

分类号：TP242.2

密级：

天津理工大学研究生学位论文

基于 MATLAB 的 3-RRRT 并联 机器人动力学研究

（申请硕士学位）

学科专业：机械制造及其自动化

研究方向：并联机器人

作者姓名：齐 帅

指导教师：赵新华 教授

2016 年 1 月

**Thesis Submitted to Tianjin University of Technology
for the Master's Degree**

**Dynamic Research of 3-RRRT
Parallel Manipulator Based on
MATLAB**

By
Qi Shuai

Supervisor
Zhao Xinhua

January 2016

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作和取得的研究成果，除了文中特别加以标注和致谢之处外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得 天津理工大学 或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

学位论文作者签名： 签字日期： 年 月 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解 天津理工大学 有关保留、使用学位论文的规定。特授权 天津理工大学 可以将学位论文的全部或部分内 容编入有关数据库进行检索，并采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编，以供查阅和借阅。同意学校向国家有关部门或机构送交论文的复本和电子文件。

（保密的学位论文在解密后适用本授权说明）

学位论文作者签名： 导师签名：

签字日期： 年 月 日 签字日期： 年 月 日

摘要

本文选用 3-RRRT 并联机器人为研究对象，主要研究内容有 3-RRRT 并联机器人运动学建模、动力学建模、运动学和动力学数值仿真及构型优化。

3-RRRT 并联机器人是由一个固定平台和一个动平台通过 3 条支链连接而成，其中每条支链由 3 根杆件分别通过 3 个转动副 R 和一个虎克铰 T 与固定平台和动平台进行连接。通过对 3-RRRT 并联机器人进行自由度分析可知，其动平台仅能实现在空间中沿 3 个坐标轴方向的平动，故该并联机器人的自由度数为 3。因并联机器人和以往的串联机器人进行对比，这种新型机器人表现出速率快、精度高、承载佳等大量优势特征，使它在工程行业中得到普遍的应用，如并联机床、食品分拣机器人等设施。本文选择的分析对象 3-RRRT 并联机器人便能够在食品分拣工序中进行应用。通过完成这一类型机器人的运动学与动力学分析工作，能够使其成为后期研究的原型，并在开发性能完善的空间并联机器人阶段，如并联机床、微操机器人等，奠定相应的概念基础。

首先，根据该并联机构的特点，运用 D-H 坐标和齐次坐标变换，建立了系统运动学方程，通过解析法求出了 3-RRRT 并联机器人的位置反解，得出了动平台在某一位姿下，该并联机器人各个支链的 8 组位置反解；通过数值法求出了该并联机器人的位置正解，并分别通过 MATLAB 软件编程进行仿真，并用实例验证了其位置正解的正确性。然后，在运动学研究的基础上，运用牛顿-欧拉动力学方法建立了该并联机器人的动力学模型，推导出了基于牛顿-欧拉动力学方法的杆件的速度、加速度、惯性力以及各个关节的平衡力和驱动力矩的递推计算公式。并通过 MATLAB 软件进行编程仿真，得出了在动平台轨迹已被规划的情况下的各个支链驱动力矩仿真结果。最后，以系统运动学、动力学模型为基础进行了系统的构型优化，使得系统消耗的总能量最小，达到绿色环保的目的。

本文采用的牛顿-欧拉动力学方法，通过将并联机器人的某条支链从关节处切开，使其变为开链结构，通过牛顿-欧拉递推算法，可以逐个杆件地推出其各个关节处的约束力以及杆件所受的惯性力，从而为将来对该并联机器人进行柔性分析提供一定的依据。

关键词：并联机器人，运动学，动力学，数值仿真，构型优化

Abstract

In this paper the kinematics and dynamics of the 3-RRRT parallel manipulator have been researched. The main contents contained: the kinematics modeling, the numerical simulation of kinematics and dynamics and the optimization of configuration.

The 3-RRRT parallel manipulator is composed of a fixed platform and a moving platform which are connected through three branched-chains, each branch consists of three revolute pairs with R said and a hooke joint with T said. Through analyzing the degrees of freedom of the 3-RRRT parallel manipulator, we find that its moving platform can only move in the space along the three axes translationally, so the number of degrees of freedom is three. Comparing with the serial robots in the past, this new robot shows high speed, high precision, large bearing and a number of advantages, making it widely used in the engineering industry, such as parallel machine tools, food sorting facilities. This 3-RRRT parallel manipulator can be applied to food sorting process. Through the kinematics and dynamics analyses of this robot, we can make it become the prototype and the basis of the later research of spatial parallel manipulator with high-performance, such as parallel machine tools, micro robots.

Firstly, according to the characteristics of the 3-RRRT parallel manipulator mechanism, the kinematic equation is established by using D-H coordinate method and homogeneous coordinate transformation. The reverse displacement solution was got by using analytical method when the moving platform of the 3-RRRT parallel manipulator was under a certain position and posture. Each branch chain of the parallel manipulator has two groups of reverse displacement solution. The direct solution of the 3-RRRT parallel manipulator was solved by using numerical method and the correctness of the solution was verified by MATLAB software programming. Secondly, on the basis of kinematics analysis, the dynamic model of the 3-RRRT parallel manipulator was established. By using Newton-Euler dynamics method, the acceleration, inertial force, joint force and the driving force were solved by using the recursive formula. Furthermore, under the condition of the trajectory of the moving platform has been planned, the driving force of each branch chain has been simulated by the MATLAB software programming. Finally, to reduce the energy consumption of the system, the configuration optimization of the system has been conducted on the basis of the kinematic and dynamic model.

By using Newton-Euler Dynamics method, we make the parallel manipulator become a open-chain structure through a branch cut from a joint. Through Newton-Euler algorithm, the inertia force of each joint can be solved, which can provide theoretical basis of the flexible analyses of the parallel robot in the future.

Keywords: Parallel manipulator, Kinematics, Dynamics, Numerical simulation, Configuration optimization

目 录

第一章 绪论.....	1
1.1 引言.....	1
1.2 并联机器人的发展与应用.....	2
1.2.1 并联机器人的发展.....	2
1.2.2 并联机器人的应用.....	4
1.3 并联机器人的研究现状.....	6
1.3.1 并联机器人的分类.....	6
1.3.2 3 自由度并联机器人的研究现状.....	7
1.4 并联机器人研究存在的问题.....	8
1.5 本文研究的主要内容及意义.....	9
第二章 3-RRRT 并联机器人的运动学分析	11
2.1 引言.....	11
2.2 运动学分析基础知识.....	11
2.2.1 齐次坐标与齐次坐标变换.....	11
2.2.2 机器人坐标系与运动学方程.....	13
2.3 3-RRRT 并联机器人运动学建模.....	14
2.3.1 3-RRRT 并联机器人的位置反解	17
2.3.2 3-RRRT 并联机器人的位置正解	20
2.4 3-RRRT 并联机器人位置正反解的 MATLAB 实现	22
2.4.1 MATLAB 简介	22
2.4.2 3-RRRT 并联机器人位置反解的 MATLAB 实现	22
2.4.3 3-RRRT 并联机器人位置正解的 MATLAB 实现	24
2.5 本章小结.....	25
第三章 3-RRRT 并联机器人的动力学分析	26
3.1 引言.....	26
3.2 牛顿-欧拉动力学分析方法	27
3.2.1 杆件的加速度.....	27
3.2.2 惯性张量.....	29
3.2.3 机器人牛顿-欧拉动力学的递推计算公式	30
3.3 3-RRRT 并联机器人的牛顿-欧拉动力学建模.....	34
3.4 基于 MATLAB 的 3-RRRT 并联机器人动力学仿真.....	35
3.5 基于动力学的 3-RRRT 并联机器人构型优化	37
3.6 本章小结.....	41
第四章 总结与展望.....	42
4.1 总结.....	42
4.2 展望.....	42
参考文献.....	44
发表论文和科研情况说明.....	46
致谢.....	47

第一章 绪论

1.1 引言

“机器人”由来已久，捷克斯洛伐克作家卡雷尔·恰佩克长篇科幻小说《罗萨姆的机器人万能公司》便涉及到了这一名称，将 **Robota**（捷克文中理解成“苦工”）与 **Robotnik**（波兰文理解成“工人”）两者结合在一起形成。即便该称谓与机器人的出现时间只有短短数十年，然而这一概念的产生和追求所用去的时间则超过了数千年。人们始终坚持着希望可以生产出与人类行为方式一致的设备，以此完成各项工作，特别是其中工作量大、相对危险的事务。西周时期，由具备高超工艺的偃师制作的伶人便可以进行歌舞的表演，属于国内早期形式的机器人。接着到了春秋时期，在《墨经》中便有提到，我国著名匠师鲁班成功制造一种持续翱翔三天的木鸟。公元前 2 世纪，经过亚历山大时期古希腊人不懈努力，制作出历史文明中第一代机器人——自动机。而在我国汉朝，著名科学家张衡在创造出地动仪这一机械奇迹后，随之创造出了记里鼓车。而三国纷争时，蜀国著名军师诸葛亮根据当时的军情需要，创造出可以进行粮草运输的“木流牛马”。公元 17 世纪，日本竹田近江结合计时器原理创造出自动机器木偶。公元 1738 年，法国著名技师杰克·戴·瓦克孙成功制造出的机器鸭，不仅能产生声音、游泳，而且能够喂食与模仿人体的消化功能。公元 17 世纪后期，瑞士地区钟表匠杰克·道罗斯与自己的儿子李·路易·道罗斯所制作的自动书写、演奏等玩偶，外形精致，活灵活现，受到了当时欧洲人的喜爱^[1]。

进入二十世纪中期后，世界各国科学家纷纷将眼光放在现代机器人身上。在工业持续进步期间，美国德沃尔率先表明工业机器人相关原理，1959 年在著名发明家 **Joseph Engberg** 的配合下，两人一起创造出全球第一例工业机器人，随后两人开办全球范围内第一家机器人生产公司——**Unimation**^[2]。从此，机器人的发展进入了新的纪元。但是，自第一台工业机器人问世后几年，机器人的发展并不是很快。由于技术的不成熟，很多研究者进行了大量的尝试与努力，但均未获得大的突破。直至 1962 年，美国 **AMF** 集团创造的“**VERSTRAN**”（代表万能运输）与 **Unimation** 集团创造的“**Unimate**”才成功融入工业制造中处理相关事务。在传感设备快速提升与普及的今天，机器人在实际生活中的价值作用也越来越明显，人们逐渐将大量不同形式的传感设备置于机器人各个部位。如，1961 年 **Ernest** 便是通过触觉传感器进行处理，一年后，**Tomovic** 与 **Bonny** 将压力传感器置于全球第一代“灵活手”内部。1963 年，**Macksey** 将视觉传感器置于机器人相关部位内部，同时于 1965 年，和 **MIT** 一起创造出全球首例具备视觉传感器的机器人，不仅如此，该机器人还拥有辨认与定位系统。1965 年，约翰·霍普金斯大学下属实验室创造出的机器人，利用声纳、光电管等设备，同时可以按照自身处的条件自行选择合适的位置。在 1965 年之后，美国 **MIT**、**Stanford** 等纷纷创办机器

人实验室，针对它的科研项目已经过渡至人工智能阶段。1968 年，美国斯坦福实验室经过不懈努力，最终创造出全球首例智能型机器人 **Shakey**，人类正式开始第三代机器人探究的旅程。自上世纪七十年代开始，在相关技术如自动化、航天航空取得进步的同时，机器人同样得到了较大的提升。1969 年，日本著名科学家加藤一郎向世人展现了全球第一例仿人机器人，将其命名成仿人，主要由于此机器人可以如同人一般正常行走。接下来他帮助完成了 **Honda** 集团 **ASIMO** 以及 **Sony** 集团 **QRIO**。正是因为他在这一领域中一系列表现，他被人们尊称为“仿人机器人之父”。1973 年，美国 **Cincinnati Milacron** 集团率先把微型电脑与机器人搭配在一起，建立 **T3** 机器人；1978 年，美国 **Unimation** 集团将大众型工业机器人 **PUMA** 推向市场，代表工业机器人这一领域进入成熟期^[2]。直到现在，**PUMA** 机器人在大量生产线中依然发挥着巨大的作用。而上世纪八十年代后，机器人生产行业得到了较大的提升，越来越多的投资者与科研人员将发展的眼光汇聚在这一领域。1984 年，**Engberg** 成功建造医用机器人 **Helpmate**，可以根据病人需求提供相应的服务，如送餐，送药等。1998 年，丹麦乐高集团研制出机器人（**Mind-storms**）基本组件，机器人生产工序进一步优化，生产工序如同搭积木，可以按照需求自由组装，机器人不再只是属于企业的产品，每一个人都可以制造。1999 年，日本索尼集团推广的宠物机器人爱宝（**AIBO**），立刻在全世界范围内好评如潮，娱乐机器人逐渐融入家庭生活；2002 年，丹麦 **iRobot** 集团研发生产的清洁机器人 **Roomba**，不仅可以自主确定路线，而且可以辨认障碍物，当电量过低时，可以自主进行充电操作。目前 **Roomba** 在全球家用机器人市场中占据着极大的比例，获得了大量的认可与接受。2006 年，美国微软集团 **Microsoft Robotics Studio** 问世，足以说明机器人开始朝着模块化与平台一致化方向转变，比尔·盖茨曾指出，家用机器人必然会主导市场^[2]。二十一世纪，互联网技术实现了快速的提升，这一领域随之步入移动互联阶段，腾讯公司开发的智能亲子机器人 **qRobot** 可以和孩子对话，并能连接 **QQ** 和微信，家长通过移动设备即可掌握孩子的情况，如此一来，可以确保孩子的相关问题得到快速有效的解决。

纵观机器人的发展历史，机器人的发展经历了从最初的“玩偶式”的供人们观赏、娱乐机器人，到后来的可替人们承担大量体力劳动的工业机器人，再到可和人们交流的为人们排忧解难的人工智能机器人。但是，到目前为止，在很多领域，机器人还未有发挥出他巨大的价值。因此，对于机器人的研究还有很长的一段路要走，一批又一批的研究者们正栉风沐雨、披荆斩棘投入到机器人的研究中。

1.2 并联机器人的发展与应用

1.2.1 并联机器人的发展

上世纪三十年代这种机构便已经出现，1931 年，**Gwinnett** 经研究获得了并联结构的游乐设施(图 1-1)，同时得到专利认可，正是因为如此，成为了有资料

记载的第一代并联机器人^[3]。

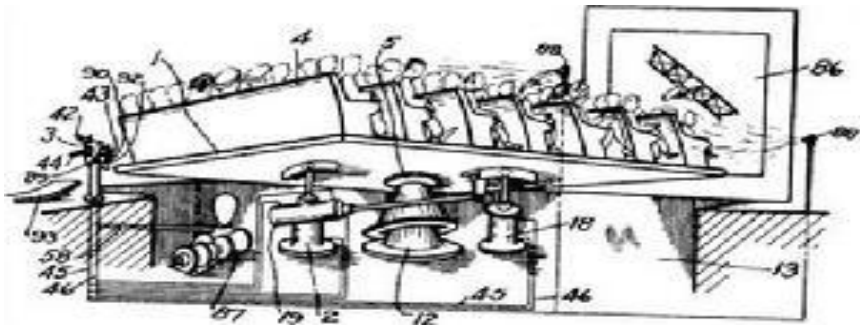


图 1-1 并联机器人游乐设施

1934 年，Pollard 研发出可以为车辆进行喷漆的并联机构（图 1-2），同时得到专利认可^[3]。

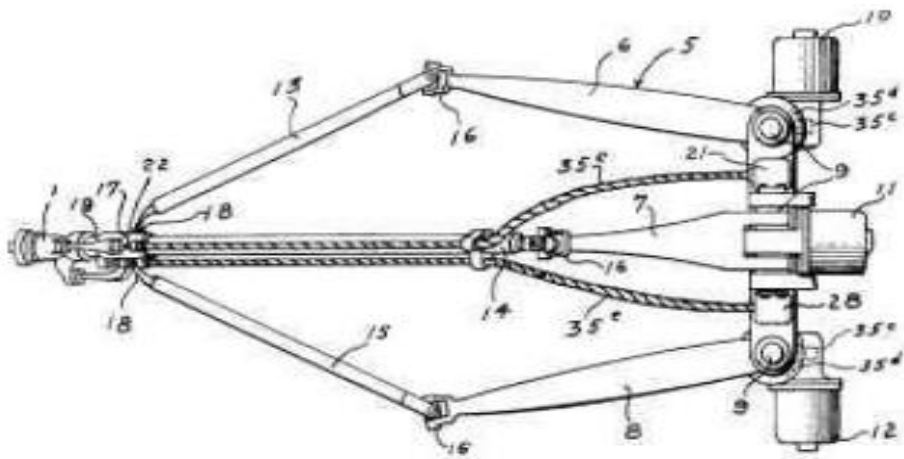


图 1-2 Pollard 并联机构

1947 年，Gough 研发生产可以进行轮胎检验的并联机构（图 1-3），能够使轮胎自由改变角度^[3]。

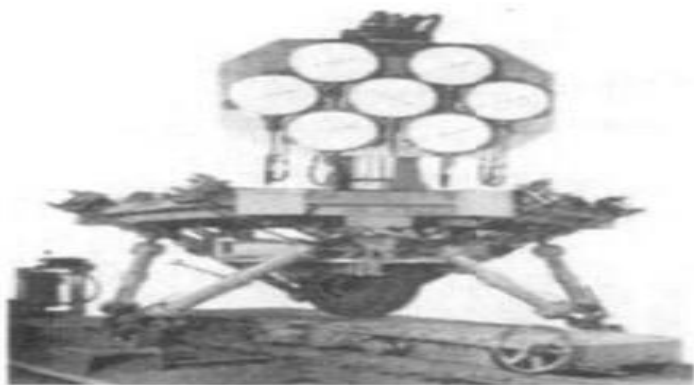


图 1-3 Gough 并联机构

1965 年，Stewart 率先开展 Gough 所创造并联机器人机构的相关分析工作，以该机构为前提成功制造出飞行模拟设备（图 1-4），人们将其命名成 Stewart

