北京市社会科学理论著作出版基金资助出版

素 朴 集 合 论

刘壮虎　著

北京大学出版社
北　　京

图书在版编目(CIP)数据

素朴集合论/刘壮虎著. —北京：北京大学出版社，2001. 10
ISBN 7-301-05113-1

Ⅰ. 素…　Ⅱ. 刘…　Ⅲ. 集论　Ⅳ. 0144

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 046321 号

书　　名：素朴集合论
著作责任者：刘壮虎
责 任 编 辑：李昭时
标 准 书 号：ISBN 7-301-05113-1/B • 0211
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　编辑室 62752032
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850 毫米×1168 毫米　32 开本　9.875 印张　257 千字
2001 年 10 月第一版　2001 年 10 月第一次印刷
定　　价：18.00 元

前　　言

自从 G.Cantor 创立集合论后，这门学科有了很大的发展，已经成为现代数学和现代逻辑的基础之一，成为数学和逻辑领域的工作者一门必不可少的基础知识。

Cantor 最初提出的集合的概念，是素朴和直观的。自从发现集合论悖论后，人们致力于将素朴和直观的集合概念严格化，以避免悖论，公理集合论就是这种努力的产物。虽然公理集合论在研究集合论本身有着极其重要的作用，但作为数学和逻辑的原始概念之一的仍然是素朴和直观的集合概念。

本书用素朴的观点介绍集合论的基本内容。本书不以公理集合论为框架，不把所有的概念都归结为集合。因为从素朴的观点看，集合论中有些概念和集合概念同样基本，所以在本书中对它们的意义和作用作直观的描述，便于理解这些概念的实质。也不把数(自然数、整数、有理数、实数等)归结为集合，而把数的集合作为集合的主要例子来加深对集合的理解。类似地，也不把数的性质归结为集合的性质。特别地，自然数的数学归纳法(或等价地为最小数原理)是先于集合论的更为基本的原理。

集合论的内容是比较抽象的。本书对每个重要概念都作了尽量多的直观解释，并举了一定数量的具有代表性的例子，以帮助读者熟悉这些概念和加深对它们的理解。

集合论中有些定理是比较深刻的，它们的证明也较难。对于这些定理，本书都作了详尽的直观解释，对这些定理证明的思路也作了一定的分析，作者希望通过这样的解释和分析，使读者能够了解这些定理的意义并能更好地掌握证明方法。

本书前六章是集合论的基本内容。第一章集合的基本概念，包括子集和幂集、集合的运算、卡氏集和集合族等；第二章映射，映射是集合论中和集合同样重要的基本概念；第三章关系，主要讨论两种重要的二元关系——等价关系和偏序关系；第四章基数，第五章序数，第六章选择公理，这三部分是集合论中最为深刻的内容，从概念的理解到定理的证明都有一定的难度。

本书后三章是一些特殊的内容。第七章简单介绍在现代逻辑中有广泛应用的两类集合族——集域代数和超滤；第八章从技术角度讨论如何将映射和数归结为集合；第九章从素朴和直观的角度讨论集合论悖论，这样的讨论肯定不是深刻的，也不是集合论悖论的解决方案，但能使读者对集合论悖论有一定的了解。

本书附有大量习题，它们是本书的有机组成部分，不可忽略。这些习题主要有三类，一类是基本的训练，另一类是正文的定理证明中所省略的内容，还有一类是正文中没有提到的具有一定重要性的概念和结果。

在本书的编写过程中，得到了王宪钧教授、晏成书教授的指导和帮助。本书的初稿曾由康宏逵先生审阅，并提出了许多宝贵的意见，部分章节的结构就是根据这些意见重新安排的。本书的二稿曾作为北京大学哲学系逻辑专业“ 素朴集合论 ”课程的试用教材，哲学系逻辑教研室的同志和逻辑专业学生关于此课程的许多意见，对于本书的最后定稿也有很大的帮助。在此本人表示衷心的感谢。

作　者

2000 年 10 月于燕北园

目　　录

第一章　集合的基本性质

1.1　集合的概念

在日常生活中，在逻辑、数学以及其它科学的研究中，我们经常遇到一类对象，这类对象是某些东西的总体。例如人类这个概念的外延就是所有具体的人的总体，动物这个概念的外延就是所有具体的动物的总体，又如自然数、整数、实数都是具有某种性质的数的总体，三角形、正方形、多边形都是某种几何图形的总体。把这类对象最一般的性质抽象出来就是集合。

集合，简单地说就是一堆东西的总体，其中每个东西称为这个集合的元素，这样的集合概念是素朴的和直观的，我们可以通过对具体集合的认识和对集合性质的讨论来加深对它理解。

以后在使用人类、动物等概念时、总是将它们当作集合来看待。除了以上提到的集合外，我们再来看几个例子。

1.1.1 例　太阳系的行星是水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星的总体。

1.1.2 例　书，纸，笔分别是所有具体的书，所有具体的纸和所有具体的笔的总体。

我们将什么东西都没有也看做一堆东西的总体，从而它就是一个集合。这样的集合称为空集。

有的集合只有一个元素，但这个集合和它惟一的的元素是不同的。这个元素只是一个东西，而这个集合是一堆东西的总体，只不过这堆东西只有一个。如地球的卫星是一个集合，它只有一个元素月亮。地球的卫星和月亮是不同的。

以后一般用英文大写字母 A, B, C, X, Y, Z 表示集合，用英文小

写字母 a, b, c, x, y, z 等表示集合的元素。常用的特殊集合用专门的记号，如用英文大写黑体字母 $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 分别表示自然数、整数、有理数和实数。

1.1.3 定义　属于　a 是 A 的元素称为 a 属于 A，记为 $a\in A$，a 不是 A 的元素称为 a 不属于 A，记为 $a\notin A$。$\in$称为属于关系。

为了简便起见，将 $a\in A$ 且 $b\in A$ 简记为 $a, b\in A$。更一般地，将 $a_1\in A,\cdots, a_n\in A$ 简记为 $a_1,\cdots, a_n\in A$。

以下是属于关系的几个例子。

1.1.4 例　金星$\in$太阳系的行星。月亮$\notin$太阳系的行星。

1.1.5 例　$3\in\mathbf{N}$，$\frac{2}{3}\in\mathbf{Q}$，$\sqrt{2}\in\mathbf{R}$。$\frac{2}{3}\notin\mathbf{N}$，$\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$。

集合由它的元素惟一确定，不涉及其他因素。因此要描述一个集合，只要描述这个集合的元素就行了。有两种描述集合的方法，一种是列举集合的所有元素，用$\{a_1,\cdots, a_n\}$表示，如太阳系的行星可表示为

{水星, 金星, 地球, 火星, 木星, 土星, 天王星, 海王星, 冥王星},

又如

{真, 假}、{李白, 杜甫}、$\{1, 2\}$、$\{0, 1,\cdots, n-1\}$

等。另一种是刻画集合中元素的性质，用$\{x \mid x$ 有性质$\phi\}$来表示，如

$\{x \mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $x\le 0\}$、$\{x \mid x^2-3x+2=0\}$

等。

集合是个很一般的概念。任何东西都能放在一起作为一堆东西，所以组成集合的元素没有任何限制。集合的元素本身可以还是一个集合，如在集合

{书, 纸, 笔}

中，元素书、纸、笔也是集合。集合的元素可以是具体的，如

{金星, 水星}、{李白, 杜甫}

等，也可以是抽象的，如

{真, 假}，$\{1, 2\}$

等。甚至在一个集合中，可以有些元素是具体的，有些元素是抽象的，如

$\{1, 2,$ 金星，水星$\}$、$\{$李白，杜甫，真，假$\}$

等。集合和它的某些元素可以组成新的集合，如

$\{1, \{1, 2, 3\}\}$，$\{$金星，水星，太阳系的行星$\}$

等。

每个集合都有确定的元素，但刻画集合的确定性并不一定需要知道它们的元素。集合的确定性表现在：

任何一个东西是或者不是这个集合的元素，但不能既是又不是这个集合的元素。

这样，对于属于与不属于来说就有：

任给 x，并非 $x\in A$ 当且仅当 $x\notin A$。

从集合的确定性要求看，日常生活中使用的某些概念不能简单地看作集合的，如青年、新鲜的苹果等。如果需要将这样的概念作为集合来使用，必须给它们划出明确的界限。

1.1.6 定义 集合的相等 A 和 B 有同样的元素称为 A 和 B 相等，记为 $A = B$。因为集合由它的元素惟一确定，所以两个集合相等就是说它们是同一个集合。

如果 $A = B$，则 x 是 A 的元素当且仅当 x 是 B 的元素。如果 x 是 A 的元素当且仅当 x 是 B 的元素，则 A 和 B 就有同样的元素，所以 $A = B$。

因此可以用属于关系将 $A = B$ 表示为：

任给 x，$x\in A$ 当且仅当 $x\in B$。

由“当且仅当”的含义，也可以将 $A = B$ 表示为：

任给 x，如果 $x\in A$ 则 $x\in B$，如果 $x\in B$ 则 $x\in A$。

A 和 B 不相等记为 $A \neq B$。如果 $A \neq B$，则 B 中有元素不属于 A 或 A 中有元素不属于 B。反之如果 B 中有元素不属于 A 或 A 中有元素不属于 B，则 $A \neq B$。所以 $A \neq B$ 的条件是：

存在 x，$(x\in B$ 且 $x\notin A)$或$(x\in A$ 且 $x\notin B)$。

集合和它的描述方法无关。如

$\{$金星，水星$\} = \{x \mid x$ 是离太阳比地球离太阳近的行星$\}$，

$\{1, 2\} = \{x \mid x^2-3x+2 = 0\}$，

$\mathbf{N} = \{x \mid x\in \mathbf{Z}$ 且 $x\geq 0\}$

等。在列举集合元素时和次序无关，如

$\{0, 1, 2\} = \{2, 0, 1\}$，

$\{$金星，水星$\} = \{$水星，金星$\}$

等。也和重复列举无关，如

$\{$书，纸，笔$\} = \{$书，纸，笔，纸$\}$，

$\{1, 2, 1, 3, 2\} = \{1, 2, 3\}$

等。

如果两个集合都没有元素，则它们就有同样的元素。这就是说任何空集都相等，实际上只有一个空集，以后将这惟一的空集记为$\varnothing$。

如果 $A \neq \varnothing$，则称 A 是非空集合。

习题 1.1

1.1.1 判断下列元素是否属于所指集合。

(1) 哈尔滨，北京，东京，浙江。集合是中国的城市。

(2) 1，2，$\{1, 2\}$，$\{1, 2, 3\}$。集合是$\{1, \{1, 2, 3\}\}$。

(3) 地球，哈雷彗星，北极星，天王星。集合分别是恒星，太阳系的行星，太阳系的天体。

1.1.2 指出下列集合是否相等。

(1) $\{1, \{1, 2\}\}$、$\{1, 1, 2\}$和$\{1, 2\}$。

(2) $\{1, \{1, 2, 1\}, 2\}$和$\{1, 2, \{1, 2\}\}$。

(3) $\{x \mid x\in \mathbf{N}$ 或$-x\in \mathbf{N}\}$和 $\mathbf{Z}$。

(4) $\{x \mid x\in \mathbf{Z}$ 且 $x\leq 3\}$和$\{0, 1, 2, 3\}$。

1.2 子集和幂集

给定一个集合，它的一部分元素能组成一个集合。这样的集合的特征是：它的每个元素都是原集合的元素。

1.2.1 定义 子集 如果 B 的元素都是 A 的元素，则称 B 是 A 的子集，也称 B 包含于 A，记为 $B \subseteq A$ (图 1.2.1)。$\subseteq$ 称为包含关系。

用属于关系可以将 $B \subseteq A$ 表示为：

任给 x，如果 $x \in B$ 则 $x \in A$。

如果 $B \subseteq A$，则所有不属于 A 的元素都不会属于 B。反之，如果所有不属于 A 的元素都不属于 B，则 $B \subseteq A$。所以 $B \subseteq A$ 也可以表示为：

任给 x，如果 $x \notin A$ 则 $x \notin B$。

B 不是 A 的子集记为 $B \nsubseteq A$。

如果 $B \nsubseteq A$，则 B 中有元素不属于 A。反之，如果 B 中有元素不属于 A，则 $B \nsubseteq A$ (图 1.2.2)。所以 $B \nsubseteq A$ 可以表示为：

存在 x，使得 $x \in B$ 且 $x \notin A$。

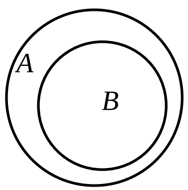


图 1.2.1 $B \subseteq A$

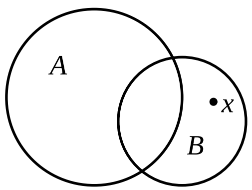


图 1.2.2 $B \nsubseteq A$

空集没有元素，所以对任何集合都可以说空集的元素都是这个集合的元素。因此空集是任何集合的子集，即：

任给集合 A，都有 $\varnothing \subseteq A$。

另外，任何非空集合都不是空集的子集，所以：

如果 $A \subseteq \varnothing$，则 $A = \varnothing$。

显然，集合 A 的元素都是集合 A 的元素，所以任何集合都是它自己的子集，即：

任给集合 A，都有 $A \subseteq A$。

如果 $B \subseteq A$ 且 $B \neq A$，则称 B 是的 A 的真子集。

和属于关系类似，为了简便起见，将 $B_1 \subseteq A, \cdots, B_n \subseteq A$ 简记为 $B_1, \cdots, B_n \subseteq A$。

为了熟悉子集的概念，我们来看子集的一些例子。

1.2.2 例 鱼是动物的子集。

三角形不是正方形的子集。

1.2.3 例 $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$，$\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$，$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$。

$\mathbf{R} \nsubseteq \mathbf{Q}$，$\mathbf{Q} \nsubseteq \mathbf{Z}$。

A 是集合，集合$\{x \mid x \in A$ 且 x 有性质$\phi\}$是 A 中所有具有性质ϕ的元素组成的 A 的子集，这是很常见的一种子集。

1.2.4 例 $\mathrm{n} \in \mathbf{N}$，所有比 n 小的自然数组成的集合

$\{x \mid x \in \mathbf{N}$ 且 $x < \mathrm{n}\}$

是 $\mathbf{N}$ 的子集，这个集合记为 $\mathbf{N}_\mathrm{n}$。它们有以下三个性质：

(1) $\mathbf{N}_0 = \varnothing$。因为没有比零小的自然数。

(2) 当 $\mathrm{n} \leq \mathrm{m}$ 时有 $\mathbf{N}_\mathrm{n} \subseteq \mathbf{N}_\mathrm{m}$。证明如下：

任给 x，如果 $x \in \mathbf{N}_\mathrm{n}$，则 $x < \mathrm{n}$，由 $\mathrm{n} \leq \mathrm{m}$ 和 $x < \mathrm{n}$ 得

$x < \mathrm{m}$，

由 $\mathbf{N}_\mathrm{m}$ 的定义得

$x \in \mathbf{N}_\mathrm{m}$。

这就证明了

任给 x，如果 $x \in \mathbf{N}_\mathrm{n}$ 则 $x \in \mathbf{N}_\mathrm{m}$，

因此 $\mathbf{N}_\mathrm{n} \subseteq \mathbf{N}_\mathrm{m}$。

(3) 当 $\mathrm{n} \neq \mathrm{m}$ 时有 $\mathbf{N}_\mathrm{n} \neq \mathbf{N}_\mathrm{m}$。证明如下：

如果 $\mathrm{n} < \mathrm{m}$，则

$$n \in \mathbf{N}_m \text{ 且 } n \notin \mathbf{N}_n,$$

如果 m<n，则

$$m \in \mathbf{N}_n \text{ 且 } m \notin \mathbf{N}_m,$$

在两种情况下都有

$$\text{存在 } x\text{，使得}(x \in \mathbf{N}_m \text{ 且 } x \notin \mathbf{N}_n)\text{或}(x \in \mathbf{N}_n \text{ 且 } x \notin \mathbf{N}_m),$$

因此 $\mathbf{N}_n \neq \mathbf{N}_m$。

1.2.5 例 任给 $a, b \in \mathbf{R}$，开区间

$$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } a<x<b\}$$

和左开右闭区间

$$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } a<x \leq b\}$$

都是 **R** 的子集。左开右闭区间有以下两个性质：

(1) 当 $b \leq a$ 时，不存在满足 $a<x \leq b$ 的实数 x，所以$(a, b] = \varnothing$。

(2) 当 $a \leq c$ 且 $d \leq b$ 时有$(c, d] \subseteq (a, b]$。

证明如下：

任给 x，如果 $x \in (c, d]$，则 $c<x \leq d$，由 $a \leq c$ 和 $c<x$ 得

$$a<x,$$

由 $d \leq b$ 和 $x \leq d$ 得 $x \leq b$，所以

$$a<x \leq b,$$

再由$(a, b]$的定义得

$$x \in (a, b]。$$

这就证明了

$$\text{任给 } x\text{，如果 } x \in (c, d]\text{则 } x \in (a, b],$$

因此$(c, d] \subseteq (a, b]$。

开区间也有类似的性质。

1.2.6 例 $\mathbf{Z}^+ = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ 且 } x>0\}$，

$\mathbf{Q}^+ = \{x \mid x \in \mathbf{Q} \text{ 且 } x>0\}$，

$\mathbf{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x>0\}$

分别是正整数的集合，正有理数的集合和正实数的集合。

子集有以下基本性质。

1.2.7 定理 A, B, C 是任意集合。

(1) $\varnothing \subseteq A$，$A \subseteq A$。

(2) 如果 $B \subseteq A$ 且 $A \subseteq B$，则 $A = B$。

(3) 如果 $C \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则 $C \subseteq A$。

证 (1) 前面已有说明。

(2) 任给 x，如果 $x \in B$，则由 $B \subseteq A$ 得

$$x \in A,$$

如果 $x \in A$，则由 $A \subseteq B$ 得

$$x \in B。$$

因此 $A = B$ (图 1.2.3)。

任给 x，如果 $x \in C$，则由 $C \subseteq B$ 得

$$x \in B,$$

由 $x \in B$ 和 $B \subseteq A$ 得

$$x \in A。$$

因此 $C \subseteq A$ (图 1.2.4)。■

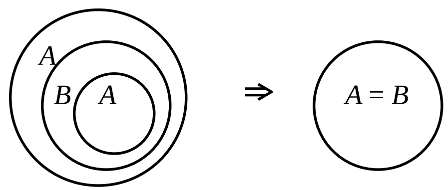


图 1.2.3

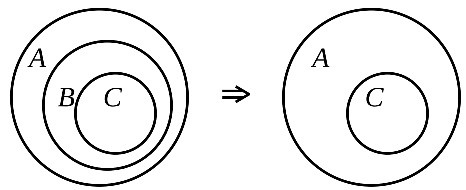


图 1.2.4

定理 1.2.7 的(2)可用来简化集合相等的证明，要证明 $A = B$，只需证明 $B \subseteq A$ 且 $A \subseteq B$ 就行了。

定理 1.2.7 的(3)称为包含关系的传递性。由于传递性，以后将 $C \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 简记为 $C \subseteq B \subseteq A$。

一个集合有许多子集，所有这些子集可以组成一个集合。

1.2.8 定义 幂集 集合 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集，记为 $\mathsf{P}(A)$，即 $\mathsf{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$。所以：

$$X \in \mathsf{P}(A) \text{当且仅当 } X \subseteq A。$$

因为$\varnothing \subseteq A$ 且 $A \subseteq A$，所以$\varnothing, A \in \mathsf{P}(A)$。这说明了幂集不会是空集。特别地，空集$\varnothing$的幂集 $\mathsf{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$不是空集，它有一个元素$\varnothing$。

以下是幂集的两个例子。

1.2.9 例 $\mathsf{P}(\{\text{真},\text{假}\}) = \{\varnothing, \{\text{真}\}, \{\text{假}\}, \{\text{真},\text{假}\}\}$，

$\mathsf{P}(\{0, 1, 2\}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$。

习题 1.2

1.2.1 判断下列集合是否是所指集合的子集。

(1) 西瓜，南瓜，苹果，荔枝，仙人掌。集合是水果。

(2) $\{1\}$，$\{2\}$，$\{1, 2\}$，$\{1, 3\}$。集合是$\{1, \{1, 2, 3\}, 3\}$。

(3) $\{x \mid x^2+3x+2 = 0\}$，$\{x \mid 2x^2+3x+1 = 0\}$，$\{x \mid x \in \mathbf{N}$ 且 $x \geq 5\}$。集合分别是 $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{Q}$。

1.2.2 任给 $a \in \mathbf{R}$，令 $\mathbf{Q}_a = \{x \mid x \in \mathbf{Q}$ 且 $x < a\}$。证明：

(1) 如果 $a \leq b$，则 $\mathbf{Q}_a \subseteq \mathbf{Q}_b$。

(2) 如果 $a \neq b$，则 $\mathbf{Q}_a \neq \mathbf{Q}_b$。

(3) 任给 $a \in \mathbf{R}$，都有 $\mathbf{Q}_a \neq \varnothing$且 $\mathbf{Q}_a \neq \mathbf{Q}$。

1.2.3 $a, b \in \mathbf{R}$。证明：如果 $a \leq c$ 且 $d \leq b$，则$(c, d) \subseteq (a, b)$。

1.2.4 求$\{1, \{1, 2\}\}$的幂集。

1.3 集合的交和并

两个集合的公共元素能够组成集合，如女大学生就是女人和大学生这两个集合的公共元素所组成的集合。两个集合的所有元素能够组成集合，如动植物就是动物和植物这两个集合的所有元素组成的集合，一般地引进以下概念。

1.3.1 定义 集合的交 集合 A 和 B 的公共元素组成的集合称为集合 A 和 B 的交，记为 $A \cap B$。$A \cap B$ 是由既属于 A 又属于 B 的元素所组成，所以有：

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}\text{(图 1.3.1)。}$$

用属于关系表示就是：

$$x \in A \cap B \text{ 当且仅当}(x \in A \text{ 且 } x \in B)。$$

如果 x 不属于 $A \cap B$，则 x 必定不属于它们中的一个。反之如果 x 不属于它们中的一个，则 x 就不属于 $A \cap B$。所以：

$$x \notin A \cap B \text{ 当且仅当}(x \notin A \text{ 或 } x \notin B)。$$

如果 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 和 B 不交(图 1.3.2)。$A \cap B = \varnothing$是说：任给 x，都有 $x \notin A \cap B$，由 $x \notin A \cap B$ 的条件，$A \cap B = \varnothing$可表示为：

$$\text{任给 } x\text{，都有 } x \notin A \text{ 或 } x \notin B。$$

如果 $A \cap B = \varnothing$，则 A 的元素都不属于 B。反之如果 A 的元素都不属于 B，则 $A \cap B = \varnothing$。所以 $A \cap B = \varnothing$也可以表示为：

$$\text{任给 } x\text{，如果 } x \in A \text{ 则 } x \notin B。$$

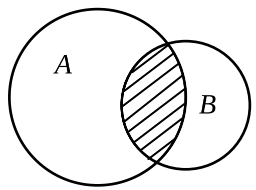


图 1.3.1 A∩B

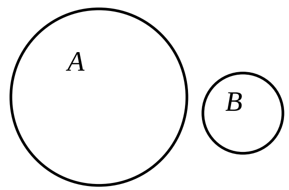


图 1.3.2 A∩B = ∅

1.3.2 定义　集合的并　集合 A 和 B 的所有元素组成的集合称为集合 A 和 B 的并，记为 $A\cup B$。$A\cup B$ 是由属于 A 或属于 B 的元素所组成，所以有：

$$A\cup B = \{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}\text{(图 1.3.3)。}$$

用属于关系表示就是：

$$x\in A\cup B \text{ 当且仅当}(x\in A \text{ 或 } x\in B)\text{。}$$

如果 $x\in A\cup B$，则从 $x\notin A$ 能得到 $x\in B$。反之如果从 $x\notin A$ 能得到 $x\in B$，则 $x\in A\cup B$。所以又有：

$$x\in A\cup B \text{ 当且仅当(如果 } x\notin A \text{ 则 } x\in B)\text{。}$$

如果 $x\notin A\cup B$，则 x 既不能属于 A 也不能属于 B。反之如果 x 既不属于 A 也不属于 B，则 $x\notin A\cup B$。所以：

$$x\notin A\cup B \text{ 当且仅当}(x\notin A \text{ 且 } x\notin B)\text{。}$$

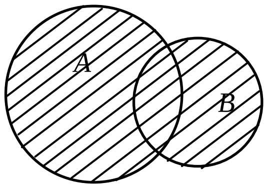


图 1.3.3　A∪B

我们通过例子来熟悉集合的交和并的概念。

1.3.3 例　菱形∩长方形 = 正方形，

奇数∪偶数 = 整数。

1.3.4 例　$\{1, 2, 3\}\cap\{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$，

$\{1, 2, 3\}\cup\{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$。

1.3.5 例　$(-1, 1]\cap(0, 2] = (0, 1]$，

$(-1, 1]\cup(0, 2] = (-1, 2]$。

一般地，如果 $a\le c\le b\le d$，则

$$(a, b]\cap(c, d] = (c, b],$$

$$(a, b]\cup(c, d] = (a, d],$$

理由如下：

任给 x，$x\in(a, b]\cap(c, d]$ 当且仅当 $(a<x\le b$ 且 $c<x\le d)$

当且仅当 $c<x\le b$

当且仅当 $x\in(c, b]$。

任给 x，$x\in(a, b]\cup(c, d]$ 当且仅当 $(a<x\le b$ 或 $c<x\le d)$

当且仅当 $a<x\le d$

当且仅当 $x\in(a, d]$。

1.3.6 例　A 是集合，令

$$B = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x \text{ 有性质}\phi\},$$

和

$$C = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x \text{ 没有性质}\phi\},$$

则有

$$B\cap C = \varnothing\text{，}B\cup C = A\text{。}$$

这是无矛盾律和排中律在集合论中的一种体现(图 1.3.4)。

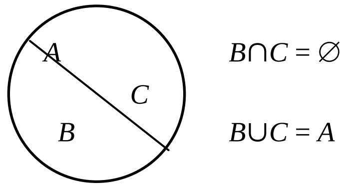


图 1.3.4

集合的交和并都是用两个集合去形成一个新的集合，它们都称为集合的运算。

集合运算和包含关系有以下关系。

1.3.7 定理　A, B, C 是任意集合。

(1) $A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$。

(2) $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$。

(3) 如果 $B \subseteq A$ 且 $C \subseteq A$，则 $B \cup C \subseteq A$。

(4) 如果 $C \subseteq A$ 且 $C \subseteq B$，则 $C \subseteq A \cap B$。

证 (1)(2)显然。它们是说两个集合都是它们的并的子集，两个集合的交是它们中任一个的子集。

(3) 任给 x，如果 $x \in B \cup C$，则当 $x \in B$ 时，由 $B \subseteq A$ 得

$x \in A$，

当 $x \in C$ 时，由 $C \subseteq A$ 得

$x \in A$，

所以在两种情况下都有

$x \in A$。

因此 $B \cup C \subseteq A$ (图 1.3.5)。

(4) 任给 x，如果 $x \in C$，则由 $C \subseteq A$ 得

$x \in A$，

由 $C \subseteq B$ 得

$x \in B$，

所以

$x \in A \cap B$。

因此 $C \subseteq A \cap B$ (图 1.3.6)。■

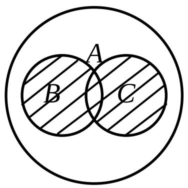


图 1.3.5

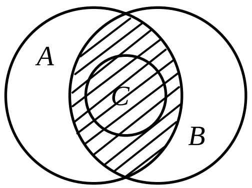


图 1.3.6

可以将定理 1.3.7 的(3)和(4)作以下推广。

1.3.8 定理 A_1, A_2, B_1, B_2 是任意集合。

(1) 如果 $B_1 \subseteq A_1$ 且 $B_2 \subseteq A_2$，则 $B_1 \cup B_2 \subseteq A_1 \cup A_2$。

(2) 如果 $B_1 \subseteq A_1$ 且 $B_2 \subseteq A_2$，则 $B_1 \cap B_2 \subseteq A_1 \cap A_2$。

证 (1) 由 $B_1 \subseteq A_1$ 和 $A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$ 得

$B_1 \subseteq A_1 \cup A_2$，

由 $B_2 \subseteq A_2$ 和 $A_2 \subseteq A_1 \cup A_2$ 得

$B_2 \subseteq A_1 \cup A_2$，

由 $B_1 \subseteq A_1 \cup A_2$ 和 $B_2 \subseteq A_1 \cup A_2$ 得 $B_1 \cup B_2 \subseteq A_1 \cup A_2$。

(2) 由 $B_1 \cap B_2 \subseteq B_1$ 和 $B_1 \subseteq A_1$ 得

$B_1 \cap B_2 \subseteq A_1$，

由 $B_1 \cap B_2 \subseteq B_2$ 和 $B_2 \subseteq A_2$ 得

$B_1 \cap B_2 \subseteq A_2$，

由 $B_1 \cap B_2 \subseteq A_1$ 和 $B_1 \cap B_2 \subseteq A_2$ 得 $B_1 \cap B_2 \subseteq A_1 \cap A_2$。■

集合运算有以下基本性质。

1.3.9 定理 A, B, C 是任意集合。

(1) $A \cup \varnothing = A$，$A \cap \varnothing = \varnothing$。

(2) 幂等律 $A \cup A = A$，$A \cap A = A$。

(3) 交换律 $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$。

(4) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$。

(5) 吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$，$A \cap (A \cup B) = A$。

(6) 分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

证 (1) 显然。

(2) 因为“$x \in A$ 或 $x \in A$”与“$x \in A$”是等值的，所以

任给 x，$x \in A \cup A$ 当且仅当 $x \in A$。

因此 $A \cup A = A$。

类似地，由“$x \in A$ 且 $x \in A$”与“$x \in A$”是等值的，可得 $A \cap A = A$。

(3) 因为“$x \in A$ 或 $x \in B$”和“$x \in B$ 或 $x \in A$”是等值的，所以

任给 x，$x \in A \cup B$ 当且仅当 $x \in B \cup A$。

因此 $A\cup B = B\cup A$。

类似地，由“ $x\in A$ 且 $x\in B$ ”和“ $x\in B$ 且 $x\in A$ ”是等值的，可得 $A\cap B = B\cap A$。

(4) 由 $A\subseteq A$ 和 $B\subseteq B\cup C$ 得

$$A\cup B\subseteq A\cup(B\cup C),$$

由 $C\subseteq B\cup C$ 和 $B\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)$得

$$C\subseteq A\cup(B\cup C),$$

由 $A\cup B\subseteq A\cup(B\cup C)$和 $C\subseteq A\cup(B\cup C)$得

$$(A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)。$$

类似地可以证明 $A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C$。

因此 $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ (图 1.3.7)。

由 $A\subseteq A$ 和 $B\cap C\subseteq B$ 得

$$A\cap(B\cap C)\subseteq A\cap B,$$

由 $A\cap(B\cap C)\subseteq B\cap C$ 和 $B\cap C\subseteq C$ 得

$$A\cap(B\cap C)\subseteq C,$$

由 $A\cap(B\cap C)\subseteq A\cap B$ 和 $A\cap(B\cap C)\subseteq C$ 得

$$A\cap(B\cap C)\subseteq(A\cap B)\cap C。$$

类似地可以证明$(A\cap B)\cap C\subseteq A\cap(B\cap C)$。

因此 $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$ (图 1.3.8)。

(5) 由 $A\subseteq A$ 和 $A\cap B\subseteq A$ 得

$$A\cup(A\cap B)\subseteq A,$$

又

$$A\subseteq A\cup(A\cap B),$$

因此 $A\cup(A\cap B) = A$。

类似地可证 $A\cap(A\cup B) = A$。

(6) 任给 x，如果 $x\in A\cap(B\cup C)$，则

$$x\in A \text{ 且 } x\in B\cup C。$$

当 $x\in B$ 时，由 $x\in A$ 且 $x\in B$ 得

$$x\in A\cap B,$$

当 $x\in C$ 时，由 $x\in A$ 且 $x\in C$ 得

$$x\in A\cap C,$$

在两种情况下都有

$$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)。$$

所以 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

由 $A\subseteq A$ 和 $B\subseteq B\cup C$ 得

$$A\cap B\subseteq A\cap(B\cup C),$$

由 $A\subseteq A$ 和 $C\subseteq B\cup C$ 得

$$A\cap C\subseteq A\cap(B\cup C),$$

由 $A\cap B\subseteq A\cap(B\cup C)$和 $A\cap C\subseteq A\cap(B\cup C)$得

$$(A\cap B)\cup(A\cap B)\subseteq A\cap(B\cup C)。$$

因此 $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ (图 1.3.9)。

类似地可证 $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ (图 1.3.10)。但用已有的结果证明它更为简单：

$$\begin{aligned}(A\cup B)\cap(A\cup C) &= ((A\cup B)\cap A)\cup((A\cup B)\cap C)\\ &= (A\cap(A\cup B))\cup(C\cap(A\cup B))\\ &= A\cup(C\cap(A\cup B))\\ &= A\cup((C\cap A)\cup(C\cap B))\\ &= (A\cup(A\cap C))\cup(B\cap C)\\ &= A\cup(B\cap C)。\blacksquare\end{aligned}$$

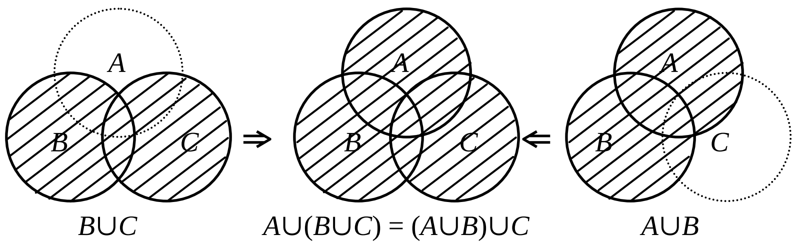


图 1.3.7

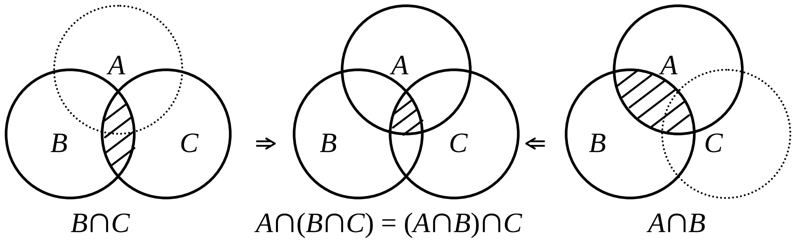


图 1.3.8

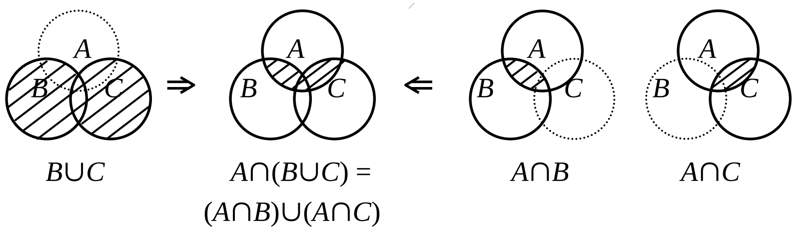


图 1.3.9

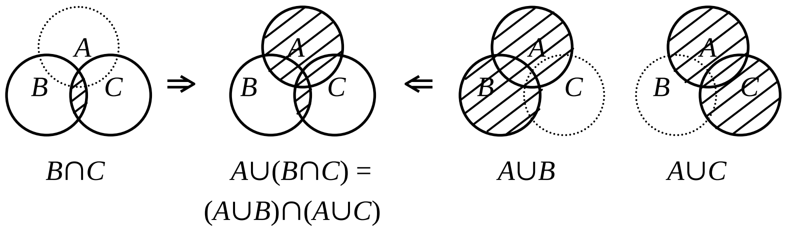


图 1.3.10

习题 1.3

1.3.1 求 $A\cap B$ 和 $A\cup B$。

(1) $A =$ 长方形，$B =$ 四边形。

(2) $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{3, 4, 5\}$。

(3) $A = \{x \mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $x<0\}$，$B = \{x \mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $x>0\}$。

(4) $A = \{x \mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x>0\}$，$B = \{x \mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\le 1\}$。

(5) $A = (-2, 0]\cup(1, 4]$，$B = (-1, 2]\cup(3, 5]$。

1.3.2 $a, c, b, d\in\mathbf{R}$，$a\le c<b\le d$，证明：

$(a, b)\cap(c, d) = (c, b)$，

$(a, b)\cup(c, d) = (a, d)$。

1.3.3 补齐定理 1.3.9 的证明，即证明：

(1) $A\cup(B\cup C) \subseteq (A\cup B)\cup C$。

(2) $(A\cap B)\cap C \subseteq A\cap(B\cap C)$。

(3) $A\cap(A\cup B) = A$。

1.3.4 先证明 $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$，再利用

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

证明 $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$。

1.3.5 证明：

(1) $B \subseteq A$ 当且仅当 $A\cap B = B$。

(2) $B \subseteq A$ 当且仅当 $A\cup B = A$。

1.3.6 证明：如果

$A\cap B = A\cap C$ 且 $A\cup B = A\cup C$，

则 $B = C$。

1.3.7 什么时候有 $A\cap B = A\cup B$？

1.4　集 合 的 差

集合还有一种重要的运算。

1.4.1 定义　集合的差　所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为集合 A 和 B 的差，记为 $A\setminus B$，即：

$A\setminus B = \{x \mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$ (图 1.4.1)。

用属于关系表示就是：

$x\in A\setminus B$ 当且仅当($x\in A$ 且 $x\notin B$)。

由 $A\setminus B$ 的定义，x 不属于 $A\setminus B$ 的条件是 x 不属于 A 或 x 属于 B，所以：

$x\notin A\setminus B$ 当且仅当($x\notin A$ 或 $x\in B$)。

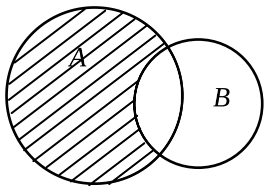


图 1.4.1　A\B

与集合的交和并类似，我们通过例子来熟悉集合的差的概念。

1.4.2 例　三角形$\setminus$直角三角形 = 锐角三角形$\cup$钝角三角形,

动植物$\setminus$动物 = 植物。

1.4.3 例　$\{1, 2, 3\}\setminus\{2, 3, 4\} = \{1\}$。

$\{2, 3, 4\}\setminus\{1, 2, 3\} = \{4\}$。

$\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_n = \{x \mid x\in\mathbf{N}$ 且 $x\geq n\}$。

集合的差有以下性质。

1.4.4 定理　A, B, C 是任意集合。

(1) $A\setminus B \subseteq A$。

(2) 如果 $B\subseteq A$，则 $B\setminus C\subseteq A\setminus C$。

(3) 如果 $C\subseteq B$，则 $A\setminus B\subseteq A\setminus C$。

(4) $(A\setminus B)\cap B = \varnothing$。

(5) $(A\setminus B)\cup B = A\cup B$。

证　(1) 显然。

(2) 任给 x，如果 $x\in B\setminus C$，则

$x\in B$ 且 $x\notin C$，

由 $B\subseteq A$ 得

$x\in A$，

由 $x\in A$ 且 $x\notin C$ 得

$x\in A\setminus C$。

因此 $B\setminus C\subseteq A\setminus C$ (图 1.4.2)。

(3) 任给 x，如果 $x\in A\setminus B$，则

$x\in A$ 且 $x\notin B$，

由 $C\subseteq B$ 得

$x\notin C$，

由 $x\in A$ 且 $x\notin C$ 得

$x\in A\setminus C$。

因此 $A\setminus B\subseteq A\setminus C$ (图 1.4.3)。

(4) 任给 x，如果 $x\in A\setminus B$，则

$x\in A$ 且 $x\notin B$，

所以

$x\notin B$。

因此$(A\setminus B)\cap B = \varnothing$。

(5) 任给 x，如果 $x\in A\cup B$，则

$x\in A$ 或 $x\in B$。

当 $x\in B$ 时，有

$x\in (A\setminus B)\cup B$，

当 $x\notin B$ 时，必有 $x\in A$，所以

$$x \in A \setminus B,$$

也有

$$x \in (A \setminus B) \cup B。$$

因此 $A \cup B \subseteq (A \setminus B) \cup B$。

由 $A \setminus B \subseteq A$ 和 $B \subseteq B$ 得$(A \setminus B) \cup B \subseteq A \cup B$。■

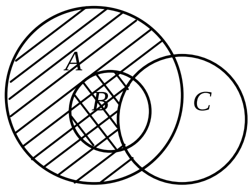


图 1.4.2

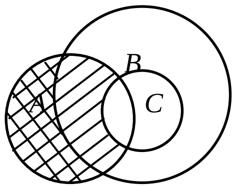


图 1.4.3

集合的三种运算有以下重要关系。

1.4.5 定理 De-Morgan 律 A, B, C 是任意集合。

(1) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$。

(2) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$。

证 (1) 任给 x，如果 $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$，则

$$x \in A \setminus B \text{ 且 } x \in A \setminus C,$$

所以

$$x \in A \text{ 且 } x \notin B \text{ 且 } x \notin C,$$

由 $x \notin B$ 和 $x \notin C$ 得

$$x \notin B \cup C,$$

由 $x \in A$ 和 $x \notin B \cup C$ 得

$$x \in A \setminus (B \cup C)。$$

因此$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$。

由 $B \subseteq B \cup C$ 得

$$A \setminus (B \cup C) \subseteq A \setminus B,$$

由 $C \subseteq B \cup C$ 得

$$A \setminus (B \cup C) \subseteq A \setminus C,$$

由 $A \setminus (B \cup C) \subseteq A \setminus B$ 和 $A \setminus (B \cup C) \subseteq A \setminus C$ 得

$$A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \text{ (图 1.4.4)。}$$

(2) 任给 x，如果 $x \in A \setminus (B \cap C)$，则

$$x \in A \text{ 且 } x \notin B \cap C,$$

所以

$$x \notin B \text{ 或 } x \notin C。$$

当 $x \notin B$ 时，由 $x \in A$ 且 $x \notin B$ 得

$$x \in A \setminus B,$$

当 $x \notin C$ 时，由 $x \in A$ 且 $x \notin C$ 得

$$x \in A \setminus C,$$

在两种情况下都有

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)。$$

因此 $A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$。

由 $B \cap C \subseteq B$ 得

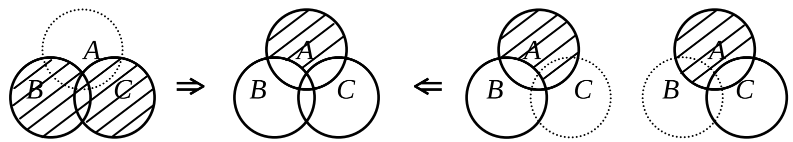
$$A \setminus B \subseteq A \setminus (B \cap C),$$

由 $B \cap C \subseteq C$ 得

$$A \setminus C \subseteq A \setminus (B \cap C),$$

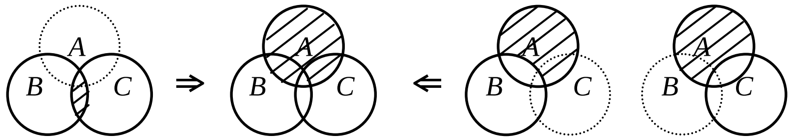
由 $A \setminus B \subseteq A \setminus (B \cap C)$和 $A \setminus C \subseteq A \setminus (B \cap C)$得

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cap C) \text{(图 1.4.5)。} \blacksquare$$



$B \cup C$　　$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$　　$A \setminus B$　　$A \setminus C$

图 1.4.4



$B\cap C$　　$A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$　　$A\setminus B$　　$A\setminus C$

图 1.4.5

习题 1.4

1.4.1　求 $A\setminus B$ 和 $B\setminus A$。

(1) A = 三角形，B = 四边形。

(2) $A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{2, 3, 4, 5\}$。

(3) $A = \{x \mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $x<0\}$，$B = \mathbf{Z}$。

(4) $A = \{x \mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x>0\}$，$B = \{x \mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\leq 1\}$。

(5) $A = (-2, 0]\cup(1, 3]$，$B = (-1, 2]$。

1.4.2　证明：如果 $a\leq c\leq b\leq d$，则$(a, b]\setminus(c, d] = (a, c]$，$(c, d]\setminus(a, b] = (b, d]$。

1.4.3　证明：

(1) 如果 $C\subseteq B$，则 $A\cup C\setminus B \subseteq A\setminus B$。

(2) $(A\setminus B)\cup(A\cap B) = A$。

(3) 如果 $A\cap B = \varnothing$，则 $A\setminus B = A$。

(4) 如果 $C\subseteq B$，则$(A\setminus B)\cap C = \varnothing$。

(5) $A\setminus(A\setminus B) = A\cap B$。

1.4.4　证明：

(1) $B\subseteq A$ 当且仅当 $B\setminus A = \varnothing$。

(2) $A\neq B$ 当且仅当 $A\setminus B\neq\varnothing$或 $B\setminus A\neq\varnothing$。

1.5　集 合 族

幂集有一个性质，它的元素本身也是集合。现在考虑一般的每个元素都是集合的集合。对于这样的集合，我们可以讨论这集合中每个元素作为集合的性质，如它们的元素，它们之间的包含关系以及它们的运算等。为了突出体现一个集合的每个元素都是集合，给予这样的集合一个专门的名称。

1.5.1 定义　集合族　每个元素都是集合的非空集合称为集合族。

集合族一般用大写希腊字母$\Sigma, \Gamma, \Phi, \Psi$等表示。

注意集合族仍然是集合，是具有一定性质的非空集合。当我们对这样的集合使用集合族的称呼时，往往表明我们讨论的重点不在于这个集合本身，而在于作为它的元素的那些集合，主要讨论那些集合的性质。

我们还是通过例子来加深对集合族的概念的理解。

1.5.2 例　{书，纸，笔}和{行星，彗星，恒星}是集合族。

1.5.3 例　$\Gamma_1 = \{(\frac{-1}{(n+1)}, \frac{1}{(n+1)}] \mid n\in\mathbf{N}\}$和$\Gamma_2 = \{(x, x+1] \mid x\in\mathbf{Z}\}$是集合族。

1.5.4 例　$\Gamma(\mathbf{N}) = \{\mathbf{N}_n \mid n\in\mathbf{N}\}$和$\Gamma(\mathbf{Q}) = \{\mathbf{Q}_a \mid a\in\mathbf{R}\}$是集合族，其中 $\mathbf{N}_n$ 和 $\mathbf{Q}_a$ 的定义分别见例 1.2.4 和习题 1.2.2。

1.5.5 例　令 A_n = n 边形集合，则$\Gamma = \{A_n \mid n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geq 3\}$是集合族。

对于两个集合的交和并来说，交的结合律的意义就是说 $A\cap(B\cap C)$和$(A\cap B)\cap C$ 都代表三个集合的“交”，即三个集合的公共元素所组成集合。并的结合律的意义就是说 $A\cup(B\cup C)$和$(A\cup B)\cup C$ 都代表三个集合的“并”，即三个集合的所有元素所组成集合。

可以进一步推广，考虑更多的集合的“交”和“并”，考虑一个集合族的所有的集合的“交”和“并”。

1.5.6 定义 集合族的交 集合族Γ中所有集合的公共元素组成的集合称为集合族Γ的交，记为$\bigcap\Gamma$。属于$\bigcap\Gamma$的元素恰好是属于Γ中每个集合的元素，所以：

$$x\in\bigcap\Gamma\text{当且仅当(任给 }X\in\Gamma\text{，都有 }x\in X\text{)，}$$

也就是

$$\bigcap\Gamma = \{x\,|\text{任给 }X\in\Gamma\text{，都有 }x\in X\}\text{。}$$

如果 x 不属于$\bigcap\Gamma$，则 x 不属于Γ中的某个集合。反之如果 x 不属于Γ中的某个集合，则 x 不属于$\bigcap\Gamma$。所以：

$$x\notin\bigcap\Gamma\text{当且仅当(存在 }X\in\Gamma\text{，使得 }x\notin X\text{)。}$$

1.5.7 定义 集合族的并 集合族Γ中所有集合的所有元素组成的集合称为集合族Γ的并，记为$\bigcup\Gamma$。属于$\bigcup\Gamma$的元素总是属于Γ中的某个集合，所以：

$$x\in\bigcup\Gamma\text{当且仅当(存在 }X\in\Gamma\text{，使得 }x\in X\text{)，}$$

也就是

$$\bigcup\Gamma = \{x\,|\text{存在 }X\in\Gamma\text{，使得 }x\in X\}\text{。}$$

如果 x 不属于$\bigcup\Gamma$，则 x 不属于Γ中的每个集合。反之如果 x 不属于Γ中的每个集合，则 x 不属于$\bigcup\Gamma$。所以：

$$x\notin\bigcup\Gamma\text{当且仅当(任给 }X\notin\Gamma\text{，都有 }x\notin X\text{)。}$$

如果$\Gamma = \{A, B\}$，则$\bigcap\Gamma = A\cap B$，$\bigcup\Gamma = A\cup B$，所以两个集合的交和并是集合族的交和并的特例。注意虽然两个集合的交和并是集合族的交和并的特例，但它们的意思稍有差别。两个集合的交确是这两个集合的“交”，但集合族的交并不是这个集合族的“交”，而是这个集合族中所有集合的“交”。两个集合的并和集合族的并也有类似的差别。

下面是集合族的交和并的几个例子。

1.5.8 例 $\Gamma = \{\{0, 1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$，则$\bigcap\Gamma = \{2\}$，

$\bigcup\Gamma = \{0, 1, 2, 3, 4\}$。

1.5.9 例 对于例 1.5.5 中的Γ，有$\bigcup\Gamma =$ 多边形的集合。对于例 1.5.3 中的Γ_1和Γ_2，有$\bigcap\Gamma_1 = \{0\}$，$\bigcup\Gamma_2 = \mathbf{R}$。

由集合族的交和并的定义可知：任给 $X\in\Gamma$，都有$\bigcap\Gamma \subseteq X$ 和 $X \subseteq \bigcup\Gamma$。这就是说，$\Gamma$中每个集合都是$\bigcup\Gamma$的子集，$\bigcap\Gamma$是$\Gamma$中每个集合的子集，它们是定理 1.3.7(1)(2)的推广。定理 1.3.8 也可以推广到集合族。

1.5.10 定理 Γ和Σ是集合族。

(1) 如果任给 $X\in\Gamma$，存在 $Y\in\Sigma$，使得 $X \subseteq Y$，则$\bigcup\Gamma \subseteq \bigcup\Sigma$。

(2) 如果任给 $X\in\Gamma$，存在 $Y\in\Sigma$，使得 $Y \subseteq X$，则$\bigcap\Sigma \subseteq \bigcap\Gamma$。

证 (1) 任给 x，如果 $x\in\bigcup\Gamma$，则

$$\text{存在 }X\in\Gamma\text{，使得 }x\in X\text{，}$$

对于这个 X，由条件得

$$\text{存在 }Y\in\Sigma\text{，使得 }X \subseteq Y\text{，}$$

由 $x\in X$ 和 $X \subseteq Y$ 得 $x\in Y$，所以

$$\text{存在 }Y\in\Sigma\text{，使得 }x\in Y\text{，}$$

由集合族的并的定义得

$$x\in\bigcup\Sigma\text{。}$$

因此$\bigcup\Gamma \subseteq \bigcup\Sigma$。

(2) 任给 x，如果 $x\in\bigcap\Sigma$，则

$$\text{任给 }Y\in\Sigma\text{，都有 }x\in Y\text{，}$$

任给 $X\in\Gamma$，由条件得

$$\text{存在 }Y\in\Sigma\text{，使得 }Y \subseteq X\text{，}$$

由 $x\in Y$ 和 $Y \subseteq X$ 得 $x\in X$，所以

$$\text{任给 }X\in\Gamma\text{，都有 }x\in X\text{，}$$

由集合族的交的定义得

$$x\in\bigcap\Gamma\text{。}$$

因此$\bigcap\Sigma \subseteq \bigcap\Gamma$。■

在定理 1.5.10 中取$\Sigma = \{A\}$，则$\bigcup\Sigma = \bigcap\Sigma = A$，因此有

(1) 如果任给 $X\in\Gamma$，都有 $X\subseteq A$，则$\bigcup\Gamma\subseteq A$。

(2) 如果任给 $X\in\Gamma$，都有 $A\subseteq X$，则 $A\subseteq\bigcap\Gamma$。

它们是定理 1.3.7(3)(4)的推广。

设 I 是一个非空集合，如果任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，A_i 是集合，则$\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$是集合族，I 称为这个集合族的指标集。Γ本身是一个非空集合，令 $\mathrm{I}=\Gamma$，任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，令 $A_\mathrm{i}=\mathrm{i}$，则$\Gamma=\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$，所以每个集合族都可以用指标集 I 将其表示为$\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$。当然同一个集合族可以用不同的指标集来表示。

讨论集合族时，经常使用指标集的形式，对于具体的集合族往往用一些比较熟悉的集合作指标集，如例 1.5.3 中的Γ_1和Γ_2分别用 **N** 和 **Z** 作指标集，例 1.5.4 中$\Gamma(\mathbf{N})$和$\Gamma(\mathbf{Q})$分别用 **N** 和 **R** 作指标集。用指标集来叙述和证明集合族的性质比较清晰。

如果$\Gamma=\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$，则可以用$\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$和$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$分别表示$\bigcap\Gamma$和$\bigcup\Gamma$。在这种表示下有：

$x\in\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$ 当且仅当(任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有 $x\in A_\mathrm{i}$)，

$x\in\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$ 当且仅当(存在 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，使得 $x\in A_\mathrm{i}$)，

当 $\mathrm{I}=\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_\mathrm{n}$ 时，常常将$\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$和$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$分别记为$\bigcap_{\mathrm{i}\geq\mathrm{n}}A_\mathrm{i}$和$\bigcup_{\mathrm{i}\geq\mathrm{n}}A_\mathrm{i}$，特别地，当 $\mathrm{I}=\mathbf{N}=\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_0$ 时，分别记为$\bigcap_{\mathrm{i}\geq0}A_\mathrm{i}$和$\bigcup_{\mathrm{i}\geq0}A_\mathrm{i}$。当 $\mathrm{I}=\mathbf{N}_{\mathrm{n}+1}$ 时，常常将$\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$和$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$分别记为$\bigcap_{\mathrm{i}\leq\mathrm{n}}A_\mathrm{i}$和$\bigcup_{\mathrm{i}\leq\mathrm{n}}A_\mathrm{i}$，也可记为$\bigcap_{\mathrm{i}<\mathrm{n}+1}A_\mathrm{i}$和$\bigcup_{\mathrm{i}<\mathrm{n}+1}A_\mathrm{i}$，还可更直观地记为 $A_0\cap\cdots\cap A_\mathrm{n}$ 和 $A_0\cup\cdots\cup A_\mathrm{n}$。

以下用指标集的形式来叙述和证明集合族的结合律、分配律和 De-Morgan 律。

1.5.11 定理

(1) $(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cup(\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})=\bigcup\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$。

(2) $(\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cap(\bigcap_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})=\bigcap\{A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$。

(3) $(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cap(\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})=\bigcup\{A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$。

(4) $(\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cup(\bigcap_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})=\bigcap\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$。

(5) $A\setminus\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}=\bigcup\{A\setminus A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$。

(6) $A\setminus\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}=\bigcap\{A\setminus A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$。

证　(1) 任给 x，如果 $x\in\bigcup\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$，则

存在 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，存在 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}$，使得 $x\in A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}$，

当 $x\in A_\mathrm{i}$ 时，有 $x\in\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$，当 $x\in B_\mathrm{j}$ 时，有 $x\in\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j}$，所以

$x\in(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cup(\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})$。

因此$\bigcup\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}\subseteq(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cup(\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})$。

任给 $A_\mathrm{i}\in\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$，存在 $A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\in\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$，使得 $A_\mathrm{i}\subseteq A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}$，由定理 1.5.10(3)得

$\bigcup\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}\subseteq\bigcup\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$，

即

$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}\subseteq\bigcup\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$，

类似地可得

$\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j}\subseteq\bigcup\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$。

因此$(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cup(\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})=\bigcup\{A_\mathrm{i}\cup B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$。

(2) 任给 x，如果 $x\in(\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cap(\bigcap_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})$，则

$x\in\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$ 且 $x\in\bigcap_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j}$，

所以

任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，任给 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}$，都有 $x\in A_\mathrm{i}$ 且 $x\in B_\mathrm{j}$，

所以

任给 $A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\in\{A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$，都有 $x\in A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}$，

所以

$x\in\bigcap\{A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$。

因此$(\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i})\cap(\bigcap_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}B_\mathrm{j})\subseteq\bigcap\{A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$。

任给 $A_\mathrm{i}\in\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$，存在 $A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\in\{A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}$，使得 $A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\subseteq A_\mathrm{i}$，由定理 1.5.10(4)得

$\bigcap\{A_\mathrm{i}\cap B_\mathrm{j}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 且 $\mathrm{j}\in\mathrm{J}\}\subseteq\bigcap\{A_\mathrm{i}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$，

即

$\bigcap\{A_i \cap B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\} \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$，

类似地可得

$\bigcap\{A_i \cap B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\} \subseteq \bigcap_{j \in J} B_j$。

因此$\bigcap\{A_i \cap B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\} \subseteq (\bigcap_{i \in I} A_i) \cap (\bigcap_{j \in J} B_j)$。

(3) 任给 x，如果 $x \in (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{j \in J} B_j)$，则

$x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ 且 $x \in \bigcup_{j \in J} B_j$，

所以

存在 $i \in I$，存在 $j \in J$，使得 $x \in A_i$ 且 $x \in B_j$，

所以

存在 $A_i \cap B_j \in \{A_i \cap B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\}$，使得 $x \in A_i \cap B_j$，

所以

$x \in \bigcup\{A_i \cap B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\}$。

因此$(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{j \in J} B_j) \subseteq \bigcup\{A_i \cap B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\}$。

任给 $A_i \cap B_j \in \{A_i \cap B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\}$，存在 $A_i \in \{A_i \mid i \in I\}$，使得 $A_i \cap B_j \subseteq A_i$，由定理 1.5.10(3)得

$\bigcup\{A_i \cap B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\} \subseteq \bigcup\{A_i \mid i \in I\}$，

即

$\bigcup\{A_i \cap B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$，

类似地可得

$\bigcup\{A_i \cap B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\} \subseteq \bigcup_{j \in J} B_j$。

因此$\bigcup\{A_i \cap B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\} \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{j \in J} B_j)$。

(4) 任给 x，如果 $x \notin (\bigcap_{i \in I} A_i) \cup (\bigcap_{j \in J} B_j)$，则

$x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$ 且 $x \notin \bigcap_{j \in J} B_j$，

所以

存在 $i \in I$，存在 $j \in J$，使得 $x \notin A_i$ 且 $x \notin B_j$，

所以

存在 $A_i \cup B_j \in \{A_i \cup B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\}$，使得 $x \notin A_i \cup B_j$，

所以

$x \notin \bigcap\{A_i \cup B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\}$。

因此$\bigcap\{A_i \cup B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\} \subseteq (\bigcap_{i \in I} A_i) \cup (\bigcap_{j \in J} B_j)$。

任给 $A_i \cup B_j \in \{A_i \cup B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\}$，存在 $A_i \in \{A_i \mid i \in I\}$，使得 $A_i \subseteq A_i \cup B_j$，由定理 1.5.10(4)得

$\bigcap\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \bigcap\{A_i \cup B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\}$，

即

$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap\{A_i \cup B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\}$，

类似地可得

$\bigcap_{j \in J} B_j \subseteq \bigcap\{A_i \cup B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\}$。

因此$(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup (\bigcap_{j \in J} B_j) \subseteq \bigcap\{A_i \cup B_j \mid i \in I \text{ 且 } j \in J\}$。

(5) 任给 x，如果 $x \in A \setminus \bigcap_{i \in I} A_i$，则

$x \in A$ 且 $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$，

由 $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$ 得

存在 $i \in I$，使得 $x \notin A_i$，

所以

存在 $i \in I$，使得 $x \in A \setminus A_i$，

所以

$x \in \bigcup\{A \setminus A_i \mid i \in I\}$。

因此 $A \setminus \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup\{A \setminus A_i \mid i \in I\}$。

任给 $i \in I$，都有$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_i$，所以

任给 $i \in I$，都有 $A \setminus A_i \subseteq A \setminus \bigcap_{i \in I} A_i$。

因此$\bigcup\{A \setminus A_i \mid i \in I\} \subseteq A \setminus \bigcap_{i \in I} A_i$。

(6) 任给 x，如果 $x \in \bigcap\{A \setminus A_i \mid i \in I\}$，则

任给 $i \in I$，都有 $x \in A \setminus A_i$，

所以

$x \in A$ 且任给 $i \in I$，都有 $x \notin A_i$，

所以

$x \in A$ 且 $x \notin \bigcup_{i \in I} A$，

所以

$x\in A\setminus\bigcup_{i\in I}A_i$。

因此$\bigcap\{A\setminus A_i \mid i\in I\} \subseteq A\setminus\bigcup_{i\in I}A_i$。

任给 $i\in I$，都有 $A_i \subseteq \bigcup_{i\in I}A_i$，所以

任给 $i\in I$，都有 $A\setminus\bigcup_{i\in I}A_i \subseteq A\setminus A_i$。

因此 $A\setminus\bigcup_{i\in I}A_i = \bigcap\{A\setminus A_i \mid i\in I\}$。■

有三种重要类型的集合族。

1.5.12 定义 单调 Γ是集合族，如果

任给 $X, Y\in\Gamma$，都有 $X \subseteq Y$ 或 $Y \subseteq X$，

则称Γ是单调的集合族，简称Γ是单调的。

例 1.5.4 中的$\Gamma(\mathbf{N})$和$\Gamma(\mathbf{Q})$都是单调的(见例 1.2.4 和习题 1.2.2)，例 1.5.3 中的Γ_1是单调的。

1.5.13 定义 不交 Γ是集合族，如果Γ满足：

任给 $X, Y\in\Gamma$，只要 $X \neq Y$，就有 $X\cap Y = \varnothing$，

则称Γ是不交的集合族，简称Γ是不交的，也称Γ中的集合两两不交。当$\Gamma = \{A_1,\cdots, A_n\}$时，也称 $A_1,\cdots, A_n$ 两两不交。

如例 1.5.2 中的集合族，例 1.5.3 中的Γ_2和例 1.5.5 中的Γ都是不交的。

1.5.14 定义 子集族 如果Γ中的每个集合都是集合 A 的子集。则称Γ是 A 的子集族。因为 A 的所有子集的集合是幂集 $\mathrm{P}(A)$，所以Γ是 A 的子集族当且仅当$\Gamma \subseteq \mathrm{P}(A)$。

例 1.5.3 中，Γ_1和Γ_2都是 $\mathbf{R}$ 的子集族。例 1.5.4 中，$\Gamma(\mathbf{N})$是 $\mathbf{N}$ 的子集族，$\Gamma(\mathbf{Q})$是 $\mathbf{Q}$ 的子集族。

显然，如果Γ是 B 的子集族且 $B \subseteq A$，则Γ也是 A 的子集族。又因为Γ中的每个集合都是$\bigcup\Gamma$的子集，所以任何集合族都是$\bigcup\Gamma$的子集族，也总是满足$\bigcup\Gamma \subseteq A$ 的集合 A 的子集族。

我们一般用 a, b, c, x, y, z 等表示元素，用 A, B, C, X, Y, Z 等表示集合，用$\Sigma, \Gamma, \Phi, \Psi$等表示集合族。为了清楚起见，以后尽量这样表示，但需要时可以不受这个限制，任何符号都能用来表示集合和元素，只要将它们之间的属于关系刻画清楚就可以了。

习题 1.5

1.5.1 证明：如果任给 $i\in I$，都有 $B_i \subseteq A_i$，则$\bigcup_{i\in I}B_i \subseteq \bigcup_{i\in I}A_i$，$\bigcap_{i\in I}B_i \subseteq \bigcap_{i\in I}A_i$。

1.5.2 求$\bigcap\Gamma$和$\bigcup\Gamma$。

(1) $\Gamma = \{\{0,1,2,4\}, \{1,3,4,5\}, \{0,2,4,5\}\}$。

(2) $\Gamma = \{(-x, x] \mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x>0\}$。

(3) $\Gamma = \{A_a \mid a\in\mathbf{R}$ 且 $a>0\}$，其中

$A_a = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 且$-a+y\le x\le a+y\}$。

1.5.3 证明：

(1) $(\bigcup_{i\in I}A_i)\cup(\bigcup_{i\in I}B_i) = \bigcup_{i\in I}(A_i\cup B_i)$。

(2) $(\bigcap_{i\in I}A_i)\cap(\bigcap_{i\in I}B_i) = \bigcap_{i\in I}(A_i\cap B_i)$。

(3) $A\cup(\bigcap_{i\in I}A_i) = \bigcap_{i\in I}(A\cup A_i)$。

(4) $A\cap(\bigcup_{i\in I}A_i) = \bigcup_{i\in I}(A\cap A_i)$。

1.5.4 指出下列集合族哪些是单调的，哪些是不交的。

(1) {金鱼，鱼，动物，生物}，

(2) {三角形，正方形，多边形}。

(3) $\{(0, x] \mid x\in\mathbf{N}$ 且 $x>0\}$，

(4) $\{(0,3), (1,4), (2,5)\}$，

(5) $\{\{0,3\}, \{1,4\}, \{2,5\}\}$。

1.5.5 证明：如果Γ是单调的，则任给 $x, y\in\bigcup\Gamma$，存在 $X\in\Gamma$，使得 $x, y\in X$。

1.5.6 $\Gamma= \{A_i \mid i\in\mathbf{N}\}$，任给 $n\in\mathbf{N}$，令

$B_n = \bigcap_{i\le n}A_i$，$C_n = \bigcup_{i\le n}A_i$。

证明：

(1) $\{B_i \mid i\in\mathbf{N}\}$和$\{C_i \mid i\in\mathbf{N}\}$都是单调的。

(2) $\bigcap_{i\ge 0}A_i = \bigcap_{i\ge 0}B_i$，$\bigcup_{i\ge 0}A_i = \bigcup_{i\ge 0}C_i$。

1.5.7 什么样的集合族既是单调又是不交的？

1.6 卡 氏 积

由两个元素 a, b 组成的集合$\{a, b\}$中，a 和 b 是没有次序的。有时我们需要考虑有次序的两个元素，所以我们需要由两个元素组成新的东西，其中两个元素是有次序的。

1.6.1 定义 有序对 两个元素 a, b 有次序地放在一起，称为一个有序对，记为$<a, b>$。规定

$$<a_1, b_1> = <a_2, b_2> \text{当且仅当 } a_1 = a_2 \text{ 且 } b_1 = b_2\text{。}$$

这样当 $a \neq b$ 时，就有$<a, b> \neq <b, a>$。所以有序对相等的定义刻画了有序对中两个元素的次序。

在有序对$<a, b>$中，a 称为第一元素，b 称为第二元素。

有序对可以作为集合的元素，一般的以有序对为元素的集合以后再讨论，这里只考虑一种特殊的有序对的集合。

1.6.2 定义 卡氏积 A, B 是两个集合，集合

$$\{<x, y> \mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}$$

称为 A 和 B 的卡氏积，记为 $A\times B$ (图 1.6.1)。用属于关系来表示就是：

$$<x, y>\in A\times B \text{ 当且仅当 } x\in A \text{ 且 } y\in B$$

和

$$<x, y>\notin A\times B \text{ 当且仅当 } x\notin A \text{ 或 } y\notin B\text{。}$$

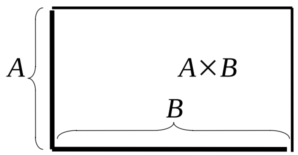


图 1.6.1

在卡氏积 $A\times B$ 中，A 称为第一集合，B 称为第二集合。

由卡氏积的定义可知有 $A\times\varnothing = \varnothing\times A = \varnothing$。又由有序对的性质可知，一般没有 $A\times B = B\times A$。$A\times B$ 也是一个集合，所以可以和另一集合 C 作卡氏积$(A\times B)\times C$，类似地有 $A\times(B\times C)$。注意，一般没有$(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$。

虽然卡氏积也是由两个集合形成新集合，但和集合的运算不同。$A\cup B$, $A\cap B$ 和 $A\setminus B$ 中的元素还是 A 或 B 中的元素，而 $A\times B$ 中元素既不是 A 中的元素，也不是 B 中的元素。

现在讨论卡氏积的性质。

1.6.3 定理 如果 $B_1 \subseteq A_1$，$B_2 \subseteq A_2$，则 $B_1\times B_2 \subseteq A_1\times A_2$。

证 任给$<x, y>$，如果$<x, y>\in B_1\times B_2$，则

$x\in B_1$ 且 $y\in B_2$，

由 $B_1 \subseteq A_1$ 和 $B_2 \subseteq A_2$ 得 $x\in A_1$ 且 $y\in A_2$，所以

$<x, y>\in A_1\times A_2$。

因此 $B_1\times B_2 \subseteq A_1\times A_2$ (图 1.6.1)。■

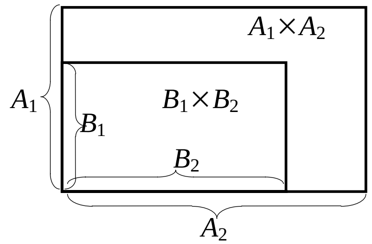


图 1.6.1

1.6.4 定理 A, B, C 是任意集合。

(1) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$，

$(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$。

(2) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$，

$(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$。

(3) $A\times(B\setminus C) = (A\times B)\setminus(A\times C)$，

$(B\setminus C)\times A = (B\times A)\setminus(C\times A)$。

证 (1) 任给$\langle x, y\rangle$，如果$\langle x, y\rangle\in A\times(B\cup C)$，则

$$x\in A \text{ 且 } y\in B\cup C,$$

所以

$$x\in A \text{ 且}(y\in B \text{ 或 } y\in C),$$

当 $y\in B$ 时，由 $x\in A$ 和 $y\in B$ 得

$$\langle x, y\rangle\in A\times B,$$

当 $y\in C$ 时，由 $x\in A$ 和 $y\in C$ 得

$$\langle x, y\rangle\in A\times C,$$

所以

$$\langle x, y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)。$$

因此 $A\times(B\cup C)\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$。

由 $A\subseteq A$，$B\subseteq B\cup C$ 和 $C\subseteq B\cup C$ 得

$$A\times B\subseteq A\times(B\cup C) \text{和 } A\times C\subseteq A\times(B\cup C),$$

因此$(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$ (图 1.6.2)。

同理可证$(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$。

(2) 任给$\langle x, y\rangle$，如果$\langle x, y\rangle\in(A\times B)\cap(A\times C)$，则

$$\langle x, y\rangle\in A\times B \text{ 且}\langle x, y\rangle\in A\times C,$$

所以

$$(x\in A \text{ 且 } y\in B)\text{且}(x\in A \text{ 且 } y\in C)。$$

由 $y\in B$ 且 $y\in C$ 得 $y\in B\cap C$，由 $x\in A$ 且 $y\in B\cap C$ 得

$$\langle x, y\rangle\in A\times(B\cap C)。$$

因此$(A\times B)\cap(A\times C)\subseteq A\times(B\cap C)$。

由 $A\subseteq A$，$B\cap C\subseteq B$ 和 $B\cap C\subseteq C$ 得

$$A\times(B\cap C)\subseteq A\times B \text{ 和 } A\times(B\cap C)\subseteq A\times C,$$

因此 $A\times(B\cap C)\subseteq(A\times B)\cap(A\times C)$(图 1.6.3)。

同理可证$(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$。

(3) 任给$\langle x, y\rangle$，如果$\langle x, y\rangle\in A\times(B\setminus C)$，则

$$x\in A \text{ 且 } y\in B\setminus C,$$

所以

$$x\in A \text{ 且 } y\in B \text{ 且 } y\notin C。$$

由 $x\in A$ 且 $y\in B$ 得$\langle x, y\rangle\in A\times B$，由 $y\notin C$ 得

$$\langle x, y\rangle\notin A\times C,$$

所以

$$\langle x, y\rangle\in(A\times B)\setminus(A\times C)。$$

因此 $A\times(B\setminus C)\subseteq(A\times B)\setminus(A\times C)$。

任给$\langle x, y\rangle$，如果$\langle x, y\rangle\in(A\times B)\setminus(A\times C)$，则

$$\langle x, y\rangle\in A\times B \text{ 且}\langle x, y\rangle\notin A\times C,$$

由$\langle x, y\rangle\in A\times B$ 得

$$x\in A \text{ 且 } y\in B,$$

由 $x\in A$ 和$\langle x, y\rangle\notin A\times C$ 得

$$y\notin C,$$

所以

$$x\in A \text{ 且 } y\in B \text{ 且 } y\notin C。$$

由 $y\in B$ 且 $y\notin C$ 得

$$y\in B\setminus C,$$

所以

$$\langle x, y\rangle\in A\times(B\setminus C)。$$

因此$(A\times B)\setminus(A\times C)\subseteq A\times(B\setminus C)$ (图 1.6.4)。

同理可证$(B\setminus C)\times A = (B\times A)\setminus(C\times A)$。■

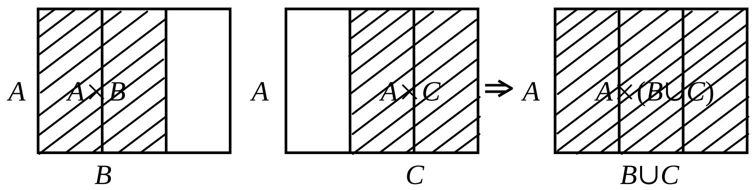


图 1.6.2

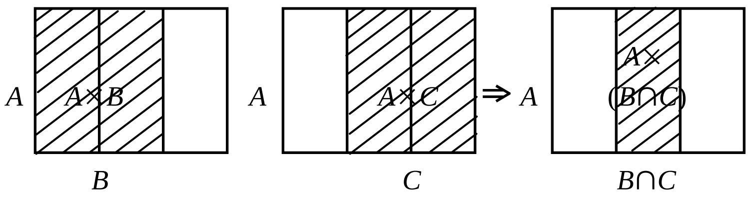


图 1.6.3

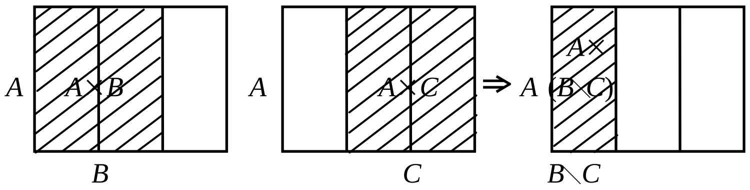


图 1.6.4

定理 1.6.4 说明了卡氏积对集合的交、并和差有分配律，无论是第一集合还是第二集合。

可以将有序对和卡氏积作一定的推广。

1.6.5 定义 n 元有序组 任给 n≥2，n 个元素 $a_1,\cdots, a_n$ 有次序地放在一起，称为一个 n 元有序组，记为$<a_1,\cdots, a_n>$。为了体现 n 元有序组的次序，规定

$<a_1,\cdots, a_n> = <b_1,\cdots, b_n>$当且仅当任给 $1\le i\le n$，都有 $a_i = b_i$。

n 元有序组可以组成集合，特别地有 n 个集合的卡氏积。

1.6.6 定义 n 个集合的卡氏积 n≥2，$A_1,\cdots, A_n$ 是 n 个集合，集合

$$\{<x_1,\cdots, x_n>|\ 任给\ 1\le i\le n，都有\ x_i\in A_i\}$$

称为 $A_1,\cdots, A_n$ 的卡氏积，记为 $A_1\times\cdots\times A_n$。任给 $1\le i\le n$，A_i 称为这个卡氏积的第 i 个集合。

1.6.7 定义 卡氏幂 如果在卡氏积 $A_1\times\cdots\times A_n$ 中，任给 $1\le i\le n$，都有 $A_i = A$，则称这个卡氏积为 A 的 n 次卡氏幂，记为 A^n，即

$$A^n = \{<x_1,\cdots, x_n>|\ 任给\ 1\le i\le n，都有\ x_i\in A\}。$$

另外规定 $A^1 = A$。

和两个集合的卡氏积类似，n 个集合的卡氏积有以下性质。

1.6.8 定理 $A_1,\cdots, A_n$ 是任意集合。

(1) 如果存在 $1\le i\le n$，使得 $A_i = \varnothing$，则 $A_1\times\cdots\times A_n = \varnothing$。

(2) 如果任给 $1\le i\le n$，都有 $B_i\subseteq A_i$，则

$B_1\times\cdots\times B_n\subseteq A_1\times\cdots\times A_n$。

(3) 任给 $1\le i\le n$，卡氏积的第 i 个集合对集合的交、并和差有分配律。

证 略。■

习题 1.6

1.6.1 A 和 B 是非空集合。证明：如果 $A\neq B$，则

$A\times B\neq B\times A$。

1.6.2 补齐定理 1.6.4 的证明，即证明：

(1) $(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$。

(2) $(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$。

(3) $(B\setminus C)\times A = (B\times A)\setminus(C\times A)$。

1.6.3 证明：

(1) $A\times(\bigcup_{i\in I}B_i) = \bigcup_{i\in I}(A\times B_i)$。

(2) $A\times(\bigcap_{i\in I}B_i) = \bigcap_{i\in I}(A\times B_i)$。

1.6.4 证明：如果$\{B_i\mid i\in I\}$是单调的，则

$(\bigcup_{i\in I}B_i)\times(\bigcup_{i\in I}B_i) = \bigcup_{i\in I}(B_i\times B_i)$。

