踏面接触斑的纵向、横向和自旋蠕滑率
etaxr=a*(x4/V)+(1-rr/r0);
etayr=((x3/V)-x2*(rr/r0)+rr*dphi/V)/cos(deltar);
etaspr=((x4/V)+(phi/r0))*cos(deltar)+(1/r0)*sin(deltar);
% 从'onept_creep'函数文件中获取/调用左、右轮接触斑蠕滑力和蠕滑力矩。

[Fcxl,Fcyl,Fczl,Mcxl,Mcyl,Mczl,Fcxr,Fcyr,Fczt,Mcxr,Mcyr,Mczt]=onept_creep(etaxl,etayl,etaspl,etaxr,eta
yr,etaspr,deltal,deltar);
% 从'onept_normal'函数文件中获取/调用左、右轮接触斑法向力。

[Fnyl,Fnzl,Fnyr,Fnzt]=onept_normal(x2,x4,deltal,deltar,rl,rr,Fcxl,Fcxr,Fcyl,Fcyr,Fczl,Fczt,Mcyl,Mcyr);

```

```

% 建立状态空间形式的单点方程
x_dot1=x3;
x_dot2=x4;
x_dot3=1/mw*(Fcyl+Fcyr+Fnyl+Fnyr+Fsuspyw-mw*g*lambda*x1/a);

x_dot4=1/Iwz*((-Iwy*V/r0*dphi)-a*(Fcxl-Fcxr)-x2*((a-rl*tan(deltal))*(Fcyl+Fnyl)-(a-rr*tan(deltar))*(Fcyr
+Fnyr))+Mczl+Mczr+Msuspyw);
x_dot5=(1/crail)*(-Fnyl-Fcyl-krail*x5);
x_dot6=(1/crail)*(-Fnyr-Fcyr-krail*x6);

end

```

## 附录 B 在学期间发表的学术论文及研究成果

1. 陈欢, 陈锐林, 戴可以, 任海龙, **陆亚平**. 外包钢-混凝土组合梁负弯矩区承载力数值分析. 湖南工程学院学报, (已录用)
2. 戴可以, 陈锐林, 陈欢, 任海龙, **陆亚平**. 基于Matlab-Midas的车辆-大跨度连续刚构桥竖向振动特性[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2016, 37(1):54-59
3. 任海龙, 陈锐林, 陈欢, 戴可以, **陆亚平**. 移动及冲击荷载作用下浮式平台的动力响应分析[J]. 湖南理工学院学报(自然科学版)