机构，直到现在依然发挥着巨大的作用^[3]。

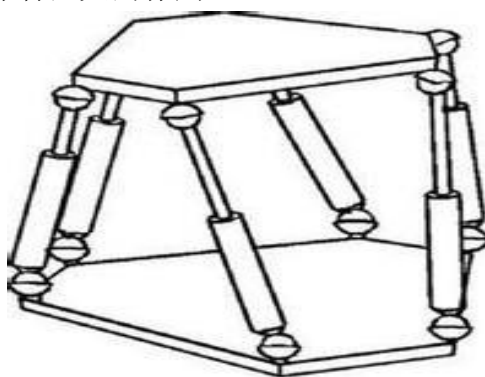


图 1-4 Stewart 平台

1991 年，我国燕山大学黄真教授经过不懈努力，最终完成国内首台六自由度并联机器人样机（图 1-5）开发生产工作，1994 年，再次完成柔性铰链式六自由度并联机器人误差补偿设备（图 1-6）的开发生产工作，1997 年，针对并联机器人基础概念与处理模式发表了相关论文进行说明。



图 1-5 燕山大学六自由度并联机器人样机



图 1-6 具有柔性球铰链的六自由度误差补偿器

1.2.2 并联机器人的应用

作为新型机器人，其本身存在高刚度、高承载能力、容易控制等特征，通过与目前正在使用的串联机器人进行搭配提升了操作效果，确保机器人满足更多领域的需求^[4]。具体在以下方面进行使用：

（1）运动模拟器

以飞行模拟器实现对飞机的模拟属于首个通过并联机构完成的运动模拟，能够针对飞行员提供地面模拟训练。如西安蓝天企业设计生产的第一例民用飞机全景模拟器（图 1-7）。接着汽车领域结合该技术完成行车模拟，如德国 Daimler-Benz 集团开发生产的动态驾驶模拟器（图 1-8）。



图 1-7 MA60 型飞行模拟器



图 1-8 动态驾驶模拟器

(2) 并联机床

该设备的实现需要将机床作业和并联机构同时运用，即人们所说的虚拟轴机床。这种类型机床和过去的串联形式进行比较，各方面效果更加明显，例如机械组装方便、加工合理等，特别是与过去的串联类生产模式进行对比，可以快速实现六轴联动操作，进行繁琐的三维曲面处理。上世纪九十年代，产生一类并联机床，1994 年 IMTS' 94 博览会进行期间，美国 Gidding&Lewis 集团展示了一种 Variax 型并联机床（图 1-9），引起了高度的重视。接着，美国企业 Ingersoll 完成了 VOH1000 型立式操作平台（图 1-10）与 HOH600 型卧式操作平台（图 1-11）的开发建造工作。



图 1-9 Variax 型并联机床



图 1-12 VAMT1Y 并联机床



图 1-11 HOH600 型卧式加工中心



图 1-10 VOH1000 型立式加工中心

在 Gidding&Lewis 与 Ingersoll 两个集团长期的合作探索前提下，针对这一领域的研究获得了大量企业与实验室的关注，确保并联机床各个方面均实现了完美的提升。国际上具备一定实力的机床制造企业纷纷在产品性能上进行完善，使这

一技术在实践中发挥出更加巨大的作用。

通过欧共体 Esprit 高科技开发方案在资金上的支持,欧洲地区首台商业型并联机床 Hexa 6X 立式五坐标高速铣床研制成功。德国的斯图加特大学机床控制研究所 ISW 成功研制出了 Linapod 立式加工中心。此外还有很多其他的公司都推出了各式各样的并联机床。

1997 年,经过清华大学与天津大学协作得到了并联机床样机 VAMT1Y (图 1-12),属于国内首台并联机床;随后国内大量企业与实验室将并联机床作为重点研发项目之一,1998 年,东北大学率先创建五轴联动并联机床;天津大学和该地区第一机床总厂达成协作共识,成功获得三坐标并联机床;清华大学同国内部分机床公司一起,研制出大量功能差异的并联机床;在此前提下,北京航空航天大学、北京理工大学等纷纷进行着有关这一领域的分析工作^[5]。

(3) 微操机器人

因并联机器人组成架构十分紧凑,所以微处理行业中常常可以看到它的存在。日本 Tamio TANIKAWA 等人经过不懈努力,完成了微动并联机器人的开发生产工作,这一设备存在 6 个自由度。其采用的是 Stewart 平台的结构形式。日本同时创造出通过正交布置处理的三自由度并联微操机器人。而我国北京航空航天大学与哈尔滨工业大学等同样针对这一领域进行了相应的分析研究。

(4) 工业机器人

并联机器人实践中具体表现为完成对货物的搬运、码垛等操作。而 FANUC 集团所研制 Delta 高速并联搬运机器人 M-3iA (图 1-13) 表现出了强大的功能作用。它具有独特的 6 轴机型可以高速搬运质量最大为 6kg 的物体,机器人的前端装有复合 3 轴手腕的合计 6 轴机型,能够快速切换货物角度,同时在并视觉以及力学两类传感器的配合下使操作更加简单合理^[6]。



图 1-13 FANUC M-3iA 高速搬运机器人

1.3 并联机器人的研究现状

1.3.1 并联机器人的分类

随着美国 Texas 州自动化和机器人分析机构成功创建出全球第一台并联机器人,直到现在,并联机器人的外部形式和内部构造都有了很大的发展,结合类别

特征包含如下几种^[4]:

(1) 站在自由度数的角度,若是某一设备能够完成 M 个自由度 (DOF) 操作,那么属于 M 自由度并联机器人。如,当设备 6 个自由度,也就是 6 自由度并联机器人。

(2) 站在并联机构输入方式的角度,该设备包含两种形式,即线性与旋转两种类型驱动输入^[7]。目前分析阶段重点偏向于对前者的处理,原因是该类型设备能够快速完成位置反解,同时存在唯一性。而应用旋转驱动输入形式的并联机器人和线性驱动输入形式的并联机器人相比,其具有结构更加紧凑、转动惯量更小、负载能力更强等一系列优点,但是由于其输入形式为旋转驱动,这就决定了它的位置逆解的复杂性和非唯一性^[8]。

(3) 站在支柱长度变化角度,该设备包含两种类型:首先是并联机器人上下平台支柱长度自由变化,其次则是支柱长度不可改变^[7]。

1.3.2 3 自由度并联机器人的研究现状

3 自由度并联机器人包含大量类型,架构特征过于繁琐,通常情况下包含如下几类:平面 3 自由度并联机构,即 3-RRR 机构等,通过 2 个转动副与独立移动副实现。球面 3 自由度并联机构,如 3-RRR、3-UPS 两种球面机构,前者中 3 个转动副轴线相交点作为机构的中心,但是后者的活动均是以 S 副中心点完成转动。3 维纯移动机构,如 Tsai 并联机构,此种机构存在运动学正逆解快速操作这一优势,因此可以在更多领域进行使用。空间 3 自由度并联机构,如 3-RPS 机构,作为欠秩机构,其活动行为根据空间所在地的差异发生着明显的变化,同时包括本文分析对象:3-RRRT 并联机构。剩下的则是提升辅助杆件与运动副对应空间机构,如 3-UPS-1-PU 球坐标式 3 自由度并联机构,因辅助杆件与运动副两者存在一定限制,所以这一机构只可以完成单一方向位移以及两个方位转动^[9]。

3 自由度并联机器人可以分析的方面有很多,目前人们重点针对以下层面进行分析:

(1) 运动学研究

有关其运动学方面的研究重点涵盖以下几点:运动学建模、位置分析、速度与加速度研究,而位置分析作为该类型机器人进行运动学研究的核心内容,属于速度、加速度、动力学等研究不可缺少的前提^[10]。进行有关这方面的研究时需要了解两个情况,也就是设备本身位置正解与反解。后者与前者相比在处理上更加简单,往往能够利用解析计算方法直接获知。但是前者因为并联机构本身相对复杂,操作上难度较大,往往以某个非线性方程组形式进行处理,一般采取数值计算方法求得。

(2) 工作空间研究

工作空间作为该类型机器人主要工作范围,在判定设备性能方面起到不可或缺的作用。和位置正解一般,想要完成对工作空间的求解同样难度较大,直至现

在往往采取数值模式进行处理。但随着计算机技术的发展,在工作空间的分析中,我们可以借助一些计算机仿真软件,目前这方面的研究很火热。

(3) 奇异位形分析

我们将其理解为机构在抵达相应临界点时造成机构出现非正常状态、不受控制的运动,属于机构本身存在的特征。目前有关这一方面的分析工作主要是希望可以让机构规避奇异位形,可以有效提升并联机器人各方面性能,这对并联机器人的研究和应用具有重要意义。

(4) 动力学研究

通过对动力学进行研究,可以确保该类型机器人在架构、控制程序设计与特征研究方面更加合理有效。进行动力学研究时,往往需要完成不同关节变量、时间对应1阶导数(速度)、2阶导数(加速度)、全部执行设备驱动力等方面的研究。在研究上述变量的前提下,建立该类型机器人动力学数学模型,随后得到动力学方程。不仅如此,因为在确定其动力学方程时往往必须通过电脑编制程序进行处理,那么动力学研究期间,往往必须在该类型机器人动力学数学模型基础上通过递推方式进行处理,如此一来,可以更加快速的结合电脑系统完成该类型机器人动力学模型程序编写工作。进行动力学分析时需要重点关注两个方面:即正动力学与逆动力学。前者属于设备本身驱动力、驱动力矩等数据全部具备的情况下,确定动平台运动;但是后者属于在对于设备本身动平台轨迹了解的情况下,计算出其驱动力、驱动力矩等值。通过对其动力学进行合理的研究在机器人控制算法分析阶段存在不可或缺的作用,同时属于动力学特征研究、设备动态处理以及确定控制程序相关参数不可缺少的前提。

(5) 尺度综合

尺度综合是并联机器人机构运动学设计的终极目标,必需在考虑机构动平台的灵巧度、支链干涉等诸多因素的前提下,综合求出主动关节变量的变化范围和尺度参数的最优解。

1.4 并联机器人研究存在的问题

和过去的串联机器人进行对比,这种新型机器人表现出速度快、承载佳等大量优势特征,然而该类型机器人其机构相关概念的分析尚有不足之处,特别是当工作环境出现明显的转换或者过于复杂时表现十分明显,因而该类型机器人的研究层次还有待进一步深化。目前,该类型机器人研究阶段相关问题重点表现在如下几个层面:

(1) 新构型研究

针对该类型机器人内部机构进行分析时,必须同时完成运动学、动力学等概念知识的分析,可以进一步丰富这一领域所取得的成果,在实践应用阶段,该类型机器人机构必将覆盖更多的领域。

(2) 高效运动学算法的研究

若是能够得到合理有效的运动学计算模式,必然能够进一步提升求得该类型机器人运动学正反解的处理效率。针对其进行分析目的在于以该类型机器人机构为前提,可以实现通过数学机械化方法求得运动学的解,提高算法的计算速度和计算效率,缩短计算机中央处理器的计算时间,从而使其动态响应的速度进行加快,有效加强该类型机器人控制的准确度。确定合理的运动学算法作为该类型机器人开展运动学分析与轨迹设计不可缺少的前提。

(3) 奇异位形研究

通过完成该类型机器人奇异位形分析工作,在进行工作空间分析时作用非常明显。实践运用期间,人们迫切想要让该类型机器人可以自主辨别奇异位形,更进一步想要让设备直接处在奇异位形范围之外。由于当设备处于奇异位形的情况时,机构的传动性能受到极大的影响,无法对其进行有效的控制。所以,奇异位形分析工作在该类型机器人实践操作阶段存在不可或缺的价值。

(4) 精度研究

机器人的操作精度的高低是衡量机器人质量优劣的重要指标。并联机器人的末端执行器的实际位姿与控制系统输入的指令位姿之间的偏差,称为并联机器人的位姿误差^[11]。由于并联机器人具有多杆件、多关节、结构复杂等特点,而且并联机器人一般是空间的多闭环机构,所以其位姿误差分析相当困难,尚有很多问题亟需解决。

(5) 工作空间与灵巧度研究

工作空间作为该类型机器人主要的工作范围,在判定设备性能方面起到不可或缺的作用。工作空间结合设备处理阶段表现出的姿态情况,将其确定成两种工作空间形式:即可达与灵活,前者代表机器人控制机任意参照点能够抵达全部点的集合,研究阶段可以忽视机器人控制机实际姿态,而后者代表机器人控制机中任意参照点在所有方位均能够抵达的点集合,后者属于前者的一个方面^[12]。实际工程应用中,完成其工作空间、灵巧度两方面的分析存在至关重要的作用。

1.5 本文研究的主要内容及意义



图 1-11 3-RRRT 并联机器人样机

本文将如图 1-11 所示的 3-RRRT 并联机器人确定成分析对象，借此完成如下几个方面的分析工作：

（1）运动学分析及仿真

将这一类型机器人确定成对象开展运动学分析工作，结合齐次坐标变换以及 A 矩阵建立有关这一类型机器人运动学模型，利用解析法获知其位置反解，结合数值法最终获知它的位置正解，同时运用 MATLAB 软件对它们实施编程计算，确定了其位置正解有效性。

（2）动力学分析及仿真

以运动学研究为前提，结合牛顿-欧拉动力学方法形成有关它的动力学模型，以牛顿-欧拉动力学模式为前提，确定其动力学方程。通过对其进行逆动力学分析，推导出了基于牛顿-欧拉递推算法的动力学递推公式，并基于此递推公式，求出了在动平台轨迹给定的情况下该并联机器人的输入驱动力矩。并通过 MATLAB 数值分析软件，在实际算例下进行了仿真，得出了该并联机器人的输入驱动力矩，并且在动力学分析的基础上，针对杆件的长度对系统进行了构型优化。

通过对本课题进行分析，能够实现以下几点目标：

（1）并联机器人和过去的串联机器人进行对比，这种新型机器人表现出速率快、承载佳等大量优势特征，使它在工程行业中得到普遍的运用，如并联机床等设施。而本文选择的分析对象 3-RRRT 并联机器人便能够放在食品分拣工序中进行应用。通过完成这一类型机器人的运动学与动力学分析工作，能够使其成为后期研究的原型，在开发性能完善的空间并联机器人阶段，如并联机床等，奠定相应的概念基础。

（2）目前，有关它的动力学分析工作重点表现在刚体动力学层面，而为了实现并联机器人的高速运行，发挥出并联机构特有的优势，就不得不考虑杆件的弹性变形问题，因此必须完成这一设备的柔性研究工作。但是过去的研究模式如拉格朗日法乘子法、凯恩法等，这些方法都不能求得并联机器人内部杆件在各个关节上的约束力，因而无法分析并联机器人在高速运动过程中杆件的弹性变形，而本文采用的牛顿-欧拉动力学方法，通过将并联机器人的某条支链从关节处切开，使其变为开链结构，通过牛顿-欧拉递推算法，可以逐个杆件地推出其各个关节处的约束力以及杆件所受的惯性力，以此为后期进行并联机器人柔性研究时奠定理论基础。

（3）目前，能源紧缺越来越成为全世界共同关注的问题，在设计新型机器人系统时，必须要考虑到能耗。本文在该类型机器人动力学分析的基础上，针对其杆件长度进行了构型优化，使得该机器人系统在特定的轨迹下，消耗的能量尽可能最小，达到节能和绿色环保的目的。

第二章 3-RRRT 并联机器人的运动学分析

2.1 引言

机器人运动学分析作为其探索阶段至关重要的前提。而针对这一方面进行研究时可以将其分解成正向与逆向两种运动学问题进行处理。前者属于机器人本身末端执行器（动平台）其位置形式均了解，由此得到设备上端所有输入关节基本参数。与前者不同，后者属于对机器人所有输入关节基本参数均了解，由此获知设备末端执行器（动平台）的位置形式。并联机器人的正向和逆向运动学分析是整个并联机器人的运动分析、动力学分析、精度分析和工作空间分析等的基础。

对于并联机器人来讲，其逆向运动学分析相对比较简单但是正向运动学分析却比较复杂。并联机器人的逆向运动学问题一般都可以根据并联机构构件的几何关系运用解析法求解出其位置逆解的解析解。由于并联机器人的结构一般比较复杂，因而其正向运动学问题就比较复杂，一般是通过数值法来求解一个非线性方程组，从而得到其位置正解的数值解。该方法具备满足所有类型并联机构处理要求，操作简便等优点，不足之处在于计算速率较低同时不能确保获取所有解，后期得到的数据与确定的初值之间存在一定的联系。解析法利用消元有效消去约束方程的未知数，确保方程转换为未知数独立的高次方程，该方法拥有可以获得并联机构内部全部解的优势，然而消元过程相对繁琐，同时一元高次方程求解阶段需要确保运算过程准确有效，若是希望结果满足这一条件，那么处理的时间相对过长^[13]。