1.6.5 证明：如果任给 $1\le i\le n$，都有 $A_i\neq\varnothing$，则

$A_1\times\cdots\times A_n\neq\varnothing$。

第二章　映　　射

2.1　映射的概念

函数是数学中的重要概念。函数的主要特征是，对定义域的每个自变量，有惟一的函数值。数学中函数的定义域主要是实数或实数的子集。将函数推广到一般集合上就是映射。

2.1.1 定义　映射　A 是非空集合，A 到 B 的映射是指：A 中每个元素都对应到 B 中的某个元素，记为 $f：A\to B$ (图 2.1.1)。

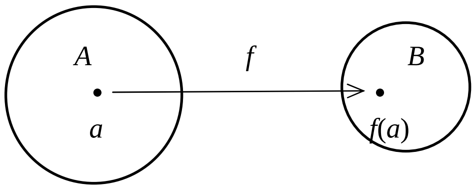


图 2.1.1

在 A 到 B 的映射 f 中，A 的元素 a 对应到 B 中的元素是惟一的，这个元素记为 $f(a)$，称为 a 在 f 下的象，也称 f 将 a 映成 $f(a)$。如果 $a = <a_1,\cdots, a_n>$，则 $f(a)$经常记为 $f(a_1,\cdots, a_n)$。注意 $f(a_1,\cdots, a_n)$ 是一个元素$<a,\cdots, a_n>$的象，而不是 n 个元素 $a,\cdots, a_n$ 的象。

如果对 A 中每个元素 x，它的象 $f(x)$确定了，则这个映射就确定了。所以只要对 A 中每个元素 x 都描述了映射 $f(x)$，也就描述 A 到 B 的映射 f。这种描述方法表示为：

$$f：A\to B \quad f(x) = y$$

如果 A 是两个不相交集合 A_1 和 A_2 的并，即

$$A = A_1\cup A_2 \text{ 和 } A_1\cap A_2 = \varnothing，$$

则可以在 A_1 和 A_2 上分别描述 f 如下：

$$f：A\to B \quad f(x) = \begin{cases} y & \text{如果 } x\in A_1 \\ z & \text{如果 } x\in A_2。\end{cases}$$

这种情况类似于数学中函数的分情况定义。

当 $A = \{a_1,\cdots, a_n\}$时，常用列举 A 中每个元素的象的方法来描述映射。如果 a_i 的象是 b_i (i = 1,⋯, n)，则这个映射就可以表示为：

$$f：A\to B \quad f(a_1) = b_1,\cdots, f(a_n) = b_n。$$

在 A 到 B 的映射的定义中，我们允许 $B = \varnothing$而不允许 $A = \varnothing$。但如果 $B = \varnothing$，则不存在 A 到 B 的映射。注意这两种情况的区别，当 $B = \varnothing$时，按定义不存在 A 到 B 的映射，当 $A = \varnothing$时，我们没有定义 A 到 B 的映射。

为了统一起见，任给集合 B，我们规定$\varnothing$到 B 有一个映射，这个映射称为空映射，特记为θ_B。这样，在映射

$$f：A\to B$$

中，A 就可以是空集$\varnothing$了，而且当 A 是空集时，就有 A 到$\varnothing$的映射$\theta_\varnothing$。注意当 $A\neq\varnothing$仍不存在 A 到$\varnothing$的映射。

一般用小写英文字母 f, g, h 等表示映射。

2.1.2 定义　定义域和值域　在映射

$$f：A\to B$$

中，A 称为 f 的定义域，记为 dom(f)，即 dom(f) = A。集合

$$\{f(x) \mid x\in A\}$$

称为 f 的值域，记为 ran(f)。显然 ran(f) $\subseteq B$。

2.1.3 定义　映射的相等　f 和 g 是两个映射，如果 f 和 g 满足：

(1) dom(f) = dom(g)，

(2) 任给 $x\in$dom(f)，都有 $f(x) = g(x)$，

则称 f 和 g 相等，记为 $f = g$ (图 2.1.2)。

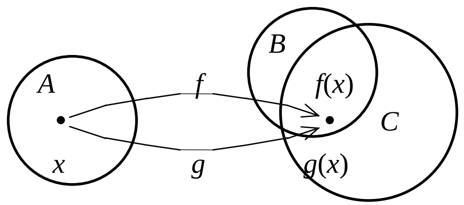


图 2.1.2

f 和 g 相等要求 f 和 g 有同样的定义域，所以

如果 $\mathrm{dom}(f) \neq \mathrm{dom}(g)$，则 $f \neq g$。

当 $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$时，$f \neq g$ 的条件是：

存在 $x\in\mathrm{dom}(f)$，使得 $f(x) \neq g(x)$。

任给集合 B, C，都有 $\mathrm{dom}(\theta_B) = \varnothing = \mathrm{dom}(\theta_C)$，又因为 $\mathrm{dom}(\theta_B)$ 中没有元素，所以也成立，

任给 $x\in\mathrm{dom}(\theta_B)$，都有$\theta_B(x) = \theta_C(x)$，

因此$\theta_B = \theta_C$。

这就是说，在映射相等的意义上，只有一个空映射。

映射是集合论中除集合外的另一重要概念，我们通过以下一些例子来加深对它的理解。

2.1.4 例 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 称为一元实函数，这是数学中常见的映射。如

$f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $f(x) = x^2$，

$g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $g(x) = 3x$。

2.1.5 例 请看以下两个映射

$f: \mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ $f(x) = x+1$，

$g: \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ $g(x) = x+1$。

虽然它们对于元素的象的描述是一样的，但因为它们有不同的定

义域，所以它们是不同的映射。

2.1.6 例 令 A = 多边形集合。考虑以下两个映射

$f: A\to\mathbf{N}$ $f(x) = x$ 的边数

$g: A\to\mathbf{N}$ $g(x) = x$ 的角数，

虽然它们描述不一样，但因为多边形的边数等于角数，所以 $f = g$，它们实际上是同一个映射。

2.1.7 例 $n\geq1$，A^n 到 A 的映射 f 称为 A 上 n 元函数，也称为 A 上 n 元运算。如 $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{R}$ 上的加法和乘法分别是 $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{R}$ 上的二元运算。又如

$f: \mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ $f(x) = -x$

是 $\mathbf{Z}$ 上的一元运算，称为 $\mathbf{Z}$ 上的负运算。

2.1.8 例 $\mathbf{T}$ = {真，假}。$\mathbf{T}$ 上 n 元函数也称为 n 元真值函项。如一元真值函项：

$f: \mathbf{T}\to\mathbf{T}$ f(真) = 假，f(假) = 真。

和二元真值函项：

$g: \mathbf{T}^2\to\mathbf{T}$ g(真,真) = 真，g(真,假) = 假，

g(假,真) = 假，g(假,假) = 假；

$h: \mathbf{T}^2\to\mathbf{T}$ g(真,真) = 假，g(真,假) = 真，

g(假,真) = 真，g(假,假) = 真。

f 对应于真值联结词“ 否定 ”，g 对应于真值联结词“ 合取 ”，h 对应于真值联结词“ 析舍 ”。这些映射的性质说明了相应的真值联结词的性质。如

任给 $x\in\mathbf{T}$，都有 $f(x) = h(x, x)$

的逻辑意义就是：一个命题自身和自身的析舍就是这个命题的否定。也说明了“ 否定 ”可以由“ 析舍 ”来定义。

构成 A 到 B 的映射需要两个条件，一是对 A 中每个元素，都有 B 中的元素与之对应，二是这个对应是惟一的。不满足这两个条件就不能构成映射。

2.1.9 例 令 A = 人类。任给 $x\in A$，将 x 对应到 x 的子女，因

为并非每个人都有子女，所以这个对应不能构成 A 到 A 的映射。任给 $x\in A$，将 x 对应到 x 的父亲，因为每个人都有惟一的父亲，所以这个对应能够构成 A 到 A 的映射

$f：A\to A\quad f(x) = x$ 的父亲。

2.1.10 例 任给 $x\in\mathbf{R}$，将 x 对应到比 x 小的整数，因为比 x 小的整数不止一个，所以这个对应不惟一，不能构成 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的映射。任给 $x\in\mathbf{R}$，将 x 对应到比 x 小的最大整数，这个对应不但存在而且惟一，所以存在 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{Z}$ 映射

$f：\mathbf{R}\to\mathbf{Z}\quad f(x) =$ 比 x 小的最大整数。

从已知的映射可以构造新映射。

2.1.11 例 已知映射 $f：A\to B$，构造 A 到 $\mathrm{ran}(f)$的映射

$g：A\to\mathrm{ran}(f)\quad g(x) = f(x)$。

首先有 $\mathrm{dom}(f) = A = \mathrm{dom}(g)$，又任给 $x\in A$，都有 $f(x) = g(x)$，所以 $f = g$。

如果将 f 看成 A 的元素到 B 的元素的对应，则 g 就是同样的对应，只不过将它看做 A 的元素到 $\mathrm{ran}(f)$的元素的对应(图 2.1.3)。

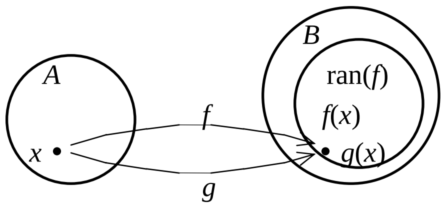


图 2.1.3

2.1.12 例 $f：A\to C$，任给 $B\subseteq A$，可以构造 B 到 C 的映射

$g：B\to C\quad g(x) = f(x)$。

g 称为 f 在 B 上的限制，记为 $f|_B$。如果将 f 看做 A 的元素到 C 的元素的对应，则只在 B 上考虑这种对应就是 g (图 2.1.4)。任给 B 到 C 的映射 h，$h = f|_B$ 的条件是：

任给 $x\in B$，都有 $h(x) = f(x)$。

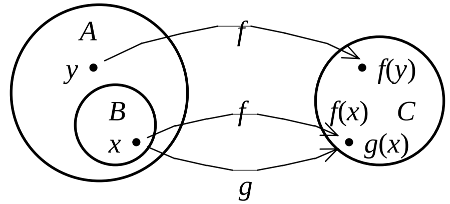


图 2.1.4

2.1.13 例 $A_1\cap A_2 = \varnothing$，$f：A_1\to B_1$ 和 $g：A_2\to B_2$ 是两个映射。将 A_1 到 B_1 的对应 f 和 A_2 到 B_2 的对应 g 放在一起，就是 $A_1\cup A_2$ 到 $B_1\cup B_2$ 的对应。

如果 $A_1\cap A_2 \neq \varnothing$，则 $A_1\cap A_2$ 中的元素 x 既要对应 $f(x)$，又要对应到 $g(x)$，可能使得 x 不能对应到惟一的元素。

条件 $A_1\cap A_2 = \varnothing$保证了 $A_1\cup A_2$ 中的任何 x 不能同时对应到 $f(x)$ 和 $g(x)$，从而保证了 x 对应到 $B_1\cup B_2$ 中惟一的元素，所以可以构成 $A_1\cup A_2$ 到 $B_1\cup B_2$ 的映射 h 如下(图 2.1.5)：

$$h：A_1\cup A_2\to B_1\cup B_2\quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } x\in A_1 \\ g(x) & \text{如果 } x\in A_2\text{。} \end{cases}$$

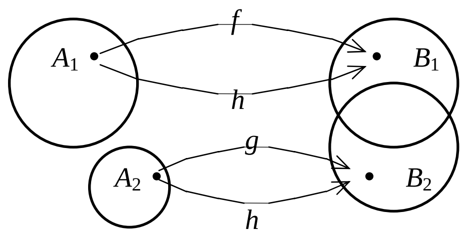


图 2.1.5

显然，h 满足：

任给 $x\in A_1$，都有 $h(x) = f(x)$，

任给 $x\in A_2$，都有 $h(x) = g(x)$。

2.1.14 例 $f：A_1\to B_1$ 和 $g：A_2\to B_2$ 是两个映射，可以构造 $A_1\times A_2$ 到 $B_1\times B_2$ 的映射

$$h：A_1\times A_2\to B_1\times B_2 \quad h(<x, y>) = <f(x), g(y)>。$$

2.1.15 例 $f：A\to B$ 和 $g：A\to C$ 是两个映射，可以构造 A 到 $B\times C$ 的映射

$$h：A\to B\times C \quad h(x) = <f(x), g(x)>，$$

记 $h = f{*}g$。任给 A 到 $B\times C$ 的映射 h，$h = f{*}g$ 的条件是：

任给 $x\in A$，都有 $h(x) = <f(x), g(x)>$。

设 f_1 和 f_2 是 A 到 B 映射，g_1 和 g_2 是 A 到 C 的映射，则任给 $x\in A$，都有

$$(f_1{*}g_1)(x) = (f_2{*}g_2)(x)$$

当且仅当 $<f_1(x), g_1(x)> = <f_2(x), g_2(x)>$

当且仅当 $f_1(x) = f_2(x)$且 $g_1(x) = g_2(x)$。

因此 $f_1{*}g_1 = f_2{*}g_2$ 当且仅当 $f_1 = f_2$ 且 $g_1 = g_2$。

以下是关于集合自身的一些重要映射。

2.1.16 例 将 A 的每一个元素映成自身的映射称为 A 上恒等映射，记为 i_A，即

$$\mathrm{i}_A：A\to A \quad \mathrm{i}_A(x) = x。$$

2.1.17 例 $b\in B$，将 A 的每一个元素都映成 b 的映射称为 A 到 B 的以 b 为值的常映射，记为 b，即

$$\mathsf{b}：A\to B \quad \mathsf{b}(x) = b。$$

b 是 b 的 Arial 体，以后都采用这样的办法，当我们用某个字母表示一个元素时，以这个元素为值的常映射就用相应的 Arial 体字母表示，如以 a, b, c 为值的常映射就分别用 $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$ 来表示。

显然，如果 $b \neq c$ 则 $\mathsf{b} \neq \mathsf{c}$。

当 $A = \{a\}$且 $B \neq \varnothing$时，任给 A 到 B 的映射 f，令 $b = f(a)$，则 $f = \mathsf{b}$。所以当 $A = \{a\}$且 $B \neq \varnothing$时，A 到 B 的映射都是常映射。

当 $B = \{b\}$且 $A \neq \varnothing$时，A 到 B 的映射只有一个，就是常映射 b。

2.1.18 例 $B\subseteq A$，任给 $x\in A$，如果 $x\in B$ 就让 x 对应到 1，如果 $x\in A\setminus B$ 就让 x 对应到 0，这样就构成了 A 到$\{0, 1\}$的映射

$$\mu_B：A\to\{0, 1\} \quad \mu_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x\in B \\ 0 & \text{如果 } x\in A\setminus B。\end{cases}$$

对于(A 中的)元素 x 来说，x 是否属于 B 由$\mu_B(x)$是否等于 1 来表示，所以映射μ_B称为 B (在 A 中)的特征函数(图 2.1.6)。

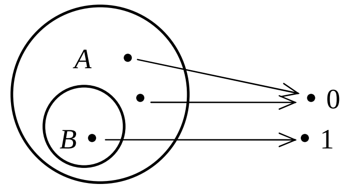


图 2.1.6

2.1.19 例 Γ是集合族，$\varnothing\notin\Gamma$，h 是Γ到$\bigcup\Gamma$的映射。如果 h 满足：

任给 $X\in\Gamma$，都有 $h(X)\in X$，

则称 h 是Γ上的选择函数。

它的意义是：同时对Γ中的每个集合 X，指定 X 自身的一个元素，这个元素就是 $h(X)$。

数学归纳法的等价命题最小数原理是指：

N 的任何非空子集都有最小数。

用最小数原理可以构造映射

$$h：\mathsf{P}(\mathbf{N})\setminus\{\varnothing\}\to\mathbf{N} \quad h(X) = X \text{ 的最小数，}$$

因为 $h(X)\in X$，$\bigcup(\mathsf{P}(\mathbf{N})\setminus\{\varnothing\}) = \mathbf{N}$，所以 h 是 $\mathsf{P}(\mathbf{N})\setminus\{\varnothing\}$上的选择函数。

习题 2.1

2.1.1　判断以下对应是否构成 A 到 B 的映射。能够构成映射的写出其值域，不能构成映射的说明理由。

(1) A = 小学生，B = 学校。将每个小学生对应到他所在的学校。

(2) A = 人类，B = 国家。将每个人对应到他曾到过的国家。

(3) $A = B = \mathbf{R}$。将每个 $x\in\mathbf{R}$ 对应到 $\sqrt{x}$ 。

(4) $A = \mathbf{N}$，$B = \mathbf{R}$。将每个 $x\in\mathbf{N}$ 对应到 $\sqrt{x}$ 。

2.1.2　B 是 A 的真子集。C 中至少有两个元素，g 是 B 到 C 的映射。证明：存在 A 到 C 映射 f_1 和 f_2，使得

$$f_1 \neq f_2 \text{ 且 } f_1\,|_B = f_2\,|_B = g。$$

2.1.3　$f：A\to C$ 和 $g：B\to C$ 是两个映射，其中 $A\cap B = \varnothing$。按例 2.1.13 构造映射

$$h：A\cup B\to C \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } x\in A \\ g(x) & \text{如果 } x\in B。\end{cases}$$

证明：$h\,|_A = f$ 且 $h\,|_B = g$。

2.1.4　$h：A\to B\times C$，构造映射 f 和 g 如下：

$f：A\to B \quad f(x) = y$ (如果 $h(x) = \langle y, z\rangle$)，

$g：A\to C \quad g(x) = z$ (如果 $h(x) = \langle y, z\rangle$)。

证明：$h = f*g$ ($*$的定义见例 2.1.15)。

2.1.5　$f：A\to\{0, 1\}$，令 $B = \{x \mid x\in A \text{ 且 } f(x) = 1\}$，$\mu_B$是 B 的特征函数。证明：$\mu_B = f$。

2.1.6　构造集合族$\Gamma = \{(x, x+1] \mid x\in\mathbf{Z}\}$上的选择函数。

2.2　单射、满射和双射　逆映射

A 到 B 的映射，只要求 A 中每个元素的象是惟一的，并不要求 A 中不同的元素的象不一样，只要求 A 中每个元素都有象，并不要求 B 中每个元素都是象。

然而对于 A 到 B 的映射来说，A 中不同的元素有不同的象和 B 中每个元素都是象是两种重要性质。相对于这两种性质，就有两类重要的映射。

2.2.1 定义　单射　f 是 A 到 B 的映射，如果 A 中不同的元素有不同的象，则称 f 是单射(图 2.2.1)。f 是单射的条件是：

任给 $x, y\in A$，如果 $x \neq y$ 则 $f(x) \neq f(y)$。

因为不同的元素有不同的象，所以如果两个元素有相同的象，则它们就是同一个元素。因此 f 是单射的另一条件是：

任给 $x, y\in A$，如果 $f(x) = f(y)$则 $x = y$。

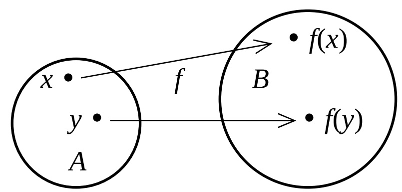


图 2.2.1

如果 f 不是单射，则 A 中有两个不同的元素，它们的象是一样的(图 2.2.2)。所以 f 不是单射的条件是：

存在 $x, y\in A$，使得 $x \neq y$ 且 $f(x) = f(y)$。

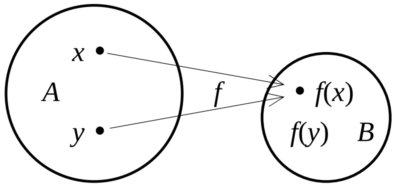


图 2.2.2

任给集合 B，因为$\varnothing$中没有元素，所以成立

任给 $x, y\in\varnothing$，如果 $x \neq y$ 则 $f(x) \neq f(y)$。

因此$\varnothing$到 B 的空映射θ_B是单射。

2.2.2 定义 满射 f 是 A 到 B 的映射，如果 B 中每个元素都是 A 中元素的象，则称 f 是满射。f 是满射就是说 $\mathrm{ran}(f) = B$，它的条件是：

任给 $y\in B$，存在 $x\in A$，使得 $f(x) = y$

如果 f 不是满射，则 B 中有元素不是象。所以 f 不是满射的条件是：

存在 $y\in B$，使得任给 $x\in A$，都有 $f(x) \neq y$

任给非空集合 B，取 $b\in B$，则因为$\varnothing$中没有元素，所以

任给 $x\in\varnothing$，都有 $f(x) \neq b$，

因此$\varnothing$到 B 的空映射θ_B不是满射。

对于$\varnothing$来说，显然有

任给 $y\in\varnothing$，存在 $x\in\varnothing$，使得 $f(x) = y$，

因此$\varnothing$到$\varnothing$的空映射$\theta_\varnothing$是满射。

以下是单射和满射的一些例子。

2.2.3 例 对于例 2.1.4 中的一元实函数

$f：\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ $f(x) = x^2$

来说，因为 $f(1) = f(-1) = 1$，所以 f 不是单射，又因为任给 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)\geq 0$，所以 f 也不是满射。

2.2.4 例 f 和 $f|_B$ 的关系($f|_B$ 的定义见例 2.1.12)。

如果 f 是单射，则 A 中不同的元素有不同的象，当然 B 中不同的元素也有不同的象，所以 $f|_B$ 是单射。

如果 $f|_B$ 是满射，则 C 中每个元素都是 B 中某个元素的象，当然也是 A 中某个元素的象，所以 f 是满射。

2.2.5 例 $f：A_1\to B_1$ 和 $g：A_2\to B_2$ 是两个映射，其中 $A_1\cap A_2 = \varnothing$。由 2.1.13 构造 $A_1\cup A_1$ 到 $B_1\cup B_1$ 的映射

$$h：A_1\cup A_2\to B_1\cup B_2 \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } x\in A_1 \\ g(x) & \text{如果 } x\in A_2。\end{cases}$$

如果 f, g 都是满射，则 h 是满射，理由如下：

任给 $y\in B_1\cup B_2$，当 $y\in B_1$ 时，由 f 是满射得

存在 $x\in A_1$，使得 $f(x) = y$，

当 $y\in B_2$ 时，由 g 是满射得

存在 $x\in A_2$，使得 $g(x) = y$。

所以在两种情况下都有：

存在 $x\in A_1\cup A_2$，使得 $h(x) = y$。

因此 h 是满射。

2.2.6 例 $f：A_1\to B_1$ 和 $g：A_2\to B_2$ 是两个映射，构造 $A_1\times A_2$ 到 $B_1\times B_2$ 的映射

$h：A_1\times A_2\to B_1\times B_2：h(<x, y>) = <f(x), g(y)>$，

如果 f 和 g 都是单射，则 h 是单射，如果 f, g 都是满射，则 h 是满射，理由如下：

任给$<x_1, y_1>, <x_2, y_2>\in A_1\times A_2$，如果 $h(<x_1, y_1>) = h(<x_2, y_2>)$，则

$<f(x_1), g(y_1)> = <f(x_2), g(y_2)>$，

由有序对相等的定义得

$f(x_1) = f(x_2)$且 $g(y_1) = g(y_2)$，

由 $f(x_1) = f(x_2)$和 f 是单射得

$x_1 = x_2$，

由 $g(y_1) = g(y_2)$和 g 是单射得

$$y_1 = y_2,$$

所以$<x_1, y_2> = <x_2, y_2>$。

任给$<x, y>\in B_1\times B_2$，都有

$$x\in B_1 \text{ 且 } y\in B_2,$$

由 f 是满射得

存在 $x_0\in A_1$，使得 $f(x_0) = x$，

由 g 是满射得

存在 $y_0\in A_1$，使得 $f(y_0) = y$，

所以

存在$<x_0, y_0>\in A_1\times A_2$，

使得 $h(<x_0, y_0>) = <f(x_0), g(y_0)> = <x, y>$。

2.2.7 例　Γ是以 I 为指标集的集合族，即$\Gamma = \{A_i \mid i\in I\}$，令

$$f：I\to\Gamma \quad f(i) = A_i$$

则 f 是满射。如果Γ满足

任给 $i, j\in I$，只要 $i \neq j$，就有 $A_i \neq A_j$，

则上述的 f 还是单射。特别地，

$$g：\mathbf{N}\to\Gamma(\mathbf{N}) \quad g(n) = \mathbf{N}_n$$

和

$$h：\mathbf{R}\to\Gamma(\mathbf{Q}) \quad h(a) = \mathbf{Q}_a$$

都既是满射又是单射(见例 1.1.4 和习题 1.2.2)。

既是单射又是满射的映射是另一类重要的映射。

2.2.8 定义　双射　f 是 A 到 B 的映射，如果 f 既是单射又是满射，则称 f 是双射。

满射保证了对于 A 中每个元素都存在 B 中某个元素与之对应，单射保证了 A 中不同的元素对应到不同的元素，所以双射就是 A 的元素和 B 的元素一个一个对应。

因此，如果存在 A 到 B 的双射，则称 A 和 B 的元素间有一一对应。

2.2.9 例　$f：(0, 1) \to\mathbf{R}$　$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}$，任给 $a\in\mathbf{R}$，方程

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} = a,$$

在开区间$(0, 1)$中有惟一的解，所以 f 是双射。

2.2.10 例　f 是 $\mathbf{Q}^+$到 $\mathbf{Z}^+$的双射，可以将它扩充为 $\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的双射如下：

$$g：\mathbf{Q}\to\mathbf{Z} \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } x>0 \\ -f(x) & \text{如果 } x<0 \\ 0 & \text{如果 } x = 0, \end{cases}$$

可以证明 g 也是双射。

f 是 A 到 B 的双射。任给 $x\in B$，由 f 是满射得

存在 $y\in A$，使得 $f(y) = x$，

由 f 是单射得这样的 y 是惟一的，所以

任给 $x\in B$，存在惟一的 $y\in A$，使得 $f(y) = x$。

因此将 B 中的元素 x 对应到 A 中满足 $f(y) = x$ 的惟一的 y 可以构成 B 到 A 的映射。

2.2.11 定义　逆映射　f 是 A 到 B 的双射，将 B 中元素 x 对应到 A 中元素 y(满足 $f(y) = x$)的映射称为 f 的逆映射，记为 f^{-1}。即

$$f^{-1}：B\to A \quad f^{-1}(x) = y(\text{如果 } f(y) = x)。$$

逆映射的直观意义是：如果将双射 f 看做 A 到 B 的对应，则将这个对应反过来就是 B 到 A 的对应 f^{-1} (图 2.2.3)。

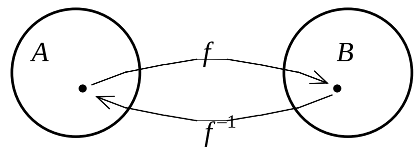


图 2.2.3

2.2.12 例　例 2.1.18 中的一元真值函项

$$f：\mathbf{T}\to\mathbf{T}\quad f(\text{真}) = \text{假}，f(\text{假}) = \text{真}。$$

是双射，它的逆映射是它自身，即 $f^{-1} = f$。

例 2.1.4 中的一元实函数

$$g：\mathbf{R}\to\mathbf{R}\quad g(x) = 3x$$

是双射，它的逆映射是

$$g^{-1}：\mathbf{R}\to\mathbf{R}\quad g^{-1}(x) = \frac{1}{3}x。$$

根据逆映射的定义可知：任给 $x\in B$，任给 $y\in A$，都有

$$f^{-1}(x) = y \text{ 当且仅当 } f(y) = x。$$

由这点可以证明逆映射的以下性质。

2.2.13 定理　f 是 A 到 B 的双射，f^{-1} 是 f 的逆映射。

(1) 任给 $x\in B$，都有 $f(f^{-1}(x)) = x$。

(2) 任给 $y\in A$，都有 $f^{-1}(f(y)) = y$。

(3) f^{-1} 是双射，并且$(f^{-1})^{-1} = f$。

证　(1) 任给 $x\in B$，令 $y = f^{-1}(x)$，则 $y\in A$，所以

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(x) \text{当且仅当 } f(f^{-1}(x)) = x，$$

因此 $f(f^{-1}(x)) = x$ (图 2.2.4)。

(2) 任给 $y\in A$，令 $x = f(y)$，则 $x\in B$，所以

$$f^{-1}(f(y)) = y \text{ 当且仅当 } f(y) = f(y)，$$

因此 $f^{-1}(f(y)) = y$ (图 2.2.4)。

(3) 任给 $x, y\in B$，如果 $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$，则

$$x = f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(y)) = y，$$

所以 f^{-1} 是单射。

任给 $y\in A$，存在 $f(y)\in B$，使得 $f^{-1}(f(x)) = y$，所以 f^{-1} 是满射。

f^{-1} 既是单射又是满射，所以 f^{-1} 是双射，因此 f^{-1} 有逆映射

$$(f^{-1})^{-1}：A\to B。$$

任给 $x\in A$，对于 f^{-1} 来说，由(1)得

$$f^{-1}((f^{-1})^{-1}(x)) = x，$$

对于 f 来说，由(2)得

$$f^{-1}(f(x)) = x，$$

所以

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}((f^{-1})^{-1}(x))，$$

又由 f^{-1} 是单射得

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)。$$

这就证明了任给 $x\in A$，都有

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)，$$

因此$(f^{-1})^{-1} = f$。■

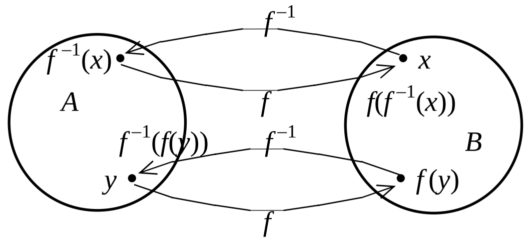


图 2.2.4

习题 2.2

2.2.1　$f：\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}\quad f(x) = x+1$，$g：\mathbf{N}\to\mathbf{N}\quad g(x) = x+1$。

(1) 证明 f 是双射并写出逆映射。

(2) 证明 g 是单射但不是满射。

2.2.2　$A_1\cap A_2 = \varnothing$，$f$ 和 g 分别是 A_1 到 B_1 和 A_2 到 B_2 的单射，按例 2.1.13 构造

$$h：A_1\cup A_2\to B_1\cup B_2\quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } x\in A_1 \\ g(x) & \text{如果 } x\in A_2。\end{cases}$$

(1) 证明：如果 $B_1 \cap B_2 = \varnothing$，则 h 是单射。

(2) 举例说明当 $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$时，$h$ 不一定是单射。

2.2.3　$f：A_1 \to B_1$，$g：A_2 \to B_2$，按例 2.1.14 构造

$$h：A_1 \times A_2 \to B_1 \times B_2 \quad h(<x, y>) = <f(x), g(y)>。$$

证明：

(1) 如果 h 是单射，则 f 和 g 都是单射。

(2) 如果 h 是满射，则 f 和 g 都是满射。

2.2.4　f 是 $\mathbf{Q}^+$到 $\mathbf{Z}^+$的双射，构造 $\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的双射如下：

$$g：\mathbf{Q} \to \mathbf{Z} \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } x>0 \\ -f(x) & \text{如果 } x<0 \\ 0 & \text{如果 } x = 0, \end{cases}$$

证明：g 是双射。

2.2.5　$f：A \times B \to B \times A \quad f(<x, y>) = <y, x>$，证明 f 是双射。

2.2.6　构造一个双射 $f：A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$。

2.2.7　构造 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的配对函数 f 如下：

$$f：\mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N} \quad f(x, y) = \tfrac{1}{2}(x+y)(x+y+1)+x,$$

任给 $x \in \mathbf{N}$，令 $\mathrm{n}(x) = \{\mathrm{n} \mid \mathrm{n}^2+3\mathrm{n} \geq 2x\}$的最小数。

证明：

(1) 如果 $x_1+y_1 \neq x_2+y_2$，则 $f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$。

(2) 如果 $x_1+y_1 = x_2+y_2$ 且 $x_1 \neq x_2$，则 $f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$。

(3) 任给 $x \in \mathbf{N}$，$x-\tfrac{1}{2}(\mathrm{n}(x)^2+\mathrm{n}(x))$, $\tfrac{1}{2}(\mathrm{n}(x)^2+3\mathrm{n}(x))-x \in \mathbf{N}$。

(4) 任给 $x \in \mathbf{N}$，$f(x-\tfrac{1}{2}(\mathrm{n}(x)^2+\mathrm{n}(x)), \tfrac{1}{2}(\mathrm{n}(x)^2+3\mathrm{n}(x))-x) = x$。

(5) f 是双射。

2.3　映射的复合

f 是 A 到 B 的映射，g 是 B 到 C 的映射。对于 A 中的每个元素 x，f 将 x 映成 $f(x) \in B$，g 又将 $f(x)$映成 $g(f(x)) \in C$，又因为 $g(f(x))$是惟一的，所以将 A 中元素 x 对应到 C 中元素 $g(f(x))$能够构成 A 到 C 的映射。

2.3.1 定义　映射的复合　f 是 A 到 B 的映射，g 是 B 到 C 的映射。将 A 中元素 x 对应到 C 中元素 $g(f(x))$的映射称为 f 和 g 的复合，记为 $g \circ f$，即

$$g \circ f：A \to C \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ (图 2.3.1)。}$$

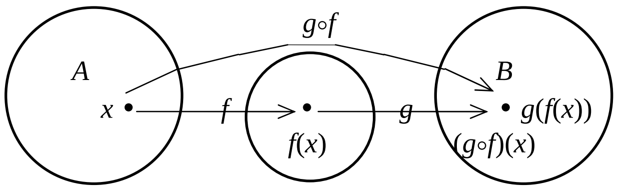


图 2.3.1

先来看一些例子。

2.3.2 例　取例 2.1.5 中的映射 $f：\mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \quad f(x) = x+1$，则

$$f \circ f：\mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \quad (f \circ f)(x) = x+2。$$

取例 2.1.8 中的一元真值函项 f，二元真值函项 g 和 h，则

$$f \circ g = h，f \circ h = g，$$

这两个复合的逻辑意义是：“析舍”可以由“合取”和“否定”来定义，“合取”可以由“析舍”和“否定”来定义。

2.3.3 例　f 和 g 分别是 A 到 B 和 B 到 A 的映射，则 $g \circ f$ 是 A 到 A 的映射，$f \circ g$ 是 B 到 B 的映射。

如果 $A \neq B$，当然 $g \circ f \neq f \circ g$。就是 $A = B$，一般也没有 $g \circ f = f \circ g$。如对于例 2.1.4 中的映射

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad f(x) = x^2 \text{ 和 } g: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad g(x) = 3x,$$

就有

$$(f \circ g)(1) = (3 \cdot 1)^2 = 3^2 = 9 \neq 3 = 3 \cdot 1^2 = (g \circ f)(1)。$$

所以 $g \circ f \neq f \circ g$。

现在讨论映射复合的性质。

2.3.4 定理 f 和 g 分别是 A 到 B 和 B 到 C 的映射，i_A 和 i_B 分别是 A 和 B 上的恒等映射。

(1) $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f)$，$\mathrm{ran}(g \circ f) \subseteq \mathrm{ran}(g)$。

(2) $f \circ \mathrm{i}_A = f$，$\mathrm{i}_B \circ f = f$。

(3) 如果 f 是双射，则 $f^{-1} \circ f = \mathrm{i}_A$，$f \circ f^{-1} = \mathrm{i}_B$。

(4) 如果 g 和 f 都是单射，则 $g \circ f$ 是单射。

(5) 如果 g 和 f 都是满射，则 $g \circ f$ 是满射。

证 (1)(2)显然。

(3) 由定理 2.2.13(1)(2)直接可得。

(4) 任给 $x, y \in A$，如果$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$，则 $g(f(x)) = g(f(y))$。由 g 是单射得

$$f(x) = f(y),$$

再由 f 是单射得

$$x = y。$$

因此 $g \circ f$ 是单射。

(5) 任给 $z \in C$，由 g 是满射得

存在 $y \in B$，使得 $g(y) = z$，

对于这个 y，由 f 是满射得

存在 $x \in A$，使得 $f(x) = y$，

所以

存在 $x \in A$，使得$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$。

因此 $g \circ f$ 是满射。■

设 $f: A \to B$，$g: B \to C$，$h: C \to D$ 是三个映射。

任给 $x \in A$，f 将 x 映成 $f(x) \in B$，再由 g 将 $f(x)$映成 $g(f(x)) \in C$，最后由 h 将 $g(f(x))$映成 $h(g(f(x))) \in D$，这样就得到了 A 到 D 的一个映射。

这个映射有两种看法，一是看做将 A 中元素先由 $g \circ f$ 映到 C，再由 h 映到 D，一是看做将 A 中元素先由 f 映到 B，再由 $h \circ g$ 映到 D。按前一种看法，这个映射是 $h \circ (g \circ f)$，按后一种看法，这个映射是$(h \circ g) \circ f$。所以应该有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) f$ (图 2.3.2)。

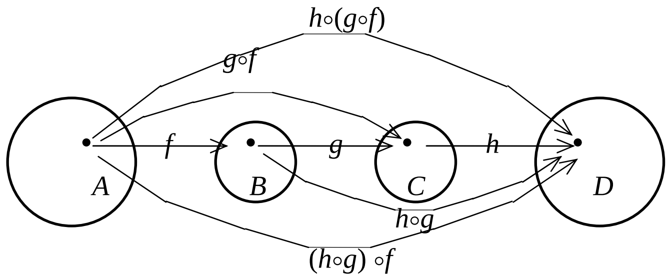


图 2.3.2

2.3.5 定理 映射复合的结合律 任给三个映射

$$f: A \to B,\ g: B \to C,\ h: C \to D,$$

都有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$。

证 任给 $x \in A$，都有

$$h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f)(x) = h(g(f(x)))$$

和

$$(h \circ g) \circ f = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))),$$

所以

$$h \circ (g \circ f)(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)。$$

因此 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$。■

由定理 2.3.5，当三个或更多的映射复合时，可以省略括号。

f 和 g 分别是 A 到 B 和 B 到 A 的映射，定理 2.3.4(3)是说，当 g 是 f 的逆映射时，g 和 f 的复合是 A 上恒等映射，f 和 g 的复合是 B 上恒等映射。

反之也成立，即，如果 g 和 f 的复合是 A 上恒等映射，f 和 g 的复合是 B 上恒等映射，则 g 是 f 的逆映射。

2.3.6 定理 f 是 A 到 B 的映射，g 是 B 到 A 的映射，如果 $g\circ f = \mathrm{i}_A$ 且 $f\circ g = \mathrm{i}_B$，则 $g = f^{-1}$。

证 任给 $x, y\in A$，如果 $f(x) = f(y)$，则 $g(f(x)) = g(f(y))$，所以

$$x = \mathrm{i}_A(x) = (g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g\circ f)(y) = \mathrm{i}_A(y) = y。$$

因此 f 是单射。

任给 $y\in B$，都有 $g(y)\in A$，令 $x = g(y)$，则存在 $x\in A$，使得

$$f(x) = f(g(y)) = (f\circ g)(y) = \mathrm{i}_B(y) = y。$$

因此 f 是满射。

由 f 是双射得 f 有逆映射 f^{-1}。

任给 $y\in B$，都有

$$f(g(y)) = (f\circ g)(y) = \mathrm{i}_B(y) = (f\circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)),$$

由 f 是单射得

$$g(y) = f^{-1}(y)。$$

因此 $g = f^{-1}$。■

由定理 2.3.6 可证映射的复合和逆映射的以下关系。

2.3.7 定理 f 和 g 分别是 A 到 B 和 B 到 C 的映射，如果 f 和 g 都是双射，则$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$。

证 首先有 $g\circ f$ 是 A 到 C 的映射，$f^{-1}\circ g^{-1}$ 是 C 到 A 的映射，由定理 2.3.6，只需证$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) = \mathrm{i}_A$ 和$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}) = \mathrm{i}_C$ 。

$$\begin{aligned}(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) &= ((f^{-1}\circ g^{-1})\circ g)\circ f\\ &= (f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g))\circ f\\ &= (f^{-1}\circ \mathrm{i}_B)\circ f = f^{-1}\circ f\\ &= \mathrm{i}_A,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}) &= ((g\circ f)\circ f^{-1})\circ g^{-1}\\ &= (g\circ(f\circ f^{-1}))\circ g^{-1}\\ &= (g\circ \mathrm{i}_B)\circ g^{-1} = g\circ g^{-1}\\ &= \mathrm{i}_C。\ ■\end{aligned}$$

习题 2.3

2.3.1 求 $g\circ f$ 和 $f\circ g$。

(1) $f：\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ $f(x, y) = xy$，

$g：\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ $g(x) = \langle x, x+1\rangle$。

(2) $f：\mathbf{N}^2\to\mathbf{N}$ $f(x, y) = x$，

$g：\mathbf{N}\to\mathbf{N}^2$ $g(x) = \langle x, 0\rangle$。

(3) $f：A\times(B\times C) \to A\times(B\times C)$ $f(\langle x, \langle y, z\rangle\rangle) = \langle y, \langle x, z\rangle\rangle$，

$g：A\times(B\times C) \to A\times(B\times C)$ $g(\langle x, \langle y, z\rangle\rangle) = \langle x, \langle z, y\rangle\rangle$。

2.3.2 写出定理 2.3.4(1)(2)(3)的详细证明。

2.3.3 f 是 A 到 B 的映射，g 是 B 到 C 的映射。证明：如果 $g\circ f$ 是双射，则 g 是满射且 f 是单射。

2.3.4 定义性质，φ_1：双射，φ_2：单射非满射，φ_3：满射非单射，φ_4：非单射非满射。f 是 A 到 B 的映射，g 是 B 到 C 的映射。

讨论当 f 有性质φ_{i}，g 有性质φ_{j}时，$g\circ f$ 有和没有哪种性质。例如，当 f 和 g 都有性质φ_1时，$g\circ f$ 有性质φ_1而没有性质φ_2, φ_3和φ_4。

2.3.5 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$和$\varphi_4$同习题 2.3.4，$f$ 是 A 到 B 的映射，g 是 B 到 C 的映射。

讨论当 $g\circ f$ 有性质φ_{i}时，f 和 g 有和没有哪种性质。

2.4　子集的象和逆象

f 是 A 到 B 的映射，$X \subseteq A$。每个 $x \in X$ 在 B 中有象 $f(x)$，这些象的全体组成 B 的一个子集。

2.4.1 定义　子集的象　f 是 A 到 B 的映射，$X \subseteq A$。X 中所有元素的象的集合称为 X 在 f 下的象，记为 $f[X]$。即

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in X\}。$$

用属于关系表示就是：

$$y \in f[X] \text{当且仅当存在 } x \in X\text{，使得 } y = f(x)。$$

有时也称 f 将 X 映成 $f[X]$。

显然有 $f[\varnothing] = \varnothing$，$f[A] = \mathrm{ran}(f)$。

又当 $X = \{a_1, \cdots, a_n\}$时，有 $f[X] = \{f(a_1), \cdots, f(a_n)\}$，特别地有 $f(\{a\}) = \{f(a)\}$。

先来看子集的象的一些例子。

2.4.2 例　$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$　$f(x) = x^2$，则

$$f[(0,2)] = (0,4)，f[\mathbf{R}^+] = \mathbf{R}^+。$$

$g: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$　$g(x) = x+1$，令

$$A = \{2x \mid x \in \mathbf{N}\}，B = \{2x+1 \mid x \in \mathbf{N}\}，$$

则 $g[A] = B$，$g[B] = A \setminus \{0\}$。

现在讨论子集的象的性质。

2.4.3 定理　f 是 A 到 B 的映射，$X, Y \subseteq A$。

(1) 如果 $X \subseteq Y$，则 $f[X] \subseteq f[Y]$。

(2) $f[X \cup Y] = f[X] \cup f[Y]$。

(3) $f[X] \cap f[Y] = f[X \cap Y] \cup (f[X \setminus Y] \cap f[Y \setminus X])$，因此 $f[X \cap Y] \subseteq f[X] \cap f[Y]$。

(4) $f[X] \setminus f[Y] = f[X \setminus Y] \setminus f[Y]$，因此 $f[X] \setminus f[Y] \subseteq f[X \setminus Y]$。

证　(1) 任给 y，如果 $y \in f[X]$，则

存在 $x \in X$，使得 $f(x) = y$，

由 $X \subseteq Y$ 得 $x \in Y$，所以

$$f(x) \in f[Y]，$$

即

$$y \in f[Y]。$$

因此 $f[X] \subseteq f[Y]$。

(2) 任给 y，如果 $y \in f[X \cup Y]$，则

存在 $x \in X \cup Y$，使得 $f(x) = y$，

当 $x \in X$ 时有

$$f(x) \in f[X]，$$

当 $x \in Y$ 时有

$$f(x) \in f[Y]，$$

在两种情况下都有

$$f(x) \in f[X] \cup f[Y]。$$

因此 $f[X \cup Y] \subseteq f[X] \cup f[Y]$。

由 $X, Y \subseteq X \cup Y$ 和(1)得

$$f[X], f[Y] \subseteq f[X \cup Y]，$$

因此 $f[X] \cup f[Y] \subseteq f[X \cup Y]$。

(3) 由习题 1.4.3(2)得

$$X = (X \cap Y) \cup (X \setminus Y) \text{和 } Y = (X \cap Y) \cup (Y \setminus X)，$$

由 $X = (X \cap Y) \cup (X \setminus Y)$和(2)得

$$f[X] = f[(X \cap Y) \cup (X \setminus Y)] = f[X \cap Y] \cup f[X \setminus Y]$$

由 $Y = (X \cap Y) \cup (Y \setminus X)$和(2)得

$$f[Y] = f[(X \cap Y) \cup (Y \setminus X)] = f[X \cap Y] \cup f[Y \setminus X]$$

所以

$$\begin{aligned} f[X] \cap f[Y] &= (f[(X \cap Y) \cup (X \setminus Y)]) \cap (f[(X \cap Y) \cup (Y \setminus X)]) \\ &= f[X \cap Y] \cup (f[X \setminus Y] \cap f[Y \setminus X])。\end{aligned}$$

(4) 由 $f[X] = f[(X \setminus Y) \cup (X \cap Y)] = f[X \setminus Y] \cup f[X \cap Y]$，

$$f[X \cap Y] \subseteq f[Y]$$

和习题 1.4.3(1)。详细证明留给读者。■

2.4.4 定理 f 是 A 到 B 的单射，$X, Y \subseteq A$。

(1) 如果 $X \cap Y = \varnothing$，则 $f[X] \cap f[Y] = \varnothing$。

(2) $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$。

(3) $f[X \setminus Y] = f[X] \setminus f[Y]$。

证 (1) 反证法。设 $f[X] \cap f[Y] \neq \varnothing$，则存在 $z \in f[X] \cap f[Y]$，所以

$$z \in f[X] \text{且} z \in f[Y],$$

由 $z \in f[X]$得

$$\text{存在 } x \in X\text{，使得 } f(x) = z,$$

由 $z \in f[Y]$得

$$\text{存在 } y \in Y\text{，使得 } f(y) = z,$$

所以

$$f(x) = f(y),$$

由 f 是单射得 $x = y$，所以

$$x \in X \text{ 且 } x \in Y,$$

因此

$$\text{存在 } x\text{，使得 } x \in X \cap Y,$$

和 $X \cap Y = \varnothing$矛盾。

(2) 由$(X \setminus Y) \cap (Y \setminus X) = \varnothing$和(1)得

$$f[X \setminus Y] \cap f[Y \setminus X] = \varnothing,$$

由 $f[X \setminus Y] \cap f[Y \setminus X] = \varnothing$和定理 2.4.3(3)得 $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$。

(3) 由$(X \setminus Y) \cap Y = \varnothing$，习题 1.4.3(3)和定理 2.4.3(4)。详细证明留给读者。■

可以将子集的象的交和并的性质推广到集合族。

2.4.5 定理 f 是 A 到 B 的映射，任给 $i \in I$，都有 $A_i \subseteq A$。

(1) $f[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$。

(2) $f[\bigcap_{i \in I} A_i] \subseteq \bigcap_{i \in I} f[A_i]$，

(3) 如果 f 是单射，则$\bigcap_{i \in I} f[A_i] \subseteq f[\bigcap_{i \in I} A_i]$。

证 (1) 任给 $i \in I$，都有 $A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$，由定理 2.4.3(1)得

$$f[A_i] \subseteq f[\bigcup_{i \in I} A_i]。$$

因此$\bigcup_{i \in I} f[A_i] \subseteq f[\bigcup_{i \in I} A_i]$。

任给 y，如果 $y \in f[\bigcup_{i \in I} A_i]$，则

$$\text{存在 } x \in \bigcup_{i \in I} A_i\text{，使得 } f(x) = y,$$

对于这个 x，存在 $i \in I$，使得 $x \in A_i$，所以

$$f(x) \in f[A_i],$$

即

$$y \in f[A_i],$$

这就证明了

$$\text{存在 } i \in I\text{，使得 } y \in f[A_i],$$

由集合族的并的定义得

$$y \in \bigcup_{i \in I} f[A_i]。$$

因此 $f[\bigcup_{i \in I} A_i] \subseteq \bigcup_{i \in I} f[A_i]$。

(2) 任给 $i \in I$，都有$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_i$，由定理 2.4.3(1)得

$$f[\bigcap_{i \in I} A_i] \subseteq f[A_i]。$$

因此 $f[\bigcap_{i \in I} A_i] \subseteq \bigcap_{i \in I} f[A_i]$。

(3) 任给 $y \in \bigcap_{i \in I} f[A_i]$，任给 $i \in I$，都有 $y \in f[A_i]$，所以

$$\text{任给 } i \in I\text{，存在 } x_i \in A_i\text{，使得 } f(x_i) = y。$$

由 f 是单射得所有的 x_i 都相同，记为 x，所以

$$\text{任给 } i \in I\text{，都有 } x \in A_i,$$

由集合族的交的定义得 $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$，所以

$$f(x) \in f[\bigcap_{i \in I} A_i],$$

即

$$y \in f[\bigcap_{i \in I} A_i]。$$

因此$\bigcap_{i \in I} f[A_i] \subseteq f[\bigcap_{i \in I} A_i]$。■

利用子集的象，可以从 A 到 B 的映射构造 $\mathrm{P}(A)$到 $\mathrm{P}(B)$的映射，这两个映射的性质有密切的关系。

2.4.6 例 $f: A \to B$，构造 $\mathrm{P}(A)$到 $\mathrm{P}(B)$的映射

$$g: \mathrm{P}(A) \to \mathrm{P}(B) \quad g(X) = f[X]。$$

如果 f 是单射则 g 也是单射，理由如下：

任给 $X, Y\in \mathrm{P}(A)$，如果 $X\neq Y$，则

$X\setminus Y \neq \varnothing$或 $Y\setminus X\neq\varnothing$ (见习题 1.4.4(2))，

不妨设 $X\setminus Y\neq\varnothing$，则由 f 是单射得

$f[X]\setminus f[Y] = f[X\setminus Y] \neq \varnothing$，

所以

$f[X] \neq f[Y]$，

即 $g(X) \neq g(Y)$。

如果 f 是满射则 g 也是满射，理由如下：任给 $Y\in \mathrm{P}(B)$，取

$X = \{x \mid x\in A$ 且 $f(x)\in Y\}$

则

$X\in \mathrm{P}(A)$且 $f[X] \subseteq Y$，

又任给 $y\in Y$，由 f 是满射得

存在 $x\in A$，使得 $f(x) = y$，

由 X 的定义得

$x\in X$，

再由 $y = f(x)$和 $f(x)\in f[X]$得

$y\in f[X]$，

因此

$Y \subseteq f[X]$，

这证明了：存在 $X\in \mathrm{P}(A)$，使得 $g(X) = f[X] = Y$。

f 是 A 到 B 的映射，$Y \subseteq B$。A 中所有象在 Y 中的元素组成 A 的一个子集。

2.4.7 定义 子集的逆象 f 是 A 到 B 的映射，$Y \subseteq B$。A 中所有象在 Y 中的元素组成的集合称为 Y 在 f 下的逆象，记为 $f^{-1}[Y]$。即

$f^{-1}[Y] = \{x \mid x\in A$ 且 $f(x)\in Y\}$。

用属于关系表示就是：

$x\in f^{-1}[Y]$当且仅当 $f(x)\in Y$。

显然有 $f^{-1}[\varnothing] = \varnothing$，$f^{-1}[\mathrm{ran}(f)] = A$。

以下是子集的逆象的一些例子。

2.4.8 例 对于映射 $f：\mathbf{R}\to\mathbf{R}\quad f(x) = x^2$，有

$f^{-1}[(0,4)] = (-2, 2)$，$f^{-1}[\mathbf{R}^+] = \mathbf{R}\setminus\{0\}$。

对于映射 $g：\mathbf{N}\to\mathbf{N}\quad g(x) = x+1$，如果令

$A = \{2x \mid x\in\mathbf{N}\}$，$B = \{2x+1 \mid x\in\mathbf{N}\}$，

则有

$g^{-1}[A] = B$，$g^{-1}[B] = A$。

子集的逆象的性质要比子集的象的性质简单。

2.4.9 定理 f 是 A 到 B 的映射，$X, Y \subseteq B$。

(1) 如果 $X \subseteq Y$，则 $f^{-1}[X] \subseteq f^{-1}[Y]$。

(2) $f^{-1}[X\cup Y] = f^{-1}[X]\cup f^{-1}[Y]$。

(3) $f^{-1}[X\cap Y] = f^{-1}[X]\cap f^{-1}[Y]$。

(4) $f^{-1}[X\setminus Y] = f^{-1}[X]\setminus f^{-1}[Y]$。

证 (1) 任给 x，如果 $x\in f^{-1}[X]$，则 $f(x)\in X$，由 $X \subseteq Y$ 得

$f(x)\in Y$，

所以

$x\in f^{-1}[Y]$。

因此 $f^{-1}[X] \subseteq f^{-1}[Y]$。

(2) 任给 x，

$x\in f^{-1}[X\cup Y]$ 当且仅当 $f(x)\in X\cup Y$
当且仅当 $(f(x)\in X$ 或 $f(x)\in Y)$
当且仅当 $(x\in f^{-1}[X]$或 $x\in f^{-1}[Y])$
当且仅当 $x\in f^{-1}[X]\cup f^{-1}[Y]$。

(3)和(4)的证明类似(2)，留给读者。■

子集的逆象的交和并的性质也可以推广到集合族。

2.4.10 定理 f 是 A 到 B 的映射，任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有 $B_\mathrm{i} \subseteq B$。

(1) $f^{-1}[\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i}] = \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} f^{-1}[B_\mathrm{i}]$。

(2) $f^{-1}[\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i}] = \bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} f^{-1}[B_\mathrm{i}]$。

证　留给读者。■

子集的象和逆象有以下关系。

2.4.11 定理　f 是 A 到 B 的映射，$X \subseteq A$，$Y \subseteq B$。

(1) $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$。如果 f 是单射，则 $f^{-1}[f[X]] = X$。

(2) $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$。如果 f 是满射，则 $f[f^{-1}[Y]] = Y$。

证　(1) 证明 $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$。任给 x，如果 $x \in X$，则 $f(x) \in f[X]$，由 $f^{-1}[f[X]]$的定义和 $f(x) \in f[X]$得

$$x \in f^{-1}[f[X]]。$$

因此 $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$。

设 f 是单射，证明 $f^{-1}[f[X]] \subseteq X$。任给 x，如果 $x \in f^{-1}[f[X]]$，则 $f(x) \in f[X]$，由 $f[X]$的定义和 $f(x) \in f[X]$得

$$存在\ y \in X，使得\ f(y) = f(x)，$$

由 f 是单射得

$$x = y，$$

所以 $x \in X$。

(2) 证明 $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$。任给 y，如果 $y \in f[f^{-1}[Y]]$，则

$$存在\ x \in f^{-1}[Y]，使得\ f(x) = y，$$

由 $f^{-1}[Y]$的定义和 $x \in f^{-1}[Y]$得

$$f(x) \in Y，$$

所以 $y \in Y$。

设 f 是满射，证明 $Y \subseteq f[f^{-1}[Y]]$。任给 y，如果 $y \in Y$，则 $y \in B$，由 f 是满射得

$$存在\ x \in X，使得\ f(x) = y，$$

所以

$$f(x) \in Y，$$

由 $f^{-1}[Y]$的定义和 $f(x) \in Y$ 得

$$x \in f^{-1}[Y]，$$

再由 $f[f^{-1}[Y]]$的定义和 $x \in f^{-1}[Y]$得

$$f(x) \in f[f^{-1}[Y]]，$$

所以 $y \in f[f^{-1}[Y]]$。■

在映射的复合下，子集的象和逆象有以下性质。

2.4.12 定理　f 和 g 分别是 A 到 B 和 B 到 C 的映射。

(1) 任给 $X \subseteq A$，都有$(g \circ f)[X] = g[f[X]]$。

(2) 任给 $Y \subseteq C$，都有$(g \circ f)^{-1}[Y] = f^{-1}[g^{-1}[Y]]$。

证　(1) 任给 $z \in (g \circ f)[X]$，存在 $x \in X$，使得$(g \circ f)(x) = z$，所以

$$z = g(f(x))，$$

由 $x \in X$ 得

$$f(x) \in f[X]，$$

由 $f(x) \in f[X]$得

$$g(f(x)) \in g[f[X]]，$$

因此 $z \in g[f[X]]$。

任给 $z \in g[f[X]]$，存在 $y \in f[X]$，使得 $g(y) = z$，由 $y \in f[X]$得

$$存在\ x \in X，使得\ f(x) = y，$$

所以

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)，$$

因此 $z \in (g \circ f)[X]$。

(2) 任给 $x \in (g \circ f)^{-1}[Y]$，都有$(g \circ f)(x) \in Y$，所以

$$g(f(x)) \in Y，$$

由 $g(f(x)) \in Y$ 得

$$f(x) \in g^{-1}[Y]，$$

由 $f(x) \in g^{-1}[Y]$得 $x \in f^{-1}[g^{-1}[Y]]$。

任给 $x \in f^{-1}[g^{-1}[Y]]$，都有 $f(x) \in [g^{-1}[Y]]$，所以

$$g(f(x)) \in Y，$$

即

$$(g \circ f)(x) \in Y，$$

由$(g \circ f)(x) \in Y$ 得 $x \in (g \circ f)^{-1}[Y]$。■

习题 2.4

2.4.1 求 $f[X_1], f[X_2], f^{-1}[Y_1]$和 $f^{-1}[Y_2]$。

(1) $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ $f(x, y) = xy$，

$X_1 = \{<x, x>| x\in\mathbf{R}\}$，$X_2 = (0, 1)\times(0, 1)$，

$Y_1 = \{0\}$，$Y_2 = (-1, 0)\cup(0, 1)$。。

(2) $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ $f(x) = x+1$，

$X_1 = Y_1 = \mathbf{N}_n$，$X_2 = Y_2 = \mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_n$。

(3) $a\in A$，$A\cap B = \varnothing$，

$$f: A\cup B\to A \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{如果 } x\in A \\ a & \text{如果 } x\in B, \end{cases}$$

$X_1 \subseteq A\cup B$ 且 $X_1\cap B \neq \varnothing$，$X_2 \subseteq A$，

$Y_1 \subseteq A$ 且 $a\in Y_1$，$Y_2 \subseteq A$ 且 $a\notin Y_2$。

2.4.2 f 是 A 到 B 的映射，$X \subseteq A$，证明：如果 $g = f|_X$，则 $f[X] = \mathrm{ran}(g)$。

2.4.3 证明定理 2.4.3(4)和定理 2.4.4(3)，即证明：

(1) $f[X]\setminus f[Y] = f[X\setminus Y]\setminus f[Y]$，

(2) 如果 f 是单射，则 $f[X\setminus Y] = f[X]\setminus f[Y]$。

2.4.4 证明定理 2.4.9(3)(4)，即证明：

(1) $f^{-1}[X\cap Y] = f^{-1}[X]\cap f^{-1}[Y]$。

(2) $f^{-1}[X\setminus Y] = f^{-1}[X]\setminus f^{-1}[Y]$。

2.4.5 证明定理 2.4.10，即证明：

(1) $f^{-1}[\bigcup_{i\in I}B_i] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i]$。

(2) $f^{-1}[\bigcap_{i\in I}B_i] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}[B_i]$。

2.4.6 f 是 A 到 B 的双射，$Y \subseteq B$，$f^{-1}[Y]$是 Y 在 f 下的逆象，$(f^{-1})[Y]$是 Y 在 f^{-1} 下的象，证明：$f^{-1}[Y] = (f^{-1})[Y]$。

2.5 映射族 一般卡氏积

因为集合的元素是任意的，所以映射也可以作为集合的元素。给予每个元素都是映射的集合一个专门的名称。

2.5.1 定义 映射族 每个元素都是映射的非空集合称为映射族。映射族一般用大写希腊字母$\Sigma, \Gamma, \Phi, \Psi$等表示。

注意映射族仍然是集合，是具有一定性质的集合。当我们对这样的集合使用映射族的称呼时，表明我们讨论的重点在于作为它的元素的那些映射。按定义，映射族总是非空的。

设 I 是一个非空集合，如果任给 $i\in I$，f_i 是 A_i 到 B_i 的映射，则$\{f_i \mid i\in I\}$是映射族，称为以 I 为指标集的映射族。

为了简单起见，以后使用映射族$\{f_i \mid i\in I\}$时，总是假定 f_i 是 A_i 到 B_i 的映射。

和集合族类似，任何映射族都可以表示为以某个非空集合为指标集的映射族。

A 的所有子集组成重要的集合族——幂集，A 到 B 的所有映射也组成一个重要的映射族。

2.5.2 定义 A 是非空集合，由 A 到 B 的所有映射组成的映射族记为 B^A，即 $B^A = \{f \mid f: A\to B\}$。

B 是集合，因为$\varnothing$到 B 有惟一的空映射θ_B，所以 $B^{\varnothing} = \{\theta_B\}$。如果 $A \neq \varnothing$，则按定义不存在 A 到$\varnothing$的映射，所以$\varnothing^A = \varnothing$。

为了简单起见，将 $\mathbf{N}_n{}^A$ 简记 $\mathbf{n}^A$，即 $\mathbf{n}^A = \{f \mid f: A\to\mathbf{N}_n\}$。

以下是映射族的一些例子。

2.5.3 例 $n\geq 1$，$A_0,\cdots, A_{n-1}$ 是 n 个集合，则

$$\{f \mid f: \mathbf{N}_n\to\bigcup_{i<n}A_i，任给 0\leq i\leq n-1，都有 f(i)\in A_i\}$$

是映射族。这个映射族记为$\prod_{i<n}A_i$。

2.5.4 例 如果 $A \neq \varnothing$，则$\{b\}^A = \{b\}$。如果 $B \neq \varnothing$，则

$B^{\{a\}} = \{b \mid b \in B\}$ (见例 2.1.17)。

映射族既然是集合，所以可以有它到别的集合的映射，也有别的集合到它的映射。为了清楚起见，这样的映射一般用英文大写字母 F, G, H 等表示，当然仍可以用 f, g, h 等表示。

2.5.5 例 任给 $X\in \mathrm{P}(A)$，X 在 A 中的特征函数$\mu_X \in \mathbf{2}^A$ (见例 2.1.18)，所以可以构造 $\mathrm{P}(A)$到 $\mathbf{2}^A$ 的映射

$$F：\mathrm{P}(A)\to\mathbf{2}^A \quad F(X) = \mu_X。$$

可以证明 F 是双射。

任给 $X, Y\in \mathrm{P}(A)$，如果 $X \neq Y$，则

存在 $x\in A$，使得($x\in X$ 且 $x\notin Y$)或($x\in Y$ 且 $x\notin X$)，

不妨假设 $x\in X$ 且 $x\notin Y$，所以

$$\mu_X(x) = 1 \text{ 且} \mu_Y(x) = 0，$$

因此

$$\mu_X \neq \mu_Y。$$

即

$$F(X) \neq F(Y)。$$

这就证明了 F 是单射。

任给 $f\in\mathbf{2}^A$，令 $X = \{x \mid x\in A \text{ 且 } f(x) = 1\}$，则

$F(X) = \mu_X = f$ (见习题 2.1.5)。

这就证明了 F 是满射。

2.5.6 例 $A\cap B = \varnothing$，任给 $h\in C^{A\cup B}$，h 在 A 上和 B 上的限制分别是

$$h|_A\in C^A \text{ 和 } h|_B\in C^B，$$

所以可以构造 $C^{A\cup B}$ 到 $C^A\times C^B$ 的映射

$$F：C^{A\cup B}\to C^A\times C^B \quad F(h) = <h|_A, h|_B>$$

可以证明 F 是双射。

任给 $h, k\in C^{A\cup B}$，如果 $h \neq k$，则

存在 $x\in A\cup B$，使得 $h(x) \neq k(x)$，

当 $x\in A$ 时有 $h|_A(x) \neq k|_A(x)$，所以

$$h|_A \neq k|_A，$$

当 $x\in B$ 时有 $h|_B(x) \neq k|_B(x)$，所以

$$h|_B \neq k|_B，$$

在两种情况下都有

$$<h|_A, h|_B> \neq <k|_A, k|_B>。$$

因此 F 是单射。

任给$<f, g>\in C^A\times C^B$，由例 2.1.13 构造 $h\in C^{A\cup B}$，则

$h|_A = f$ 且 $h|_B = g$ (见习题 2.1.3)，

所以

$$F(h) = <h|_A, h|_B> = <f, g>。$$

因此 F 是满射。

如果 f 是集合 A 到映射族的映射，则任给 $x\in A$，$f(x)$是映射，而 $\mathrm{dom}(f(x))$中的元素 y 的象就是 $f(x)(y)$，通过这种形式可以定义新的映射，请看以下例子。

2.5.7 例 $f：A\to C^B$，可以构造 $B\times A$ 到 C 的映射

$$f^*：B\times A\to C \quad f^*(y, x) = f(x)(y)$$

从而可以构造$(C^B)^A$到 $C^{B\times A}$ 的映射

$$F：(C^B)^A\to C^{B\times A} \quad F(f) = f^*$$

$h：B\times A\to C$，可以构造 A 到 C^B 的映射如下：首先对任意的 $x\in A$，构造 B 到 C 的映射

$$h_x：B\to C \quad h_x(y) = h(<y, x>)$$

然后构造 A 到 C^B 的映射

$$f：A\to C^B \quad f(x) = h_x$$

可以证明 $f^* = h$。

在例 2.1.13 中，从映射

$$f：A_1\to B_1 \text{ 和 } g：A_2\to B_2$$

构造了映射

$$h：A_1\cup A_2\to B_1\cup B_2 \quad h(<x, y>) = <f(x), g(y)>。$$

h 满足：

任给 $x\in A_1$，都有 $h(x) = f(x)$，

任给 $x\in A_2$，都有 $h(x) = g(x)$。

容易证明满足如此性质的映射是惟一的，所以我们可以不使用构造的方法，而利用 h 所满足的性质来定义 h。这种定义方法可以推广到映射族。

2.5.8 定义 并映射 $\Gamma = \{f_i \mid i\in I\}$是映射族，$h$ 是 A 到 B 的映射，其中 $A = \bigcup_{i\in I} A_i$，$B = \bigcup_{i\in I} B_i$。如果 h 满足：

任给 $i\in I$，任给 $x\in A_i$，都有 $h(x) = f_i(x)$，

则称 h 是映射族Γ的并映射，简称 h 是映射族Γ的并。

注意映射不是集合，这里的“并”不是集合意义上的“并”，但我们只在映射族上使用这种含义的“并”，所以决不会和集合意义上的“并”相混。

首先我们来证明一个映射族的并是惟一的。

2.5.9 定理 如果 h 和 k 都是映射族$\{f_i \mid i\in I\}$的并映射，则 $h = k$。

证 显然有

$\mathrm{dom}(h) = \bigcup_{i\in I} A_i = \mathrm{dom}(k)$，

又任给 $x\in \bigcup_{i\in I} A_i$，存在 $i\in I$，使得 $x\in A_i$，所以

$h(x) = f_i(x) = k(x)$。

因此 $h = k$。■

由并映射的惟一性，以后将映射族Γ的并记为 f_Γ。

并不是任何映射族都有并映射的，并映射存在是需要一定条件的。

2.5.10 定理 $\Gamma = \{f_i \mid i\in I\}$是映射族。如果Γ满足：

任给 $i, j\in I$，任给 $x\in A_i\cap A_j$，都有 $f_i(x) = f_j(x)$，

则Γ的并映射 f_Γ存在。

证 考虑这样的对应：任给 $x\in \bigcup_{i\in I}A_i$，当 $x\in A_i$ 时将 x 对应到 $f_i(x)$。如果 $x\in A_i\cap A_j$，则由 $x\in A_i$ 得 x 对应到 $f_i(x)$，由 $x\in A_j$ 得 x 对应到 $f_j(x)$，但因为 $f_i(x) = f_j(x)$，所以 x 对应到$\bigcup_{i\in I}B_i$ 中惟一的元

素 $f_i(x)$ (也是 $f_j(x)$)，因此这个对应构成了$\bigcup_{i\in I} A_i$ 到$\bigcup_{i\in I} B_i$ 的映射

$h：\bigcup_{i\in I} A_i\to\bigcup_{i\in I} B_i$ $h(x) = f_i(x)$ (当 $x\in A_i$ 时)

任给 $i\in I$，任给 $x\in A_i$，都有 $h(x) = f_i(x)$，所以 h 就是映射族Γ的并映射 f_Γ。■

实际上，定理 2.5.10 的条件也是并映射 f_Γ存在的必要条件，这个证明留给读者。

为验证映射族的并映射是否存在，定理 2.5.10 使用起来不太方便。下面再给出并映射存在的两个条件。

2.5.11 定理 $\Gamma = \{f_i \mid i\in I\}$是映射族，令$\Sigma = \{A_i \mid i\in I\}$。在以下两种情况下 f_Γ存在。

(1) Σ是不交的。

(2) Σ是单调的，且满足：任给 $i, j\in I$，如果 $A_i \subseteq A_j$，则任给 $x\in A_i$，都有 $f_i(x) = f_j(x)$。

证 (1) 任给 $i, j\in I$，如果 $i = j$，则任给 $x\in A_i\cap A_j$，由 $f_i(x) = f_i(x)$ 得

$f_i(x) = f_j(x)$，

如果 $i \neq j$，则由Σ是不交的得

$A_i\cap A_j = \varnothing$，

所以不存在满足 $x\in A_i\cap A_j$ 的 x，因此也有

任给 $x\in A_i\cap A_j$，都有 $f_i(x) = f_j(x)$。

这就证明了

任给 $i, j\in I$，任给 $x\in A_i\cap A_j$，都有 $f_i(x) = f_j(x)$，

由定理 2.5.11 得 f_Γ存在。

(2) 任给 $i, j\in I$，则由Σ是单调的得

$A_i \subseteq A_j$ 或 $A_j \subseteq A_i$，

不妨设 $A_i \subseteq A_j$，所以

$A_i\cap A_j = A_i$，

任给 $x\in A_i\cap A_j$，都有 $x\in A_i$，由定理条件得

$f_i(x) = f_j(x)$。

这就证明了

任给 i, j∈I，任给 $x \in A_i \cap A_j$，都有 $f_i(x) = f_j(x)$，

由定理 2.5.11 得 f_Γ存在。■

下面讨论并映射的性质。

2.5.12 定理 $\Gamma = \{f_i \mid i \in I\}$是映射族，

$$f_\Gamma: \bigcup_{i\in I} A_i \to \bigcup_{i\in I} B_i$$

是Γ的并映射，令$\Sigma_1 = \{A_i \mid i \in I\}$，$\Sigma_2 = \{B_i \mid i \in I\}$。

(1) $\mathrm{ran}(f_\Gamma) = \bigcup_{i\in I}\mathrm{ran}(f_i)$，因此，如果任给 i∈I，$f_i$ 都是满射，则 f_Γ是满射。

(2) 如果Γ_1 是单调的，并且任给 i∈I，f_i 都是单射，则 f_Γ是单射。

(3) 如果Γ_2 是不交的，并且任给 i∈I，f_i 都是单射，则 f_Γ是单射。

证 (1) 任给 $y \in \mathrm{ran}(f_\Gamma)$，存在 $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$，使得 $f_\Gamma(x) = y$，由 $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ 得

存在 i∈I，使得 $x \in A_i$，

所以

$$y = f_\Gamma(x) = f_i(x) \in \mathrm{ran}(f_i),$$

因此

$$y \in \bigcup_{i\in I}\mathrm{ran}(f_i)。$$

这就证明了

任给 $y \in \mathrm{ran}(f_\Gamma)$，都有 $y \in \bigcup_{i\in I}\mathrm{ran}(f_i)$，

因此 $\mathrm{ran}(f_\Gamma) \subseteq \bigcup_{i\in I}\mathrm{ran}(f_i)$。

任给 $y \in \bigcup_{i\in I}\mathrm{ran}(f_i)$，存在 i∈I，使得 $y \in \mathrm{ran}(f_i)$，所以

存在 $x \in A_i$，使得 $f_i(x) = y$，

因此

$$y = f_i(x) = f_\Gamma(x) \in \mathrm{ran}(f_\Gamma)。$$

这就证明了

任给 $y \in \bigcup_{i\in I}\mathrm{ran}(f_i)$，都有 $y \in \mathrm{ran}(f_\Gamma)$，

因此$\bigcup_{i\in I}\mathrm{ran}(f_i) \subseteq \mathrm{ran}(f_\Gamma)$。

如果任给 i∈I，f_i 都是满射，则

任给 i∈I，都有 $B_i = \mathrm{ran}(f_i)$，

所以

$$\mathrm{ran}(f_\Gamma) = \bigcup_{i\in I}\mathrm{ran}(f_i) = \bigcup_{i\in I} B_i,$$

因此 f_Γ是满射。

(2) 任给 $x, y \in \bigcup_{i\in I} A_i$，由$\Gamma_1$ 是单调的得(见习题 1.5.5)

存在 i∈I，使得 $x, y \in A_i$，

如果 $x \neq y$，则 $f_i(x) \neq f_i(y)$，所以

$$f_\Gamma(x) = f_i(x) \neq f_i(y) = f_\Gamma(y)。$$

因此 f_Γ是单射。

(3) 任给 $x, y \in \bigcup_{i\in I} A_i$，存在 i, j∈I，使得

$x \in A_i$ 且 $y \in A_j$，

所以

$f_i(x) \in B_i$ 且 $f_j(y) \in B_j$，

如果 $x \neq y$，则当 i = j 时，由 f_i 是单射得

$$f_i(x) \neq f_i(y),$$

当 i ≠ j 时，由 $B_i \cap B_j = \varnothing$得

$$f_i(x) \neq f_i(y),$$

所以在两种情况下都有

$$f_\Gamma(x) = f_i(x) \neq f_i(y) = f_\Gamma(y)。$$

因此 f_Γ是单射。■

n 个集合的卡氏积可以和一个映射族联系起来。为了便于对应，将 n 个集合的卡氏积记为 $A_0\times\cdots\times A_{n-1}$，将 $A_0\times\cdots\times A_{n-1}$ 中的元素记为$\langle a_0,\cdots, a_{n-1}\rangle$。

考虑例 2.5.3 中的映射族$\prod_{i<n} A_i$，则

任给 $f \in \prod_{i<n} A_i$，都有$\langle f(0),\cdots, f(n-1)\rangle \in A_0\times\cdots\times A_{n-1}$，

可以构造$\prod_{i<n} A_i$ 到 $A_0\times\cdots\times A_{n-1}$ 的映射

$$F: \prod_{i<n} A_i \to A_0\times\cdots\times A_{n-1} \quad F(f) = \langle f(0),\cdots, f(n-1)\rangle。$$

任给 $f, g\in\prod_{i<n}A_i$，如果 $f\neq g$，则

存在 $0\le i\le n-1$，使得 $f(i)\neq g(i)$，

所以

$<f(0),\cdots,f(n-1)>\neq<g(0),\cdots,g(n-1)>$，

即 $F(f)\neq F(g)$。因此 F 是单射。

任给 $<a_0,\cdots,a_{n-1}>\in A_0\times\cdots\times A_{n-1}$，构造 $\mathbf{N}_n$ 到 $\bigcup_{i<n}A_i$ 映射

$f:\mathbf{N}_n\to\bigcup_{i<n}A_i \quad f(i)=a_i$，

则 $f\in\prod_{i<n}A_i$ 且 $F(f)=<a_0,\cdots,a_{n-1}>$。因此 F 是满射。

因为 F 是双射，也可以用 $\prod_{i<n}A_i$ 来定义 n 个集合 $A_0,\cdots, A_{n-1}$ 的卡氏积。

这种用映射族定义卡氏积的方法可以推广到集合族。

2.5.13 定义 一般卡氏积 $\Gamma=\{A_i\mid i\in I\}$是集合族，映射族

$\{f\mid f:I\to\bigcup_{i\in I}A_i$，任给 $i\in I$，都有 $f(i)\in A_i\}$

称为集合族Γ的卡氏积，记为$\prod_{i\in I}A_i$。

$I=\mathbf{N}_n$ 时，$\prod_{i\in I}A_i$ 就是$\prod_{i<n}A_i$，所以下标 $i<n$ 就是下标 $i\in\mathbf{N}_n$ 的简写，这和集合族是类似的。

显然，如果存在 $i\in I$，使得 $A_i=\varnothing$，则$\prod_{i\in I}A_i=\varnothing$。

但如果任给 $i\in I$，都有 $A_i\neq\varnothing$，却不容易证明$\prod_{i\in I}A_i\neq\varnothing$，同样的结论对于 n 个集合的卡氏积是容易证明的(见习题 1.6.5)。

以后，在一般地讨论卡氏积时，都使用这样的定义，但如果仅讨论 n 个集合的卡氏积时，仍然使用 n 元有序组的定义，特别是对于两个集合的卡氏积。

如果在集合族$\{A_i\mid i\in I\}$中，每个 A_i 都等于 A，则称$\prod_{i\in I}A_i$ 为 A 的以 I 为指标集的卡氏幂。这时有

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I}A_i &= \{f\mid f:I\to\textstyle\bigcup_{i\in I}A_i，\text{任给 } i\in I，\text{都有 } f(i)\in A_i\}\\ &= \{f\mid f:I\to A，\text{任给 } i\in I，\text{都有 } f(i)\in A\}\\ &= \{f\mid f:I\to A\}。\end{aligned}$$

原来，A 的以 I 为指标集的卡氏幂就是 A^I。因此，以后将映射族 B^A 称为卡氏幂。为了简单起见，将 $A^{\mathbf{N}_n}$ 简记为 $A^{\mathbf{n}}$。注意，$A^{\mathbf{n}}$ 是指映射族