本章通过齐次坐标变换以及空间矢量法获得了 3-RRRT 并联机器人运动学数学模型，同时完成了机构的位置研究，采取解析法求得这一类型机器人位置逆解，采取数值法求得这一类型机器人位置正解。最后，结合 MATLAB 数值运算程序在实践中确定了这一数学模型的有效性。

2.2 运动学分析基础知识

2.2.1 齐次坐标与齐次坐标变换

当随机的四数 (x_1, x_2, x_3, x_4) 中只能有一个数可能为 0 时，我们将其定义成 3 维空间点的齐次坐标，齐次坐标 (x_1, x_2, x_3, x_4) 与点的笛卡尔坐标 (x, y, z) 的关系为：

$$x = \frac{x_1}{x_4}, y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_3}{x_4} \quad (2-1)$$

齐次坐标具有如下性质：

(1) 齐次坐标并非单一值，3 维空间中任意点的齐次坐标 (x_1, x_2, x_3, x_4) 也可以是 $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$ ，只要 λ 是不为 0 的任意数即可。

(2) x_4 非 0 时，齐次坐标 (x_1, x_2, x_3, x_4) 能够确定 3 维空间中的独立点。

对于 3 维空间的矢量 $\mathbf{V} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ ，其中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别是 ox, oy, oz 轴上的单位矢量。则 \mathbf{V} 的齐次坐标可表示为：

$$\mathbf{V} = [x, y, z, w]^T \quad (2-2)$$

公式内 x, y, z, w 为齐次坐标的对应元素，也就是 x_1, x_2, x_3, x_4 ，同时 $w \neq 0$ ，而通常 $w=1$ 。

笛卡尔坐标系 $o'x'y'z'$ 内部点 (x', y', z') 向另一同类型坐标系 $oxyz$ 变换，变换后的坐标 (x, y, z) 可以由下式计算：

$$\begin{cases} x = n_x x' + o_x y' + a_x z' + p_x \\ y = n_y x' + o_y y' + a_y z' + p_y \\ z = n_z x' + o_z y' + a_z z' + p_z \end{cases} \quad (2-3)$$

公式内， p_x, p_y, p_z ——坐标系 $o'x'y'z'$ 的原点在坐标系 $oxyz$ 内的实际坐标；

n_x, n_y, n_z ——坐标系 $o'x'y'z'$ 的 $o'x$ 轴对坐标系 $oxyz$ 的 3 个方向余弦；

o_x, o_y, o_z ——坐标系 $o'x'y'z'$ 的 $o'y$ 轴对坐标系 $oxyz$ 的 3 个方向余弦；

a_x, a_y, a_z ——坐标系 $o'x'y'z'$ 的 $o'z$ 轴对坐标系 $oxyz$ 的 3 个方向余弦；

如果 (x_1', x_2', x_3', x_4') 是坐标系 $o'x'y'z'$ 的齐次坐标， (x_1, x_2, x_3, x_4) 作为坐标系 $oxyz$ 对应齐次坐标，可同时可以认为 $x_4 = x_4'$ ，则有

$$\begin{cases} x_1 = n_x x_1' + o_x x_2' + a_x x_3' + p_x x_4' \\ x_2 = n_y x_1' + o_y x_2' + a_y x_3' + p_y x_4' \\ x_3 = n_z x_1' + o_z x_2' + a_z x_3' + p_z x_4' \\ x_4 = x_4' \end{cases}$$

把上式写成矩阵 $\mathbf{X} = \mathbf{TX}'$ 的形式，则有

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

式中

$$\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$$

$$\mathbf{X}' = [x_1' \ x_2' \ x_3' \ x_4']^T$$

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

公式中 T 属于 4 乘 4 阶矩阵，即齐次坐标变换矩阵，能够完成两个坐标系之间的转换。齐次坐标变换本质上属于将转换坐标系用以说明的矢量转换为通过参照坐标系用以说明的矢量，若想实现这一操作，必须进行坐标系平移与旋转处理。

齐次坐标变换矩阵可以分解为一个平移矩阵和一个旋转矩阵之积，即

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \text{Trans}(p_x, p_y, p_z) \text{Rot}(\kappa, \theta) \quad (2-6)$$

式中， $\text{Trans}(p_x, p_y, p_z)$ 代表平移齐次坐标变换矩阵，平移矢量是 $[p_x, p_y, p_z]^T$ ； $\text{Rot}(\kappa, \theta)$ 代表旋转齐次坐标变换矩阵， κ 作为旋转轴线方位对应单位矢量， θ 作为旋转角。

由此不难发现，进行任意齐次坐标变换，均能够把它分解成几个平移变换和旋转变换的组合。然而上述平移、旋转转换参照何种坐标系完成，那么相对变换类型也就随之产生差异。如果变换过程始终是相对于一个相同的参考系进行变换，在数学的角度上表现为坐标系矩阵左乘变换矩阵，是以变换矩阵最右因子为起点，直至最左因子停止；如果变换过程是相对于不同的当前参考系进行变换，在数学的角度上则表现为坐标系矩阵右乘变换矩阵，是以变换矩阵最左因子为起点，直至最右因子停止。

2.2.2 机器人坐标系与运动学方程

机器人往往是将大量操作杆件结合在一起，经过分析，能够理解成通过 n 个单一运动杆件采用旋转副与移动副进行搭配建立的机械系统。若想说明空间内部不同杆件实际位置与方向，必须结合如下直角坐标系完成处理：

(1) 绝对坐标系——根据其所在地面建立的坐标系，属于设备内部所有杆件的公共参考坐标系；

(2) 机座坐标系——根据设备机座建立的坐标系，属于设备内部所有活动杆件的公共参考坐标系；

(3) 杆件坐标系——根据该设备选定杆件建立的坐标系，属于任意活动

杆件——对应的坐标系，杆件活动期间状态出现变化，同时属于杆件刚体的体坐标系；

机器人操作机是将大量杆件结合在一起：机座是 0 号杆件，连接机座则用 1 号杆件，根据这个规律确定 2、3、 \dots n 号杆件；对应坐标系则是 $\{0\}$ 、 $\{1\}$ 、 $\{2\}$ 、 \dots $\{n\}$ 号坐标系；所有杆件坐标系均将其后续杆件坐标系确定成相对参考系；操作机末端能够搭配相应设施，我们将其确定成末端执行器。

(4) 位姿坐标系——根据末端执行器建立坐标系。可以直接说明末端执行器于所选取坐标系内部对应位置与姿态，在名称上可以将其简化为位姿 (Pose)。

结合此前介绍的齐次坐标变换矩阵，能够反映出这种设备相邻杆件间相对位置与方向存在的联系，此类矩阵存在一定的规范特征，我们将其确定成 A 矩阵 (Denavit-Hartenberg Matrix)。若是希望对所有杆件坐标系于公共参考系 (机座坐标系) 内部实际位置与方向进行说明，那么能够通过此前介绍的变换方程式进行处理^[14]：

$$\begin{aligned} T_1 &= A_1 \\ T_2 &= A_1 A_2 \\ &\dots \\ T_6 &= A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \end{aligned} \quad (2-7)$$

公式内 T_i ($i=1,2,3, \dots, 6$) 属于 6 个构件杆件坐标系 (通常情况下工业机器人其自由度 $n \leq 6$)，采取机座坐标系进行说明，即为运动学方程。

2.3 3-RRRT 并联机器人运动学建模

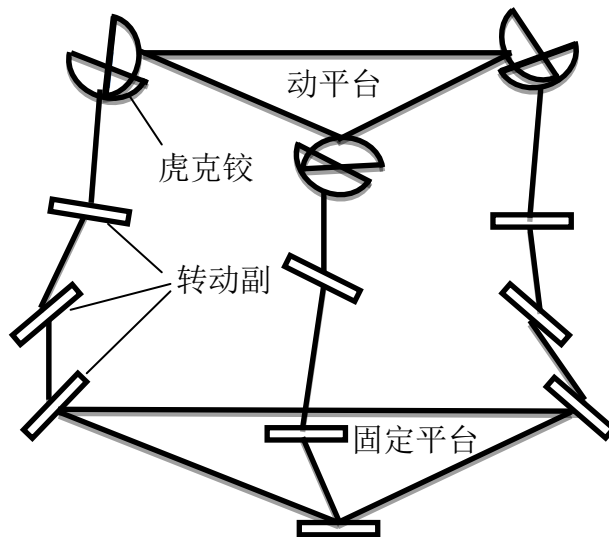


图 2-1 3-RRRT 并联机器人的基本组成

图 2-1 代表 3-RRRT 并联机器人基本组成，结合图例不难发现，这一类型机器人需要依靠三条支链将独立固定平台与动平台有效结合在一起，每条支链从上而下由 1 个虎克铰 (用 T 表示) 和 3 个转动副 (用 R 表示) 和 3 条杆件组成。选择这一类型机器人机构作为研究对象，分析其自由度情况时发现，其自由度是

3, 代表其末端运动平台只可以于三维空间坐标系中做顺着坐标轴 (x,y,z) 方向的平动。

为了分析的方便, 我们可以把虎克铰 T 转化为两个相互垂直的转动副 R , 即 $T \equiv RR$ 。如图 2-2 所示为 3-RRRT 并联机器人分解后的第一条支链结构示意图。图中为了表示的方便简洁采用双下标的表示方法, 比如 \overline{L}_{ij} 表示第 i (1、2、3) 条支链的第 j (0、1、2、3、4、5) 条杆件的长度矢量, 其中 $\overline{L}_{14} = 0$, $|\overline{L}_{10}| = R$, $|\overline{L}_{15}| = r$, 具有相同下角标 j 的构件长度是相同的; a_{ij} 是各个杆件连接的铰点, 同时也是各个杆件相应的坐标系的原点; 固定平台上三个铰点 a_{11} 、 a_{21} 、 a_{31} 位于同一平面内, 并且 $\triangle a_{11}a_{21}a_{31}$ 为一个正三角形; 动平台上三个铰点 a_{15} 、 a_{25} 、 a_{35} 也位于同一个平面内, 并且 $\triangle a_{15}a_{25}a_{35}$ 也为一个正三角形; 其中杆件 L_{11} 通过转动副与固定平台连接, 杆件 L_{12} 通过转动副与杆件 L_{11} 连接, 杆件 L_{13} 通过转动副和 L_{12} 连接通过虎克铰和动平台连接^[12]。向量 \vec{e}_{11} 、 \vec{e}_{12} 、 \vec{e}_{13} 、 \vec{e}_{14} 、 \vec{e}_{15} 是通过转动副轴线的单位矢量, 他们具有以下关系:

$$\vec{e}_{11} = \vec{e}_{12} = \vec{e}_{15}, \quad \vec{e}_{13} = \vec{e}_{14}, \quad \vec{e}_{11} \bullet \vec{e}_{13} = 0$$

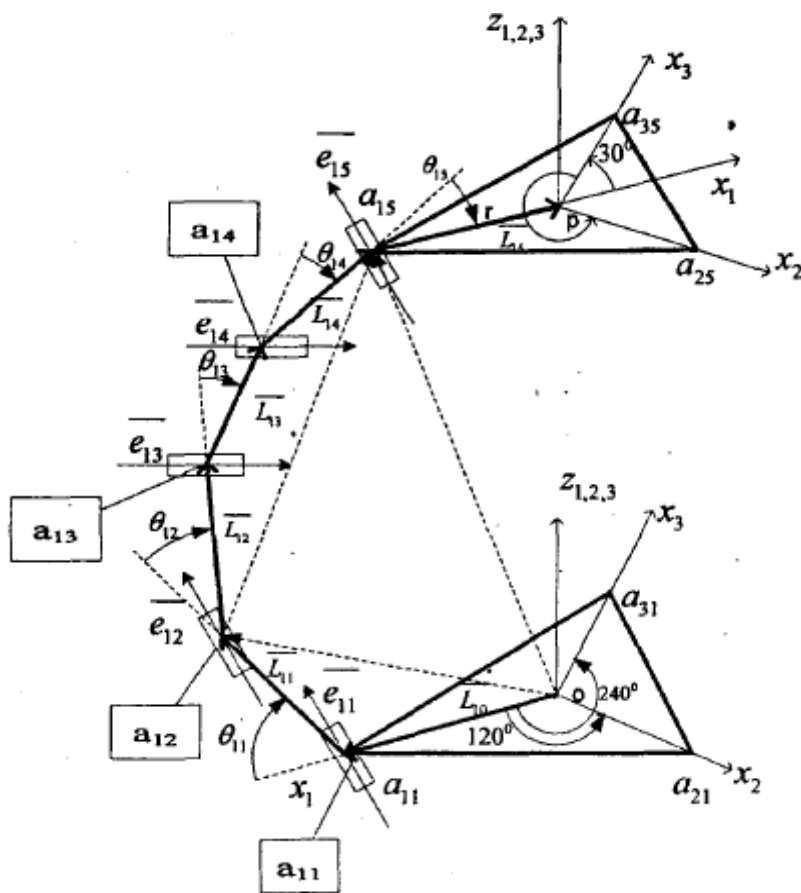


图 2-2 3-RRRT 并联机器人首条支链组成图例

本章通过齐次坐标矩阵对该类型机器人所有构件实际位置与姿态进行说明。如图 2-2 中所示, $o-x_1y_1z_1$ 代表绝对坐标系, o 代表固定平台对应几何中心, pz_1 轴与动平台呈 90° 。

选择首条支链作为分析对象, 任意构件对应下关节处均需要确定有效的杆件

坐标系，如图 2-2 所示：杆件 L_{lj} 其杆件坐标系 $\{j\}$ 于杆件 j 的下关节 j 处位置保持不变，坐标系原点 o_j 于关节 j 对应轴线处同时和铰点 a_{lj} 叠加在一起； $o_j z_j$ 轴和关节 j 对应的轴线叠加在一起，其方向受单位矢量 \bar{e}_{lj} 影响； $o_j x_j$ 轴在杆件 L_{lj} 之上，方向以其延长线方向为正向； $o_j y_j$ 轴的方向根据右手定则来确定^[15]。

将相邻杆件坐标系间对应齐次坐标变换矩阵采取此前介绍的 A 矩阵进行处理，能够完成上下编号杆件 j 与 $j-1$ 对应杆件坐标系转换操作。对 A 矩阵的参数说明如下：

1. 杆件的几何参数

(1) 杆件的长度 a_{lj-1} ——不同关节转轴轴线间最近距离，也就是轴线间公垂线实际长度。

(2) 杆件的扭角 α_{lj-1} ——完成杆件轴线间位移操作，确保两者相交，那么该二直线所产生平面能够与杆件长度 a_{lj-1} 呈 90° ，那么该二直线对应平面交角即为其扭角 α_{lj-1} 。

2. 关节变量及偏置量

(1) 关节变量角 θ_{lj} ——将 j 杆件的长度线 a_{lj} 平移至 $j-1$ 杆件长度线 a_{lj-1} 处与之相交，它们决定了一个与关节 j 轴线相交的平面， θ_{lj} 就是在此平面内测得。 θ_{lj} 的起始线为 a_{lj-1} 的延长线，终止线为 a_{lj} 的平行线。

(2) 偏置量 d_{lj} ——杆件 j 的偏置量为杆长线 a_{lj} 与 a_{lj-1} 在 j 号关节轴线上截取的距离，若关节为旋转关节则为常量。

A 矩阵的参数由表 2-1 确定如下：

表 2-1 A 矩阵的参数

杆件编号	关节变量	杆件扭角	杆件长度	偏置量	$\cos \alpha_{lj-1}$	$\sin \alpha_{lj-1}$
L_{lj}	θ_{lj}	α_{lj-1}	a_{lj-1}	d_{lj}		
L_{11}	θ_{11}	90°	R	0	0	1
L_{12}	θ_{12}	0	L_1	0	1	0
L_{13}	θ_{13}	-90°	L_2	0	0	-1
L_{14}	θ_{14}	0	L_3	0	1	0
L_{15}	θ_{15}	90°	0	0	0	1

将表 2-1 中的参数代入公式 (2-8) 内：

$$A_j = Rot(x_{j-1}, \alpha_{lj-1}) Trans(\alpha_{lj-1}, 0, 0) Trans(0, 0, d_{lj}) \quad (2-8)$$

得到，

$$A_I = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & R \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_1 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S_3 & -C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & L_3 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & -1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $C_j = \cos \theta_{Ij}$, $S_j = \sin \theta_{Ij}$, P 代表动平台相对于绝对坐标系位姿。

2.3.1 3-RRRT 并联机器人的位置反解

该并联机器人的运动学方程为：

$$P = A_1 * A_2 * A_3 * A_4 * A_5 * A_6 \quad (2-9)$$

我们定义一个矩阵 T 由上式可得：

$$T = A_1^{-1} * P - A_2 * A_3 * A_4 * A_5 * A_6 = 0 \quad (2-10)$$

利用 MATLAB 软件计算 T ，由 $T(3,3)=0$ 和 $T(3,4)=0$ 可以得到：

$$\sin \theta_{13} = p_2 / L_{13}$$

进而得出：

$$\cos \theta_{13} = \pm \sqrt{L_{13}^2 - p_2^2} / L_{13}$$

同时，由 $T(2,4)=0$ 可以得到：

$$(R - p_1 - r) * \sin \theta_{11} - (\cos \theta_{13} * L_{13} + L_{12}) * \sin \theta_{12} + p_3 * \cos \theta_{11} = 0 \quad (2-11)$$