$\{f\mid f:\mathbf{N}_n\to A\}$，

而 A^n 是指 n 元有序组的集合

$\{<x_1,\cdots,x_n>\mid$ 任给 $1\le i\le n$，都有 $x_i\in A\}$。

习题 2.5

2.5.1 $A\neq\varnothing$，b 是 A 到 B 的以 b 为值的常映射，则 $b\in B^A$，构造 B 到 B^A 的映射

$F:B\to B^A \quad F(b)=b$。

证明：

(1) F 是单射。

(2) 如果 $A=\{a\}$，则 F 是满射。

(3) 如果 A 和 B 都至少有两个元素，则 F 不是是满射。

2.5.2 $F:B^A\times C^A\to(B\times C)^A \quad F(f,g)=f*g$。(*的含义见例 2.1.15)。证明：$F$ 是双射。

2.5.3 (1) $f, g\in C^B$，证明：如果 $f=g$，则 $f^*=g^*$(*的含义见例 2.5.7)。

(2) 设 $h:B\times A\to C$，按例 2.5.7 的方法构造 A 到 C^B 的映射 f。证明：$f^*=h$。

2.5.4 $F:A\to\mathbf{2}^A$，构造 A 到 $\mathbf{N}_2$ 的映射

$$f:A\to\mathbf{N}_2 \quad f(x)=\begin{cases}1 & \text{如果 } F(x)(x)=0\\ 0 & \text{如果 } F(x)(x)=1。\end{cases}$$

证明：不存在 $x\in A$，使得 $F(x)=f$。

2.5.5 $\Gamma=\{f_i\mid i\in I\}$是映射族，Γ的并映射 f_Γ存在。证明：任给 $i, j\in I$，任给 $x\in A_i\cap A_j$，都有 $f_i(x)=f_j(x)$。

2.5.6 任给 $i\in I$，A_i 都是 $\mathbf{N}$ 的非空子集，证明：$\prod_{i\in I}A_i\neq\varnothing$。

第三章　关　　系

3.1　关系　二元关系

A 到 B 的映射可以看做 A 的元素和 B 的元素间的一种联系，除由映射确定的元素间的联系以外，元素之间还可以有其它的联系。

有的联系是同一个集合中的元素间的联系。如事物的因果联系，事物发生的先后，都是事物间的联系。a 和 b 是兄弟，a 和 b 是父子，都是人和人间的联系。又如在自然数中，n 加 m 等于 k 是三个自然数的联系，n 乘 m 等于 s 乘 t 是四个自然数的联系。

有的联系是不同集合中的元素间的联系。如 a 毕业于学校 b 是人类的元素和学校的元素间的联系，又如 a 住在 b 国是人类的元素和国家的元素间的联系。

以上联系有三个特征。首先，每个联系都有一个自然数 n，这个联系是指 n 个元素间的联系。其次，这样的联系有确定性，即任给 n 个元素，都能确定它们是否有联系。最后，这样的联系一般地和次序有关，n 个元素在一种次序下有某种联系，换一种次序可能没有这种联系，如 a 和 b 是父子，b 和 a 不是父子。

从以上这些例子可以抽象出 n 元关系的概念。所谓 n 元关系就是有确定性的 n 个元素有次序的一种联系。

没有确定的 n 的联系不能看做一种关系。如同学这种联系，平时人们常对两个、三个或更多的人谈论他们是否是同学，在这个意义上理解同学，就不能将它看做一种关系，要将同学看做关系，只能是两个人之间的联系，而将三个人是同学理解为这三个

人中每两个都是同学，更多的人是同学也要作类似的理解。

有确定的 n 的联系也不一定能简单看做一种关系，如两个苹果质量的好坏，两件工艺品的优劣等。这和集合的情况是类似的，要把这类联系看做关系，必须给出一个确定的标准。

要确定一个 n 元关系，只要确定哪 n 个元素依次序有这种关系就行了。依次序考虑 n 个元素，等于考虑一个 n 元有序组，以后用说一个 n 元有序组有关系代替说 n 个元素依次序有关系。将有关系的 n 元有序组放在一起，就构成了一个 n 元有序组的集合，这个集合完全确定了这个关系。因此在集合论中用 n 元有序组的集合定义 n 元关系

3.1.1 定义　关系　$n\geq 2$，n 元有序组的集合称为 n 元关系。

以后说 n 元关系总是指 $n\geq 2$。n 元关系一般用英文大写字母 R, Q, S 等表示。

3.1.2 定义　A 上 n 元关系　R 是 n 元关系，R 中每个 n 元有序组中的每个元素都是 A 的元素，即 $R\subseteq A^n$，则称 R 是 A 上 n 元关系。它刻画了 A 中 n 个元素的一种联系。

n 元关系中最重要的是二元关系，特别是 A 上二元关系。以下是二元关系和 A 上二元关系的几个例子。

3.1.3 例　**R** 和 **N** 上的小于等于关系分别是

$$R = \{<x, y> \mid x, y\in \mathbf{R} \text{ 且 } x\leq y\}$$

和

$$Q = \{<x, y> \mid x, y\in \mathbf{N} \text{ 且 } x\leq y\}。$$

3.1.4 例　令 A = 人类。有相同父母和父子关系都是 A 上的二元关系，它们可以分别表示为：

$$R = \{<x, y> \mid x, y\in A \text{ 且 } x, y \text{ 有相同父母}\}$$

和

$$Q = \{<x, y> \mid x, y\in A \text{ 且 } x \text{ 是 } y \text{ 的父亲}\}。$$

3.1.5 例　集合族Γ上的包含关系是

$$R = \{<A, B> \mid A, B\in\Gamma \text{ 且 } A\subseteq B\},$$

相交关系是

$$Q = \{<A, B> \mid A, B\in\Gamma\text{且 } A\cap B \neq \varnothing\}。$$

3.1.6 例 f 是映射，$G(f) = \{<x, y> \mid x\in \mathrm{dom}(f)\text{且 } y = f(x)\}$是二元关系，这个关系称为 f 的图象。由 $G(f)$的定义可知：

$$<x, y>\in G(f)\text{当且仅当 } y = f(x)。$$

所以 $G(f)$的性质和 f 的性质密切相关。

3.1.7 例 $I_A = \{<x, x> \mid x\in A\}$称为 A 上恒等关系。它的意义就是元素的相等，也就是 A 中每个元素恰好和自己有这种联系。

3.1.8 例 A^2 称为 A 上全关系。它的意义是：A 中任意两个元素，不管次序如何，都有这种联系。

现在讨论 n 元关系的性质。

3.1.9 定义 关系的限制 $B \subseteq A$，R 是 A 上 n 元关系。因为 $R\cap B^n \subseteq B^n$，所以 $R\cap B^n$ 是 B 上 n 元关系，这个关系称为 R 在 B 上的限制，记为 $R\mid_B$，即 $R\mid_B = R\cap B^n$。

3.1.10 例 在例 3.1.3 中 $R\mid_{\mathbf{N}} = Q$。对于恒等关系和全关系来说，如果 $B\subseteq A$，则 $I_A\mid_B = I_B$，$A^2\mid_B = B^2$。

A 上 n 元关系是 A 中 n 个元素依次序的一种联系，对于 B 中 n 个元素考虑同样的联系，就得到了 B 上一个 n 元关系，这个关系就是记为 $R\mid_B$。用属于关系可以将这点表示如下：

任给 $x_1,\cdots, x_n\in B$，$<x_1,\cdots, x_n>\in R\mid_B$ 当且仅当$<x_1,\cdots, x_n>\in R$。

反之，如果 B 上 n 元关系 S 满足

任给 $x_1,\cdots, x_n\in B$，$<x_1,\cdots, x_n>\in S$ 当且仅当$<x_1,\cdots, x_n>\in R$，

则 $S = R\mid_B$。

关系的限制与关系的交和并有以下性质。

3.1.11 定理 R 和 Q 是 A 上 n 元关系，$B\subseteq A$，则

(1) 如果 $Q\subseteq R$，则 $Q\mid_B\subseteq R\mid_B$。

(2) $R\mid_B\cap Q\mid_B = (R\cap Q)\mid_B$。

(3) $R\mid_B\cup Q\mid_B = (R\cup Q)\mid_B$。

证 (1) 任给$<x_1,\cdots, x_n>\in Q\mid_B$，都有

$<x_1,\cdots, x_n>\in Q$ 且 $x_1,\cdots, x_n\in B$，

由$<x_1,\cdots, x_n>\in Q$ 和 $Q\subseteq R$ 得

$<x_1,\cdots, x_n>\in R$，

由$<x_1,\cdots, x_n>\in R$ 和 $x_1,\cdots, x_n\in B$ 得$<x_1,\cdots, x_n>\in R\mid_B$。

(2) 任给$<x_1,\cdots, x_n>\in R\mid_B\cap Q\mid_B$，都有

$<x_1,\cdots, x_n>\in R\mid_B$ 且$<x_1,\cdots, x_n>\in Q\mid_B$，

由$<x_1,\cdots, x_n>\in R\mid_B$ 得

$<x_1,\cdots, x_n>\in R$ 且 $x_1,\cdots, x_n\in B$，

由$<x_1,\cdots, x_n>\in Q\mid_B$ 得

$<x_1,\cdots, x_n>\in Q$ 且 $x_1,\cdots, x_n\in B$，

由$<x_1,\cdots, x_n>\in R$ 和$<x_1,\cdots, x_n>\in Q$ 得

$<x_1,\cdots, x_n>\in R\cap Q$，

由$<x_1,\cdots, x_n>\in R\cap Q$ 和 $x_1,\cdots, x_n\in B$ 得

$<x_1,\cdots, x_n>\in (R\cap Q)\mid_B$。

因此 $R\mid_B\cap Q\mid_B\subseteq (R\cap Q)\mid_B$。

由 $R\cap Q\subseteq R$ 和(1)得

$(R\cap Q)\mid_B\subseteq R\mid_B$，

由 $R\cap Q\subseteq Q$ 和(1)得

$(R\cap Q)\mid_B\subseteq Q\mid_B$，

因此$(R\cap Q)\mid_B\subseteq R\mid_B\cap Q\mid_B$。

(3) 类似(2)，详细证明留给读者。■

二元关系是有序对的集合，所以可以有交、并和差三种集合的运算。二元关系的交、并和差仍是二元关系，A 上二元关系的交、并和差仍是 A 上二元关系。

二元关系还有两个重要的运算。

3.1.12 定义 逆关系 R 是二元关系，二元关系

$$\{<x, y> \mid <y, x>\in R\}$$

称为 R 的逆关系，记为 R^{-1}。用属于关系表示就是：

$$<x, y>\in R^{-1}\text{当且仅当}<y, x>\in R。$$

3.1.13 例 **R** 和 **N** 上的小于等于关系的逆分别是 **R** 和 **N** 上的大于等于关系。

3.1.14 定义 关系的复合 R 和 Q 是二元关系，二元关系

$$\{<x, y> \mid \text{存在 } z\text{，使得} <x, z>\in R \text{ 且} <z, y>\in Q\}$$

称为 R 和 Q 的复合，记为 $Q\circ R$。用属于关系表示就是：

$<x, y>\in Q\circ R$ 当且仅当(存在 z，使得 $<x, z>\in R$ 且 $<z, y>\in Q$)。

$Q\circ R$ 代表这样一种联系：两个元素能通过一个中间元素而联系，前一个元素和中间元素的联系是 R，中间元素和后一个元素的联系是 Q。

3.1.15 例 对于例 3.1.4 中的父子关系 Q，有

$$Q\circ Q = \{<x, y> \mid x, y\in A \text{ 且 } x \text{ 是 } y \text{ 的祖父}\}\text{。}$$

二元关系的这两种运算有以下性质。

3.1.16 定理 R, Q 和 S 是二元关系。

(1) 如果 R 和 Q 是 A 上二元关系，则 R^{-1} 和 $Q\circ R$ 也是 A 上二元关系。

(2) $(R^{-1})^{-1} = R$。

(3) $S\circ(Q\circ R) = (S\circ Q)\circ R$。

证 (1) 略。

(2) $<x, y>\in(R^{-1})^{-1}$ 当且仅当 $<y, x>\in R^{-1}$

当且仅当 $<x, y>\in R$，

因此 $(R^{-1})^{-1} = R$。

(3) $<x, y>\in S\circ(Q\circ R)$

当且仅当

(存在 v，使得 $<x, v>\in Q\circ R$ 且 $<v, y>\in S$)。

而

$<x, v>\in Q\circ R$

当且仅当

(存在 u，使得 $<x, u>\in R$ 且 $<u, v>\in Q$)。

所以

$<x, y>\in S\circ(Q\circ R)$

当且仅当

(存在 u, v，使得 $<x, u>\in R$ 且 $<u, v>\in Q$ 且 $<v, y>\in S$)。

又

$<x, y>\in(S\circ Q)\circ R$

当且仅当

(存在 u，使得 $<x, u>\in R$ 且 $<u, y>\in S\circ Q$)。

而

$<u, y>\in S\circ Q$

当且仅当

(存在 v，使得 $<u, v>\in Q$ 且 $<v, y>\in S$)。

所以

$<x, y>\in(S\circ Q)\circ R$

当且仅当

(存在 u, v，使得 $<x, u>\in R$ 且 $<u, v>\in Q$ 且 $<v, y>\in S$)。

由以上综合而得

$<x, y>\in S\circ(Q\circ R)$ 当且仅当 $<x, y>\in(S\circ Q)\circ R$，

因此 $S\circ(Q\circ R) = (S\circ Q)\circ R$。■

定理 3.1.16(3)说明了 $S\circ(Q\circ R)$和$(S\circ Q)\circ R$ 都表示了这样一种联系：两个元素通过两个中间元素而联系，其中前一个元素和第一个中间元素的联系是 R，两个中间元素的联系是 Q，第二个中间元素和后一个元素的联系是 S。

二元关系的这两种运算和二元关系的限制有以下性质。

3.1.17 定理 R, Q 是 A 上二元关系，$B\subseteq A$。

(1) $(R\,|_B)^{-1} = R^{-1}\,|_B$。

(2) $Q\,|_B\circ R\,|_B \subseteq (Q\circ R)\,|_B$。

证 (1) 任给 $x, y\in B$，都有

$<x, y>\in(R\,|_B)^{-1}$ 当且仅当 $<y, x>\in R\,|_B$

当且仅当 $<y, x>\in R$

当且仅当 $<x, y>\in R^{-1}$，

因此$(R|_B)^{-1} = R^{-1}|_B$。

(2) 任给$<x, y>\in Q|_B\circ R|_B$，都有

存在 z，使得$<x, z>\in R|_B$且$<z, y>\in Q|_B$，

因为 $x, y, z\in B$，所以

$<x, z>\in R$ 且$<z, y>\in Q$，

因此

$<x, y>\in Q\circ R$，

又因为 $x, y\in B$，所以

$<x, y>\in (Q\circ R)|_B$。

这就证明了 $Q|_B\circ R|_B \subseteq (Q\circ R)|_B$。 ■

关系的逆与关系的交和并有以下性质。

3.1.18 定理 R 和 Q 是 A 上二元关系，则

(1) 如果 $Q\subseteq R$，则 $Q^{-1}\subseteq R^{-1}$。

(2) $R^{-1}\cap Q^{-1} = (R\cap Q)^{-1}$。

(3) $R^{-1}\cup Q^{-1} = (R\cup Q)^{-1}$。

证 (1) 任给$<x, y>\in Q^{-1}$，都有

$<y, x>\in Q$，

由$<y, x>\in Q$ 和 $Q\subseteq R$ 得

$<y, x>\in R$，

所以$<x, y>\in Q^{-1}$。

(2) 任给$<x, y>\in R^{-1}\cap Q^{-1}$，都有$<x, y>\in R^{-1}$且$<x, y>\in Q^{-1}$，由$<x, y>\in R^{-1}$得

$<y, x>\in R$，

由$<x, y>\in Q^{-1}$得

$<y, x>\in Q$，

由$<y, x>\in R$ 和$<y, x>\in Q$ 得

$<y, x>\in R\cap Q$，

由$<y, x>\in R\cap Q$ 得

$<x, y>\in (R\cap Q)^{-1}$。

因此 $R^{-1}\cap Q^{-1}\subseteq (R\cap Q)^{-1}$。

由 $R\cap Q\subseteq R$ 和(1)得

$(R\cap Q)^{-1}\subseteq R^{-1}$，

由 $R\cap Q\subseteq Q$ 和(1)得

$(R\cap Q)^{-1}\subseteq Q^{-1}$，

因此$(R\cap Q)^{-1}\subseteq R^{-1}\cap Q^{-1}$。

(3) 类似(2)，详细证明留给读者。■

习题 3.1

3.1.1 R 是 n 元关系，令 $A = \bigcup_{i<n}D_i$，其中，任给 $0\le i\le n-1$，

$D_i = \{y\mid$ 存在$<x_0,\cdots, x_{n-1}>\in R$，使得 $y = x_i\}$，

证明：

(1) $R\subseteq D_0\times\cdots\times D_{n-1}$。

(2) R 是 A 上 n 元关系。

3.1.2 R, Q 是 A 上 n 元关系，$B\subseteq A$。证明：$(R|_B)\cup(Q|_B) = (R\cup Q)|_B$。

3.1.3 证明二元关系的以下性质：

(1) 如果 $R_1\subseteq R_2$，$Q_1\subseteq Q_2$，则 $Q_1\circ R_1\subseteq Q_2\circ R_2$。

(2) $(Q\circ R)^{-1}\subseteq R^{-1}\circ Q^{-1}$。

(3) $R^{-1}\cup Q^{-1} = (R\cup Q)^{-1}$。

3.1.4 举例说明不一定有$(Q|_B)\circ(R|_B) = (Q\circ R)|_B$。

3.1.5 f 和 g 是映射，$G(f)$和 $G(g)$分别是 f 和 g 的图像。证明：

(1) $f = g$ 当且仅当 $G(f) = G(g)$。

(2) 如果 f 是双射，则 $G(f^{-1}) = G(f)^{-1}$。

(3) $G(g\circ f) = G(g)\circ G(f)$。

3.2 等 价 关 系

元素的相等有以下三条性质：

(1) 任给 x，都有 $x = x$；

(2) 任给 x, y，如果 $x = y$，则 $y = x$；

(3) 任给 x, y, z，如果 $x = y$ 且 $y = z$，则 $x = z$。

除相等外，还有一些二元关系有这三条性质。有这三条性质的二元关系是一种重要的二元关系。

3.2.1 定义 等价关系 A 上二元关系 R 称为 A 上等价关系，如果 R 满足以下性质：

(1) 自返性 任给 $x \in A$，都有 $<x, x> \in R$；

(2) 对称性 任给 $x, y \in A$，如果 $<x, y> \in R$，则 $<y, x> \in R$；

(3) 传递性 任给 $x, y, z \in A$，如果 $<x, y> \in R$ 且 $<y, z> \in R$，则 $<x, z> \in R$。

R 有自返性是说 A 中每个元素自己与自己有 R 关系，所以 R 包含了 I_A，即 $\mathrm{I}_A \subseteq R$。因此 R 有自返性也可以用 $\mathrm{I}_A \subseteq R$ 来表示。

R 有对称性是说 R 关系和次序无关，也就是考虑 A 中两个元素是否有 R 关系时，不需要考虑它们的次序。

如果 R 有对称性，则任给 $<x, y> \in R^{-1}$，都有 $<y, x> \in R$，由 R 的对称性得 $<x, y> \in R$，所以 $R^{-1} \subseteq R$。

反之，如果 $R^{-1} \subseteq R$，则任给 $<x, y> \in R$，都有 $<y, x> \in R^{-1}$，由 $R^{-1} \subseteq R$ 得 $<y, x> \in R$，所以 R 有对称性。

因此 R 有对称性也可以用 $R^{-1} \subseteq R$ 来表示。

R 有传递性是说，如果 A 中两个元素可以通过一个中间元素有间接联系的话，则它们就有直接联系。

如果 R 有传递性，则任给 $<x, z> \in R \circ R$，存在 y，使得 $<x, y> \in R$ 且 $<y, z> \in R$，由 R 的传递性得 $<x, z> \in R$，所以 $R \circ R \subseteq R$。

反之，如果 $R \circ R \subseteq R$，则任给 $<x, y> \in R$ 和 $<y, z> \in R$，都有 $<x, z> \in R \circ R$ ，由 $R \circ R \subseteq R$ 得 $<x, z> \in R$，所以 R 有传递性。

因此 R 有传递性也可以用 $R \circ R \subseteq R$ 来表示。

下面是等价关系的几个简单的例子。

3.2.2 例 A 上恒等关系 I_A 和 A 上全关系 A^2 都是 A 上的等价关系。

3.2.3 例 令 A = 人类。有相同父母(见例 3.1.4)是 A 上的等价关系。

3.2.4 例 $Q = \{<x, y> \mid x, y \in \mathbf{R}$ 且 $x-y \in \mathbf{Z}\}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的等价关系。理由如下：

自返性。任给 $x \in \mathbf{R}$，都有 $x-x \in \mathbf{Z}$，所以 $<x, x> \in Q$。

对称性。任给 $x, y \in \mathbf{R}$，如果 $<x, y> \in Q$，则 $x-y \in \mathbf{Z}$，所以

$$y-x = -(x-y) \in \mathbf{Z},$$

因此 $<y, x> \in Q$。

传递性。任给 $x, y, z \in \mathbf{R}$，如果 $<x, y> \in Q$ 且 $<y, z> \in Q$，则

$$x-y \in \mathbf{Z} \text{ 且 } y-z \in \mathbf{Z},$$

所以

$$x-z = (x-y)+(y-z) \in \mathbf{Z},$$

因此 $<x, z> \in Q$。

再来看一个较为复杂的例子。

3.2.5 例 令 $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^+$，则

$$R = \{<<x, y>, <u, v>> \mid <x, y>, <u, v> \in A \text{ 且 } xv = uy\}$$

是 A 上的等价关系。理由如下：

自返性。任给 $<x, y> \in A$，都有 $xy = xy$，所以 $<<x, y>, <x, y>> \in R$。

对称性。任给 $<x, y>, <u, v> \in A$，如果 $<<x, y>, <u, v>> \in R$，则 $xv = uy$，所以

$$uy = xv,$$

因此 $<<u, v>, <x, y>> \in R$。

传递性。任给$\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle, \langle w, z\rangle \in A$，如果$\langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle \in R$且$\langle\langle u, v\rangle, \langle w, z\rangle\rangle \in R$，则

$$xv = uy \text{ 且 } uz = wv，$$

所以

$$xvuz = uywv，$$

由 $v \in \mathbf{Z}^+$得

$$v \neq 0，$$

如果 $u \neq 0$，则由 $xvuz = uywv$ 和乘法消去律得

$$xz = wy，$$

如果 $u = 0$，则由 $xv = uy$ 和 $uz = wv$ 得

$$x = 0 \text{ 且 } w = 0，$$

也有

$$xz = wy，$$

因此$\langle\langle x, y\rangle, \langle w, z\rangle\rangle \in R$。

在一般讨论等价关系时，将等价关系记为～，将$\langle x, y\rangle \in$～记为 $x \sim y$，称 x 和 y 等价，也称 x 等价于 y。

任给集合中的一个元素，所有和这个元素等价的元素组成一个子集。

3.2.6 定义 等价类 ～是 A 上等价关系，$a \in A$。所有和 a 等价的元素组成的 A 的子集称为 a 的等价类，记为 $\tilde{a}$ ，即

$$\tilde{a} = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \sim a\}。$$

所以：

$$x \in \tilde{a} \text{ 当且仅当 } x \sim a$$

A 的所有等价类组成 A 的一个子集族。

3.2.7 定义 商集 ～是 A 上等价关系，A 的所有等价类组成的 A 的子集族称为 A 的商集，记为 $A/\sim$，即 $A/\sim = \{\tilde{x} \mid x \in A\}$。

为熟悉等价类和商集的概念，先来看几个例子。

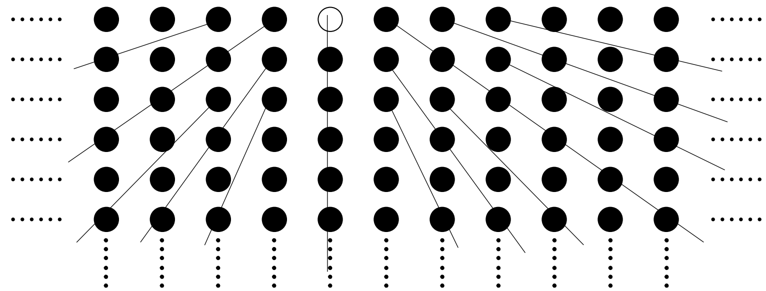
3.2.8 例 ～是 A 上恒等关系 I_A，则任给 $x \in A$，都有 $\tilde{x} = \{x\}$，所以 $A/\sim = \{\{x\} \mid x \in A\}$。

～是 A 上全关系 A^2，则任给 $x \in A$，都有 $\tilde{x} = A$，所以 $A/\sim = \{A\}$。

3.2.9 例 将 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^+$的元素排列如下：

……	<-3, 1>	<-2, 1>	<-1, 1>	<0, 1>	<1, 1>	<2, 1>	<3, 1>	……
……	<-3, 2>	<-2, 2>	<-1, 2>	<0, 2>	<1, 2>	<2, 2>	<3, 2>	……
……	<-3, 3>	<-2, 3>	<-1, 3>	<0, 3>	<1, 3>	<2, 3>	<3, 3>	……
……	<-3, 4>	<-2, 4>	<-1, 4>	<0, 4>	<1, 4>	<2, 4>	<3, 4>	……
……	<-3, 5>	<-2, 5>	<-1, 5>	<0, 5>	<1, 5>	<2, 5>	<3, 5>	……
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

取～是例 3.2.5 中的 Q，则以下示意图中的每条直线代表一个等价类(◯为<0, 1>)：



3.2.10 例 取～是例 3.2.4 中的实数 $\mathbf{R}$ 上的等价关系 Q。

如果 $x \sim a$，则 $x - a \in \mathbf{Z}$，所以存在 $y \in \mathbf{Z}$，使得 $x = a + y$。

如果存在 $y \in \mathbf{Z}$，使得 $x = a + y$，则 $x - a = (a + y) - a = y \in \mathbf{Z}$，所以 $x \sim a$。因此

$$x \sim a \text{ 当且仅当存在 } y \in \mathbf{Z}，\text{使得 } x = a + y。$$

这就是说：任给 $a \in \mathbf{R}$，都有 $\tilde{a} = \{a + y \mid y \in \mathbf{Z}\}$。

任给 $a, b \in (0, 1]$，如果 $a \neq b$，则 $a - b \notin \mathbf{Z}$，所以$\tilde{a} \neq \tilde{b}$ 。

又任给 $x \in \mathbf{R}$，取 y 为小于 x 的最大整数，则存在 $a \in (0, 1]$，使得 $x = a + y$，由 $x = a + y$ 得 $x \in \tilde{a}$ 。

因此，实数 $\mathbf{R}$ 在等价关系～下的商集 $\mathbf{R}/\sim = \{\tilde{x} \mid x \in (0, 1]\}$。

在例 3.2.10 中，子集(0, 1]有这样的的性质：

(1) 任给 $a, b\in(0, 1]$，都有 $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ ；

(2) 任给 $x\in\mathbf{R}$，存在 $a\in(0, 1]$，使得 $\tilde{x} = \tilde{a}$ 。

这种方法具有一般性，为了更清楚地表达商集 $A/\sim$，总是想法将 $A/\sim$表示为 $A/\sim = \{\tilde{x} \mid x\in B\}$，$B$ 是 A 的子集，满足：

(1) 任给任给 $x, y\in B$，都有 $\tilde{x} \neq \tilde{y}$ ；

(2) 任给 $x\in A$，存在 $y\in B$，使得 $\tilde{x} = \tilde{y}$ 。

这样的子集 B 称为等价关系$\sim$的特征集。

以下讨论等价类和商集的性质。

由自返性，每个元素属于它的等价类。由对称性和传递性，每个等价类中的元素互相等价，且和等价类外的元素不等价。

3.2.11 定理 $\sim$是 A 上等价关系。

(1) 任给 $x\in A$，都有 $x\in \tilde{x}$ 。

(2) 任给 $x, y\in A$，$\tilde{x} = \tilde{y}$ 当且仅当 $x\sim y$。

证 (1) 任给 $x\in A$，由$\sim$的自返性得 $x\sim x$，所以 $x\in \tilde{x}$ 。

(2) 任给 $x, y\in A$，如果 $\tilde{x} = \tilde{y}$ ，则由(1)得 $x\in \tilde{x}$ ，所以 $x\in \tilde{y}$ ，因此 $x\sim y$。

任给 $x, y\in A$，如果 $x\sim y$，则任给 $z\in \tilde{x}$ ，都有 $z\sim x$，由$\sim$的传递性得 $z\sim y$，所以 $z\in \tilde{y}$ ，因此 $\tilde{x} \subseteq \tilde{y}$ 。

由$\sim$的对称性得 $y\sim x$，同理可证 $\tilde{y} \subseteq \tilde{x}$ 。■

由定理 3.2.11，可得商集的以下性质。

3.2.12 定理 $\sim$是 A 上等价关系。

(1) 任给 $\tilde{x} \in A/\sim$，$\tilde{x} \neq \varnothing$。

(2) $\bigcup(A/\sim) = A$。

(3) 任给 $\tilde{x}, \tilde{y} \in A/\sim$，如果 $\tilde{x} \neq \tilde{y}$ ，则 $\tilde{x} \cap \tilde{y} = \varnothing$。

证 (1)(2)由定理 3.2.11(1)直接可得

(3) 证明如果 $\tilde{x} \cap \tilde{y} \neq \varnothing$，则 $\tilde{x} = \tilde{y}$ 。

任给 $\tilde{x}$，$\tilde{y} \in A/\sim$，如果 $\tilde{x} \cap \tilde{y} \neq \varnothing$，则

存在 z，使得 $z\in \tilde{x}$ 且 $z\in \tilde{y}$ ，

所以

$z\sim x$ 且 $z\sim y$，

由定理 3.2.10(2)得 $\tilde{x} = \tilde{z} = \tilde{y}$ 。■

定理 3.2.12 的直观意义是说：商集 $A/\sim$将集合 A 分成互不相交的非空子集。这种将集合分成互不相交的非空子集的子集族是一种重要的子集族。

3.2.13 定义 划分 $A \neq \varnothing$，Γ是 A 的子集族。Γ称为 A 的一个划分，如果Γ满足以下条件：

(1) $\varnothing\notin\Gamma$；

(2) $\bigcup\Gamma = A$；

(3) Γ是不交的，即任给 $X, Y\in\Gamma$，如果 $X \neq Y$，则 $X\cap Y = \varnothing$。

定理 3.2.12 是说商集 $A/\sim$是 A 的一个划分，更进一步，A 的任何一个划分都是 A 在某个等价关系下的商集。具体地说，如果Γ是 A 的一个划分，则存在 A 上等价关系$\sim$，使得 $A/\sim = \Gamma$。

3.2.14 定理 Γ是 A 的一个划分，定义

$\sim = \{\langle x, y\rangle \mid$ 存在 $X\in\Gamma$，使得 $x, y\in X\}$，

则：

(1) $\sim$是 A 上等价关系。

(2) 任给 $X\in\Gamma$，任给 $x\in X$，都有 $\tilde{x} = X$。

(3) $A/\sim = \Gamma$。

证 (1) 证明$\sim$有自返性、对称性和传递性。

自返性。任给 $x\in A$，由$\bigcup\Gamma = A$ 得

存在 $X\in\Gamma$，使得 $x\in X$，

因此 $x\sim x$。

对称性。任给 $x, y\in A$，如果 $x\sim y$，则

存在 $X\in\Gamma$，使得 $x, y\in X$，

这也就是

存在 $X\in\Gamma$，使得 $y, x\in X$，

因此 $y\sim x$。

传递性。任给 $x, y, z\in A$，如果 $x\sim y$ 且 $y\sim z$，则

存在 $X, Y\in\Gamma$，使得 $x, y\in X$ 且 $y, z\in Y$。

由 $y\in X\cap Y$ 得

$X\cap Y \neq \varnothing$，

再由Γ是不交的得 $X = Y$，所以

存在 $X\in\Gamma$，使得 $x, z\in X$，

因此 $x\sim z$。

(2) 设 $X\in\Gamma$，$x\in X$，证明 $\tilde{x} = X$。

任给 $y\in X$，由$\sim$的定义得 $y\sim x$，所以

$y\in \tilde{x}$ 。

因此 $X \subseteq \tilde{x}$ 。

任给 $y\in \tilde{x}$ ，由$\sim$是等价关系得

$y\sim x$，

由$\sim$的定义得

存在 $Y\in\Gamma$，使得 $x, y\in Y$，

再由 $x\in X\cap Y$ 和Γ是不交的得 $X = Y$，所以

$y\in X$。

因此 $\tilde{x} \subseteq X$。

(3) 任给 $\tilde{x} \in A/\sim$，都有 $x\in A$，由$\bigcup\Gamma = A$ 得

存在 $X\in\Gamma$，使得 $x\in X$，

再由(2)得 $\tilde{x} = X$，所以

$\tilde{x} \in\Gamma$。

因此 $A/\sim \subseteq \Gamma$。

任给 $X\in\Gamma$，由 $X \neq \varnothing$得

存在 $x\in X$，

再由(2)得 $X = \tilde{x}$ ，所以

$X\in A/\sim$。

因此$\Gamma \subseteq A/\sim$。■

习题 3.2

3.2.1 R 是 A 上有对称性和传递性的二元关系。

(1) 证明：如果任给 $x\in A$，存在 $y\in A$，使得$\langle x, y\rangle\in R$ (这种性质称为持续性)，则 A 有自返性。

(2) 举例说明 R 不一定有自返性。

3.2.2 S 是 A 上有自返性和传递性的二元关系。令

$R = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle\in S \text{ 且} \langle y, x\rangle\in S\}$

证明：R 是 A 上等价关系。

3.2.3 n 是自然数且 n>1，令

$\sim = \{\langle x, y\rangle \mid x, y\in \mathbf{Z}\text{，存在 } z\in\mathbf{Z}\text{，使得 } y-x = \mathrm{n}z\}$

证明：

(1) $\sim$是 $\mathbf{Z}$ 上等价关系。这个等价关系称为模 n 同余关系。

(2) 任给 $x\in A$，都有 $\tilde{x} = \{x+\mathrm{n}z \mid z\in\mathbf{Z}\}$。

(3) $\mathbf{N}_{\mathrm{n}}$是等价关系$\sim$的特征集。

3.2.4 考虑 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上的二元关系

$R = \{\langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle \mid x+v = u+y\}$

(1) 证明：R 是 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上的等价关系。

(2) 仿照例 3.2.9，画出其等价类的示意图。

3.2.5 h 是 A 到 B 的映射，令

$\sim = \{\langle x, y\rangle \mid x, y\in A \text{ 且 } h(x) = h(y)\}$

证明：

(1) $\sim$是 A 上等价关系。所以可以构造 A 到 $A/\sim$的映射

$f：A\to A/\sim \quad f(x) = \tilde{x}$ 。

(2) 如果 $\tilde{x} = \tilde{y}$ ，则 $h(x) = h(y)$，所以可以构造 $A/\sim$到 B 映射

$g：A/\sim\to B \quad g(\tilde{x}) = h(x)$。

(3) f 是满射，g 是单射且 $h = g\circ f$。

(4) $\mathrm{ran}(h) = \mathrm{ran}(g)$。所以如果 h 是满射，则 g 是双射。

3.3 偏序关系

N 上的小于等于≤有以下三条性质：

(1) 任给 $x\in\mathbf{N}$，都有 $x\le x$；

(2) 任给 $x, y\in\mathbf{N}$，如果 $x\le y$ 且 $y\le x$，则 $x = y$；

(3) 任给 $x, y, z\in\mathbf{N}$ ，如果 $x\le y$ 且 $y\le z$，则 $x\le z$。

(1)和(3)分别是自返性和传递性，(2)称为反对称性。有这三条性质的二元关系是一种重要的二元关系。

3.3.1 定义 偏序关系 A 上二元关系 R 称为 A 上偏序关系，如果 R 满足以下性质：

(1) 自返性 任给 $x\in A$，都有 $<x, x>\in R$；

(2) 反对称性 任给 $x, y\in A$，如果 $<x, y>\in R$ 且 $<y, x>\in R$，则 $x = y$；

(3) 传递性 任给 $x, y, z\in A$，如果 $<x, y>\in R$ 且 $<y, z>\in R$，则 $<x, z>\in R$。

自返性和传递性的意义前面已经讲过，它们可以分别表示为 $\mathrm{I}_A \subseteq R$ 和 $R\circ R \subseteq R$。

A 上关系 R 有反对称性是说，A 中两个不同的元素，至多只能有一种次序的联系。

如果 R 有反对称性，则任给 $<x, y>\in R\cap R^{-1}$，都有 $<x, y>\in R$ 且 $<y, x>\in R$，由 R 的反对称性得 $x = y$，即

$$<x, y>\in \mathrm{I}_A,$$

所以 $R\cap R^{-1} \subseteq \mathrm{I}_A$。

反之，如果 $R\cap R^{-1} \subseteq \mathrm{I}_A$，则任给 $<x, y>\in R$ 和 $<y, x>\in R$，都有 $<x, y>\in R\cap R^{-1}$，由 $R\cap R^{-1} \subseteq \mathrm{I}_A$ 得 $<x, y>\in \mathrm{I}_A$，即

$$x = y,$$

所以 R 有反对称性。

因此 R 有反对称性也可以用 $R\cap R^{-1} \subseteq \mathrm{I}_A$ 来表示。

下面是偏序关系的几个例子。

3.3.2 例 **N**, **Z**, **Q** 和 **R** 上的小于等于关系分别是 **N**, **Z**, **Q** 和 **R** 上的偏序关系。

3.3.3 例 集合族上的包含关系是偏序关系(见定理 1.2.7)。

偏序关系可以看成一种广义的大小关系，直观地可以将集合中的元素依偏序关系排成一个次序。这种次序有各种情况。

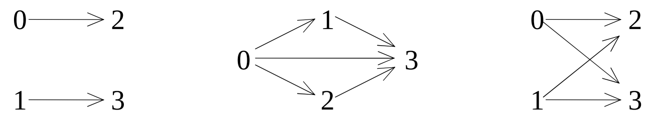
3.3.3 例 $A = \{0, 1, 2, 3\}$，令

$$R = \{<0, 2>, <1, 3>\}\cup\mathrm{I}_A,$$

$$S = \{<0, 1>, <0, 2>, <0, 3>, <1, 2>, <1, 3>\}\cup\mathrm{I}_A,$$

$$Q = \{<0, 2>, <0, 3>, <1, 2>, <1, 3>\}\cup\mathrm{I}_A,$$

则 R, S, Q 都是 A 上偏序关系，它们的直观形象如下：



例 3.3.3 也说明了一个集合上可以有不同的偏序关系。以下是 **N** 和 **Z** 上不同于小于等于关系的偏序关系。

3.3.4 例 n 是自然数且 n≥1，令

$$S_{\mathrm{n}} = \{<x, y> \mid \mathrm{n}\le x\le y \text{ 或 } x\le y\le \mathrm{n}-1\}$$

和

$$Q_{\mathrm{n}} = \{<x, y> \mid y\le \mathrm{n}-1 \text{ 且 } \mathrm{n}\le x\}$$

则 $R_{\mathrm{n}} = S_{\mathrm{n}}\cup Q_{\mathrm{n}}$ 是 **N** 上偏序关系，它的直观形象如下：

$$\mathrm{n}, \mathrm{n}+1, \cdots\cdots, 0, \cdots, \mathrm{n}-1$$

3.3.5 例 令

$$R_1 = \{<x, y> \mid 0\le x\le y\},$$

$$R_2 = \{<x, y> \mid y\le x\le -1\}$$

$$R_3 = \{<x, y> \mid 0\le x \text{ 且 } y\le -1\},$$

则 $R = R_1\cup R_2\cup R_3$ 是 **Z** 上偏序关系，它的直观形象如下：

0, 1,⋯, n, ⋯⋯, –1, –2,⋯, –n, ⋯⋯

3.3.6 例 考虑 **N** 上二元关系

R = {<x, y>｜ 存在 n∈**N**，使得 $y = x$n}

<x, y>∈R 的直观意义是 x 整除 y，所以 R 称为 **N** 上整除关系。R 是偏序关系的理由如下：

自返性。任给 x∈**N**，都有 $x = x1$，所以<x, x>∈R；

反对称性。任给 x, y∈**N**，如果<x, y>∈R 且<y, x>>∈R，则

存在 n, m∈**N**，使得 $y = x$n, $x = y$m，

所以

$y = y$mn。

当 $y = 0$ 时，有

$x = y$m $= 0 = y$，

当 $y \neq 0$ 时，由乘法消去律得 mn = 1，所以

m = 1，

也有 $x = y$m $= y1 = y$；

传递性。任给 x, y, z∈**N**，如果<x, y>∈R 且<y, z>>∈R，则

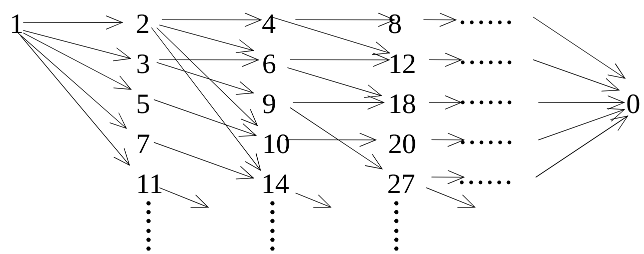
存在 n, m∈**N**，使得 $y = x$n, $z = y$m，

所以

存在 nm∈**N**，使得 $z = y$m $= x$(nm)，

因此<x, z>∈R。

整除关系的直观形象如下：



R 是 A 上偏序关系，如果<x, y>∈R 或<y, x>∈R，则称 x, y 可比较，反之，如果<x, y>∉R 且<y, x>∉R，则称 x, y 不可比较。如在例 3.3.3 中，对于偏序 S 来说，1 和 2 不可比较，又如在例 3.3.6 中，任何两个素数都不可比较。

如果偏序关系 R 使得 A 中任何两个两个元素都可比较，则称 R 有可比较性。和自返性、对称性、反对称性、传递性类似，A 上偏序 R 有可比较性可表示为 $A^2 \subseteq R \cup R^{-1}$。有可比较性的偏序关系是一种重要的偏序关系。

3.3.7 定义 全序关系 R 是 A 上全序关系，如果 R 有可比较性，即

任给 x, y∈A，都有<x, y>∈R 或<y, x>>∈R，

则称 R 是 A 上全序关系，简称 R 是 A 上全序。

最常见的全序关系是 **N**, **Z**, **Q** 和 **R** 上的小于等于关系。Γ是集合族，由单调集合族的定义可知：Γ上的包含关系是全序关系当且仅当Γ是单调的。

对于 A 中两个不同的元素，可比较性是说它们至少按一种次序相联系，反对称性是说它们至多按一种次序相联系，所以 A 上一个全序保证了 A 中任两个元素恰好按一种次序相联系。

如果将 A 的元素依全序关系排成次序，则它的直观形象将是一条直线。因此，A 上全序也称为 A 上线形序。反之依偏序关系将 A 的元素排成次序，如果它的直观形象将是一条直线，则这个偏序关系就是全序关系。因此，例 3.1.4 中 R_{n} 和例 3.1.4 中 R 都是全序，而例 3.1.3 中 R, S, Q 和例 3.1.6 中 R 都不是全序。

一个次序倒过来仍是一个次序，一个次序限制在部分元素上还是一个次序。这就是说，偏序关系在关系的逆和限制下仍是偏序关系。进一步有，如果是全序，则在逆和限制下仍是全序。

3.3.8 定理 R 是 A 上偏序关系，$B \subseteq A$。

(1) R^{-1} 是 A 上偏序关系。

(2) $R|_B$ 是 A 上偏序关系。

(3) 如果 R 是全序，则 R^{-1} 和 $R|_B$ 也是全序。

证 (1) 证明 R^{-1} 有自返性、对称性和传递性。

自返性。任给 $x\in A$，由 R 的自返性得

$$<x, x>\in R，$$

所以 $<x, x>\in R^{-1}$；

反对称性。任给 $x, y\in A$，如果 $<x, y>\in R^{-1}$ 且 $<y, x>\in R^{-1}$，则

$$<y, x>\in R \text{ 且 } <x, y>\in R，$$

由 R 的反对称性得 $x = y$；

传递性。任给 $x, y, z\in A$，如果 $<x, y>\in R^{-1}$ 且 $<y, z>\in R^{-1}$，则

$$<y, x>\in R \text{ 且 } <z, y>\in R，$$

由 R 的传递性得

$$<z, x>\in R，$$

所以 $<x, z>\in R^{-1}$。

(2) 证明 $R|_B$ 有自返性、对称性和传递性。

自返性。任给 $x\in B$，都有 $x\in A$，由 R 的自返性得

$$<x, x>\in R，$$

所以 $<x, x>\in R|_B$。

反对称性。任给 $x, y\in B$，如果 $<x, y>\in R|_B$ 且 $<y, x>\in R|_B$，则

$$<x, y>\in R \text{ 且 } <y, x>\in R，$$

由 R 的反对称性得 $x = y$。

传递性。任给 $x, y, z\in A$，如果 $<x, y>\in R|_B$ 且 $<y, z>\in R|_B$，则

$$<x, y>\in R \text{ 且 } <y, z>\in R，$$

由 R 的传递性得

$$<x, z>\in R，$$

所以 $<x, z>\in R|_B$。

(3) 由(1)和(2)，只需证 R^{-1} 和 $R|_B$ 的可比较性。

任给 $x, y\in A$，由 R 的可比较性得

$$<x, y>\in R \text{ 或 } <y, x>\in R，$$

所以 $<x, y>\in R^{-1}$ 或 $<y, x>\in R^{-1}$。

任给 $x, y\in B$，都有 $x, y\in A$，由 R 的可比较性得

$$<x, y>\in R \text{ 或 } <y, x>\in R，$$

所以 $<x, y>\in R|_B$ 或 $<y, x>\in R|_B$。■

利用自返性、反对称性和传递性的集合表示法，可以更简单地证明定理 3.3.8 的(1)和(2)。

(1) 证明从 $I_A\subseteq R$, $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$ 和 $R\circ R\subseteq R$ 得 $I_A\subseteq R^{-1}$, $R^{-1}\cap(R^{-1})^{-1}\subseteq I_A$ 和 $R^{-1}\circ R^{-1}\subseteq R^{-1}$。

从 $I_A\subseteq R$ 得

$$I_A = I_A^{-1}\subseteq R^{-1}，$$

从 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$ 得

$$R^{-1}\cap(R^{-1})^{-1} = R^{-1}\cap R\subseteq I_A，$$

从 $R\circ R\subseteq R$ 得 $R^{-1}\circ R^{-1} = (R\circ R)^{-1}\subseteq R^{-1}$。

(2) 证明从 $I_A\subseteq R$, $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$ 和 $R\circ R\subseteq R$ 得 $I_B\subseteq R|_B$, $R|_B\cap(R|_B)^{-1}\subseteq I_B$ 和 $R|_B\circ R|_B\subseteq R|_B$。

从 $I_A\subseteq R$ 得

$$I_B = I_A|_B\subseteq R|_B，$$

从 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$ 得

$$R|_B\cap(R|_B)^{-1} = R|_B\cap R^{-1}|_B = (R\cap R^{-1})|_B\subseteq I_A|_B = I_A，$$

从 $R\circ R\subseteq R$ 得 $R|_B\circ R|_B\subseteq (R\circ R)|_B\subseteq R|_B$。

习题 3.3

3.3.1 f 是 A 到 B 的双射，R 是 A 上偏序关系，令

$$R(f) = \{<f(x), f(x)> \mid <x, y>\in R\}$$

证明：

(1) $R(f)$是 B 上偏序关系。

(2) 任给 $x, y\in A$，都有 $<x, y>\in R$ 当且仅当 $<f(x), f(y)>\in R(f)$。

3.3.2 考虑 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上的二元关系

$$S = \{<<x, y>, <u, v>> \mid x\leq u \text{ 且 } y\leq v\}。$$

证明：S 是 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上偏序关系，但不是全序关系。

3.3.3　S 是 A 上有自返性和传递性的二元关系，由习题 3.2.2 可知

$$\sim\ = \{<x, y> \mid <x, y>\in S \text{ 且 } <y, x>\in S\}$$

是 A 上等价关系，所以可以定义商集 $A/\sim$上的二元关系

$$S^* = \{<\tilde{x}, \tilde{y}> \mid <x, y>\in S\}$$

证明：

(1) $x\sim u$ 且 $y\sim v$，则$<x, y>\in S$ 当且仅当$<u, v>\in S$。

(2) $<\tilde{x}, \tilde{y}>\in S^*$当且仅当$<x, y>\in S$。

(3) S^*是 $A/\sim$上偏序关系。

(4) 如果 S 有可比较性，则 S^*是全序。

3.3.4　R 是 A 上二元关系。

(1) 证明：R 有可比较性当且仅当 $A^2 \subseteq R\cup R^{-1}$。

(2) 利用(1)证明定理 3.3.8 的(3)。

3.3.5　R 是 A 上偏序关系，令 $S = R\setminus \mathrm{I}_A$，即

$$S = \{<x, y> \mid <x, y>\in R \text{ 且 } x \neq y\}$$

证明：S 有反自返性(反自返性是指：任给 $x\in A$，都有$<x, y>\notin S$)和传递性。

具有反自返性和传递性的二元关系称为严格偏序关系。注意严格偏序关系不是偏序关系。在一些关于集合的著作中所定义的偏序关系和本书不一样，而是这里所说的严格偏序关系。

3.3.6　S 是 A 上严格偏序关系，令 $R = S\cup \mathrm{I}_A$，即

$$R = \{<x, y> \mid <x, y>\in S \text{ 或 } x = y\}$$

证明：R 是 A 上偏序关系。

3.3.7　A 上既是等价关系又是偏序关系的二元关系是什么关系？

3.4　偏　序　集

这一节继续讨论偏序关系。

3.4.1 定义　偏序集　带有偏序关系的集合称为偏序集。如果这个偏序是全序，则称这个偏序集为全序集。

一般情况下，$\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 作为偏序集，它们的偏序总是指小于等于关系，集合族作为偏序集，偏序总是指包含关系。

A 是偏序集，它的偏序是 R，B 是 A 的子集，B 作为偏序集，在不加说明的情况下，总是以 $R|_B$ 作为它的偏序。特别地，$\mathbf{N}_n$ 以小于等于关系作为它的偏序

在一般讨论偏序关系时，在不至于混淆时，总是将偏序关系记为≤。如果为了指出≤是 A 的偏序，则可以将≤表示为$\leq_A$。当有不同的偏序时，还可以在≤上加下标，如$\leq_1$, $\leq_2$ 等。

为了简便起见，将$<x, y>\in\ \leq$记为 $x\leq y$，称为 x 小于等于 y，将 $x\leq y$ 且 $x \neq y$ 记为 $x<y$，称为 x 小于 y。有时也将 $x\leq y$ 记为 $y\geq x$，称为 y 大于等于 x，将 $x<y$ 记为 $y>x$，称为 y 大于 x。

数在小于等于关系下的一些有关大小的概念可以推广到偏序集。

3.4.2 定义　上界和下界　A 是偏序集，$X \subseteq A$。A 中比 X 中每个元素都大或等的元素称为 X 的上界。A 中比 X 中每个元素都小或等的元素称为 X 的下界。对于 $a\in A$，a 是 X 的上界的条件是：

任给 $x\in X$，都有 $x\leq a$。

a 是 X 的下界的条件是：

任给 $x\in X$，都有 $x\geq a$。

如果 a 是 X 的上界(下界)且 $b\geq a$ ($b\leq a$)，则 b 也是 X 的上界(下界)，所以 X 的上界和下界可以有多个。如对于 $\mathbf{N}$ 的子集 $\mathbf{N}_n$ 来说，n, n+1,……都是它的上界。另一方面，X 不一定有上界和下界，如 $\mathbf{R}$ 的子集 $\mathbf{Z}$ 就没有上界和下界。

3.4.3 定义　上确界和下确界　A 是偏序集，$X \subseteq A$。X 的上界中最小的元素称为 X 的上确界。X 的下界中最大的元素称为 X 的下确界。对于 $a\in A$，a 是 X 的上确界的条件是：

a 是 X 的上界且(任给 X 的上界 x，都有 $x\geq a$)。

a 是 X 的下确界的条件是：

a 是 X 的下界且(任给 X 的下界 x，都有 $x\leq a$)。

如果 a 和 b 都是 X 的上确界，则 b 是 X 的上界，由 a 是 X 的上确界的条件得 $b\geq a$，同理可得 $a\geq b$，因此 $a = b$。这说明 X 的上确界如果存在则惟一。同样，X 的下确界如果存在也惟一。

X 的上确界(下确界)不一定存在。X 的上界(下界)不存在时，当然 X 的上确界(下确界)不存在，就是 X 的上界(下界)存在时，X 的上确界(下确界)也可能不存在。

如在例 3.3.3 中，对于偏序关系 Q 来说，子集$\{0, 1\}$有上界 2 和 3，但没有上确界，子集$\{2, 3\}$有下界 0 和 1，但没有下确界。

3.4.4 定义　最大元和最小元　A 是偏序集，$X \subseteq A$。X 中最大的元素称为 X 的最大元。X 中最小的元素称为 X 的最小元。对于 $a\in A$，a 是 X 的最大元的条件是：

$a\in X$ 且(任给 $x\in X$，都有 $x\leq a$)。

a 是 X 的最小元的条件是：

$a\in X$ 且(任给 $x\in X$，都有 $x\geq a$)。

与上界和下界的条件相比，可以看出最大元一定是上界，最小元一定是下界。

如果 a 是 X 的最大元，则 $a\in X$，所以任给 X 的上界 x，都有 $x\geq a$，因此 a 还是 X 的上确界。但 X 的上确界不一定是 X 的最大元。如在例 3.3.3 中，对于偏序关系 S 来说，3 是子集$\{0, 1, 2\}$的上确界，但不是子集$\{0, 1, 2\}$的最大元。

类似地，X 的最小元是 X 的下确界，但 X 的下确界不一定是 X 的最小元。

3.4.5 定义　极大元和极小元　A 是偏序集，$X \subseteq A$。$a\in X$，

如果 X 没有元素比 a 大，则称 a 是 X 的极大元，如果 X 没有元素比 a 小，则称 a 是 X 的极小元。对于 $a\in A$，a 是 X 的极大元的条件是：

$a\in X$ 且(不存在 $x\in X$，使得 $x>a$)，

等价地说也就是：

$a\in X$ 且(任给 $x\in X$，如果 $x\geq a$，则 $x = a$)。

a 是 X 的极小元的条件是：

$a\in X$ 且(不存在 $x\in X$，使得 $x<a$)，

等价地说也就是：

$a\in X$ 且(任给 $x\in X$，如果 $x\leq a$，则 $x = a$)。

将 A 上偏序关系看做一种广义的大小关系，并参照熟悉的数的小于等于关系，则上界，下界，上确界，下确界，最大元，最小元是容易理解的，不容易理解的是极大元和极小元。

极大元和最大元不同，X 的最大元是说它比 X 中其它元素都大，而 X 的极大元只是说 X 中没有比它大的元素。所以最大元一定是极大元，但 X 可以没有最大元而有极大元，并且极大元可以不至一个。如在例 3.3.3 中，对于偏序关系 R 来说，A 本身就有极大元 2 和 3，但 A 没有最大元。

极小元和最小元的关系是类似的。

为了熟悉这些概念，我们来看一些例子。

3.4.6 例　Γ是集合族，$\Sigma \subseteq \Gamma$，令

$X = \bigcup\Sigma$，$Y = \bigcap\Sigma$。

如果 $X\in\Gamma$，则 X 是Σ的上确界(见定理 1.5.10(1))，如果 $Y\in\Gamma$，则 Y 是Σ的上确界(见定理 1.5.10(2))。当$\Gamma = \mathrm{P}(A)$时，一定有 $X, Y\in\Gamma$，所以任给$\Sigma \subseteq \mathrm{P}(A)$，$\Sigma$在 $\mathrm{P}(A)$中都有上确界和下确界。

3.4.7 例　A 是偏序集，$\varnothing \subseteq A$。因为$\varnothing$没有任何元素，所以 A 中所有元素都是$\varnothing$的上界，因此 A 的最小元就是$\varnothing$的上确界。类似地，A 中所有元素都是$\varnothing$的下界，因此 A 的最大元就是$\varnothing$的下确界。

3.4.8 例　考虑 **N** 上整除关系 R (见例 3.3.6)。任给 $x, y\in\mathbf{N}$，$\{x, y\}$的上确界就是 x, y 的最小公倍数，$\{x, y\}$的下确界就是 x, y 的最大公因数，它们一定存在。1 是 **N** 的最小元，0 是 **N** 的最大元。任给 $X\subseteq\mathbf{N}$，如果 $1\notin X$，则 X 中的任何素数都是极小元。

3.4.9 例　Γ是集合族，Γ的极大元也称为极大集。Γ中 A 是极大集的条件是：

任给 $X\in\Gamma$，如果 $A\subseteq X$，则 $A = X$。

又如果 A 是Γ的最大元，则Γ是 A 子集族。

A 是偏序集，偏序关系是$\leq_A$，$B\subseteq A$，$\leq_A$在 B 上的限制$\leq_A|B$ (是 B 上的偏序关系)记为$\leq_B$。

设 $X\subseteq B\subseteq A$。因为 $X\subseteq A$，所以对于$\leq_A$来说，X 有最大元、最小元、极大元和极小元的概念。又因为 $X\subseteq B$，所以对于$\leq_B$来说，X 也有最大元、最小元、极大元和极小元的概念。由 $X\subseteq B$ 可知，任给 $x, y\in X$，都有 $x\leq_A y$ 当且仅当 $x\leq_B y$，而以上四个概念的定义中只涉及到 X 中的元素，因此它们实际上是一样的。

然而，上界、下界、上确界和下确界就依赖于 A 和 B 了，因为这些概念的定义中，分别涉及到 A 和 B 的元素。

如对于集合 $X = \{x \mid x\in\mathbf{Q}$ 且 $x^2<2\}$来说，作为 **Q** 的子集它没有上确界和下确界，但作为 **R** 的子集它就有上确界$\sqrt{2}$和下确界$-\sqrt{2}$。

又如在例 3.3.3 中，对于偏序关系 S 来说，$\{0, 1, 2\}$作为它自身的子集没有上界，但作为 A 的子集就有上界 3。

全序集是偏序集的一种重要类型，在研究偏序集时，它的全序子集有重要的位置。

3.4.10 定义　线形链　A 是偏序集，$X\subseteq A$。如果任给 $x, y\in X$，都有 $x\leq y$ 或 $y\leq x$，即$\leq|_X$是全序，则称 X 是 A 的线形链。

最常见的全序关系是 **N**, **Z**, **Q** 和 **R** 上的小于等于关系。Γ是集合族，由单调集合族的定义可知：Γ上的包含关系是全序关系当且仅当Γ是单调的。

这里先看几个例子，关于线形链的应用以后再讨论。

3.4.11 例　考虑 **N** 上整除关系 R (见例 3.3.6)，则$\{2^n \mid n\in\mathbf{N}\}$是线形链。

3.4.12 例　考虑习题 3.3.2 中的 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上的偏序关系 S，则$\{\langle x, x\rangle \mid x\in\mathbf{R}\}$是线形链。

3.4.13 例　X 是 A 的线形链。如果 a 是 X 的极大元，则 a 是 X 的最大元。理由如下：

任给 $x\in X$，由 X 是线形链得

$x\geq a$ 或 $x\leq a$，

当 $x\neq a$ 时，由 a 是极大元可知没有 $x>a$，所以

$x\leq a$，

当 $x = a$ 时当然有

$x\leq a$。

这就证明了

任给 $x\in X$，都有 $x\leq a$，

因此 a 是 X 的最大元。

类似地，如果 a 是 X 的极小元，则 a 是 X 的最小元。

这个例子说明了线形链不需要极大元和极小元的概念。特别地，全序集不需要极大元和极小元的概念。

A 是偏序集，偏序关系是$\leq_A$，f 是 A 到 B 的双射，$\leq_B = \leq_A(f)$，由习题 3.3.1，不但$\leq_B$是 B 上偏序关系，而且任给 $x, y\in A$，都有 $x\leq_A y$ 当且仅当 $f(x)\leq_B f(y)$。

这说明了抽象地看，A 上的次序$\leq_A$和 B 上的次序$\leq_B$没有什么不一样。为了说明两个偏序集上的次序是一样的，引进偏序集相似的概念。

3.4.14 定义　相似映射　A, B 是偏序集，偏序关系分别是$\leq_A$和$\leq_B$，f 是 A 到 B 的双射。如果 f 满足

任给 $x, y\in A$，都有 $x\leq_A y$ 当且仅当 $f(x)\leq_B f(y)$，

则称 f 是 A 到 B 的相似映射。

3.4.15 定义 相似 A, B 是偏序集，如果存在 A 到 B 的相似映射，则称 A 和 B 相似，记为 $A\cong B$。

偏序集的相似有以下基本性质。

3.4.16 定理 A, B, C 是偏序集，则：

(1) $A\cong A$。

(2) 如果 $A\cong B$，则 $B\cong A$。

(3) 如果 $A\cong B$ 且 $B\cong C$，则 $A\cong C$。

证 (1) 任给 $x, y\in A$，都有

$x\le_A y$ 当且仅当 $\mathrm{i}_A(x)\le_A \mathrm{i}_A(y)$，

所以 i_A 是 A 到 A 的相似映射，因此 $A\cong A$。

(2) 如果 $A\cong B$，则存在 A 到 B 的相似映射 f，考虑 f 的逆映射 f^{-1}。任给 $x, y\in B$，都有

$x\le_B y$ 当且仅当 $f(f^{-1}(x))\le_B f(f^{-1}(y))$

当且仅当 $f^{-1}(x)\le_A f^{-1}(y)$，

所以 f^{-1} 是 B 到 A 的相似映射，因此 $B\cong A$。

(3) 如果 $A\cong B$ 且 $B\cong C$，则存在 A 到 B 的相似映射 f 和 B 到 C 的相似映射 g，考虑 f 和 g 的复合映射 $g\circ f$。任给 $x, y\in A$，都有

$x\le_A y$ 当且仅当 $f(x)\le_B f(y)$

当且仅当 $g(f(x))\le_C g(f(y))$

当且仅当 $(g\circ f)(x)\le_C (g\circ f)(y)$，

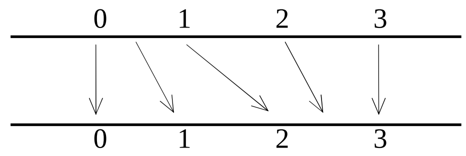
所以 $g\circ f$ 是 A 到 C 的相似映射，因此 $A\cong C$。■

习题 3.3.1 说明了如果 f 是 A 到 B 的双射，则 A (偏序关系是 $\le_A$)和 B (偏序关系是 $\le_B = \le_A(f)$)相似，f 就是相似映射。再来看相似映射和相似的几个例子。

3.4.17 例 A 是偏序集，恒等映射 i_A 是 A 到自身的相似映射。但除恒等映射外，A 到自身还可能有其它的相似映射。如：

$$f：(0, 3]\to(0, 3] = \begin{cases} 2x & \text{如果 } x\in(0, 1] \\ \frac{1}{2}x+\frac{2}{3} & \text{如果 } x\in(1, 3]， \end{cases}$$

也是(0, 3]到自身的相似映射。



3.4.18 例 $A = \{2, 3, 5\}$，$\mathrm{P}(A)$上偏序关系为包含关系。

$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$，

B 上偏序关系为 $\mathbf{N}$ 上整除关系在 B 上的限制。定义 $\mathrm{P}(A)$到 B 的映射

$$f：\mathrm{P}(A)\to B = \begin{cases} 1 & \text{如果 } X = \varnothing \\ X \text{ 中的数的乘积} & \text{如果 } X \ne \varnothing， \end{cases}$$

如 $f(\{2, 5\}) = 10$，$f(\{2, 3, 5\}) = 30$ 等。

f 就是 $\mathrm{P}(A)$到 B 的相似映射，所以 $\mathrm{P}(A)\cong B$。

在下一个例子前，我们先来证明相似映射的一个性质。

3.4.19 定理 A, B 是偏序集，偏序关系分别是$\le_A$和$\le_B$，f 是 A 到 B 的相似映射，则任给 $x, y\in A$，都有 $x<_A y$ 当且仅当 $f(x)<_B f(y)$。

证 任给 $x, y\in A$，如果 $x<_A y$，则

$x\le_A y$ 且 $x \ne y$，

由 $x\le_A y$ 和 f 是相似映射得

$f(x)\le_B f(y)$，

由 $x \ne y$ 和 f 是双射得

$f(x) \ne f(y)$，

所以

$f(x)<_B f(y)$，

类似地可证，如果 $f(x)<_B f(y)$，则 $x<_A y$。■

3.4.20 例 f 是 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的相似映射，则 f 一定是 $\mathrm{i}_{\mathbf{N}}$，使用反证法证明如下：

设 $f \ne \mathrm{i}_{\mathbf{N}}$，则存在 $\mathrm{n}\in\mathbf{N}$，使得 $f(\mathrm{n}) \ne \mathrm{i}_{\mathbf{N}}(\mathrm{n}) = \mathrm{n}$，所以

$$A = \{n \mid n\in\mathbf{N} \text{ 且 } f(n) \neq n\}$$

不是空集，由自然数的最小数原理，A 有最小数 s。由 s 是 A 的极小数可知：$f(s) \neq s$ 而任给 $n<s$，都有 $f(n) = n$。

如果 $f(s)<s$，则由定理 3.4.19 得

$$f(f(s))<f(s),$$

由 $f(s)<s$ 和 s 是 A 的极小数得

$$f(f(s)) = f(s),$$

和 $f(f(s))<f(s)$矛盾。

如果 $s<f(s)$，则

$$f(f^{-1}(s)) = s<f(s),$$

由 $f(f^{-1}(s))<f(s)$和定理 3.4.19 得

$$f^{-1}(s)<s,$$

由 $f^{-1}(s)<s$ 和 s 是 A 的极小数得

$$f(f^{-1}(s)) = f^{-1}(s),$$

所以

$$f^{-1}(s) = f(f^{-1}(s)) = s,$$

和 $f^{-1}(s)<s$ 矛盾。

习题 3.4

3.4.1 A 是偏序集，$a, b, c\in A$，证明：

(1) 如果 $a<b$ 且 $b\leq c$，则 $a<c$。

(2) 如果 $a\leq b$ 且 $b<c$，则 $a<c$。

3.4.2 $A = \{0, 1, 2, 3,4\}$，$B = \{0, 1\}$，$C = \{0, 1, 2\}$。令$\leq = \{<0,1>, <0,2>, <0,3>, <0,4>, <1,3>, <1,4>, <2,3>, <2,4>, <3,4>\}\cup I_A$。

(1) 仿例 3.3.3 画出 A 的直观图形。

(2) 分别指出 B 和 C 的上界、上确界、极大元和极小元。

3.4.3 A 是偏序集，$X \subseteq A$，a 是 X 的上界，证明：如果 $a\in X$，则 a 是 A 的最大元。

3.4.4 A 是偏序集，$X \subseteq A$，证明：如果 X 只有一个上界 a，则 a 是 A 的极大元。

3.4.5 A, B 是偏序集，f 是 A 到 B 的相似映射。证明：a 是 X 的上界(上确界，最大元，极大元)当且仅当 $f(a)$是 $f[X]$的上界(上确界，最大元，极大元)。

3.4.6 R 是 A 上偏序关系，$Q = R^{-1}$ 也是 A 上偏序关系。为了区别在这两个不同偏序下的上界，下界等概念，分别加上前缀 R-和 Q-，如 R-上界是指在偏序 R 下的上界，Q-极小元是指在 Q 下的极小元。设 $X \subseteq A$，证明：

(1) a 是 X 的 R-上界(上确界，最大元，极大元)当且仅当 a 是 X 的 Q-下界(下确界，最小元，极小元)。

(2) a 是 X 的 R-下界(下确界，最小元，极小元)当且仅当 a 是 X 的 Q-上界(上确界，最大元，极大元)。

因此在一般偏序集上成立的关于上界，上确界，最大元和极大元的性质，也一定有相应的关于下界，下确界，最小元和极小元的性质。特别地，习题 3.4.3、习题 3.4.4 和习题 3.4.5 所证明的关于上界，上确界，最大元和极大元的性质，对于下界，下确界，最小元和极小元也有相应的结果。

3.4.7 A 是偏序集，$\Gamma = \{A_i \mid i\in I\}$，任给 $i\in I$，A_i 都是 A 的线形链。证明：如果Γ是单调的，则$\bigcup_{i\in I}A_i$ 也是 A 的线形链。

3.4.8 A, B 是偏序集，f 是 A 到 B 的相似映射，$X \subseteq A$。证明：X 是 A 的线形链当且仅当 $f[X]$是 B 的线形链。特别地，A 是全序集当且仅当 B 是全序集。

3.4.9 A, B 是偏序集，偏序关系分别是$\leq_A$和$\leq_B$，f 是 A 到 B 的映射。如果 f 满足

任给 $x, y\in A$，如果 $x\leq_A y$ 则 $f(x)\leq_B f(y)$。

则称 f 是 A 到 B 的保序映射。设 f 是双射。

(1) 证明：如果 A 是全序集，则 f 是 A 到 B 的相似映射。

(2) 举例说明 f 不一定是 A 到 B 的相似映射。

第四章　基　　数

4.1　集合的基数

对于有限集合有两个基本的问题。第一是集合有多少个元素，如{真，假}、{1, 2}都有两个元素，太阳系的行星有 9 个元素；第二是两个集合的元素是否一样多，如太阳系的行星和 $\mathbf{N}_9$ 有一样多的元素。如果我们知道了两个集合的元素各是多少，当然也就知道了它们的元素是否一样多。但判断两个集合的元素是否一样多，并不一定需要知道它们各有多少元素，如电影院里坐满了人，我们就知道看电影的人和电影院的座位一样多，而不需要知道有多少人和多少座位。一般地，对两个有限集合来说，只要将它们的元素一一对应，就能断定它们的元素一样多。按映射的话来说，就是如果它们之间有一个双射，则它们的元素就一样多。

我们是如何数集合中元素的个数的呢？计数过程实际上是将这个集合的元素和一部分自然数作一一对应。详细地说，我们数一个有 n 个元素的集合，实际上就是将这 n 个元素和{1,⋯, n}的元素作一一对应。如果在计数过程中将第一个记为 0，则就是将这 n 个元素和 $\mathbf{N}_n$ 的元素作一一对应。

进一步问，自然数的概念从何而来，正是通过一一对应而得到的。如“ 5 ”这个概念，就是通过许多具有五个元素的集合抽象得到的，而这些集合有同样的元素正是因为它们的元素之间能够一一对应。

通过以上分析，可以看出两个有限集合元素之间的一一对应，不但是计数的根据，而且是自然数概念的基础。

注意到集合元素之间的一一对应并不依赖于集合是否有限，所以一个自然的想法就是将集合元素间的一一对应作为两个集合有同样多元素的标准，也可以用集合元素间的一一对应来推广自然数的概念。

4.1.1 定义　集合的等势　如果存在 A 到 B 的双射 f，则称 A 和 B 等势，记为 $A\approx B$。

集合等势有以下性质。

4.1.2 定理　A, B, C 是任何集合。

(1) 自返性　$A\approx A$。

(2) 对称性　如果 $A\approx B$，则 $B\approx A$。

(3) 传递性　如果 $A\approx B$ 且 $B\approx C$，则 $A\approx C$。

证　(1) A 到 A 的恒等映射 i_A 是双射，因此 $A\approx A$。

(2) 如果 $A\approx B$，则存在 A 到 B 的双射 f，所以存在 B 到 A 的双射 f^{-1}(f 的逆映射)，因此 $B\approx A$。

(3) 如果 $A\approx B$ 且 $B\approx C$，则存在 A 到 B 和双射 f 和 B 到 A 的双射 g，所以存在 A 到 C 的双射 $g\circ f$ (f 和 g 的复合)，因此 $A\approx C$。

■

由定理 4.1.2，并参考关于等价关系、等价类的讨论，可知彼此等势的集合可以确定一个刻画元素个数的数。

4.1.3 定义　基数　所有彼此等势的集合确定的数称为基数。和集合 A 彼此等势的所有集合(从而它们彼此等势)确定的基数称为 A 的基数，记为$|A|$。这样就有：

$$|A| = |B| \text{当且仅当 } A\approx B\text{。}$$

空集到非空集合的空映射不是双射，所以空集的基数和任何非空集合的基数都不相同，即任给非空集合 A，都有$|\varnothing| \neq |A|$。

按照对自然数的直观理解，所有和 $\mathbf{N}_n$ 等势的集合确定的基数就是 n，即$|\mathbf{N}_n| = \mathrm{n}$，特别地有$|\varnothing| = |\mathbf{N}_0| = 0$。$A$ 有 n 个元素就是$|A| = |\mathbf{N}_n| = \mathrm{n}$。

注意需要证明当 $\mathrm{n} \neq \mathrm{m}$ 时有$|\mathbf{N}_n| \neq |\mathbf{N}_m|$，才能说$|\mathbf{N}_n| = \mathrm{n}$，

否则会产生矛盾。这个证明以后再讲。

现在来看无限集合，令 $A = \{2x \mid x\in\mathbf{N}\}$是所有偶数的集合，则 A 是 $\mathbf{N}$ 的真子集。取 $\mathbf{N}$ 到 A 的映射

$$f：\mathbf{N}\to A \quad f(x) = 2x,$$

则 f 是双射，所以$|\,\mathbf{N}\,| = |\,A\,|$。这就是说 $\mathbf{N}$ 可以和它的一个真子集有相同的基数，即 $\mathbf{N}$ 和它的一个真子集的元素个数一样多。

一个集合确实要比它的真子集多出一些元素，多出那些属于它而不属于它的真子集的元素，而现在又说它们的元素个数一样多，这点看起来似乎违背常识。历史上有人正是因为这一点而不承认无限集合，有些承认无限集合的人也因为这一点而反对对无限集合计数。

集合元素的个数只是集合的一种性质，为什么人们直观上认为集合和它的真子集不可以有同样多的元素呢？

因为人们对集合性质的直观认识一般总是从有限集合得到的，而在有限集合中，一个集合和它的真子集的元素个数一定不相等。详细地说，如果 A 和 B 都是有限集合且 $B \subseteq A$，则 $B = A$ 当且仅当 B 和 A 有同样的元素个数。这就使得在 $B\subseteq A$ 时，总是将 $B = A$ 和 B 和 A 有同样的元素个数这两个不同的概念当作一回事，所以当无限集合中这两个概念不一致时，就产生了困惑。

认识到这两个概念的不同，无限集合能和其真子集等势是可以接受的。以后我们还会看到，在一定的假设下，任何无限集合都能和其某个真子集等势。所以这个性质是区别有限和无限的的本质标志之一。

无限集合基数上产生的问题和“整体等于部分”这个问题无关。集合论中的整体和部分就是集合和它的真子集，它们严格遵守“整体不等于部分”的原则，因为真子集就是通过它不等于原集合而定义的。基数只是集合的一种性质，虽然在有限集合上，“整体不等于部分”恰好体现在整体的基数不等于部分的基数，但我们千万不能把整体的基数不等于部分的基数当作“整体不等于部分”的标准，推广到无限集合上。整体有些性质和部分一样，并不等于整体等于部分。

认识到无限集合的这一性质，对以下一些例子就不会感到惊讶了。

4.1.4 例 $|\,\mathbf{N}\times\mathbf{N}\,| = |\,\mathbf{N}\,|$。首先将 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的元素排列如下：

$$\begin{array}{llllll}
\langle 0, 0\rangle & \langle 0, 1\rangle & \langle 0, 2\rangle & \langle 0, 3\rangle & \cdots & \langle 0, m\rangle \quad \cdots\cdots \\
\langle 1, 0\rangle & \langle 1, 1\rangle & \langle 1, 2\rangle & \cdots\cdots & & \\
\langle 2, 0\rangle & \langle 2, 1\rangle & \cdots\cdots & & & \\
\langle 3, 0\rangle & \cdots\cdots & & & & \\
\vdots & & & & & \\
\langle n, 0\rangle & & & & & \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

然后按箭头方向和 $\mathbf{N}$ 的元素作对应，即构造 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 映射

$$f：\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N} \quad f(0, 0) = 0, f(0, 1) = 1, f(1, 0) = 2, \cdots\cdots$$

实际上，这个映射就是 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 配对函数

$$f：\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N} \quad f(x, y) = \tfrac{1}{2}(x+y)(x+y+1)+x$$

在习题 2.2.7 中已经证明了 f 是双射。

任给 $\mathrm{n}\in\mathbf{N}$，令 $A_{\mathrm{n}} = \{\langle \mathrm{n}, x\rangle \mid x\in\mathbf{N}\}$，因为

$$g：A_{\mathrm{n}}\to\mathbf{N} \quad f(\mathrm{n}, x) = x$$

是双射，所以 A_{n} 与 $\mathbf{N}$ 等势，而 $\mathbf{N}\times\mathbf{N} = \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathbf{N}} A_{\mathrm{n}}$。因此

$$|\,\mathbf{N}\times\mathbf{N}\,| = |\,\mathbf{N}\,|$$

也说明了无限多个与 $\mathbf{N}$ 等势的集合，它们的并还和 $\mathbf{N}$ 等势。

4.1.5 例 $|\,\mathbf{Z}\,| = |\,\mathbf{N}\,|$。构造 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{N}$ 的映射

$$f：\mathbf{Z}\to\mathbf{N} \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{如果 } x\geq 0 \\ -(2x+1) & \text{如果 } x<0, \end{cases}$$

则 f 是双射。直观上就是将 $\mathbf{Z}$ 的元素按以下方式排列，并依次与 $\mathbf{N}$ 作对应：

$$0, -1, 1, -2, -2, -3, \cdots, -n, n, -(n+1), \cdots\cdots$$

4.1.6 例　$|\mathbf{Q}| = |\mathbf{Z}|$，从而$|\mathbf{Q}| = |\mathbf{N}|$。

首先将 $\mathbf{Q}^+$的元素表示为简约分数，将 n 表示为$\frac{n}{1}$，这样就没有重复了。先按分子分母之和的大小排列，在分子分母之和相等的几个数中，按分子的大小排列，直观形象如下：

$$\underbrace{\tfrac{1}{1}}_{2}, \underbrace{\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{1}}_{3}, \underbrace{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}}_{4}, \underbrace{\tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{4}{1}}_{5}, \cdots\cdots$$

依次将它们与 $\mathbf{Z}^+$的元素一一对应，即构造 $\mathbf{Q}^+$到 $\mathbf{Z}^+$的双射

$$f：\mathbf{Q}^+ \to \mathbf{Z}^+ \quad f(\tfrac{1}{1}) = 1, f(\tfrac{1}{2}) = 2, f(\tfrac{2}{1}) = 3, f(\tfrac{1}{3}) = 4, \cdots\cdots$$

然后按例 2.2.10 将 $\mathbf{Q}^+$到 $\mathbf{Z}^+$的双射 f 扩充成 $\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的双射 g。

4.1.7 例　$|(0, 1]\times(0, 1]| = |(0, 1]|$。

将 $x\in(0, 1]$表示为十进小数，注意有些 x 的表示不惟一，如 0.35 也可以表示为 $0.34\dot{9}$。我们取后一种表达式，这种表达式的特征是不会在某一位后全是 0，所以这种表达式称为 x 的十进无限小数 表达式，它是惟一的。特别地，1 的十进无限小数表达式是 $0.\dot{9}$。这样，任给 $x\in(0, 1]$，都有 $x = 0.a_0a_1a_2\cdots\cdots$。

任给$\langle x, y\rangle\in(0, 1]\times(0, 1]$，设 x, y 的十进无限小数表达式分别为

$$x = 0.a_0a_1a_2\cdots\cdots$$

和

$$y = 0.b_0b_1b_2\cdots\cdots。$$

将 $a_0a_1a_2\cdots\cdots$分组为

$$a_0\cdots a_{n_0}, a_{n_0+1}\cdots a_{n_1}, \cdots\cdots,$$

将 $b_0b_1b_2\cdots\cdots$分组为

$$b_0\cdots b_{m_0}, b_{m_0+1}\cdots b_{m_1}, \cdots\cdots,$$

使得每组恰好最后一个数字不为 0，如

$$0.30200491\cdots\cdots$$

分组为

$$3, 02, 004, 9, 1, \cdots\cdots。$$

将 x 和 y 的分组交错放在一起得到

$$z = 0.a_0\cdots a_{n_0}b_0\cdots b_{m_0}a_{n_0+1}\cdots a_{n_1}b_{m_0+1}\cdots b_{m_1}\cdots\cdots,$$

则 $z\in(0, 1]$。这样就可以构造$(0, 1]\times(0, 1]$到$(0, 1]$的映射

$$f：(0, 1]\times(0, 1]\to(0, 1] \quad f(x, y) = z。$$

任给$\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle\in(0, 1]\times(0, 1]$，如果$\langle x_1, y_1\rangle \neq \langle x_2, y_2\rangle$，则 x_1和 y_1 的分组与 x_2,和 y_2 的分组一定有不一样，用交错方法构成的 z_1和 z_2 就一定不相等，所以 f 是单射。

任给 $z\in(0, 1]$，将 z 用同样的方法分组，然后将第一组、第三组、第五组、…… 构成 x，将第二组、第四组、第六组、…… 构成 y，则

$$\langle x, y\rangle\in(0, 1]\times(0, 1]\text{且 } f(x, y) = z,$$

所以 f 是满射。

4.1.8 例　$|(0, 1)| = |\mathbf{R}|$。取$(0, 1)$到 $\mathbf{R}$ 的映射

$$f：(0, 1)\to\mathbf{R} \quad f(x) = \tfrac{1}{1-x} - \tfrac{1}{x}$$

在例 2.2.9 中已经证明了 f 是双射。

4.1.9 例　$|(0, 1]| = |(3, 5]|$。取$(0, 1]$到$(3, 5]$的映射

$$f：(0, 1] \to(3, 5] \quad f(x) = 2x+3,$$

易证 f 是双射。

类似地可证$|(0, 1)| = |(3, 5)|$。

一般地，如果 $a<b$ 且 $c<d$，则

$$|(a, b]| = |(c, d]|,$$

$$|(a, b)| = |(c, d)|。$$

4.1.10 例　f 是 A 到 B 的单射，任给 $X \subseteq A$，取 X 到 $f[X]$的映射

$$g：X\to f[X] \quad g(x) = f(x),$$

则 g 是双射，所以$|X| = |f[X]|$。特别地，$|A| = |f[A]| = |\mathrm{ran}(f)|$。

以下是集合的交，并，卡氏积和幂集的基数相等的几个例子。

4.1.11 例　如果$|A_1|=|A_2|$且$|B_1|=|B_2|$，其中

$$A_1\cap B_1=\varnothing，A_2\cap B_2=\varnothing，$$

则$|A_1\cup B_1|=|A_2\cup B_2|$ (见例 2.1.13，例 2.2.5 和习题 2.2.2)。

4.1.12 例　如果$|A_1|=|A_2|$且$|B_1|=|B_2|$，则

$$|A_1\times B_1|=|A_2\times B_2|$$

(见例 2.1.14 和例 2.2.6)。

4.1.13 例　$|A\times B|=|B\times A|$，$|A\times(B\times C)|=|(A\times B)\times C|$ (见习题 2.2.5 和习题 2.2.6)。

4.1.14 例　如果$|A|=|B|$，则$|\mathsf{P}(A)|=|\mathsf{P}(B)|$ (见例 2.4.6)。

习题 4.1

4.1.1　证明：任给 $n\in\mathbf{N}$，都$|\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_n|=|\mathbf{N}|$。

4.1.2　在例 4.1.7 中，对 $x=0.a_0a_1a_2\cdots\cdots$和 $y=0.b_0b_1b_2\cdots\cdots$，取 $z=0.a_0b_0a_1b_1a_2b_2\cdots\cdots$，构造$(0,1]\times(0,1]$到$(0,1]$的映射

$$g：(0,1]\times(0,1]\to(0,1]\quad f(x,y)=z。$$

证明：g 是单射但不是满射。

4.1.3　证明：如果 $a<b$ 且 $c<d$，则

$$|(a,b]|=|(c,d]|，|(a,b)|=|(c,d)|。$$

4.1.4　f 是 A 到 B 是单射，则任给 $X,Y\subseteq A$，证明：

(1) $|X\cup Y|=|f[X]\cup f[Y]|$。

(2) $|X\cap Y|=|f[X]\cap f[Y]|$。

(3) $|X\setminus Y|=|f[X]\setminus f[Y]|$。

4.1.5　证明：如果$|B|=1$，则$|A\times B|=|A|$。

4.1.6　$\sim$是 A 上等价关系，B 是等价关系$\sim$的特征集。证明：$|A/\sim|=|B|$。

4.2　基数的大小　Bernstain 定理

基数作为自然数的推广，还必须考虑它们的大小。对于有限集合来说，如果 $C\subseteq A$，则 C 的元素个数一定小于等于 A 的元素个数，如果又有 $B\approx C$，则 B 的元素个数也一定小于等于 A 的元素个数。

所以 B 的元素个数小于等于 A 的元素个数相当于 B 和 A 的某个子集等势，也相当于存在 B 到 A 的单射 f ($f[B]$就是与 B 等势的 A 的子集)。按照这个标准来定义基数的大小。

4.2.1 定义　基数的大小　A,B 是任何集合。如果存在 A 到 B 的单射 f，则称$|A|$小于等于$|B|$，记为$|A|\leq|B|$。有时也称$|B|$大于等于$|A|$，记为$|B|\geq|A|$。

这定义是合理的，因为如果$|A_0|=|A|$且$|B_0|=|B|$，令 h_1 是 A_0 到 A 的双射，h_2 是 B_0 到 B 的双射，则 $g=h_2^{-1}\circ f\circ h_1$ 就是 A_0 到 B_0 的单射。

空集到任何集合的空映射都是单射，所以空集的基数是最小的，即任给集合 A，都有$|\varnothing|\leq|A|$。

先来看基数大小的几个例子。

4.2.2 例　如果 $B\subseteq A$，则$|B|\leq|A|$。只要取

$$f；B\to A\quad f(x)=x$$

就行了。

因为当 $n\leq m$ 时有 $\mathbf{N}_n\subseteq\mathbf{N}_m$，所以当 $n\leq m$ 时有$|\mathbf{N}_n|\leq|\mathbf{N}_m|$，因此基数的小于等于关系和自然数的小于等于关系是一致的。

4.2.3 例　$|\mathbf{Q}|\leq|\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}|$。任给 $x\in\mathbf{Q}$，将 x 表示为简约分数$\frac{a}{b}$，并使得 $b\in\mathbf{N}$，这样的表达式是惟一的。构造 $\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 的映射：

$$f：\mathbf{Q}\to\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\quad f\left(\frac{a}{b}\right)=\langle a,b\rangle$$

则 f 是单射。

4.2.4 例 $A_1\cap B_1=\varnothing$，$A_2\cap B_2=\varnothing$。由例 2.1.13 和习题 2.2.2 可知，如果$|A_1|\le|A_2|$且$|B_1|\le|B_2|$，则$|A_1\cup B_1|\le|A_2\cup B_2|$。

4.2.5 例 由例 2.1.14 和例 2.2.6 可知，如果$|A_1|\le|A_2|$且$|B_1|\le|B_2|$，则$|A_1\times B_1|\le|A_2\times B_2|$。

4.2.6 例 任给集合 A，都有$|A|\le|\mathrm{P}(A)|$。当 $A=\varnothing$时，取 A 到 $\mathrm{P}(A)$的单射$\theta_{\mathrm{P}(A)}$；当 $A\ne\varnothing$时，取 A 到 $\mathrm{P}(A)$的单射

$$f:A\to\mathrm{P}(A)\quad f(x)=\{x\}。$$

4.2.7 例 $|\mathbf{R}|\le|\mathrm{P}(\mathbf{Q})|$。由$\Gamma(\mathbf{Q})\subseteq\mathrm{P}(\mathbf{Q})$得$|\Gamma(\mathbf{Q})|\le|\mathrm{P}(\mathbf{Q})|$。由例 2.2.7 得$|\mathbf{R}|=|\Gamma(\mathbf{Q})|$，所以$|\mathbf{R}|=|\Gamma(\mathbf{Q})|\le|\mathrm{P}(\mathbf{Q})|$。

基数的大小真的能成为一种大小关系，必须有自返性、反对称性和传递性。基数大小的自返性和传递性是简单的。

4.2.8 定理 基数大小的基本性质。

(1) 自返性 任给集合 A，都有$|A|\le|A|$。

(2) 传递性 任给集合 A, B, C，如果$|A|\le|B|$且$|B|\le|C|$，则$|A|\le|C|$。

证 使用恒等映射和映射的复合，详细证明留给读者。■

基数大小的反对称性就不这么明显了。反对称性是说：

$$\text{如果}|A|\le|B|\text{且}|B|\le|A|\text{，则}|A|=|B|。$$

因为我们是用单射定义

$$|A|\le|B|\text{和}|B|\le|A|，$$

用双射定义

$$|A|=|B|$$

的，所以反对称性就要求我们能够从 A 到 B 的单射和 B 到 A 的单射构造出 A 到 B 的双射来。这就是著名的 Bernstain 定理。

首先证明一个关于集合族的引理。

4.2.9 引理 $\{A_i\mid i\in\mathbf{N}\}$是集合族，满足任给 i, j$\in\mathbf{N}$，都有如果 $i\le j$ 则 $A_j\subseteq A_i$ (这样的集合族称为单调下降的)。

(1) $\{A_i\setminus A_{i+1}\mid i\in\mathbf{N}\}$是不交的。

(2) $(\bigcup_{i\ge0}(A_i\setminus A_{i+1}))\cap(\bigcap_{i\ge0}A_i)=\varnothing$。

(3) $A_0=(\bigcup_{i\ge0}(A_i\setminus A_{i+1}))\cup(\bigcap_{i\ge0}A_i)$。

证 (1) 任给 i, j$\in\mathbf{N}$，如果 $A_i\setminus A_{i+1}\ne A_j\setminus A_{j+1}$，则 $i\ne j$，不妨假设 $i<j$，则

$$i+1\le j，$$

由单调下降性得

$$A_j\subseteq A_{i+1}，$$

更有

$$A_j\setminus A_{j+1}\subseteq A_{i+1}，$$

所以$(A_i\setminus A_{i+1})\cap(A_j\setminus A_{j+1})=\varnothing$ (见习题 1.4.3(4))。

(2) 如果 $x\in\bigcap_{i\ge0}A_i$，则

$$\text{任给 } i\in\mathbf{N}\text{，都有 } x\in A_{i+1}，$$

所以

$$\text{任给 } i\in\mathbf{N}，x\notin A_i\setminus A_{i+1}，$$

由集合族的并的定义得

$$x\notin\bigcup_{i\ge0}(A_i\setminus A_{i+1})。$$

这就证明了任给 x，都有

$$\text{如果 } x\in\bigcap_{i\ge0}A_i\text{ 则 } x\notin\bigcup_{i\ge0}(A_i\setminus A_{i+1})，$$

因此$(\bigcup_{i\ge0}(A_i\setminus A_{i+1}))\cap(\bigcap_{i\ge0}A_i)=\varnothing$。

(3) 由$\{A_i\mid i\in\mathbf{N}\}$的单调下降性可得

$$\text{任给 } i\in\mathbf{N}\text{，都有 } A_i\subseteq A_0，$$

更有

$$A_i\setminus A_{i+1}\subseteq A_0，$$

所以

$$\bigcup_{i\ge0}(A_i\setminus A_{i+1})\subseteq A_0\text{ 且}\bigcap_{i\ge0}A_i\subseteq A_0，$$

因此$(\bigcup_{i\ge0}(A_i\setminus A_{i+1}))\cup(\bigcap_{i\ge0}A_i)\subseteq A_0$。

如果 $x\in A_0$，则当$\{j\mid j\in\mathbf{N}\text{ 且 } x\notin A_j\}=\varnothing$时，有

$$\text{任给 } i\in\mathbf{N}\text{，都有 } x\in A_i，$$

所以

$$x\in\bigcap_{i\ge0}A_i，$$

当{j | j∈$\mathbf{N}$ 且 $x\notin A_j$} ≠ ∅时，由 $x\in A_0$ 可知它的最小数不为 0，可设这个最小数为 i+1，由 i+1 的定义得

$x\in A_i$ 且 $x\notin A_{i+1}$，

所以

$x\in A_i\setminus A_{i+1}$，

因此

存在 i∈$\mathbf{N}$，使得 $x\in A_i\setminus A_{i+1}$，

由集合族的并的定义得

$x\in\bigcup_{i\geq 0}(A_i\setminus A_{i+1})$，

在两种情况下都有

$x\in(\bigcup_{i\geq 0}(A_i\setminus A_{i+1}))\cup(\bigcap_{i\geq 0}A_i)$。

这就证明了

任给 $x\in A_0$，都有 $x\in(\bigcup_{i\geq 0}(A_i\setminus A_{i+1}))\cup(\bigcap_{i\geq 0}A_i)$，

因此 $A_0\subseteq(\bigcup_{i\geq 0}(A_i\setminus A_{i+1}))\cup(\bigcap_{i\geq 0}A_i)$。■

引理 4.2.9 的直观意义是：$A_0, A_1,\cdots, A_n,\cdots\cdots$是一系列单调下降的集合，则可以将分成一系列用 $A_0, A_1,\cdots, A_n,\cdots\cdots$表示的互不相交的集合 $A_0\setminus A_1, A_1\setminus A_2,\cdots, A_n\setminus A_{n+1},\cdots\cdots, \bigcap_{i\geq 0}A_i$ (图 4.2.1)。

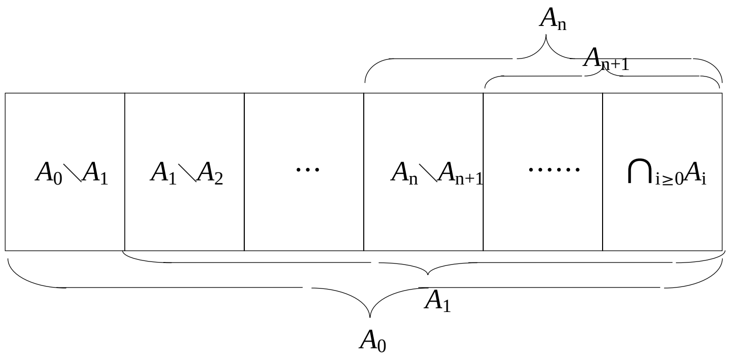


图 4.2.1

Bernstain 定理证明的思路是：用 A 到 B 的单射 f 和 B 到 A 的单射 g 构造两个单调下降的集合系列

$A_0, A_1,\cdots, A_n,\cdots\cdots$

和

$B_0, B_1,\cdots, B_n,\cdots\cdots$，

使得 $A = A_0$ 且 $B = B_0$。然后用引理 4.2.8 的方法将 A_0 和 B_0 分别分成一系列互不相交的集合，并使它们之间分别有双射，最后将这些双射组合起来，就得到 A_0 到 B_0 (即 A 到 B)。关键的问题是构造这样的两个单调下降的集合系列。

令 $A_0 = A$，$B_0 = B$，

$A_1 = g[B_0]$，$B_1 = f[A_0]$，

$A_2 = g[B_1]$，$B_2 = f[A_1]$。

显然有

$A_1\subseteq A_0$ 且 $B_1\subseteq B_0$，

所以

$f[A_1]\subseteq f[A_0]$且 $g[B_1]\subseteq g[B_0]$，

即

$B_2\subseteq B_1$ 且 $A_2\subseteq A_1$，

因此 $A_2\subseteq A_1\subseteq A_0$ 且 $B_2\subseteq B_1\subseteq B_0$。

由 f 是单射得

$f[A_0\setminus A_1] = f[A_0]\setminus f[A_1] = B_1\setminus B_2$，

所以

$|A_0\setminus A_1| = |f[A_0\setminus A_1]| = |B_1\setminus B_2|$。

由 g 是单射得

$g[B_0\setminus B_1] = g[B_0]\setminus g[B_1] = A_1\setminus A_2$，

所以

$|B_0\setminus B_1| = |g[B_0\setminus B_1]| = |A_1\setminus A_2|$。

从中可以看出前三项 A_0, A_1, A_2 和 B_0, B_1, B_2 是满足要求的。要注意是用 f 将 $A_0\setminus A_1$ 对应到 $B_1\setminus B_2$，用 g 将 $B_0\setminus B_1$ 对应到 $A_1\setminus A_2$。

将 f 限制在 A_2 上，并将它看做 A_2 到 B_2 的映射，同样将 g 限制在 B_2 上，并将它看做 B_2 到 A_2 的映射。这两个映射和 A_2, B_2 相当于原来的 f, g 和 A, B。因此用同样的方法构造出的

$$A_3 = g[B_2],\ B_3 = f[A_2],$$

和

$$A_4 = g[B_3],\ B_4 = f[A_3],$$

仍然满足要求的，即

$$A_4 \subseteq A_3 \subseteq A_2 \text{ 且 } B_4 \subseteq B_3 \subseteq B_2,$$

用 f 将 $A_2 \setminus A_3$ 对应到 $B_3 \setminus B_4$，用 g 将 $B_2 \setminus B_3$ 对应到 $A_3 \setminus A_4$。

这样一直做下去，得到的 A_i 系列和 B_i 系列就满足要求，即

$$\{A_i \mid i \in \mathbf{N}\} \text{和} \{B_i \mid i \in \mathbf{N}\}$$

都是单调下降的，并有

$$A_{2i} \setminus A_{2i+1} \text{ 和 } B_{2i+1} \setminus B_{2i+2} \text{ 对应，}$$

和

$$B_{2i} \setminus B_{2i+1} \text{ 和 } A_{2i+1} \setminus A_{2i+2} \text{ 对应。}$$

注意任给 $i \in I$，都是

$$\text{用 } f \text{ 将 } A_{2i} \setminus A_{2i+1} \text{ 对应到 } B_{2i+1} \setminus B_{2i+2},$$

和

$$\text{用 } g \text{ 将 } B_{2i} \setminus B_{2i+1} \text{ 对应到 } A_{2i+1} \setminus A_{2i+2},$$

所以在定理的证明中，是用 f

$$\text{将并} \bigcup_{i\ge 0}(A_{2i} \setminus A_{2i+1}) \text{对应到并} \bigcup_{i\ge 0}(B_{2i+1} \setminus B_{2i+2}),$$

用 g

$$\text{将并} \bigcup_{i\ge 0}(B_{2i} \setminus B_{2i+1}) \text{对应到并} \bigcup_{i\ge 0}(A_{2i+1} \setminus A_{2i+2})。$$

最后，$\bigcap_{i\ge 0} A_i$ 与 $\bigcap_{i\ge 0} B_i$ 的对应是容易的，因为

$$f[\bigcap_{i\ge 0} A_i] = \bigcap_{i\ge 0} f[A_i] = \bigcap_{i\ge 0} B_{i+1}$$

$$= \bigcap_{i\ge 1} B_i = \bigcap_{i\ge 0} B_i,$$

同理还有 $g[\bigcap_{i\ge 0} B_i] = \bigcap_{i\ge 0} A_i$ (图 4.2.2)。

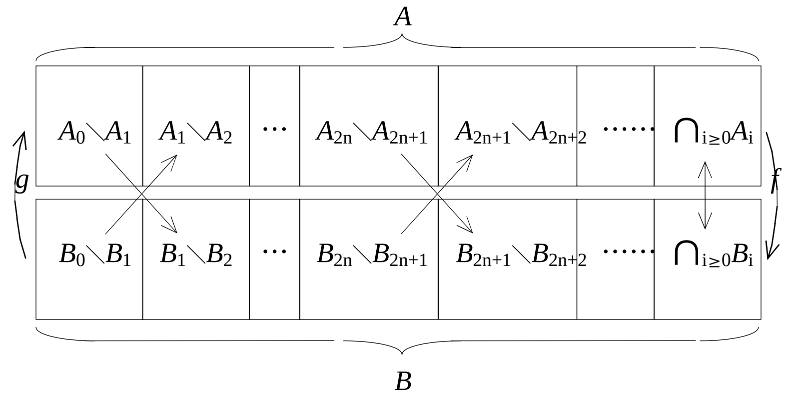


图 4.2.2

下面是 Bernstain 定理的严格证明。

4.2.10 定理 Bernstain 定理 如果$|A| \le |B|$且$|B| \le |A|$，则$|A| = |B|$。

证 设 f 是 A 到 B 的单射，g 是 B 到 A 的单射。任给 $n \in \mathbf{N}$，归纳定义 A_n 和 B_n 如下：

$$A_0 = A,\ A_{n+1} = g[B_n]$$

$$B_0 = B,\ B_{n+1} = f[A_n]$$

用归纳法可以证明，如果 $i \le j$，则 $A_j \subseteq A_i$ 且 $B_j \subseteq B_i$。

由引理 4.2.9(1)得

$$\{A_i \setminus A_{i+1} \mid i \in \mathbf{N}\} \text{和} \{B_i \setminus B_{i+1} \mid i \in \mathbf{N}\}$$

都是不交的。所以有

$$\bigcup_{i\ge 0}(A_{2i} \setminus A_{2i+1}) \text{与} \bigcup_{i\ge 0}(A_{2i+1} \setminus A_{2i+2}) \text{不交，}$$

和

$$\bigcup_{i\ge 0}(B_{2i} \setminus B_{2i+1}) \text{与} \bigcup_{i\ge 0}(B_{2i+1} \setminus B_{2i+2}) \text{不交。}$$

显然有

$$\bigcup_{i\ge 0}(A_i \setminus A_{i+1}) = (\bigcup_{i\ge 0}(A_{2i} \setminus A_{2i+1})) \cup (\bigcup_{i\ge 0}(A_{2i+1} \setminus A_{2i+2}))$$

和

$$\bigcup_{i\geq 0}(B_i\setminus B_{i+1}) = (\bigcup_{i\geq 0}(B_{2i+1}\setminus B_{2i+2}))\cup(\bigcup_{i\geq 0}(B_{2i}\setminus B_{2i+1}))。$$

因为 f 是单射，所以

$$f[\bigcup_{i\geq 0}(A_{2i}\setminus A_{2i+1})] = \bigcup_{i\geq 0}(f[A_{2i}]\setminus f[A_{2i+1}])$$
$$= \bigcup_{i\geq 0}(B_{2i+1}\setminus B_{2i+2})，$$

因此

$$|\bigcup_{i\geq 0}(A_{2i}\setminus A_{2i+1})| = |f[\bigcup_{i\geq 0}(A_{2i}\setminus A_{2i+1})]|$$
$$= |(B_{2i+1}\setminus B_{2i+2})|。$$

同理由 g 是单射得$|\bigcup_{i\geq 0}(B_{2i}\setminus B_{2i+1})| = |\bigcup_{i\geq 0}(A_{2i+1}\setminus A_{2i+2})|$。

综合以上两个结果得

$$|\bigcup_{i\geq 0}(A_i\setminus A_{i+1})| = |(\bigcup_{i\geq 0}(A_{2i}\setminus A_{2i+1}))\cup(\bigcup_{i\geq 0}(A_{2i+1}\setminus A_{2i+2}))|$$
$$= |(\bigcup_{i\geq 0}(B_{2i+1}\setminus B_{2i+2}))\cup(\bigcup_{i\geq 0}(B_{2i}\setminus B_{2i+1}))|$$
$$= |\bigcup_{i\geq 0}(B_i\setminus B_{i+1})|。$$

注意$\bigcap_{i\geq 1}B_i \subseteq B_0$，所以

$$\bigcap_{i\geq 0}B_{i+1} = B_0\cap\bigcap_{i\geq 1}B_i = \bigcap_{i\geq 0}B_i，$$

又

$$f[\bigcap_{i\geq 0}A_i] = \bigcap_{i\geq 0}f[A_i] = \bigcap_{i\geq 0}B_{i+1}$$
$$= \bigcap_{i\geq 1}B_i = \bigcap_{i\geq 0}B_i，$$

因此$|\bigcap_{i\geq 0}A_i| = |f[\bigcap_{i\geq 0}A_i]| = |\bigcap_{i\geq 0}B_i|$。

由引理 4.2.9(2)得

$\bigcup_{i\geq 0}(A_i\setminus A_{i+1})$与$\bigcap_{i\geq 0}A_i$ 不交，

$\bigcup_{i\geq 0}(B_i\setminus B_{i+1})$与$\bigcap_{i\geq 0}B_i$ 不交，

由引理 4.2.9(3)得

$$A_0 = (\bigcup_{i\geq 0}(A_i\setminus A_{i+1}))\cup(\bigcap_{i\geq 0}A_i)$$
$$B_0 = (\bigcup_{i\geq 0}(B_i\setminus B_{i+1}))\cup(\bigcap_{i\geq 0}B_i)，$$

因此

$$|A| = |A_0| = |(\bigcup_{i\geq 0}(A_i\setminus A_{i+1}))\cup(\bigcap_{i\geq 0}A_i)|$$
$$= |(\bigcup_{i\geq 0}(B_i\setminus B_{i+1}))\cup(\bigcap_{i\geq 0}B_i)|$$

$$= |B_0| = |B|。\blacksquare$$

这个证明是比较烦琐的，好处在于比较直观，本节后的习题中给出一个较简洁的证明，而且不使用数学归纳法。

为了更好的理解 Bernstain 定理，给出一个具体的例子，看看在这个具体例子中，A_i 系列和 B_i 系列是什么，$\bigcup_{i\geq 0}(A_{2i}\setminus A_{2i+1})$与$\bigcup_{i\geq 0}(B_{2i+1}\setminus B_{2i+2})$是怎样对应的，$\bigcup_{i\geq 0}(B_{2i}\setminus B_{2i+1})$与$\bigcup_{i\geq 0}(A_{2i+1}\setminus A_{2i+2})$是怎样对应的，$\bigcap_{i\geq 0}A_i$ 与$\bigcap_{i\geq 0}B_i$ 是怎样对应的。

4.2.11 例 证明$|(0, 1)| = |(0, 1]|$。取

$$f：(0, 1)\to(0, 1] \quad f(x) = x，$$
$$g：(0, 1]\to(0, 1) \quad g(x) = \tfrac{1}{2}x，$$

则

$$A_0 = (0, 1)，B_0 = (0, 1]，$$
$$A_1 = (0, \tfrac{1}{2}]，B_1 = (0, 1)，$$
$$A_2 = (0, \tfrac{1}{2})，B_2 = (0, \tfrac{1}{2}]，$$
$$A_3 = (0, \tfrac{1}{4})，B_3 = (0, \tfrac{1}{2})，$$

……，

它们的一般形式是：

$$A_{2i} = (0, \frac{1}{2^i})，A_{2i+1} = (0, \frac{1}{2^{i+1}}]，$$
$$B_{2i} = (0, \frac{1}{2^i}]，B_{2i+1} = (0, \frac{1}{2^i})，$$

所以

$$A_{2i}\setminus A_{2i+1} = (\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i})，A_{2i+1}\setminus A_{2i+2} = \{\frac{1}{2^{i+1}}\}，$$
$$B_{2i}\setminus B_{2i+1} = \{\frac{1}{2^i}\}，B_{2i+1}\setminus B_{2i+2} = (\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i})，$$

而$\bigcap_{i\geq 0}A_i = \bigcap_{i\geq 0}B_i = \varnothing$。

因此(0, 1)与(0, 1]的具体对应是：将(0, 1)中的形如$(\frac{1}{2^{i+1}}, \frac{1}{2^i})$的开区间与(0, 1]中的相同的开区间对应，将(0, 1)的子集

$$\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\cdots,\ \frac{1}{2^{i+1}},\cdots\cdots\}$$

与(0, 1]子集的

$$\{1,\ \frac{1}{2},\cdots,\ \frac{1}{2^{i}},\cdots\cdots\}$$

对应。

由$|(0, 1)| = |(0, 1]|$，例 4.1.5 和例 4.1.6 可得实数 **R** 的一个重要性质。

4.2.12 例 因为$|\mathbf{R}| = |(0, 1)| = |(0, 1]|$，所以

$$|\mathbf{R}\times\mathbf{R}| = |(0, 1]\times(0, 1]| = |(0, 1]| = |\mathbf{R}|。$$

由 Bernstain 定理，可以简化基数相等的一些例子的证明。

4.2.13 例 重新证明$|\mathbf{Q}| = |\mathbf{N}|$。因为

$$|\mathbf{Q}|\le|\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}| = |\mathbf{N}\times\mathbf{N}| = |\mathbf{N}|,$$

又$|\mathbf{N}|\le|\mathbf{Q}|$。

4.2.14 例 重新证明$|(0, 1]\times(0, 1]| = |(0, 1]|$。

任给$\langle x, y\rangle\in(0, 1]\times(0, 1]$，将 x, y 分别表示为

$$x = 0.a_0a_1a_2\cdots\cdots$$

和

$$y = 0.b_0b_1b_2\cdots\cdots,$$

取

$$z = 0.a_0b_0a_1b_1a_2b_2\cdots\cdots,$$

构造(0, 1]×(0, 1]到(0, 1]的映射

$$g：(0, 1]\times(0, 1]\to(0, 1] \quad f(x, y) = z$$

则 g 是单射(见习题 4.1.2)，所以

$$|(0, 1]\times(0, 1]|\le|(0, 1]|。$$

又

$$f：(0, 1]\to(0, 1]\times(0, 1] \quad f(x) = \langle x, 1\rangle$$

是单射，所以

$$|(0, 1]|\le|(0, 1]\times(0, 1]|。$$

由 Bernstain 定理可知，基数的小于等于关系确实是一种大小

关系，所以将基数作为集合元素个数的数是合理的。

以后将$|A|\le|B|$且$|A|\ne|B|$记为$|A|<|B|$，称为$|A|$小于$|B|$，有时也记为$|B|>|A|$，称为$|B|$大于$|A|$。参考关于偏序集的讨论可知：

如果$|A|\le|B|$且$|B|<|C|$，则$|A|<|C|$。

如果$|A|<|B|$且$|B|\le|C|$，则$|A|<|C|$。

习题 4.2

4.2.1 证明：如果 $B\ne\varnothing$，则$|A|\le|A\times B|$。

4.2.2 证明：如果$|A| = |B| = |\mathbf{R}|$且 $A\cap B=\varnothing$，则$|A\cup B| = |\mathbf{R}|$。

4.2.3 证明：任给 $n\ge1$，都有$|\mathbf{R}^n| = |\mathbf{R}|$。

4.2.4 取 f；$(0, 1)\to(0, 2]$ $\quad f(x) = x$，

$g：(0, 2]\to(0, 1) \quad g(x) = \frac{1}{4}x$。

仿例 4.2.10 构造 $A_i, B_i, A_i\setminus A_{i+1}, B_i\setminus B_{i+1}, \bigcap_{i\ge0}A_i$ 和$\bigcap_{i\ge0}B_i$，讨论(0, 1)到(0, 2]的具体对应。

4.2.5 $C\subseteq B\subseteq A$，$f：A\to C$ 是双射。令

$D = B\setminus C$，$\Gamma = \{X \mid X\subseteq A$ 且 $f[X]\cup D\subseteq X\}$，

$E = \bigcap\Gamma$。

证明：

(1) 任给 $X\in\Gamma$，如果 $f[X]\cup D\ne X$，则存在 $x\in A$，使得 $X\setminus\{x\}\in\Gamma$。

(2) $f[E]\cup D = E$。

(3) $B = (C\setminus f[E])\cup E, C = (C\setminus f[E])\cup f[E]$和$(C\setminus f[E])\cap E=\varnothing$。

因此$|B| = |C| = |A|$。

4.2.6 利用习题 4.2.5 重新证明 Bernstain 定理。

4.3　有限集和无限集

直观上我们知道什么是有限集和无限集，也知道有限集和无限集的一些性质。现在严格定义有限集和无限集，并根据定义来讨论它们的基本性质。

4.3.1 定义　有限集和无限集　A 是集合，如果存在 $n\in\mathbf{N}$，使得$|A|=|\mathbf{N}_n|$，则称 A 是有限集，不是有限集的集合称为无限集。

因为有限集是通过和 $\mathbf{N}_n$ 等势而定义的，所以在讨论有限集的性质前先讨论的 $\mathbf{N}_n$ 性质。

4.3.2 引理　$\mathbf{N}_n$ 有以下性质。

(1) 任给 $a\in\mathbf{N}_{n+1}$，都有$|\mathbf{N}_{n+1}\setminus\{a\}|=|\mathbf{N}_n|$。

(2) 如果 $n\neq m$，则$|\mathbf{N}_n|\neq|\mathbf{N}_m|$。

(3) 如果 $A\subseteq\mathbf{N}_n$，则存在 m，使得$|A|=|\mathbf{N}_m|$。

(4) $|\mathbf{N}_{n+m}\setminus\mathbf{N}_m|=|\mathbf{N}_n|$。

(5) $|\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_m|=|\mathbf{N}_{nm}|$。

(6) $|\mathcal{P}(\mathbf{N}_n)|=|\mathbf{N}_{2^n}|$。

证　(1) 当 $n=0$ 时，有 $\mathbf{N}_{n+1}=\mathbf{N}_1=\{0\}$，所以$|\mathbf{N}_{n+1}\setminus\{a\}|=|\mathbf{N}_1\setminus\{0\}|=|\varnothing|=|\mathbf{N}_0|=|\mathbf{N}_n|$。

当 $n\neq 0$ 时，构造 $\mathbf{N}_{n+1}\setminus\{a\}$的 $\mathbf{N}_n$ 的映射

$$f\colon \mathbf{N}_{n+1}\setminus\{a\}\to\mathbf{N}_n \quad f(x)=\begin{cases} x & \text{如果 } x<a \\ x-1 & \text{如果 } x>a, \end{cases}$$

则 f 是双射，所以也有$|\mathbf{N}_{n+1}\setminus\{a\}|=|\mathbf{N}_n|$。

(2) 反证法。假设存在 $n\neq m$，使得$|\mathbf{N}_n|=|\mathbf{N}_m|$，则

$$A=\{i\mid \text{存在 } j\in\mathbf{N}\text{，使得 } i<j \text{ 且} |\mathbf{N}_i|=|\mathbf{N}_j|\}$$

非空，设 A 的最小数为 m。由 m 的定义可知，存在 $n\in\mathbf{N}$，使得 $m<n$ 且$|\mathbf{N}_n|=|\mathbf{N}_m|$。

当 $m=0$ 时，有 $\mathbf{N}_m=\varnothing$且 $\mathbf{N}_n\neq\varnothing$，矛盾。

当 $m>0$ 时，取 $\mathbf{N}_m$ 到 $\mathbf{N}_n$ 的双射 f，则

$$\begin{aligned} f[\mathbf{N}_{m-1}] &= f[\mathbf{N}_m\setminus\{m-1\}] \\ &= f[\mathbf{N}_m]\setminus f[\{m-1\}] \\ &= \mathbf{N}_n\setminus\{f(m-1)\}, \end{aligned}$$

由(1)得

$$\begin{aligned} |\mathbf{N}_{m-1}| &= |f[\mathbf{N}_{m-1}]| \\ &= |\mathbf{N}_n\setminus\{f(m-1)\}| \\ &= |\mathbf{N}_{n-1}|, \end{aligned}$$

又

$$m-1<n-1,$$

所以 $m-1\in A$，和 m 是 A 的最小数矛盾。

(3) 由 $A\subseteq\mathbf{N}_n$ 得$|A|\leq|\mathbf{N}_n|$，所以

$$B=\{i\mid |A|\leq|\mathbf{N}_i|\}$$

非空，设 B 的最小数为 m，则

$$|A|\leq|\mathbf{N}_m|,$$

所以可取 A 到 $\mathbf{N}_m$ 的单射 f。如果 f 是双射，则$|A|=|\mathbf{N}_m|$。以下用反证法证明 f 是双射：

假设 f 不是双射，则存在 $a\in\mathbf{N}_m$，使得

$$f[A]\subseteq\mathbf{N}_m\setminus\{a\},$$

所以

$$|A|=|f[A]|\leq|\mathbf{N}_m\setminus\{a\}|=|\mathbf{N}_{m-1}|,$$

因此 $m-1\in B$，和 m 是 B 的最小数矛盾。

(4) 取 $\mathbf{N}_{n+m}\setminus\mathbf{N}_m$ 到 $\mathbf{N}_n$ 的映射

$$f\colon \mathbf{N}_{n+m}\setminus\mathbf{N}_m\to\mathbf{N}_n \quad f(x)=x-m,$$

则 f 是双射，所以$|\mathbf{N}_{n+m}\setminus\mathbf{N}_m|=|\mathbf{N}_n|$。

(5) 当 $n=0$ 或 $m=0$ 时，有 $\mathbf{N}_n=\varnothing$或 $\mathbf{N}_m=\varnothing$，所以

$$\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_m=\varnothing,$$

又

$$\mathbf{N}_{nm}=\mathbf{N}_0=\varnothing,$$

因此$|\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_m| = |\varnothing| = |\mathbf{N}_{nm}|$。

以下设 $n \neq 0$ 且 $m \neq 0$。任给$\langle x, y\rangle\in\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_m$，都有

$$xm+y\in\mathbf{N}_{nm},$$

所以可以构造 $\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_m$ 到 $\mathbf{N}_{nm}$ 的映射

$$f：\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_m\to\mathbf{N}_{nm} \quad f(x, y) = xm+y$$

由自然数的带余除法可证 f 是双射，因此$|\mathbf{N}_n\times\mathbf{N}_m| = |\mathbf{N}_{nm}|$。

(6) 可以证明，$\mathcal{P}(\mathbf{N}_{n+1}) = \mathcal{P}(\mathbf{N}_n)\cup\Gamma$ 且 $\mathcal{P}(\mathbf{N}_n)\cap\Gamma = \varnothing$，其中

$$\Gamma = \{X\cup\{n\} \mid X\in \mathcal{P}(\mathbf{N}_n)\}。$$

由此可以归纳构造 $\mathcal{P}(\mathbf{N}_n)\to\mathbf{N}_{2^n}$ 的映射 f_n 如下：

$$f_0：\mathcal{P}(\mathbf{N}_0)\to\mathbf{N}_1 \quad f_0(\varnothing) = 0$$

$$f_{n+1}：\mathcal{P}(\mathbf{N}_{n+1})\to\mathbf{N}_{2^{n+1}} \quad f_{n+1}(X) = \begin{cases} f_n(X) & \text{若 } x\in\mathcal{P}(\mathbf{N}) \\ f_n(X\setminus\{n\})+2^n & \text{若 } x\in\Gamma, \end{cases}$$

则任给 $n\in\mathbf{N}$，f_n 都是双射，所以$|\mathcal{P}(\mathbf{N}_n)| = |\mathbf{N}_{2^n}|$。■

由定理 4.3.2(2)，使用$|\mathbf{N}_n| = n$ 就不会有问题了。所以

A 是有限集当且仅当存在 $n\in\mathbf{N}$，使得$|A| = n$。

现在讨论有限集的性质。

4.3.3 定理 有限集不能与其真子集等势。

证 设 A 是有限集，B 是 A 的真子集，则

$$A \neq \varnothing\text{且存在 } a\in A\text{，使得 } B\subseteq A\setminus\{a\}。$$

由 $A \neq \varnothing$得

$$|A| \neq 0,$$

所以可设$|A| = n+1$，取 A 到 $\mathbf{N}_{n+1}$ 的双射 f，则

$$|B| = |f[B]| \le |f[A\setminus\{a\}]| = |f[A]\setminus f[\{a\}]|$$
$$= |\mathbf{N}_{n+1}\setminus\{f(a)\}| = |\mathbf{N}_n| = n,$$

因此 B 与 A 不等势。■

4.3.4 定理

(1) 有限集的子集是有限集。

(2) 有限集的交、并和差是有限集。

(3) 有限集的卡氏积是有限集。

(4) 有限集的幂集是有限集。

证 (1) 由引理 4.3.2(3)直接可得。

(2) 如果 A, B 是有限集，则 $A\cap B$ 和 $A\setminus B$ 都是 A 子集，由(1)得 $A\cap B$ 和 $A\setminus B$ 都是有限集。

由 B 是 $A\setminus B$ 都是有限集可设

$$|B| = |\mathbf{N}_m| \text{和} |A\setminus B| = |\mathbf{N}_n|,$$

由引理 4.3.2(4)得

$$|A\setminus B| = |\mathbf{N}_{n+m}\setminus\mathbf{N}_m|,$$

所以

$$|A\cup B| = |(A\setminus B)\cup B| = |(\mathbf{N}_{n+m}\setminus\mathbf{N}_m)\cup\mathbf{N}_m| = |\mathbf{N}_{n+m}|,$$

因此 $A\cup B$ 是有限集。

(3) 由引理 4.3.2(5)直接可得。

(4) 由引理 4.3.2(6)直接可得。■

有限集的基数是自然数，所以可以用自然数的归纳法(或最小数原理)证明有限集的性质，请看下面的例子。

4.3.5 例 有限非空全序集必有最小元。取全序集 A，使得 $A \neq \varnothing$且$|A| = n$，对 n (从 $n = 1$ 开始)作归纳，证明 A 有最小元。

(1) $n = 1$。这时有 $A = \{a\}$，所以 a 就是 A 的最小元。

(2) $n = m+1$。取 $a\in A$，则$|A\setminus\{a\}| = m$，由归纳假设，$A\setminus\{a\}$有最小元 b。因为 A 是全序集，所以 $a\le b$ 或 $b\le a$，如果 $a\le b$，则 a 是 A 的最小元，如果 $b\le a$，则 b 是 A 的最小元。

类似地可证：有限非空全序集必有最大元。

下面讨论无限集。

4.3.6 定义 可数集和可数基数 和 $\mathbf{N}$ 等势的集合称为可数集，它们的基数都是$|\mathbf{N}|$，这个基数称为可数基数，记为$\aleph_0$ ($\aleph$是希伯来字母，读作阿列夫)。

$A = \{a_i \mid i\in I\}$，如果 A 满足

任给 $i, j\in I$，都有只要 $i \neq j$ 就有 $a_i \neq a_j$，

则称$\{a_i \mid i\in I\}$是 A 的一个无重复表示。

如果$\{a_i \mid i\in I\}$是 A 的一个无重复表示，则$|A| = |I|$，因为

$$f: I\to A \quad f(i) = a_i$$

是双射。特别地，如果 A 能无重复地表示为$\{a_i \mid i\in \mathbf{N}\}$，则 A 是可数集。反之，任何可数集 A 都能无重复的表示为$\{a_i \mid i\in \mathbf{N}\}$，只要取 $a_i = f(i)$就行了，其中 f 是 $\mathbf{N}$ 到 A 的双射。

N 可以与其某个真子集等势，从而每个可数集都可与其某个真子集等势。

4.3.7 定理 任何可数集都可与其某个真子集等势。

证 设 A 是可数集，$\{a_i \mid i\in \mathbf{N}\}$是 A 的无重复表示。任给 $i\in \mathbf{N}$，令 $b_i = a_{2i}$，令 $B = \{b_i \mid i\in \mathbf{N}\}$，则 B 是 A 的真子集，又$\{b_i \mid i\in \mathbf{N}\}$是 B 的无重复表示，所以 B 是可数集，因此 A 与 B 等势。■

一般地，任何无限集都有可与其某个真子集等势的性质。

4.3.8 定理 任何无限集都有可数子集。

证 设 A 是无限集，则 A 不是空集，可取

$$a_0\in A,$$

$A\setminus\{a_0\}$仍不是空集，又可取

$$a_1\in A\setminus\{a_0\},$$

一般地有

$$A\setminus\{a_0,\cdots, a_n\} \neq \varnothing,$$

(否则 $A \subseteq \{a_0,\cdots, a_n\}$就是有限集了)，所以可取

$$a_{n+1}\in A\setminus\{a_0,\cdots, a_n\},$$

这样任给 $i\in \mathbf{N}$，都存在 $a_i\in A$。令

$$B = \{a_i \mid i\in \mathbf{N}\},$$

则 B 是 A 的子集，又由 a_i 的构造得

$$\{a_i \mid i\in \mathbf{N}\}$$

是 B 的无重复表示，所以 B 是可数集。■

4.3.9 定理 任何无限集都可与其某个真子集等势。

证 设 A 是无限集，由定理 4.3.8 得 A 有可数子集 B，由定理

4.3.7 得 B 有真子集 C，使得

$$|B| = |C|。$$

由 C 是 B 的真子集得$(A\setminus B)\cup C$ 是 A 的真子集，又

$$|A| = |(A\setminus B)\cup B| = |(A\setminus B)\cup C|,$$

所以 A 和其真子集$(A\setminus B)\cup C$ 等势(图 4.3.1)。■

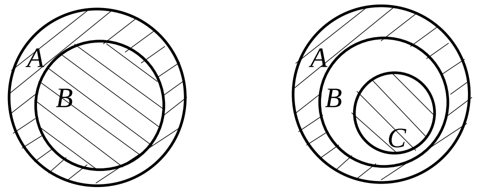


图 4.3.1

定理 4.3.8 的直观想法是从无限集中一个一个地取元素，从而得到一个可数子集，这样的证明是不够严格的。在严格的证明中，不允许随意从有限到无限，从有限到无限需要一定的条件。按数学归纳法的思想，要使定理 4.3.8 证明成为严格，必须**预先**给定一个标准，使得当 $a_0,\cdots, a_n$ 取定后，按这个标准能找到 a_{n+1}，而不能当 $a_0,\cdots, a_n$ 取定后，再随意去找 a_{n+1}。所以对于满足一定条件的无限集，定理 4.3.8 的证明才是严格的(见本节后的习题)。

因此，严格地说，定理 4.3.8 和定理 4.3.9 只有在某种假设下才成立，这点以后再讨论。

不是可数集的无限集称为不可数集，它们的基数称为不可数基数。我们已经知道 $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 等无限集都是可数集，是否存在不可数集呢？换句话说，是否存在不可数基数呢？以下定理说明不可数集合和不可数基数是存在的。

4.3.10 定理 $|\mathbf{Q}| < |\mathbf{R}|$。

证 因为$|\mathbf{Q}| \leq |\mathbf{R}|$，所以只需证$|\mathbf{Q}| \neq |\mathbf{R}|$就行了，又因为$|\mathbf{R}| = |(0, 1]|$，所以只需证$(0, 1]$不是可数集就行了。以下用反证

法证明(0, 1]不是可数集。

假设(0, 1]是可数集，则可将(0, 1]表示为$\{x_i \mid i\in\mathbf{N}\}$，任给 $i\in\mathbf{N}$，将 x_i 表示为十进无限小数 $0.a_{i0}a_{i1}\cdots a_{in}\cdots\cdots$(见例 4.1.5)，然后排列如下：

$$\begin{array}{ll} x_0 & 0.a_{00}a_{01}\cdots a_{0n}\cdots\cdots \\ x_1 & 0.a_{10}a_{11}\cdots a_{1n}\cdots\cdots \\ \vdots & \\ x_n & 0.a_{n0}a_{n1}\cdots a_{nn}\cdots\cdots \\ \vdots & \end{array}$$

任给 $n\in\mathbf{N}$，取

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{如果 } a_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{如果 } a_{nn} = 1, \end{cases}$$

令

$$x = 0.b_0b_1\cdots b_n\cdots\cdots,$$

则 $x\in(0, 1]$，但

任给 $n\in\mathbf{N}$，都有 $b_n \neq a_{nn}$，

因此

任给 $n\in\mathbf{N}$，都有 $x \neq x_n$，

矛盾。■

这种证明方法就是著名的 Contor 对角线方法，它已经成为数学中一种重要的证明方法。

习题 4.3

4.3.1 A 是任何集合，$a\notin A$，令$\Gamma = \{X\cup\{a\} \mid X\in \mathrm{P}(A)\}$，证明：

(1) $\mathrm{P}(A)\cap\Gamma = \varnothing$。

(2) $\mathrm{P}(A\cup\{a\}) = \mathrm{P}(A)\cup\Gamma$。

4.3.2 设 f：$\mathrm{P}(\mathbf{N}_n)\to\mathbf{N}_{2^n}$ 是双射，$\Gamma = \{X\cup\{n\} \mid X\in \mathrm{P}(\mathbf{N}_n)\}$，证明：

(1) 任给 $X\in \mathrm{P}(\mathbf{N}_n)$，都有 $f(X)+ 2^n\in\mathbf{N}_{2^{n+1}}$。

(2) g：$\mathrm{P}(\mathbf{N}_{n+1})\to\mathbf{N}_{2^{n+1}}$ $\quad g(X) = \begin{cases} f(X) & \text{若 } x\in\mathrm{P}(\mathbf{N}) \\ f(X\setminus\{n\})+2^n & \text{若 } x\in\Gamma, \end{cases}$

是双射。

4.3.3 证明：有限非空全序集必有最大元。

4.3.4 A, B 是有限非空全序集且$|A| = |B|$，证明：存在 A 到 B 的相似映射。

4.3.5 证明：如果$|A|\le|\mathbf{N}|$，则 A 是有限集或可数集。

4.3.6 f：$\mathbf{N}\to A$。证明：如果 f 是满射，则 A 是有限集或可数集。

4.3.7 A 是无限集。如果 h 是 $\mathrm{P}(A)\setminus\{\varnothing\}$上的选择函数(见例 2.1.19)，则可归纳定义 $\mathbf{N}_n$ 到 A 的映射 f_n 如下：

$f_0 = \theta_A$ (是 $\mathbf{N}_0$ 到 A 的映射)，

$$f_{n+1}：\mathbf{N}_{n+1}\to A \quad f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{如果 } x\in \mathbf{N}_n \\ f_n(A\setminus f_n[\mathbf{N}_n]) & \text{如果 } x = n, \end{cases}$$

证明：

(1) 映射族$\{f_n \mid n\in\mathbf{N}\}$的并映射 f 存在，且 f 是 $\mathbf{N}$ 到 A 的映射。

(2) 任给 $n\in\mathbf{N}$，都有 $f(n) = h(A\setminus f[\mathbf{N}_n])$。

(3) f 是单射，从而 $f[\mathbf{N}]$是 A 的可数子集。

4.3.8 $A\cap B = \varnothing$，A 是可数集，证明：

(1) 如果 B 是有限集，则$|A\cup B| = |A|$。

(2) 如果 B 是无限集，则$|A\cup B| = |B|$。

4.4　幂集和卡氏幂的基数

集合 A 的所有子集组成 A 的幂集 $\mathrm{P}(A)$，A 到 B 的所有映射组成卡氏幂 B^A，它们也是集合，所以也有基数。它们的基数和 A, B 的基数有什么关系呢？它们的基数之间有什么关系呢？

先来看幂集的基数。

4.4.1 定理　Cantor 定理　任给集合 A，都有$|A|<|\mathrm{P}(A)|$。

证　因为$|A|\le|\mathrm{P}(A)|$，所以只需证$|A|\ne|\mathrm{P}(A)|$就行了。以下用反证法证明$|A|\ne|\mathrm{P}(A)|$。

假设$|A|=|\mathrm{P}(A)|$，取 A 到 $\mathrm{P}(A)$的双射 f，令

$$B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin f(x)\},$$

则 $B\in\mathrm{P}(A)$，再令 $a=f^{-1}(B)$，则 $a\in A$ 且 $f(a)=B$。

任给 $x\in A$，由 B 的定义得

$$x\in B \text{ 当且仅当 } x\notin f(x),$$

所以对于 $a\in A$ 就有

$$a\in B \text{ 当且仅当 } a\notin f(a),$$

即

$$a\in B \text{ 当且仅当 } a\notin B,$$

矛盾。■

定理 4.4.1 说明了 A, $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(\mathrm{P}(A))$,…… 两两不等势，它们确定了无限多个不同的基数，当 A 是无限集时，这些基数中至多只有一个是可数基数，所以定理 4.4.1 说明了有无限多个不可数基数。

另外，这个定理也说明了没有最大的基数。

再来看卡氏幂的基数。

4.4.2 定理　卡氏幂的基数有以下性质。

(1) 如果 $A\ne\varnothing$，则$|B|\le|B^A|$。

(2) 如果$|A|=1$，则$|B^A|=|B|$，如果$|B|=1$，则$|B^A|=1$。

(3) 如果$|B_1|\le|B_2|$，则$|B_1{}^A|\le|B_2{}^A|$。

(4) 如果$|A_1|\le|A_2|$，则$|B^{A_1}|\le|B^{A_2}|$。

(5) 如果$|B_1|\le|B_2|$且$|A_1|\le|A_2|$，则$|B_1{}^{A_1}|\le|B_2{}^{A_2}|$。因此如果$|B_1|=|B_2|$且$|A_1|=|A_2|$，则$|B_1{}^{A_1}|=|B_2{}^{A_2}|$。

证　(1)(2)见例 2.5.4 和习题 2.5.1。

(3) 取 B_1 到 B_2 的单射 h，构造 $B_1{}^A$ 到 $B_2{}^A$ 的映射

$$F: B_1{}^A\to B_2{}^A \quad F(f)=h\circ f,$$

以下证明 F 是单射。

任给 $f, g\in B_1{}^A$，如果 $f\ne g$，则

$$\text{存在 } x\in A\text{，使得 } f(x)\ne g(x),$$

由 h 是单射得

$$h(f(x))\ne h(g(x)),$$

这就是

$$\text{存在 } x\in A\text{，使得}(h\circ f)(x)\ne(h\circ g)(x),$$

所以

$$h\circ f\ne h\circ g,$$

即 $F(f)\ne F(g)$ (图 4.4.1)。

(4) 取 A_1 到 A_2 的单射 k，固定 $a\in A$，构造 A_2 到 A_1 的映射

$$h: A_2\to A_1 \quad h(y)=\begin{cases} x & \text{如果 } y\in k[A_1]\text{且 } k(x)=y \\ a & \text{如果 } y\in A_2\setminus k[A_1], \end{cases}$$

则 h 满足

$$\text{任给 } x\in A_1\text{，都有 } h(k(x))=x。$$

再构造 B^{A_1} 到 B^{A_2} 的映射

$$F: B^{A_1}\to B^{A_2} \quad F(f)=f\circ h。$$

以下证明 F 是单射。

任给 $f, g\in B^{A_1}$，如果 $f\ne g$，则

$$\text{存在 } x\in A_1\text{，使得 } f(x)\ne g(x),$$

所以

$$f(h(k(x))) \neq g(h(k(x))),$$

这就是

存在 $k(x)\in A_2$，使得$(f\circ h)(k(x)) \neq (g\circ h)(k(x))$，

所以

$$f\circ h \neq g\circ h,$$

即 $F(f) \neq F(g)$ (图 4.4.2)。

(5) 由(2)和(3)得$|B_1^{A_1}|\le|B_2^{A_1}|\le|B_2^{A_2}|$。■

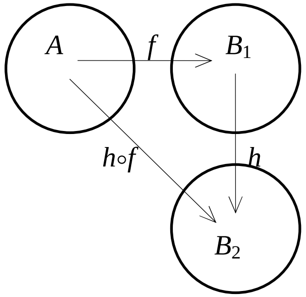


图 4.4.1

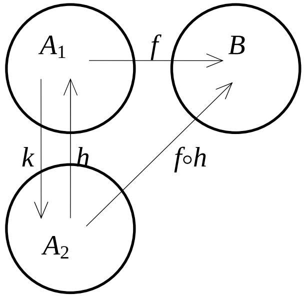


图 4.4.2

幂集的基数和卡氏幂的基数有相当密切的关系。

4.4.3 定理 如果 $A \neq \varnothing$，则$|\mathrm{P}(A)| = |\mathbf{2}^A|$。

证 $F:\mathrm{P}(A)\to\mathbf{2}^A$ $F(X) = \mu_X$ 是双射(见例 2.5.5)。■

由定理 4.4.1 和定理 4.4.3 还可得$|A|<|\mathrm{P}(A)| = |\mathbf{2}^A|$。

以后将$|\mathbf{2}^A|$记为 $2^{|A|}$。这样就有$|\mathrm{P}(\mathbf{N})| = |\mathbf{2}^{\mathbf{N}}| = 2^{|\mathbf{N}|} = 2^{\aleph_0}$。同样也有$|\mathrm{P}(\mathbf{Q})| = 2^{\aleph_0}$。

前面已经证明了 **R** 的基数大于 **N** 的基数，下面的定理说明了 **R** 的基数和 P(**N**)的基数一样是 $2^{\aleph_0}$。

4.4.4 定理 $|\mathbf{R}| = 2^{\aleph_0}$。

证 任给 $A\in \mathrm{P}(\mathbf{N})$，令

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{如果 } i\in A \\ 2 & \text{如果 } i\in \mathrm{N}\setminus A, \end{cases}$$

再令 $x_A = 0.a_0a_1\cdots a_n\cdots\cdots$，构造 P(**N**)到(0, 1]映射

$$f:\mathrm{P}(\mathbf{N})\to(0, 1] \quad h(x) = x_A$$

任给 $A, B\in \mathrm{P}(\mathbf{N})$，如果 $A \neq B$，则

存在 $i\in\mathbf{N}$，使得$(i\in A$ 且 $i\notin B)$或$(i\notin A$ 且 $i\in B)$，

由以上构造可知 $x_A \neq x_B$，所以 f 是单射，因此

$$2^{\aleph_0} = |\mathrm{P}(\mathbf{N})|\le|(0, 1]| = |\mathbf{R}|。$$

又由例 4.2.7 得

$$|\mathbf{R}|\le|\mathrm{P}(\mathbf{Q})| = 2^{\aleph_0}。$$

最后由 Bernstein 定理得$|\mathbf{R}| = 2^{\aleph_0}$。■

习题 4.4

4.4.1 设$|B_1| = |B_2|$，$|A_1| = |A_2|$，直接构造 $B_1^{A_1}$到 $B_2^{A_2}$的双射证明$|B_1^{A_1}| = |B_2^{A_2}|$。

4.4.2 直接证明$|A|\le|\mathbf{2}^A|$且$|A| \neq |\mathbf{2}^A|$。

4.4.3 证明：如果 $2\le|B|$，则$|A|<|B^A|$。

4.4.4 证明：

(1) 如果 $A\cap B = \varnothing$，则$|C^A\times C^B| = |C^{A\cup B}|$。

(2) $|(B\times C)^A| = |B^A\times C^A|$。

(3) $|(C^B)^A| = |C^{B\times A}|$。

4.4.5 $\{A_i \mid i\in I\}$是集合族，证明：存在集合 B，使得任给 $i\in I$，都有$|A_i|<|B|$。

4.5 基数的运算

自然数上的两种基本运算，加法和乘法，都可以推广到基数上。在讨论基数时，一般用小写希腊字母$\kappa, \lambda, \mu, \eta$等表示基数。

4.5.1 定义 基数的加法 κ, λ是任意两个基数，取集合 A, B 满足 $A\cap B = \varnothing$，$|A| = \kappa$且$|B| = \lambda$，定义$\kappa+\lambda = |A\cup B|$。

由例 4.1.11，这样的定义是合理的。

有一个小问题：虽然存在 A, B 满足$|A| = \kappa$且$|B| = \lambda$，但是否存在不相交的 A, B 满足$|A| = \kappa$且$|B| = \lambda$呢？留给读者考虑。

4.5.2 定义 基数的乘法 κ, λ是任意两个基数，取集合 A, B 满足$|A| = \kappa$且$|B| = \lambda$，定义$\kappa\cdot\lambda = |A\times B|$。

由例 4.1.12，这样的定义是合理的。

由定理 4.3.2(4)(5)，这样定义的基数的加法和乘法在自然数上与原来的加法和乘法是一致的。

基数的加法和乘法与自然数的加法和乘法有许多相同的性质。

4.5.3 定理 基数运算的基本性质

(1) $0+\kappa = \kappa$。

(2) 加法交换律 $\kappa+\lambda = \lambda+\kappa$。

(3) 加法结合律 $\kappa+(\lambda+\mu) = (\kappa+\lambda)+\mu$。

(4) $0\cdot\kappa = 0$。

(5) $1\cdot\kappa = \kappa$。

(6) 乘法交换律 $\kappa\cdot\lambda = \lambda\cdot\kappa$。

(7) 乘法结合律 $\kappa\cdot(\lambda\cdot\mu) = (\kappa\cdot\lambda)\cdot\mu$。

(8) 乘法对加法的分配律 $\kappa\cdot(\lambda+\mu) = (\kappa\cdot\lambda)+(\kappa\cdot\mu)$。

证 (1) 利用$\varnothing\cup A = A$。

(2) 利用 $A\cup B = B\cup A$。

(3) 利用 $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$。

(4) 利用$\varnothing\times A = \varnothing$。

(5) 见习题 4.1.5。

(6) 见例 4.1.13。

(7) 见例 4.1.13。

(8) 利用 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$。■

4.5.4 定理 如果$\kappa\leq\lambda$且$\mu\leq\eta$，则$\kappa+\mu\leq\lambda+\eta$且$\kappa\cdot\mu\leq\lambda\cdot\eta$。

证 见例 4.2.4 和例 4.2.5。■

自然数的有些性质是不能推广到一般基数上的，因为无限基数的运算有其特殊的性质。这里先讨论可数基数的性质。

4.5.5 定理 可数基数的运算性质

(1) $\aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0$。

(2) 任给 $n\in\mathbf{N}$，都有 $n+\aleph_0 = \aleph_0$。

(3) 任给无限基数κ，都有$\kappa+\aleph_0 = \kappa$。

证 (1) 见例 4.1.4。

(2) 见习题 4.3.8。

(3) 见习题 4.3.8。■

由定理 4.5.5 可得

$$\aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0 = 1\cdot\aleph_0 \text{ 和 } 1+\aleph_0 = \aleph_0 = 2+\aleph_0，$$

但

$$\aleph_0 \neq 1，1 \neq 2。$$

这说明了乘法和加法的消去律在一般基数上不成立。

自然数的指数运算也能推广到基数。自然数的指数运算是一些同样的自然数的连乘积，相应的集合运算是有限个集合的卡氏幂，所以自然地就用一般的卡氏幂 B^A 来定义κ^λ。

4.5.6 定义 基数的指数 κ, λ是任意两个基数，取集合 A, B 满足$|A| = \kappa$且$|B| = \lambda$，定义$\kappa^\lambda = |B^A|$。

由定理 4.2.2(5)，这样的定义是合理的。

基数的指数与自然数的指数也有许多相同的性质。

4.5.7 定理 基数的指数的基本性质。

(1) $\kappa^0 = 1$。

(2) 如果$\lambda \neq 0$，则 $0^\lambda = 0$。

(3) $1^\lambda = 1$。

(4) $(\kappa\cdot\lambda)^\mu = \kappa^\mu\cdot\lambda^\mu$。

(5) $\kappa^\lambda\cdot\kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$。

(6) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$。

(7) 如果$\kappa\le\mu$，$0<\lambda\le\eta$，则$\kappa^\lambda\le\mu^\eta$。

证 (1) $B^\varnothing = \{\theta_B\}$

(2) 当 $A \neq \varnothing$时有$\varnothing^A = \varnothing$。

(3) 见定理 4.4.2(2)。

(4)(5)(6) 见习题 4.4.4。

(7) 见定理 4.4.2(5)。■

对于可数基数$\aleph_0$有

$$\aleph_0+\aleph_0 = \aleph_0$$

和

$$\aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0 \text{ (见定理 4.5.5)。}$$

对于基数 $2^{\aleph_0}$也有

$$\begin{aligned}2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0} &= 1\cdot 2^{\aleph_0}+1\cdot 2^{\aleph_0} = (1+1)\cdot 2^{\aleph_0}\\ &= 2\cdot 2^{\aleph_0} = 2^1\cdot 2^{\aleph_0}\\ &= 2^{1+\aleph_0} = 2^{\aleph_0}\end{aligned}$$

和

$$2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0}。$$

对于一般无限基数κ，是否也有

$$\kappa+\kappa = \kappa$$

和

$$\kappa\cdot\kappa = \kappa$$

呢？这个问题比较困难，以后再讨论。

习题 4.5

4.5.1 任给集合 A, B，证明：存在集合 A_1, B_1，使得 $|A_1| = |A|$，$|B_1| = |B|$且 $A_1\cap B_1 = \varnothing$。

4.5.2 κ是基数，归纳定义κ_n如下：

$\kappa_0 = 0$，

$\kappa_{n+1} = \kappa_n+\kappa$，

证明：$\kappa_{n+1} = n\cdot\kappa$。

4.5.3 κ是基数，归纳定义κ_n如下：

$\kappa_0 = 1$，

$\kappa_{n+1} = \kappa_n\cdot\kappa$，

证明：$\kappa_{n+1} = \kappa^n$。

4.5.4 κ是无限基数，证明：

(1) 任给 $n\in\mathbf{N}$，都有 $n+\kappa = \kappa$。

(2) 任给$\lambda\ge 2$，都有$\lambda^\kappa+\lambda^\kappa = \lambda^\kappa$。

4.5.5 证明$\aleph_0$和 $2^{\aleph_0}$的以下性质：

(1) 任给 $n\ge 1$，都有 $n\aleph_0 = \aleph_0$和$\aleph_0{}^n = \aleph_0$。

(2) $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$，$\aleph_0{}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$。

4.5.6 举例说明$\kappa<\lambda$时不一定有

$$\kappa+\mu<\lambda+\mu$$

和

$$\kappa\cdot\mu\le\lambda\cdot\mu\ (\mu \neq 0)。$$

4.5.7 设$\kappa+\kappa = \kappa$，证明：

(1) 如果$\kappa\le\lambda$，则$\kappa+\lambda = \lambda$。

(2) 如果$\lambda\le\kappa$，则$\kappa+\lambda = \kappa$。

(3) $\lambda^\kappa\cdot\lambda^\kappa = \lambda^\kappa$。

第五章　序数和超穷归纳法

5.1　良 序 集

大小关系必须是偏序关系，但一般人们还要求大小关系是全序关系。我们已经证明了基数的大小关系是偏序，但它是否是全序呢？要证明任何两个基数都是可比较的是困难的。困难在于，对于任意两个集合，没有一种一般的方法告诉我们如何去建立从一个集合到另一个集合的单射。

仔细分析两个有限集的比较过程，就会发现实际上是在两个有限集上分别建立一个全序关系，然后依次将元素作对应。某些无限集的比较也采用这样的方法，如在例 4.1.3 中建立 **Z** 到 **N** 的双射时，就是首先将 **Z** 排成一种不同于小于等于关系的次序，然后依次和 **N** 的元素作对应。

这种方法启示我们，在两个建立了次序的无限集之间，如果它们的次序满足一定条件，则可以将它们的元素依次作对应，从而可以比较这两个集合元素个数的多少了。

这种次序需要满足什么条件呢？首先，它必须是全序。其次，在任何对应后，剩下的元素中必有最小元，否则无法依次对应。这样的次序叫做良序关系，带有良序关系的集合叫做良序集。以下是它们的严格定义。

5.1.1 定义　良序集　A 是全序集，如果任给 A 的非空子集 X，X 都有最小元，则称 A 是良序集。这时，A 上全序关系称为 A 上良序关系，简称 A 上良序。

有时为了指明某种特定的良序，就用 $<A, R>$ 表示带有良序关系 R 的良序集 A。

任何非空良序集 A 都有最小元，因为这种情况下，A 就是 A 的一个非空子集。

空关系是空集上的全序关系，又因为空集没有非空子集，所以空集是良序集。

由例 4.3.5，有限全序集都是良序集，特别地，$\mathbf{N}_n$ 是良序集。

由自然数的最小数原理，自然数 **N** 是良序集。

有些全序集不是良序集，如 **Z**, **Q** 和 **R** 都不是良序集，因为它们自身就没有最小元。

再来看良序集的一些例子，这些例子以后经常要用到。

5.1.2 例　除小于等于关系外，**N** 上还可以有其它的良序关系，从而构成另外的良序集。如任给 n≥1，例 3.3.4 中 R_n 也是 **N** 上良序关系，以后用 $<\mathbf{N}, R_n>$ 表示这些良序集。

5.1.3 例　**Z** 上小于等于关系不是良序关系，但例 3.3.5 中 R 是 **Z** 上良序关系，以后用 $<\mathbf{Z}, R>$ 表示这个良序集。

5.1.4 例　$S = \{<<x, y>, <u, v>> \mid x<u \text{ 或}(x = u \text{ 且 } y\le v)\}$ 是 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上的二元关系，它的直观形象如下：

$$\begin{array}{l}
<0, 0>, <0, 1>, \cdots, <0, n>, \cdots\cdots \\
<1, 0>, <1, 1>, \cdots, <1, n>, \cdots\cdots \\
\qquad\qquad\vdots \\
<m, 0>, <m, 1>, \cdots, <m, n>, \cdots\cdots \\
\qquad\qquad\vdots
\end{array}$$

可以证明 S 是 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上良序关系。

任给 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的非空子集 X，令

$$A = \{x \mid \text{ 存在 } y\in\mathbf{N}\text{，使得} <x, y>\in X\}，$$

则 A 是 **N** 的非空子集，取它的最小元 n，再令

$$B = \{y \mid <n, y>\in X\}，$$

则 B 也是 $\mathbf{N}$ 的非空子集，取它的最小元 m。显然 $\langle \mathrm{n}, \mathrm{m}\rangle \in X$，以下证明 $\langle \mathrm{n}, \mathrm{m}\rangle$ 是 X 的最小元(用 $\le_1$ 表示 S)：

任给 $\langle x, y\rangle \in X$，由 A 的定义得

$$\mathrm{n} \le x,$$

如果 $\mathrm{n} < x$ 则 $\langle \mathrm{n}, \mathrm{m}\rangle \le_1 \langle x, y\rangle$，如果 $\mathrm{n} = x$，则由 B 的定义得

$$\mathrm{m} \le y,$$

也有 $\langle \mathrm{n}, \mathrm{m}\rangle \le_1 \langle x, y\rangle$。

以后用 $\langle \mathbf{N}\times\mathbf{N}, S\rangle$ 表示这个良序集。

现在开始讨论良序集的性质。和一般的偏序集类似，不加说明时，总是用 $\le$ 表示良序关系，用 $\le_A$ 表示 A 上良序关系。也经常使用 $<$, $\ge$ 和 $>$，它们的含义在讨论偏序集时已有说明。

第三章里证明了，如果 $X \subseteq B \subseteq A$，则 X 在 B 中的最小元和 X 在 A 中的最小元是一样的。因此有以下定理。

5.1.5 定理 良序集的子集是良序集。

证 设 A 是良序集，$B \subseteq A$。任给 B 的非空子集 X，X 也是 A 的非空子集，所以 X 在 A 中有最小元 a，a 也是 X 在 B 中的最小元。因此 B 是良序集。■

由定理 5.1.5 和前面关于偏序集的讨论，当 $B \subseteq A$ 时，B 上良序和 A 上良序可以用同样的符号，特别地，当 A 上良序用 $\le$ 表示时，B 上良序也用 $\le$ 表示。

对于良序集非常重要的一个概念是前段。

5.1.6 定义 前段 A 是良序集，$B \subseteq A$。如果

任给 $x\in B$，任给 $y\in A$，只要 $y \le x$ 就有 $y\in B$，

则称 B 是 A 的前段。

显然 $\varnothing$ 和 A 都是 A 的前段。如果 B 是 A 的前段且 $B \ne A$，则称 B 是 A 的真前段。

设 B 是 A 的前段，由前段的定义可知，任给 $x\in B$，比 x 小的元素都在 B 中，所以任给 $y\in A\setminus B$，y 一定比 B 中每个元素都大，因此任给 $x\in B$，任给 $y\in A\setminus B$，都有 $x<y$。

反之，如果任给 $x\in B$，任给 $y\in A\setminus B$，都有 $x<y$，则任给 $x\in B$，比 x 小的元素都不会在 $A\setminus B$ 中，只能在 B 中，因此任给 $x\in B$，任给 $y\in A$，只要 $y\le x$ 就有 $y\in B$，即 B 是 A 的前段。

这说明了 B 是 A 的前段的另一个条件是：

任给 $x\in B$，任给 $y\in A\setminus B$，都有 $x<y$

A 的前段的直观意义是：它是 A 的最小元开始的一系列依次的元素，中间一个也没有漏掉。如果将 A 的元素排成一条直线，则前段的元素就充满了这条直线的前段(图 5.1.1)。

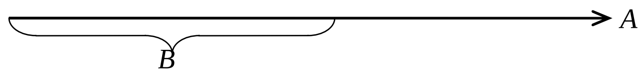


图 5.1.1

为了熟悉前段的概念，我们来看前段的几个例子。

5.1.7 例 A 是良序集，任给 $a\in A$，

$$A(a) = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x<a\}$$

都是 A 的真前段。任给 A 的真前段 B，令

$$C = \{x \mid x\in A\setminus B\}$$

则 C 非空，取它的最小元 a，就有 $B = A(a)$。因此

A 的任给真前段都能表示为 $A(a)$ 形式。

显然有

$$A(a) = A(b) \text{ 当且仅当 } a = b。$$

5.1.8 例 A 是良序集，任给 $a\in A$，

$$A[a] = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x\le a\}$$

是 A 的前段。$A[a]$ 不一定是真前段，实际上有

$A[a]$ 是 A 的真前段当且仅当 a 不是 A 的最大元。

显然 $A[a] = A(a)\cup\{a\}$，所以和 $A(a)$ 类似，也有

$$A[a] = A[b] \text{ 当且仅当 } a = b。$$

5.1.9 例 任给 $\mathrm{n}\in\mathbf{N}$，都有 $\mathbf{N}(\mathrm{n}) = \mathbf{N}_{\mathrm{n}}$，所以 $\mathbf{N}$ 的任何真前段

都是某个 $\mathbf{N}_n$。这也说明了 $\mathbf{N}$ 的任何真前段都是有限集。

5.1.10 例 任给 n≥1，都有

$$\langle\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_n, \leq\rangle = \langle\mathbf{N}, R_n\rangle(0)，$$

所以 $\langle\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_n, \leq\rangle$ 是 $\langle\mathbf{N}, R_n\rangle$ 的真前段。直观形象如下：

$\langle\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_n, \leq\rangle$： n, n+1,⋯⋯

$\langle\mathbf{N}, R_n\rangle$： n, n+1,⋯⋯, 0,⋯, n−1

5.1.11 例 $\langle\mathbf{N}, \leq\rangle = \langle\mathbf{Z}, R\rangle(-1)$，所以 $\langle\mathbf{N}, \leq\rangle$ 是 $\langle\mathbf{Z}, R\rangle$ 的真前段。直观形象如下：

$\langle\mathbf{N}, \leq\rangle$：0, 1,⋯, n,⋯⋯

$\langle\mathbf{Z}, R\rangle$： 0, 1,⋯, n,⋯⋯, −1,⋯, −n,⋯⋯

现在讨论良序集前段的性质。

5.1.12 定理 良序集前段的基本性质

(1) 传递性 如果 B 是 A 的前段且 C 是 B 的前段，则 C 是 A 的前段。

(2) 可比较性 如果 B 和 C 都是 A 的前段，则 B 是 C 的前段或 C 是 B 的前段。

(3) 前段对并的封闭性 如果任给 i∈I，A_i 都是 A 的前段，则 $\bigcup_{i\in I}A_i$ 是 A 的前段。

证 (1) 显然 $C \subseteq A$。

任给 $x\in C$，任给 $y\in A$，如果 $y\leq x$，则由 $x\in C$, $y\in A$ 和 B 是 A 的前段得

$$y\in B，$$

再由 $x\in C, y\in B$ 和 C 是 B 的前段得 $y\in C$。

因此 C 是 A 的前段(图 5.1.2)。

(2) $B = C$ 时显然。

现设 $B \neq C$，则

存在 a，使得($a\in B$ 且 $a\notin C$)或($a\in C$ 且 $a\notin B$)，

不妨假设存在 a，使得 $a\in B$ 且 $a\notin C$。

任给 $x\in C$，由 $a\notin C$ 和 C 是 A 的前段得

$$x<a，$$

再由 $x<a, a\in B$ 和 B 是 A 的前段得

$$x\in B。$$

因此 $C \subseteq B$。

任给 $x\in C$，任给 $y\in B$，如果 $y\leq x$，则由 $y\in B$ 和 $B \subseteq A$ 得

$$y\in A，$$

再由 $x\in C, y\in A$ 和 C 是 A 的前段得 $y\in C$。

因此 C 是 B 的前段(图 5.1.3)。

(3) 显然 $\bigcup_{i\in I}A_i \subseteq A$。

任给 $x\in\bigcup_{i\in I}A_i$，任给 $y\in A$，如果 $y\leq x$，则

存在 i∈I，使得 $x\in A_i$，

由 $x\in A_i, y\in A$ 和 A_i 是 A 的前段得

$$y\in A_i，$$

所以 $y\in\bigcup_{i\in I}A_i$。

因此 $\bigcup_{i\in I}A_i$ 是 A 的前段。■

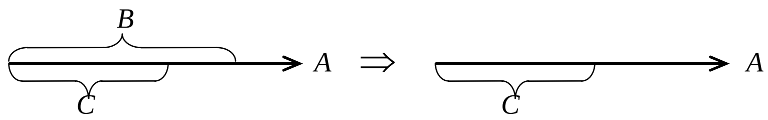


图 5.1.2

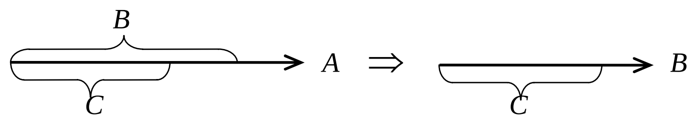


图 5.1.3

相似、相似映射对于良序集极为重要。由习题 3.4.5 可知最小元在相似映射下是不变的，由习题 3.4.8 可知可比较性在相似映射

下是不变的，所以良序关系在相似映射下也是不变的。

5.1.13 定理 A, B 是两个相似的偏序集，则 A 是良序集当且仅当 B 是良序集。

证 设 f 是 A 到 B 的相似映射。

如果 B 是良序集，则 B 是全序集，由习题 3.4.8 得 A 也是全序集。又任给 A 的非空子集 X，$f\,[X]$是 B 的非空子集，由 B 是良序集得 $f\,[X]$有最小元 $f(a)$，由习题 3.4.5 得 a 是 X 的最小元，因此 A 是良序集。