我们令 $a_1 = R - p_1 - r$ ， $b_1 = \cos \theta_{13} * L_{13} + L_{12}$ 将其代入 (2-11) 式可得：

$$a_1 * \sin \theta_{11} - b_1 \sin \theta_{12} + p_3 \cos \theta_{11} = 0 \quad (2-12)$$

由 $T(1,4)=0$ 可以得出：

$$a_1 \cos \theta_{11} + b_1 \cos \theta_{12} - p_3 \sin \theta_{11} = 0 \quad (2-13)$$

则由 (2-12)² + (2-13)² 可以得出：

$$\cos \theta_{12} = (a_1^2 + p_3^2 - b_1^2 - L_{11}^2) / (2 * b_1 * L_{11}) \quad (2-14)$$

将 (2-14) 式代入 (2-13) 式可得：

$$a_1 * \cos \theta_{11} + (a_1^2 + p_3^2 - b_1^2 - L_{11}^2) / (2 * L_{11}) - p_3 * \sin \theta_{11} + L_{11} = 0 \quad (2-15)$$

由万能公式：

$$\cos \theta_{11} = (1 - x^2) / (1 + x^2)$$

$$\sin \theta_{11} = 2 * x / (1 + x^2)$$

其中 $x = \tan(\theta_{11} / 2)$ ，代入 (2-15) 式，经化简可得：

$$(c - q) * x^2 - 2 * p * x + a = 0$$

其中 $c = (a_1^2 + p_3^2 - b_1^2 - L_{11}^2) / (2 * L_{11})$

我们令：

$$\lambda_1 = \sqrt{L_{13}^2 - L_{12}^2} + L_{12}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{L_{13}^2 - p_3^2} + L_{12}$$

$$\eta_1 = (a_1^2 + p_3^2 + L_{11}^2 - \lambda_1^2) / (2 * L_{11})$$

$$\eta_2 = (a_1^2 + p_3^2 + L_{11}^2 - \lambda_2^2) / (2 * L_{11})$$

由此可得出 x 的 4 组解：

$$x(1) = (p_3 - \sqrt{p_3^2 + a_1^2 - \eta_1^2}) / (\eta_1 - a_1)$$

$$x(2) = (p_3 + \sqrt{p_3^2 + a_1^2 - \eta_1^2}) / (\eta_1 - a_1)$$

$$x(3) = \left(p_3 - \sqrt{p_3^2 + a_1^2 - \eta_2^2} \right) / (\eta_2 - a_1)$$

$$x(4) = \left(p_3 + \sqrt{p_3^2 + a_1^2 - \eta_2^2} \right) / (\eta_2 - a_1)$$

而在实际情况下，3-RRRT 并联机器人的 θ_{i3} 应达到以下要求：

$$-90^\circ \leq \theta_{i3} \leq 90^\circ$$

故 $\cos \theta_{i3} = \sqrt{L_3^2 - p_2^2} / L_{i3}$ ，即

$$x = \left(p_3 \pm \sqrt{p_3^2 + a_1^2 - \eta_2^2} \right) / (\eta_2 - a_1)$$

因此在动平台位置姿态保持不变的情况下，这一类型机器人首条支链原动杆件 L_{11} 其输入角应为：

$$\theta_{11} = 2 * \arctan(x) * (180^\circ / \pi)$$

结合以上说明不难发现，存在两组解。

上述说明属于该类型机器人首条支链相应的研究处理，现在采取同一种研究模式完成第二条支链的研究。

把动平台对应体坐标系按 pz_1 轴顺时针旋转 240° ，固定平台对应体坐标系按 oz_1 轴顺时针旋转 120° ，可知其旋转矩阵为：

$$R_1 = Rot(pz_1, 240^\circ), R_2 = Rot(oz_1, 120^\circ)$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

通过和上一条支链同一种研究模式进行处理，确定其运动学方程：

$$P = R_1 * A_1 * A_2 * A_3 * A_4 * A_5 * A_6 * R_2$$

$$a_{01} = \sqrt{4 * L_{23}^2 - (\sqrt{3} * p_1 + p_2)^2} + 2 * L_{22}$$

$$a_1 = \sqrt{3} * p_2 + 2 * r - 2 * R - p_1$$

$$\eta_1 = (a_1^2 + 4 * p_3^2 + 4 * L_{21}^2 - a_{01}^2) / (4 * L_{21})$$

$$x(1) = (2 * p_3 - \sqrt{a_1^2 + 4 * p_3^2 - \eta_1^2}) / (\eta_1 + a_1)$$

$$x(2) = (2 * p_3 + \sqrt{a_1^2 + 4 * p_3^2 - \eta_1^2}) / (\eta_1 + a_1)$$

因此在动平台位置姿态保持不变的情况下，这一类型机器人第二条支链原动杆 L_{21} 其输入角为：

$$\theta_{21} = 2 * \arctan(x) * (180^\circ / \pi)$$

可知它也有两组解。

现在采取同一种研究模式完成第三条支链的研究。

把动平台对应体坐标系按 pz_l 轴顺时针旋转 120° ，固定平台对应体坐标系按 oz_l 轴顺时针旋转 240° ，可以得出其旋转矩阵为：

$$B_1 = Rot(pz_l, 120^\circ), B_2 = Rot(oz_l, 240^\circ)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

通过和上一条支链同一种研究模式进行处理，确定其运动学方程：

$$P = B_1 * A_1 * A_2 * A_3 * A_4 * A_5 * A_6 * B_2$$

$$a_{01} = \sqrt{4 * L_{33}^2 - (\sqrt{3} * p_1 - p_2)^2} + 2 * L_{32}$$

$$a_1 = -\sqrt{3} * p_2 + 2 * r - 2 * R - p_1$$

$$\eta_1 = (-a_1^2 - 4 * p_3^2 - 4 * L_{31}^2 + a_{01}^2) / (4 * L_{31})$$

$$x(1) = (2 * p_3 - \sqrt{a_1^2 + 4 * p_3^2 - \eta_1^2}) / (a_1 - \eta_1)$$

$$x(2) = (2 * p_3 + \sqrt{a_1^2 + 4 * p_3^2 - \eta_1^2}) / (a_1 - \eta_1)$$

因此在动平台位置姿态保持不变的情况下，这一类型机器人第三支链原动杆 L_{3l} 其输入角为：

$$\theta_{3l} = 2 * \arctan(x) * (180^\circ / \pi)$$

可知其也有两组解。

综上所述，可以得到以下结论：

如果 3-RRRT 动平台位置与姿态不再出现任何改变，那么上述三条类支链内部首根杆件 L_{il} 其输入角 θ_{il} 实际上存在两个数值均可以满足要求。以此不难发现，普通条件下，这一类型机器人其位置反解存在 2^3 组。

2.3.2 3-RRRT 并联机器人的位置正解

如图 2-2 所示，对于这一类型机器人首条支链而言，向量

$$\overline{a_{12}a_{15}} = \overline{oa_{15}} - \overline{oa_{12}}$$

是绝对坐标系中的度量。而向量

$$\overline{a_{12}a_{15}}^2 = A_3 * A_4 * [0, 0, 0, 1]^T = [L_{13} * \cos \theta_{13} + L_{12}, 0, -L_{13} * \sin \theta_{13}, 1]^T \quad (2-16)$$

是向量 $\overline{a_{12}a_{15}}$ 在坐标系 {2} 中的度量。故有

$$\left| A_3 * A_4 * [0, 0, 0, 1]^T \right|^2 = \left| \overline{oa_{15}} - \overline{oa_{12}} \right|^2 \quad (2-17)$$

其中，点 a_{12} 于坐标系 $\{0\}$ 内部对应位置矢量是：

$$\overline{oa_{12}} = A_1 * A_2 * [0, 0, 0, 1]^T = [\cos \theta_{11} * L_{11} + R, 0, \sin \theta_{11} * L_{11}, 1]^T \quad (2-18)$$

点 a_{15} 于坐标系 $\{0\}$ 内部对应位置矢量是：

$$\overline{oa_{15}} = P * A_6^{-1} * [0, 0, 0, 1]^T = [r + p_1, p_2, p_3, 1]^T \quad (2-19)$$

把式 (2-16)、(2-18)、(2-19) 代入式 (2-17) 中，化简可得：

$$F(1) = (p_1 + a_1)^2 + p_2^2 + (p_3 - a_2)^2 - 2 * a_3 * L_2 * \sqrt{L_{13}^2 - p_2^2} = 0$$

其中：

$$a_1 = r - R - L_1^* \cos \theta_{11}$$

$$a_2 = L_{11} * \sin \theta_{11}$$

$$a_3 = L_{11} * \sin \theta_{11}$$

采取同一种研究模式对该类型机器人第二条支链进行研究时发现：

$$F(2) = (p_1 + b_1)^2 + (p_2 + b_2)^2 + (p_3 - b_3)^2 - a_4 - L_{22} * \sqrt{4 * L_{23}^2 - (\sqrt{3} * p_1 + p_2)^2} = 0$$

其中：

$$b_1 = (L_{21} * \cos \theta_{21} + R + r) / 2$$

$$b_2 = \sqrt{3} * (r - L_{21} * \cos \theta_{21} - R) / 2$$

$$b_3 = L_{21} * \sin \theta_{21}$$

按照上述说明，完成这一类型机器人第三条支链的研究，不难发现：

$$F(3) = (p_1 + c_1)^2 + (p_2 + c_2)^2 + (p_3 - c_3)^2 - a_4 - L_{32} * \sqrt{4 * L_{33}^2 - (\sqrt{3} * p_1 - p_2)^2} = 0$$

其中：

$$c_1 = (L_{31} * \cos \theta_{31} + R - r) / 2$$

$$c_2 = \sqrt{3} * (-r + L_{31} * \cos \theta_{31} + R)$$

$$c_3 = L_{31} * \sin \theta_{31}$$

按照以上说明，以这一类型机器人三条支链位置正解为目的进行研究，我们能够建立非线性方程组：

$$F = [F(1), F(2), F(3)]^T = [0, 0, 0]^T$$

因并联机构内部杆件数量庞大，结构处理过于繁琐，采用解析法无法实现快速获得位置正解，故采用数值法求解上述非线性方程组，具体过程参看 2.4.2 节。

2.4 3-RRRT 并联机器人位置正反解的 MATLAB 实现

2.4.1 MATLAB 简介

MATLAB 作为仿真技术环节中一个非常得力的工具被广泛地应用于数值求解、数学建模及理论分析中，因为在对机器人的控制分析中，假设完全采用实物进行数据采集和验证分析，不止生产加工方面成本大，每个设计均生产加工出样本在经济效益和销量均不现实，机械结构的生组装和调试，各种辅助测量设备以及电路电线、控制柜等方面的投入将是一笔巨大的开支；同时往往一个实验测试场所的功能受限于搭建场地资金等要素，只适用于一类实验，占地面积大还需专人维护管理设备。

采用 MATLAB 这类计算机仿真技术，不仅可以降低实验室基础设备的投入，同时节省了原先的养成加工成本与时间，使得科研人员可以按照其自身思路尽情的去发挥创造力和想象力，提升了实验研究的效率和效益，并且采用仿真技术往往还能够获得比有限条件下所购置的实验装备更好的实验效果。

最初诞生的 MATLAB 本是美国新墨西哥大学线性代数课堂上使用的 Fortran 子程序库接口程序，在学生中受到了广泛欢迎后，于 1984 年推出其第一个商业版本，该版本采用 C 语言编写，具有使用图像或图形表示矩阵或向量的可视化功能，为其后来根据广大使用者建议添加各类使用功能注入了良好基因。

经过 30 多年发展至今，MATLAB 已经具备了强大的科学计算和工程绘图能力，丰富多样的图形功能函数覆盖二维、三维、图形处理、图像显示、动画演示等方方面面，为用户提供了不同层次的解决方案，针对各行业领域专门设计开发出的各类功能强大的模块集和工具箱，再一次简化了该工具的使用学习成本，强化了特殊问题的专业分析能力，只需学习了解各个功能函数便可方便的开发、测试、评估个中实验样例或控制系统的性能优劣，只需要了解 MATLAB 的基本的语法使用规则和常用编程能力便可，因而成为进行高效开发和研究的的首选利器。

在并联机器人的实验中，更是由于实物实验本身所具有的不确定性、非线性甚至乃至安全性能方面的考虑，本身就需要对实验的安全和效率进行控制，一套全新新设计出的控制方案不能立马施于机器人，必须在真机调试之前通过大量的仿真实现来分析研究的可靠性、非线性、耦合性、滞后性等一系列性能指标，既快又好还经济地取得满意的试验效果。

本文主要用到 MATLAB 软件的 m 文件编写和仿真绘图功能。

2.4.2 3-RRRT 并联机器人位置反解的 MATLAB 实现

分析第一条支链时，可利用 MATLAB 编程进行处理：

$$L_{11}=185, L_{12}=185, L_{13}=125, R=r=87$$

(1)当动平台中心位姿 $p=[60 \ 60 \ 300]^T$ 时,

$$\theta_{11} = [-12.21^\circ, 169.59^\circ]^T$$

(2)当动平台中心位姿 $p=[0 \ 0 \ 495]^T$ 时,

$$\theta_{11} = [90^\circ, 90^\circ]^T$$

当发生此类情况时, 经综合得到独立解 $\theta_{11} = 90^\circ$,

(3)当动平台中心位姿 $p=[-60 \ 80 \ 350]^T$ 时,

$$\theta_{11} = [47.98^\circ, 151.48^\circ]^T$$

分析第二支链时, 可利用 MATLAB 编程进行处理:

$$L_{21}=185, L_{22}=185, L_{23}=125, R=r=87$$

(1)当动平台中心位姿 $p=[60 \ 60 \ 300]^T$ 时,

$$\theta_{21} = [20.60^\circ, 151.03^\circ]^T$$

(2)当动平台中心位姿 $p=[0 \ 0 \ 495]^T$ 时,

$$\theta_{21} = [90^\circ, 90^\circ]^T$$

当发生此类情况时, 经综合得到独立解 $\theta_{21} = 90^\circ$,

(3)当动平台中心位姿 $p=[-60 \ 80 \ 350]^T$ 时,

$$\theta_{21} = [15.92^\circ, 134.41^\circ]^T$$

分析第三支链时, 可利用 MATLAB 编程进行处理:

$$L_{31}=185, L_{32}=185, L_{33}=125, R=r=87$$

(1)当动平台中心位姿 $p=[60 \ 60 \ 300]^T$ 时,

$$\theta_{31} = [33.54^\circ, 177.03^\circ]^T$$

(2)当动平台中心位姿 $p=[0 \ 0 \ 495]^T$ 时,

$$\theta_{31} = [90^\circ, 90^\circ]^T$$

当发生此类情况时, 经综合得到独立解 $\theta_{31} = 90^\circ$,

(3)当动平台中心位姿 $p=[-60 \ 80 \ 350]^T$ 时,

$$\theta_{31} = [47.44^\circ, 145.37^\circ]^T$$

结合以上说明可知, 一旦这一类型机器人其动平台位置不再发生变化, 那么支链首条杆件符合要求的输入角有两个。这样一来, 该类型机器人一般存在 8 组位置反解。

2.4.3 3-RRRT 并联机器人位置正解的 MATLAB 实现

结合此前的介绍,因这一类型机器人机构组成过于复杂,可以采取数值法结合 MATLAB 编程求得位置正解,同时确认这一结果的有效性。操作阶段主要通过牛顿迭代法实现编程,基本流程如下:

(1)选择起始点 $p(0)$, $p(0)$ 表示在初始输入角给定的情形下,其动平台几何中心在绝对参考系中的描述。

(2)当选择的初始点 $p(0)$ 不是其最优解,则运用最速下降法确定方向 d_i , 确保目标函数 $f(p)$ 以 $p(i)$ 为起点,顺着 d_i 方向可以确定某一个 $p(i+1)$, 使得 $f(p)$ 下降。

(3)当下降方向 d_i 确定之后,在射线 $p(i)+\lambda*d_i(\lambda \geq 0)$ 上截取步长 λ_i , 使 $f(p(i)+\lambda_i*d_i) < f(p(i))$ 。按照这样的模式即可获知剩下的迭代点 $p(i+1)=p(i)+\lambda_i*d_i$ 。

(4)校验新的迭代点 $p(i+1)$ 是不是方程组的最优解,抑或是最优解的近似解,校验方法是看其梯度的模是否小于预先设定的精度 ε , 即

$$\|\nabla f(p(i+1))\| \leq \varepsilon$$

若满足上式,则可以认为是最优解,迭代终止,若不满足则继续迭代,直到最优解出现为止。

位置正解的 MATLAB 仿真如下:

如表 2-2 所示为该类型机器人的基本参数:

表 2-2 3-RRRT 并联机器人的基本参数

杆件 1 L_{i1}	杆件 2 L_{i2}	杆件 3 L_{i3}	动平台 半径 r	固定平台 半径 R
185	185	125	87	87

如表 2-3 所示为初始位置 $p(0)$:

表 2-3 初始位置 $p(0)$

初始位置 $p(0)$		
$P_1(0)$	$P_2(0)$	$P_3(0)$
2	2	495
60	60	300

如表 2-4 所示为初始输入角:

表 2-4 初始输入角

序号	θ_{11}	θ_{21}	θ_{31}
1	90°	90°	90°
2	169.58°	20.5°	117.02°

结合以上迭代法编制 MATLAB 程式求出相应的数据如表 2-5 所示:

表 2-5 运算结果

最优解 p		
P_1	P_2	P_3
0	0	495
88.7357	-83.5172	-29.3396

正解的正确性验证：

显然在第一组输入角下其位置正解和上节所述的位置反解的结果是相符合的，而当 $p=[88.7357, -83.5172, -29.3396]^T$ 时，通过上节所述的反解方法经 MATLAB 编程计算可得到如表 2-6 所示的结果：

表 2-6 位置反解运算结果

θ_{11}	169.5738	153.6753
θ_{21}	20.4983	7.7463
θ_{31}	117.0184	117.0332

由上表可知，第二组输入角下其位置正解和位置反解也可以相互印证，从而证明了正解的正确性。

2.5 本章小结

本章通过运用齐次坐标变换的方法，运用 A 矩阵(Denavit-Hartenberg Matrix)建立了 3-RRRT 并联机器人的运动学模型。运用解析法得出了其运动学的位置反解，并通过实际算例运用 MATLAB 程序编程求解，得到了其 8 组位置反解的算例；运用数值法得出了其运动学的位置正解，并通过 MATLAB 程序编程通过牛顿迭代法得到了 2 组输入角下的位置正解，同时结合位置反解验证其位置正解准确性，为完成后期动力学研究奠定了基础。

第三章 3-RRRT 并联机器人的动力学分析

3.1 引言

机器人的动力学分析对于机器人的结构的设计、控制系统的设计以及性能的分析有着重要的意义。进行动力学研究时,往往需要完成不同关节变量、时间对应1阶导数(速度)、2阶导数(加速度)、全部执行设备驱动力等方面的研究。在研究上述变量的前提下,建立该类型机器人动力学数学模型,随后得到动力学方程。不仅如此,因为在确定其动力学方程时往往必须通过计算机编制程序进行计算,那么动力学研究期间,往往必须在该类型机器人动力学数学模型基础上通过递推式进行处理,如此一来,可以更加快速的结合计算机系统完成运算该类型机器人动力学模型程序编写工作。

机器人的动力学方程就是机器人系统的运动方程,对机器人的动力学方程的求解的问题可以分为两个子问题:正动力学问题和逆动力学问题。

(1)正动力学问题。当机器人的各个杆件和关节的驱动力或驱动力矩为已知,要求解机器人的各个关节变量在关节变量空间的轨迹或机器人的末端执行器在绝对坐标系中的轨迹,此类问题便是动力学方程中正向求解,即正动力学问题。

(2)逆动力学问题。如果机器人内部所有关节变量空间路线提前设置,或机器人末端执行器对应绝对坐标系活动路线提前设置,若想得到其内部所有杆件与关节驱动力、驱动力矩,我们可以将此类情况认为是动力学方程中逆向求解,简称其为逆动力学问题。

在处理任何一项动力学问题时,必须提前对设备的动力学数学模型进行分析,唯一的不同是采取何种处理方式。在分析这一设备的动力学时,全都希望使设备的运动得到合理的控制,确保设备能够根据提前设置的路线工作,所以分析与确立该设备动力学模型的过程中,必须针对逆动力学情况进行处理。

目前,关于这一机构的动力学求解方法有很多,如牛顿-欧拉法、拉格朗日法、凯恩法、最小约束高斯原理法与广义达朗贝尔法等。首先牛顿-欧拉法以牛顿刚体力学相关理论为前提得到该类型机构动力学递推运算程式,最终求得矩阵形式动力学方程。拉格朗日法以能量角度为前提,求得广义坐标系中机构运行具体动能与势能,最终求出其动力学方程。凯恩法主要依据凯恩动力学方程,通过计算机建立运动方程,从而得出数值解。最小约束高斯法通过高斯约束原理建立系统的动力学方程,比较适合自由度数高的情形,结构杆件越多其运算优势越明显。广义的达朗贝尔原理法依据质点和质点系的达朗贝尔原理,通过虚加的惯性力,建立约束方程,从而导出机器人的动力学方程。

上述所有的动力学求解模式实际操作阶段,根据机器人结构的差异,最终的

效果也会存在较大的区别。如机器人属于闭链机构形式，采取普遍使用的牛顿-欧拉法与拉格朗日法分析其动力学情况时，必须使该机构其中一处断开，产生大量开链结构，接着在断开位置提供约束力与约束力矩，让机构由闭链形式转换成开链形式。但是凯恩动力学法面对此类情况时操作过程无需如此复杂，断开位置对应约束力与约束力矩可以忽略。这种情况下凯恩法就相对而言比较简单。通过了解某种动力学算法在问题处理期间工作量与处理时间，我们可以据此评定这一动力学算法是否可以真正满足人们的需求。经研究发现，初期动力学算法的确定与实际处理方式，通常情况下，拉格朗日法工作量最为庞大，其次便是牛顿-欧拉，工作量以及效率最为合理的当属凯恩法。

本章在上一章运动学分析的基础上，选择牛顿-欧拉动力学方法，完成这一类型机器人动力学数学模型的相关处理，从而确定所有杆件速度、加速度、惯性力与惯性力矩正向递推计算模式，接着通过反向递推运算获得所有关节平衡力、平衡力矩、驱动力或驱动力矩。最终实践阶段采取 MATLAB 完成数值运算仿真处理。

3.2 牛顿-欧拉动力学分析方法

3.2.1 杆件的加速度

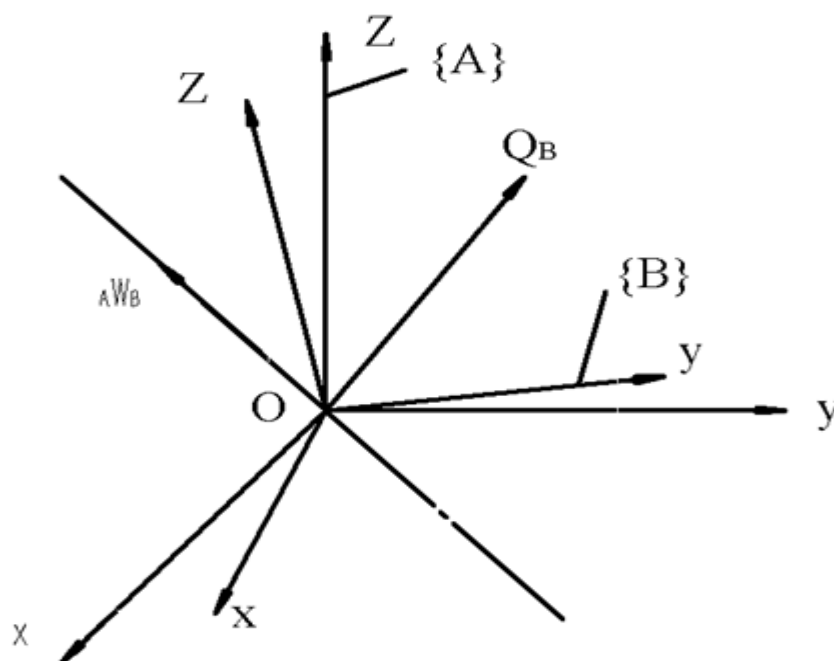


图 3-1 坐标系{B}及参考系{A}

假定件坐标系{B}中其活动点为 ${}^B Q$ ，杆件坐标系{B}相对于其参考系{A}绕

某瞬时轴转动的角速度为 ${}^A\omega_B$ ，那么这一点线加速度与角加速度如下：

$${}^B\dot{V}_Q = \frac{d}{dt} {}^B V_Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^B V_Q(t + \Delta t) - {}^B V_Q(t)}{\Delta t}$$

$${}^A\dot{\omega}_B = \frac{d}{dt} {}^A \omega_B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{{}^A \omega_B(t + \Delta t) - {}^A \omega_B(t)}{\Delta t}$$

公式内， ${}^B V_Q(t)$ ——动点 ${}^B Q$ 于杆件坐标系{B}中对应的线速度，属于坐标系{B}中描述的速度矢量，同时作为时间 t 的对应函数。

${}^A\omega_B(t)$ ——以参考系{A}为参照确定的角速度，属于参考系{A}描述的矢量。

因为机器人是由多杆件组成的系统，需要设置若干个杆件坐标系，所以在表示其加速度时也和表示其速度一样，强调描述加速度矢量的坐标系也很有必要^[14]。如图 3-1 所示，空间内部动点 ${}^B Q$ 属于坐标系{B}所描述的矢量，坐标系{B}将坐标系{A}确定成参考系，假定坐标系{A}、{B}对应的原点汇交在一起，后者相对于前者以角速度 ${}^A\omega_B$ 转动，由于转动的瞬时轴线处在坐标系{A}中，因此该角速度作为坐标系{A}描述的矢量。经观察发现坐标系{B}相对于坐标系{A}存在角速度 ${}^A\omega_B$ ，因此能够通过算子 ${}^B V_Q(t)[(\partial/\partial t)_{rel} + \omega \times]$ 求出速度 ${}^A V_Q$ ，然后解出加速度 ${}^A\dot{V}_Q$ ，也就是

$${}^A V_Q = {}^A R {}^B V_Q + {}^A \omega_B \times {}^A R {}^B Q$$

再对时间 t 求微分，整理后得：

$${}^A\dot{V}_Q = {}^A\dot{v}_B + {}^A R {}^B\dot{V}_Q + 2 {}^A \omega_B \times {}^A R {}^B V_Q + {}^A \omega_B \times {}^A R {}^B Q + {}^A \omega_B \times ({}^A \omega_B \times {}^A R {}^B Q) \quad (3-1)$$

其中， ${}^A\dot{v}_B$ ——坐标系{B}原点的加速度；

${}^A R {}^B\dot{V}_Q$ ——相对加速度；

$2 {}^A \omega_B \times {}^A R {}^B V_Q$ ——哥氏加速度；

${}^A \omega_B \times {}^A R {}^B Q$ ——切向加速度；

${}^A \omega_B \times ({}^A \omega_B \times {}^A R {}^B Q)$ ——向心加速度；

${}^A R$ ——旋转变换，齐次坐标变换内部旋转子矩阵。

因为这一类型设备其杆件坐标系全部置于所有杆件对应笛卡尔坐标系中，存在于各种杆件刚体处，所以随机器人的运动而彼此改变相对位置和方向，但某一个杆件上的坐标系是固定在此杆件上的，杆件活动期间随之运动，但不存在相对运动。

因为杆件坐标系{B}内部存在的所有点均属于常矢量，所以有

$${}^B V_Q = 0, \quad {}^B\dot{V}_Q = 0$$

所以（3-1）式简化为：

$${}^A\dot{V}_Q = {}^A\dot{v}_B + {}^A \omega_B \times {}^A R {}^B Q + {}^A \omega_B \times ({}^A \omega_B \times {}^A R {}^B Q) \quad (3-2)$$

利用 (3-2) 公式可以求出杆件某一点线加速度具体结果。

若想得到角加速度准确的运算公式, 需要提前研究两个自由度的具体情况。假定参考系为{A}, 以此为参照的坐标系{B}的角速度为 ${}^A\omega_B$, 坐标系{C}相对{B}的角速度为 ${}^B\omega_C$, 那么坐标系{C}对参考系{A}的角速度即作为两相对角速度和值, 如果把 ${}^B\omega_C$ 转变成参考系{A}描述的矢量, 那么

$${}^A\omega_C = {}^A\omega_B + {}^A R^B {}^B\omega_C \quad (3-3)$$

依照公式对时间 t 取微分, 那么

$${}^A\dot{\omega}_C = {}^A\dot{\omega}_B + {}^A R^B \dot{{}^B\omega}_C + {}^A\omega_B \times {}^A R^B {}^B\omega_C \quad (3-4)$$

通过公式 (3-3) 与公式 (3-4) 便能够确定该设备杆件角加速递推公式。

3.2.2 惯性张量

当刚体处于 3 维空间内部进行运动时, 其惯性张量能够将 6 个广义类数量矩阵确定成元素得到 3×3 阶矩阵或 4×4 阶齐次坐标矩阵进行代替。若想尽可能节省刚体活动研究的时间, 惯性张量可由参考坐标系进行说明, 用将后者置于刚体位置, 即人们所说的体坐标系, 这种坐标系和刚体之间不存在相对运动, 如果其体坐标系是{A}, 那么惯性张量可以理解成:

$$\tilde{\mathbf{I}}_A = \begin{pmatrix} {}^A\tilde{I}_{xx} & {}^A\tilde{I}_{xy} & {}^A\tilde{I}_{xz} \\ {}^A\tilde{I}_{xy} & {}^A\tilde{I}_{yy} & {}^A\tilde{I}_{yz} \\ {}^A\tilde{I}_{xz} & {}^A\tilde{I}_{yz} & {}^A\tilde{I}_{zz} \end{pmatrix}$$

结合公式不难发现, 惯性张量矩阵属于对称矩阵, 内部所有元素可定义为:

质量对应惯性矩(对角线上位置相关元素):

$${}^A\tilde{I}_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho dV, {}^A\tilde{I}_{yy} = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho dV, {}^A\tilde{I}_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho dV$$

质量对应惯性积(不属于对角线元素):

$${}^A\tilde{I}_{xy} = \iiint_V xy \rho dV, {}^A\tilde{I}_{xz} = \iiint_V xz \rho dV, {}^A\tilde{I}_{yz} = \iiint_V yz \rho dV$$

式中 ρ ——材料的密度。

dV ——体积的微元。其位置矢量为 $\tilde{\mathbf{r}}_A$, 可通过坐标系{A}中进行说明:

$$\tilde{\mathbf{r}}_A = [x, y, z]^T$$

惯性张量属于实对称矩阵, 内部六个独立元素由参考系(体坐标系)中刚体本身位置与方向决定, 如果坐标系位置与方向处理恰当, 那么惯性积将能够确定成 0, 出现这种情况时必然存在相应的惯性主轴, 我们也可以将惯性矩命名成惯性主矩。机器人杆件坐标系往往处于上下关节位置, 求解质心惯性张量期间必须结合平行轴概念。假定刚体任一点存在坐标系{A}, 将该坐标系转移至其质量分布中心, 确定该坐标系是{C}。如果将坐标系{C}确定为参考系, 提前确定惯性张量(机器人杆件通过相关运算模式能够求得)和{C}系原点(质心)相对{A}的位置矢量 $[x_C, y_C, z_C]^T$, 那么能够结合平行轴概念, 解决参考系是{A}时的惯性

张量问题，如：

$$\begin{aligned} {}^A I_{zz} &= {}^C I_{zz} + m(x_C^2 + y_C^2) \\ {}^A I_{xy} &= {}^C I_{xy} + mx_C y_C \end{aligned}$$

式中 m ——刚体的质量

惯性张量具有如下性质：

- (1) 如果平面中存在刚体质量分布对称和参考系，那么与这一平面呈 90° 角的坐标轴其惯性积是 0；
- (2) 惯性矩始终是正，但惯性积则包含正负两种；
- (3) 仅参考系方向出现变化，那么三个惯性矩数量和值稳定；
- (4) 惯性张量矩阵其特征值代表着它的惯性主矩，特征矢量与惯性主轴两者方位一致。

3.2.3 机器人牛顿-欧拉动力学的递推计算公式

如果提前确定了机器人的运动路线，那么路线中所有的关节变量 q 和相对应时间的 1 阶、2 阶导数 \dot{q} 、 \ddot{q} 同样得到了确定，借此能够获得所有杆件速度与角加速度。

而在所有杆件速度、角加速度、惯性张量全部确定的情况下，便能够通过牛顿-欧拉刚体动力学公式确定所有关节执行器内部驱动力、驱动力矩相应的递推公式。

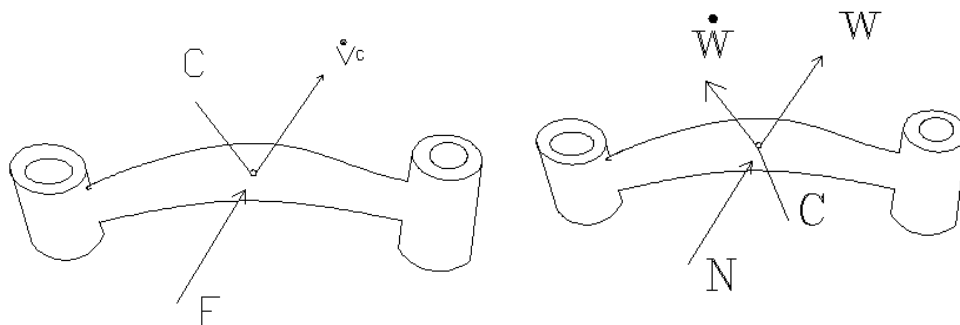


图 3-2 作用在杆件质心上的力和力矩

如图 3-2 所示的杆件中，将质量分布中心确定成 C ， C 处存在坐标系 $\{C\}$ ，在外力 F 及外力矩 N 影响下形成线加速度 \dot{v}_C 和角加速度 $\dot{\omega}$ ，换言之，如果杆件质心 C 存在线加速度 \dot{v}_C 和角加速度 $\dot{\omega}$ 后，质心 C 位置对应惯性力是 F ，惯性力矩是 N ，力、线速度和力矩、角速度间存在的公式可以通过牛顿与欧拉两种公式进行表示：

$$F = m\dot{v}_C, \quad N = \tilde{I}_C \dot{\omega} + \omega \times \tilde{I}_C \omega$$