注意 f 的逆映射 f^{-1}是 B 到 A 的相似映射，同理可证如果 A 是良序集则 B 是良序集。■

因为良序集是全序集，所以由习题 3.4.9 可知，如果 A, B 是良序集，f 是 A 到 B 的双射，则 f 是相似映射的条件可以减弱为：

任给 $x, y\in A$，如果 $x\leq y$ 则 $f(x)\leq f(y)$

下面来看良序集相似的一些例子。

5.1.14 例 A, B 是良序集，如果$|A| = |B| = \mathrm{n}$，则 $A\cong B$。这说明了在相似的意义下，n 个元素的良序集只有一个。

5.1.15 例 A, B 是良序集，$a\in A$，$b\in B$。如果 $A(a)\cong B(b)$，则 $A[a]\cong B[b]$，证明如下：

取 $A(a)$到 $B(b)$的相似映射 f，构造 $A[a]$到 $B[b]$的映射

$$g\colon A[a]\to B[b]\quad g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{如果 } x\in A_1 \\ b & \text{如果 } x\in A_2, \end{cases}$$

则 g 是 $A[a]$到 $B[b]$的相似映射。

当用$<A, R>$表示带良序关系 R 的良序集 A，用$<B, S>$表示带良序关系 S 的良序集 B 时，A 和 B 相似就表示为$<A, R>\cong<B, S>$了。

5.1.16 例 任给 $\mathrm{n}\geq 1$，$\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_\mathrm{n}$ 是 $\mathbf{N}$ 的真子集，

$$f\colon \mathbf{N}\to\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_\mathrm{n}\quad f(x)=x+\mathrm{n}$$

是 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_\mathrm{n}$ 的相似映射，所以$<\mathbf{N}, \leq>\cong<\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_\mathrm{n}, \leq>$。直观形象如下：

$<\mathbf{N}, \leq>$： 0, 1, ⋯, m, ⋯⋯

$<\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_\mathrm{n}, \leq>$： n, n+1,⋯, n+m, ⋯⋯

这也说明了良序集可以相似于它的真子集。

5.1.17 例 $\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}$ 是 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的子集，$\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的良序 S (见例 5.1.4)限制在 $\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}$ 上仍记为 S，取 $\mathbf{Z}$ 上良序 R (见例 3.1.3)，则

$$f\colon \mathbf{N}_2\times\mathbf{N}\to\mathbf{Z}\quad f(x, y)=\begin{cases} y & \text{如果 } x=0 \\ -(y+1) & \text{如果 } x=1, \end{cases}$$

是 $\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{Z}$ 的相似映射，所以$<\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}, S>\cong<\mathbf{Z}, R>$。直观形象如下：

$\mathbf{N}_2\times\mathbf{N}$：<0, 0>,⋯, <0, n>,⋯⋯, <1, 0>,⋯, <1, n>, ⋯⋯

$\mathbf{Z}$： 0, ⋯, n, ⋯⋯, –1, ,⋯, –(n+1), ⋯⋯

5.1.18 例 f 是 A 到 B 的相似映射，则任给 $a\in A$，都有 $A(a)\cong B(f(a))$。注意到 $f\,[A(a)] = B(f(a))$，只要取

$$g\colon A(a)\to B(f(a))\quad g(x)=f(x)$$

就行了。因为 A 的真前段都能表示为 $A(a)$形式，所以这就说明了如果 $A\cong B$，则任给 A 的真前段 X，都存在 B 的真前段 Y，使得 $X\cong Y$。

以下是一个良序集相似于另一个良序集的真前段的几个例子。

5.1.19 例 任给 $\mathrm{n}\geq 1$，因为$<\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_\mathrm{n}, \leq>$是$<\mathbf{N}, R_\mathrm{n}>$真前段，而$<\mathbf{N}, \leq>$相似于$<\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_\mathrm{n}, \leq>$，所以$<\mathbf{N}, \leq>$相似于$<\mathbf{N}, R_\mathrm{n}>$的真前段。直观形象如下：

$<\mathbf{N}, \leq>$： 0,⋯, m, ⋯⋯

$<\mathbf{N}, R_\mathrm{n}>$： n,⋯, n+m,⋯⋯, 0,⋯, n–1

5.1.20 例 如果 $\mathrm{m}<\mathrm{n}$，则

$<\mathbf{N}, R_\mathrm{m}>\cong<\mathbf{N}, R_\mathrm{n}>(\mathrm{m})$且$<\mathbf{N}, R_\mathrm{n}>\cong<\mathbf{Z}, R>(-(\mathrm{n}+1))$。

它们的直观形象如下：

$<\mathbf{N}, R_m>$：m,⋯,m+i,⋯⋯, 0, ⋯, m−1

$<\mathbf{N}, R_n>$：n ,⋯, n+i, ⋯⋯, 0, ⋯, m−1, m, ⋯, n−1

$<\mathbf{Z}, R>$：0 ,⋯, i, ⋯⋯, −1,⋯, −m, −(m+1),⋯, −n, −(n+1),⋯⋯

习题 5.1

5.1.1 A, B 是良序集，良序关系分别为$\le_A$和$\le_B$，构造 $B\times A$ 上二元关系

$$\le = \{<<x, y>, <u, v>> \mid x<_B u \text{ 或}(x = u \text{ 且 } y\le_A v)\}。$$

证明：$\le$是 $B\times A$ 上的良序关系。

5.1.2 A 是良序集，$B\subseteq A$。证明：B 是 A 的前段当且仅当任给 $x\in B$，任给 $y\in A\setminus B$，都有 $x<y$。

5.1.3 B 是任意良序集。证明：如果 B 没有最大元，则 $\bigcup_{b\in B}B(b) = B$。

5.1.4 A, B 是任意良序集，f 是 A 到 B 的相似映射，$X\subseteq A$。证明：

(1) X 是 A 的前段当且仅当 $f[X]$是 B 的前段。

(2) g：$X\to f[X]$ $g(x) = f(x)$是 X 到 $f[X]$的相似映射。

5.1.5 A, B 是良序集，良序关系分别为$\le_A$和$\le_B$，$A\cap B = \varnothing$。令$\le = \le_A\cup\le_B\cup(A\times B)$。证明：

(1) $A\times A$，$B\times B$ 和 $A\times B$ 两两不交。

(2) $\le|_A = \le_A$且$\le|_B = \le_B$。

(3) $\le$是 $A\cup B$ 上良序关系。

(4) 如果 $B\ne\varnothing$，b 是 B 的最小元，则 $A\cong(A\cup B)(b)$。

5.2 良序集基本定理

将两个良序集的元素按大小次序逐个对应，最终必有一个良序集的元素全部对应完，这个对应就构成了它到另一个良序集的前段的相似映射。

换句话说，两个良序集中总有一个相似于另一个的前段，这就是良序集基本定理。

如何将以上的直观想法严格化呢？我们采用以下的方法。设 A, B 是良序集。

(1) 将 A 中与 B 中彼此相似的前段一一对应，并构造它们之间的相似映射；

(2) 将这些映射组合起来，构造 A 的某个前段 A_1(它是(1)中 A 的所有前段的并)到 B 的某个前段 B_1 (它是(1)中 B 的所有前段的并)的相似映射；

(3) 证明 $A = A_1$ 或 $B = B_1$，从而证明了 A 和 B 中必有一个相似于另一个的前段。

要做到这三点需要哪些条件呢？

首先，和 A 中某个前段相似的 B 中的前段必须是惟一的，这样才能建立起前段间的一一对应。

其次，如果 A 中某个前段与 B 中某个前段相似，则它们之间的相似映射也必须是惟一的，这样才能将这些相似映射组合起来，得到 A_1 到 B_1 的相似映射。

这两个条件的成立，是依赖于良序集相似映射的一个重要性质。

这个性质是说，如果 A 的元素依次和它的一个前段作对应，则这个对应只能将每个元素对应到自己，从而这个前段就是 A 本身。用相似映射的话来说就是；如果 B 是 A 的前段，f 是 A 到 B 的相似映射，则任给 $x\in A$，都有 $f(x) = x$，从而 $A = B$。

这个性质的直观意义是清楚的。如果比 a 小的元素都对应到了自己，即任给 $x<a$，都有 $f(x) = x$，则 a 也只能对应到自己，即 $f(a) = a$。否则因为比 a 小的元素已经对应完了，所以 $f(a)$一定大于 a，因此对应到 a 的 $f^{-1}(a)$就一定小于 a，但小于 a 的元素都对应到自己，所以 $f^{-1}(a)$对应到 $f^{-1}(a)$，这样 $f^{-1}(a)$就对应到两个不同的元素 a 和 $f^{-1}(a)$，矛盾(图 5.2.1)。

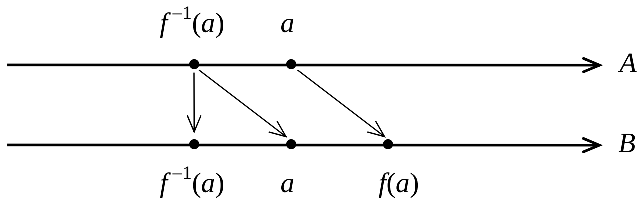


图 5.2.1

下面是这个性质的严格证明及其推论。

5.2.1 定理 良序集相似的基本性质

(1) 如果 B 是 A 的前段，f 是 A 到 B 的相似映射，则

$$\text{任给 } x\in A\text{，都有 } f(x) = x\text{，}$$

因此 $B = A$ 且 f 是恒等映射。

(2) 如果 B 和 C 都是 A 的前段，f 是 B 到 C 的相似映射，则 $C = B$ 且 f 是恒等映射。

(3) 如果 B_1 和 B_2 都是 B 的前段，f 是 A 到 B_1 的相似映射，g 是 A 到 B_2 的相似映射，则 $B_1 = B_2$ 且 $f = g$。

证 (1) 用反证法。设存在 $x\in A$，使得 $f(x) \neq x$，则

$$X = \{x \mid x\in A \text{ 且 } f(x) \neq x\}$$

非空，取它的最小元 a。由 a 是 X 的极小元可知：

$$f(a) \neq a\text{，}$$

且

$$\text{任给 } x<a\text{，都有 } f(x) = x\text{。}$$

如果 $f(a)<a$，则由 $f(a)<a$ 和定理 3.4.19 得

$$f(f(a))<f(a)\text{，}$$

由 $f(a)<a$ 和 a 是 X 的极小元得

$$f(f(a)) = f(a)\text{，}$$

矛盾。

如果 $a<f(a)$，则

$$f(f^{-1}(a)) = a<f(a)\text{，}$$

由 $f(f^{-1}(a))<f(a)$和定理 3.4.19 得

$$f^{-1}(a)<a\text{，}$$

由 $f^{-1}(a)<a$ 和 a 是 X 的极小元得

$$f(f^{-1}(a)) = f^{-1}(a)\text{，}$$

所以

$$f^{-1}(a) = f(f^{-1}(a)) = a\text{，}$$

和 $f^{-1}(a)<a$ 矛盾。

(2) 由前段的可比较性(定理 5.1.12(2))得

$$B \text{ 是 } C \text{ 的前段或 } C \text{ 是 } B \text{ 的前段。}$$

当 C 是 B 的前段时，由(1)得

$$C = B \text{ 且 } f \text{ 是恒等映射；}$$

当 B 是 C 的前段时，f^{-1} 是 C 到 B 相似映射，由(1)得

$$B = C \text{ 且 } f^{-1} \text{ 是恒等映射，}$$

所以 $C = B$ 且 f 是恒等映射。

(3) f^{-1} 是 B_1 到 A 的相似映射，f^{-1} 和 g 的复合 $g\circ f^{-1}$ 是 B_1 到 B_2 的相似映射，由(2)得

$$B_1 = B_2 \text{ 且 } g\circ f^{-1} \text{ 是恒等映射，}$$

所以 $B_1 = B_2$ 且 $f = g$。■

定理 5.2.1(1)说明了良序集不能相似于自己的真前段(注意一个良序集可以相似于它的真子集，见例 5.1.16)，所以如果 B 相似于 A 的真前段，则 B 不能相似于 A。

这样由例 5.1.19 和例 5.1.20 可知：如果 $1\leq n<m$，则

$\langle \mathbf{N}, \leq \rangle$，$\langle \mathbf{N}, R_n \rangle$，$\langle \mathbf{N}, R_m \rangle$和$\langle \mathbf{Z}, R \rangle$

两两不相似。这也说明了基数相同的无限良序集可以不相似，注意基数相同的有限良序集都相似(见例 5.1.14)。

在定理 5.2.1(3)中，如果 $B_1 = B_2 = B$，则 f 和 g 都是 A 到 B 的相似映射，所以定理 5.2.1(3)也说明了两个相似的良序集之间只有惟一的相似映射。

为了得到良序集基本定理，还需要良序集前段的以下性质。

5.2.2 引理 如果任给 $i \in I$，A_i 是 A 的前段，B_i 是 B 的前段，并且 $A_i \cong B_i$，则$\bigcup_{i\in I} A_i \cong \bigcup_{i\in I} B_i$。

证 任给 $i \in I$，由定理 5.2.1(2)可得，存在惟一的 A_i 到 B_i 的相似映射 f_i，令

$$\Gamma = \{f_i \mid i \in I\},$$

则Γ的并映射 f_Γ是$\bigcup_{i\in I} A_i$ 到$\bigcup_{i\in I} B_i$ 的映射。我们依次证明 f_Γ存在，f_Γ是双射和 f_Γ是相似映射。

令$\Sigma = \{A_i \mid i \in I\}$，由前段的可比较性(定理 5.1.12(2))得$\Sigma$是单调的，由定理 2.5.11(2)，要证明并映射 f_Γ存在，只需证任给 $i, j \in I$，如果 $A_i \subseteq A_j$，则任给 $x \in A_i$，都有 $f_i(x) = f_j(x)$。

任给 $i, j \in I$，如果 $A_i \subseteq A_j$，则

$$A_i \text{ 是 } A_j \text{ 的前段},$$

由 f_j 是 A_j 到 B_j 的相似映射，A_i 是 A_j 的前段和习题 5.1.4 得

$$f_j[A_i] \text{是 } B_j \text{ 的前段},$$

并且

$$g : A_i \to f_j[A_i] \quad g(x) = f_j(x)$$

是 A_i 到 $f_j[A_i]$的相似映射，由 g 是 A_i 到 $f_j[A_i]$的相似映射，f_i 是 A_i 到 B_i 的相似映射，$f_j[A_i]$和 B_i 都是 A 的前段和定理 5.2.1(3)得

$$f_i = g,$$

所以任给 $x \in A_i$，都有 $f_i(x) = g(x) = f_j(x)$。

因为任给 $i \in I$，f_i 都是双射，所以由定理 2.5.11(1)(2)得 f_Γ是双射。

任给 $x, y \in \bigcup_{i\in I} A_i$，存在 $i \in I$，使得 $x, y \in A_i$，所以

$$x \leq y \text{ 当且仅当 } f_i(x) \leq f_i(y) \text{当且仅当 } f_\Gamma(x) \leq f_\Gamma(y)。$$

因此 f_Γ是相似映射。■

有了这些准备，就可以证明良序集基本定理了。

5.2.3 定理 良序集基本定理 任给两个良序集 A, B，都有 A 相似于 B 的前段或 B 相似于 A 的前段。

证 令 $I = \{X \mid X$ 是 A 的前段，存在 B 的前段 Y，使得 $X \cong Y\}$，由定理 5.2.1(3)，任给 $X \in I$，存在惟一的 B 的前段 Y，使得 $X \cong Y$。

任给 $i \in I$，令

$$A_i = i,$$

$$B_i = \text{ 和 } A_i \text{ 相似的惟一的 } B \text{ 的前段},$$

则任给 $i \in I$，都有 $A_i \cong B_i$，由引理 5.2.2 得

$$\bigcup_{i\in I} A_i \cong \bigcup_{i\in I} B_i,$$

由前段对并的封闭性(定理 5.1.12(3))得

$$\bigcup_{i\in I} A_i \text{ 是 } A \text{ 的前段},$$

和

$$\bigcup_{i\in I} B_i \text{ 是 } B \text{ 的前段}。$$

如果$\bigcup_{i\in I} A_i \neq A$ 且$\bigcup_{i\in I} B_i \neq B$，则存在 $a \in A$，存在 $b \in B$，使得

$$\bigcup_{i\in I} A_i = A(a) \text{且} \bigcup_{i\in I} B_i \neq B(b),$$

由 $A(a) \cong B(b)$和例 5.1.15 得

$$A[a] \cong B[b],$$

由 I 的定义得 $A[a] \in I$，所以

$$A[a] \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i = A(a),$$

矛盾。因此$\bigcup_{i\in I} A_i = A$ 或$\bigcup_{i\in I} B_i = B$。

当$\bigcup_{i\in I} A_i = A$ 时，有 A 相似于 B 的前段$\bigcup_{i\in I} B_i$，当$\bigcup_{i\in I} B_i = B$ 时，有 B 相似于 A 的前段$\bigcup_{i\in I} A_i$。■

A 相似于 B 的前段，这个相似映射也是 A 到 B 的单射，所以

$$|A| \leq |B|。$$

因此良序集基本定理也告诉我们，对于两个良序集来说，它们的元素的个数的可以比较大小的。这正是我们引进良序集的重要目的之一。

从良序集基本定理还可以得到，如果 A 不能相似于 B 的真前段，则 B 一定相似于 A 的前段。结合良序集不能相似于自己的真前段的结果，良序集基本定理的另一种表述是：

任给两个良序集 A, B，以下情况恰好有一种成立：

(1) A 相似于 B 的真前段；(2) B 相似于 A 的真前段；(3) A 相似于 B。

习题 5.2

5.2.1　证明良序集相似的以下性质：

(1) A 相似于 A 的前段。

(2) 如果 B 相似于 A 的前段，A 相似于 B 的前段，则 B 相似于 A。

(3) 如果 B 相似于 A 的前段，C 相似于 B 的前段，则 C 相似于 A 的前段。

5.2.2　A 是良序集，$a, b\in A$，证明：

(1) $A(a)$相似于 $A(b)$当且仅当 $a = b$。

(2) $A(a)$相似于 $A(b)$的前段当且仅当 $a\leq b$。

5.2.3　A 是良序集，$B\subseteq A$，证明：

(1) 任给 $X\subseteq B$，如果 f 是 A 到 X 的相似映射，则任给 $x\in A$，都有 $x\leq f(x)$。

(2) A 不能相似于 B 的真前段，从而 B 相似于 A 的前段。

5.3　序数和超穷归纳法

从两个集合等势可以引进刻画元素个数的数——基数，原因在于等势的自返性、对称性和传递性，因为相似也有自返性、对称性和传递性，所以彼此相似的良序集可以确定一个刻画良序关系的数。

5.3.1　定义　序数　所有彼此相似的良序集确定的数称为序数。和良序集 A 彼此相似的所有良序集(从而它们彼此相似)确定的序数称为 A 的序数，记为 $\overline{A}$。这样就有：

$$\overline{A} = \overline{B} \text{ 当且仅当 } A\cong B。$$

基数相同的有限良序集都相似(见例 5.1.14)，所以将 $\overline{\mathbf{N}_n}$ 和 n 等同是合理的。

自然数既可以作为基数也可以作为序数，不是自然数的序数称为无限序数。特别地，$\overline{\mathbf{N}}$ 是无限序数，这个序数记为ω。

无限序数和自然数有本质的区别，有相同无限基数的良序集可以有不同的无限序数，如当 $1\leq n<m$ 时，

$$<\mathbf{N}, \leq>，<\mathbf{N}, R_n>，<\mathbf{N}, R_m>\text{和}<\mathbf{Z}, R>$$

两两不相似，所以它们的序数两两不同，但它们的基数都是$\aleph_0$。

以后一般用$\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau, \delta$等表示序数。

序数也是自然数的一种推广，也应该考虑它们的大小。

5.3.2　定义　序数的大小　α, β是任意两个序数，取良序集 A 和 B 满足 $\overline{A} = \alpha$且 $\overline{B} = \beta$。如果 A 相似于 B 的前段，则称α小于等于β，记为$\alpha\leq\beta$。

α小于等于β有时也称β大于等于α，记为$\beta\geq\alpha$。

这定义是合理的，因为如果 $\overline{A} = \overline{A_0}$且 $\overline{B} = \overline{B_0}$，则 A_0 也一定相似 B_0 的前段。

$\alpha\leq\beta$，取良序集 C, B，使得如果 $\overline{C} = \alpha$且 $\overline{B} = \beta$，则 C 相似于 B 的前段 A，所以 $\overline{A} = \overline{C} = \alpha$。因此对于$\alpha\leq\beta$，总是可以取良序集

A, B，使得 $\overline{A} = \alpha$，$\overline{B} = \beta$且 A 是 B 的前段。

将$\alpha \le \beta$且$\alpha \neq \beta$记为$\alpha < \beta$，称为α小于β，类似地还有$\beta > \alpha$(称为β大于α)。

由相似映射的性质可知，如果 A 相似于 B 的真前段，则 A 不能相似于 B。所以如果 $\overline{A} = \alpha$，$\overline{B} = \beta$，则

$\alpha < \beta$当且仅当 A 相似于 B 的真前段。

当$\alpha < \beta = \overline{B}$时，首先取 B 的前段 A，使得 $\overline{A} = \alpha$，因为$\alpha < \beta$，所以 A 是 B 的真前段，因此存在 $b \in B$，使得 $A = B(b)$。

这样，当$\alpha < \beta = \overline{B}$ 时，可以取 $b \in B$，使得 $\overline{B(b)} = \alpha$。

另外，任给 $b \in B$，都有 $\overline{B(b)} < \overline{B}$。

序数的大小确实的一种大小关系，并且还具有可比较性。

5.3.3 定理 序数大小的性质。

(1) 自返性 任给序数α，都有$\alpha \le \alpha$。

(2) 反对称性 任给序数α, β，如果$\alpha \le \beta$且$\beta \le \alpha$，则$\alpha = \beta$。

(3) 传递性 任给序数α, β, γ，如果$\alpha \le \beta$且$\beta \le \gamma$，则$\alpha \le \gamma$。

(4) 可比较性 任给序数α, β，都有$\alpha \le \beta$或$\beta \le \alpha$。

证 (1)(2)(3)见习题 5.2.1。

(4)见良序集基本定理。■

下面是序数大小的几个例子。

5.3.4 例 如果 n<m，则 $\mathbf{N}_n$ 是 $\mathbf{N}_m$ 的前段，所以 $\overline{\mathbf{N}_n} \le \overline{\mathbf{N}_m}$。这更说明了将 $\overline{\mathbf{N}_n}$ 等同于 n 是合理的。

5.3.5 例 $\mathbf{N}$ 的任何真前段都是某个 $\mathbf{N}_n$，所以比ω小的序数都是自然数，因此ω是最小的无限序数。

例 5.3.5 也说明了，任给无限良序集 A，$\mathbf{N}$ 一定相似于 A 的前段，这个前段就是 A 的一个无限子集。

定理 4.3.8 证明每个无限集都有可数子集是不严格的，由例 5.3.5 可以严格证明每个无限良序集都有可数子集。

5.3.6 例 任给 1≤n<m，都有

$$\overline{\langle \mathbf{N}, \le \rangle} < \overline{\langle \mathbf{N}, R_n \rangle} < \overline{\langle \mathbf{N}, R_m \rangle} < \overline{\langle \mathbf{Z}, R \rangle}。$$

5.3.7 例 A 是良序集，$a, b \in A$，则

$\overline{A(a)} = \overline{A(b)}$当且仅当 $a = b$，

$\overline{A(a)} \le \overline{A(b)}$当且仅当 $a \le b$ (见习题 5.2.2)。

现在讨论序数在小于等于关系下的性质，需要用到一个重要的序数集合。任给序数α，所有比α小的序数组成集合

$$\mathbf{O}(\alpha) = \{\beta \mid \beta < \alpha\}。$$

5.3.8 定理 任给序数α，$\mathbf{O}(\alpha)$在序数的小于等于关系下是良序集，并且有 $\overline{\mathbf{O}(\alpha)} = \alpha$。

证 设 $\overline{A} = \alpha$，A 上的良序记为$\le_A$。如果$\beta < \alpha$，存在惟一的 A 的真前段 $A(a)$，使得

$$\overline{A(a)} = \beta，$$

所以可以构造 $\mathbf{O}(\alpha)$到 A 的映射

$$f：\mathbf{O}(\alpha) \to A \quad f(\beta) = a \text{ (如果 } \overline{A(a)} = \beta\text{)}，$$

由 f 的定义得$\beta = \overline{A(f(\beta))}$。

任给$\beta, \gamma \in \mathbf{O}(\alpha)$，如果 $f(\beta) = f(\gamma)$，则

$$\beta = \overline{A(f(\beta))} = \overline{A(f(\gamma))} = \gamma。$$

所以 f 是单射。

任给 $a \in A$，令$\beta = \overline{A(a)}$，则

$$\beta \in \mathbf{O}(\alpha)\text{且 } f(\beta) = a，$$

所以 f 是满射。

任给$\beta, \gamma \in \mathbf{O}(\alpha)$，

$\beta \le \gamma$ 当且仅当 $\overline{A(f(\beta))} \le \overline{A(f(\gamma))}$

当且仅当 $A(f(\beta))$是 $A(f(\gamma))$的前段

当且仅当 $f(\beta) \le f(\gamma)$，

所以 f 是相似映射。

由定理 5.1.13 得 $\mathbf{O}(\alpha)$是良序集且 $\mathbf{O}(\alpha)$和 A 相似，所以 $\overline{\mathbf{O}(\alpha)} = \overline{A} = \alpha$。■

定理 5.3.8 告诉我们，所有比序数α小的序数构成一个良序集，它的序数恰好是α。所以如果在讨论中需用到序数为α的良序集，

则可取 $A = \mathbf{O}(\alpha)$。

5.3.9 定理 任何序数的非空集合都有最小数，从而任何序数的集合在小于等于关系下都是良序集。

证 设 A 是序数的非空集合，取$\alpha\in A$。

如果 $A\cap\mathbf{O}(\alpha) = \varnothing$，则$\alpha$是 A 的最小数。

如果 $A\cap\mathbf{O}(\alpha) \neq \varnothing$，则 $A\cap\mathbf{O}(\alpha)$是 $\mathbf{O}(\alpha)$的非空子集，因为 $\mathbf{O}(\alpha)$是良序集，所以 $A\cap\mathbf{O}(\alpha)$有最小数β，β也是 A 的最小数。■

以下的讨论还需要一个重要的概念。

5.3.10 定义 序数的前段 A 是序数的集合。如果任给$\alpha\in A$，任给$\beta\leq\alpha$，都有$\beta\in A$，则称 A 是序数的前段。

由 $\mathbf{O}(\alpha)$的定义可知 $\mathbf{O}(\alpha)$是序数的前段，特别地，因为

$$\mathbf{O}(\omega) = \mathbf{N},\ \mathbf{O}(\mathrm{n}) = \mathbf{N}_{\mathrm{n}},$$

所以 $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{N}_{\mathrm{n}}$ 都是序数的前段。

$\mathbf{O}[\alpha] = \{\beta \mid \beta\leq\alpha\}$也是序数的前段。

显然 $\mathbf{O}[\alpha] = \mathbf{O}(\alpha)\cup\{\alpha\}$。

设 A 是序数的前段，$\beta\in A$，由序数前段的定义，所有比β小的序数和 A 中所有比β小的序数是一样的，所以

$$\mathbf{O}(\beta) = \{\gamma \mid \gamma<\beta\} = \{\gamma \mid \gamma\in A \text{ 且} \gamma<\beta\} = A(\beta)。$$

这说明了序数的前段 A 的任何真前段都是某个 $\mathbf{O}(\beta)$。以下证明序数的前段 A 也是某个 $\mathbf{O}(\alpha)$。

5.3.11 定理 A 是序数的前段，则存在序数α，使得 $A = \mathbf{O}(\alpha)$。

证 由定理 5.3.9，A 是良序集，可令 $\overline{A} = \alpha$。

任给$\beta\in A$，都有，所以

$$\beta = \overline{\mathbf{O}(\beta)} = \overline{A(\beta)}<\overline{A} = \alpha,$$

由 $\mathbf{O}(\alpha)$的定义得

$$\beta\in\mathbf{O}(\alpha),$$

因此 $A \subseteq \mathbf{O}(\alpha)$。

任给$\beta\in\mathbf{O}(\alpha)$，都有$\beta<\alpha = \overline{A}$，所以

$$\text{存在}\gamma\in A\text{，使得 }\overline{A(\gamma)} = \beta,$$

又

$$\overline{A(\beta)} = \overline{\mathbf{O}(\beta)} = \beta,$$

所以 $A(\gamma)$相似于 $A(\beta)$，由习题 5.2.2 得

$$\gamma = \beta,$$

所以

$$\beta\in A,$$

因此 $\mathbf{O}(\alpha) \subseteq A$。■

5.3.12 定理 A 是序数的集合，则存在序数α，使得任给$\beta\in A$，都有$\beta<\alpha$。

证 因为 $\mathbf{O}(\alpha)$中的序数都比α小，所以只要找到序数α，使得 $A \subseteq \mathbf{O}(\alpha)$就行了。

取 $B = \{\gamma \mid \text{存在}\beta\in A\text{，使得}\gamma\leq\beta\}$，则 $A \subseteq B$ 且 B 是序数的前段，由定理 5.3.11 得

$$\text{存在序数}\alpha\text{，使得 } B = \mathbf{O}(\alpha),$$

所以 $A \subseteq \mathbf{O}(\alpha)$。■

定理 5.3.12 中的α实际上是满足条件的最小序数。任给$\gamma<\alpha$，都有$\gamma\in B$，由 B 的定义，存在$\beta\in A$，使得$\gamma\leq\beta$，所以γ不满足条件。

A 是序数的集合，定理 5.3.12 说明了 A 有上界，所以

$$B = \{\beta \mid \beta\text{是 } A \text{ 的上界}\}$$

是序数的非空集合，由定理 5.3.9，B 有最小数α，α就是 A 的上确界。这说明了任何序数的集合 A 都有上确界，以后将 A 的上确界记为 $\sup A$。

无限序数中有些和自然数类似，有些和自然数大不一样。

5.3.13 定义 序数的后继 α是序数，则 $A = \{\beta \mid \beta>\alpha\}$是序数的非空集合，$A$ 的最小数称为α的后继，记为α^+，即

$$\alpha^+ = \{\beta \mid \beta>\alpha\}\text{的最小数。}$$

α的后继α^+就是比α大的最小序数。

5.3.14 定义 后继序数和极限序数 α是序数。如果存在β，使得$\alpha = \beta^+$，则称α是后继序数。如果$\alpha \neq 0$ 且α不是后继序数，则

称α是极限序数。

这样，序数就可以分为不相交的三类，{0}、后继序数和极限序数。

先来看后继序数和极限序数的几个例子。

5.3.15 例 任何不为零的自然数都是后继序数，因为任何不为零的自然数都可以表示为 n+1，而 n+1 就是 n^+。

5.3.16 例 任给 m≥1，无限序数$\overline{\langle \mathbf{N}, R_m\rangle}$都是后继序数。如果 m = 1，则$\overline{\langle \mathbf{N}, R_m\rangle} = \overline{\langle \mathbf{N}, \leq\rangle}^+$，如果 m>1，令 m = n+1，则$\overline{\langle \mathbf{N}, R_m\rangle} = \overline{\langle \mathbf{N}, R_n\rangle}^+$。

5.3.17 例 无限序数ω，$\overline{\langle \mathbf{Z}, R\rangle}$和$\overline{\langle \mathbf{N}\times\mathbf{N}, S\rangle}$都是极限序数。

后继序数的性质和自然数是类似的。

5.3.18 定理 后继序数的性质

(1) $\alpha<\alpha^+$。

(2) 如果$\beta<\alpha$，则$\beta^+\leq\alpha$。因此如果$\alpha<\beta^+$，则$\alpha\leq\beta$。

(3) 如果$\alpha^+=\beta^+$，则$\alpha=\beta$。

(4) $\overline{\mathbf{O}[\alpha]}=\alpha^+$，$\overline{A[a]}=\overline{A(a)}^+$。

(5) 如果$\alpha=\overline{A}$，则α是后继序数当且仅当 A 有最大元。

证 (1) 由α^+的定义直接可得。

(2) 如果$\beta<\alpha$，则$\alpha\in\{\gamma\mid\gamma>\beta\}$，由$\beta^+$的定义得$\beta^+\leq\alpha$。

(3) 用反证法。假设$\alpha\neq\beta$，不妨再设$\beta<\alpha$，由(2)得

$$\beta^+\leq\alpha,$$

由$\beta^+\leq\alpha$和$\alpha<\alpha^+$得

$$\beta^+<\alpha^+,$$

和$\alpha^+=\beta^+$矛盾。

(4) 由(2)得$\{\beta\mid\beta\leq\alpha\}=\{\beta\mid\beta<\alpha^+\}$，这就是

$$\mathbf{O}[\alpha]=\mathbf{O}(\alpha^+),$$

所以$\overline{\mathbf{O}[\alpha]}=\overline{\mathbf{O}(\alpha^+)}=\alpha^+$。

设$\overline{A(a)}=\alpha$，则 $A(a)$相似于 $\mathbf{O}(\alpha)$，所以 $A[a]$相似于 $\mathbf{O}[\alpha]$，因此$\overline{A[a]}=\overline{\mathbf{O}[\alpha]}=\alpha^+=\overline{A(a)}^+$。

(5) 如果α是后继序数，则存在序数β，使得$\alpha=\beta^+$，所以

$$\mathbf{O}(\alpha)=\mathbf{O}(\beta^+)=\mathbf{O}[\beta],$$

因此 A 相似于 $\mathbf{O}[\beta]$，取 $\mathbf{O}[\beta]$到 A 的相似映射 f，则 $f(\beta)$就是 A 的最大元。

如果 A 有最大元 a，则 $A=A[a]$，所以

$$\alpha=\overline{A}=\overline{A[a]}=\overline{A(a)}^+,$$

因此α是后继序数。■

自然数的最小数原理和数学归纳法是等价的，因为序数也有最小数原理(定理 5.3.9)，所以数学归纳法也可以推广到序数上。

5.3.19 定理 超穷归纳法第一形式 设$\phi(\alpha)$是序数α的一个命题，并且满足：

如果任给$\beta<\alpha$，$\phi(\beta)$都成立，则$\phi(\alpha)$成立。

那么，任给序数α，$\phi(\alpha)$都成立。

证 用反证法。

假设存在β，使得$\phi(\beta)$不成立，则

$$\{\beta\mid\phi(\beta)\text{不成立}\}$$

非空，设它的最小数为α。由α的定义得

$\phi(\alpha)$不成立且任给$\beta<\alpha$，$\phi(\beta)$成立，

由定理条件得$\phi(\alpha)$成立，矛盾。■

因为没有序数比 0 小，所以

任给$\beta<\alpha$，$\phi(\beta)$都成立

总是真的，因此定理 5.3.19 的条件中蕴涵着任给$\phi(0)$成立。应用时，有时需要特别证明$\phi(0)$成立。

后继序数和极限序数的性质很不一样，经常需要分别讨论，所以超穷归纳法的另一形式更常用。

5.3.20 定理 超穷归纳法第二形式 设$\phi(\alpha)$是序数α的一个命题，并且满足：

(1) $\phi(0)$成立；

(2) 如果$\phi(\alpha)$成立，则$\phi(\alpha^+)$成立；

(3) σ是极限序数，如果任给$\alpha<\sigma$，$\phi(\alpha)$都成立，则$\phi(\sigma)$成立。

那么，任给序数α，$\phi(\alpha)$都成立。

证　类似于定理 5.3.19。对

$\{\beta \mid \phi(\beta)$不成立$\}$

的最小数分 0、后继序数、极限序数三种情况分别讨论。详细证明留给读者。■

有时讨论的是大于等于某个序数α_0的所有序数的性质，这时超穷归纳法需要稍加改动。第一形式的条件改为：

如果任给$\alpha_0\le\beta<\alpha$，$\phi(\beta)$都成立，则$\phi(\alpha)$成立。

第二形式的条件改为：

(1) $\phi(\alpha_0)$成立；

(2) 任给$\alpha>\alpha_0$，如果$\phi(\alpha)$成立，则$\phi(\alpha^+)$成立；

(3) σ是极限序数且$\sigma>\alpha_0$，如果任给$\alpha_0\le\alpha<\sigma$，$\phi(\alpha)$都成立，则$\phi(\sigma)$成立；

结论相应减弱为：

任给序数α，如果$\alpha\ge\alpha_0$，则$\phi(\alpha)$成立。

自然数上的归纳定义也可以推广到序数上。

5.3.21　超穷归纳定义　通过以下方式可以对每个序数α定义 K_α (K_α可以是元素、集合、n 元有序组、映射、关系、基数、序数等)。第一形式：

由所有$\beta<\alpha$的 K_β来定义 K_α。

第二形式：

(1) 直接定义 K_0；

(2) 由 K_α来定义 K_{α^+}；

(3) σ是极限序数，由所有$\alpha<\sigma$的 K_α来定义 K_σ。

那么，任给序数α，都定义了 K_α。

和超穷归纳法类似，有时超穷归纳定义不是从 0 开始而是从某个序数α_0开始。

注意超穷归纳定义的叙述是不严格的，什么叫“由…来定义…”的含义是不清楚的。

然而，具体应用超穷归纳定义时，“由…来定义…”可能有一个较清楚的可操作的含义，如在下节中看到的那样。

在本书的最后一章中，将简单地讨论如何将超穷归纳定义的概念严格化。

习题 5.3

5.3.1　α和β是序数，$\beta<\alpha$，证明：如果任给$\gamma<\alpha$，都有$\gamma\le\beta$，则$\alpha=\beta^+$。

5.3.2　证明极限序数的以下性质：

(1) 如果$\sigma=\overline{A}$且$\sigma\neq0$，则σ是极限序数当且仅当 A 没有最大元。

(2) σ是极限序数。如果$\alpha<\sigma$，则$\alpha^+<\sigma$。

(3) A 是序数的集合，$\sigma=\sup A$。如果$\sigma\notin A$，则σ是极限序数。

(4) 如果$\sigma\neq0$，则σ是极限序数当且仅当$\sigma=\sup\mathbf{O}(\sigma)$。

5.3.3　证明超穷归纳法的第二形式。

5.3.4　A, B 是序数的集合，证明：如果任给$\beta\in B$，都存在$\alpha\in A$，使得$\beta\le\alpha$，则 $\sup B\le\sup A$。

5.3.5　$\sigma=\sup A$，证明：任给$\beta<\sigma$，都存在$\gamma\in A$，使得$\beta<\gamma$。

5.3.6　A 是良序集，任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，A_i都是 A 的前段，证明：

(1) 任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有 A_i都是$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$的前段。

(2) 如果$\overline{\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}}\le\sup\{\overline{A_\mathrm{i}}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$，则存在 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，使得$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$是 A_i的真前段。

(3) $\overline{\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}}=\sup\{\overline{A_\mathrm{i}}\mid\mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$。

5.4　序数的运算

自然数的加法和乘法是非常熟悉的，但它们的严格定义需要用数学归纳法。加法的归纳定义如下：

(1) $n+0 = n$；

(2) $n+(m+1) = (n+m)+1$。

乘法的归纳定义如下：

(1) $n\cdot 0 = 0$；

(2) $n\cdot(m+1) = n\cdot m+n$。

注意 m+1 不能依赖于加法的定义，要定义加法需要先对 m+1 作定义，实际上 m+1 就是 m^+，所以先要在自然数中引进 m 后继 m^+(用自然数的最小数原理)，才能定义加法和乘法。这样上述加法和乘法定义中的(2)应分别改为

$$n+m^+ = (n+m)^+ \text{和 } n\cdot m^+ = n\cdot m+n\text{。}$$

现在考虑用超穷归纳定义将自然数的加法和乘法推广到序数。0 和后继序数的定义可以比照自然数，关键是极限序数的定义。

极限序数σ恰好是所有小于σ的序数的上确界($\sigma = \sup\mathbf{O}(\sigma)$)，一个自然的想法是：将$\alpha+\sigma$定义为所有$\alpha+\gamma$的上确界，将$\alpha\cdot\sigma$定义为所有$\alpha\cdot\gamma$的上确界，其中$\gamma$取遍所有小于$\sigma$的序数。

5.4.1 定义　序数的加法和乘法　序数的加法$\alpha+\beta$归纳定义如下：

(1) $\alpha+0 = \alpha$；

(2) $\alpha+\beta^+ = (\alpha+\beta)^+$；

(3) σ是极限序数，$\alpha+\sigma = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\}$。

序数的乘法$\alpha\cdot\beta$归纳定义如下：

(1) $\alpha\cdot 0 = 0$；

(2) $\alpha\cdot\beta^+ = \alpha\cdot\beta+\alpha$；

(3) σ是极限序数，$\alpha\cdot\sigma = \sup\{\alpha\cdot\gamma \mid \gamma<\sigma\}$。

序数的加法和乘法都称为序数的运算。先讨论序数的运算和序数的大小的联系。

5.4.2 定理　序数的运算和序数的大小。

(1) 如果$\beta\le\alpha$，则$\beta+\gamma\le\alpha+\gamma$。

(2) 如果$\beta<\gamma$，则$\alpha+\beta<\alpha+\gamma$。

(3) 如果$\beta\le\alpha$，则$\beta\cdot\gamma\le\alpha\cdot\gamma$。

(4) 如果$\beta<\gamma$且$\alpha \ne 0$，则$\alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\gamma$。

证　(1) 对γ使用超穷归纳法。

① $\gamma = 0$，则$\beta+\gamma = \beta+0 = \beta\le\alpha = \alpha+0 = \alpha+\gamma$。

② γ是后继序数，则存在序数δ，使得

$$\gamma = \delta^+,$$

由归纳假设得

$$\beta+\delta\le\alpha+\delta,$$

所以$\beta+\gamma = \beta+\delta^+ = (\beta+\delta)^+\le(\alpha+\delta)^+ = \alpha+\delta^+ = \alpha+\gamma$。

③ γ是极限序数，由归纳假设得

任给$\delta<\gamma$，都有$\beta+\delta\le\alpha+\delta$，

所以$\beta+\gamma = \sup\{\beta+\delta \mid \delta<\gamma\}\le\sup\{\alpha+\delta \mid \delta<\gamma\} = \alpha+\gamma$。

(2) 对γ使用超穷归纳法。

① $\gamma = 0$。因为没有比 0 小的序数，所以

$$\beta<\gamma$$

为假，因此如果$\beta<\gamma$，则$\alpha+\beta<\alpha+\gamma$。

② γ是后继序数，则

存在序数δ，使得$\gamma = \delta^+$。

如果$\beta<\gamma$，则$\beta<\delta^+$，所以

$$\beta<\delta\text{或}\beta = \delta,$$

由归纳假设得

$$\alpha+\beta<\alpha+\delta\text{或}\alpha+\beta = \alpha+\delta,$$

所以$\alpha+\beta\le\alpha+\delta<(\alpha+\delta)^+ = \alpha+\delta^+ = \alpha+\gamma$。

③ γ是极限序数。如果$\beta<\gamma$，则$\beta^+<\gamma$，所以

$$\alpha+\beta^+\in\{\alpha+\delta \mid \delta<\gamma\},$$

因此$\alpha+\beta<(\alpha+\beta)^+ = \alpha+\beta^+\leq\sup\{\alpha+\delta \mid \delta<\gamma\} = \alpha+\gamma$。

(3) 对γ使用超穷归纳法。

① $\gamma = 0$，则$\beta\cdot\gamma = \beta\cdot 0 = 0\leq 0 = \alpha\cdot 0 = \alpha\cdot\gamma$。

② γ是后继序数，则

存在序数δ，使得$\gamma = \delta^+$，

由归纳假设得

$$\beta\cdot\delta\leq\alpha\cdot\delta,$$

所以$\beta\cdot\gamma = \beta\cdot\delta^+ = \beta\cdot\delta+\beta\leq\alpha\cdot\delta+\beta\leq\alpha\cdot\delta+\alpha = \alpha\cdot\delta^+ = \alpha\cdot\gamma$。

③ γ是极限序数，由归纳假设得

任给$\delta<\gamma$，都有$\beta\cdot\delta\leq\alpha\cdot\delta$，

所以$\sigma = \sup\{\beta\cdot\delta \mid \delta<\gamma\}\leq\sup\{\alpha\cdot\delta \mid \delta<\gamma\} = \alpha\cdot\gamma$。

(4) 对γ使用超穷归纳法。

① $\gamma = 0$。因为没有比 0 小的序数，所以$\beta<\gamma$为假，因此如果$\beta<\gamma$，则$\alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\gamma$。

② γ是后继序数，则

存在序数δ，使得$\gamma = \delta^+$。

如果$\beta<\gamma$，则 $\beta<\delta^+$，所以

$$\beta<\delta\text{或}\beta = \delta,$$

由归纳假设得

$$\alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\delta\text{或}\alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\delta,$$

所以

$$\alpha\cdot\beta\leq\alpha\cdot\delta,$$

由 $0<\alpha$和(2)得

$$\alpha\cdot\beta+0<\alpha\cdot\beta+\alpha,$$

所以$\alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\beta+0<\alpha\cdot\beta+\alpha\leq\alpha\cdot\delta+\alpha = \alpha\cdot\delta^+ = \alpha\cdot\gamma$。

③ γ是极限序数。如果$\beta<\gamma$，则$\beta^+<\gamma$，所以

$$\alpha\cdot\beta^+\in\{\alpha\cdot\delta \mid \delta<\gamma\},$$

由 $0<\alpha$和(2)得

$$\alpha\cdot\beta+0<\alpha\cdot\beta+\alpha,$$

所以$\alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\beta+0<\alpha\cdot\beta+\alpha = \alpha\cdot\beta^+ \leq\sup\{\alpha\cdot\delta \mid \delta<\gamma\} = \alpha+\gamma$。■

注意和自然数不同的是：

从$\beta<\alpha$不能推出$\beta+\gamma<\alpha+\gamma$，

从$\beta<\alpha$和$\gamma \neq 0$ 也不能推出$\beta\cdot\gamma<\alpha\cdot\gamma$，

以下就是一个例子。

5.4.3 例 任给 $n>0$，都有

$$n+\omega = \sup\{n+m \mid m<\omega\} = \omega$$

和

$$n\cdot\omega = \sup\{n\cdot m \mid m<\omega\} = \omega,$$

所以任给 $0<n<m$，都有

$n+\omega = \omega = m+\omega$和 $n\cdot\omega = \omega = m\cdot\omega$。

如果σ是极限序数，则$\sigma = \sup\mathbf{O}(\sigma)$，所以

$$\begin{aligned}\alpha+\sup\mathbf{O}(\sigma) &= \alpha+\sigma = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\}\\ &= \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in\mathbf{O}(\sigma)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\cdot\sup\mathbf{O}(\sigma) &= \alpha\cdot\sigma = \sup\{\alpha\cdot\gamma \mid \gamma<\sigma\}\\ &= \sup\{\alpha\cdot\gamma \mid \gamma\in\mathbf{O}(\sigma)\}。\end{aligned}$$

这个结果可以推广到一般的序数集合，任给序数的集合 A，都有

$$\alpha+\sup A = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\},$$

$$\alpha\cdot\sup A = \sup\{\alpha\cdot\gamma \mid \gamma\in A\}。$$

从形式上看，就是序数的加法和乘法对上确界有分配律。

5.4.4 引理 A 是序数的集合。

(1) $\alpha+\sup A = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}$。

(2) $\alpha\cdot\sup A = \sup\{\alpha\cdot\gamma \mid \gamma\in A\}$。

证 (1) 如果 A 有最大元β，则由定理 5.4.2(2)可得

$\alpha+\beta$是$\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}$的最大元，

所以

$\sup A = \beta$且 $\sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\} = \alpha+\beta$，

因此$\alpha+\sup A = \alpha+\beta = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}$。

如果 A 没有最大元，则$\sigma = \sup A$ 就是极限序数。只需证明

$$\sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\} = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}$$

就行了，因为这样就有

$$\alpha+\sup A = \alpha+\sigma = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\} = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}。$$

任给$\alpha+\beta\in\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\}$，都有$\beta<\sigma$，由$\sigma = \sup A$ 和习题 5.3.6 得

存在$\delta\in A$，使得$\beta<\delta$，

由$\beta<\delta$和定理 5.4.2(2)得

$$\alpha+\beta<\alpha+\delta，$$

而$\alpha+\delta\in\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}$。

这就是说，任给$\alpha+\beta\in\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\}$，存在$\alpha+\delta\in\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}$，使得$\alpha+\beta<\alpha+\delta$，由习题 5.3.4 得

$$\sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\} \le \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}。$$

又因为 $A \subseteq \mathbf{O}(\sigma)$，所以

$$\sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}\le\sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in \mathbf{O}(\sigma)\} = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\}。$$

因此 $\sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\sigma\} = \sup\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in A\}$。

(2) 类似于(1)，详细证明留给读者。■

有了这些准备，就可以证明序数运算的性质了。

5.4.5 定理 序数运算的性质

(1) 加法结合律 $\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$。

(2) 左分配律 $\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$。

(3) 乘法结合律 $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$。

(4) 加法左消去律 如果$\alpha+\beta = \alpha+\gamma$，则$\beta = \gamma$。

(5) 乘法左消去律 如果$\alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\gamma$且$\alpha \ne 0$，则$\beta = \gamma$。

证 (1) 对γ使用超穷归纳法。

① $\gamma = 0$，则$\alpha+(\beta+\gamma) = \alpha+(\beta+0) = \alpha+\beta$
$= (\alpha+\beta)+0 = (\alpha+\beta)+\gamma$。

② γ是后继序数，则存在序数δ，使得$\gamma = \delta^+$。由归纳假设得

$$\alpha+(\beta+\delta) = (\alpha+\beta)+\delta，$$

所以$\alpha+(\beta+\gamma) = \alpha+(\beta+\delta^+) = \alpha+(\beta+\delta)^+$
$= (\alpha+(\beta+\delta))^+ = ((\alpha+\beta)+\delta)^+$
$= (\alpha+\beta)+\delta^+ = (\alpha+\beta)+\gamma$。

③ γ是极限序数。由归纳假设可知，

任给$\delta<\gamma$，都有$\alpha+(\beta+\delta) = (\alpha+\beta)+\delta$，

所以

$$\{\alpha+(\beta+\delta) \mid \delta<\gamma\} = \{(\alpha+\beta)+\delta \mid \delta<\gamma\}，$$

令

$$A = \{\beta+\delta \mid \delta<\gamma\}，$$

则

$$\beta+\gamma = \sup\{\beta+\delta \mid \delta<\gamma\} = \sup A，$$

因此$\alpha+(\beta+\gamma) = \alpha+\sup A = \sup\{\alpha+\sigma \mid \sigma\in A\}$
$= \sup\{\alpha+(\beta+\delta) \mid \delta<\gamma\}$
$= \sup\{(\alpha+\beta)+\delta \mid \delta<\gamma\}$
$= (\alpha+\beta)+\gamma$。

(2) 对γ使用超穷归纳法。

① $\gamma = 0$，则$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot(\beta+0) = \alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\beta+0$
$= \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot 0 = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$。

② γ是后继序数，则

存在序数δ，使得$\gamma = \delta^+$。

由归纳假设得

$$\alpha\cdot(\beta+\delta) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\delta，$$

所以

$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot(\beta+\delta^+) = \alpha\cdot(\beta+\delta)^+$
$= \alpha\cdot(\beta+\delta)+\alpha = (\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\delta)+\alpha$
$= \alpha\cdot\beta+(\alpha\cdot\delta+\alpha) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\delta^+$
$= \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$。

③ γ是极限序数。由归纳假设可知，

任给$\delta<\gamma$，都有$\alpha\cdot(\beta+\delta)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\delta$，

所以

$$\{\alpha\cdot(\beta+\delta)\mid\delta<\gamma\}=\{\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\delta\mid\delta<\gamma\}，$$

令

$$A=\{\beta+\delta\mid\delta<\gamma\}，B=\{\alpha\cdot\delta\mid\delta<\gamma\}，$$

则

$$\beta+\gamma=\sup\{\beta+\delta\mid\delta<\gamma\}=\sup A，$$
$$\alpha\cdot\gamma=\sup\{\alpha\cdot\gamma\mid\delta<\gamma\}=\sup B，$$

因此$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\sup A=\sup\{\alpha\cdot\sigma\mid\sigma\in A\}=\sup\{\alpha\cdot(\beta+\delta)\mid\delta<\gamma\}$

$$=\sup\{\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\delta\mid\delta<\gamma\}=\sup\{\alpha\cdot\beta+\sigma\mid\sigma\in B\}$$
$$=\alpha\cdot\beta+\sup B=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma。$$

(3) 对γ使用超穷归纳法。

① $\gamma=0$，则$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=\alpha\cdot(\beta\cdot 0)=\alpha\cdot 0=0$

$$=(\alpha\cdot\beta)\cdot 0=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma。$$

② γ是后继序数，则

存在序数δ，使得$\gamma=\delta^+$。

由归纳假设得

$$\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\delta，$$

所以$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=\alpha\cdot(\beta\cdot\delta^+)=\alpha\cdot(\beta\cdot\delta+\beta)$

$$=\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)+\alpha\cdot\beta=(\alpha\cdot\beta)\cdot\delta+\alpha\cdot\beta$$
$$=(\alpha\cdot\beta)\cdot\delta^+=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma。$$

③ γ是极限序数。由归纳假设可知，

任给$\delta<\gamma$，都有$\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\delta$，

所以

$$\{\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)\mid\delta<\gamma\}=\{(\alpha\cdot\beta)\cdot\delta\mid\delta<\gamma\}，$$

令

$$A=\{\beta\cdot\delta\mid\delta<\gamma\}，$$

则

$$\beta\cdot\gamma=\sup\{\beta\cdot\delta\mid\delta<\gamma\}=\sup A，$$

因此$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=\alpha\cdot\sup A=\sup\{\alpha\cdot\sigma\mid\sigma\in A\}$

$$=\sup\{\alpha\cdot(\beta\cdot\delta)\mid\delta<\gamma\}$$
$$=\sup\{(\alpha\cdot\beta)\cdot\delta\mid\delta<\gamma\}$$
$$=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma。$$

(4)(5)留给读者。■

序数运算没有交换律。

5.4.6 例 任给 n>1，都有

$$\omega=\omega+0<\omega+n \text{ 和 } \omega=\omega\cdot 1<\omega\cdot n。$$

所以任给 n>1，都有

$$n+\omega=\omega\neq\omega+n \text{ 和 } n\cdot\omega=\omega\neq\omega\cdot n。$$

序数运算左边和右边的性质不对称，虽然有左分配律和左消去律，但没有右分配律和右消去律，请看下面的例子。

5.4.7 例 $(1+1)\cdot\omega=2\cdot\omega=\omega\neq\omega+\omega=1\cdot\omega+1\cdot\omega$。

$1+\omega=2+\omega$，$1\cdot\omega=2\cdot\omega$，但没有 $1=2$。

现在考虑序数的“减法”和“除法”，它们是自然数的“减法”和“除法”的推广。

自然数的“减法”是指：任给 m, n$\in$**N**，如果 m≤n，则存在惟一的 t，使得 n = m+t。

自然数的“除法”就是带余除法：任给 m, n$\in$**N**，如果 m ≠ 0，则存在惟一的 s 和 t，使得 n = m·s+t 且 t<m。

5.4.8 定理 序数的“减法”和“除法”。

(1) 任给序数α,β，如果$\beta\leq\alpha$，则存在惟一的δ，使得$\alpha=\beta+\delta$。

(2) 任给序数α,β，如果$\beta\neq 0$，则存在惟一的γ和δ，使得$\alpha=\beta\cdot\gamma+\delta$且$\delta<\beta$。

证 (1) 先证存在性，对α使用超穷归纳法。

① $\alpha=0$，则有$\beta\leq 0$ 得$\beta=0$，所以$\alpha=0=0+0=\beta+0$。

② α是后继序数，则

存在序数γ，使得$\alpha=\gamma^+$。

如果$\beta\leq\alpha$，则$\beta\leq\gamma^+$，所以

$\beta\le\gamma$或$\beta=\gamma^+$。

当$\beta\le\gamma$时，由归纳假设，

存在δ，使得$\alpha=\beta+\delta$，

所以

$$\alpha^+=(\beta+\delta)^+=\beta+\delta^+；$$

当$\beta=\alpha^+$时，有$\alpha^+=\beta+0$。

③ α是极限序数且$\beta\le\alpha$。令

$$A=\{\beta+\gamma\mid\beta+\gamma<\alpha\},$$

$$B=\{\tau\mid\beta\le\tau<\alpha\},$$

则

$$\sup A\le\alpha\text{且}\sup B=\alpha。$$

任给$\tau\in B$，都有$\beta\le\tau<\alpha$，由归纳假设，

存在γ，使得$\tau=\beta+\gamma$，

显然有$\beta+\gamma<\alpha$，所以

$$\tau\in A,$$

因此

$$B\subseteq A,$$

从而

$$\alpha=\sup B\le\sup A。$$

最终得 $\sup A=\alpha$。

取$\delta=\sup\{\gamma\mid\beta+\gamma<\alpha\}$，则

$$\alpha=\sup A=\sup\{\beta+\gamma\mid\beta+\gamma<\alpha\}$$

$$=\beta+\sup\{\gamma\mid\beta+\gamma<\alpha\}=\beta+\delta。$$

再证惟一性。如果存在γ_1,γ_2，使得$\alpha=\beta+\gamma_1$且$\alpha=\beta+\gamma_2$，则

$$\beta+\gamma_1=\beta+\gamma_2,$$

由加法的左消去律(定理 5.4.5(4))得$\gamma_1=\gamma_2$。

(2) 证存在性。取$\gamma=\sup\{\tau\mid\beta\cdot\tau\le\alpha\}$，则

$$\beta\cdot\gamma=\beta\cdot\sup\{\tau\mid\beta\cdot\tau\le\alpha\}=\sup\{\beta\cdot\tau\mid\beta\cdot\tau\le\alpha\}\le\alpha,$$

由(1)得

存在δ，使得$\alpha=\beta\cdot\gamma+\delta$。

如果$\beta\le\delta$，则$\beta\cdot\gamma^+=\beta\cdot\gamma+\beta\le\beta\cdot\gamma+\delta=\alpha$，所以

$$\gamma^+\in\{\tau\mid\beta\cdot\tau\le\alpha\},$$

矛盾，因此$\delta<\beta$。

证惟一性。如果存在$\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2$，使得

$$\alpha=\beta\cdot\gamma_1+\delta_1=\beta\cdot\gamma_2+\delta_2，\delta_1<\beta\text{且}\delta_2<\beta。$$

如果$\gamma_1\ne\gamma_2$，不妨设$\gamma_1<\gamma_2$，则$\gamma_1^+\le\gamma_2$，所以

$$\beta\cdot\gamma_1+\delta_1<\beta\cdot\gamma_1+\beta=\beta\cdot\gamma_1^+\le\beta\cdot\gamma_2\le\beta\cdot\gamma_2+\delta_2,$$

矛盾，因此$\gamma_1=\gamma_2$。再由加法的左消去律(定理 5.4.5(4))得$\delta_1=\delta_2$。

■

这里我们再次遇到了序数运算的左右不对称性。对于序数的“减法”和“除法”只能从左边做，而不能从右边做，请读者自己举例说明。

习题 5.4

5.4.1 证明序数运算的以下性质。

(1) $0+\alpha=\alpha$，$0\cdot\alpha=0$。

(2) $\alpha^+=\alpha+1$。

(3) $\alpha\cdot1=\alpha$，$1\cdot\alpha=\alpha$。

5.4.2 证明引理 5.4.4(2)。即证明$\alpha\cdot\sup A=\sup\{\alpha\cdot\gamma\mid\gamma\in A\}$。

5.4.3 证明加法和乘法的左消去律。

(1) 如果$\alpha+\beta=\alpha+\gamma$，则$\beta=\gamma$。

(2) 如果$\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma$且$\alpha\ne0$，则$\beta=\gamma$。

5.4.4 证明：任给序数都可以表示为$\sigma+n$形式，其中σ是极限序数或 0，$n\in\mathbf{N}$。

5.4.4 举例说明没有右边的“减法”和“除法”。

5.5　有序和与有序积

基数运算的直观意义是集合的并和集合的卡氏积。序数运算是由超穷归纳定义所建立的，它们是否也有一个由良序集的构造所代表的意义呢？确实也有。

序数加法的直观意义是两个良序集的并，序数乘法的直观意义是两个良序集的卡氏积。两个良序集的并不仅仅是作为集合的并，而且还需要在集合的并上构造一种特殊的良序，类似地，两个良序集的卡氏积也需要在作为集合的卡氏积上构造一种特殊的良序。

我们已经在习题 5.1.1 和习题 5.1.5 中构造了这两种特殊的良序。在这里再给出明确的定义。

5.5.1 定义　A, B 是良序集，$A\cap B=\varnothing$，$\le_A$ 和 $\le_B$ 分别是 A 和 B 上的良序，由习题 5.1.5 可知，$\le_A\cup\le_B\cup(A\times B)$ 是 $A\cup B$ 上的良序，这个良序记为 $\le_A\oplus\le_B$。

$\le_A\oplus\le_B$ 的直观意义是：B 中所有元素排在 A 中所有元素之后，原来的次序保持不变(图 5.5.1)。

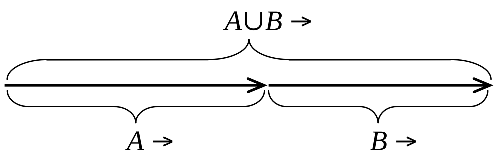


图 5.5.1

5.5.2 定义　A, B 是良序集，$\le_A$ 和 $\le_B$ 分别是 A 和 B 上的良序，由习题 5.1.1 可知

$$\{\langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle \mid x<_B u \text{ 或}(x=u \text{ 且 } y\le_A v)\}$$

是 $B\times A$ 上的良序，这个良序记为 $\le_B\otimes\le_A$。

$\le_B\otimes\le_A$ 的直观意义是：将 $B\times A$ 中的有序对 $\langle x, y\rangle$ 按以下方法排成序，先按第一元素的大小排列，在第一元素相等的有序对中，按第二元素的大小排列，这就是所谓的字典排列法(图 5.5.2)。

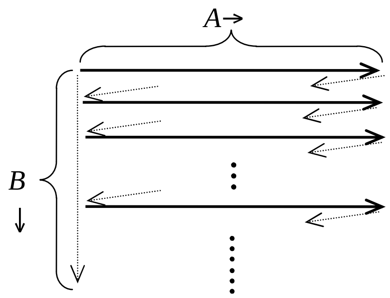


图 5.5.2

利用 $\le_A\oplus\le_B$ 和 $\le_B\otimes\le_A$ 可以构造两个良序集的并和两个良序集的卡氏积。

5.5.3 定义　有序和　A, B 是良序集，$A\cap B=\varnothing$，$\le_A$ 和 $\le_B$ 分别是 A 和 B 上的良序，以 $\le_A\oplus\le_B$ 为良序的良序集 $A\cup B$ 称为 A 和 B 的有序和，记为 $A\oplus B$。

以后使用 $A\oplus B$ 时，总是假定 $A\cap B=\varnothing$。当 $\le_A$ 和 $\le_B$ 分别是 A 和 B 上的良序时，使用 $\le_A\oplus\le_B$ 也总假定 $A\cap B=\varnothing$。

5.5.4 定义　有序积　A, B 是良序集，$\le_A$ 和 $\le_B$ 分别是 A 和 B 上的良序，以 $\le_B\otimes\le_A$ 为为良序的良序集 $B\times A$ 称为 A 和 B 的有序积，记为 $B\otimes A$。

以下是一些例子。

5.5.5 例　$\langle\mathbf{N}_n, \le\rangle\oplus\langle\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_n, \le\rangle=\langle\mathbf{N}, \le\rangle$，

$\langle\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}_n, \le\rangle\oplus\langle\mathbf{N}_n, \le\rangle=\langle\mathbf{N}, R_n\rangle$。

$\langle\mathbf{N}, \le\rangle\otimes\langle\mathbf{N}, \le\rangle=\langle\mathbf{N}\times\mathbf{N}, S\rangle$。

有序和和有序积在相似映射下不变。

5.5.6 定理　如果 $A_1\cong A_2$，$B_1\cong B_2$，则 $A_1\oplus B_1\cong A_2\oplus B_2$，

$B_1\otimes A_1\cong B_2\otimes A_2$。

证 设 f 是 A_1 到 A_2 的相似映射，g 是 B_1 到 B_2 的相似映射。则

$$h: A_1\cup B_1\to A_2\cup B_2 \quad h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{如果 } x\in A_1\\ g(x) & \text{如果 } x\in B_1\end{cases}$$

和

$$h_2: B_1\times A_1\to B_2\times A_2 \quad h_1(x, y) = <g(x), f(y)>$$

分别是 $A_1\oplus B_1$ 到 $A_2\oplus B_2$ 和 $B_1\otimes A_1$ 到 $B_2\otimes A_2$ 的相似映射。■

为了证明有序和确实表达了序数的加法，有序积确实表达了序数的乘法，先来证明有序和有序积的一些性质。

5.5.7 定理 A, B 是良序集，$C\subseteq B$，$\leq_A$ 和 $\leq_B$ 分别是 A 和 B 上的良序。

(1) $\leq_A\oplus(\leq_B|_C) = (\leq_A\oplus\leq_B)|_{A\cup C}$。

(2) $(\leq_B|_C)\otimes\leq_A = (\leq_B\otimes\leq_A)|_{C\times A}$。

(3) 如果 C 是 B 的前段，则 $(\leq_B|_C)\oplus(\leq_B|_{B\setminus C}) = \leq_B$。

证 (1) $<x, y>\in(\leq_A\oplus\leq_B)|_{A\cup C}$

当且仅当

$$<x, y>\in\leq_A\oplus\leq_B \text{ 且 } x, y\in A\cup C,$$

因为 $x, y\in A\cup C$，所以

$<x, y>\in\leq_A$ 当且仅当 $<x, y>\in\leq_A$，$<x, y>\in\leq_B$

当且仅当 $<x, y>\in\leq_B|_C$，$<x, y>\in A\times B$

当且仅当 $<x, y>\in A\times C$，

因此 $<x, y>\in(\leq_A\oplus\leq_B)|_{A\cup C}$ 当且仅当 $<x, y>\in\leq_A\oplus(\leq_B|_C)$(图 5.5.3)。

(2) $<<x, y>, <u, v>>\in(\leq_B\otimes\leq_A)|_{C\times A}$

当且仅当

$$<<x, y>, <u, v>>\in(\leq_B\otimes\leq_A) \text{ 且 } x, u\in C,$$

因为 $x, u\in C$，所以

$<x, y>\in\leq_B$ 当且仅当 $<x, y>\in\leq_B|_C$，$<u, v>\in\leq_A$

当且仅当 $<u, v>\in\leq_A$，

因此

$$<<x, y>, <u, v>>\in(\leq_B\otimes\leq_A)|_{C\times A}$$

当且仅当

$$<<x, y>, <u, v>>\in(\leq_B|_C)\otimes\leq_A \text{(图 5.5.4)。}$$

(3) 首先有 $B\cap(B\setminus C)=\varnothing$，所以 $(\leq_B|_C)\oplus(\leq_B|_{B\setminus C})$ 的定义是合理的。

任给 $<x, y>\in\leq_B$，如果 $y\in C$，则由 C 是 B 的前段得 $x\in C$，所以 $<x, y>\in\leq_B$；如果 $x\in B\setminus C$，则由 C 是 B 的前段得 $y\in B\setminus C$，所以 $<x, y>\in\leq_B|_{B\setminus C}$；如果 $x\in C$ 且 $y\in B\setminus C$，则 $<x, y>\in C\times(B\setminus C)$，这证明了在所有情况下，都有

$$<x, y>\in(\leq_B|_C)\oplus(\leq_B|_{B\setminus C})。$$

因此 $\leq_B\subseteq(\leq_B|_C)\oplus(\leq_B|_{B\setminus C})$。

显然 $\leq_B|_C\subseteq\leq_B$ 且 $\leq_B|_{B\setminus C}\subseteq\leq_B$，又因为 C 是 B 的前段，所以 $C\times(B\setminus C)\subseteq\leq_B$。因此 $(\leq_B|_C)\oplus(\leq_B|_{B\setminus C})\subseteq\leq_B$(图 5.5.5)。■

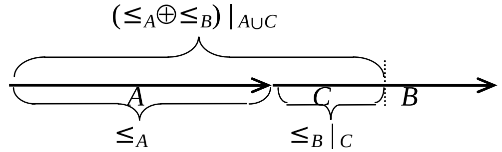


图 5.5.3

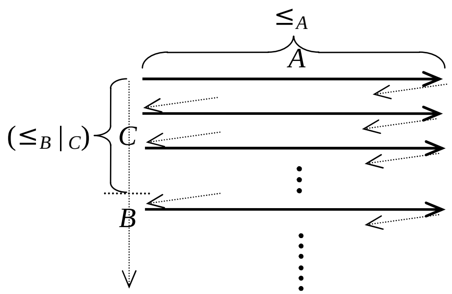


图 5.5.4

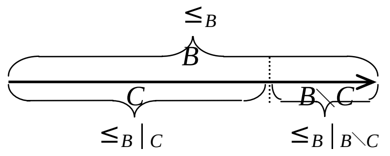


图 5.5.5

证明两个良序集相等，不但要证明它们作为集合是相等的，而且还要证明它们有同样的良序。当它们是另一个良序集的子集，特别是它们是另一个良序集的前段时，它们就有同样的良序。

如果 A, B 是良序集，则当我们说 B 是 A 的子集时，不但要求 $B \subseteq A$，而且要求 A 的良序限制在 B 上恰好是 B 上的良序，这时我们可以用同样的符号表示 A 上和 B 上的良序。

5.5.8 定理　A, B 是良序集。

(1) 如果 C 是 B 的前段，则 $A\oplus C$ 是 $A\oplus B$ 的前段。

(2) 如果 C 是 B 的前段，则 $C\otimes A$ 是 $B\otimes A$ 的前段。

(3) 如果 $a\in B$，则 $A\oplus B(a) = (A\oplus B)(a)$，$A\oplus B[a] = (A\oplus B)[a]$。

(4) 如果 $a\in B$，则 $B[a]\otimes A = (B(a)\otimes A)\oplus(\{a\}\otimes A)$。

(5) 如果任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，B_i 都是 B 的前段，则

$$A\oplus(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i}) = \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A\oplus B_\mathrm{i}，(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i})\otimes A = \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}(B_\mathrm{i}\otimes A)。$$

证　(1) 首先由定理 5.5.7(1)得 $A\oplus C$ 是 $A\oplus B$ 的子集，所以可以用≤同时表示 $A\oplus C$ 和 $A\oplus B$ 上的良序。又由习题 5.1.5 得 B 和 C 分别是 $A\oplus C$ 和 $A\oplus B$ 的子集，所以也用≤表示 C 和 B 上的良序。

任给 $x\in A\oplus C$，任给 $y\in A\oplus B$，如果 $y\le x$，则当 $y\in A$ 时，有 $y\in A\oplus C$，当 $y\in B$ 时，必有 $x\notin A$，由 $x\in A\oplus C$ 和 $x\notin A$ 得

$$x\in C,$$

由 $y\le x$ 和 C 是 B 的前段得

$$y\in C,$$

也有 $y\in A\oplus C$。

因此 $A\oplus C$ 是 $A\oplus B$ 的前段(图 5.5.6)。

(2) 首先由定理 5.5.7(2)得 $C\otimes A$ 是 $B\otimes A$ 的子集，所以可以用≤同时表示 $C\otimes A$ 和 $B\otimes A$ 上的良序。

任给 $<x, y>\in C\otimes A$，任给 $<u, v>\in B\otimes A$，如果 $<u, v>\le<x, y>$，则当 $u<_B x$ 时，由 $x\in C$ 和 C 是 B 的前段得 $u\in C$，所以

$$<u, v>\in C\otimes A,$$

当 $u = x$ 时，显然有 $<u, v>\in C\otimes A$。

因此 $C\otimes A$ 是 $B\otimes A$ 的前段(图 5.5.7)。

(3) 和(1)类似，$A\oplus B, A$ 和 B 上的良序都用≤表示。

因为 $a\in B$，所以 $x\in A$ 当且仅当 $x\in A$ 且 $x<a$，因此

$x\in A$ 或($x\in B$ 且 $x<a$)当且仅当($x\in A$ 且 $x<a$)或($x\in B$ 且 $x<a$)

当且仅当($x\in A$ 或 $x\in B$)且 $x<a$，

最终得 $x\in A\oplus B(a)$　当且仅当　$x\in A$ 或($x\in B$ 且 $x<a$)

当且仅当　($x\in A$ 或 $x\in B$)且 $x<a$

当且仅当　$x\in(A\oplus B)(a)$。

因此 $A\oplus B(a) = (A\oplus B)(a)$(图 5.5.8)。

类似地可证 $A\oplus B[a] = (A\oplus B)[a]$ (图 5.5.9)。

(4) 设 $B(a)$和 A 的良序分别为$\le_B\otimes\le_A$，由(2)得

$(B(a)\otimes A)$是 $B[a]\otimes A$ 的前段，

又$\{a\}\times A = (B[a]\times A)\setminus(B(a)\times A)$，所以由定理 5.5.7(3)得

$$\le_B\otimes\le_A = (\le_B\otimes\le_A)\,|_{B(a)\times A}\oplus(\le_B\otimes\le_A)\,|_{\{a\}\times A}$$

$$= (\le_B|_{B(a)}\otimes\le_A)\oplus(\le_B|_{\{a\}}\otimes\le_A)。$$

因此 $B[a]\otimes A = (B(a)\otimes A)\oplus(\{a\}\otimes A)$ (图 5.5.10)。

(5) 因为 $A\oplus(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i})$和$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}(A\oplus B_\mathrm{i})$都是 $A\oplus B$ 的前段，又

$$A\cup(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i}) = \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}(A\cup B_\mathrm{i}),$$

所以 $A\oplus(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i}) = \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}(A\oplus B_\mathrm{i})$。

因为$(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i})\otimes A$ 和$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}(B_\mathrm{i}\otimes A)$ 都是 $B\otimes A$ 的前段，又

$$(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i})\times A = \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}(B_\mathrm{i}\times A),$$

所以$(\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}B_\mathrm{i})\otimes A = \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}(B_\mathrm{i}\otimes A)$。■

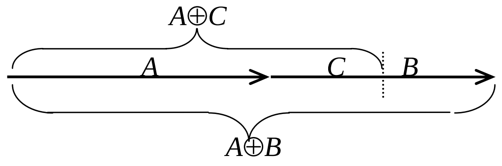


图 5.5.6

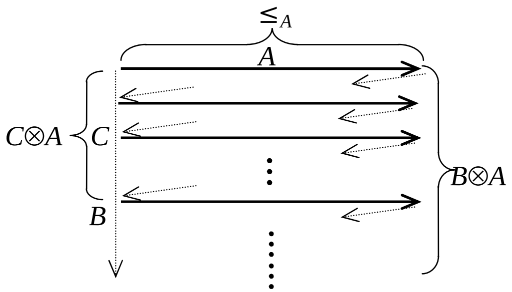


图 5.5.7

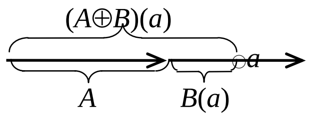


图 5.5.8

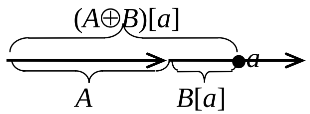


图 5.5.9

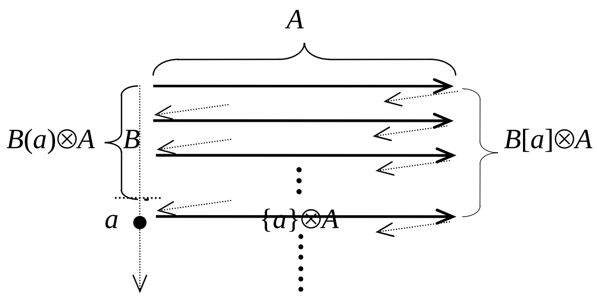


图 5.5.10

有了这些准备，我们来证明有序和就是序数加法的直观意义，有序积就是序数乘法的直观意义。

5.5.9 定理 A, B 是良序集。

(1) $\overline{A\oplus B}=\overline{A}+\overline{B}$。

(2) $\overline{B\otimes A}=\overline{A}\cdot\overline{B}$。

证 (1) 对 $\overline{B}$ 使用超穷归纳法。

① $\overline{B}=0$，则 $B=\varnothing$，所以

$$\overline{A\oplus B}=\overline{A\oplus\varnothing}=\overline{A}=\overline{A}+0=\overline{A}+\overline{B}。$$

② $\overline{B}$ 是后继序数，则 B 有最大元 a 且 $B[a]=B$，又

$$\overline{B[a]}=\overline{B(a)}^{+}，$$

由归纳假设得

$$\overline{A\oplus B(a)}=\overline{A}+\overline{B(a)}，$$

所以 $\overline{A\oplus B}=\overline{A\oplus B[a]}=\overline{(A\oplus B)[a]}$

$$=\overline{(A\oplus B)(a)}^{+}=\overline{A\oplus B(a)}^{+}$$

$$=(\overline{A}+\overline{B(a)})^{+}=\overline{A}+\overline{B(a)}^{+}$$

$$=\overline{A}+\overline{B[a]}=\overline{A}+\overline{B}。$$

③ $\overline{B}$ 是极限序数，则 B 没有最大元，由习题 5.1.3 得

$$B=\bigcup_{a\in B}B(a)，$$

由定理 5.5.8(5)得

$$A\oplus B=A\oplus\bigcup_{a\in B}B(a)=\bigcup_{a\in B}(A\oplus B(a))，$$

由习题 5.3.6 得

$$\overline{B}=\overline{\bigcup_{a\in B}B(a)}=\sup\{\overline{B(a)}\mid a\in B\}$$

和

$$\overline{A\oplus B}=\overline{\bigcup_{a\in B}(A\oplus B(a))}=\sup\{\overline{A\oplus B(a)}\mid a\in B\}。$$

任给 $a\in B$，都有 $\overline{B(a)}<\overline{B}$，由归纳假设得

$$\overline{A\oplus B(a)}=\overline{A}+\overline{B(a)}，$$

所以 $\overline{A\oplus B}=\sup\{\overline{A\oplus B(a)}\mid a\in B\}=\sup\{\overline{A}+\overline{B(a)}\mid a\in B\}$

$$=\overline{A}+\sup\{\overline{B(a)}\mid a\in B\}=\overline{A}+\overline{B}。$$

(2) 对 $\overline{B}$ 使用超穷归纳法。

① $\overline{B} = 0$，则 $B = \varnothing$，所以

$$\overline{B\otimes A} = \overline{\varnothing\otimes A} = \overline{\varnothing} = 0 = \overline{A}\cdot 0 = \overline{A}\cdot\overline{B}。$$

② $\overline{B}$ 是后继序数，则 B 有最大元 a 且 $B[a] = B$，由定理 5.5.8(4) 得

$$B[a]\otimes A = (B(a)\otimes A)\oplus(\{a\}\otimes A),$$

由(1)得

$$\overline{B[a]\otimes A} = \overline{B(a)\otimes A}+\overline{\{a\}\otimes A},$$

由归纳假设得

$$\overline{B(a)\otimes A} = \overline{A}\cdot\overline{B(a)},$$

所以 $\overline{B\otimes A} = \overline{B[a]\otimes A} = \overline{B(a)\otimes A}+\overline{\{a\}\otimes A}$,

$$= \overline{A}\cdot\overline{B(a)}+\overline{A} = \overline{A}\cdot\overline{B(a)}^{+}$$

$$= \overline{A}\cdot\overline{B[a]} = \overline{A}\cdot\overline{B}。$$

③ $\overline{B}$ 是极限序数，则 B 没有最大元，由习题 5.1.3 得

$$B = \bigcup_{a\in B}B(a),$$

由定理 5.5.8(5)得

$$B\otimes A = (\bigcup_{a\in B}B(a))\otimes A = \bigcup_{a\in B}(B(a)\otimes A),$$

由习题 5.1.3 得

$$\overline{B} = \overline{\bigcup_{a\in B}B(a)} = \sup\{\overline{B(a)} \mid a\in B\}$$

和

$$\overline{B\otimes A} = \overline{\bigcup_{a\in B}(B(a)\otimes A)} = \sup\{\overline{B(a)\otimes A} \mid a\in B\}。$$

任给 $a\in B$，都有 $\overline{B(a)}<\overline{B}$，由归纳假设得

$$\overline{B(a)\otimes A} = \overline{A}\cdot\overline{B(a)},$$

所以 $\overline{B\otimes A} = \sup\{\overline{B(a)\otimes A} \mid a\in B\} = \sup\{\overline{A}\cdot\overline{B(a)} \mid a\in B\}$

$$= \overline{A}\cdot\sup\{\overline{B(a)} \mid a\in B\} = \overline{A}\cdot\overline{B}。\blacksquare$$

由定理 5.5.9，从序数运算的性质可以得到有序和和有序积的性质。如从序数运算的结合律可以得到

$$A\oplus(B\oplus C)\cong(A\oplus B)\oplus C \text{ 和 } (C\otimes B)\otimes A\cong C\otimes(B\otimes A),$$

从序数运算的分配律可以得到

$$(B\oplus C)\otimes A\cong(B\otimes A)\oplus(C\otimes A)。$$

实际上有

$$A\oplus(B\oplus C) = (A\oplus B)\oplus C \text{ 和 } (B\oplus C)\otimes A = (B\otimes A)\oplus(C\otimes A)。$$

在定义序数的运算时，考虑的是加法和乘法的一致性，如它们都有左消去律，而定义有序积时，考虑的是日常的习惯(字典排列法)，这样它们的次序正好相反。

习题 5.5

5.5.1　证明：

(1) $A\oplus(B\oplus C) = (A\oplus B)\oplus C$。

(2) $\{a\}\otimes A\cong A$。

5.5.2　证明：

(1) 如果 B 是 A 的前段，则 $B\oplus C$ 相似于 $A\oplus C$ 的前段。

(2) 如果 B 是 A 的前段，则 $C\otimes B$ 相似于 $C\otimes A$ 的前段。

5.5.3　R 是二元关系，A 是集合，定义

$$\mathrm{H}(A, R) = \{<<x, y>, <x, v>> \mid x\in A, <y, v>\in R\}$$

$$\mathrm{L}(R, A) = \{<<x, y>, <u, v>> \mid x \neq u, <x, u>\in R \text{ 且 } y, v\in A\}$$

证明：

(1) $\mathrm{H}(A\cup B, R) = \mathrm{H}(A, R)\cup \mathrm{H}(B, R)$。

(2) $\mathrm{L}(R\cup S, A) = \mathrm{L}(R, A)\cup\mathrm{L}(S, A)$。

(3) 如果 $B\cap C = \varnothing$，则 $\mathrm{L}(B\times C, A) = (B\times A)\times(C\times A)$。

(4) 如果 $\leq_A$ 和 $\leq_B$ 分别是 A 和 B 上的良序，则

$$\leq_B\otimes\leq_A = \mathrm{H}(B, \leq_A)\cup\mathrm{L}(\leq_B, A)。$$

(5) 如果 $\leq_A$, $\leq_B$ 和 $\leq_C$ 分别是 A, B 和 C 上的良序且 $B\cap C = \varnothing$，则

$$(\leq_B\oplus\leq_C)\otimes\leq_A = (\leq_B\otimes\leq_A)\oplus(\leq_C\otimes\leq_A)。$$

(6) $(B\oplus C)\otimes A = (B\otimes A)\oplus(C\otimes A)$。

第六章　选 择 公 理

6.1　良序定理和选择公理

如果集合 A 上存在良序关系，则称 A 是可良序的。良序定理是说任何集合都可良序。

如果良序定理成立，则由良序集基本定理可知，任给两个集合，总可以建立从其中一个集合到另一个集合的单射，从而任何基数都可以比较大小了。这样，基数作为元素个数的数就更令人满意了。因此，良序定理是否成立是集合论中的一个重要问题。

首先给出良序定理的严格表述。

6.1.1　良序定理　任给集合 A，存在 A 上二元关系 R，使得 $<A, R>$是良序集。

Zermelo 在 1904 年提出了选择公理,并用它证明了良序定理。选择公理有许多不同的形式，我们采用最一般的集合族的形式。

6.1.2　选择公理　任何非空集合的集合族上都存在选择函数。详细地说就是：

如果Γ是集合族且$\varnothing\notin\Gamma$，则存在Γ到$\bigcup\Gamma$的映射 f，满足任给 $X\in\Gamma$，都有 $f(X)\in X$。

选择公理的直观意义是：对于任意多个非空集合，可以同时指定属于每个集合自身的一个元素。选择函数 f 就是这样的一个指定，$f(X)$就是属于 X 的一个元素。

对于每个确定的非空集合，指定属于它自身的一个元素总是可以做到的，如果这些集合的个数有限，则一个一个指定就行了。所以选择公理的关键在于：对**无限多个**非空集合，**同时**指定属于每个集合自身的一个元素。

因此，在没有选择公理的情况下，除非另有标准外，一般不能保证这样的元素同时被指定。

Russell 曾经举过一个通俗的例子：无限多双鞋子，可以同时对每双鞋子取一只，而无限多双袜子，就不能做到这一点。因为鞋子有左右之分，我们可以同时取左边一只，而袜子没有左右之分，我们没有任何标准同时在两只中取一只。

在良序集基本定理的证明中，重要的一步是：

如果任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，A_i 都是 A 的前段，B_i 都是 B 的前段且 $A_\mathrm{i}\cong B_\mathrm{i}$，则$\bigcup A_\mathrm{i}\cong\bigcup B_\mathrm{i}$。

因为任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，A_i 到 B_i 的相似映射只有一个，所以可以对每个 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 同时找到 A_i 到 B_i 的相似映射 f_i，从而去构造$\bigcup A_\mathrm{i}$ 到$\bigcup B_\mathrm{i}$ 的相似映射。

设$\{A_\mathrm{i} \mid \mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$和$\{B_\mathrm{i} \mid \mathrm{i}\in\mathrm{I}\}$都是不交的，我们一般不能证明：

如果任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有$|A_\mathrm{i}| = |B_\mathrm{i}|$，则$|\bigcup A_\mathrm{i}| = |\bigcup B_\mathrm{i}|$。

因为任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，A_i 到 B_i 的双射一般不止一个，所以无法保证对每个 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$ 同时找到 A_i 到 B_i 的双射 f_i，在没有其它条件时，一般无法构造$\bigcup A_\mathrm{i}$ 到$\bigcup B_\mathrm{i}$ 的双射。

选择公理是对集合性质的一种假设。虽然对于有限多个集合来说，它是正确的，但我们并不能就此说对于无限多个集合，它也是正确的。因为有限的性质不能随意地推广到无限。

由于选择公理的假设性，它一提出来就遭到了一些人的反对，但它在数学中有很大的用处。经过长期的争论，它得到了大多数人的公认。

在证明任何无限集都有可数子集时，是需要用选择公理的。在一些和选择公理相反的假设下，可以证明存在没有可数子集的无限集。这样的集合的存在，破坏了数学中一些基本的性质，所以虽然它们在逻辑上是无矛盾的，但在数学中是难以接受的。

以下从选择公理证明良序定理。

6.1.3 引理 $A \neq \varnothing$，取 $\mathrm{P}(A)\setminus\{\varnothing\}$上的选择函数 h，取 $b \notin A$。对每个序数α，归纳定义 $A_\alpha \subseteq A\cup\{b\}$和 $a_\alpha \in A\cup\{b\}$如下：

$$A_\alpha = \{a_\tau \mid \tau < \alpha\}$$

$$a_\alpha = \begin{cases} h(A\setminus A_\alpha) & \text{如果 } A\setminus A_\alpha \neq \varnothing \\ b & \text{如果 } A\setminus A_\alpha = \varnothing, \end{cases}$$

则它们有以下性质：

(1) 如果$\beta \leq \alpha$，则 $A_\beta \subseteq A_\alpha$。

(2) $a_\alpha \neq b$ 当且仅当 $A\setminus A_\alpha \neq \varnothing$。

(3) 如果 $a_\alpha \neq b$，则 $a_\alpha \in A\setminus A_\alpha$。

(4) 如果$\beta < \alpha$，则 $a_\beta \in A_\alpha$。

证 (1) 任给 $a_\tau \in A_\beta$，都有$\tau < \beta$，由$\beta \leq \alpha$得

$$\tau < \alpha,$$

所以

$$a_\tau \in A_\alpha,$$

因此 $A_\beta \subseteq A_\alpha$。

(2) 由 a_α的定义直接可得。

(3) 如果 $a_\alpha \neq b$，则 $a_\alpha = h(A\setminus A_\alpha)$，因为 h 是选择函数，所以

$$h(A\setminus A_\alpha) \in A\setminus A_\alpha,$$

即 $a_\alpha \in A\setminus A_\alpha$。

(4) 如果$\beta < \alpha$，则由 A_α的定义得 $a_\beta \in A_\alpha$。■

6.1.4 定理 选择公理可以推出良序定理。

证 空集是能良序的，以下设 $A \neq \varnothing$。按引理 6.1.3 定义 A_α 和 a_α。取 $B = \{\alpha \mid a_\alpha \neq b\} = \{\alpha \mid A\setminus A_\alpha \neq \varnothing\}$。

任给$\alpha \in B$，如果$\beta \leq \alpha$，则由引理 6.1.3(1)得

$$A_\beta \subseteq A_\alpha$$

由 $A\setminus A_\alpha \neq \varnothing$和 $A_\beta \subseteq A_\alpha$得

$$A\setminus A_\beta \neq \varnothing,$$

所以

$$\beta \in B。$$

因此 B 是序数的前段，由定理 5.3.11 得

存在序数γ，使得 $B = \mathbf{O}(\gamma)$。

任给 $a_\alpha \in A_\gamma$，都有$\alpha < \gamma$，由 $B = \mathbf{O}(\gamma)$得$\alpha \in B$，所以

$$a_\alpha \neq b,$$

由引理 6.1.3(3)得 $a_\alpha \in A\setminus A_\alpha$，更有 $a_\alpha \in A$，因此

$$A_\gamma \subseteq A。$$

又因为$\gamma \notin B$，所以 $a_\gamma = b$，由引理 6.1.3(2)得

$$A\setminus A_\gamma = \varnothing,$$

因此

$$A \subseteq A_\gamma。$$

最终得 $A = A_\gamma = \{a_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$。

任给$\alpha \in B$，都有$\alpha < \gamma$，由引理 6.1.3(1)得

$$a_\alpha \in A_\gamma = A,$$

因此可以构造 B 到 A 的映射：

$$f：B \to A \quad f(\alpha) = a_\alpha。$$

任给$\alpha, \beta \in B$，如果$\alpha \neq \beta$，不妨假设$\beta < \alpha$，则由引理 6.1.3(4)和(2)得

$$a_\beta \in A_\alpha \text{且 } a_\alpha \in A\setminus A_\alpha,$$

所以 $a_\alpha \neq a_\beta$，即

$$f(\alpha) \neq f(\beta),$$

因此 f 是单射。

任给 $a_\alpha \in A$，都有$\alpha < \gamma$，所以

$$\alpha \in B \text{ 且 } f(\alpha) = a_\alpha,$$

因此 f 是满射。

由习题 3.3.1 得$\langle B, \leq\rangle$相似于$\langle A, \leq(f)\rangle$，再由定理 5.1.13 得$\langle A, \leq(f)\rangle$是良序集。■

这个证明的直观想法是用序数一个一个数集合 A 中的元素，a_α就是第α个元素。每次在剩下的子集中取元素是由选择公理预先

指定的，在定理中表示为

$$a_\alpha = h(A\setminus A_\alpha)。$$

我们用超穷归纳定义描述这样的过程，但又不知道到哪个序数为止可以把集合 A 中的元素数完。所以引进 $b\notin A$，使得当集合 A 的元素数完后，就重复地数 b。

有个值得注意的现象，对于任何集合，总是可以到某个序数为止，将集合中所有的元素数完。这个现象的产生是因为序数集合的一个性质(定理 5.3.12)：

任给序数的集合，总有一个序数比集合中每个序数都大。

由良序定理可知，只要我们需要，任何集合都可以将它看作良序集。从良序定理的证明中还可得到，任何集合总可以无重复地表示成$\{a_\alpha \mid \alpha<\gamma\}$。

如果γ是无限序数，则由习题 5.4.3 可知，存在极限序数σ和自然数 n，使得$\gamma = \sigma+\mathrm{n}$。这时集合$\{a_\alpha \mid \alpha<\gamma\}$的直观形象如下：

$$a_0,\cdots, a_{\mathrm{n}-1}, a_{\mathrm{n}}, a_{\mathrm{n}+1},\cdots\cdots, a_\omega,\cdots\cdots, a_\sigma,\cdots, a_{\sigma+\mathrm{n}-1}$$

对于小于 n 的自然数 m，令 $b_{\mathrm{m}} = a_{\sigma+\mathrm{m}}$，对于大于等于 n 的自然数 m，令 $b_{\mathrm{m}} = a_{\mathrm{m}-\mathrm{n}}$，对于小于$\sigma$的其它序数$\alpha$，令 $b_\alpha = a_\alpha$，直观形象如下：

$$\begin{array}{l} a_\sigma,\cdots, a_{\sigma+\mathrm{n}-1}, a_0, a_1, \cdots\cdots, a_\omega,\cdots\cdots \\ b_0,\cdots, b_{\mathrm{n}-1}, \quad b_{\mathrm{n}}, b_{\mathrm{n}+1},\cdots\cdots, b_\omega,\cdots\cdots \end{array}$$

则$\{b_\alpha \mid \alpha<\sigma\} = \{a_\alpha \mid \alpha<\gamma\}$。

这说明了任何无限集总可以无重复地表示成$\{a_\alpha \mid \alpha<\sigma\}$，其中$\sigma$是极限序数。

通过这种表示，我们可以用序数的性质和超穷归纳法取证明集合的性质了。

首先，我们在选择公理的假设下严格证明任何无限集都有可数子集。

6.1.5 定理 任何无限集都有可数子集。

证 设 A 是无限集，将 A 表示为$\{a_\alpha \mid \alpha<\gamma\}$，则$\gamma$是无限序数。因为$\omega$是最小的无限序数，所以$\omega\le\gamma$。令

$$B = \{a_\alpha \mid a_\alpha\in A \text{ 且} \alpha<\omega\},$$

则 B 就是 A 的可数子集。■

其次，我们来证明有重要应用的极大链存在定理。

6.1.6 定义 极大链 A 是偏序集，M 是 A 的线形链，如果

任给 $x\in A\setminus M$，都有 $M\cup\{x\}$不是 A 的线形链，

则称 M 是 A 的极大线形链，简称 M 是 A 的极大链。

6.1.7 引理 设 $A = \{a_\alpha \mid \alpha<\sigma\}$是偏序集，$B$ 是 A 的线形链，归纳构造 $B_\alpha(\alpha<\sigma)$如下：

① $\alpha = 0$，$B_\alpha = B$；

② $\alpha = \delta^+$，$B_\alpha = \begin{cases} B_\delta & \text{如果 } B_\delta\cup\{a_\delta\}\text{不是线形链} \\ B_\delta\cup\{a_\delta\} & \text{如果 } B_\delta\cup\{a_\delta\}\text{是线形链；} \end{cases}$

③ α是极限序数，$B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$。

则：

(1) 任给$\alpha<\sigma$，都有如果$\beta<\alpha$，则 $B_\beta \subseteq B_\alpha$。

(2) 任给$\alpha<\sigma$，B_α都是线形链。

(3) $\bigcup\{B_\alpha \mid \alpha<\sigma\}$是线形链。

证 (1) 对α使用超穷归纳法。

① $\alpha = 0$。因为没有比 0 小的序数，所以$\beta<\alpha$为假，因此如果$\beta<\alpha$，则 $B_\beta \subseteq B_\alpha$。

② α是后继序数，则存在序数δ，使得$\alpha = \delta^+$。由定义得

$$B_\alpha = B_\delta\cup\{a_\delta\} \text{或 } B_\alpha = B_\delta,$$

所以

$$B_\delta \subseteq B_\alpha。$$

如果$\beta<\alpha$，则 $\beta<\delta^+$，所以

$$\beta<\delta \text{或} \beta = \delta,$$

当$\beta<\delta$时，由归纳假设得 $B_\beta \subseteq B_\delta$，当$\beta=\delta$时有 $B_\beta = B_\delta$，所以

$$B_\beta \subseteq B_\delta,$$

因此 $B_\beta \subseteq B_\alpha$。

③ α是极限序数。如果$\beta<\alpha$，则 $B_\beta \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta \subseteq B_\alpha$。

(2) 对α使用超穷归纳法。

① $\alpha=0$，则 $B_\alpha = B$ 是线形链。

② α是后继序数，则存在序数δ，使得$\alpha=\delta^+$，由归纳假设得 B_δ是线形链。由定义得

$$B_\alpha = B_\delta \cup \{a_\delta\} \text{或} B_\alpha = B_\delta,$$

当 $B_\alpha = B_\delta \cup \{a_\delta\}$时，由定义得 B_α是线形链，当 $B_\alpha = B_\delta$时，就有 $B_\alpha = B_\delta$是线形链。

③ α是极限序数。由(1)得$\{B_\beta \mid \beta<\alpha\}$是单调的，由习题 3.4.7 得 $B_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$是线形链。

(3) 由(1)得$\{B_\alpha \mid \alpha<\sigma\}$是单调的，由习题 3.4.7 得$\bigcup\{B_\alpha \mid \alpha<\sigma\}$是线形链。■

6.1.8 定理 A 是偏序集，B 是 A 的线形链，则存在 A 的极大线形链 M，使得是 $B \subseteq M$。

证 将 A 表示为$\{a_\alpha \mid \alpha<\sigma\}$，按引理 6.1.7 构造 B_α，取

$$M = \bigcup\{B_\alpha \mid \alpha<\sigma\},$$

则由引理 6.1.7(3)得 M 是线形链，显然 $B \subseteq M$，以下证 M 是极大线形链。

任给 $a_\delta \in A$，如果 $a_\delta \notin M$，则 $a_\delta \notin B_{\delta^+}$，由 B_{δ^+}的定义得

$$B_\delta \cup \{B_\delta\} \text{不是线形链},$$

所以

$$M \cup \{B_\delta\} \text{不是线形链}。$$

因此 M 是 A 的极大线形链。■

在例 2.1.19 中，我们用自然数的最小数原理构造了 $\mathrm{P}(\mathbf{N}) \setminus \{\varnothing\}$上的选择函数。良序集有最小元原理，所以如果$\Gamma$是良序集 A 的子集族且$\varnothing \notin \Gamma$，则可以用类似的方法构造$\Gamma$上的选择函数。注意到$\Gamma$

总是$\bigcup\Gamma$的子集族，所以由良序定理可以推出选择公理，因而它们是等价。

6.1.9 定理 良序定理可以推出选择公理。

证 Γ是集合族且$\varnothing \notin \Gamma$，由良序定理，可设$\bigcup\Gamma$是良序集。任给 $X \in \Gamma$，都有 $X \subseteq \bigcup\Gamma$，所以 X 有最小元，因此可以构造Γ到$\bigcup\Gamma$的映射：

$$h: \Gamma \to \bigcup\Gamma \quad h(X) = X \text{ 的最小元},$$

h 就是Γ上的选择函数。■

设$\{A_i \mid i \in I\}$和$\{B_i \mid i \in I\}$都是不交的。在选择公理的假设下，我们就可以从

$$\text{任给 } i \in I\text{，都有} |A_i| = |B_i|$$

得到$|\bigcup_{i\in I} A_i| = |\bigcup_{i\in I} B_i|$。

因为我们可以用选择公理对每个 i，取定一个 A_i 到 B_i 的双射，它们的并映射就是$\bigcup_{i\in I} A_i$ 到$\bigcup_{i\in I} B_i$ 的双射。具体步骤如下：

任给 $i \in I$，令

$$D_i = \{f \mid f \text{ 是 } A_i \text{ 到 } B_i \text{ 的双射}\},$$

因为$|A_i| = |B_i|$，所以 $D_i = \varnothing$。令

$$\Gamma = \{D_i \mid i \in I\},$$

取Γ上的选择函数 h，构造映射族

$$\Sigma = \mathrm{ran}(h) = \{h(D_i) \mid i \in I\}。$$

可以证明并映射 f_Σ存在且是$\bigcup_{i\in I} A_i$ 到$\bigcup_{i\in I} B_i$ 的双射。

如果我们用指标集 I 将Γ表示为$\{A_i \mid i \in I\}$，则Γ上的选择函数就属于$\prod_{i\in I} A_i$。所以由选择公理很容易得到卡氏积定理：

$$\text{如果任给 } i \in I\text{，都有 } A_i \neq \varnothing\text{，则} \prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing。$$

设 h 是Γ上选择函数，因为任给 $X \in \Gamma$，都有 $h(X) \in X$，所以

$$\text{任给 } X \in \Gamma\text{，都有 } X \cap \mathrm{ran}(h) \neq \varnothing。$$

当Γ是不交时，$X \cap \mathrm{ran}(h)$中恰有一个元素 $h(X)$。因此由选择公理可以得到交点惟一定理：

如果Γ是一个不交的集合族且$\varnothing \notin \Gamma$，则存在集合 A，

使得任给 $X\in\Gamma$，都有$|X\cap A|=1$。

这两个定理的详细证明留给读者。

习题 6.1

6.1.1　卡氏积定理　证明：如果任给 $i\in I$，都有 $A_i\neq\varnothing$，则 $\prod_{i\in I}A_i\neq\varnothing$。

6.1.2　交点惟一定理　证明：如果

Γ是一个不交的集合族且$\varnothing\notin\Gamma$，则

存在集合 A，使得任给 $X\in\Gamma$，都有$|X\cap A|=1$。

6.1.3　$\{A_i\mid i\in I\}$和$\{B_i\mid i\in I\}$都是两两不交的。证明：如果

任给 $i\in I$，都有$|A_i|=|B_i|$，

则$|\bigcup_{i\in I}A_i|=|\bigcup_{i\in I}B_i|$。

6.1.4　证明：如果任给 $i\in I$，都有$|A_i|=|B_i|$，则$|\prod_{i\in I}A_i|=|\prod_{i\in I}B_i|$。

6.1.5　$\{A_i\mid i\in I\}$是两两不交的，任给 $i\in I$，都有$\kappa_i=|A_i|$，定义

$$\sum_{i\in I}\kappa_i=|\bigcup_{i\in I}A_i|,$$

由习题 6.1.3，这定义是合理的。$\sum_{i\in I}\kappa_i$称为$\{\kappa_i\mid i\in I\}$的广义和。证明：如果任给 $i\in I$，都有$\kappa_i=\kappa$，则$\sum_{i\in I}\kappa_i=|I|\cdot\kappa$。

6.1.6　任给 $i\in I$，都有$\kappa_i=|A_i|$，定义

$$\prod_{i\in I}\kappa_i=|\prod_{i\in I}A_i|,$$

由习题 6.1.4，这定义是合理的。$\prod_{i\in I}\kappa_i$称为$\{\kappa_i\mid i\in I\}$的广义积。证明：如果任给 $i\in I$，都有$\kappa_i=\kappa$，则$\prod_{i\in I}\kappa_i=\kappa^{|I|}$。

6.2　基数的进一步性质

在选择公理的假设下，基数就有许多类似于序数的性质。首先我们将序数和基数联系起来。

两个相似的良序集一定等势，所以任何序数都可以确定一个基数。

6.2.1 定义　序数的基数　α是任意序数，取良序集 A，使得 $\alpha=\overline{A}$，称 A 的基数$|A|$是序数α的基数，记为$|\alpha|$。

两个不同的序数可以有相同的基数，如ω，$\omega+1$，$\omega+\omega$是不同的序数，但它们有相同的基数$\aleph_0$。

有了选择公理(也就有了良序定理)，每个基数都是序数的基数。任给基数κ，取集合 A，使得$\kappa=|A|$，由良序定理可使 A 是良序集，令$\alpha=\overline{A}$，则$\kappa=|\alpha|$。

既然每个基数都是序数的基数，就可以使用序数的性质来讨论基数的性质。

6.2.2 定理　如果$\beta\leq\alpha$，则$|\beta|\leq|\alpha|$。因此如果$|\alpha|<|\beta|$，则$\alpha<\beta$。

证　因为$\beta\leq\alpha$，所以可取良序集 A, B，使得

$\overline{A}=\alpha$，$\overline{B}=\beta$且 B 是 A 的前段，

由 B 是 A 的前段得 $B\subseteq A$，因此

$$|B|\leq|A|,$$

即$|\beta|\leq|\alpha|$。■

6.2.3 定理　基数可比较定理　任给基数κ, λ，都有$\kappa\leq\lambda$或$\lambda\leq\kappa$。

证　取序数α,β，使得

$$\kappa=|\alpha|\text{且}\lambda=|\beta|。$$

由定理 5.3.3(4)得

$$\alpha\leq\beta\text{或}\beta\leq\alpha,$$

由定理 6.2.2 得

$$|\alpha|\le|\beta| \text{或} |\beta|\le|\alpha|,$$

即$\kappa\le\lambda$或$\lambda\le\kappa$。■

6.2.4 定理 任何基数的非空集合都有最小数。

证 设 A 是基数的非空集合，取

$$B=\{\beta \mid \beta\text{是序数且}|\beta|\in A\},$$

则 B 是序数的非空集合，由定理 5.3.9 得 B 有最小数α，以下证明$|\alpha|$就是 A 的最小数。

任给$\kappa\in A$，存在$\beta\in B$，使得$|\beta|=\kappa$，由α是 B 的最小数和$\beta\in B$ 得

$$\alpha\le\beta,$$

所以

$$|\alpha|\le|\beta|=\kappa。$$

因此$|\alpha|$就是 A 的最小数。■

6.2.5 定理 A 是基数的集合，则存在基数λ，使得任给$\kappa\in A$，都有$\kappa<\lambda$。

证 取 $B=\{\beta \mid \beta$是序数，存在$\kappa\in A$，使得$|\beta|\le\kappa\}$，则 B 是序数的集合，由定理 5.3.12 得

存在序数γ，使得任给$\beta\in B$，都有$\beta<\gamma$。

令$\lambda=|\gamma|$。如果存在$\kappa\in A$，使得$\lambda\le\kappa$，则$|\gamma|\le\kappa$，由 B 的定义得$\gamma\in B$，矛盾。

因此任给$\kappa\in A$，都有$\kappa<\lambda$。■

设 $A=\{\kappa_i \mid i\in I\}$是基数的集合，由定理 6.2.5，

存在基数κ，使得任给 $i\in I$，都有$\kappa_i<\kappa$。

对照习题 4.4.5，在那里，对于集合族$\{A_i \mid i\in I\}$，证明了

存在κ，使得κ大于每一个$|A_i|$。

如果没有选择公理，只给定 $A=\{\kappa_i \mid i\in I\}$，就无法对每个 i 同时找到 A_i，使得$\kappa_i=|A_i|$，从而无法使用那里的方法证明

存在κ，使得κ大于每一个κ_i。

和序数类似，由定理 6.2.4 可知，任何基数的集合 A 都有上确界，这个上确界记为 $\sup A$。

也和序数类似，由定理 6.2.5 可定义基数的后继，进而定义后继基数和极限基数。

6.2.6 定义 基数的后继 κ是基数，则 $A=\{\lambda \mid \lambda>\kappa\}$是基数的非空集合，$A$ 的最小数称为基数κ的后继，记为κ^+。

6.2.7 定义 后继基数和极限基数 如果存在λ，使得$\kappa=\lambda^+$，则称κ是后继基数，如果$\kappa\neq 0$且κ不是后继基数，则称κ是极限基数。

基数的后继、后继基数和极限基数和序数中相应的概念有许多类似的性质。

6.2.8 定理 后继基数的性质

(1) $\kappa<\kappa^+$。

(2) 如果$\lambda<\kappa$，则$\lambda^+\le\kappa$。因此如果$\kappa<\lambda^+$，则$\kappa\le\lambda$。

(3) 如果$\kappa^+=\lambda^+$，则$\kappa=\lambda$。

证 类似于定理 5.3.18，详细证明留给读者。■

6.2.9 定理 极限序数的性质

(1) κ是极限基数，如果$\lambda<\kappa$，则$\lambda+<\kappa$。

(2) A 是基数的集合，$\kappa=\sup A$，如果$\kappa\notin A$，则κ是极限序数。

(3) 如果$\kappa\neq 0$，则κ是极限序数当且仅当$\kappa=\{\lambda \mid \lambda<\kappa\}$。

证 类似于习题 5.3.2，详细证明留给读者。■

因为有基数的最小数原理(定理 6.2.4)，所以也有基数的超穷归纳法。

6.2.10 定理 基数的超穷归纳法 设$\phi(\kappa)$是基数κ的一个命题，并且满足：

如果任给$\kappa_0\le\lambda<\kappa$，$\phi(\lambda)$都成立，则$\phi(\kappa)$成立。

那么，任给基数$\kappa\ge\kappa_0$，$\phi(\kappa)$都成立。

证 类似于定理 5.3.19，详细证明留给读者。■

和序数的超穷归纳法类似，条件中蕴涵着$\phi(\kappa_0)$成立，在应用

时经常需要补上$\phi(\kappa_0)$的证明。另外，κ_0经常取$\aleph_0$。

基数的超穷归纳法也有分κ_0，后继基数和极限基数三种情况的第二形式，它的叙述和证明留给读者。

由 Cantor 定理，$\kappa<2^\kappa$，所以$\kappa^+\le 2^\kappa$。是否有$\kappa^+ = 2^\kappa$呢？因为κ^+是大于κ的最小基数，所以这也是问在κ和2^κ之间是否还有其它基数。这就是著名的连续统假设和广义连续统假设。

6.2.11 连续统假设 $\aleph_0{}^+ = 2^{\aleph_0}$。

6.2.12 广义连续统假设 任给无限基数κ，都有$\kappa^+ = 2^\kappa$。

这两个假设推动了关于基数性质的更为深入的研究，但对于这两个假设及相关的研究不是本书所能讨论的。

由定理 6.2.3 和定理 6.2.4，基数的大小不但是全序而且是良序。所以可以形象地利用序数将所有无限基数按大小排列。

6.2.13 定义 超穷归纳定义基数$\aleph_\alpha$如下：

(1) $\aleph_0 = |\omega|$；

(2) $\aleph_{\alpha^+} = \aleph_\alpha{}^+$；

(3) σ是极限序数，$\aleph_\sigma = \sup\{\aleph_\tau \mid \tau<\sigma\}$。

下面证明这样的表达式正是我们所需要的。

6.2.14 引理 如果$\alpha<\beta$，则$\aleph_\alpha<\aleph_\beta$。因此如果$\alpha\le\beta$，则$\aleph_\alpha\le\aleph_\beta$。

证 对β作超穷归纳证明。

① 没有比 0 小的序数。

② 如果$\alpha<\beta^+$，则$\alpha<\beta$或$\alpha=\beta$，由归纳假设得

$$\aleph_\alpha<\aleph_\beta\text{或}\aleph_\alpha = \aleph_\beta,$$

所以$\aleph_\alpha\le\aleph_\beta<\aleph_\beta{}^+ = \aleph_{\beta^+}$。

③ σ是极限序数。如果$\alpha<\sigma$，则$\alpha^+<\sigma$，所以

$$\aleph_{\alpha^+}\in\{\aleph_\tau \mid \tau<\sigma\},$$

因此$\aleph_\alpha<\aleph_\alpha{}^+ = \aleph_{\alpha^+}\le\sup\{\aleph_\tau \mid \tau<\sigma\} = \aleph_\sigma$。■

6.2.15 定理 任给无限基数κ，存在序数α，使得$\kappa = \aleph_\alpha$。

证 反证法。假设存在无限基数κ，使得

任给序数α，都有$\kappa \ne \aleph_\alpha$，

则由引理 6.2.3，具有这样性质的基数中有最小数，设这个最小数为λ。

取$A = \{\tau \mid \aleph_\tau<\lambda\}$，则任给$\alpha\in A$，任给$\beta\le\alpha$，都有$\aleph_\beta<\aleph_\alpha<\lambda$，所以

$$\beta\in A,$$

因此A是序数的前段。由定理 5.3.11 得存在序数γ，使得

$$A = \mathbf{O}(\gamma),$$

所以

$$\gamma\notin A,$$

因此$\lambda\le\aleph_\gamma$。

① 如果$\gamma = 0$，则$\aleph_\gamma = \aleph_0\le\lambda$。

② 如果$\gamma = \beta^+$，则$\beta\in A$，所以$\aleph_\beta<\lambda$，因此$\aleph_\gamma = \aleph_{\beta^+} = \aleph_\beta{}^+\le\lambda$。

③ 如果γ是极限序数，则

$$\aleph_\gamma = \sup\{\aleph_\tau \mid \tau<\gamma\} = \sup\{\aleph_\tau \mid \tau\in A\} = \sup\{\aleph_\tau \mid \aleph_\tau<\lambda\}\le\lambda。$$

在三种情况下都有$\aleph_\gamma\le\lambda$，所以$\aleph_\gamma = \lambda$，矛盾。■

由定理 6.2.15，如果在基数的超穷归纳法中$\kappa_0 = \aleph_0$，则可以用序数的超穷归纳法代替基数的超穷归纳法。

A是任何集合，由良序定理，A可以表示成$\{a_\alpha \mid \alpha<\gamma\}$。取

$$\sigma = \{\beta \mid |\beta| = |\gamma|\}\text{的最小数}$$

则A也可以表示成$\{a_\alpha \mid \alpha<\sigma\}$，既然$\sigma$是$\{\beta \mid |\beta| = |\gamma|\}$的最小数，所以

任给$\gamma<\sigma$，都有$|\gamma|<|\sigma|$，

因此

任给$\gamma<\sigma$，都有$|\{a_\alpha \mid \alpha<\gamma\}| = |\gamma| < |\sigma| = |A|$。

这是一个非常有用的性质。

习题 6.2

6.2.1　证明定理 6.2.8，即证明：

(1) $\kappa<\kappa^+$。

(2) 如果$\lambda<\kappa$，则$\lambda^+\leq\kappa$。因此如果$\kappa<\lambda^+$，则$\kappa\leq\lambda$。

(3) 如果$\kappa^+=\lambda^+$，则$\kappa=\lambda$。

6.2.2　证明定理 6.2.9，即证明：

(1) κ是极限基数，如果$\lambda<\kappa$，则$\lambda^+<\kappa$。

(2) A 是基数的集合，$\kappa=\sup A$，如果$\kappa\notin A$，则κ是极限序数。

(3) 如果$\kappa\neq 0$，则κ是极限序数当且仅当$\kappa=\{\lambda\mid\lambda<\kappa\}$。

6.2.3　证明基数的超穷归纳法，即证明：

$\phi(\kappa)$是基数κ的一个命题，并且满足：

　　如果任给$\kappa_0\leq\lambda<\kappa$，$\phi(\lambda)$都成立，则$\phi(\kappa)$成立。

那么，任给基数$\kappa\geq\kappa_0$，$\phi(\kappa)$都成立。

6.2.4　叙述并证明基数的超穷归纳法第二形式。

6.2.5　κ是无限基数，σ是$\{\alpha\mid|\alpha|=\kappa\}$的最小数。证明$\sigma$是极限序数。

6.2.6　证明：如果$\alpha\neq 0$，则α是极限序数当且仅当$\aleph_\alpha$的极限基数。

6.2.7　在没有选择公理的情况下，不能证明每个基数都是序数的基数，但能证明：

(1) 任给基数κ，如果$\kappa\leq|\alpha|$，则存在序数β，使得$\kappa=|\beta|$。

(2) 任给基数κ，$\{\alpha\mid|\alpha|<\kappa\}$是序数的前段。

(3) 任给基数κ，如果κ不是序数的基数，则存在序数γ，使得κ和$|\gamma|$不可比较(即$\kappa\not\leq|\gamma|$且$|\gamma|\not\leq\kappa$)。

6.3　Zorn 引理

选择公理有许多等价命题，其中经常使用的一个是 Zorn 引理。

6.3.1　Zorn 引理　A 是非空偏序集，如果 A 的任何线形链都有上界，则 A 有极大元。

选择公理可以推出 Zorn 引理。直观的想法是这样的：因为偏序集 A 的每个线形链都有上界，所以可由选择公理在所有上界中取定一个不在这个线形链中的元素，将这个元素加在原来的线形链中就得到一个新的线形链，再用同样的方法找元素，得到又一个线形链，直至不能做为止。这时得到的线形链的上界必定属于自己，所以它只有一个上界，这个上界就是偏序集 A 的极大元。

我们用序数来数这些找出来的元素，以便使用超穷归纳法。又类似于良序定理的证明，引进 $b\notin A$，当符合条件的元素数完后，重复数 b。

也类似于良序定理的证明，先证明一个引理。

6.3.2 引理　A 是非空偏序集，偏序关系为$\leq_A$，取 $\mathrm{P}(A)\setminus\{\varnothing\}$ 上的选择函数 h，取 $b\notin A$。

对每个序数α，归纳定义 $A_\alpha\subseteq A\cup\{b\}$，$B_\alpha\subseteq A$ 和 $a_\alpha\in A\cup\{b\}$ 如下：

$$A_\alpha=\{a_\tau\mid\tau<\alpha\},$$

$$B_\alpha=\{x\mid x\in A\setminus A_\alpha \text{且 } x \text{ 是 } A_\alpha\setminus\{b\}\text{的上界}\},$$

$$a_\alpha=\begin{cases}h(B_\alpha) & \text{如果 } B_\alpha\neq\varnothing\\ b & \text{如果 } B_\alpha=\varnothing,\end{cases}$$

则它们有以下性质：

(1) 如果$\beta\leq\alpha$，则 $A_\beta\subseteq A_\alpha$且 $B_\alpha\subseteq B_\beta$。

(2) $a_\alpha\neq b$ 当且仅当 $B_\alpha\neq\varnothing$。

(3) 如果 $a_\alpha \neq b$ 且 $b \notin A_\alpha$，则 a_α是 A_α的上界。

(4) 如果 $a_\alpha \neq b$，$b \notin A_\alpha$且$\beta \leq \alpha$，则 $a_\beta \leq_A a_\alpha$。

证 (1) 任给 $a_\tau \in A_\beta$，都有$\tau < \beta$，由$\beta \leq \alpha$得

$$\tau < \alpha,$$

所以

$$a_\tau \in A_\alpha,$$

因此 $A_\beta \subseteq A_\alpha$。

由 $A_\beta \subseteq A_\alpha$得 $A \setminus A_\alpha \subseteq A \setminus A_\beta$且 $A_\beta \setminus \{b\} \subseteq A_\alpha \setminus \{b\}$。

任给 $x \in B_\alpha$，都有

$$x \in A \setminus A_\alpha \text{且 } x \text{ 是 } A_\alpha \setminus \{b\} \text{的上界},$$

由 $x \in A \setminus A_\alpha$和 $A \setminus A_\alpha \subseteq A \setminus A_\beta$得

$$x \in A \setminus A_\beta,$$

由 x 是 $A_\alpha \setminus \{b\}$的上界和 $A_\beta \setminus \{b\} \subseteq A_\alpha \setminus \{b\}$得

$$x \text{ 是 } A_\beta \setminus \{b\} \text{的上界},$$

所以

$$x \in B_\beta。$$

因此 $B_\alpha \subseteq B_\beta$。

(2) 由 a_α的定义直接可得。

(3) 由 $a_\alpha \neq b$ 和(2)得 $B_\alpha \neq \varnothing$，所以 $a_\alpha \in B_\alpha$，因此

$$a_\alpha \text{是 } A_\alpha \setminus \{b\} \text{的上界。}$$

又因为 $b \notin A_\alpha$，所以

$$A_\alpha \setminus \{b\} = A_\alpha,$$

因此 a_α是 A_α的上界。

(4) $\beta = \alpha$时显然，以下设$\beta < \alpha$。由$\beta < \alpha$和 A_α的定义得

$$a_\beta \in A_\alpha,$$

由 $a_\alpha \neq b$，$b \notin A_\alpha$和(3)得

$$a_\alpha \text{是 } A_\alpha \text{的上界。}$$

因此 $a_\beta \leq_A a_\alpha$。■

下面由选择公理证明 Zorn 引理。

6.3.3 定理 选择公理可以推出 Zorn 引理。

证 设 A 是非空偏序集，A 的任何线形链都有上界。按引理 6.3.2 定义 A_α，B_α和 a_α。取 $C = \{\alpha \mid a_\alpha \neq b\} = \{\alpha \mid B_\alpha \neq \varnothing\}$。

任给$\alpha \in C$，都有 $B_\alpha \neq \varnothing$，如果$\beta \leq \alpha$，则引理 6.3.2(1)得

$$B_\alpha \subseteq B_\beta,$$

由 $B_\alpha \neq \varnothing$和 $B_\alpha \subseteq B_\beta$得 $B_\beta \neq \varnothing$，所以

$$\beta \in C。$$

因此 C 是序数的前段，由定理 5.3.11 得

$$\text{存在序数}\gamma\text{，使得 } C = \mathbf{O}(\gamma)。$$

任给 $a_\alpha, a_\beta \in A_\gamma$，不妨设$\beta \leq \alpha$，就有

$$\beta \leq \alpha < \gamma。$$

任给 $a_\delta \in A_\alpha$，都有$\delta < \alpha$，所以

$$\delta < \gamma,$$

由 $C = \mathbf{O}(\gamma)$得$\delta \in C$，所以

$$a_\delta \neq b,$$

因此

$$b \notin A_\alpha。$$

由$\beta \leq \alpha$，$b \notin A_\alpha$和引理 6.3.2(4)得

$$a_\beta \leq_A a_\alpha。$$

所以 A_γ是线形链，因此 A_γ有上界。

由 $C = \mathbf{O}(\gamma)$得$\gamma \notin C$，所以 $a_\gamma = b$，因此

$$B_\gamma = \varnothing。$$

这说明了 A_γ没有属于 $A \setminus A_\alpha$的上界，所以 A_γ只有属于 A_γ的上界，因此 A_γ的上界只有一个，由习题 3.4.4，这个上界就是 A 的极大元。■

要应用 Zorn 引理，首先要根据需要构造一个非空偏序集，使得它的每个线形链都有上界，这样它就有极大元，其次就是证明这个极大元有我们所需要的性质。

应用最多的偏序集是有序对<X, f>的集合，其中 X 是集合，f

是定义域为 X 的映射。为了以后使用方便，先证明以下引理。

6.3.4 引理 B 是集合，Σ是有序对$<X, f>$的集合，其中 X 是集合，f 是 X 到 B 的映射。在Σ上定义二元关系$\leq$如下：

$$\leq\ = \{<<X_1, f_1>, <X_2, f_2>> \mid X_1 \subseteq X_2 \text{ 且 } f_2 |_{X_1} = f_1\},$$

即

$$<X_1, f_1> \leq <X_2, f_2> \text{当且仅当 } X_1 \subseteq X_2 \text{ 且 } f_2 |_{X_1} = f_1,$$

则有：

(1) $\leq$是Σ上偏序关系。

(2) 如果$\Phi = \{<X_i, f_i> \mid i\in I\}$是$\Sigma$的线形链，令 $X = \bigcup_{i\in I} X_i$，则

存在 X 到 B 的映射 f，使得任给 $i\in I$，都有 $f |_{X_i} = f_i$。

因此，如果$<X, f>\in\Sigma$，则$<X, f>$是Φ的上界。

(3) 在(2)中，如果每个 f_i 是单射，则 f 是单射。

证 (1) 证明$\leq$具有自返性、反对称性和传递性。

自返性。任给$<X, f>\in\Sigma$，都有

$$X \subseteq X \text{ 且 } f |_X = f,$$

所以$<X, f>\leq<X, f>$。

反对称性。如果$<X_1, f_1>\leq<X_2, f_2>$且$<X_2, f_2>\leq<X_1, f_1>$，则

$$X_1 \subseteq X_2，X_2 \subseteq X_1，f_2 |_{X_1} = f_1 \text{ 且 } f_1 |_{X_2} = f_2,$$

所以

$$X_1 = X_2，f_1 = f_2 |_{X_1} = f_2 |_{X_2} = f_2,$$

因此$<X_1, f_1> = <X_2, f_2>$。

传递性。如果$<X_1, f_1>\leq<X_2, f_2>$且$<X_2, f_2>\leq<X_3, f_3>$，则

$$X_1 \subseteq X_2，X_2 \subseteq X_3，\quad f_2 |_{X_1} = f_1 \text{ 且 } f_3 |_{X_2} = f_2,$$

所以

$$X_1 = X_2，f_3 |_{X_1} = (f_3 |_{X_2}) |_{X_1} = f_2 |_{X_1} = f_1,$$

因此$<X_1, f_1>\leq<X_3, f_3>$。

(2) 考虑映射族$\Gamma = \{f_i \mid i\in I\}$。显然

$$\{X_i \mid i\in I\}$$

是单调的，又任给 $i, j\in I$，如果 $X_i \subseteq X_j$，则 $f_j |_{X_i} = f_i$，所以

任给 $x\in X_i$，都有 $f_j(x) = f_j |_{X_i}(x) = f_i(x)$。

由定理 2.5.11(2)，存在Γ的并映射 f，由并映射的定义得

f 是 X 到 B 的映射

且

任给 $i\in I$，都有 $f |_{X_i} = f_i$。

(3) 由定理 2.5.12(2)。■

现在证明由 Zorn 引理可以推出选择公理，从而它们是等价的。

证明的思路是这样的：考虑有序对$<X, f>$组成的集合，其中 X 是Γ的子集，f 是 X 上的选择函数，由引理 6.3.4 在这个集合上构造偏序关系，然后用 Zorn 引理证明它有极大元$<X_0, f_0>$，最后证明 $X_0 = \Gamma$，所以 f_0 就是Γ的选择函数。

6.3.5 定理 Zorn 引理可以推出选择公理。

证 设Γ集合族且$\varnothing\notin\Gamma$，取

$$\Sigma = \{<X, f> \mid X \subseteq \Gamma, f : X\to\bigcup\Gamma, \text{任给 } Y\in X, \text{都有 } f(Y)\in Y\}。$$

取 $A\in\Gamma$和 $a\in A$，令

$$f : \{A\}\to\bigcup\Gamma \quad f(A) = a,$$

则$<\{A\}, f>\in\Sigma$，所以Σ非空。

由引理 6.3.4 可在Σ定义偏序关系如下：

$$<X_1, f_1>\leq<X_2, f_2> \text{当且仅当 } X_1 \subseteq X_2 \text{ 且 } f_2 |_{X_1} = f_1$$

则Σ是非空偏序集。

任给Σ的线形链

$$\Phi = \{<X_i, f_i> \mid i\in I\},$$

取 $X = \bigcup_{i\in I} X_i$，则 $X \subseteq \Gamma$。由引理 6.3.4，存在 X 到$\bigcup\Gamma$的映射 f，使得

任给 $i\in I$，都有 $f |_{X_i} = f_i$。

又

任给 $Y\in X$，存在 $i\in I$，使得 $Y\in X_i$，

所以

$f(Y) = f_i(Y) \in Y$，

由Σ的定义得

$<X, f> \in \Sigma$，

因此$<X, f>$是Φ的上界。

这说明Σ的任何线形链都有上界，由 Zorn 引理，Σ有极大元$<X_0, f_0>$。

如果 $X_0 \neq \Gamma$，则取 $A \in \Gamma \setminus X_0$，取 $a \in A$，构造 $X_0 \cup \{Y_0\}$到$\bigcup\Gamma$的映射

$$f: X_0 \cup \{Y_0\} \to \bigcup\Gamma \quad f(Y) = \begin{cases} f_0(Y) & \text{如果 } Y \in X_0 \\ a & \text{如果 } Y = X_0, \end{cases}$$

则任给 $Y \in X_0 \cup \{Y_0\}$，都有 $f(Y) \in Y$，所以

$<X_0 \cup \{Y_0\}, f> \in \Sigma$。

显然有

$<X_0, f_0> < <X_0 \cup \{Y_0\}, f>$，

和$<X_0, f_0>$是极大元矛盾。

因此 $X_0 = \Gamma$，f_0就是Γ的选择函数。■

另一类常用的偏序集是由集合族Σ和Σ上的包含关系组成的偏序集。对于这样的偏序集Σ，任给$\Phi \subseteq \Sigma$，Φ是线形链当且仅当Φ是单调的。显然，任给$\Phi \subseteq \Sigma$，$\bigcup\Phi$是Φ的上界。

所以，只要任给单调的$\Phi \subseteq \Sigma$，都有$\bigcup\Phi \in \Sigma$，就能用 Zorn 引理证明Σ有极大元。

6.3.6 例 用 Zorn 引理重新证明极大链存在定理。

设 B 是 A 的线形链，取

$\Sigma = \{X \mid X$ 是 A 的线形链且 $B \subseteq X\}$，

则：

(1) Σ非空。

(2) 任给单调的$\Phi \subseteq \Sigma$，$\bigcup\Phi$还是线形链，所以$\bigcup\Phi \in \Sigma$。

因此，由 Zorn 引理得Σ有极大元 M。M 就是 A 的极大线形链，并且 $B \subseteq M$。

习题 6.3

6.3.1 用 Zorn 引理证明基数可比较定理 A, B 是非空集合，

$\Sigma = \{<X, f> \mid X \subseteq A$，$f$ 是 X 到 B 的单射$\}$，

由引理 6.3.4 可在Σ定义偏序关系如下：

$<X_1, f_1> \le <X_2, f_2>$当且仅当 $X_1 \subseteq X_2$ 且 $f_2|_{X_1} = f_1$

证明：

(1) Σ非空。

(2) 任给Σ的线形链$\Phi = \{<X_i, f_i> \mid i \in I\}$，Φ都有上界，因此Σ有极大元。

(3) 如果$<X_0, f_0>$是极大元，则 $X_0 = A$ 或 $f[X_0] = B$

(4) 存在 A 到 B 的单射，或存在 B 到 A 的单射。

6.3.2 用良序定理证明 Zorn 引理 A 非空偏序集，A 的任何线形链都有上界。由良序定理，可设 $A = \{a_\tau \mid \tau < \gamma\}$，任给$\tau < \gamma$，归纳定义 A_τ如下：

(1) $A_0 = \varnothing$；

(2) $$A_{\alpha^+} = \begin{cases} A_\alpha \cup \{a_\alpha\} & \text{如果 } a_\alpha \text{是 } A_\alpha \text{的上界} \\ A_\alpha & \text{如果 } a_\alpha \text{不是 } A_\alpha \text{的上界；} \end{cases}$$

(3) σ是极限序数，$A_\sigma = \bigcup\{A_\alpha \mid \alpha < \sigma\}$。

令 $B = \bigcup\{A_\tau \mid \tau < \gamma\}$，证明：

(1) 任给$\tau < \gamma$，A_τ是线形链。

(2) B 是线形链。

(3) B 的上界都在 B 中，因此 A 有极大元。

6.4 倍等定理和幂等定理

在选择公理的假设下，无限基数有两个重要定理，倍等定理和幂等定理。我们用 Zorn 引理来证明它们。

倍等定理是说：任给无限基数κ，都有$\kappa+\kappa = \kappa$。

证明的思路是这样的：取集合 A, B，满足

$$|A| = |B| = \kappa \text{且} A\cap B = \varnothing,$$

取 A 到 B 的双射 g。考虑有序对$<X, f>$组成的集合，其中 X 是 A 的子集，f 是 X 到 $A\cup B$ 的单射，且有 $f[X] = X\cup g[X]$，这样的 X 满足

$$|X|+|X| = |X|。$$

然后由引理 6.3.4 和 Zorn 引理证明它有极大元$<X_0, f_0>$，最后证明

$$|X_0| = |A| = \kappa,$$

所以$\kappa+\kappa = |X_0|+|X_0| = |X_0| = \kappa$。

6.4.1 定理　无限基数的倍等定理　任给无限基数κ，都有$\kappa+\kappa = \kappa$。

证　取集合 A, B，满足$|A| = |B| = \kappa$且 $A\cap B = \varnothing$，取 A 到 B 的双射 g。取

$$\Sigma =\{<X, f> \mid X \subseteq A，f \text{是} X \text{到} A\cup B \text{的单射且} f[X] = X\cup g[X]\}。$$

显然任给$<X, f>\in\Sigma$，都有

$$|X|+|X| = |X\cup g[X]| = |f[X]| = |X|。$$

取 A 的可数子集 X，则 $X\cup g[X]$也是可数集，取 X 到 $X\cup g[X]$ 的双射 h，令

$$f：X\to A\cup B \quad f(x) = h(x)$$

则$<X, f>\in\Sigma$，所以Σ非空。

由引理 6.3.4 可在Σ定义偏序关系如下：

$$<X_1, f_1>\leq<X_2, f_2>\text{当且仅当} X_1 \subseteq X_2 \text{且} f_2|_{X_1} = f_1$$

则Σ是非空偏序集。

任给Σ的线形链$\Phi = \{<X_i, f_i> \mid i\in I\}$，取 $X = \bigcup_{i\in I} X_i$，则 $X \subseteq A$。由引理 6.3.4，存在 X 到 $A\cup B$ 的单射 f，使得

任给 $i\in I$，都有 $f|_{X_i} = f_i$。

又

$$\begin{aligned} f[X] &= f[\textstyle\bigcup_{i\in I} X_i] = \bigcup_{i\in I} f[X_i] \\ &= \textstyle\bigcup_{i\in I} f_i[X_i] = \bigcup_{i\in I} (X_i\cup g[X_i]) \\ &= (\textstyle\bigcup_{i\in I} X_i)\cup(\bigcup_{i\in I} g[X_i]) \\ &= X\cup g[X], \end{aligned}$$

所以

$$<X, f>\in\Sigma,$$

因此$<X, f>$是Φ的上界。

这说明Σ的任何线形链都有上界，由 Zorn 引理，Σ有极大元$<X_0, f_0>$。

如果我们证明了$|X_0| = |A|$，就有$\kappa+\kappa = |X_0|+|X_0| = |X_0| = \kappa$。以下用反证法证明$|X_0| = |A|$。

假设$|X_0| \neq |A|$，则 $A\setminus X_0$ 是无限的，可取 $A\setminus X_0$ 的可数子集 Y，取 Y 到 $Y\cup g[Y]$的双射 h，构造 $X_0\cup Y$ 到 $A\cup B$ 的映射

$$f：X_0\cup Y\to A\cup B \quad f(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{如果 } Y\in X_0 \\ h(x) & \text{如果 } Y = X_0, \end{cases}$$

则 f 是单射，又

$$\begin{aligned} f[X_0\cup Y] &= f[X_0]\cup f[Y] = (X_0\cup g[X_0])\cup(Y\cup g[Y]) \\ &= (X_0\cup Y)\cup(g[X_0]\cup g[Y]) \\ &= (X_0\cup Y)\cup g[X_0\cup Y], \end{aligned}$$

所以

$$<X_0\cup\{Y_0\}, f>\in\Sigma。$$

显然有

$$<X_0, f_0 > < <X_0\cup\{Y_0\}, f >,$$

和$<X_0, f_0 >$是极大元矛盾。■

设κ, λ都是无限基数，由定理 6.3.5 可知，

如果$\kappa, \lambda<\mu$，则$\kappa+\lambda<\mu$。

这个结果将用在以下定理的证明中。

幂等定理是说：任给无限基数κ，都有$\kappa\cdot\kappa = \kappa$。

证明的思路是这样的：取集合 A 满足

$$|A| = \kappa。$$

考虑有序对$<X, f>$组成的集合，其中 X 是 A 的子集，f 是 X 到 $A\times A$ 的单射，且有 $f[X] = X\times X$，这样的 X 满足

$$|X|\cdot|X| = |X|。$$

然后由引理 6.3.4 和 Zorn 引理证明它有极大元$<X_0, f_0>$，最后证明

$$|X_0| = |A| = \kappa,$$

所以$\kappa\cdot\kappa = |X_0|\cdot|X_0| = |X_0| = \kappa$。

6.4.2 定理 无限基数的幂等定理 任给无限基数κ，都有$\kappa\cdot\kappa = \kappa$。

证 取集合 A 满足$|A| = \kappa$。取

$$\Sigma = \{<X, f> \mid X\subseteq A，f \text{ 是 } X \text{ 到 } A\times A \text{ 的单射且 } f[X] = X\times X\}$$

显然

任给$<X, f>\in\Sigma$，都有$|X|\cdot|X| = |X\times X| = |X|$。

取 A 的可数子集 X，则 $X\times X$ 也是可数集，取 X 到 $X\times X$ 的双射 h，令

$$f：X\to A\times A \quad f(x) = h(x)$$

则$<X, f>\in\Sigma$，所以Σ非空。

由引理 6.3.4 可在Σ定义偏序关系如下：

$$<X_1, f_1>\le<X_2, f_2> \text{当且仅当 } X_1\subseteq X_2 \text{ 且 } f_2|_{X_1} = f_1$$

则Σ是非空偏序集。

任给Σ的线形链

$$\Phi = \{<X_i, f_i> \mid i\in I\},$$

取 $X = \bigcup_{i\in I}X_i$，则 $X\subseteq A$。由引理 6.3.4，存在 X 到 $A\times A$ 的单射 f，使得

任给 $i\in I$，都有 $f|_{X_i} = f_i$。

又

$$\begin{aligned} f[X] &= f[\textstyle\bigcup_{i\in I}X_i] = \bigcup_{i\in I}f[X_i] \\ &= \textstyle\bigcup_{i\in I}f_i[X_i] = \bigcup_{i\in I}(X_i\times X_i) \\ &= (\textstyle\bigcup_{i\in I}X_i)\times(\bigcup_{i\in I}X_i) \\ &= X\times X, \end{aligned}$$

所以

$$<X, f>\in\Sigma,$$

因此$<X, f>$是Φ的上界。

这说明Σ的任何线形链都有上界，由 Zorn 引理，Σ有极大元$<X_0, f_0>$。

如果我们证明了$|X_0| = |A|$，就有$\kappa\cdot\kappa = |X_0|\cdot|X_0| = |X_0| = \kappa$。以下用反证法证明$|X_0| = |A|$。

如果$|X_0| \ne |A|$，则$|X_0|<|A|$，由定理 6.4.1 得

$$|A\setminus X_0| = |A|$$

(否则由$|X_0|<|A|$和$|A\setminus X_0|<|A|$得$|A| = |X_0\cup(A\setminus X_0)|<|A|$，矛盾)。

可取 $B_1\subseteq A\setminus X_0$，使得$|B_1| = |X_0|$，则 B_1 和 X_0 不交，由定理 6.4.1 得

$$|X_0\cup B_1| = |X_0|+|B_1| = |X_0|+|X_0| = |X_0|,$$

所以

$$|A\setminus(X_0\cup B_1)| = |A|,$$

又可取 $B_2\subseteq A\setminus(X_0\cup B_1)$，使得

$$|B_2| = |X_0|,$$

类似地还可取 $B_3\subseteq A\setminus(X_0\cup B_1)$，使得

$$|B_3| = |X_0|。$$

这样 X_0, B_1, B_2, B_3 两两不交，且$|B_1| = |B_2| = |B_3| = |X_0|$。

取 $B = B_1\cup B_2\cup B_3$，则由定理 6.4.1 得

$$|B| = |B_1|+|B_2|+|B_3| = |X_0|+|X_0|+|X_0| = |X_0|,$$

又因为$|X_0\times X_0| = |X_0|$，所以

$$|X_0\times B| = |B\times X_0| = |B\times B| = |X_0|。$$

取 B_1 到 $X_0\times B$ 的双射 h_1，取 B_2 到 $B\times X_0$ 的双射 h_2，取 B_3 到 $B\times B$ 的双射 h_3，令

$$X = X_0\cup B = X_0\cup B_1\cup B_2\cup B_3,$$

构造 X 到 $A\times A$ 的映射

$$f：X\to A\times A \quad f(x) = \begin{cases} f_0(x) & 如果\ x\in X_0 \\ h_1(x) & 如果\ x\in B_1 \\ h_2(x) & 如果\ x\in B_2 \\ h_3(x) & 如果\ x\in B_3, \end{cases}$$

则 f 是单射，又

$$\begin{aligned} f[X] &= f[X_0\cup B_1\cup B_2\cup B_3] \\ &= f[X_0]\cup f[B_1]\cup f[B_2]\cup f[B_3] \\ &= f_0[X_0]\cup h_1[B_1]\cup h_2[B_2]\cup h_3[B_3] \\ &= (X_0\times X_0)\cup(X_0\times B)\cup(B\times X_0)\cup(B\times B) \\ &= (X_0\cup B)\times(X_0\cup B) = X\times X, \end{aligned}$$

所以

$$<X_0\cup\{Y_0\}, f>\in\Sigma。$$

显然有

$$<X_0, f_0> < <X, f>,$$

和$<X_0, f_0>$是极大元矛盾。■

习题 6.4

6.4.1　κ, λ是无限基数。证明：如果$\kappa<\mu$且$\lambda<\mu$，则$\kappa+\lambda<\mu$。

6.4.2　κ, λ是无限基数。证明：如果$\kappa<\mu$且$\lambda<\mu$，则$\kappa\cdot\lambda<\mu$。

6.4.3　λ是无限基数。证明：如果 $2\le\kappa\le\lambda$，则$\kappa^{\lambda} = 2^{\lambda}$。

6.5　选择公理的其他等价命题

前面证明了良序定理、Zorn 引理都和选择公理等价。又用选择公理推出了以下三个定理。

(1) 卡氏积定理　如果任给 $i\in I$，都有 $A_i \ne \varnothing$，则$\prod_{i\in I}A_i \ne \varnothing$。

(2) 交点惟一定理　如果Γ是一个不交的集合族且$\varnothing\notin\Gamma$，则存在集合 A，使得任给 $X\in\Gamma$，都有$|X\cap A| = 1$。

(3) 基数可比较定理　任给基数κ, λ，都有$\kappa\le\lambda$或$\lambda\le\kappa$。

以下证明这三个定理都和选择公理等价。

6.5.1 定理　卡氏积定理可以推出选择公理。

证　设Γ集合族且$\varnothing\notin\Gamma$。取 $I = \Gamma$，任给 $i\in I$，取 $A_i = i$，则

$$任给\ i\in I，都有\ A_i \ne \varnothing,$$

由卡氏积定理得

$$\prod_{i\in I}A_i \ne \varnothing,$$

取 $f\in\prod_{i\in I}A_i$，则 f 是 I 到$\bigcup_{i\in I}A_i$ 的映射，并且满足

$$任给\ i\in I，都有\ f(i)\in A_i。$$

因为$\Gamma = I$ 且$\bigcup\Gamma= \bigcup_{i\in I}A_i$，所以 f 是Γ到$\bigcup\Gamma$的映射，又

$$任给\ X\in\Gamma，存在\ i\in I，使得\ X = i = A_i,$$

所以

$$f(X) = f(i)\in A_i = X,$$

因此 f 是Γ上的选择函数。■

6.5.2 定理　交点惟一定理可以推出选择公理。

证　设Γ集合族且$\varnothing\notin\Gamma$。任给 $X\in\Gamma$，令

$$A(X) = \{X\}\times X = \{<X, x> \mid x\in X\}，\Sigma = \{A(X) \mid X\in\Gamma\},$$

就有

$$任给\ X, Y\in\Gamma，如果\ X \ne Y，则\ A(X)\cap A(Y) = \varnothing,$$

所以Σ是不交的集合族，由交点惟一定理，存在集合 A，使得

$|A\cap A(X)| = 1$。

构造Γ到⋃Γ的映射

h：$\Gamma\to\bigcup\Gamma$　$h(X) = x$ ($<X, x>$是 $A\cap A(X)$中惟一的元素)

则 h 是Γ上的选择函数。■

6.5.3 定理　基数可比较定理可以推出良序定理。

证　证明如果良序定理不成立，则基数可比较定理不成立。

如果良序定理不成立，则存在集合 A 不能良序，所以$\kappa = |A|$ 就不是序数的基数，由习题 6.2.7(2)，存在基数λ，使得κ和λ不可比较，因此基数可比较定理不成立。■

下面再介绍一个选择公理的等价命题——Tukey 引理。先引进有限特征的概念。用 $\mathsf{F}(A)$表示 A 的所有有限子集组成的集合，即 $\mathsf{F}(A) = \{X \mid X\subseteq A$ 且 X 是有限的$\}$。

6.5.4 定义　有限特征　Γ是集合族，如果任给集合 A，都有

$A\in\Gamma$当且仅当 A 的任何有限子集属于Γ，

即

$A\in\Gamma$当且仅当 $\mathsf{F}(A)\subseteq\Gamma$，

则称Γ具有有限特征。

6.5.5　Tukey 引理　Γ是集合族，如果Γ具有有限特征，则Γ有极大元。

Γ有极大元的意思是指Γ在包含关系下的极大元，也就是Γ的极大集。详细地说，X_0是极大元是指：任给 $X\in\Gamma$，如果 $X_0\subseteq X$，则 $X_0 = X$。

我们来证明 Zorn 引理和 Tukey 引理等价。

6.5.6 定理　Zorn 引理可以推出 Tukey 引理。

证　设Γ是具有有限特征的集合族。

任给Γ的线形链Σ，令 $A = \bigcup\Sigma$。任给 A 的有限子集 X，因为Σ是单调的，所以存在 $Y\in\Sigma$，使得 $X\subseteq Y$ (由习题 1.5.5 和数学归纳法)，由 $Y\in\Gamma$和 X 是 Y 的有限子集得

$X\in\Gamma$。

这证明了

任给 A 的有限子集 X，都有 $X\in\Gamma$，

由Γ具有有限特征得

$A\in\Gamma$，

所以 A 是Σ的上界。

因此，Γ的任何线形链都有上界，由 Zorn 引理，Γ有极大元。■

6.5.7 定理　Tukey 引理可以推出 Zorn 引理。

证　设 A 是非空偏序集，A 的任何线形链都有上界。

如果 X 是线形链，则 X 的任何有限子集都是线形链，反之如果 X 的任何有限子集都是线形链，则任给 $x, y\in X$，由$\{x, y\}$得

$x\le y$ 或 $y\le x$，

所以 X 是线形链。

因此$\Gamma = \{X \mid X$ 是 A 的线形链$\}$具有有限特征，由 Tukey 引理，Γ有极大元 X_0。因为 X_0 是线形链，所以 X_0 有上界，但 X_0 的上界都在 X_0 中，所以 X_0 只有一个上界，这个上界就是 A 的极大元。■

Tukey 引理也称为第二极大原理。

习题 6.5

6.5.1　选择公理第二形式　任给非空集合 A，存在 $\mathsf{P}(A)\setminus\{\varnothing\}$ 上的选择函数。显然选择公理第二形式是选择公理的特例。

证明：选择公理第二形式可以推出选择公理。

6.5.2　第一极大原理　Γ是集合族，如果Γ的线形链都有上界，则Γ有极大元。显然第一极大原理是 Zorn 引理的特例。

(1) A 是偏序集，任给 $a\in A$，令 $A[a] = \{x \mid x\in A$ 且 $x\le a\}$，再令 $\Gamma = \{A[a] \mid a\in A\}$，证明：$A\cong\Gamma$。

(2) 证明：第一极大原理可以推出 Zorn 引理。

第七章　集域代数与超滤简介

7.1　集 域 代 数

如果 X, Y 都是 A 的子集，则 $X\cap Y, X\cup Y, X\setminus Y$ 也是 A 的子集。从集合运算的角度看，就是说 A 的幂集 $\mathrm{P}(A)$对于交、并、差三种运算是封闭的。现在考虑一般的对于交、并、差三种运算都封闭的子集族。

7.1.1 定义　集域代数　A 是非空集合，Γ是 A 的子集族。称Γ是 A 的集域代数，如果Γ满足以下条件：

(1) $\varnothing\in\Gamma$；

(2) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则 $X\cap Y\in\Gamma$；

(3) 如果 $X\in\Gamma$，则 $A\setminus X\in\Gamma$。

当不需要指明 A 时，简称Γ是集域代数。

在本书中，我们规定子集族是非空的(见集合族的定义)，在Γ是非空的情况，从条件(2)和(3)可以推出条件(1)，证明如下：取 $X\in\Gamma$，由(3)得 $A\setminus X\in\Gamma$，再由(2)得 $X\cap(A\setminus X)\in\Gamma$，即$\varnothing\in\Gamma$。

所以按本书的规定，集域代数的定义中并不需要条件(1)。但我们在验证Γ是集域代数时，还是要验证条件(1)的，因为我们首先要验证Γ非空，而验证条件(1)也就验证了Γ非空。当知道Γ非空时，我们只需验证条件(2)和(3)就行了。

当 X 是 A 的子集时，将 $A\setminus X$ 记为 X^*，称为 X 的余集。使用这种记法，条件(3)可以写成：如果 $X\in\Gamma$，则 $X^*\in\Gamma$。

注意余集的概念是相对的。如果 X 既是 A 的子集也是 B 的子集，则 X 在 A 中的余集和 X 在 B 中的余集是不同的。但我们使用余集的概念时，总是假定有一个确定的集合 A，虽然有时并不明确指出 A。

余集有以下性质。

7.1.2 定理

(1) $(X\cup Y)^* = X^*\cap Y^*$，$(X\cap Y)^* = X^*\cup Y^*$。

(2) $X\setminus Y = X\cap Y^*$。

(3) $(X^*)^* = X$。

证　(1) $(X\cup Y)^* = A\setminus(X\cup Y) = (A\setminus X)\cap(A\setminus Y) = X^*\cap Y^*$。

$(X\cap Y)^* = A\setminus(X\cap Y) = (A\setminus X)\cup(A\setminus Y) = X^*\cup Y^*$。

(2) $X\setminus Y = X\cap(A\setminus Y) = X\cap Y^*$。

(3) $(X^*)^* = A\setminus X^* = A\setminus(A\setminus X) = X$。■

定理 7.1.2 的(1)称为余集的 De-Morgan 律，(3)称为余集的双重否定律。

为了熟悉集域代数的概念，我们先来看一些例子。

7.1.3 例　A 是非空集合。$\mathrm{P}(A)$是 A 的集域代数，称为 A 的幂集代数。$\Gamma_0 = \{\varnothing, A\}$是 A 的集域代数，称为 A 的极小代数。注意 A 非空，所以极小代数有两个元素。

7.1.4 例　A 是非空集合。令

$$\Gamma = \{X \mid X \subseteq A，X \text{ 有限或 } X^* \text{有限}\},$$

则Γ是 A 的集域代数，理由如下：

(1) $\varnothing$有限，所以$\varnothing\in\Gamma$。

(2) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则(X 有限或 X^*有限)且(Y 有限或 Y^*有限)。当 X^*和 Y^*都有限时，就有

$$(X\cap Y)^* = X^*\cup Y^*\text{有限},$$

所以

$$X\cap Y\in\Gamma；$$

当 X 和 Y 中有一个有限时，就有

$$X\cap Y \text{ 有限},$$

所以也有 $X\cap Y\in\Gamma$。

(3) 如果 $X\in\Gamma$，则 X 有限或 X^*有限。当 X 有限时，就有

$$(X^*)^* = X \text{ 有限，}$$

所以 $X^*\in\Gamma$；当 X^*有限时，显然有 $X^*\in\Gamma$。

X 的余集 X^*有限也称为 X 余有限，所以这个集域代数称为 A 的有限–余有限代数。

当 A 有限时，A 的有限–余有限代数就是 A 的幂集代数；当 A 无限时，A 的有限–余有限代数不等于 A 的幂集代数。

7.1.5 例 $\mathbf{N}_3$ 除有基数为 2(极小代数)和基数为 8(幂集代数)的集域代数外，还有基数为 4 的集域代数$\Gamma = \{\varnothing, \{0\}, \{1, 2\}, \mathbf{N}_3\}$。

以下是一个较复杂的例子。

7.1.6 例 A 是非空集合，Φ是 A 的子集族，满足：

(1) $\varnothing\in\Phi$。

(2) Φ对交封闭，即任给 $X, Y\in\Phi$，都有 $X\cap Y\in\Phi$；

(3) Φ中集合的余集是Φ中有限个集合的并，即任给 $X\in\Phi$，存在 $X_1,\cdots, X_s\in\Phi$，使得 $X^* = X_1\cup\cdots\cup X_s$。

令$\Gamma = \{X_1\cup\cdots\cup X_n \mid n>0$ 且 $X_1,\cdots, X_n\in\Phi\}$。我们来证明Γ是 A 的集域代数。

(1) 因为$\varnothing\in\Phi$，所以$\varnothing\in\Gamma$。

(2) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则存在 $X_1,\cdots, X_n, Y_1,\cdots, Y_m\in\Phi$，使得

$$X = X_1\cup\cdots\cup X_n,\quad Y = Y_1\cup\cdots\cup Y_m,$$

所以

$$X\cap Y = (X_1\cup\cdots\cup X_n)\cap(Y_1\cup\cdots\cup Y_m)$$
$$= \bigcup\{X_i\cap Y_j \mid 1\le i\le n, 1\le j\le m\}\in\Gamma。$$

(3) 如果 $X\in\Gamma$，则存在 $X_1,\cdots, X_n\in\Phi$，使得

$$X = X_1\cup\cdots\cup X_n$$

任给 $1\le m\le n$，都有

$$X_m^* = X_{m\,1}\cup\cdots\cup X_{m\,s(m)}$$

所以

$$X^* = X_1^*\cap\cdots\cap X_n^*$$

$$= (X_{11}\cup\cdots\cup X_{1s(1)})\cap\cdots\cap(X_{n\,1}\cup\cdots\cup X_{n\,s(n)})$$
$$= \bigcup\{X_{1\,i_1}\cap\cdots\cap X_{n\,i_n} \mid 1\le i_1\le s(1),\cdots, 1\le i_n\le s(n)\}\in\Gamma。$$

例 7.1.6 中的集域代数Γ有这样的性质：

任给$\varnothing\ne X\in\Gamma$，存在 $Y\in\Phi$，使得 $Y\ne\varnothing$且 $Y\subseteq X$。