式中 m ——杆件的质量；

$\tilde{\mathbf{I}}_C$ —— 惯性张量，以坐标系{C}进行说明；

$\dot{\mathbf{v}}_C$ —— 质心 C 点的线加速度，即坐标系{C}原点的线加速度；

$\boldsymbol{\omega}$ 、 $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ —— 角速度与角加速度。

如下所示，代表正向递推求出杆件质心线加速度与角速度操作流程：

利用公式 (3-3)，将坐标系{A}、{B}、{C}用杆件坐标系{i-1}、{i}、{i+1}取代，同时第 i+1 号关节执行器作用下，i+1 号杆件处存在相对于 i 号杆件的角速度为

$${}^i\boldsymbol{\omega}_{i+1} = s_{i+1}\dot{q}_{i+1} {}^i\mathbf{e}_{i+1} \quad (3-5)$$

可得

$${}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} = {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_i + {}^{i-1}_i\mathbf{R}s_{i+1}\dot{q}_{i+1} {}^i\mathbf{e}_{i+1} \quad (3-6)$$

用变换 ${}^{i+1}_i\mathbf{R} = {}^{i+1}_i\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{R}$ 同乘以 (3-6) 式两端，并且考虑到 ${}^{i+1}_i\mathbf{R} {}^i\mathbf{e}_{i+1} = \tilde{\mathbf{e}}_{i+1}$ ，得角速度递推计算公式：

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} = {}^{i+1}_i\mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i + s_{i+1}\dot{q}_{i+1}\tilde{\mathbf{e}}_{i+1} \quad (3-7)$$

式中：

$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i+1}$ —— 第 i+1 号杆件对应角速度，作为{i+1}系矢量介绍；

$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$ —— 第 i 号杆件对应角速度，作为{i}系矢量介绍；

\dot{q}_{i+1} —— 在第 i+1 号关节执行器作用下第 i+1 号杆件产生角速度；

$\tilde{\mathbf{e}}_{i+1}$ —— 所选择关节处杆件坐标系 z 轴正方向对应单位矢量，作为{i+1}系矢量介绍

s_{i+1} —— 关节的识别符号：

$$s_{i+1} = \begin{cases} 1 & \text{对转动关节} \\ 0 & \text{对移动关节} \end{cases}$$

通过公式 (3-7) 对时间求导，确定角加速度对应递推计算公式：

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} = {}^{i+1}_i\mathbf{R}\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i + {}^{i+1}_i\mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \times \dot{q}_{i+1}\tilde{\mathbf{e}}_{i+1}s_{i+1} + \ddot{q}_{i+1}\tilde{\mathbf{e}}_{i+1}s_{i+1} \quad (3-8)$$

式中：

${}^{i+1}_i\mathbf{R}\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i$ —— 第 i+1 号杆件前递推叠加的角加速度 $\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i$ ，用{i+1}系描述；

${}^{i+1}_i\mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \times \dot{q}_{i+1}\tilde{\mathbf{e}}_{i+1}s_{i+1}$ —— 相对运动产生的角加速度；

$\ddot{q}_{i+1}\tilde{\mathbf{e}}_{i+1}s_{i+1}$ —— 第 i+1 号关节执行器作用下产生角加速度。

通过 (3-7) 与 (3-8) 式同一种操作模式转换 (3-1) 与 (3-2) 式，便能够确定线速度、线加速度基本递推公式：

$$\tilde{\mathbf{v}}_{i+1} = {}^{i+1}_i\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{v}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \times \tilde{\mathbf{P}}_i) + (1-s_{i+1})\dot{q}_{i+1}\tilde{\mathbf{e}}_{i+1} \quad (3-9)$$

$$\tilde{\dot{\mathbf{v}}}_{i+1} = {}^{i+1}_i\mathbf{R}\left[\tilde{\dot{\mathbf{v}}}_i + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i \times \tilde{\mathbf{P}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \times \tilde{\mathbf{P}}_i)\right] \quad (3-10)$$

$$+ (1-s_{i+1})\left[2 {}^{i+1}_i\mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \times \dot{q}_{i+1}\tilde{\mathbf{e}}_{i+1} + \ddot{q}_{i+1}\tilde{\mathbf{e}}_{i+1}\right]$$

公式内： $\tilde{\mathbf{P}}_i$ —— 坐标系{i+1}原点相对参考系{i}位置矢量，通过{i}系进行说明。

公式 (3-9) 和 (3-10) 的其他符号与之前相同。

分析牛顿-欧拉动力学递推算法不难发现，需要确定所有杆件质心 C_i 加速度

对应递推公式，所以假定第 i 号杆件质心 C_i 处固定一坐标系 $\{C_i\}$ ，原点为 C_i ，坐标轴与杆件坐标系 $\{i\}$ 方位一致，同时确定 ${}^i\mathbf{r}_{i,C_i}$ 是质心 C_i 于坐标系 $\{i\}$ 内部的位置矢量为：

$$\tilde{\mathbf{r}}_i = {}^i\mathbf{r}_{i,C_i}$$

结合公式 (3-10) 可以确定质心 C_i 线加速度 $\dot{\mathbf{v}}_{C_i}$ 递推方程式是：

$$\tilde{\mathbf{v}}_{C_i} = \tilde{\mathbf{v}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \times \tilde{\mathbf{r}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \times (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \times \tilde{\mathbf{r}}_i) \quad (3-11)$$

式中：

$\tilde{\mathbf{v}}_{C_i}$ ——杆件坐标系 $\{i\}$ 对应线加速度，仅需要把 (3-10) 式内部所有量对应下标 i 改为 $i-1$ 就得到它的计算式。

因公式 (3-11) 内部所有的量全部属于坐标系 $\{i\}$ 说明的矢量，同时两种坐标系 $\{C_i\}$ 、 $\{i\}$ 不存在相对运动，所以其中不会出现相对加速度和哥氏加速度等项，但是其中的加速度项 $\tilde{\mathbf{v}}_i$ 是反映坐标系 $\{i\}$ 及其以前各杆件的线加速度的，因此在递推的叠加累计过程中，若存在某些移动关节，就会在 (3-11) 式中隐含着某些前级的加速度，同时存在与 i 编号杆件相比偏小的相对加速度。

公式 (3-7)、(3-8)、(3-9)、(3-10) 和 (3-11) 就是牛顿-欧拉动力学递推算需要的速度及加速度的递推公式。因为机器人自身速度来自于编号杆件不断累积，因此递推运算阶段可以根据 $i=1,2,3,\dots,n$ 顺序处理，也就是在 1 号杆件速度、加速度确定的情况下，才能计算 2 号杆件的速度及加速度，才能计算第 3 号杆件的速度及加速度，按此顺序最后求得机器人末端执行器位姿坐标系 $\{n+1\}$ 的速度及加速度，这种从下编号向上编号的递推算法称为正向递推计算；反之，称为反向递推计算。

如下则对反向递推求出所有关节驱动力或驱动力矩进行说明：

如图 3-3 所示，假定第 i 号杆件质心是 C_i ， $\tilde{\mathbf{F}}_i$ 代表惯性力， $\tilde{\mathbf{N}}_i$ 代表惯性力矩， $\tilde{\mathbf{r}}_i$ 代表质心 C_i 根据坐标系 $\{i\}$ 所得位置矢量， $\tilde{\mathbf{R}}_i$ 则代表坐标系 $\{i+1\}$ 原点至 C_i 对应矢量，上述所有量全部属于以坐标系 $\{i\}$ 说明的矢量， $\tilde{\mathbf{R}}_i$ 、 $\tilde{\mathbf{r}}_i$ 与 $\tilde{\mathbf{P}}_i$ 全部属于 $\{i\}$ 系内部常矢量。

设 \mathbf{f}_i 或 \mathbf{n}_i 属于 i 号杆件处产生的驱动力或驱动力矩矢量，均来自于 i 关节执行器，因此他们存在于 $\{i\}$ 系原点位置，均属于 $\{i\}$ 系说明的矢量。

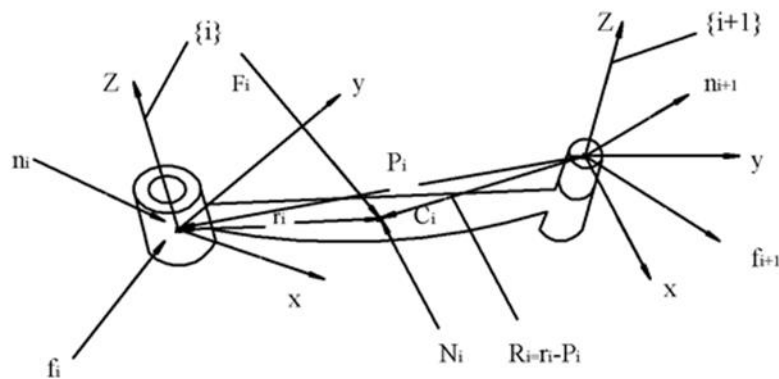


图 3-3 作用于第 i 号杆件质心上的力及力矩

因机器人末端杆件负载中提前确定的负载、力与力矩均通过上、下编号杆件进行传送，故而在求解杆件力与力矩阶段，需要末端 n 号杆件开始，一级一级朝着 1 号杆件递推，也就是反向递推运算。

根据第 i 号杆件质心力的平衡，可知：

$$\tilde{\mathbf{F}}_i = \tilde{\mathbf{f}}_i - {}^i\mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}_{i+1} \quad (3-12)$$

根据其质心力矩平衡，可知：

$$\tilde{\mathbf{N}}_i = \tilde{\mathbf{n}}_i - {}^i\mathbf{R}\tilde{\mathbf{n}}_{i+1} + (-\tilde{\mathbf{r}}_i) \times \tilde{\mathbf{f}}_i - (\tilde{\mathbf{P}}_i - \tilde{\mathbf{r}}_i) \times {}^i\mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}_{i+1} \quad (3-13)$$

根据 (3-12)、(3-13) 式确定该类型设备所有杆件驱动力与驱动力矩反向递推公式：

$$\tilde{\mathbf{f}}_i = {}^i\mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}_{i+1} + \tilde{\mathbf{F}}_i \quad (3-14)$$

$$\tilde{\mathbf{n}}_i = \tilde{\mathbf{N}}_i + {}^i\mathbf{R}\tilde{\mathbf{n}}_{i+1} + \tilde{\mathbf{r}}_i \times \tilde{\mathbf{F}}_i + \tilde{\mathbf{P}}_i \times {}^i\mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}_{i+1} \quad (3-15)$$

式中：

$\tilde{\mathbf{F}}_i$ ——质心的惯性力；

$\tilde{\mathbf{N}}_i$ ——质心处的惯性力矩。

引入 $n \times 1$ 阶矩阵 \mathbf{P} 作为驱动力

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2 \ \cdots \ \mathbf{P}_n]^T$$

式中： \mathbf{P}_i ——第 i 号关节执行器其驱动力（移动关节）或驱动力矩（旋转关节）。
即

$$\mathbf{P}_i = (1 - s_i) \tilde{\mathbf{f}}_i^T \tilde{\mathbf{e}}_i + s_i \tilde{\mathbf{n}}_i^T \tilde{\mathbf{e}}_i \quad (3-16)$$

式中： $\tilde{\mathbf{e}}_i$ ——杆件坐标系 $\{i\}$ 内 z 轴对应单位矢量。

$\tilde{\mathbf{f}}$ ——关节 i 上的平衡力。

$\tilde{\mathbf{n}}_i$ ——关节 i 上的平衡力矩。

s_i ——关节类型识别符号：

$$s_i = \begin{cases} 1 & i \text{ 为转动关节} \\ 0 & i \text{ 为移动关节} \end{cases}$$

如下则是对一般的机器人牛顿-欧拉方法进行说明。动力学递推计算阶段需要提前确认以下几点：

- (1) 对应机器人轨迹的 $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n]^T$ ，以及 $\dot{\mathbf{q}}$ 和 $\ddot{\mathbf{q}}$ 。
- (2) 了解 $\{i\}$ 系内部质心 C_i 位置矢量 $\tilde{\mathbf{r}}_i$ ，能够结合实验获得。
- (3) 了解坐标系 $\{C_i\}$ 说明的惯性张量 $\tilde{\mathbf{I}}_C$ ，能够结合实验获得。
- (4) $\{i\}$ 系说明的坐标系 $\{i+1\}$ 原点对应位置矢量 $\tilde{\mathbf{P}}_i$ ，能够结合变换矩阵 \mathbf{A}_{i+1} 第四列求出。

假定其自由度 $n=6$ ，进行递推计算如下：

正向递推: $i=0,1,2,3,4,5$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}_{i+1} &= {}^{i+1}_i \mathbf{R} \tilde{\omega}_i + s_{i+1} \dot{q}_{i+1} \tilde{\mathbf{e}}_{i+1} \\
 \tilde{\omega}_{i+1} &= {}^{i+1}_i \mathbf{R} \tilde{\omega}_i + {}^{i+1}_i \mathbf{R} \tilde{\omega}_i \times \dot{q}_{i+1} \tilde{\mathbf{e}}_{i+1} s_{i+1} + \ddot{q}_{i+1} \tilde{\mathbf{e}}_{i+1} s_{i+1} \\
 \tilde{\mathbf{v}}_{i+1} &= {}^{i+1}_i \mathbf{R} \left[\tilde{\mathbf{v}}_i + \tilde{\omega}_i \times \tilde{\mathbf{P}}_i + \tilde{\omega}_i \times (\tilde{\omega}_i \times \tilde{\mathbf{P}}_i) \right] \\
 &\quad + (1-s_{i+1}) \left[2 {}^{i+1}_i \mathbf{R} \tilde{\omega}_i \times \dot{q}_{i+1} \tilde{\mathbf{e}}_{i+1} + \ddot{q}_{i+1} \tilde{\mathbf{e}}_{i+1} \right] \\
 \tilde{\mathbf{v}}_{C_{i+1}} &= \tilde{\mathbf{v}}_{i+1} + \tilde{\omega}_{i+1} \times \tilde{\mathbf{r}}_{i+1} + \tilde{\omega}_{i+1} \times (\tilde{\omega}_{i+1} \times \tilde{\mathbf{r}}_{i+1}) \\
 \tilde{\mathbf{F}}_{i+1} &= m_{i+1} \tilde{\mathbf{v}}_{C_{i+1}} \\
 \tilde{\mathbf{N}}_{i+1} &= \tilde{\mathbf{I}}_{C_{i+1}} \tilde{\omega}_{i+1} + \tilde{\omega}_{i+1} \times \tilde{\mathbf{I}}_{C_{i+1}} \tilde{\omega}_{i+1} \\
 \text{反向递推: } i=6,5,4,3,2,1 \\
 \tilde{\mathbf{f}}_i &= {}^i_{i+1} \mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}}_{i+1} + \tilde{\mathbf{F}} \\
 \tilde{\mathbf{n}}_i &= \tilde{\mathbf{N}}_i + {}^i_{i+1} \mathbf{R} \tilde{\mathbf{n}}_{i+1} + \tilde{\mathbf{r}}_i \times \tilde{\mathbf{F}}_i + \tilde{\mathbf{P}}_i \times {}^i_{i+1} \mathbf{R} \tilde{\mathbf{f}}_{i+1} \\
 \mathbf{P}_i &= (1-s_i) \tilde{\mathbf{f}}_i^T \tilde{\mathbf{e}}_i + s_i \tilde{\mathbf{n}}_i^T \tilde{\mathbf{e}}_i
 \end{aligned} \tag{3-17}$$

结合公式 (3-13) 正向递推顺序求得所有杆件速度、加速度、惯性力与惯性力矩, 接着通过反向递推能够求得所有关节的平衡力、平衡力矩、驱动力或驱动力矩。

3.3 3-RRRT 并联机器人的牛顿-欧拉动力学建模

仍然按照图 2-2 所示的方法建立 3-RRRT 并联机器人各个支链的 D-H 坐标系。将第 k 个支链下第 i 个杆件确定成分析目标, 所有杆件体坐标系内部, 力平衡公式为:

$${}^i \mathbf{F}_i^k - {}^{i+1}_i \mathbf{R}^k {}^{i+1} \mathbf{F}_{i+1}^k - m_i {}^i \mathbf{g} = m_i {}^i \mathbf{v}_{Ci}^k \tag{3-18}$$

式内, 变量左上标字母作为其对应坐标系; 右上标字母作为支链序号; 下标 c 表示杆件的质心; ${}^i \mathbf{R}$ 作为坐标系 $\{i+1\}$ 、 $\{i\}$ 之间变换矩阵; \mathbf{F}_{i+1}^k 为第 $i+1$ 个杆件对第 i 个杆件的作用力; $m_i {}^i \mathbf{v}_{Ci}^k$ 属于第 k 个支链内部第 i 个杆件对应惯性力。

根据公式 (3-18), 可以列出第 k 个支链中的杆件 1、2、3、4 的力的平衡方程分别为:

$${}^1 \mathbf{F}_1^k - {}^2_1 \mathbf{R}^k {}^2 \mathbf{F}_2^k - m_1 {}^1 \mathbf{g} = m_1 {}^1 \mathbf{v}_{C1}^k \tag{3-19}$$

$${}^2 \mathbf{F}_2^k - {}^3_2 \mathbf{R}^k {}^3 \mathbf{F}_3^k - m_2 {}^2 \mathbf{g} = m_2 {}^2 \mathbf{v}_{C2}^k \tag{3-20}$$

$${}^3 \mathbf{F}_3^k - {}^4_3 \mathbf{R}^k {}^4 \mathbf{F}_4^k - m_3 {}^3 \mathbf{g} = m_3 {}^3 \mathbf{v}_{C3}^k \tag{3-21}$$

$${}^4\mathbf{F}_4^k - {}^4\mathbf{R}^k {}^5\mathbf{F}_5^k - m_4 {}^4\mathbf{g} = m_4 {}^4\mathbf{v}_{C4}^k \quad (3-22)$$