这样的性质称为Φ在Γ中稠密。

用已知的集域代数可以构造新的集域代数。

7.1.7 例 Γ是 A 的集域代数，B 是 A 的非空子集。令

$$\Sigma = \{X\cap B \mid X\in\Gamma\},$$

则Σ是 B 的集域代数，理由如下：

(1) $\varnothing\in\Gamma$，所以$\varnothing = \varnothing\cap B\in\Sigma$。

(2) 如果 $X\cap B, Y\cap B\in\Gamma$，则$(X\cap B)\cap(Y\cap B) = (X\cap Y)\cap B\in\Sigma$。

(3) 如果 $X\cap B\in\Gamma$，则 $B\setminus(X\cap B) = (A\setminus X)\cap B\in\Sigma$。

以后将这样的集域代数Σ记为(Γ, B)。

7.1.8 例 Γ和Σ分别是 A 和 B 的集域代数，$A\cap B = \varnothing$ (这样的Γ和Σ称为不相干的)，令

$$\Phi = \{X\cup Y \mid X\in\Gamma\text{且 } Y\in\Sigma\},$$

则Φ是 $A\cup B$ 的集域代数，理由如下：

(1) 因为$\varnothing\in\Gamma$且$\varnothing\in\Sigma$，所以$\varnothing = \varnothing\cup\varnothing\in\Phi$。

(2) 如果 $X_1\cup Y_1, X_2\cup Y_2\in\Gamma$，则

$$(X_1\cup Y_1)\cap(X_2\cup Y_2) = (X_1\cap X_2)\cup(Y_1\cap Y_2)\in\Phi。$$

(3) 如果 $X\cup Y\in\Gamma$，则$(A\cup B)\setminus(X\cup Y) = (A\setminus X)\cup(B\setminus Y)\in\Phi$。

以后将这样的集域代数Φ记为$\Gamma+\Sigma$，称为Γ和Σ的直和。

7.1.9 例 Γ是 A 的集域代数，B 是 A 的非空真子集。

由例 7.1.7 分别得到 B 和 $A\setminus B$ 的集域代数(Γ, B)和$(\Gamma, A\setminus B)$，由例 7.1.8 得到(Γ, B)和$(\Gamma, A\setminus B)$的直和$(\Gamma, B)+(\Gamma, A\setminus B)$，它是 A 的集域代数(因为 $A = B\cup(A\setminus B)$)。

因为任给 $X\in\Gamma$，都有 $X = (X\cap B)\cup(X\cap(A\setminus B))$，所以

$$\Gamma = (\Gamma, B)+(\Gamma, A\setminus B),$$

(Γ, B)和$(\Gamma, A\setminus B)$称为Γ的一个直和分解。

集域代数的定义中只说集域代数对集合的交封闭，以下定理说明了集域代数对集合的并和差也是封闭的。

7.1.10 定理 Γ是 A 的集域代数，则

(1) $A\in\Gamma$。

(2) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则 $X\cup Y\in\Gamma$。

(3) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则 $X\setminus Y\in\Gamma$。

证 (1) 因为$\varnothing\in\Gamma$，所以 $A=\varnothing^*\in\Gamma$。

(2) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则 $X^*, Y^*\in\Gamma$，所以

$$(X\cup Y)^* = X^*\cap Y^*\in\Gamma,$$

因此 $X\cup Y = ((X\cup Y)^*)^*\in\Gamma$。

(3) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则 $X, Y^*\in\Gamma$，所以 $X\setminus Y = X\cap Y^*\in\Gamma$。■

进一步由数学归纳法可得，集域代数Γ中任何有限个集合的交和并还在Γ中，即

任给 $X_1,\cdots, X_n\in\Phi$，都有 $X_1\cap\cdots\cap X_n$，$X_1\cup\cdots\cup X_n\in\Phi$。

A 的任意多个集域代数的交还是 A 的集域代数。

7.1.11 定理 Δ是 A 的集域代数组成的集合族，即任给$\Gamma\in\Delta$，Γ都是 A 的集域代数，则$\bigcap\Delta$是 A 的集域代数。

证 (1) 因为任给$\Gamma\in\Delta$，都有$\varnothing\in\Gamma$，所以$\varnothing\in\bigcap\Delta$。

(2) 如果 $X, Y\in\bigcap\Delta$，则

任给$\Gamma\in\Delta$，都有 $X, Y\in\Gamma$，

由Γ是集域代数得

$$X\cap Y\in\Gamma,$$

因此 $X\cap Y\in\bigcap\Delta$。

(3) 如果 $X\in\bigcap\Delta$，则

任给$\Gamma\in\Delta$，都有 $X\in\Gamma$，

由Γ是集域代数得

$$X^*\in\Gamma,$$

因此 $X^*\in\bigcap\Delta$。■

A 的任何子集族都可以扩充成 A 的集域代数。

7.1.12 定义 生成 Φ是 A 的子集族，令

$$\Delta = \{\Gamma \mid \Gamma\text{是 }A\text{ 的集域代数且}\Phi\subseteq\Gamma\}。$$

由定理 7.1.11 得$\bigcap\Delta$是集域代数，$\bigcap\Delta$称为由Φ生成的集域代数，记为[Φ]。

[Φ]是包含Φ的最小的 A 的集域代数。所以如果 A 的集域代数Γ满足：

任给 A 的集域代数Σ，都有如果$\Phi\subseteq\Sigma$，则$\Gamma\subseteq\Sigma$，

则Γ就是Φ生成的集域代数[Φ]。

7.1.13 例 因为集域代数对有限并封闭，所以例 7.1.6 中的Γ就是由Φ生成的集域代数[Φ]。

7.1.14 例 Φ是 A 的子集族，满足：

任给 $x\in A$，$\{x\}\in\Phi$，

Γ是 A 的有限–余有限代数，则$\Gamma\subseteq[\Phi]$。理由如下：

任给 $X\in\Gamma$，都有 X 有限或 X^*有限。

如果 X 有限，可设 $X=\{a_1,\cdots, a_n\}$，则

任给 $1\le i\le n$，都有$\{a_i\}\in\Phi$，

所以

任给 $1\le i\le n$，都有$\{a_i\}\in[\Phi]$，

因此 $X=\{a_1\}\cup\cdots\cup\{a_n\}\in[\Phi]$；

如果 X^*有限，可设 $X^*=\{a_1,\cdots, a_n\}$，同理可证

$$X^*\in[\Phi],$$

因此 $X=(X^*)^*\in[\Phi]$。

习题 7.1

7.1.1 κ是无限基数，$\kappa\le|A|$，令

$$\Gamma_{A,\kappa}=\{X \mid X\subseteq A,\ |X|<\kappa\text{或}|X^*|<\kappa\}$$

证明：

(1) 如果$|X|<\kappa$且$|Y|<\kappa$，则$|X\cup Y|<\kappa$。

(2) $\Gamma_{A,\kappa}$是 A 的集域代数。

7.1.2　分别构造 $\mathbf{N}_4$ 的基数为 4 和 8 的集域代数。

7.1.3　Γ是 A 的集域代数，B 是 A 的非空真子集。证明：$\Gamma = (\Gamma, B)+(\Gamma, A\setminus B)$。

7.1.4　A 是非空集合，Γ是 A 的子集族，且满足以下条件：

(1) $A\in\Gamma$；

(2) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则 $X\cup Y\in\Gamma$；

(3) 如果 $X\in\Gamma$，则 $A\setminus X\in\Gamma$。

证明：Γ是 A 的集域代数。

7.1.5　Δ是 A 的集域代数组成集合族。证明：

(1) 如果Δ是单调的，则$\bigcup\Delta$是 A 的集域代数。

(2) 举例说明当Δ不是单调时，$\bigcup\Delta$不一定是 A 的集域代数。

7.1.6　Φ是 A 的子集族，Γ是 A 的集域代数，Γ满足：

任给 A 的集域代数Σ，都有如果$\Phi\subseteq\Sigma$，则$\Gamma\subseteq\Sigma$。

证明：Γ就是Φ生成的集域代数$[\Phi]$。

7.1.7　$\Phi = \{\mathbf{N}_n \mid n\in\mathbf{N}\}$。证明：

(1) 任给 $n\in\mathbf{N}$，都有$\{n\}\in[\Phi]$

(2) $[\Phi]$是 $\mathbf{N}$ 的有限-余有限代数。

7.1.8　A 是非空集合，Φ是 A 的子集族，归纳定义Φ_n如下：

$\Phi_0 = \Phi\cup\{\varnothing\}$；

$\Phi_{n+1} = \{X\cap Y \mid X, Y\in\Phi_n\}\cup\{A\setminus X \mid X\in\Phi_n\}$。

令

$\Gamma = \bigcup_{i\geq 0}\Phi_i$。

证明：

(1) $\{\Phi_n \mid n\in\mathbf{N}\}$是单调的；

(2) $\Gamma = [\Phi]$。

7.2　子代数、同态、完备性

这一节简单讨论集域代数中几个重要的概念。

7.2.1 定义　子代数　Γ和Σ都是 A 的集域代数，如果$\Sigma\subseteq\Gamma$，则称Σ是Γ的子代数。

7.2.2 例　任给 A 的集域代数Γ，Γ都是 A 的幂集代数 $\mathrm{P}(A)$的子代数，A 的极小代数Γ_0都是Γ的子代数。

7.2.3 例　B 是 A 的真子集。$\mathrm{P}(A)$和 $\mathrm{P}(B)$都是集域代数，且有 $\mathrm{P}(B)\subseteq\mathrm{P}(A)$，但 $\mathrm{P}(B)$并不是 $\mathrm{P}(A)$的子代数，因为 $\mathrm{P}(B)$并不是 A 的集域代数。

7.2.4 定义　同态映射　Γ和Σ都是集域代数，h 是Γ到Σ的映射，称 h 是Γ到Σ的同态映射，如果 h 满足以下条件：

(1) $h(X\cap Y) = h(X)\cap h(Y)$；

(2) $h(X^*) = h(X)^*$。

请看同态的一个例子。

7.2.5 例　A 是无限集，Γ是 A 的有限-余有限代数，Γ_0是 A 的极小代数，构造Γ到Γ_0的映射

$$h:\Gamma\to\Gamma_0\quad h(X)=\begin{cases}\varnothing & \text{如果 } X \text{ 有限}\\ A & \text{如果 } X \text{ 余有限，}\end{cases}$$

则 h 是Γ到Γ_0的同态映射。证明如下：

(1) X 有限，则 X^*余有限且 $X\cap Y$ 有限，所以

$h(X\cap Y) = \varnothing = \varnothing\cap h(Y) = h(X)\cap h(Y)$，

$h(X^*) = A = \varnothing^* = h(X)^*$。

(2) X 余有限且 Y 有限，则 X^*有限且 $X\cap Y$ 有限，所以

$h(X\cap Y) = \varnothing = h(X)\cap\varnothing = h(X)\cap h(Y)$，

$h(X^*) = \varnothing = A^* = h(X)^*$。

(3) X 余有限且 Y 余有限，则 X^*有限且 $X\cap Y$ 余有限，所以

$h(X\cap Y) = A = A\cap A = h(X)\cap h(Y)$，

$h(X^*) = \varnothing = A^* = h(X)^*$。

同态有以下性质。

7.2.6 定理 Γ和Σ分别是 A 和 B 的集域代数，h 是Γ到Σ的同态映射，则

(1) $h(\varnothing) = \varnothing$。

(2) $h(A) = B$。

(3) 任给 $X, Y\in\Gamma$，都有 $h(X\cup Y) = h(X)\cup h(Y)$。

(4) 任给 $X, Y\in\Gamma$，如果 $X\subseteq Y$，则 $h(X)\subseteq h(Y)$。

(5) $h[\Gamma]$是Σ的子代数。

证 (1) 取 $X\in\Gamma$，则 $X^*\in\Gamma$，所以

$h(\varnothing) = h(X\cap X^*) = h(X)\cap h(X^*) = h(X)\cap h(X)^* = \varnothing$。

(2) 取 $X\in\Gamma$，则 $X^*\in\Gamma$，所以

$h(A) = h(X\cup X^*) = h(X)\cup h(X^*) = h(X)\cup h(X)^* = B$。

(3) $h(X\cup Y) = h((X^*\cap Y^*)^*) = (h(X^*\cap Y^*))^*$

$= (h(X)^*\cap h(Y)^*)^* = h(X)\cup h(Y)$。

(4) 如果 $X\subseteq Y$，则 $X\cap Y = X$，所以 $h(X\cap Y) = h(X)$，由同态的定义得

$h(X)\cap h(Y) = h(X)$，

因此 $h(X)\subseteq h(Y)$。

(5) 因为 $h[\Gamma]\subseteq\Sigma$且 $B\in\Sigma$，所以只需证 $h[\Gamma]$是集域代数就行了。

如果 $Y_1, Y_2\in h[\Gamma]$，则

存在 $X_1, X_2\in\Gamma$，使得 $h(X_1) = Y_1$ 且 $h(X_2) = Y_2$，

所以 $Y_1\cap Y_2 = h(X_1)\cap h(X_2) = h(X_1\cap X_2)\in h[\Gamma]$。

如果 $Y\in h[\Gamma]$，则

存在 $X\in\Gamma$，使得 $h(X) = Y$，

所以 $Y^* = h(X)^* = h(X^*)\in h[\Gamma]$。■

7.2.7 定义 同构映射和同构 Γ和Σ都是集域代数，h 是Γ到Σ的同态映射。如果 h 是双射，则称 h 是Γ到Σ的同构映射。如果存在Γ到Σ的同构映射，则称Γ和Σ同构，记为Γ≌Σ。

先来看同构的一些例子。

7.2.8 例 任何两个极小代数都同构。

7.2.9 例 如果$|A| = |B|$，则 P(A)≌P(B)。证明如下：

设 f 是 A 到 B 的双射，构造 P(A)到 P(B)的映射

h：P(A)→P(B)　$h(X) = f[X]$

由例 2.4.6 得 h 是双射，又任给 $X, Y\in$ P(A)，都有

$h(X\cap Y) = f[X\cap Y] = f[X]\cap f[Y] = h(X)\cap h(Y)$，

$h(X^*) = f[A\setminus X] = f[A]\setminus f[X] = B\setminus f[X]$

$= B\setminus h(X) = h(X)^*$。

因此 h 是 P(A)到 P(B)的同构映射。

7.2.10 例 例 7.1.5 中的集域代数$\Gamma = \{\varnothing, \{0\}, \{1, 2\}, \mathbf{N}_3\}$同构于 P($\mathbf{N}_2$) = $\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \mathbf{N}_2\}$。同构映射是：

h：Γ→ P($\mathbf{N}_2$)　$h(\varnothing) = \varnothing$，$h(\{0\}) = \{0\}$

$h(\{1, 2\}) = \{1\}$，$h(\mathbf{N}_3) = \mathbf{N}_2$

7.2.11 例 Γ_1和Σ_1不相干，Γ_2和Σ_2不相干，f 是Γ_1到Γ_2的同构映射，g 是Σ_1到Σ_2的同构映射，构造$\Gamma_1+\Sigma_1$到$\Gamma_2+\Sigma_2$的映射

h：$\Gamma_1+\Sigma_1\to\Gamma_2+\Sigma_2$　$h(X\cup Y) = f(X)\cup g(Y)$

则 h 是双射且 h 是$\Gamma_1+\Sigma_1$到$\Gamma_2+\Sigma_2$的同态。

证 h 是单射。任给 $X_1\cup Y_1, X_2\cup Y_2\in\Gamma_1+\Sigma_1$，如果

$h(X_1\cup Y_1) = h(X_2\cup Y_2)$，

则 $f(X_1)\cup g(Y_1) = f(X_2)\cup g(Y_2)$，所以

$f(X_1) = f(X_2)$且 $g(Y_1) = g(Y_2)$，

由 f 和 g 是单射得

$X_1 = X_2$ 且 $Y_1 = Y_2$，

所以 $X_1\cup Y_1 = X_2\cup Y_2$。

证 h 是满射。任给 $X_2\cup Y_2\in\Gamma_2+\Sigma_2$，由 f 和 g 是满射得

存在 $X_1\in\Gamma_1, Y_1\in\Sigma_1$，使得 $f(X_1) = X_2$ 且 $g(Y_1) = Y_2$，

由 h 的定义得

$$h(X_1\cup Y_1) = f(X_1)\cup g(Y_1) = X_2\cup Y_2,$$

所以，存在 $X_1\cup Y_1\in\Gamma_1+\Sigma_1$，使得 $h(X_1\cup Y_1) = X_2\cup Y_2$。

证 h 是$\Gamma_1+\Sigma_1$到$\Gamma_2+\Sigma_2$的同态。

任给 $X_1\cup Y_1, X_2\cup Y_2\in\Gamma_1+\Sigma_1$，都有

$$h((X_1\cup Y_1)\cap(X_2\cup Y_2)) = h((X_1\cap X_2)\cup(Y_1\cap Y_2))$$
$$= f(X_1\cap X_2)\cup g(Y_1\cap Y_2) = (f(X_1)\cap f(X_2))\cup(g(Y_1)\cap g(Y_2))$$
$$= (f(X_1)\cup g(Y_1))\cap(f(X_2)\cup g(Y_2)) = h(X_1\cup Y_1)\cap h(X_2\cup Y_2)$$

任给 $X\cup Y\in\Gamma_1+\Sigma_1$，都有

$$h((X\cup Y)^*) = (f(X)\cup g(Y))^* = f(X)^*\cap g(Y)^*$$
$$= f(X^*)\cap g(Y^*) = h(X^*\cap Y^*) = h((X\cup Y)^*)。$$

因此，如果$\Gamma_1\cong\Gamma_2$且$\Sigma_1\cong\Sigma_2$，则$\Gamma_1+\Sigma_1\cong\Gamma_2+\Sigma_2$。

两个集域代数的同构有以下性质。

7.2.12 定理 集域代数同构的性质

(1) $\Gamma\cong\Gamma$。

(2) 如果$\Gamma\cong\Sigma$，则$\Sigma\cong\Gamma$。

(3) 如果$\Gamma\cong\Sigma$且$\Sigma\cong\Phi$，则$\Gamma\cong\Phi$。

证 使用恒等映射、逆映射和映射的复合，详细证明留给读者。■

Γ是集域代数，Γ中任何有限个集合的交还在Γ中，但Γ中无限个集合的交就不一定在Γ中了。

7.2.13 定义 完备性 Γ是集域代数，如果

任给$\Phi\subseteq\Gamma$且$\Phi\neq\varnothing$，都有$\bigcap\Phi\in\Gamma$，

则称Γ是完备的集域代数，简称Γ完备的。

先来看完备性的一些例子。

7.2.14 例 任何有限的集域代数是完备的。任何幂集代数是完备的。

7.2.15 例 A 是无限集，A 的有限-余有限代数Γ不是完备的，证明如下：

取 $B\subseteq A$ 使得 B 和 B^*都是无限的，则 $B\notin\Gamma$。任给 $x\in B$，令 $B_x = \{x\}^*$，则 B_x都是余有限的，所以$\{B_x \mid x\in B\}\subseteq\Gamma$，但

$$(\bigcap\{B_x \mid x\in B\})^* = \bigcup\{B_x^* \mid x\in B\} = \bigcup\{\{x\} \mid x\in B\} = B\notin\Gamma,$$

所以$\bigcap\{B_x \mid x\in B\}\notin\Gamma$，因此$\Gamma$不是完备的。

完备性的定义中只说Γ中任意多个集合的交还在Γ中，以下定理说明了Γ中任意多个集合的并还在Γ中。

7.2.16 定理 Γ是完备的集域代数，则任给$\Phi\subseteq\Gamma$且$\Phi\neq\varnothing$，都有$\bigcup\Phi\in\Gamma$。

证 取$\Sigma = \{X^* \mid X\in\Phi\}$，则$\Sigma\subseteq\Gamma$且$\Sigma\neq\varnothing$，由$\Gamma$的完备性得$\bigcap\Sigma\in\Gamma$，所以$(\bigcup\Phi)^* = \bigcap\Sigma\in\Gamma$，因此$\bigcup\Phi\in\Gamma$。■

反之，如果集域代数Γ中任意多个集合的并还在Γ中，则Γ是完备的。

任意多个集域代数的交还是集域代数(见定理 7.1.11)，类似地可以证明任意多个完备的集域代数的交还是完备的集域代数。设Φ是 A 的子集族，取

$$\Delta = \{\Gamma \mid \Gamma\text{是 } A \text{ 的完备的集域代数且}\Phi\subseteq\Gamma\},$$

则$\bigcap\Delta$是包含Φ的最小的完备的集域代数，称为由Φ生成的完备集域代数。

7.2.17 例 A 的有限-余有限代数Γ生成的完备集域代数是$\mathrm{P}(A)$。设Γ生成的完备集域代数是Σ，证明 $\mathrm{P}(A)\subseteq\Sigma$。

任给 $X\in\mathrm{P}(A)$，任给 $x\in X$，都有$\{x\}\in\Gamma$，所以$\{x\}\in\Sigma$，由Σ的完备性得 $X = \bigcup\{\{x\} \mid x\in X\}\in\Sigma$。

因为当 A 无限时，A 的有限–余有限代数不等于 A 的幂集代数，所以例 7.2.17 再次证明了，当 A 无限时，A 的有限–余有限代数不是完备的。

习题 7.2

7.2.1 Γ和Σ都是集域代数，h 是Γ到Σ的映射，且满足以下条

件：

(1) $h(X\cup Y) = h(X)\cup h(Y)$；

(2) $h(X^*) = h(X)^*$。

证明：h 是Γ到Σ的同态映射。

7.2.2　Γ和Σ分别是 A 和 B 的有限-余有限代数，f 是 A 到 B 的双射。证明：

(1) $h：\Gamma\to\Sigma \quad h(X) = f[X]$ 是双射。

(2) $\Gamma\cong\Sigma$。

7.2.3　A 是无限集，Γ是 A 的有限-余有限代数，Γ_0 是 A 的极小代数。证明：Γ到Γ_0 的映射

$$h：\Gamma\to\Gamma_0 \quad h(X) = \begin{cases} \varnothing & \text{如果 } X \text{ 有限} \\ A & \text{如果 } X \text{ 余有限，} \end{cases}$$

是Γ到Γ_0 的同态映射。

7.2.4　给出定理 7.2.12 的详细证明。

7.2.5　κ是无限基数，$\kappa\leq|A|$，令

$$\Gamma_{A,\kappa} = \{X \mid X\subseteq A，|X|<\kappa\text{或}|X^*|<\kappa\}$$

证明：

(1) 如果$|A| = |B|$，则$\Gamma_{A,\kappa}\cong\Gamma_{B,\kappa}$。

(2) $\Gamma_{A,\kappa}$不是完备的。

7.2.6　分别构造：$\mathbf{N}_4$ 的基数为 4 的集域代数到 $\mathrm{P}(\mathbf{N}_2)$的同构映射、$\mathbf{N}_4$ 的基数为 8 的集域代数到 $\mathrm{P}(\mathbf{N}_3)$的同构映射。

7.2.7　Γ和Σ是集域代数，h 是Γ到Σ的同构映射，证明：任给 $X, Y\in\Gamma$，如果 $h(X)\subseteq h(Y)$，则 $X\subseteq Y$。

7.2.8　Γ是集域代数。证明：如果任给$\Phi\subseteq\Gamma$，都有$\bigcup\Phi\subseteq\Gamma$，则$\Gamma$是完备的。

7.2.9　Δ是 A 的完备的集域代数组成的集合族，即任给$\Gamma\in\Delta$，Γ都是 A 的完备的集域代数。证明：$\bigcap\Delta$是 A 的完备的集域代数。

7.3　原　　子

这一节较详细地讨论集域代数的重要概念——原子。

单元集本身不是空集，但没有非空的真子集。在集域代数Γ中我们考虑本身不是空集，但没有非空的属于Γ的真子集的集合。

7.3.1 定义　原子　Γ是集域代数，$T\in\Gamma$，如果 T 满足：

(1) $T\neq\varnothing$；

(2) 任给 $X\in\Gamma$，如果 $X\subseteq T$，则 $X = \varnothing$或 $X = T$；

则称 T 是Γ的一个原子。

先来看原子的一些例子。

7.3.2 例　T 是幂集代数的原子当且仅当 T 是单元集。

7.3.3 例　如果集域代数Γ有非空有限集，则Γ一定有原子。证明如下：取 n 是

$$\{|X| \mid X\in\Gamma\text{且 } 0<|X|<\aleph_0\}$$

的最小数，取 $T\in\Gamma$，使得$|T| = n$，则 T 是Γ的原子。

7.3.4 例　Γ是集域代数，Φ在Γ中稠密，则任给Γ的原子 T，都有 $T\in\Phi$。

以下讨论原子的性质。

7.3.5 定理　Γ是集域代数，T 和 S 都是Γ的原子，则

(1) 任给 $X\in\Gamma$，都有 $T\cap X = \varnothing$或 $T\subseteq X$。

(2) 如果 $T\subseteq S$，则 $T = S$。

(3) 原子的不交性　如果 $T\neq S$，则 $T\cap S = \varnothing$。

证　(1) 由 $T\cap X\subseteq T$ 和 T 是原子得

$$T\cap X = \varnothing\text{或 } X\cap T = T，$$

因此 $X\cap T = \varnothing$或 $T\subseteq X$。

(2) 如果 $T\subseteq S$，由 S 是原子得

$$T = \varnothing\text{或 } T = S，$$

由 T 是原子得

$T \neq \varnothing$，

因此 $T = S$。

(3) 由(1)得 $T \cap S = \varnothing$或 $T \subseteq S$，如果 $T \subseteq S$，则由(2)和 $T \neq \varnothing$ 得

$T = S$，

和 $T \neq S$ 矛盾，因此 $T \cap S = \varnothing$■

原子在同构下不变。

7.3.6 定理 原子的同构不变性 Γ和Σ都是集域代数，h 是Γ到Σ的同构映射，则 T 是Γ的原子当且仅当 $h(T)$是Σ的原子。

证 设 T 是Γ的原子，证明 $h(T)$是Σ的原子。

任给 $h(X) \subseteq h(T)$，由习题 7.2.8 得

$X \subseteq T$，

由 T 是Γ的原子得

$X = \varnothing$或 $X = T$，

所以

$h(X) = h(\varnothing) = \varnothing$或 $h(X) = h(T)$，

因此 $h(T)$是Σ的原子。

设 $h(T)$是Σ的原子，证明 T 是Γ的原子。

任给 $X \subseteq T$，由定理 7.2.6(4)得

$h(X) \subseteq h(T)$，

由 $h(T)$是Σ的原子得

$h(X) = \varnothing = h(\varnothing)$或 $h(X) = h(T)$，

由 h 是单射得

$X = \varnothing$或 $X = T$，

因此 T 是Γ的原子。■

单元集一定是原子，原子不一定是单元集。然而，任何原子都可以“压缩”成单元集。

7.3.7 引理 Γ是 A 的有原子的集域代数，令

$\Psi = \{T \mid T$ 是Γ的原子$\}$

则$\Psi \neq \varnothing$，取Ψ上的选择函数 f，令

$H = \mathrm{ran}(f) = \{f(T) \mid T$ 是Γ的原子$\}$，

再令

$G = \bigcup\Psi = \bigcup\{T \mid T$ 是Γ的原子$\}$，

则

(1) 任给Γ的原子 T，任给 $X \in \Gamma$，如果 $f(T) \in X$，则 $T \subseteq X$。

(2) 任给 $X, Y \in \Gamma$，如果 $X \cap G = Y \cap G$，则 $X \cap H = Y \cap H$。

(3) 任给 $X, Y \in \Gamma$，如果 $X \cap H = Y \cap H$，则 $X \cap G = Y \cap G$。

(4) $g: (\Gamma, G) \to (\Gamma, H)$ $g(X \cap G) = X \cap H$ 是同构映射。

(5) 任给Γ的原子 T，都有 $T \cap H = \{f(T)\}$。

证 (1) 如果 $f(T) \in X$，则由 $f(T) \in T$ 得 $f(T) \in X \cap T$，所以

$X \cap T \neq \varnothing$，

由定理 7.3.5(1)得 $T \subseteq X$。

(2) 任给 $x \in X \cap H$，由 $x \in H$ 得

存在原子 T，使得 $x = f(T)$，

由 $f(T) \in X$ 和(1)得 $T \subseteq X$，所以

$f(T) \in T \subseteq X \cap G = Y \cap G \subseteq Y$，

由 $f(T) \in H$ 得 $f(T) \in Y \cap H$，即

$x \in Y \cap H$。

因此 $X \cap H \subseteq Y \cap H$。

同理可证 $Y \cap H \subseteq X \cap H$。

(3) 任给 $x \in X \cap G$，由 $x \in G$ 得

存在原子 T，使得 $x \in T$，

由 $x \in X$ 得 $X \cap T \neq \varnothing$，由定理 7.3.5(1)得 $T \subseteq X$，所以

$f(T) \in X$，

所以

$f(T) \in X \cap H = Y \cap H \subseteq Y$，

由 $s(T) \in Y$ 和(1)得 $T \subseteq Y$，所以

$x \in T \subseteq Y$，

由 $x\in G$ 得

$$x\in Y\cap G。$$

因此 $X\cap G\subseteq Y\cap G$。

同理可证 $Y\cap G\subseteq X\cap G$。

(4) 由(2)得

$$g：(\Gamma, G)\to(\Gamma, H)\quad g(X\cap G) = X\cap H$$

的定义是合理的。

由(3)得 g 是单射，显然 g 是满射，所以 g 是双射。

任给 $X\cap G\in(\Gamma, G)$，都有

$$g(G\setminus(X\cap G)) = g((A\setminus X)\cap G)$$
$$= (A\setminus X)\cap H = H\setminus(X\cap H)$$

任给 $X\cap G, Y\cap G\in(\Gamma, G)$，都有

$$g((X\cap G)\cap(Y\cap G)) = g((X\cap Y)\cap G)$$
$$= (X\cap Y)\cap H = (X\cap G)\cap(Y\cap G)$$

因此 g 是同构映射。

(5) 由 f 是选择函数得 $f(T)\in T$，又

$$f(T)\in \mathrm{ran}(f) = H,$$

因此$\{f(T)\}\subseteq T\cap H$。

任给 $x\in T\cap H$，由 $x\in H$ 得

存在原子 S，使得 $x = f(S)$，

所以 $x = f(S)\in S$，又 $x\in T$，所以

$$x\in T\cap S,$$

由原子的不交性得 $T = S$，所以

$$x = f(T),$$

因此 $T\cap H\subseteq\{f(T)\}$。■

7.3.8 定理 任给有原子的集域代数Γ，存在集域代数Σ，使得$\Gamma\cong\Sigma$且Σ中的原子都是单元集。

证 设Γ是 A 的集域代数，取引理 7.3.7 中的 H, G 和 f。由引理 7.3.7(4)得$(\Gamma, G)\cong(\Gamma, H)$。

当 $G = A$ 时，取$\Sigma = (\Gamma, H)$，则

$$\Gamma = (\Gamma, G)\cong(\Gamma, H) = \Sigma,$$

同构映射是：

$$h：\Gamma\to\Sigma\quad h(X) = g(X\cap G) = X\cap H$$

任给Σ的原子 S，存在Γ的原子 T，使得 $S = h(T)$，所以

$$S = h(T) = g(T\cap H) = T\cap H = \{f(T)\}。$$

因此 S 是单元集。

当 $G\neq A$ 时，取$\Sigma = (\Gamma, H)+(\Gamma, A\setminus G)$，则

$$\Gamma = (\Gamma, G)+(\Gamma, A\setminus G)\cong(\Gamma, H)+(\Gamma, A\setminus G) = \Sigma,$$

同构映射是：

$$h：\Gamma\to\Sigma\quad h(X) = g(X\cap G)\cup(X\cap(A\setminus G))$$
$$= (X\cap H)\cup(X\cap(A\setminus G))$$

任给Σ的原子 S，存在Γ的原子 T，使得 $S = h(T)$，所以

$$S = h(T) = (T\cap H)\cup(T\cap(A\setminus G))$$
$$= T\cap H = \{f(T)\}。$$

因此 S 是单元集。■

并非每个集域代数都有原子。如果Γ没有原子，则称Γ是无原子集域代数。

由原子的定义，Γ是无原子集域代数的条件是：

任给 $X\neq\varnothing$，存在 $Y\neq\varnothing$，使得 $Y\subseteq X$ 且 $Y\neq X$。

由例 7.3.3，无原子集域代数Γ中除空集外没有有限集，因为Γ对于交封闭，所以任给 $X, Y\in\Gamma$，如果 $X\cap Y\neq\varnothing$，则 $X\cap Y$ 还是无限集，这样的集域代数比较复杂。

7.3.9 例 任给 $\mathrm{k}\in\mathbf{N}$，任给 $0\leq\mathrm{m}\leq 2^{\mathrm{k}}-1$，定义

$$A(\mathrm{k}, \mathrm{m}) = \{2^{\mathrm{k}}x+\mathrm{m}\mid x\in\mathbf{N}\},$$

任给 $\mathrm{k}\in\mathbf{N}$，$A(\mathrm{k}, 0),\cdots, A(\mathrm{k}, 2^{\mathrm{k}}-1)$两两不交，且

$$\bigcup\{\{A(\mathrm{k}, \mathrm{i})\mid 0\leq\mathrm{i}\leq 2^{\mathrm{k}}-1\} = \mathbf{N},$$

所以任给 $0\leq\mathrm{m}\leq 2^{\mathrm{k}}-1$，都有

$$A(\mathrm{k}, \mathrm{m})^* = \bigcup\{\{A(\mathrm{k}, \mathrm{i})\mid 0\leq\mathrm{i}\leq 2^{\mathrm{k}}-1 \text{ 且 } \mathrm{i}\neq\mathrm{m}\}。$$

令

$$\Phi = \{A(\mathrm{k}, \mathrm{m}) \mid \mathrm{k}\in\mathbf{N},\ 0\le \mathrm{m}\le 2^{\mathrm{k}}-1\}\cup\{\varnothing\},$$

则

(1) $\varnothing\in\Phi$；

(2) 任给 $A(\mathrm{s}, \mathrm{m}), A(\mathrm{t}, \mathrm{n})\in\Phi$，不妨设 s≤t，则

$$A(\mathrm{s}, \mathrm{m})\cap A(\mathrm{t}, \mathrm{n}) = \begin{cases} A(\mathrm{t}, \mathrm{n}) & \text{如果 } \mathrm{m} = \mathrm{n} \\ \varnothing & \text{如果 } \mathrm{m} \ne \mathrm{n}, \end{cases}$$

所以 $A(\mathrm{s}, \mathrm{m})\cap A(\mathrm{t}, \mathrm{n})\in\Phi$；

(3) 任给 $A(\mathrm{k}, \mathrm{m})\in\Phi$，由

$$\bigcup\{\{A(\mathrm{k}, \mathrm{i}) \mid 0\le \mathrm{i}\le 2^{\mathrm{k}}-1\} = \mathbf{N}$$

得

$$A(\mathrm{k}, \mathrm{m})^* = \bigcup\{\{A(\mathrm{k}, \mathrm{i}) \mid 0\le \mathrm{i}\le 2^{\mathrm{k}}-1 \text{ 且 } \mathrm{i} \ne \mathrm{m}\}。$$

所以 $A(\mathrm{k}, \mathrm{m})^*$是$\Phi$中有限个集合的并。

这样定义的Φ满足例 7.1.6 中的条件，由例 7.1.6 得

$$\Gamma = \{X_1\cup\cdots\cup X_{\mathrm{n}} \mid \mathrm{n}\in\mathbf{N},\ X_1,\cdots, X_{\mathrm{n}}\in\Phi\},$$

是 **N** 的集域代数，并且Φ在Γ中稠密。

以下证明Γ是无原子集域代数。

任给 $X\in\Gamma$，如果 $X \ne \varnothing$，则

存在 $A(\mathrm{k}, \mathrm{m})\in\Phi$，使得 $A(\mathrm{k}, \mathrm{m}) \subseteq X$。

取 $Y = A(\mathrm{k}+1, \mathrm{m})$，则

$$Y \ne \varnothing,\ Y \subseteq X \text{ 且 } Y \ne X。$$

由无原子集域代数的条件得Γ是无原子集域代数。

和无原子集域代数相对的概念是原子集域代数。原子集域代数并不仅仅是有原子的集域代数，而是要求每个非空子集都包含一个原子，所以原子集域代数的条件是：

任给 $X \ne \varnothing$，存在原子 T，使得 $T \subseteq X$。

幂集代数是原子集域代数，而且是完备的原子集域代数。反之，任何完备的原子集域代数都同构于某个幂集代数。所以，从同构的意义上说，只有幂集代数是完备的原子集域代数。

7.3.10 引理 Γ是 A 的完备的原子集域代数，令

$$G = \bigcup\{T \mid T \text{ 是}\Gamma\text{的原子}\},$$

则 $G = A$。

证 由Γ是完备的得 $G\in\Gamma$，所以 $A\setminus G\in\Gamma$，用反证法证明 $G = A$。

如果 $G \ne A$，则 $A\setminus G \ne \varnothing$，由$\Gamma$是原子集域代数得

存在原子 T，使得 $T \subseteq A\setminus G$，

和 $T \subseteq G$ 矛盾。■

7.3.11 定理 完备的原子集域代数同构幂集代数。

证 设Γ是 A 的完备的原子集域代数，取引理 7.3.7 中的 H, G 和 f。由引理 7.3.10 得

$$G = A,$$

由定理 7.3.8 得

$$\Gamma\cong(\Gamma, H),$$

同构映射是

$$h：\Gamma\to(\Gamma, H) \quad h(X) = X\cap H$$

所以(Γ, H)也是完备的。

以下证明(Γ, H)就是 H 的集域代数 $\mathrm{P}(H)$，也就是证明任给 $X\in \mathrm{P}(H)$，都有 $X\in(\Gamma, H)$。

任给 $X\in \mathrm{P}(H)$，任给 $x\in X$，都有 $x\in H$，所以

存在Γ的原子 T，使得 $x = f(T)$，

所以

$$\{x\} = \{f(T)\} = h(T)\in(\Gamma, H),$$

因此 $X = \bigcup\{\{x\} \mid x\in X\}\in(\Gamma, H)$。■

布尔代数是一种重要的代数结构，在逻辑、数学和计算机科学中有重要的应用。集域代数是布尔代数的具体例子，了解集域代数对学习布尔代数有一定的帮助。更重要的是，从同构意义上说，集域代数已经刻画了布尔代数，因为布尔代数中有一个重要

的定理——Stone 表示定理：任何一个布尔代数同构于一个集域代数。

习题 7.3

7.3.1　Γ是集域代数，Φ在Γ中稠密。证明：任给Γ的原子 T，都有 $T\in\Phi$。

7.3.2　任给 $k\in\mathbf{N}$，任给 $0\le m\le 2^k-1$，定义

$$A(k, m) = \{2^k x+m \mid x\in\mathbf{N}\},$$

证明：

(1) 任给 $k\in\mathbf{N}$，$A(k, 0), \cdots, A(k, 2^k-1)$两两不交。

(2) $\bigcup\{\{A(k, i) \mid 0\le i\le 2^k-1\} = \mathbf{N}$。

(3) 任给 m, n, s≤t，都有

$$A(s, m)\cap A(t, n) = \begin{cases} A(t, n) & \text{如果 } m = n \\ \varnothing & \text{如果 } m \ne n, \end{cases}$$

7.3.3　证明：A 的有限-余有限代数Γ是原子集域代数。

7.3.4　Γ是完备的原子集域代数，Σ是完备的无原子集域代数，Γ和Σ不相干。证明：Γ+Σ是完备的集域代数，但不是原子集域代数。

7.3.5　Γ是 A 的完备的有原子的集域代数，但不是原子集域代数。令

$$G = \bigcup\{T \mid T \text{ 是}\Gamma\text{的原子}\}。$$

证明：

(1) $G \ne A$ 且 $G \ne \varnothing$。

(2) (Γ, G)是完备的原子集域代数。

(3) $(\Gamma, A\setminus G)$完备的无原子集域代数。

7.4　滤 和 超 滤

在现代逻辑的研究中，经常使用另一类重要的子集族。

7.4.1 定义　滤　A 是非空集合，Γ是 A 的子集族。称Γ是 A 上的滤，如果Γ满足以下条件：

(1) $\varnothing\notin\Gamma$，$A\in\Gamma$；

(2) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则 $X\cap Y\in\Gamma$；

(3) 如果 $X\in\Gamma$且 $X \subseteq Y \subseteq A$，则 $Y\in\Gamma$。

当不需要指明 A 时，简称Γ是滤。

在本书中，我们规定子集族是非空的(见集合族的定义)，在Γ是非空的情况，从条件(3)可以推出 $A\in\Gamma$，所以当知道Γ非空时，可以不验证 $A\in\Gamma$。

为了熟悉滤的概念，我们先来看一些例子。

7.4.2 例　B 是 A 的非空子集，令

$$\Gamma = \{X \mid B \subseteq X \subseteq A\}$$

则Γ是 A 上的滤。特别地，当 $B = \{a\}$时，有

$$\Gamma = \{X \mid B \subseteq X \subseteq A\} = \{X \mid a\in X \subseteq A\},$$

所以

　　任给 $X \subseteq A$，都有 $X\in\Gamma$当且仅当 $a\in X$。

7.4.3 例　A 是无限集。令

$$\Gamma = \{X \mid X \subseteq A \text{ 且 } X^*\text{有限}\},$$

则Γ是 A 上的滤，理由如下：

(1) 由$\varnothing^* = A$ 无限得$\varnothing\notin\Gamma$，由 $A^* = \varnothing$有限得 $A\in\Gamma$。

(2) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则 X^*和 Y^*都有限，所以

$$(X\cap Y)^* = X^*\cup Y^*\text{有限},$$

因此 $X\cap Y\in\Gamma$。

(3) 如果 $X\in\Gamma$且 $X \subseteq Y \subseteq A$，则

$$Y^* \subseteq X^*\text{且 } X^*\text{有限},$$

所以

$$Y^*\text{有限},$$

因此 $Y\in\Gamma$。

这个滤称为 A 上的余有限滤，记为$\Gamma_{A,\ \aleph_0}$。虽然余有限滤和有限–余有限代数用同样的记号，但我们现在讨论的是滤，所以并不会混淆。习题中的记号$\Gamma_{A,\ \kappa}$的情况是类似的。

7.4.4 例 Δ是 A 上的滤组成的集合，即任给$\Gamma\in\Delta$，Γ都是 A 上的滤，那么

(1) $\bigcap\Delta$是 A 上的滤。

(2) 如果Δ是单调的，则$\bigcup\Delta$是 A 上的滤。

(参考定理 7.1.11 和习题 7.1.5)。

和集域代数不一样，并不是 A 的每个子集族Φ都能生成一个滤。

设Γ是一个滤，因为$\varnothing\notin\Gamma$，所以Γ中任意两个集合的交都不是空集，由数学归纳法可证，Γ中任何有限个集合的交也不是空集，即Γ具有以下所定义的性质。

7.4.5 定义 有限交性质 Φ是 A 的子集族，如果Φ满足：

任给 $n\in\mathbf{N}$，任给 $X_1,\cdots,X_n\in\Phi$，都有 $X_1\cap\cdots\cap X_n\in\Phi$，

则称Φ有有限交性质。

每个滤都有有限交性质，所以能生成滤的子集族一定有有限交性质。

以下定理说明了任何一个有有限交性质的子集族都能生成一个滤。

7.4.6 定理 Φ是 A 的有有限交性质的子集族，令

$$\Gamma = \{X \mid \text{存在 } X_1,\cdots,X_n\in\Phi\text{，使得 } X_1\cap\cdots\cap X_n\subseteq X\subseteq A\}$$

则Γ是 A 上的滤。

证 证明Γ满足滤的三个条件。

(1) 任给 $X\in\Gamma$，存在 $X_1,\cdots,X_n\in\Phi$，使得

$$X_1\cap\cdots\cap X_n\subseteq X\text{。}$$

因为Φ有有限交性质，所以

$$X_1\cap\cdots\cap X_n\neq\varnothing,$$

因此

$$X\neq\varnothing\text{。}$$

这就证明了$\varnothing\notin\Gamma$。

(2) 如果 $X, Y\in\Gamma$，则存在 $n, m\in\mathbf{N}$，存在

$$X_1,\cdots,X_n, Y_1,\cdots,Y_m\in\Phi,$$

使得

$$X_1\cap\cdots\cap X_n\subseteq X\subseteq A \text{ 且 } Y_1\cap\cdots\cap Y_m\subseteq Y\subseteq A\text{。}$$

任给 $1\le i\le m$，令 $X_{n+i}=Y_i$，则存在 $X_1,\cdots,X_{n+m}\in\Phi$，使得

$$X_1\cap\cdots\cap X_{n+m}=(X_1\cap\cdots\cap X_n)\cap(Y_1\cap\cdots\cap Y_m)\subseteq X\cap Y\subseteq A,$$

所以 $X\cap Y\in\Gamma$。

(3) 如果 $X\in\Gamma$且 $X\subseteq Y\subseteq A$，则存在 $n\in\mathbf{N}$，存在 $X_1,\cdots,X_n\in\Phi$，使得

$$X_1\cap\cdots\cap X_n\subseteq X\subseteq A,$$

所以

$$X_1\cap\cdots\cap X_n\subseteq Y\subseteq A,$$

因此 $Y\in\Gamma$。■

定理 7.4.6 中构造的滤Γ称为由Φ生成的滤，记为(Φ)，可以证明(Φ)是包含Φ的最小的滤。

设 B 是 A 的非空子集，则$\{B\}$是 A 的有有限交性质的子集族，由$\{B\}$生成的滤$(\{B\})$简记为(B)，简称为由 B 生成的滤。实际上，(B)就是例 7.4.2 中的滤

$$\{X \mid B\subseteq X\subseteq A\}\text{。}$$

特别地有，

$$(\{a\}) = \{X \mid \{a\}\subseteq X\subseteq A\} = \{X \mid a\in X\subseteq A\}\text{。}$$

如果 A 上的滤Γ可由 A 的一个非空子集生成，即

存在 A 的非空子集 B，使得$\Gamma=(B)$，

则称Γ是 A 上的主滤。

7.4.7 例 Γ是有限的，取 B 是Γ中所有集合的交，则

$$B\in\Gamma \text{且} \Gamma = (B),$$

所以Γ是主滤。

特别地，如果 A 是有限的，则 A 上的任何滤Γ都是有限的，从而 A 上的任何滤Γ都是主滤。

7.4.8 例 A 是无限集，A 上的余有限滤$\Gamma_{A,\aleph_0}$不是主滤，可以用反证法证明这一点。

假设存在 A 的非空子集 B，使得

$$\Gamma_{A,\aleph_0} = (B)。$$

取 $b\in B$，令 $X = B\setminus\{b\}$，则

$$B \subsetneq X,$$

又因为 $B\in\Gamma_{A,\aleph_0}$，所以

$$B^*\text{有限},$$

因此

$$X^* = A\setminus(B\setminus\{b\}) = B^*\cup\{b\}\text{有限},$$

由$\Gamma_{A,\aleph_0}$的定义得

$$X\in\Gamma_{A,\aleph_0},$$

和 $B \subsetneq X$ 矛盾。

最重要的滤是超滤。

7.4.9 定义 超滤 Γ是 A 上的滤，如果Γ满足：

任给 $X\subseteq A$，都有 $X\in\Gamma$或 $X^*\in\Gamma$，

则称Γ是 A 上的超滤。

设Γ是 A 上的超滤，$X \subseteq A$。由滤的定义(1)和(2)可知，X 和 X^*中至多有一个属于Γ，由超滤的定义可知，X 和 X^*中至少有一个属于Γ。

所以如果Γ是 A 上的超滤，则任给 $X \subseteq A$，X 和 X^*中恰好有一个属于Γ。也就是说，A 上的超滤Γ将 A 的幂集 $\mathsf{P}(A)$分成两部分，一部分是Γ，另一部分由Γ中集合的余集所组成。

7.4.10 例 任给 $a\in A$，主滤

$$(\{a\}) = \{X \mid a\in X \subseteq A\}$$

是超滤。证明如下：

任给 $X\subseteq A$，如果 $a\in X$，则

$$X\in(\{a\}),$$

如果 $a\notin X$，则

$$a\in X^*,$$

所以 $X^*\in(\{a\})$。

7.4.11 例 如果Γ是 A 上的主超滤(既是主滤又是超滤)，则存在 $a\in A$，使得Γ = $(\{a\})$。证明如下：

由Γ是主滤可设Γ = (B)，其中 B 是 A 的非空子集。取 $a\in B$，令 $X = B\setminus\{a\}$，则

$$X\notin\Gamma,$$

由Γ是超滤得

$$X^*\in\Gamma,$$

由滤对交的封闭性得

$$\{a\} = B\cap X^*\in\Gamma,$$

所以

$$B \subseteq \{a\},$$

因此 $B = \{a\}$。

7.4.12 例 A 是无限集，Γ是 A 上的超滤且$\Gamma_{A,\aleph_0} \subseteq \Gamma$，则Γ不是主滤。否则，由例 7.4.11 得存在 $a\in A$，使得

$$\Gamma = (\{a\}),$$

所以

$$\{a\}\in\Gamma,$$

又由$\{a\}^*\in\Gamma_{A,\aleph_0}$和$\Gamma_{A,\aleph_0} \subseteq \Gamma$得

$$\{a\}^*\in\Gamma,$$

因此

$$\varnothing = \{a\}\cap\{a\}^*\in\Gamma,$$

矛盾。

主超滤($\{a\}$)没有多大意义，有意义的超滤是非主超滤(不是主滤的超滤)。因为有限集上的滤都是主滤，所以只有无限集上可能存在非主超滤。

在选择公理下，我们可以证明每个滤都可以扩充为一个超滤。任给无限集 A，将 A 上的余有限滤$\Gamma_{A,\aleph_0}$扩充为超滤Γ，则Γ就是非主超滤。所以，在选择公理下，我们可以证明每个无限集上都有非主超滤。

为证明每个滤都可以扩充为一个超滤，引进极大滤的概念。

7.4.13 定义 极大滤 Γ是 A 上的滤，满足：

任给 A 上的滤Σ，如果$\Gamma \subseteq \Sigma$，则$\Gamma = \Sigma$，

就称Γ是 A 上的极大滤。

7.4.14 引理 Γ是 A 上的滤，任给 $X \subseteq A$，$\Gamma \cup \{X\}$有有限交性质或$\Gamma \cup \{X^*\}$有有限交性质。

证 如果$\Gamma \cup \{X\}$没有有限交性质，则存在 $X_1,\cdots, X_n \in \Gamma$，使得

$$(\bigcap_{1\le i\le n} X_i)\cap X = \varnothing,$$

令 $Y = \bigcap_{1\le i\le n} X_i$，则由$\Gamma$是滤得

$$Y \in \Gamma,$$

所以存在 $Y \in \Gamma$，使得 $Y \cap X = \varnothing$。

类似地可证，如果$\Gamma \cup \{X^*\}$没有有限交性质，则存在 $Z \in \Gamma$，使得 $Z \cap X^* = \varnothing$。

现在用反证法证明定理。

假设$\Gamma \cup \{X\}$和$\Gamma \cup \{X^*\}$都没有有限交性质，则存在 $Y, Z \in \Gamma$，使得

$$Y \cap X = \varnothing \text{且 } Z \cap X^* = \varnothing,$$

所以

$$Y\cap Z\cap X = \varnothing \text{且 } Y\cap Z\cap X^* = \varnothing,$$

因此

$$(Y\cap Z\cap X)\cup(Y\cap Z\cap X^*) = \varnothing,$$

化简得

$$Y \cap Z = \varnothing,$$

与 $Y\cap Z \in \Gamma$矛盾。■

7.4.15 引理 Γ是 A 上的滤，如果Γ是 A 上的极大滤，则Γ是 A 上的超滤。

证 证明如果Γ不是 A 上的超滤，则Γ不是 A 上的极大滤。

设Γ不是 A 上的超滤，则存在 $X \subseteq A$，使得

$$X \notin \Gamma \text{且 } X^* \notin \Gamma,$$

由定理 7.4.14 得

$$\Gamma \cup \{X\}\text{有有限交性质或}\Gamma \cup \{X^*\}\text{有有限交性质。}$$

不妨设$\Gamma \cup \{X\}$有有限交性质，由引理 7.4.14，$\Gamma \cup \{X\}$可生成一个滤

$$\Sigma = (\Gamma \cup \{X\}),$$

显然

$$\Gamma \subseteq \Sigma \text{且} \Gamma \ne \Sigma,$$

所以Γ不是极大滤。■

现在证明每个滤都可以扩充为超滤。

7.4.16 定理 超滤存在定理 任给 A 上的滤Γ，存在 A 上的超滤Σ，使得$\Gamma \subseteq \Sigma$。

证 令$\Delta = \{\Phi \mid \Phi\text{是 } A \text{ 上的滤且}\Gamma \subseteq \Phi\}$，则$\Delta$在$\subseteq$下是一个非空偏序集。

任给Δ的线性链Δ_1，都有Δ_1是单调的，由例 7.4.4 得

$$\bigcup \Delta_1 \text{是 } A \text{ 上的滤且}\Gamma \subseteq \bigcup \Delta_1,$$

所以

$$\bigcup \Delta_1 \in \Delta,$$

因此$\bigcup \Delta_1$是Δ_1的上界。

这说明了任给Δ的线性链Δ_1，Δ_1都有上界，由 Zorn 引理得Δ有极大元Σ，Σ就是极大滤，由引理 7.4.15，Σ就是超滤。■

习题 7.4

7.4.1　Δ是 A 上的滤组成的集合，即任给$\Gamma\in\Delta$，Γ都是 A 上的滤，那么

(1) $\bigcap\Delta$是 A 上的滤。

(2) 如果Δ是单调的，则$\bigcup\Delta$是 A 上的滤。

7.4.2　Φ是 A 的有有限交性质的子集族，(Φ)是由Φ生成的滤，令

$$\Delta = \{\Gamma \mid \Gamma\text{是 }A\text{ 上的滤且}\Phi \subseteq \Gamma\}。$$

证明：$\bigcap\Delta = (\Phi)$。

7.4.3　Γ是 A 上的超滤。证明：如果存在 A 的有限子集 B，使得 $B\in\Gamma$，则Γ是主滤。

7.4.4　Γ是 A 上的滤，证明以下两条件等价：

(1) Γ是 A 上的超滤。

(2) 任给 $X, Y\in\Gamma$，$X\cup Y\in\Gamma$当且仅当 $X\in\Gamma$或 $Y\in\Gamma$。

7.4.5　Γ是 A 上的滤，证明：如果Γ是 A 上的超滤，则Γ是 A 上的极大滤。

7.4.6　κ是无限基数，$|A|\geq\kappa$，令

$$\Gamma_{A,\kappa} = \{X \mid X\subseteq A\text{ 且}|X^*|<\kappa\}。$$

证明：

(1) $\Gamma_{A,\kappa}$是 A 上的滤。

(2) 任给 A 上的滤Γ，如果$\Gamma_{A,\kappa}\subseteq\Gamma$，则任给 $X\in\Sigma$，都有$|X|\geq\kappa$。

(3) 任给 A 上的超滤Σ，如果$\Gamma_{A,\kappa}\subseteq\Gamma$，则Γ不是主滤。

7.4.7　A 是非空集合，$\{\varnothing, A\}$是 A 的极小代数。证明以下两条件等价：

(1) Γ是 A 上的超滤。

(2) 存在 $\mathrm{P}(A)$到$\{\varnothing, A\}$同态映射 h，使得$\Gamma = \{X \mid h(X) = A\}$。

7.5　超积和超幂

用超滤可以在卡氏积上定义一个重要的等价关系，从而得到一个重要的商集。

7.5.1 定理　Γ是 I 上的超滤，在卡氏积$\prod_{i\in I}A_i$上定义二元关系R_Γ如下：

$$\langle f, g\rangle\in R_\Gamma\text{当且仅当}\{i \mid f(i) = g(i)\}，$$

则 R_Γ是$\prod_{i\in I}A_i$上的等价关系。

证　证明 R_Γ具有自返性、对称性和传递性。

自返性。任给 $f\in\prod_{i\in I}A_i$，都有

$$\{i \mid f(i) = f(i)\} = I\in\Gamma，$$

因此$\langle f, f\rangle\in R_\Gamma$。

对称性。任给 $f, g\in\prod_{i\in I}A_i$，如果$\langle f, g\rangle\in R_\Gamma$，则

$$\{i \mid f(i) = g(i)\}\in\Gamma，$$

所以

$$\{i \mid g(i) = f(i)\}\in\Gamma，$$

因此$\langle g, f\rangle\in R_\Gamma$。

传递性。任给 $f, g, h\in\prod_{i\in I}A_i$，如果$\langle f, g\rangle\in R_\Gamma$且$\langle g, h\rangle\in R_\Gamma$，则

$$\{i \mid f(i) = g(i)\}\in\Gamma\text{且}\{i \mid g(i) = h(i)\}\in\Gamma，$$

又

$$\{i \mid f(i) = g(i)\}\cap\{i \mid g(i) = h(i)\} \subseteq \{i \mid f(i) = h(i)\}，$$

所以

$$\{i \mid f(i) = h(i)\}\in\Gamma，$$

因此$\langle f, h\rangle\in R_\Gamma$。■

7.5.2 定义　超积和超幂　Γ是 I 上超滤，在卡氏积$\prod_{i\in I}A_i$上取$\sim = R(\Gamma)$。称商集

$$\prod_{i\in I}A_i/\!\sim\; = \{\tilde{f} \mid f\in\prod_{i\in I}A\}$$

为集合族$\{A_i \mid i\in I\}$的超积。如果任给 $i\in I$，都有 $A_i = A$，则称

$$\prod_{i\in I} A_i/\sim\ = A^I/\sim\ = \{\,\tilde{f}\ \mid f：I\to A\,\}$$

为 A 的超幂。

$\{A_i \mid i\in I\}$是集合族，任给 $i\in I$，给定 A_i 上的 n 元关系 S_i，我们讨论如何构造超积$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上的 n 元关系 S'，类似地，任给 $i\in I$，给定 A_i 上的 n 元函数 F_i，我们讨论如何构造超积$\prod_{i\in I}A_i\ /\sim$上的 n 元函数 F'。

要使用某种性质在商集上定义关系和函数，必须保证这种性质对于等价关系是不变。为此我们需要以下结果。

7.5.3 定理 $\{A_i \mid i\in I\}$是集合族，任给 $i\in I$，S_i 是 A_i 上的 n 元关系，F_i 是 A_i 上的 n 元函数。Γ是 I 上超滤，在卡氏积$\prod_{i\in I}A_i$上取二元关系$\sim\ = R_\Gamma$，就有

(1) 如果 $f_1\sim g_1,\cdots, f_n\sim g_n$，则$\{i \mid <f_1(i),\cdots, f_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma$当且仅当$\{i \mid <g_1(i),\cdots, g_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma$。

(2) 如果 $f_1\sim g_1,\cdots, f_n\sim g_n$，则 $f\sim g$，其中 $f, g\in\prod_{i\in I}A_i$，满足：任给 $i\in I$，都有 $f(i) = F_i(f_1(i),\cdots, f_n(i))$和 $g(i) = F_i(g_1(i),\cdots, g_n(i))$。

证 令

$$A = \{i \mid f_1(i) = g_1(i),\cdots, f_n(i) = g_n(i)\},$$

任给 $1\le m\le n$，令

$$A_m = \{i \mid f_m(i) = g_m(i)\}。$$

如果 $f_1\sim g_1,\cdots,\ f_n\sim g_n$，则

$$A_1\in\Gamma,\cdots, A_n\in\Gamma,$$

因为 $A_1\cap\cdots\cap A_n \subseteq A$，所以 $A\in\Gamma$。

(1) 如果$\{i \mid <f_1(i),\cdots, f_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma$，则由

$$A\cap\{i \mid <f_1(i),\cdots, f_n(i)>\in S_i\} \subseteq \{i \mid <g_1(i),\cdots, g_n(i)>\in S_i\}$$

得

$$\{i \mid <g_1(i),\cdots, g_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma。$$

类似地，如果$<g_1(i),\cdots, g_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma$，则

$$\{i \mid \{i \mid <f_1(i),\cdots, f_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma。$$

因此

$$\{i \mid <f_1(i),\cdots, f_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma$$

当且仅当

$$\{i \mid <g_1(i),\cdots, g_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma。$$

(2) 因为

$$A \subseteq \{i \mid F_i(f_1(i),\cdots, f_n(i))=F_i(g_1(i),\cdots, g_n(i))\} = \{i \mid f(i)=g(i)\},$$

所以

$$\{i \mid f(i) =g(i)\}\in\Gamma,$$

因此 $f\sim g$。■

$\{A_i \mid i\in I\}$是集合族，Γ是 I 上超滤。任给 $i\in I$，S_i 是 A_i 上的 n 元关系，F_i 是 A_i 上的 n 元函数，由定理 7.5.3，我们可以构造超积$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上的 n 元关系：

$$S' = \{<\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n> \mid \{i \mid <f_1(i),\cdots, f_n(i)>\in S_i\}\in\Gamma\}$$

和超积$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上的 n 元函数：

$$F'：(\prod_{i\in I}A_i/\sim)^n\to\prod_{i\in I}A_i/\sim \qquad F'(\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n) = \tilde{f}$$

f 满足：任给 $i\in I$，都有 $f(i) = F_i(f_1(i),\cdots, f_n(i))$。

A 是任何集合，S 是 A 上 n 元关系，F 是 A 上 n 元集合。任给 $i\in I$，令 $A_i = A$，$S_i = S$，$F_i = F$，则以上方法就从 S 和 F 构造了超幂 $A^I/\sim$上的 n 元关系 S'和 n 元函数 F'，它们满足：

$$<\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n>\in S' \text{当且仅当} \{i \mid <f_1(i),\cdots, f_n(i)>\in S\}\in\Gamma$$

和

$$F'：(A^I/\sim)^n\to A^I/\sim \qquad F'(\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n) = \tilde{f}$$

f 满足：任给 $i\in I$，都有 $f(i) = F(f_1(i),\cdots, f_n(i))$。

以下简单地讨论，S'与 S 的关系和 F'与 F 的关系。

7.5.4 引理 A 是集合，Γ是 I 上超滤，$a_1,\cdots,a_n\in A$，$\mathsf{a}_1,\cdots,\ \mathsf{a}_n$是 I 到 A 的分别以 $a_1,\cdots,a_n$ 为值的常映射，S 是 A 上的 n 元关系，则$<a_1,\cdots,a_n>\in S$ 当且仅当$\{i \mid <\mathsf{a}_1(i),\cdots, \mathsf{a}_n(i)>\in S\}\in\Gamma$。

证 因为任给 $i\in I$，都有

$$\mathsf{a}_1(i) = a_1,\cdots, \mathsf{a}_n(i) = a_n,$$

所以当$<a_1,\cdots,a_n>\in S$时，有

$$\{\mathrm{i} \mid <a_1(\mathrm{i}),\cdots, a_n(\mathrm{i})>\in S\} = \mathrm{I}\in\Gamma,$$

当$<a_1,\cdots,a_n>\notin S$时，有

$$\{\mathrm{i} \mid <a_1(\mathrm{i}),\cdots, a_n(\mathrm{i})>\in S\} = \varnothing\notin\Gamma,$$

因此

$$<a_1,\cdots,a_n>\in S \text{ 当且仅当} \{\mathrm{i} \mid <a_1(\mathrm{i}),\cdots, a_n(\mathrm{i})>\in S\}\in\Gamma。■$$

7.5.5 定理 A是集合，Γ是I上超滤，在A^{I}上取等价关系$\sim = R_\Gamma$。S是A上的n元关系，F是A上的n元函数，构造超幂$A^{\mathrm{I}}/\sim$上的n元关系S'和n元函数F'，它们满足：

$$<\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n>\in S' \text{ 当且仅当} \{\mathrm{i} \mid <f_1(\mathrm{i}),\cdots,f_n(\mathrm{i})>\in S\}\in\Gamma$$

和

$$F'(\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n) = \tilde{f}\text{，任给 i}\in\mathrm{I}\text{，都有 } f(\mathrm{i}) = F(f_1(\mathrm{i}),\cdots,f_n(\mathrm{i}))。$$

任给$a\in A$，I到A的以a为值的常映射$a\in A^{\mathrm{I}}$，所以$\tilde{a}\in A^{\mathrm{I}}/\sim$，构造$A$到$A^{\mathrm{I}}/\sim$的映射：$h：A\to A^{\mathrm{I}}$　$h(a) = \tilde{a}$，则

(1) h是单射。

(2) 任给$a_1,\cdots,a_n\in A$，都有

$$<a_1,\cdots,a_n>\in S \text{ 当且仅当} <h(a_1),\cdots, h(a_n)>\in S'。$$

(3) 任给$a_1,\cdots,a_n\in A$，都有$F'(h(a_1),\cdots, h(a_n)) = h(F(a_1,\cdots, a_n))$。

(4) 如果Γ是主超滤，则h是满射。

证 (1) 任给$a, b\in A$，如果$a\neq b$，则

$$\{\mathrm{i} \mid a(\mathrm{i}) = b(\mathrm{i})\} = \varnothing\notin\Gamma,$$

所以$\tilde{a}\neq\tilde{b}$，即

$$h(a)\neq h(b)。$$

因此h是单射。

(2) 任给$a_1,\cdots,a_n\in A$，由引理7.5.4得：

$$\begin{aligned}<a_1,\cdots,a_n>\in S \text{ 当且仅当 } & \{\mathrm{i} \mid <a_1(\mathrm{i}),\cdots, a_n(\mathrm{i})>\in S\}\in\Gamma\\ \text{当且仅当 } & <\tilde{a}_1,\cdots, \tilde{a}_n>\in S'\\ \text{当且仅当 } & <h(a_1),\cdots, h(a_n)>\in S'。\end{aligned}$$

(3) 任给$a_1,\cdots,a_n\in A$，令$b = F(a_1,\cdots,a_n)$，$F'(\tilde{a}_1,\cdots, \tilde{a}_n) = \tilde{f}$，

则任给$\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有

$$f(\mathrm{i}) = F(a_1(\mathrm{i}),\cdots, a_n(\mathrm{i})) = F(a_1,\cdots,a_n) = b,$$

所以f就是I到A的常映射b，因此

$$\begin{aligned}F'(h(a_1),\cdots, h(a_n)) &= F'(\tilde{a}_1,\cdots, \tilde{a}_n)\\ &= \tilde{f} = \tilde{b} = h(b)\\ &= h(F(a_1,\cdots, a_n))。\end{aligned}$$

(4) 只需证任给$f\in A^{\mathrm{I}}$，存在$a\in A$，使得$f\sim a$就行了。

因为Γ是主超滤，所以存在$\mathrm{i}_0\in\mathrm{I}$，使得$\Gamma = \Gamma(\{\mathrm{i}_0\})$(见例7.2.11)，因此，$X\in\Gamma$当且仅当$\mathrm{i}_0\in X$。

令$a = f(\mathrm{i}_0)$，则$a\in A$，又任给$\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，都有

$$a(\mathrm{i}) = f(\mathrm{i}_0),$$

特别地$a(\mathrm{i}_0) = f(\mathrm{i}_0)$，所以

$$\mathrm{i}_0\in\{\mathrm{i} \mid a(\mathrm{i}) = f(\mathrm{i})\},$$

因此

$$\{\mathrm{i} \mid a(\mathrm{i}) = f(\mathrm{i})\}\in\Gamma,$$

由$\sim$的定义得$f\sim a$。■

因为h是单射，所以任给$a\in A$，可以将a和$h(a)$等同，从而A就和$h[A]$等同，也就是将A看作$A^{\mathrm{I}}/\sim$的一个子集。在这种看法下，定理7.5.5(2)就是：

任给$a_1,\cdots,a_n\in A$，都有

$$<a_1,\cdots,a_n>\in S \text{ 当且仅当 } <a_1,\cdots, a_n>\in S'。$$

定理7.5.5(3)就是：

任给$a_1,\cdots,a_n\in A$，都有$F'(a_1,\cdots, a_n) = F(a_1,\cdots, a_n)$。

这恰好是说S'是S的扩充，F'是F的扩充。

简单地说，我们可以将集合A扩充成超幂$A^{\mathrm{I}}/\sim$，同时将A上n元关系S扩充成$A^{\mathrm{I}}/\sim$上n元关系S'，将A上n元函数F扩充成$A^{\mathrm{I}}/\sim$上n元函数F'。这种扩充会保持S和F的许多性质不变，从而在逻辑和数学中有很大的应用。

如取$\mathrm{I} = \mathbf{N}$，取I上由余有限滤$\Gamma_{\mathrm{I},\aleph_0}$扩充成的非主超滤$\Gamma$(见例

7.2.8 和习题 7.2.6)，则自然数 **N** 的扩充 $\mathbf{N}^{\mathrm{I}}/\sim$称为非标准自然数，实数 **R** 的扩充 $\mathbf{R}^{\mathrm{I}}/\sim$称为非标准实数。

更一般地，超积$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上的 n 元关系 S'保持 $S_i(i\in I)$的许多公共性质不变，超积$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上的 n 元函数 F'保持 $F_i(i\in I)$的许多公共性质不变。

另外，定理 7.5.5(4)告诉我们，如果Γ是主超滤，则 $A^{\mathrm{I}}/\sim$就是 A，S'就是 S，F'就是 F。所以用主超滤来构造超幂是没有意义的。由选择公理，每个无限集上都有非主超滤，而且在一定的条件下，由非主超滤构造的超幂 $A^{\mathrm{I}}/\sim$一定是的 A 真扩充。

习题 7.5

7.5.1　Γ是 A 上的超滤，在 $A^{\mathrm{I}}/\sim$上取等价关系$\sim = R_\Gamma$，证明：

(1) 任给 $f\in A^{\mathrm{I}}$，如果存在 $a\in A$，使得 $f\sim a$，则存在 $i_0\in I$，使得 $a = f(i_0)$。

(2) 任给 $f\in A^{\mathrm{I}}$，如果 f 是单射且存在 $a\in A$，使得 $f\sim a$，则存在 $i_0\in I$，使得$\{i_0\}\in\Gamma$。

7.5.2　Γ是 A 上的超滤，在 $A^{\mathrm{I}}/\sim$上取等价关系$\sim = R_\Gamma$，取 A 到 $A^{\mathrm{I}}/\sim$的映射：

$$h：A\to A^{\mathrm{I}}\quad h(a) = \tilde{a}\ ，$$

其中 a 是 I 到 A 的以 a 为值的常映射。

证明：如果$|I|\le|A|$且 h 是满射，则Γ是主滤。

7.5.3　$\{A_i \mid i\in I\}$是集合族，Γ是 I 上超滤，在$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上取等价关系$\sim = R(\Gamma)$。任给 $i\in I$，$\le_i$是 A_i 上的偏序关系，构造$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上的二元关系如下：

$$\tilde{f}\le'\tilde{g}\ \text{当且仅当}\ \{i \mid f(i)\le_i g(i)\}\in\Gamma$$

证明：

(1) $\le'$是$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上的偏序关系。

(2) 如果任给 $i\in I$，$\le_i$是全序，则$\le'$也是$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上的全序。

7.5.4　$\{A_i \mid i\in I\}$是集合族，Γ是 I 上超滤，在$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上取等价关系$\sim = R_\Gamma$。任给 $i\in I$，F_i 是 A_i 上的 n 元函数，构造$\prod_{i\in I}A_i/\sim$上的 n 元函数 F'如下：

$$F'：(\prod_{i\in I}A_i/\sim)^n\to\prod_{i\in I}A_i/\sim\quad F'(\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_n) = \tilde{f}$$

f 满足：任给 $i\in I$，都有 $f(i) = F_i(f_1(i),\cdots,f_n(i))$。

证明：

(1) 如果任给 $i\in I$，F_i 是单射，则 F'是单射。

(2) 如果任给 $i\in I$，F_i 是满射，则 F'是满射。

7.5.5　非标准自然数　$I = \mathbf{N}$，Γ是 I 上由余有限滤$\Gamma_{I,\aleph_0}$扩充成的非主超滤，在 $\mathbf{N}^{\mathrm{I}}/\sim$上取等价关系$\sim = R_\Gamma$。≤是 **N** 上的小于等于关系，构造 $\mathbf{N}^{\mathrm{I}}/\sim$上的二元关系$\le'$如下：

$$\tilde{f}\le'\tilde{g}\ \text{当且仅当}\ \{i \mid f(i)\le g(i)\}\in\Gamma$$

任给 $n\in\mathbf{N}$，令

$$f_n：I\to A\quad f_n(i) = \begin{cases}0 & \text{如果 } i<n\\ i-n & \text{如果 } i\ge n，\end{cases}$$

证明：

(1) 如果 $n\le m$，则 $\tilde{f}_n\le'\tilde{f}_m$。

(2) 如果 $n\ne m$，则 $\tilde{f}_n\ne\tilde{f}_m$。

(3) 任给 $n\in\mathbf{N}$，都有 $\tilde{n}\le\tilde{f}_0$ 且 $\tilde{n}\ne\tilde{f}_0$，其中 n 是 I 到 **N** 的以 n 为值的常映射。

(4) $\le'$不是 $\mathbf{N}^{\mathrm{I}}/\sim$上的良序关系。

第八章　映射和数的集合构造

8.1　有序对、关系和映射

映射 f 的图象 G(f)是二元关系，由习题 3.1.5 可知：G(f)和 f 有密切的联系。这就启示我们可以用 G(f)来定义 f，即用二元关系来定义映射。二元关系是有序对的集合，但有序对还不是集合，所以还需先用集合来构造有序对。

有序对中两个元素的有序性是通过有序对相等的定义

$$<a_1, b_1> = <a_2, b_2>\text{当且仅当 } a_1 = a_2 \text{ 且 } b_1 = b_2$$

来刻画的。所以如果我们能够使用集合构造出满足以上相等定义的$<a, b>$来，就可以认为$<a, b>$是有序对。

8.1.1 定义　无序对　集合$\{a, b\}$称为由 a, b 组成的无序对。

因为$\{a\} = \{a, a\}$，所以单元集$\{a\}$也是无序对。无序对是一种非常简单的由元素构造集合的方法。

8.1.2 定义　有序对　集合$<a, b> = \{\{a\}, \{a, b\}\}$称为由 a, b 组成的有序对。

在有序对$<a, b>$中，a 称为第一元素，b 称为第二元素。a, b 组成的有序对是由$\{a\}, \{a, b\}$组成的无序对，而$\{a\}$和$\{a, b\}$本身也是无序对，所以有序对可以通过无序对这种集合的构造方法所得到。

8.1.3 定理　如果$<a_1, b_1> = <a_2, b_2>$，则 $a_1 = a_2$ 且 $b_1 = b_2$。

证　如果 $a_2 = b_2$，则

$$\{\{a_1\}, \{a_1, b_1\}\}$$
$$= <a_2, a_2> = <a_1, b_1> = <a_2, b_2>$$

$$= \{\{a_2\}, \{a_2, a_2\}\} = \{\{a_2\}\},$$

所以

$$\{a_1, b_1\} = \{a_2\},$$

因此 $a_1 = a_2$ 且 $b_1 = a_2 = b_2$。

如果 $a_2 \neq b_2$，则$\{a_1\} \neq \{a_2, b_2\}$，由$<a_1, b_1> = <a_2, b_2>$得

$$\{\{a_1\}, \{a_1, b_1\}\} = \{\{a_2\}, \{a_2, b_2\}\}$$

所以

$$\{a_1\} = \{a_2\}\text{且}\{a_1, b_1\} = \{a_2, b_2\},$$

由$\{a_1\} = \{a_2\}$得

$$a_1 = a_2,$$

由 $a_1 = a_2$ 和$\{a_1, b_1\} = \{a_2, b_2\}$得 $b_1 = b_2$。■

由定理 8.1.3，现在定义的有序对符合我们对有序对的直观要求。

有了有序对，就可以用第一章同样的方法定义两个集合 A 和 B 的卡氏积 $A\times B = \{<x, y> \mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}$。

对于现在定义的有序对，我们来看卡氏积 $A\times B$ 与集合 A 和 B 的关系。

8.1.4 定理　$A\times B \subseteq \mathrm{P}(\mathrm{P}(A\cup B))$。

证　任给$<x, y>\in A\times B$，都有 $x\in A$ 且 $y\in B$，所以

$$x, y\in A\cup B,$$

由 $x\in A\cup B$ 得

$$\{x\} \subseteq A\cup B,$$

由 $x, y\in A\cup B$ 得

$$\{x, y\} \subseteq A\cup B,$$

所以

$$\{x\}, \{x, y\} \subseteq A\cup B。$$

由$\{x\}, \{x, y\} \subseteq A\cup B$ 得

$$\{x\}, \{x, y\}\in \mathrm{P}(A\cup B),$$

由$\{x\}, \{x, y\}\in \mathrm{P}(A\cup B)$得

$\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathsf{P}(\mathsf{P}(A\cup B))$，

即$\langle x, y\rangle \in \mathsf{P}(\mathsf{P}(A\cup B))$。

因此 $A\times B \subseteq \mathsf{P}(\mathsf{P}(A\cup B))$。■

因为 $A\times B \subseteq \mathsf{P}(\mathsf{P}(A\cup B))$，所以集合 A 和 B 的卡氏积 $A\times B$ 可以由集合 A 和 B 通过并集、幂集和子集三种构造方法所得到。

有了有序对，任给 n≥1，可以用数学归纳法定义 n 元有序组 $\langle a_1, \cdots, a_n\rangle$如下：

(1) $\langle a_1\rangle = a_1$；

(2) $\langle a_1, \cdots, a_{k+1}\rangle = \langle\langle a_1, \cdots, a_k\rangle, a_{k+1}\rangle$

n 元有序组是通过逐次构造有序对得到的，所以对于 n≥2，每个 n 元有序组都是有序对，是一个 n−1 元有序组和另一个元素的有序对。

有了 n 元有序组，就可以用第一章的同样方法定义 n 个集合的卡氏积。由 n 元有序组的归纳定义可知，

$$A_0\times\cdots\times A_{k+1} = (A_0\times\cdots\times A_k)\times A_{k+1}。$$

这样，n 个集合的卡氏积就是通过逐次构造两个集合的卡氏积得到的，所以对于 n≥2，每个 n 个集合的卡氏积都是两个集合的卡氏积，是一个 n−1 个集合的卡氏积和另一个集合的卡氏积。