式中:

${}^1\mathbf{F}_1^k$ ——坐标系{1}内部 1 号杆件处所承载作用力;

${}^5\mathbf{F}_5^k$ ——坐标系{5}内部 4 号杆件处所承载作用力。

由第 k 个支链处 1、2、3、4 号杆件力平衡公式可知:

$${}^5\mathbf{F}_5^k = {}^5\mathbf{F}_1^k - \sum_{i=1}^4 m_i {}^5\mathbf{g} - \sum_{i=1}^4 m_i {}^5\mathbf{v}_{Ci}^k \quad (3-23)$$

在绝对坐标系 $o-x_I y_I z_I$ 中 (此处简称为坐标系{o}), 动平台的力平衡方程为:

$$\sum_{k=1}^3 {}^o\mathbf{F}_1^k + {}^o\mathbf{F} - m\mathbf{g} = m {}^o\dot{\mathbf{v}} \quad (3-24)$$

式中:

${}^o\mathbf{F}$ ——动平台所受到的外力;

m ——动平台的质量;

$\dot{\mathbf{v}}$ ——动平台的加速度。

由公式 (3-19) ——(3-24) 可以得出动平台的力平衡方程为:

$$\sum_{k=1}^3 {}^o\mathbf{F}_1^k - \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^4 m_i {}^5\mathbf{v}_{Ci}^k - \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^4 m_i \mathbf{g} + {}^o\mathbf{F} - m\mathbf{g} = m {}^o\dot{\mathbf{v}} \quad (3-25)$$

通过上述同一种研究模式, 确定第 k 个支链第 i 个杆件其力矩平衡公式是:

$$\begin{aligned} & {}^i\mathbf{M}_i^k - {}^i\mathbf{R}^{k,i+1} {}^i\mathbf{M}_{i+1}^k + {}^i\mathbf{r}_i^k \times ({}^i\mathbf{F}_{Ci}^k + m\mathbf{g}) - {}^i\mathbf{l}_i^k \times ({}^i\mathbf{R}^{k,i+1} {}^i\mathbf{F}_{i+1}^k) \\ & = \tilde{\mathbf{I}}_i {}^i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i^k + {}^i\boldsymbol{\omega}_i^k \times \tilde{\mathbf{I}}_i {}^i\boldsymbol{\omega}_i^k \end{aligned} \quad (3-26)$$

式中:

${}^i\mathbf{r}_i^k$ ——第 k 支链内部第 i 号杆件体坐标系原点至质心对应矢量;

${}^i\mathbf{l}_i^k$ ——{ i }坐标系内部坐标系{ $i-1$ }至{ i }矢量描述。

利用 (3-17) 式所示牛顿-欧拉递推算法先进行正向递推得到各个杆件所受的惯性力, 接着通过反向递推求出所有关节平衡力、平衡力矩、驱动力与驱动力矩。

3.4 基于 MATLAB 的 3-RRRT 并联机器人动力学仿真

假定该机器人其动平台没有外力, 在 $z=1\text{m}$ 平面中, 动平台按照圆周曲线 $x^2+y^2=0.2$ 进行匀速圆周运动, 其角速度为 $\omega = \pi \text{rad/s}$, 则动平台轨迹可以如下表示:

$$x = 0.2 \cos(\omega t) m$$

$$y = 0.2 \sin(\omega t) m$$

$$z = 1 m$$

动平台几何中心的速度：

$$\dot{x} = -0.2\omega \sin(\omega t) m/s$$

$$\dot{y} = 0.2\omega \cos(\omega t) m/s$$

$$\dot{z} = 0 m/s$$

其几何中心的加速度：

$$\ddot{x} = -0.2\omega^2 \cos(\omega t) m/s^2$$

$$\ddot{y} = -0.2\omega^2 \sin(\omega t) m/s^2$$

$$\ddot{z} = 0 m/s^2$$

其中， t 为时间变量且 $(0 \leq t \leq 2)$ 。同时该类型机器人其动、固定两种平台全部都是等边三角形，而前后两种平台对应外接圆半径分别是 0.1m、0.4m，如下表 3-1 所示，包含所有支链结构杆件长度、质量和动平台相关参数：

表 3-1 3-RRRT 并联机器人构件、运动两种参数

长度(m)		质量(kg)		运动参数(m)	
L_1	0.4	M_1	2	P_1	$0.2\cos(\omega t)$
L_2	0.1	M_2	0.5	P_2	$0.2\cos(\omega t)$
L_3	0.8	M_3	2	P_3	1
r	0.1	m_p	3	ω	π
R	0.4				

利用 MATLAB 程序求解,得到这一类型机器人各个支链驱动力矩,如图 3-4、图 3-5、图 3-6 所示：

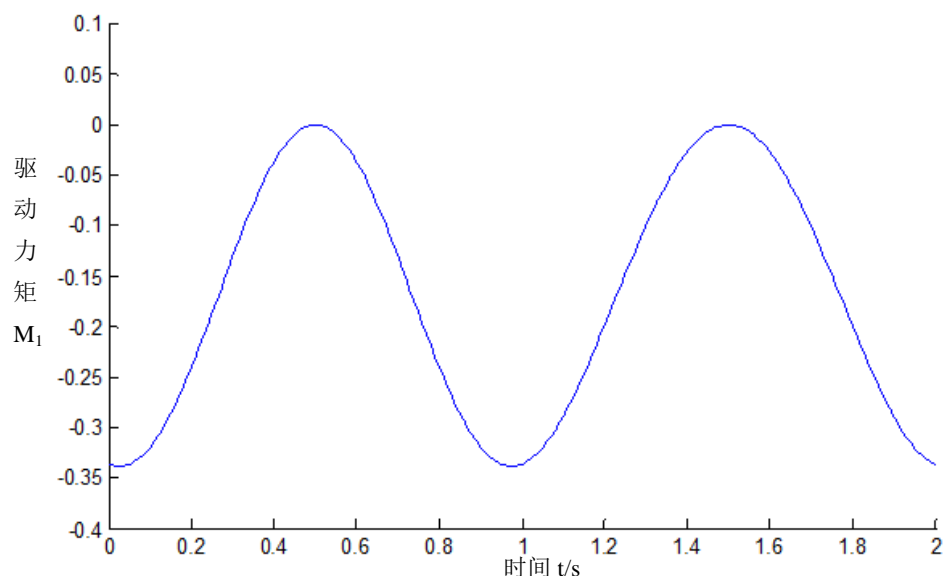


图 3-4 第一支链驱动力矩数值仿真

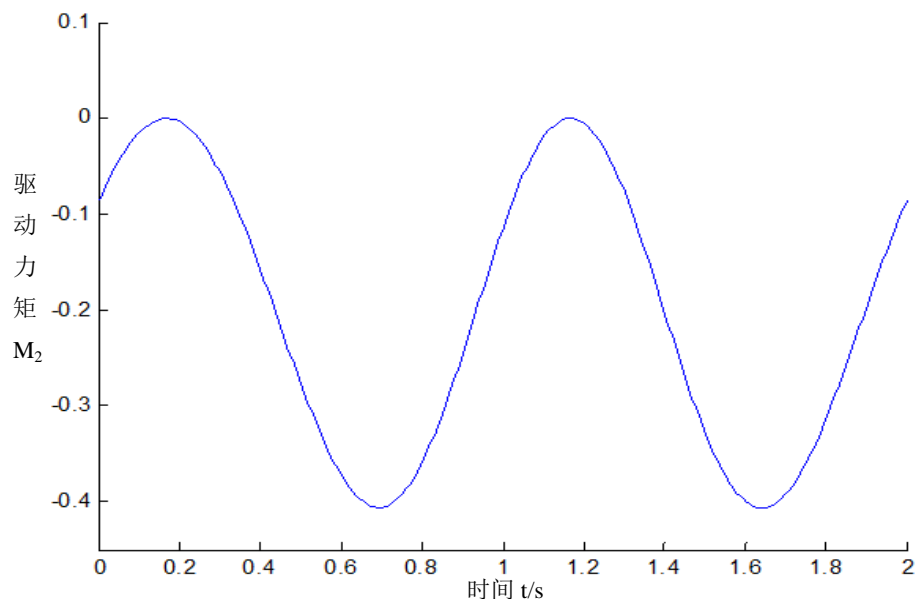


图 3-5 第二支链驱动力矩数值仿真

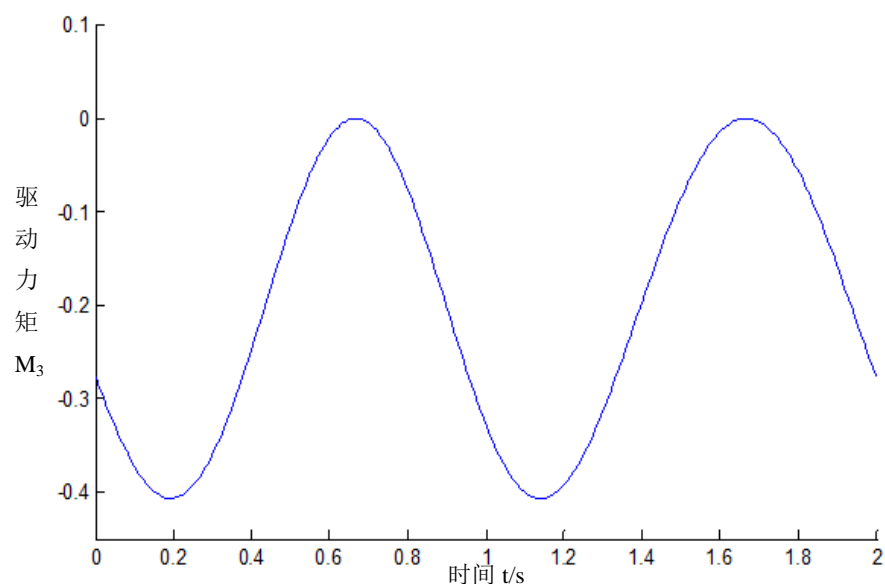


图 3-6 第三支链驱动力矩数值仿真

3.5 基于动力学的 3-RRRT 并联机器人构型优化

目前,对于新型工业产品的设计很大程度上注重绿色环保设计,目的就是使得产品的能耗尽可能的减小,以达到节能减排的目标,同时有利于新型工业产品的产业化。而对于机器人动力学的研究的目的之一是对机器人进行构型优化,其中构型优化的目标之一就是使得机器人系统在完成给定的轨迹运动的所消耗的总能量最小,以达到绿色环保的目的。对于本文研究的并联机器人,主要针对其每条支链中最长的杆件 L_3 , 在 0.5m-1.5m 的区间内对其长度进行优化,使得机器人消耗总能量最小。

在上节求出的驱动力矩的基础上,进而可以求出该类型机器人三个驱动电机的驱动功率,分别如图 3-7、图 3-8、图 3-9 所示:

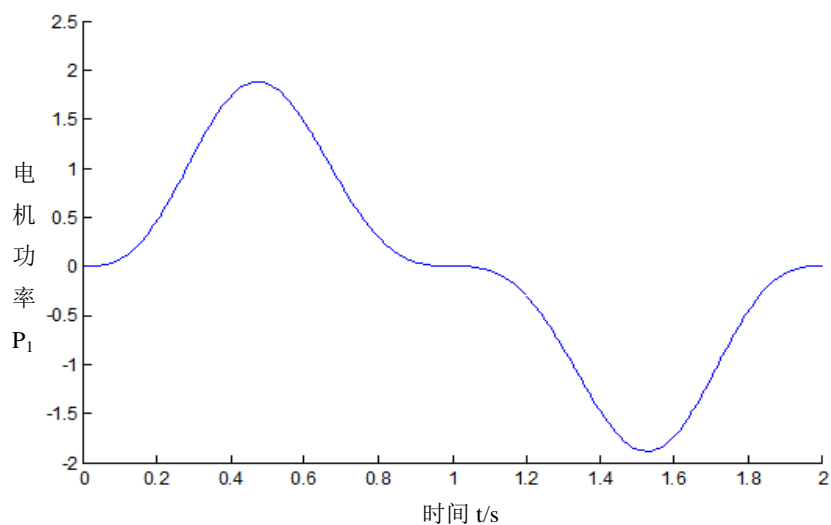


图 3-7 第一支链驱动电机功率

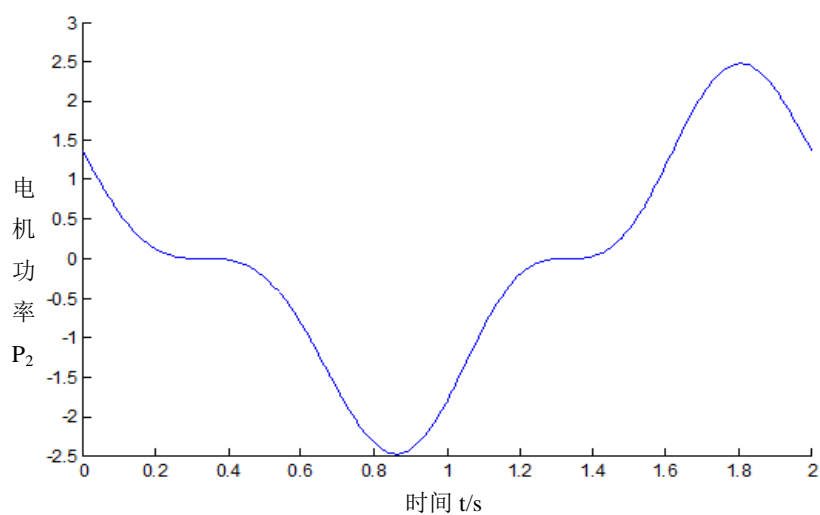


图 3-8 第二支链驱动电机功率

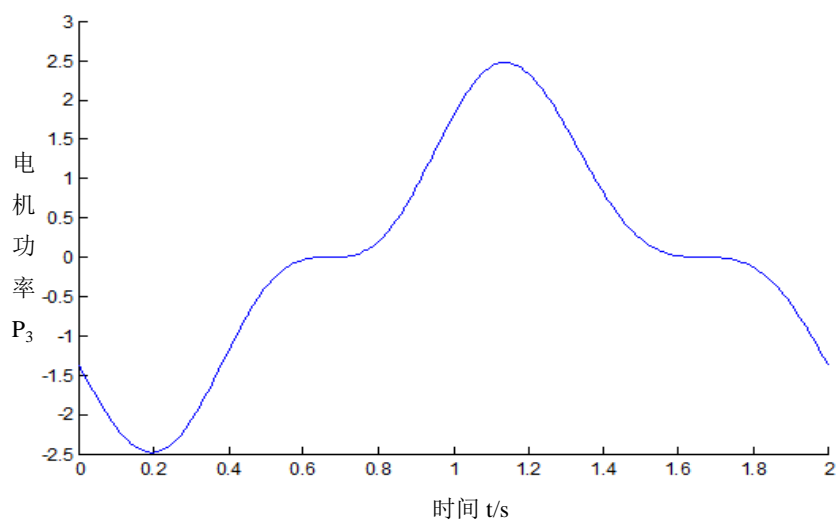


图 3-9 第三支链驱动电机功率

目前,能源紧缺日益成为全人类共同关注的问题,在进行新型的工业产品的设计时,必须要考虑到能耗高低问题。对于本文研究的并联机器人,若要实现它的产业化与大规模应用,能耗问题也不容忽视,因此,我们针对该并联机器人的能耗,对其进行了杆件长度的优化。

在已知三条支链驱动电机功率 P_i 的基础上,可以得到三条支链在该段时间内消耗的总能量 W_m ,我们对该类型并联机器人进行优化的目标就是,在一定范围内 (0.5m-1.5m) 确定 L_3 的最佳长度,使得该机器人三条支链消耗的总能量 W_i 最小。如图 3-10 所示是进行优化的流程图,具体操作过程如下:

- (1)分别构建系统的约束方程和牛顿-欧拉动力学模型。
- (2)针对 l_{i3} 给定的搜索范围为: $0.5\text{m} \leq l_{i3} \leq 1.5\text{m}$, 对其进行三维同步搜索,步长 Δl 取 0.1m。
- (3)对系统进行逆动力学仿真,计算出在每个杆件长度下,系统所消耗的总能量,并进行比较,得出使得系统消耗能量最小的最优杆件长度 l_{i3}^{opt} 。

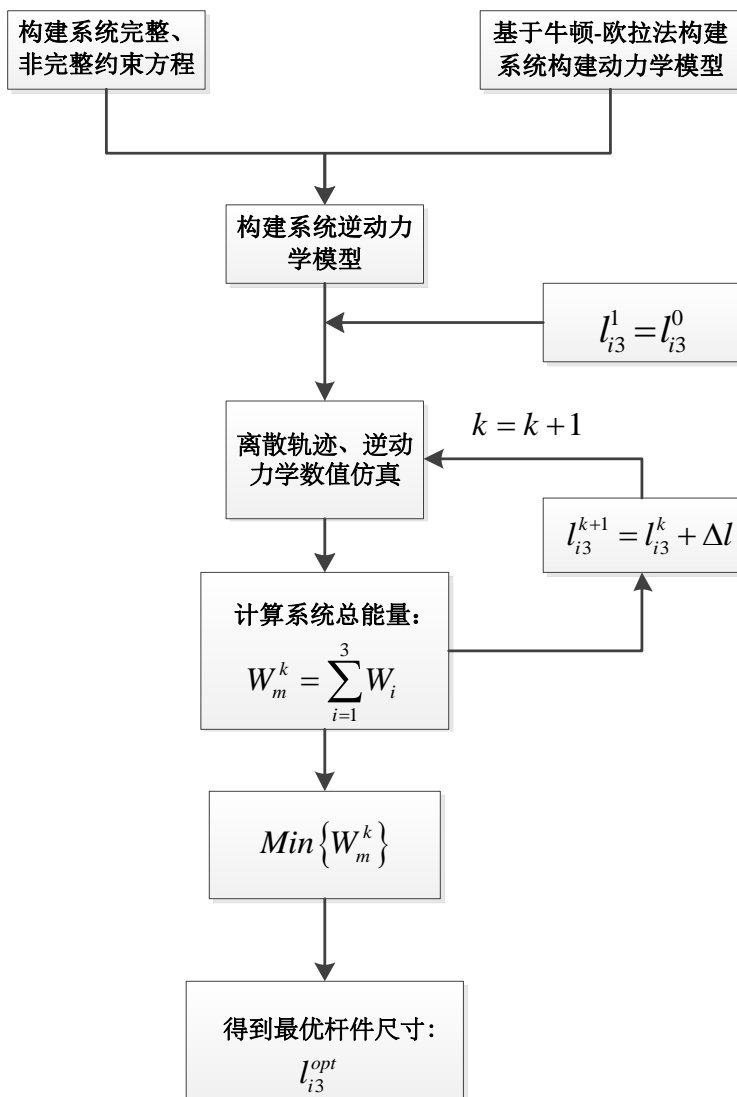


图 3-10 第三条杆件长度优化流程图

经过 MATLAB 编程运算对第三条杆件长度进行三维同步搜索得出系统消耗总能量与第三条杆件 L_3 长度的关系如图 3-11 所示：

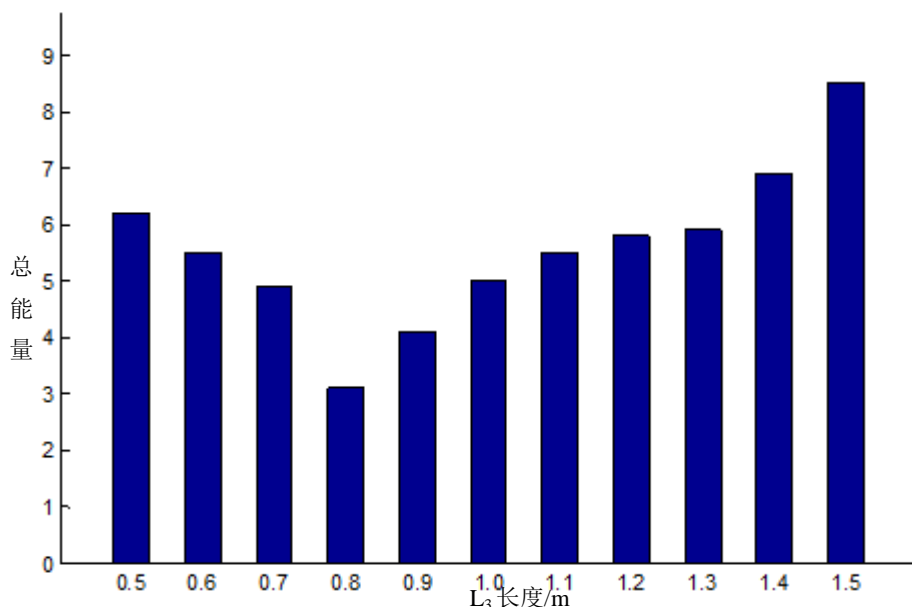


图 3-11 总能量与第三条杆件 L_3 长度的关系

通过上图不难发现，在第三条杆件 $L_3=0.8\text{m}$ 的时候，系统消耗的总能量最小，因此，第三条杆件的最优长度是 0.8m 。

以下是对系统进行构型优化的部分程序。

```
L13_M=0.5:0.1:1.5
n=length(L13_M);
for ii=1:n
    L13=L13_M(ii);
    L23=L13;
    L33=L13;
    dt=0.01;
    W1=0;
    t_m=0:dt:2
    nn=length(t_m);
    for iii=1:nn;
        t=t_m(iii);
        T11=sin(t)*L13;
        T21=2*sin(t);
        T31=3*sin(t);
        w11=cos(t);
        w21=cos(t);
        w31=cos(t);
        P1=T11*w11;
```

```
W1=W1+P1*dt;  
end  
W(ii)=W1+W2+W3;  
end  
plot(W)
```

3.6 本章小结

本章重点针对机器人动力学研究的相关理论进行说明,以这一类型机器人运动学为前提,结合牛顿-欧拉动力学法得到有关这一类型机器人动力学模型。并导出了计算其各个杆件的速度、加速度、惯性力和惯性力矩以及各关节支反力和驱动力矩的递推计算公式。同时采取 MATLAB 程序结合实例完成了这一类型机器人的动力学仿真分析工作,最终确定所有支链对应驱动力矩,并且在动力学分析的基础上,对每条支链中的最长的第三条杆件的杆件长度进行了优化,使得该机器人在给定的轨迹下消耗的总能量最小,达到降低能耗和绿色环保的目的。

第四章 总结与展望

4.1 总结

本文将 3-RRRT 并联机器人确定为分析对象，完成了这一类型机器人运动学与动力学两方面的研究工作，做出以下总结：

(1) 完成这一类型机器人的运动学研究工作以及数值仿真。

选择这一类型机器人机构组成作为研究对象，开展相应的研究工作，确定了这一类型机器人 D-H 坐标系，通过齐次坐标变换和 A 矩阵的方法，求出这一类型机器人运动学方程，同时完成正运动学、逆运动学研究工作。以运动学方程为前提，通过解析法确定这一类型机器人位置反解，结合实践选择 MATLAB 程序解出 8 组位置反解；采取数值法确定这一类型机器人位置正解，结合牛顿迭代法运用 MATLAB 程序解出这一类型机器人位置正解，同时采用反解确认了正解的有效性。

(2) 完成这一类型机器人的动力学研究工作以及数值仿真。

以运动学研究为前提，首先确定这一类型机器人的动力学模型，结合牛顿-欧拉动力学分析方法，确立满足所有杆件速度、加速度、惯性力与惯性力矩计算需求的正向递推算法，接着通过反向递推得到所有关节对应平衡力和驱动力矩。最后结合实践利用 MATLAB 程序完成数值仿真处理。

(3) 在动力学研究的基础上对该并联机器人进行了构型优化。

以动力学研究为前提，在该并联机器人动平台的轨迹已知的情况下，以系统的能耗为优化目标，对其 3 条支链中最长的杆件 L_3 在给定的范围内进行了长度的优化，得出了使系统能耗最低的最优杆件长度。

本文的主要创新点在于，首次利用牛顿-欧拉动力学方法对 3-RRRT 并联机器人进行动力学分析，这种方法的优势在于可以求得各个杆件在关节处的支反力，那么在后期对这一类型机器人进行柔性研究时，可以发挥出非常明显的作用。而且首次以该并联机器人的特定的运行轨迹下，系统的能耗为优化目标，对其进行了构型优化，实现节能和绿色环保的目的。

4.2 展望

本文选择 3-RRRT 并联机器人作为分析对象，实现了对其运动学和动力学两个核心问题全方面的分析与探讨，然而还有大量问题等待着我们进行深层次的分析：

(1) 本文首先确定 D-H 坐标，进行运动学分析，完成了位置反解、正解两方面的分析工作，在位置正解的过程中，运用了迭代法编制 MATLAB 程序进行

数值求解，此种方法的初始值的选定对计算的精度存在一定的影响。

(2) 本文在对 3-RRRT 并联机器人进行运动学分析时，忽视了各个杆件运动副之间的间隙，这在实际工况下会对动平台的精度产生影响。

(3) 本文中这一类型机器人动力学建模期间，忽视了所有运动副间摩擦力矩的存在，然而计算驱动力矩时最终的结果会因为此类摩擦力矩发生变化，也是实际工况中重点关注的问题。。

(4) 本文在对 3-RRRT 并联机器人进行动力学分析的时候，假定了各个杆件为刚体，而没有考虑杆件的柔性，当该并联机器人在大负载下高速运行过程中，较长的杆件的弹性变形是不可忽视的，这是未来并联机器人发展的重要方向。

参考文献

- [1] 陆际联, 李根深. 机器人发展史[J]. 机器人情报, 1994(01):24-28.
- [2] 毕胜. 国内外工业机器人的发展现状[J]. 机械工程师, 2008(07):5-8.
- [3] 黄昔光, 何广平, 谭晓兰, 等. 并联机器人机构研究现状分析[J]. 北方工业大学学报. 2009(03): 25-31.
- [4] 陈学生, 陈在礼, 孔民秀. 并联机器人研究的进展与现状[J]. 机器人. 2002(05): 464-470.
- [5] 孟广柱. 3-RRRT并联机器人运动学和动力学建模[D]. 天津理工大学, 2009.
- [6] 邢智慧. 3-TPS/TP型并联机器人动力学与仿真的研究[D]. 沈阳建筑大学, 2013.
- [7] 刘阳, 冯宝富, 蔡光起. 并联机器人的研究现状与展望[J]. 机床与液压. 2004(03): 7-9.
- [8] 王恺. 六自由度并联平台位置反解及实现仿真研究[D]. 华南理工大学, 2012.
- [9] 刘辛军, 汪劲松, 高峰, 等. 并联机器人机构新构型设计的探讨[J]. 中国机械工程. 2001(12): 20-23.
- [10] 黄昔光, 何广平, 谭晓兰, 等. 并联机器人机构研究现状分析[J]. 北方工业大学学报. 2009(03): 25-31.
- [11] 李嵩. 少自由度并联机构基本型的分析与综合[D]. 重庆大学, 2007.
- [12] 杨玉维. 3-RRRT并联机器人运动学研究及仿真[D]. 天津理工大学, 2005.
- [13] 张茂. 3-RRRT并联机器人轨迹规划与电机参数选取[D]. 天津理工大学, 2009.
- [14] 王庭树. 机器人运动学及动力学[M]. 西安电子科技大学出版社, 1990.
- [15] 杨玉维, 赵新华. 3-RRRT并联机器人工作空间与灵巧度的分析[J]. 机械设计. 2005(02): 11-13.
- [16] 宋伟刚. 机器人学—运动学、动力学与控制[M]. 科学出版社, 2001.
- [17] 休斯敦, 刘又午. 多体系统动力学[M]. 天津大学出版社. 1992.
- [18] Yun Y, Li Y. Modeling and control analysis of a 3-PUPU dual compliant parallel manipulator for micro positioning and active vibration isolation[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 2012, 134(2):125-130.
- [19] Zhang X, Mills J K, Cleghorn W L. Dynamic modeling and experimental validation of a 3-PRR parallel manipulator with flexible intermediate links[J]. Journal of Intelligent and Robotic Systems. 2007, 50(4): 323-340.
- [20] Carretero J A, Podhorodeski R P, Nahon M A, et al. Kinematic analysis and optimization of a new three degree-of-freedom spatial parallel manipulator[J]. Journal of mechanical design. 2000, 122(1): 17-24.
- [21] 霍伟. 机器人动力学与控制[M]. 高等教育出版社, 2005.1
- [22] 杨玉维, 赵新华. 机械手动力学建模与负载轨迹优化研究. 高技术通讯, 2013, 23(8): 833—839.
- [23] Kim H S, Tsai L. Design optimization of a Cartesian parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Design. 2003, 125(1): 43-51.
- [24] Li Y, Xu Q. Kinematic analysis and design of a new 3-DOF translational parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Design. 2006, 128(4): 729-737.
- [25] Pang H, Shahinpoor M. Inverse dynamics of a parallel manipulator[J]. Journal of Robotic Systems. 1994, 11(8): 693-702.
- [26] Di Gregorio R. Kinematics of a new spherical parallel manipulator with three equal legs: The 3-URC wrist[J]. Journal of Robotic Systems. 2001, 18(5): 213-219.

- [27] 蔡汉明,夏金芳,刘承昆.基于 ADAMS 六自由度机械手的动力学分析与仿真[J].机械研究与应用, 2013(02):42-44.
- [28] Rao N M, Rao K M. Dimensional synthesis of a spatial 3-RPS parallel manipulator for a prescribed range of motion of spherical joints[J]. Mechanism and Machine Theory. 2009, 44(2): 477-486.
- [29] Dunlop G R, Jones T P. Position analysis of a 3-DOF parallel manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory. 1997, 32(8): 903-920.
- [30] Bhattacharya S, Nenchev D N, Uchiyama M. A recursive formula for the inverse of the inertia matrix of a parallel manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory. 1998, 33(7): 957-964.
- [31] Ebrahimi I, Carretero J A, Boudreau R. 3-PRRR redundant planar parallel manipulator: Inverse displacement, workspace and singularity analyses[J]. Mechanism and Machine Theory. 2007, 42(8): 1007-1016.
- [32] Farhat N, Mata V, Page A, et al. Identification of dynamic parameters of a 3-DOF RPS parallel manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory. 2008, 43(1): 1-17.
- [33] Sokolov A, Xirouchakis P. Dynamics analysis of a 3-DOF parallel manipulator with R--P--S joint structure[J]. Mechanism and Machine Theory. 2007, 42(5): 541-557.
- [34] Zi B, Duan B Y, Du J L, et al. Dynamic modeling and active control of a cable-suspended parallel robot[J]. Mechatronics. 2008, 18(1): 1-12.
- [35] Pierrot F, Reynaud C, Fournier A. DELTA: a simple and efficient parallel robot[J]. Robotica. 1990, 8(02): 105-109.
- [36] Fattah A, Kasaei G. Kinematics and dynamics of a parallel manipulator with a new architecture[J]. Robotica. 2000, 18(05): 535-543.
- [37] Murray A P, Pierrot F C C O, Dauchez P, et al. A planar quaternion approach to the kinematic synthesis of a parallel manipulator[J]. Robotica. 1997, 15(04): 361-365.
- [38] Staicu S, Zhang D, Rugescu R. Dynamic modelling of a 3-DOF parallel manipulator using recursive matrix relations[J]. Robotica. 2006, 24(01): 125-130.
- [39] Lee M K, Park K W. Kinematic and dynamic analysis of a double parallel manipulator for enlarging workspace and avoiding singularities[J]. Robotics and Automation, IEEE Transactions on. 1999, 15(6): 1024-1034.
- [40] Ben-Horin R, Shoham M, Djerassi S. Kinematics, dynamics and construction of a planarly actuated parallel robot[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 1998, 14(2): 163-172.
- [41] Li Y, Xu Q. Kinematic analysis of a 3-PRS parallel manipulator[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2007, 23(4): 395-408.
- [42] Merlet J. Designing a parallel manipulator for a specific workspace[J]. the International Journal of Robotics research. 1997, 16(4): 545-556.

发表论文和科研情况说明

发表的论文:

- [1] 齐帅, 赵新华, 杨玉维等. 基于逆多体动力学的轮式悬架移动并联机械手参数优化研究. 《天津理工大学学报》, 已录用。

参与的科研项目:

- [1] 国家自然科学基金“高速并联机器人柔性机电系统建模理论与控制策略研究”(项目编号: 51275353)
- [2] 国家自然科学基金“少自由度并联机构同性异构现象产生机理及构型优化研究”(项目编号: 51205289)

致谢

时光荏苒，岁月如梭，转眼间两年半的研究生生涯已经接近尾声，在这段看似短暂而又丰富的日子里，我要感谢所有给我关怀和帮助的老师、同学们。

首先，我要感谢的是我的研究生导师赵新华教授。赵老师深厚的学术造诣、严谨的治学态度、清晰的授课方法、和藹的谈话方式使我感到由衷的敬佩。虽然由于公务繁忙，赵老师很少有时间跟我直接面对面交流，但我已经获益良多。赵老师总能在我学习和科研中遇到问题的时候，精准地指出问题的解决思路和方法，使我感到如沐春风。不仅如此，赵老师也教会了我许多为人处世的方法和做人的道理，使我受用一生。

其次，我要感谢的是杨玉维老师。杨老师直接地指导了我的学习和科研工作，感谢他在学术方面给我的悉心指导，在这两年半的学习和科研工作中，每一个关键问题解决，都离不开杨老师的谆谆教诲。还要感谢我的师兄李鹏和师弟姜园，每当在科研中遇到困难时，他们都能给我提出宝贵的意见，正是有了我们师兄弟之间的互相沟通，我的科研和论文撰写工作才得以顺利地进行。

同时，还要感谢我的同窗陈思安、范勇、孙昊、勾月凯、孙雪艳，在这两年半的研究生生活中，他们使我感受到了如同兄弟姐妹一般的情谊，并且在我情绪低落的时候给予我鼓舞，让我能够重新振作，找到前进的方向。

最后，我要感谢我的家人，是你们养育了我，给我提供了优越的生活和学习环境，教会我怎样做人，你们是我人生中的第一任导师，你们永远是最爱我的人。