由于以上原因，只需要定义有序对的集合——二元关系，而将 n 元有序组的集合—— n 元关系作为二元关系的特例。既然只定义二元关系，就将二元关系简称为关系。

8.1.5 定义 关系 有序对的集合称为关系。

既然现在定义的关系只是二元关系，所以可以用第三章的同样方法定义关系的逆和关系的复合。关系 R 的逆关系是

$$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle\in R\}，$$

关系 R 和 Q 的复合是

$$Q\circ R = \{\langle x, y\rangle \mid \text{存在 } z，\text{使得}\langle x, z\rangle\in R \text{ 且}\langle z, y\rangle\in Q\}$$

同样有$(R^{-1})^{-1} = R$ 和 $S\circ(Q\circ R) = (S\circ Q)\circ R$。

为了用关系定义映射，引进两个前面没有定义的概念。

8.1.6 定义 定义域和值域 R 是关系，集合

$$\{x \mid \text{存在 } y，\text{使得}\langle x, y\rangle\in R\}$$

称为 R 的定义域，记为 $\mathrm{dom}(R)$。集合

$$\{y \mid \text{存在 } x，\text{使得}\langle x, y\rangle\in R\}$$

称为 R 的值域，记为 $\mathrm{ran}(R)$。

显然，$R \subseteq \mathrm{dom}(R)\times\mathrm{ran}(R)$。

因为用关系定义映射，所以关系的限制和映射的限制最好是一致的，因此现在定义的关系的限制和第三章中定义的关系的限制不一样。

8.1.7 定义 关系的限制 R 是关系，B 是集合。集合

$$\{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle\in R \text{ 且 } x\in B\}$$

称为 R 在 B 上的限制，记为 $R\,|_B$。

现在定义的关系的限制适合所有关系，而第三章中定义的关系的限制只适合 A 上关系；现在定义的关系的限制中的 B 是任意的，而第三章中定义的关系的限制中的 B 必须是 A 的子集；现在定义的关系的限制仅对定义域进行限制，而第三章中定义的关系的限制对定义域和值域都进行限制。

关系的逆、关系的复合和关系的限制的定义域和值域有以下性质。

8.1.8 定理

(1) $\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{ran}(R)$，$\mathrm{ran}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R)$。

(2) $\mathrm{dom}(Q\circ R) \subseteq \mathrm{dom}(R)$，$\mathrm{ran}(Q\circ R) \subseteq \mathrm{ran}(Q)$。

(3) $\mathrm{dom}(R\,|_B) = \mathrm{dom}(R)\cap B$，$\mathrm{ran}(R\,|_B) \subseteq \mathrm{ran}(R)$。■

以下用关系来定义映射。

8.1.9 定义 映射 f 是关系，若 f 满足：

任给$\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\in f$，都有如果 $x = u$，则 $y = v$，

就称 f 是映射。

关系 f 是映射的条件可以简化为：

任给$\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle\in f$，都有 $y = z$。

这样，映射就是一种特殊的关系，映射的定义域、值域就是作为关系的定义域、值域。

现在定义的映射中的条件相当于第二章定义的映射中的“元素的象是惟一的”这个条件，第二章定义的映射中的另一个条件“定义域中的元素都有象”现在是不需要的，因为现在定义的映射不事先规定定义域，而将全体有象的元素作为定义域，这个条件自然满足。

f 是映射，任给 $x\in\mathrm{dom}(f)$，满足 $<x, y>\in f$ 的元素 y 是惟一的，按通常习惯将这惟一的 y 记为 $f(x)$。

这样，f 中的有序对都可以写成 $<x, f(x)>$ 形式，而 f 也可以表示为 $\{<x, f(x)> \mid x\in\mathrm{dom}(f)\}$。

对于现在定义的映射只能定义单射而不能定义满射和双射。

8.1.10 定义 单射 f 是映射，若 f 满足：

任给 $<x, z>, <y, z>\in R$，都有 $x = y$

就称 f 是单射。

单射的条件恰好和映射的条件是对称的。

8.1.11 定义 A 到 B 的映射 f 是映射，如果

$\mathrm{dom}(f) = A$ 且 $\mathrm{ran}(f) \subseteq B$，

则称 f 是 A 到 B 的映射，记为 $f: A\to B$。

对于 A 到 B 的映射，才能定义满射和双射。

8.1.12 定义 满射 f 是 A 到 B 的映射，如果 $\mathrm{ran}(f) = B$，则称 f 是 A 到 B 的满射。

8.1.13 定义 双射 f 是 A 到 B 的映射，如果 f 既是单射又是 A 到 B 的满射，则称 f 是 A 到 B 的双射。

按定义，任何映射 f 总是 $\mathrm{dom}(f)$ 到 $\mathrm{ran}(f)$ 的满射，所以任何单射 f 总是 $\mathrm{dom}(f)$ 到 $\mathrm{ran}(f)$ 的双射。

至此，我们完成了用集合定义映射的工作。

需要指出，用集合定义映射仅仅是技术性的，并不是说映射就是集合。实际上，映射和集合是同样基本的概念。

用集合定义映射在映射的讨论中可以带来一定的便利。我们选择以下一些问题。

空映射。第二章定义的映射概念中，不包括空映射，为了统一起见，我们规定了一个空映射，结果在定义映射的性质时，经常需要补充规定空映射的性质。这样，一来造成定义时的烦琐，二来也不清楚对空映射为何如此定义。

按现在定义的映射，空集不但是一个关系，而且也是一个映射，空集 $\varnothing$ 作为映射就是空映射。这样，空映射的性质直接从映射的定义得到，而不必要另外规定。如我们能够证明：

8.1.14 定理

(1) $\mathrm{dom}(\varnothing) = \mathrm{ran}(\varnothing) = \varnothing$。

(2) $\varnothing$ 是单射。

(3) $\varnothing$ 是 $\varnothing$ 到 $\varnothing$ 的满射，因此 $\varnothing$ 是 $\varnothing$ 到 $\varnothing$ 的双射。

(4) 如果 $B \neq \varnothing$，则 $\varnothing$ 不是 $\varnothing$ 到 B 的满射。■

映射的相等。对于第二章定义的映射，我们另外定义了映射的相等。当 $B \neq C$ 时，A 到 B 的映射和 A 到 C 的映射按映射的定义一定是不同的映射，但按映射相等的定义可以是相等的(见例 2.1.11)。“不同的映射可以相等”，虽然没有逻辑上的错误，但总是不自然的。

现在定义的映射是集合，映射的相等就是集合的相等，不需要另外定义。类似例 2.1.11 的情况按现在的定义应该是“同一个映射既作为 A 到 B 的映射又作为 A 到 C 的映射”，比“不同的映射可以相等”的说法自然的多。

映射的构造。在映射的讨论中，经常从已知的映射构造新的映射，这样的构造有时是需要条件的。

对于第二章定义的映射，需要在构造前先检查条件。这不是一种好方法，而且不同的构造可能需要不同的检查方法。

现在定义的映射是集合，可以用集合的构造方法构造新的集合，这样构造的集合一般是关系，我们可以根据映射定义的条件

来检查它是否是映射。

以下是一个类似于 2.1.14 的例子。

8.1.15 例 f 和 g 是两个映射，则

$$h = \{<<x, y>, <u, v>> \mid <x, u>\in f \text{ 且} <y, v>\in g\},$$

也是映射，且有 $\mathrm{dom}(h) = \mathrm{dom}(f)\times\mathrm{dom}(g)$，$\mathrm{ran}(h) = \mathrm{ran}(f)\times\mathrm{ran}(g)$。证明如下：

任给 $<<x, y>, <u, v>>, <<x, y>, <u', v'>>\in h$，都有

$$<x, u>\in f, <y, v>\in g, <x, u'>\in f, <y, v'>\in g$$

由 $<x, u>, <x, u'>\in f$ 和 f 是映射得

$$u = u'$$

由 $<y, v>, <y, v'>\in g$ 和 g 是映射得

$$v = v'$$

因此 $<u, v> = <u', v'>$。

任给 $<x, y>\in\mathrm{dom}(h)$，存在 $<u, v>$，使得 $<x, u>\in f$ 且 $<y, v>\in g$，由 $<x, u>\in f$ 得

$$x\in\mathrm{dom}(f),$$

由 $<y, v>\in g$ 得

$$y\in\mathrm{dom}(g),$$

因此 $<x, y>\in\mathrm{dom}(f)\times\mathrm{dom}(g)$。

任给 $<x, y>\in\mathrm{dom}(f)\times\mathrm{dom}(g)$，都有 $x\in\mathrm{dom}(f)$ 且 $y\in\mathrm{dom}(g)$，由 $x\in\mathrm{dom}(f)$ 得

存在 u，使得 $<x, u>\in f$，

由 $y\in\mathrm{dom}(g)$ 得

存在 v，使得 $<y, v>\in g$，

因此 $<x, y>\in\mathrm{dom}(h)$。

类似地可证 $\mathrm{ran}(h) = \mathrm{ran}(f)\times\mathrm{ran}(g)$。

映射的限制和复合。映射的限制和复合就是作为关系的限制和复合，可以证明它们还是映射。

8.1.16 定理 f, g 是映射，B 是集合，则：

(1) f 在 B 上的限制 $f|_B$ 还是映射。

(2) f 和 g 的复合 $g\circ f$ 还是映射。

证 (1) 任给 $<x, y>, <x, z>\in f|_B$，都有

$$<x, y>, <x, z>\in f,$$

由 f 是映射得

$$y = z,$$

因此 $f|_B$ 是映射。

(2) 任给 $<x, y>, <x, z>\in g\circ f$，存在 u, v，使得

$$<x, u>, <x, v>\in f \text{ 且} <u, y>, <v, z>\in g,$$

由 f 是映射得

$$u = v,$$

由 $<u, y>, <u, z>\in g$ 和 g 是映射得

$$y = z,$$

因此 $g\circ f$ 是映射。■

逆映射。f 是映射，则 f^{-1} 作为关系 f 的逆总是存在的，问题在于 f^{-1} 是否是映射。由映射和单射的定义容易证明：

8.1.17 定理 f 是映射，则 f^{-1} 是映射当且仅当 f 是单射。

证 设 f 是单射，证明 f^{-1} 是映射。任给 $<x, y>, <x, z>\in f^{-1}$，都有

$$<y, x>, <z, x>\in f,$$

由 f 是单射得

$$y = z,$$

因此 f^{-1} 是映射。

设 f^{-1} 是映射，证明 f 是单射。任给 $<x, z>, <y, z>\in f$，都有

$$<z, x>, <z, y>\in f^{-1},$$

由 f^{-1} 是映射得

$$x = y,$$

因此 f^{-1} 是映射。■

注意，当 f 是 A 到 B 的单射时，f^{-1} 不一定是 B 到 A 的映射。

实际上，f^{-1}是 ran(f)到 A 的映射。所以当 ran(f) = B，即 f 是满射时，f^{-1}就是 B 到 A 的映射。因此有：

8.1.18 定理 f 是 A 到 B 的映射，则 f^{-1}是 B 到 A 的映射当且仅当 f 是 A 到 B 的双射。■

当 f^{-1}是映射时，可以严格证明

$$y = f(x)\text{当且仅当 } x = f^{-1}(y)\text{。}$$

从这个结果可以得到逆映射的许多重要的性质(参见定理 2.2.13 和定理 2.3.6)。

并映射。 Γ是映射族，因为映射是集合，所以Γ也是集合族，可以构造Γ的并$\bigcup\Gamma$。又因为任给 $f\in\Gamma$，f 都是关系，所以$\bigcup\Gamma$也是关系。在什么条件下$\bigcup\Gamma$是一个映射呢？

8.1.19 定理 Γ是映射族。$\bigcup\Gamma$是映射当且仅当Γ满足：任给 $f, g\in\Gamma$，任给 $x\in\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)$，都有 $f(x) = g(x)$。

证 称"任给 $f, g\in\Gamma$，任给 $x\in\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)$，都有 $f(x) = g(x)$"为条件(1)。

设Γ满足条件(1)，证明$\bigcup\Gamma$是映射。

任给$<x, y>, <x, z>\in\bigcup\Gamma$，存在 $f, g\in\Gamma$，使得

$$<x, y>\in f\text{ 且}<x, z>\in g,$$

所以

$$x\in\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g),$$

由条件(1)得 $y = f(x) = g(x) = z$。

设$\bigcup\Gamma$是映射，证明Γ满足条件(1)。

任给 $f, g\in\Gamma$，任给 $x\in\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)$，都有

$$<x, f(x)>\in f\text{ 且}<x, g(x)>\in g,$$

所以

$$<x, f(x)>, <x, g(x)>\in\bigcup\Gamma,$$

由$\bigcup\Gamma$是映射得 $f(x) = g(x)$。■

第二章定义的映射不是集合，映射族的并和集合族的并是两种不同意义上的“并”。现在定义的映射是集合，映射族的并和集

合族的并就是一回事，我们只需要一种“并”的意义。

重新证明良序集基本定理。在第五章的良序集基本定理的证明中，最关键的一步也是最复杂的一步是：通过 A 的前段和 B 的前段之间的相似构造映射族Γ，证明Γ满足一定的性质来证明Γ的并映射 f_Γ存在。

现在可以很简单地构造一个有序对的集合，并证明它是一个映射。通过这个映射的性质来证明良序集基本定理和原先的证明是类似的。

8.1.20 引理 A, B 是两个良序集，令

$$f = \{<x, y> \mid x\in A, y\in B\text{ 且 } A(x)\cong B(y)\}\text{。}$$

则：

(1) f 是映射，从而 $A(x)\cong B(f(x))$。

(2) f 是单射，从而 f 是 dom(f)到 ran(f)的双射。

(3) f 是 dom(f)到 ran(f)的相似映射。

(4) dom(f)是 A 的前段且 ran(f)是 B 的前段。

(5) dom(f) = A 或 ran(f) = B。

证 (1) 任给$<x, y>, <x, z>\in f$，都有

$$A(x)\cong B(y)\text{和 } A(x)\cong B(z),$$

由相似的对称性和传递性得

$$B(y)\cong B(z),$$

由例 5.1.7 得 $y = z$。

(2) 任给$<x, z>, <y, z>\in f$，都有

$$A(x)\cong B(z)\text{和 } A(y)\cong B(z),$$

由相似的对称性和传递性得

$$A(x)\cong A(y),$$

由例 5.1.7 得 $x = y$。

(3) 任给 $x, y\in\mathrm{dom}(f)$，都有

$$x\le y\text{ 当且仅当 } A(x)\subseteq A(y)$$
$$\text{当且仅当 } B(f(x))\subseteq B(f(y))$$

当且仅当 $f(x)\leq f(y)$。

(4) 任给 $x\in\mathrm{dom}(f)$，都有 $A(x)\cong B(f(x))$，如果 $y<x$，则

$A(x)(y)$是 $A(x)$的真前段，

所以

存在 $B(f(x))$的真前段 $B(f(x))(z)$，使得 $A(x)(y)\cong B(f(x))(z)$，

所以

$$A(y) = A(x)(y)\cong B(f(x))(z) = B(z),$$

由 f 的定义得

$$<y, z>\in f,$$

因此 $y\in\mathrm{dom}(f)$。

类似地可证 $\mathrm{ran}(f)$是 B 的前段。

(5) 反证法。如果 $\mathrm{dom}(f) \neq A$ 且 $\mathrm{ran}(f) \neq B$，则存在 $x\in A, y\in B$，使得

$$\mathrm{dom}(f) = A(x)，\mathrm{dom}(f) = B(y)\text{且 } A(x)\cong B(y)。$$

由 $\mathrm{dom}(f) = A(x)$得

$$x\notin\mathrm{dom}(f),$$

由 $A(x)\cong B(y)$得 $x\in\mathrm{dom}(f)$，矛盾。■

8.1.21 定理 良序集基本定理 任给两个良序集 A, B，都有 A 相似于 B 的前段或 B 相似于 A 的前段。

证 令 $f = \{<x, y> \mid x\in A, y\in B \text{ 且 } A(x)\cong B(y)\}$，则由引理 8.1.20 的(3), (4)和(5)得 A 相似于 B 的前段或 B 相似于 A 的前段。■

以下是一个过去没有讨论过的问题，它将用于下一节整数和有理数的构造中。

商集上的函数。$\sim$是 A 上等价关系，f 是 A 上 n 元函数，

$$\tilde{f} = \{<<\tilde{x}_1,\cdots, \tilde{x}_n>, \tilde{x}> \mid <<x_1,\cdots, x_n>, x>\in f\}$$

是关系。在什么条件下 $\tilde{f}$ 是一个映射呢？

8.1.22 定义 保持等价关系不变 $\sim$是 A 上等价关系，f 是 A 上 n 元函数，若 f 满足：

如果 $x_1\sim y_1,\cdots, x_n\sim y_n$，则 $f(x_1,\cdots, x_n)\sim f(y_1,\cdots, y_n)$

就称 f 保持等价关系$\sim$不变。

8.1.23 定理 $\sim$是 A 上等价关系，f 是 A 上 n 元函数，如果 f 保持等价关系$\sim$不变，则 $\tilde{f}$ 是 $A/\sim$上 n 元函数。

证 任给$<<\tilde{x}_1,\cdots, \tilde{x}_n>, \tilde{x}>, <<\tilde{y}_1,\cdots, \tilde{y}_n>, \tilde{y}>\in\tilde{f}$，如果 $<\tilde{x}_1,\cdots, \tilde{x}_n> = <\tilde{y}_1,\cdots, \tilde{y}_n>$，则 $\tilde{x}_1 = \tilde{y}_1,\cdots, \tilde{x}_n = \tilde{y}_n$，所以

$$x_1\sim y_1,\cdots, x_n\sim y_n,$$

由 f 保持等价关系$\sim$不变得

$$f(x_1,\cdots, x_n)\sim f(y_1,\cdots, y_n),$$

所以

$$x\sim y,$$

因此 $\tilde{x} = \tilde{y}$。■

习题 8.1

8.1.1 $n\geq 1$，证明：如果$<a_1, \cdots, a_n> = <b_1, \cdots, b_n>$，则任给 $1\leq i\leq n$，都有 $a_i = b_i$。

8.1.2 证明定理 8.1.8、8.1.14 和 8.1.18。

8.1.3 证明：

(1) 如果 f 是 A 到 B 的映射，则 $f\subseteq \mathrm{P}(\mathrm{P}(A\cup B))$

(2) $B^A\subseteq \mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathrm{P}(A\cup B)))$。

8.1.4 f 和 f^{-1} 都是映射，证明：$y = f(x)$当且仅当 $x = f^{-1}(y)$。

8.1.5 f 和 g 是映射，$h = \{<x, <y, z>> \mid <x, y>\in f \text{ 且} <x, z>\in g\}$。证明：

(1) h 是映射。

(2) $\mathrm{dom}(h) = \mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)$。

(3) 如果 $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$，则

$$\mathrm{dom}(\mathrm{ran}(h)) = \mathrm{ran}(f)，\mathrm{ran}(\mathrm{ran}(h)) = \mathrm{ran}(g)。$$

8.1.6 $\sim$是 A 上等价关系，f 是 A 上 n 元函数。证明：如果 $\tilde{f}$ 是 $A/\sim$上 n 元函数，则 f 保持$\sim$不变。

8.2　整数和有理数

可以用集合构造自然数，进而构造整数、有理数和实数。但用集合构造自然数需要更多的有关集合的知识，在本书中无法进行。本书讨论在自然数的基础上，如何构造整数、有理数和实数。

在本节中讨论整数和有理数的构造。

整数可以由自然数通过卡氏积和商集的方法构造得到。

8.2.1 定义　整数　$\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上的关系

$$\sim\ = \{\langle\langle n, m\rangle, \langle s, t\rangle\rangle \mid n+t = s+m\}$$

是等价关系(见习题 3.2.4)。$\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 对于~的商集 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}/\sim$ 称为整数集，记为 $\mathbf{Z}$。$\mathbf{Z}$ 中的元素称为整数。

记 $\langle n, m\rangle$ 的等价类为 $[n, m]$，则

$$[n, m] = [s, t]\ \text{当且仅当}\ \langle n, m\rangle\sim\langle s, t\rangle$$
$$\text{当且仅当}\ n+t = s+m。$$

用这种记法，$\mathbf{Z}$ 就是 $\{[n, m] \mid n, m\in\mathbf{N}\}$。

8.2.2 定理　$f：\mathbf{N}\to\mathbf{Z}$　$f(n) = [n, 0]$是单射。

证　任给 $n, m\in\mathbf{N}$，如果 $f(n) = f(m)$，则

$$[n, 0] = [m, 0],$$

所以

$$n+0 = m+0,$$

因此 $n = m$。■

因为 f 是单射，所以 $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{Z}$ 的子集 $f[\mathbf{N}] = \{[n, 0] \mid n\in\mathbf{N}\}$一一对应。可以将 $\mathbf{N}$ 和 $\{[n, 0] \mid n\in\mathbf{N}\}$等同。这样，$\mathbf{N}$ 就是 $\mathbf{Z}$ 的子集，$\langle n, 0\rangle$的等价类$[n, 0]$就是 n。

任给 $n\in\mathbf{N}$，记 $\langle 0, n\rangle$ 的等价类 $[0, n]$ 为 $-n$。

8.2.3 定理

(1) $0 = -0$。

(2) 任给 $n\in\mathbf{N}$，如果 $-n = -m$，则 $n = m$。

(3) $\mathbf{Z} = \mathbf{N}\cup\{-n \mid n\in\mathbf{N}\}$。

证　(1) 显然。

(2) 如果 $-n = -m$，则

$$[0, n] = [0, m],$$

所以

$$0+n = 0+m,$$

因此 $n = m$。

(3) 任给 $[n, m]\in\mathbf{Z}$，证明存在 $s\in\mathbf{N}$，使得 $a = s$ 或 $a = -s$。

如果 $n\geq m$，令 $s = n-m$，则

$$n+0 = s+m,$$

所以 $a = [n, m] = [s, 0] = s$；

如果 $n\leq m$，令 $n = m-n$，则

$$n+s = 0+m,$$

所以 $a = [n, m] = [0, s] = -s$。■

以下讨论 $\mathbf{Z}$ 上的关系和函数。

8.2.4 定理　取~是定义 8.2.1 中的等价关系，取 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上的二元函数：

$$f：(\mathbf{N}\times\mathbf{N})^2\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}\quad f(\langle n, m\rangle, \langle s, t\rangle) = \langle n+s, m+t\rangle$$

$$g：(\mathbf{N}\times\mathbf{N})^2\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}\quad g(\langle n, m\rangle, \langle s, t\rangle) = \langle n\cdot s+m\cdot t, n\cdot t+m\cdot s\rangle$$

和 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上的一元函数：

$$h：\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}\quad f(\langle n, m\rangle) = \langle m, n\rangle$$

则 f, g 和 h 都保持~不变。

证　如果 $\langle n, m\rangle\sim\langle n', m'\rangle$ 且 $\langle s, t\rangle\sim\langle s', t'\rangle$，则

$$n+m' = n'+m\ \text{且}\ s+t' = s'+t,$$

两式相加得

$$(n+s)+(m'+t') = (n'+s')+(m+t),$$

所以

$$\langle n+s, m+t\rangle\sim\langle n'+s', m'+t'\rangle,$$

即 $f(\langle n, m\rangle, \langle s, t\rangle)\sim f(\langle n', m'\rangle, \langle s', t'\rangle)$。

如果$<n, m>\sim<n', m'>$且$<s, t>\sim<s', t'>$，则

$$n+m' = n'+m \text{ 且 } s+t' = s'+t，$$

在 $n+m' = n'+m$ 两边分别乘上 s, t 得

$$n\cdot s+m'\cdot s = n'\cdot s+m\cdot s \text{ 和 } n'\cdot t+m\cdot t = n\cdot t+m'\cdot t，$$

在 $s+t' = s'+t$ 两边分别乘上 n', m'得

$$n'\cdot s+n'\cdot t' = n'\cdot s'+n'\cdot t \text{ 和 } m'\cdot s'+m'\cdot t = m'\cdot s+m'\cdot t'，$$

四个等式相加并消去相同的项得

$$(n\cdot s+m\cdot t)+(n'\cdot t'+m'\cdot s')= (n'\cdot s'+m'\cdot t')+(n\cdot t+m\cdot s)，$$

所以

$$<n\cdot s+m\cdot t, n\cdot t+m\cdot s>\sim<n'\cdot s'+m'\cdot t', n'\cdot t'+m'\cdot s'>，$$

即 $g(<n, m>, <s, t>)\sim g(<n', m'>, <s', t'>)$。

如果$<n, m>\sim<n', m'>$，则 $n+m' = n'+m$，所以

$$m+n' = m'+n，$$

因此

$$<m, n>\sim<m', n'>，$$

即 $h(<n, m>)\sim h(<n', m'>)$。

这证明了 f, g 和 h 都保持~不变。■

因为 f, g 和 h 都保持~不变，所以由定理 8.1.23 可得到 **Z** 上二元函数：

$$\tilde{f}:\mathbf{Z}^2\to\mathbf{Z} \quad \tilde{f}([n, m], [s, t]) = [n+s, m+t]$$

$$\tilde{g}:\mathbf{Z}^2\to\mathbf{Z} \quad \tilde{g}([n, m], [s, t]) = [n\cdot s+m\cdot t, n\cdot t+m\cdot s]$$

和 **Z** 上的一元函数：

$$\tilde{h}:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z} \quad \tilde{h}([n, m]) = [m, n]$$

$\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 就是 **Z** 上的加法和乘法，按习惯将 $\tilde{f}(a, b)$记为 $a+b$，将 $\tilde{g}(a, b)$记为 $a\cdot b$。

$\tilde{h}$ 称为 **Z** 上的负运算，将 $\tilde{h}(a)$简记为$-a$。由加法和负运算可以定义 **Z** 上的减法：$a-b = a+(-b)$。

整数的运算是自然数的运算的扩充，即有

任给 $n, m\in\mathbf{N}$，$n+m = k$ 当且仅当$[n, 0]+[m, 0] = [k, 0]$

和

任给 $n, m\in\mathbf{N}$，$n\cdot m = k$ 当且仅当$[n, 0]\cdot[m, 0] = [k, 0]$

从自然数加法和乘法的性质可得到 f, g 和 h 的性质，进一步可得到整数的加法、乘法和负运算的性质。

8.2.5 定理 整数运算的性质。

(1) 交换律 $a+b = b+a$，$a\cdot b = b\cdot a$。

(2) 结合律 $a+(b+c) = (a+b)+c$，$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$。

(3) 分配律 $a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$。

(4) $a+(-a) = 0$。

(5) $a+0 = a$，$a\cdot 1 = a$。

证 (1) 令 $a = [n, m]$，$b = [s, t]$，则

$$a+b = [n, m]+[s, t] = [n+s, m+t]$$
$$= [s+n, t+m] = b+a。$$

类似地可证 $a\cdot b = b\cdot a$。

(2) 令 $a = [n, m]$，$b = [s, t]$，$c = [k, l]$，则

$$a+(b+c) = [n, m]+([s, t]+[k, l])$$
$$= [n, m]+[s+k, t+l] = [n+(s+k), m+(t+l)]$$
$$= [(n+s)+k, (m+t)+l] = [n+s, m+t]+[k, l]$$
$$= ([n, m]+[s, t])+[k, l] = (a+b)+c$$

类似地可证 $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$。

(3) 令 $a = [n, m]$，$b = [s, t]$，$c = [k, l]$，则

$$a\cdot(b+c) = [n, m]\cdot([s, t]+[k, l])$$
$$= [n, m]\cdot[s+k, t+l]$$
$$= [n\cdot(s+k)+m\cdot(t+l), n\cdot(t+l)+m\cdot(s+k)]$$
$$= [(n\cdot s+n\cdot k)+(m\cdot t+m\cdot l), (n\cdot t+n\cdot l)+(m\cdot s+m\cdot k)]$$
$$= [n\cdot s+n\cdot k, n\cdot t+n\cdot l]+[m\cdot t+m\cdot l, m\cdot s+m\cdot k]$$
$$= [n, m]\cdot[s, t]+[n, m]\cdot[k, l] = a\cdot b+a\cdot c$$

(4) 令 $a = [n, m]$，则

$$a+(-a) = [n, m]+[m, n] = [0, 0] = 0$$

(5) 留给读者。■

由定理 8.2.5 可以得到整数运算的其它性质。

8.2.6 定理

(1) 如果 $a+b=0$，则 $a=-b$。

(2) $a\cdot(-1)=-a$。

(3) $a=-(-a)$。

(4) 符号法则 $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$，$a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$，

$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$。

证 (1) $a=a+0=a+(b+(-b))$

$=(a+b)+(-b)$

$=0+(-b)=-b$。

(2) $a\cdot(-1)+a=a\cdot(-1)+a\cdot 1$

$=a\cdot((-1)+1)$

$=a\cdot 0=0$，

由(1)得 $a\cdot(-1)=-a$。

(3) $a+(-a)=0$，由(1)得 $a=-(-a)$。

(4) $(-a)\cdot b+a\cdot b=((-a)+a)\cdot b$

$=0\cdot b=0$，

由(1)得$(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$。

类似地可证 $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$。

$(-a)\cdot(-b)=-(a\cdot(-b))=-(-(a\cdot b))=a\cdot b$。■

定义 **Z** 上二元关系 $\leq=\{<[n, m], [s, t]> \mid s+m\leq n+t\}$。

8.2.7 定理 $[n, m]\leq[s, t]$当且仅当 $s+m\leq n+t$。

证 如果 $s+m\leq n+t$，则由≤的定义得$[n, m]\leq[s, t]$。

如果$[n, m]\leq[s, t]$，则存在 n', m', s', t'，使得

$[n', m']=[n, m]$，$[s', t']=[s, t]$且 $s'+m'\leq n'+t'$，，

由$[n', m']=[n, m]$，$[s', t']=[s, t]$得

$n+m'=n'+m$，$s+t'=s'+t$

所以 $s+m\leq n+t$。■

8.2.8 定理 ≤是 **Z** 上全序关系。

证 证明≤有自返性、反对称性、传递性和可比较性。

自返性。任给$[n, m]\in\mathbf{Z}$，由 $n+m\leq n+m$ 得$[n, m]\leq[n, m]$。

反对称性。任给$[n, m], [s, t]\in\mathbf{Z}$，如果

$[n, m]\leq[s, t]$且$[s, t]\leq[n, m]$，

则

$s+m\leq n+t$ 且 $n+t\leq s+m$，

所以

$n+t=s+m$，

因此$[n, m]=[s, t]$。

传递性。任给$[n, m], [s, t], [k, l]\in\mathbf{Z}$，

如果

$[n, m]\leq[s, t]$且 $[s, t]\leq[k, l]$，

则

$s+m\leq n+t$ 且 $k+t\leq s+l$，

两式相加得

$s+m+k+t\leq n+t+s+l$，

所以

$k+m\leq n+l$，

因此$[n, m]\leq[k, l]$。

可比较性。任给$[n, m], [s, t]\in\mathbf{Z}$，都有

$s+m\leq n+t$ 或 $n+t\leq s+m$，

所以$[n, m]\leq[s, t]$或$[s, t]\leq[n, m]$。■

≤就是 **Z** 上的小于等于关系，并且是 **N** 上小于等于关系≤的扩充，即

任给 $n, m\in\mathbf{N}$，$n\leq m$ 当且仅当$[n, 0]\leq[m, 0]$

由≤可以定义正整数集 $\mathbf{Z}^+=\{n \mid n\in\mathbf{Z}$ 且 $n>0\}$和负整数集 $\mathbf{Z}^-=\{n \mid n\in\mathbf{Z}$ 且 $n<0\}$。

整数上的运算保持小于等于关系≤不变。

8.2.9 定理

(1) 如果 $b \le c$，则 $a+b \le a+c$。

(2) 如果 $b \le c$ 且 $a \ge 0$，则 $a \cdot b \le a \cdot c$。

(3) 如果 $a \le b$，则 $-b \le -a$。

证 (1) 令 $a = [n, m]$, $b = [s, t]$且 $c = [k, l]$，则

$$a+b = [n+s, m+t]，a+c = [n+k, m+l]。$$

如果 $b \le c$，则$[s, t] \le [k, l]$，所以 $k+t \le s+l$，两边加上 $n+m$ 得

$$(n+m)+(k+t) \le (n+m)+(s+l),$$

整理得

$$(n+k)+(m+t) \le (n+s)+(m+l),$$

所以

$$[n+s, m+t] \le [n+k, m+l],$$

即 $a+b \le a+c$。

(2) 令 $a = [n, m]$，$b = [s, t]$且 $c = [k, l]$，则

$$a \cdot b = [n \cdot k+m \cdot l, n \cdot l+m \cdot k],$$

$$a \cdot c = [n \cdot k+m \cdot l, n \cdot l+m \cdot k]。$$

如果 $b \le c$ 且 $a \ge 0$，则$[s, t] \le [k, l]$且$[n, m] \ge 0$，所以

$$k+t \le s+l \text{ 且 } n-m \ge 0,,$$

在 $k+t \le s+l$ 两边乘上 $n-m$ 得

$$(n-m) \cdot (k+t) \le (n-m) \cdot (s+l),$$

展开并整理得

$$(n \cdot k+m \cdot l)+(n \cdot t+m \cdot s) \le (n \cdot s+m \cdot t)+(n \cdot l+m \cdot k),$$

所以

$$[n \cdot k+m \cdot l, n \cdot l+m \cdot k] \le [n \cdot k+m \cdot l, n \cdot l+m \cdot k],$$

即 $a \cdot b \le a \cdot c$。

(3) 令 $a = [n, m]$，$b = [s, t]$，则$-a = [m, n]$，$-b = [t, s]$。

如果 $a \le b$，则$[n, m] \le [s, t]$，所以 $s+m \le n+t$，由自然数的交换律得

$$m+s \le t+n,$$

因此

$$[t, s] \le [m, n],$$

即$-b \le -a$。■

以下讨论有理数的构造。有理数可以由整数通过子集、卡氏积和商集的方法构造得到。

8.2.10 定义 有理数 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^+$上的关系

$$\sim = \{<<a, b>, <c, d>> \mid a \cdot d = c \cdot b\}$$

是等价关系(见例 3.2.4)。$\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^+$对于$\sim$的商集 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^+/\sim$称为有理数集，记为 **Q**。**Q** 中的元素称为有理数。

任给 $n \in \mathbf{N}$，记$<a, b>$的等价类为 $\frac{a}{b}$，则

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ 当且仅当} <a, b> \sim <c, d> \text{当且仅当 } a \cdot d = b \cdot c。$$

用这种记法，**Q** 就是$\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbf{Z} \text{ 且 } b \in \mathbf{Z}^+\}$。

8.2.11 定理 $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ $f(a) = \frac{a}{1}$ 是单射。

证 任给 $a, c \in \mathbf{Z}$，如果 $f(a) = f(c)$，则 $\frac{a}{1} = \frac{c}{1}$，所以 $a \cdot 1 = 1 \cdot c$，因此 $a = c$。■

因为 f 是单射，所以 **Z** 和 **Q** 的子集 $f[\mathbf{Z}] = \{\frac{a}{1} \mid a \in \mathbf{Z}\}$一一对应。可以将 **Z** 和$\{\frac{a}{1} \mid a \in \mathbf{Z}\}$等同，这样，**Z** 就是 **Q** 的子集，$<a, 1>$的等价类 $\frac{a}{1}$ 就是 a。特别地，$\frac{0}{1}$ 就是 0，$\frac{1}{1}$ 就是 1。

以下讨论 **Q** 上的关系和函数。

8.2.12 定理 取$\sim$是定义 8.2.10 中的等价关系，取 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^+$上的二元函数：

$$f: (\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*)^2 \to \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^* \quad f(<a, b>, <c, d>) = <a \cdot d+b \cdot c, b \cdot d>$$

$$g: (\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*)^2 \to \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^* \quad g(<a, b>, <c, d>) = <a \cdot c, b \cdot d>$$

和一元函数：

$$h:(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*)^2\to\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^* \quad h(<a, b>) = <-a, b>$$

则 f, g 和 h 都保持～不变。

证 如果$<a, b>\sim<a', b'>$且$<c, d>\sim<c, d>$，则

$$a\cdot b' = a'\cdot b \text{ 且 } c\cdot d' = c'\cdot d,$$

在 $a\cdot b' = a'\cdot b$ 两边乘上 $d\cdot d'$得

$$a\cdot b'\cdot d\cdot d' = a'\cdot b\cdot d\cdot d',$$

在 $c\cdot d' = c'\cdot d$ 两边乘上 $b\cdot b'$得

$$b\cdot b'\cdot c\cdot d' = b\cdot b'\cdot c'\cdot d,$$

两式相加得

$$(a\cdot d+b\cdot c)\cdot b'\cdot d' = (a'\cdot d'+b'\cdot c')\cdot b\cdot d,$$

所以

$$<a\cdot d+ b\cdot c, b\cdot d>\sim<a'\cdot d'+ b'\cdot c', b'\cdot d'>,$$

即 $f(<a, b>, <c, d>) = f(<a', b'>, <c', d'>)$。

如果$<a, b>\sim<a', b'>$且$<c, d>\sim<c, d>$，则

$$a\cdot b' = a'\cdot b \text{ 且 } c\cdot d' = c'\cdot d,$$

两式相乘得

$$a\cdot c\cdot b'\cdot d' = a'\cdot c'\cdot b\cdot d,$$

所以

$$<a\cdot c, b\cdot d>\sim<a'\cdot c', b'\cdot d'>,$$

即 $g(<a, b>, <c, d>) = g(<a', b'>, <c', d'>)$。

如果$<a, b>\sim<a', b'>$，则 $a\cdot b' = a'\cdot b$，所以

$$-a\cdot b' = -a'\cdot b,$$

因此

$$<-a, b>\sim<-a', b'>,$$

即 $h(<a, b>) = h(<a', b'>)$。

这证明了 f, g 和 h 都保持～不变。■

因为 f, g 和 h 都保持～不变，所以由定理 8.1.23 可得到 $\mathbf{Q}$ 上二元函数

$$\tilde{f}:\mathbf{Q}^2\to\mathbf{Q} \quad \tilde{f}\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right) = \frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$$

$$\tilde{g}:\mathbf{Q}^2\to\mathbf{Q} \quad \tilde{g}\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right) = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

和 $\mathbf{Q}$ 上的一元函数：

$$\tilde{h}:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q} \quad \tilde{h}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b}$$

$\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$ 就是 $\mathbf{Q}$ 上的加法和乘法，按习惯将 $\tilde{f}(p, q)$记为 $p+q$，将 $\tilde{g}(p, q)$记为 $p\cdot q$。$\tilde{h}$ 就是 $\mathbf{Q}$ 上的负运算，按习惯将 $\tilde{h}(p)$简记为 $-p$。

当 $\frac{a}{b}\neq 0$ 时，定义 $\frac{a}{b}$ 的倒数$(\frac{a}{b})^{-1}$如下：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \begin{cases} \dfrac{b}{a} & \text{如果 } a>0 \\ \dfrac{-b}{-a} & \text{如果 } a<0\text{。} \end{cases}$$

有理数的运算是整数的运算的扩充，即有

任给 $a, b\in\mathbf{Z}$，$a+b = c$ 当且仅当 $\frac{a}{1}+\frac{b}{1}=\frac{c}{1}$，

任给 $a, b\in\mathbf{Z}$，$a\cdot b = c$ 当且仅当 $\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{1}=\frac{c}{1}$

和

任给 $a\in\mathbf{Z}$，$-a = b$ 当且仅当$-\frac{a}{1}=\frac{b}{1}$

从整数加法、乘法和负运算的性质可得到 f, g 和 h 的性质，进一步可得到有理数加法、乘法和负运算的性质。

8.2.13 定理 有理数运算的性质。

(1) 交换律 $p+q = q+p$，$p\cdot q = q\cdot p$。

(2) 结合律 $p+(q+r) = (p+q)+r$，$p\cdot(q\cdot r) = (p\cdot q)\cdot r$。

(3) 分配律 $p\cdot(q+r) = p\cdot q+p\cdot r$。

(4) $p+(-p) = 0$。

(5) $p+0=p$，$p\cdot 1=p$。

(6) 如果 $p\neq 0$，则 $p\cdot p^{-1}=1$。

证 (1) 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，则

$$p+q=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{c\cdot b+d\cdot a}{d\cdot b}=q+p。$$

类似地可证 $p\cdot q=q\cdot p$。

(2) 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，$r=\frac{u}{v}$，则

$$\begin{aligned}p+(q+r)&=\frac{a}{b}+\frac{c\cdot v+d\cdot u}{d\cdot v}\\&=\frac{a\cdot(d\cdot v)+b\cdot(c\cdot v+d\cdot u)}{b\cdot(d\cdot v)}\\&=\frac{(a\cdot d+b\cdot c)\cdot v+(b\cdot d)\cdot u}{(b\cdot d)\cdot v}\\&=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}+\frac{u}{v}=(p+q)+r。\end{aligned}$$

类似地可证 $p\cdot(q\cdot r)=(p\cdot q)\cdot r$。

(3) 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，$r=\frac{u}{v}$，则

$$\begin{aligned}p\cdot(q+r)&=\frac{a}{b}\cdot\frac{c\cdot v+d\cdot u}{d\cdot v}=\frac{a\cdot(c\cdot v+d\cdot u)}{b\cdot(d\cdot v)}\\&=\frac{(a\cdot d)\cdot(b\cdot v)+(b\cdot d)\cdot(a\cdot u)}{(b\cdot d)\cdot(b\cdot v)}\\&=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{a\cdot u}{b\cdot v}=p\cdot q+p\cdot r。\end{aligned}$$

(4)(5)(6)留给读者。■

8.2.14 定理

(1) 如果 $p+q=0$，则 $p=-q$。

(2) $p\cdot(-1)=-p$。

(3) $p=-(-p)$。

(4) 符号法则 $(-p)\cdot q=-(p\cdot q)$，$p\cdot(-q)=-(p\cdot q)$，

$(-p)\cdot(-q)=p\cdot q$。

(5) 如果 $p\cdot q=1$，则 $p=q^{-1}$。

(6) $p=(p^{-1})^{-1}$。

证 留给读者。■

定义 **Q** 上二元关系≤ $=\{<\frac{a}{b},\ \frac{c}{d}>\mid a\cdot d\leq b\cdot c\}$。

8.2.15 定理 $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$ 当且仅当 $a\cdot d\leq b\cdot c$。

证 如果 $a\cdot d\leq b\cdot c$，则由≤的定义得 $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$。

如果 $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$，则存在 a', b', c', d'，使得

$$\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b},\ \frac{c'}{d'}=\frac{c}{d},\ a\cdot b'=a'\cdot b,\ c\cdot d'=c'\cdot d,$$

$$a'\cdot d'\leq b'\cdot c',$$

所以 $a\cdot d\leq b\cdot c$。■

8.2.16 定理 ≤是 **Q** 上全序关系。

证 证明≤有自返性、反对称性、传递性和可比较性。

自返性。任给 $\frac{a}{b}\in\mathbf{Q}$，由 $a\cdot b\leq b\cdot a$ 得 $\frac{a}{b}\leq\frac{a}{b}$。

反对称性。任给 $\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}\in\mathbf{Q}$，如果 $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$ 且 $\frac{c}{d}\leq\frac{a}{b}$，则

$$a\cdot d\leq b\cdot c \text{ 且 } c\cdot b\leq d\cdot a,$$

所以

$$a\cdot d=b\cdot c,$$

即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

传递性。任给 $\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$，$\frac{u}{v}\in\mathbf{Q}$，如果 $\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}$ 且 $\frac{c}{d}\leq\frac{u}{v}$，则 $a\cdot d\leq b\cdot c$ 且 $c\cdot v\leq d\cdot u$。

当 $a, c, u>0$ 时，两式相乘得

$$a\cdot d\cdot c\cdot v\le b\cdot c\cdot d\cdot u,$$

两边除以 $b\cdot c$ 得

$$a\cdot v\le b\cdot u,$$

所以 $\frac{a}{b}\le\frac{u}{v}$。

当 $a, c, u<0$ 时，两式相乘得

$$a\cdot d\cdot c\cdot v\ge b\cdot c\cdot d\cdot u,$$

两边除以 $b\cdot c$ 得

$$a\cdot v\le b\cdot u,$$

所以 $\frac{a}{b}\le\frac{u}{v}$。

当 $a\le 0$ 且 $u\ge 0$ 时，有 $a\cdot v\le 0$ 且 $b\cdot u\ge 0$，所以

$$a\cdot v\le b\cdot u,$$

也有 $\frac{a}{b}\le\frac{u}{v}$。

可比较性。任给 $\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}\in\mathbf{Q}$，都有

$$a\cdot d\le b\cdot c \text{ 或 } c\cdot b\le d\cdot a,$$

所以 $\frac{a}{b}\le\frac{c}{d}$ 或 $\frac{c}{d}\le\frac{a}{b}$。■

$\le$就是 $\mathbf{Q}$ 上的小于等于关系，并且是 $\mathbf{Z}$ 上小于等于关系$\le$的扩充，即

$$\text{任给 } a, b\in\mathbf{Z}\text{，}a\le b \text{ 当且仅当 } \frac{a}{1}\le\frac{b}{1}\text{。}$$

由$\le$可以定义正有理数集 $\mathbf{Q}^{+}=\{\,p\mid p\in\mathbf{Q}$ 且 $p>0\}$和负有理数集 $\mathbf{Q}^{-}=\{p\mid p\in\mathbf{Q}$ 且 $p<0\}$。

可以证明 $\frac{a}{b}<0$ 当且仅当 $a<0$，$\frac{a}{b}>0$ 当且仅当 $a>0$。

有理数上的运算保持小于等于关系$\le$不变。

8.2.17 定理

(1) 如果 $q\le r$，则 $p+q\le p+r$。

(2) 如果 $q\le r$ 且 $p\ge 0$，则 $p\cdot q\le p\cdot r$。

(3) 如果 $p\le q$，则$-q\le -p$。

(4) 如果 $0<p\le q$，则 $q^{-1}\le p^{-1}$。

证 (1) 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，$r=\frac{u}{v}$，则

$$p+q=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\text{，}p+r=\frac{a\cdot v+b\cdot u}{b\cdot v}\text{。}$$

如果 $q\le r$，则 $\frac{c}{d}\le\frac{u}{v}$，所以

$$c\cdot v\le d\cdot u,$$

两边乘以 $b\cdot b$ 并加上 $a\cdot d\cdot b\cdot v$ 得

$$b\cdot b\cdot c\cdot v+a\cdot d\cdot b\cdot v\le b\cdot b\cdot d\cdot u+a\cdot d\cdot b\cdot v,$$

所以

$$(a\cdot d+b\cdot c)\cdot b\cdot v\le b\cdot d\cdot(a\cdot v+b\cdot u),$$

因此

$$\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\le\frac{a\cdot v+b\cdot u}{b\cdot v}\text{。}$$

即 $p+q\le p+r$。

(2) 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，$r=\frac{u}{v}$，则

$$p\cdot q=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\text{，}p\cdot r=\frac{a\cdot u}{b\cdot v}\text{，}a\ge 0\text{。}$$

如果 $q\le r$ 且 $p\ge 0$，则 $\frac{c}{d}\le\frac{u}{v}$ 且 $a\ge 0$，所以 $c\cdot v\le d\cdot u$，两边乘上 $a\cdot c$ 得

$$a\cdot c\cdot b\cdot v\le b\cdot d\cdot a\cdot u,$$

所以

$$\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\le\frac{a\cdot u}{b\cdot v}$$

即 $p\cdot q\le p\cdot r$。

(3) 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，则$-p=\frac{-a}{b}$，$-q=\frac{-c}{d}$。

如果 $p\le q$，则 $\frac{a}{b}\le\frac{c}{d}$，所以 $a\cdot d\le b\cdot c$，两边乘上-1 得

$$(-c)\cdot b\le d\cdot(-a),$$

所以

$$\frac{-a}{b}\le\frac{-c}{d}$$

即$-q\le -p$。

(4) 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，则 $p^{-1}=\frac{b}{a}$ 且 $q^{-1}=\frac{d}{c}$。

如果 $p\le q$，则 $\frac{a}{b}\le\frac{c}{d}$，所以 $a\cdot d\le b\cdot c$，因此 $d\cdot a\le c\cdot b$，这就是

$$\frac{b}{a}\le\frac{d}{c},$$

即 $q^{-1}\le p^{-1}$。■

8.2.18 定理 稠密性 任给 $p<q$，存在 r，使得 $p<r$ 且 $r<q$。

证 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，则

$$p=\frac{2\cdot a\cdot d}{2\cdot b\cdot d},\ q=\frac{2\cdot b\cdot c}{2\cdot b\cdot d}\text{ 且 }a\cdot d<b\cdot c,$$

所以

$$2\cdot a\cdot d<2\cdot a\cdot d+1\text{ 且 }2\cdot a\cdot d+1<2\cdot b\cdot c,$$

取 $r=\frac{2\cdot a\cdot d+1}{2\cdot b\cdot d}$，则 $p<r$ 且 $r<q$。■

8.2.19 定理 *Archimed* 性质 任给 $p, q>0$，存在 $\mathrm{n}\in\mathbf{N}$，使得 $\mathrm{n}\cdot p>q$。

证 令 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$，取 $\mathrm{n}=b\cdot c+1$，则

$$\mathrm{n}\cdot p=\frac{(b\cdot c+1)\cdot a}{b},$$

由$(b\cdot c+1)\cdot a\cdot d=b\cdot c\cdot a\cdot d+a\cdot d>b\cdot c$ 得

$$\frac{(b\cdot c+1)\cdot a}{b}>\frac{c}{d},$$

所以 $\mathrm{n}\cdot p>q$。■

习题 8.2

8.2.1 补充定理 8.2.5 的证明，即证明：任给 $a, b, c\in\mathbf{Z}$，都有

(1) $a\cdot b=b\cdot a$。

(2) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$。

(3) $a+0=a$，$a\cdot 1=a$。

8.2.2 证明：任给 $a\in\mathbf{Z}$，都存在 $b\in\mathbf{Z}$，使得 $b<a$。

8.2.3 证明：任给 $a\in\mathbf{Z}$，不存在 $b\in\mathbf{Z}$，使得 $a<b<a+1$。

8.2.4 补充定理 8.2.13 的证明，即证明：任给 $p, q, r\in\mathbf{Q}$，都有

(1) $p\cdot q=q\cdot p$。

(2) $p\cdot(q\cdot r)=(p\cdot q)\cdot r$。

(3) $p+(-p)=0$。

(4) $p+0=p$，$p\cdot 1=p$。

(5) 如果 $p\neq 0$，则 $p\cdot p^{-1}=1$。

8.2.5 证明定理 8.2.14。

8.2.6 有理数的无端点性 证明：

(1) 任给 $p\in\mathbf{Q}$，都存在 $q\in\mathbf{Q}$，使得 $q<p$。

(2) 任给 $p\in\mathbf{Q}$，都存在 $q\in\mathbf{Q}$，使得 $q>p$。

8.3 实　数

本节讨论实数的构造。实数的构造主要有两种方法，Cantor 序列和 Dedekind 分割。我们采用 Dedekind 分割的方法，但处理上稍有差别。

我们曾对每个实数 a 定义了有理数的集合 $\mathbf{Q}_a$，并证明了所有这样集合的集合族 $\Gamma(\mathbf{Q}) = \{\mathbf{Q}_a \mid a\in\mathbf{R}\}$ 和 $\mathbf{R}$ 一一对应。实数构造的本质就是用 $\mathbf{Q}_a$ 代替 a，也就是说实数是某种有理数的集合。

直接用 $\mathbf{Q}_a$ 来定义实数 a 是不行的，因为 $\mathbf{Q}_a$ 是用实数 a 来定义的。

$\mathbf{Q}_a$ 是有理数的集合，我们可以不使用实数而使用某种性质来定义这样的有理数集合，然后用这样的有理数集合去定义实数。

$\mathbf{Q}_a$ 有以下三条性质：

(1) $\mathbf{Q}_a \ne \varnothing$ 且 $\mathbf{Q}_a \ne \mathbf{Q}$；

(2) 任给 $p\in\mathbf{Q}_a$，任给 $q\in\mathbf{Q}$，如果 $q<p$，则 $q\in\mathbf{Q}_a$；

(3) $\mathbf{Q}_a$ 没有最大元。

条件(2)类似于良序集前段的定义，我们就用这个条件来定义全序集的前段。

8.3.1 定义　全序集的前段　A 是全序集，$B\subseteq A$。如果

任给 $p\in B$，任给 $q\in A$，只要 $q\le p$ 就有 $q\in B$，

则称 B 是 A 的前段。

显然 $\varnothing$ 和 A 都是 A 的前段。如果 B 是 A 的前段且 $B \ne A$，则称 B 是 A 的真前段。

可以证明 B 是 A 的前段的等价条件是(参考习题 5.1.2)：

任给 $p\in B$，任给 $q\in A\setminus B$，都有 $p<q$。

全序集的前段与良序集的前段有类似的性质。

8.3.2 定理　全序集前段的基本性质

(1) 传递性　如果 B 是 A 的前段且 C 是 B 的前段，则 C 是 A

的前段。

(2) 可比较性　如果 B 和 C 都是 A 的前段，则 B 是 C 的前段或 C 是 B 的前段。

(3) 前段对并的封闭性　如果任给 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，A_i 都是 A 的前段，则 $\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}A_\mathrm{i}$ 是 A 的前段。

证　参考定理 5.1.12。■

$\mathbf{Q}_a$ 的三条性质用前段的话来说就是：$\mathbf{Q}_a$ 是 $\mathbf{Q}$ 的没有最大元的非空的真前段。

以下是这样的有理数子集的两个例子。

8.3.3 例　任给 $r\in\mathbf{Q}$，$\mathbf{Q}_r = \{p \mid p\in\mathbf{Q}$ 且 $p<r\}$ 是 $\mathbf{Q}$ 的没有最大元的非空的真前段。理由如下：

任给 $p\in\mathbf{Q}_r$，任给 $q\in\mathbf{Q}$，如果 $q<p$，则由 $p\in\mathbf{Q}_r$ 得

$p<r$，

由 $q<p$ 和 $p<r$ 得 $q<r$，所以

$q\in\mathbf{Q}_r$。

因此 $\mathbf{Q}_r$ 是 $\mathbf{Q}$ 的前段。

任给 $p\in\mathbf{Q}_r$，都有 $p<r$，由有理数的稠密性(定理 8.2.18)得

存在 q，使得 $p<q<r$，

所以 $\mathbf{Q}_r$ 没有最大元。

由有理数的无端点性(习题 8.2.6)得 $\mathbf{Q}_r$ 非空。

由 $r\notin\mathbf{Q}_r$ 得 $\mathbf{Q}_r$ 是真前段。

8.3.4 例　$A = \{p \mid p\in\mathbf{Q}$ 且($p<0$ 或 $p^2<2$)$\}$ 是 $\mathbf{Q}$ 的没有最大元的非空的真前段。理由如下：

任给 $p\in A$，任给 $q\in\mathbf{Q}$，如果 $q<p$，则当 $q<0$ 时直接得

$q\in A$，

当 $q\ge 0$ 时由 $q<p$ 得 $p\ge 0$，所以

$p^2<2$，

由 $q<p$ 和 $p^2<2$ 得 $q^2<2$，也有

$q\in A$。

因此 A 是 $\mathbf{Q}$ 的前段。

$A \neq \varnothing$，$A \neq \mathbf{Q}$ 和 A 没有最大元显然。

但 A 不是任何一个 $\mathbf{Q}_r$，可以用反证法这一点。设存在 $r \in \mathbf{Q}$，使得 $A = \mathbf{Q}_r$，当 $p \geq 0$ 时有

$$p^2<2 \text{ 当且仅当 } p \in A \text{ 当且仅当 } p \in \mathbf{Q}_r \text{ 当且仅当 } p<r,$$

所以

$$p^2<2 \text{ 当且仅当 } p^2<r^2,$$

因此 $r^2 = 2$，矛盾。

我们就用这样的前段定义实数。

8.3.5 定义 实数 $\mathbf{Q}$ 的没有最大元的非空的真前段称为实数，所有实数的集合称为实数集，记为 $\mathbf{R}$。

这样定义的实数集 $\mathbf{R}$ 是有理数的子集族，即 $\mathbf{R} \subseteq \mathrm{P}(\mathbf{Q})$。

8.3.6 定理 $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ $f(p) = \mathbf{Q}_p$ 是单射。

证 任给 $p, q \in \mathbf{Q}$，如果 $p \neq q$，则由习题 1.2.2 得

$$\mathbf{Q}_p \neq \mathbf{Q}_q,$$

所以 $f(p) \neq f(q)$。■

因为 f 是单射，所以 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 的子集 $f[\mathbf{Q}] = \{\mathbf{Q}_p \mid p \in \mathbf{Q}\}$一一对应。

可以将 $\mathbf{Q}$ 和$\{\mathbf{Q}_p \mid p \in \mathbf{Q}\}$等同。这样，$\mathbf{Q}$ 就是 $\mathbf{R}$ 的子集，有理数 r 就是所有小于 r 的有理数集合 $\mathbf{Q}_r$。特别地，0 就是 $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}^-$(负有理数集)。

由例 8.3.4 可知 $\mathbf{Q} \neq \mathbf{R}$，所以一定有不是有理数的实数，不是有理数的实数称为无理数。

$\mathbf{R}$ 上的小于等于关系$\leq$就是 $\mathbf{R}$ 上的包含关系$\subseteq$，所以$\leq$是偏序关系，由前段的可比较性可得$\leq$还是全序关系。

$\mathbf{R}$ 上的小于等于关系$\leq$是 $\mathbf{Q}$ 上小于等于关系$\leq$的扩充，即

任给 $p, q \in \mathbf{Q}$，都有 $p \leq q$ 当且仅当 $\mathbf{Q}_p \subseteq \mathbf{Q}_q$。

由$\leq$可以定义正实数集 $\mathbf{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x>0\}$和负实数集 $\mathbf{R}^- = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x<0\}$。

与有理数 $\mathbf{Q}$ 类似，实数 $\mathbf{R}$ 也有稠密性、无端点性，但更强。

8.3.7 引理 r 是有理数，x 是实数，则 $r \in x$ 当且仅当 $r<x$。

证 设 $r \in x$，证明 $r<x$，即证明 $\mathbf{Q}_r \subseteq x$ 且 $\mathbf{Q}_r \neq x$。

任给 $p \in \mathbf{Q}_r$，都有 $p<r$，由 $r \in x$ 得 $p \in x$，因此 $\mathbf{Q}_r \subseteq x$。

由 $r \notin \mathbf{Q}_r$ 得 $\mathbf{Q}_r \neq x$。

设 $r \notin x$，证明 $x \leq r$。

任给 $p \in x$，由 $r \notin x$ 和 x 是前段得 $p<r$，所以 $x \subseteq \mathbf{Q}_r$，即 $x \leq r$。

■

8.3.8 定理 有理数在实数中稠密。

(1) 任给实数 x, y，如果 $x<y$，则存在有理数 r，使得 $x<r$ 且 $r<y$。

(2) 任给实数 x，存在有理数 p, q，使得 $p<x<q$。

证 (1) 由 $x<y$ 得

存在有理数 p，使得 $p \notin x$ 且 $p \in y$，

由 y 没有最大元得

存在有理数 r，使得 $p<r$ 且 $r \in y$。

由 $p \notin x$ 得

$$x \leq p<r,$$

由 $r \in y$ 得

$$r<y,$$

因此存在有理数 r，使得 $x<r$ 且 $r<y$。

(2) 由 x 非空得

存在有理数 p，使得 $p \in x$，

所以

$$p<x。$$

由 $x \neq \mathbf{Q}$ 得

存在有理数 r，使得 $r \notin x$，

由 $\mathbf{Q}$ 的无端点性得

存在有理数 q，使得 $r<q$，

由 $r \notin x$ 得

$$x \le r < q。$$

因此存在有理数 p, q，使得 $p < x < q$。■

建立在实数上的数学理论(如微积分)，依赖于实数的基本性质：任何有界的实数非空子集都有上确界。可以证明我们构造的实数确实有这样的性质。实际上，构造实数的目的之一就是为了证明实数的基本性质。

8.3.9 引理 A 是实数的非空子集，令 $x = \bigcup A$，则

(1) x 是有理数 $\mathbf{Q}$ 的非空前段。

(2) x 没有最大元。

(3) 如果 A 有上界，则 x 是实数。

证 (1) x 非空显然。由前段对并的封闭性得 x 是前段。

(2) 任给 $p \in x$，存在 $y \in A$，使得 $p \in y$。由 y 没有最大元得

存在 $q \in y$，使得 $p < q$，

所以

存在 $q \in x$，使得 $p < q$。

因此 x 没有最大元。

(3) 由(1)和(2)，只需证 $x \ne \mathbf{Q}$。设 A 的上界为 z，则

任给 $y \in A$，都有 $y \subseteq z$，

所以

$$x = \bigcup A \subseteq z,$$

由 $z \ne \mathbf{Q}$ 得 $x \ne \mathbf{Q}$。■

8.3.10 定理 实数基本定理 任何有界的实数非空子集都有上确界。

证 设 A 是有界的实数非空子集，令 $x = \bigcup A$，则由引理 8.3.9 得 x 是实数。因为实数集是集合族，x 是 A 的并，所以 x 是 A 的上确界(见例 3.4.6)。■

实数不仅有稠密性，而且还有完备性(也称为连续性)。

8.3.11 定义 完备性 A 是全序集，A 称为完备的，如果 A 满足：任给 A 的非空真前段 X，X 有最大元或 $A \setminus X$ 有最小元。

8.3.12 定理 实数的完备性 实数集 $\mathbf{R}$ 是完备的。

证 设 A 是 $\mathbf{R}$ 的非空真前段，令 $x = \bigcup A$，则 x 是实数且 x 是 A 的上确界。

如果 $x \in A$，则 x 是 A 的最大元。

如果 $x \notin A$，则 $A \setminus X = \{y \mid y$ 是 A 的上界$\}$，所以 x 是 $A \setminus X$ 的最小元。■

注意，有理数没有完备性。取 $A = \{p \mid p \in \mathbf{Q}$ 且$(p < 0$ 或 $p^2 < 2)\}$(见例 8.3.4)，则 A 没有最大元且 $A \setminus X$ 没有最小元。

以下讨论实数的运算。

实数加法的定义比较简单。

8.3.13 引理 如果 x, y 是实数，则 $z = \{p+q \mid p \in x$ 且 $q \in y\}$也是实数。

证 任给 $p+q \in z$，任给 $r \in \mathbf{Q}$，如果 $r < p+q$，则 $r-q < p$，由 x 是前段和 $p \in x$ 得

$$r-q \in x,$$

所以

$$r = (r-q)+q \in z,$$

因此 z 是 $\mathbf{Q}$ 的前段。

任给 $p+q \in z$，由 x 没有最大元得

存在 $p' \in x$，使得 $p < p'$，

由 x 没有最大元得

存在 $q' \in x$，使得 $q < q'$，

所以

存在 $p'+q' \in z$，使得 $p+q < p'+q'$，

因此 z 没有最大元。

由 $x \ne \mathbf{Q}$ 和 $y \ne \mathbf{Q}$ 得

存在 $p, q \in \mathbf{Q}$，使得 $p \notin x$ 且 $q \notin y$，

所以

存在 $p+q\in\mathbf{Q}$，使得 $p+q\notin z$，

因此 $z \neq \mathbf{Q}$。

由 $x \neq \varnothing$和 $y \neq\varnothing$得

存在 $p, q\in\mathbf{Q}$，使得 $p\in x$ 且 $q\in y$，

所以

存在 $p+q\in\mathbf{Q}$，使得 $p+q\in z$，

因此 $z \neq\varnothing$。

综合以上所证得 z 是实数。■

由引理 8.3.13，可以定义实数上的二元函数如下：

$$f(x, y) = \{p+q \mid p\in x \text{ 且 } q\in y\}$$

f 就是实数的加法，按习惯将 $f(x, y)$记为 $x+y$。

从有理数加法性质可以得到实数加法的性质。

8.3.14 定理 实数加法的性质。

(1) 交换律 $x+y = y+x$。

(2) 结合律 $x+(y+z) = (x+y)+z$。

(3) $x+0 = x$。

(4) 保序性 如果 $y\leq z$，则 $x+y\leq x+z$。

证 (1) $x+y = \{p+q \mid p\in x \text{ 且 } q\in y\}$

$= \{q+p \mid q\in y \text{ 且 } p\in x\}$

$= y+x$。

(2) 类似于(1)，详细证明留给读者。

(3) 分别证 $x+0 \subseteq x$ 和 $x \subseteq x+0$。。

任给 $r\in x+0$，存在 $p\in x, q\in 0$，使得

$r = p+q$，

由 $q\in 0$ 和引理 8.3.7 得 $q<0$，所以

$r = p+q<p$，

因此 $r\in x$。

任给 $r\in x$，存在 $p\in x$，使得 $r<p$，所以

$r-p\in 0$，

因此 $r = p+(r-p)\in x+0$。

(4) 设 $y \subseteq z$，证明 $x+y \subseteq x+z$。

任给 $r\in x+y$，存在 $p\in x, q\in y$，使得

$r = p+q$，

由 $q\in y$ 和 $y \subseteq z$ 得

$q\in z$，

由 $p\in x$ 和 $q\in z$ 得

$p+q\in x+z$，

即 $r\in x+z$。■

实数乘法的定义比较复杂。我们先在非负实数上定义乘法，然后用符号法则推广到整个实数。

任给 $x\geq 0$，令 $x^+ = \{p \mid p\in x \text{ 且 } p\geq 0\}$

8.3.15 引理 如果 $x\geq 0, y\geq 0$，则

$$z = \{p\cdot q \mid p\in x^+ \text{且 } q\in y^+\}\cup 0$$

也是实数，且 $z\geq 0$。

证 类似于引理 8.3.13，详细证明留给读者。■

由引理 8.3.15，可以定义非负实数上的二元函数如下：

$$f(x, y) = \{p\cdot q \mid p\in x^+ \text{且 } q\in y^+\}\cup 0$$

f 就是非负实数的乘法，按习惯将 $f(x, y)$记为 $x\cdot y$。

从有理数乘法性质可以得到非负实数乘法的性质。

8.3.16 定理 非负实数乘法的性质。$x, y, z\geq 0$

(1) 交换律 $x\cdot y = y\cdot x$。

(2) 结合律 $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$。

(3) 分配律 $x\cdot(y+z) = x\cdot y+x\cdot z$。

(4) $x\cdot 1 = x$。

(5) 保序性 如果 $y\leq z$，则 $x\cdot y\leq x\cdot z$。

证 (1) $x\cdot y = \{p\cdot q \mid p\in x^+ \text{且 } q\in y^+\}\cup 0$

$= \{q\cdot p \mid q\in y^+ \text{且 } p\in x^+\}\cup 0 = y\cdot x$。

(2)(3) 类似于(1)，详细证明留给读者。

(4) 分别证 $x\cdot 1 \subseteq x$ 和 $x \subseteq x\cdot 1$。只需考虑 $x\cdot 1$ 和 x 中非负有理数就行了。

任给 $r\in x\cdot 1$，存在 $p\in x^+, q\in 1^+$，使得 $r = p\cdot q$，由 $q\in 1$ 和引理 8.3.7 得 $q<1$，所以

$$r = p\cdot q<p,$$

因此 $r\in x$。

任给 $r\in x$，存在 $p\in x$，使得 $r<p$，所以

$$\frac{r}{p}\in 1,$$

因此 $r = p\cdot \dfrac{r}{p}\in x\cdot 1$。

(5) 设 $y \subseteq z$，证明 $x\cdot y \subseteq x\cdot z$。只需证

$$\{p\cdot q \mid p\in x^+ \text{且 } q\in y^+\} \subseteq \{p\cdot q \mid p\in x^+ \text{且 } q\in z^+\}$$

就行了。

任给 $r\in\{p\cdot q \mid p\in x^+ \text{且 } q\in y^+\}$，存在 $p\in x^+, q\in y^+$，使得

$$r = p\cdot q,$$

由 $q\in y$ 和 $y \subseteq z$ 得

$$q\in z^+,$$

由 $p\in x^+$和 $q\in z^+$得

$$p\cdot q\in\{q\cdot p \mid q\in y^+ \text{且 } p\in z^+\},$$

即 $r\in\{q\cdot p \mid q\in y^+ \text{且 } p\in z^+\}$。

任给有理数的子集 X，当 X 没有最小元时，令 $X^* = X$，当 X 有最小元 p，令 $X^* = X\setminus\{p\}$。

8.3.17 引理 如果 x 是实数，则$(\mathbf{Q}\setminus x)^*$没有最小元。

证 如果 $\mathbf{Q}\setminus x$ 没有最小元，则$(\mathbf{Q}\setminus x)^* = \mathbf{Q}\setminus x$ 没有最小元。

如果 $\mathbf{Q}\setminus x$ 有最小元 p，则

任给 $q\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*$，都有 $p<q$，

由有理数的稠密性得

存在 $r\in\mathbf{Q}$，使得 $p<r<q$，

由 x 是前段，$p\in\mathbf{Q}\setminus x$ 和 $p<r$ 得

$$r\in\mathbf{Q}\setminus x,$$

由 $p \neq r$ 得

$$r\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*。$$

这证明了

任给 $q\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*$，存在 $r\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*$，使得 $r<q$，

因此$(\mathbf{Q}\setminus x)^*$没有最小元。■

8.3.18 引理 如果 x 是实数，则

$$z = \{p \mid -p\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*\}$$

也是实数。

证 任给 $p\in z$，任给 $q\in\mathbf{Q}$，如果 $q<p$，则

$$-p<-q,$$

由 x 是前段，$-p\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*$和$-p<-q$ 得

$$-q\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*,$$

所以

$$q\in z,$$

因此 z 是 $\mathbf{Q}$ 的前段。

任给 $p\in z$，都有$-p\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*$，由$(\mathbf{Q}\setminus x)^*$没有最小元得

存在$-q\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*$，使得$-q<-p$，

所以

存在 $q\in z$，使得 $p<q$，

因此 z 没有最大元。

由 $x \neq \mathbf{Q}$ 得$(\mathbf{Q}\setminus x)^* \neq \varnothing$，所以 $z \neq \varnothing$。由 $x \neq \varnothing$得$(\mathbf{Q}\setminus x)^* \neq \mathbf{Q}$，所以 $z \neq \mathbf{Q}$。

综合以上所证得 z 是实数。■

由引理 8.3.18，可以定义实数上的一元函数如下：

$$f(x) = \{p \mid -p\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*\}$$

f 就是实数的负运算，按习惯将 $f(x)$记为$-x$。

负运算有以下性质。

8.3.19 定理

(1) $x+(-x)=0$。

(2) 如果 $x+y=0$，则 $x=-y$。

(3) $x=-(-x)$。

(4) 如果 $x\le y$，则$-y\le -x$。

证 留给读者。■

由定理 8.3.19 可以证明：

任给 $x\le 0$，存在 $y\ge 0$，使得 $x=-y$。

因此可以用以下定义(符号法则)将乘法从非负实数推广到全体实数。任给实数 $x, y\ge 0$，定义

$$(-x)\cdot y=-(x\cdot y),$$
$$x\cdot(-y)=-(x\cdot y),$$
$$(-x)\cdot(-y)=x\cdot y。$$

非负实数乘法性质在实数乘法上也成立。

8.3.20 定理 实数乘法的性质。

(1) 交换律 $x\cdot y=y\cdot x$。

(2) 结合律 $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$。

(3) 分配律 $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$。

(4) $x\cdot 1=x$。

(5) 保序性 如果 $y\le z$ 且 $x\ge 0$，则 $x\cdot y\le x\cdot z$。

证 留给读者。■

最后，我们来构造实数的倒数。和乘法类似，先定义正实数的倒数，再推广到全体非零实数。

8.3.21 引理 如果 $x>0$，则 $z=\{p\mid \frac{1}{p}\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*\}$也是实数，且 $z>0$。

证 类似于引理 8.3.18，详细证明留给读者。■

由引理 8.3.21，任给实数 $x>0$，可以定义 x 的倒数如下：

$$x^{-1}=\{p\mid \frac{1}{p}\in(\mathbf{Q}\setminus x)^*\}$$

再用以下定义将倒数推广到负实数。任给实数 $x>0$，定义：

$$(-x)^{-1}=-(x^{-1})。$$

倒数有以下性质。

8.3.22 定理 $x, y\ne 0$。

(1) $x\cdot x^{-1}=1$。

(2) 如果 $x\cdot y=1$，则 $x=y^{-1}$。

(3) $x=(x^{-1})^{-1}$。

(4) 如果 $0<x\le y$，则 $y^{-1}\le x^{-1}$。

证 先对正实数证明，然后再推广到负实数，详细证明留给读者。■

习题 8.3

8.3.1 补充定理 8.3.14 的证明，即证明：任给 $x, y, z\in\mathbf{R}$，都有 $x+(y+z)=(x+y)+z$。

8.3.2 补充定理 8.3.16 的证明，即证明：任给实数 $x, y, z\ge 0$，都有

(1) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$。

(2) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$。

8.3.3 证明引理 8.3.15 和引理 8.3.21。

8.2.4 证明定理 8.3.19 和定理 8.3.20。

8.2.5 证明定理 8.3.22。

8.2.6 $r\in\mathbf{Q}, x\in\mathbf{R}$。证明：如果 $r\ge 0$，则 $r\cdot x=\{r\cdot p\mid p\in x\}$。

8.2.7 实数的 Archimed 性质 证明：任给实数 $x, y>0$，存在 $n\in\mathbf{N}$，使得 $n\cdot x>y$。

第九章　集合论悖论

9.1　集合论悖论

将集合定义为任何一堆东西的总体，不但不精确(所以严格地说根本不是定义)，而且还会产生矛盾，这就是形形色色的集合论悖论。最主要的有序数悖论、基数悖论和 Russell 悖论。

序数悖论　令 **Ord** 是全体序数的集合，由定理 5.3.12 得

存在序数α，使得任给$\beta\in$**Ord**，都有$\alpha>\beta$，

所以

$\alpha\notin$**Ord**，

但由α是序数得

$\alpha\in$**Ord**，

矛盾。

基数悖论　令 **V** 是全体集合的集合，令 $A = \bigcup\mathbf{V}$，则

任给集合 $X\in\mathbf{V}$，都有 $X \subseteq A$，

所以对于集合 $\mathsf{P}(A)\in\mathbf{V}$，也有

$\mathsf{P}(A) \subseteq A$，

所以

$|\mathsf{P}(A)| \le |A|$，

但由 Canton 定理(定理 4.4.1)得

$|\mathsf{P}(A)| > |A|$

矛盾。

Russell 悖论　Russell 将集合分成两类，自身是自身的元素的集合(即满足 $X\in X$ 的集合 X)称为第一类集合，自身不是自身的元

素的集合(即满足 $X\notin X$ 的集合 X)称为第二类集合。全体第二类集合的集合是哪一类呢？

如果它是第一类的，则由第一类集合的定义，它就是它自身的元素，而它的元素都是第二类的，所以它是第二类的。如果它是第二类的，则因为第二类的集合都是它的元素，所以它就是它自身的元素，由第一类集合的定义，它是第一类的。

用形式的方法可以更简单地叙述 Russell 悖论，令

$\mathbf{Rus} = \{X \mid X$ 是集合且 $X\notin X\}$，

则任给集合 X，都有

$X\in\mathbf{Rus}$ 当且仅当 $X\notin X$，

所以对于集合 **Rus** 也有

$\mathbf{Rus}\in\mathbf{Rus}$ 当且仅当 $\mathbf{Rus}\notin\mathbf{Rus}$，

这就是矛盾。

Russell 悖论是集合论中最著名的悖论。虽然序数悖论和基数悖论发现较早，但因为它们涉及到序数、基数等概念，人们往往倾向于认为问题出在那些概念上，而不是集合概念本身。Russell 悖论只涉及到集合和属于关系，它的发现使人们认识到问题确实出在集合概念本身。

因为当时 Peano 和 Fregs 已经将数学建立在集合的基础上，所以集合论出现的问题对整个数学产生了巨大的影响。Fregs 的话可以代表这种巨大影响的力量，Fregs 在接到 Russell 告诉他 Russell 悖论的信后曾说：“在工作结束之后而发现那大厦的基础已经动摇，对于一个科学工作者来说，没有比这更为不幸的了。”

集合论悖论产生的根源在哪里呢？如何解决呢？

以 Brouwer 为代表的直觉主义认为问题出在无限集合，他们从直觉主义哲学观出发，认为数学是一个创造过程，只能接受越来越大的有限集合，而不能接受无限集合。以自然数为例，只能承认有越来越大的自然数，因此任何时候只能有自然数的有限集合，而不能承认有全体自然数这样一个无限集合。

按直觉主义的数学观，有相当一部分古典数学不能被承认，能够承认的部分也弄得非常复杂，所以他们的主张很难被数学界所接受。但他们的主张和观点对现代逻辑的发展起了重要作用。

Russell 和其他一些人认为集合论悖论产生的原因在于所谓的“恶性循环”,“恶性循环”是指一个集合中某些元素的定义中用到了这个集合本身，每个集合论悖论中都有这样的定义存在。为此 Russell 根据排除“恶性循环”的原则，提出了类型论。

类型论的主要思想是将集合论讨论的对象分成不同的类型，只允许相同的类型的元素组成集合。作为解决悖论，类型论是漂亮的。但由于它过于复杂，作为数学基础并不合适，而且为了推出全部数学，还必须引进很有争议的可化归公理。不过它在现在逻辑中仍有重要的地位。

排除“恶性循环”的主张过于激烈，因为大多数这样的定义并不产生矛盾。在 Cantor 定理的证明中，在数学一些基本概念的定义中，都有“恶性循环”, 要把这些证明和定义全部改成没有“恶性循环”的证明和定义，不但相当复杂而且有些是做不到的。实际上，类型论也没有排除所有的“恶性循环”。

另一解决集合论悖论的方案是公理集合论。它的最早的倡导者 Zermelo 认为，由于集合论悖论，直观的集合概念必须加以限制，但没有一种有效的限制方法，所以应该采取相反的方法。公理集合论是采用不加定义的集合的概念，用公理来确定哪些东西是集合，也用公理来确定集合有哪些性质。要求这些公理的范围足够窄，以保证不产生悖论，又要求这些公理的范围足够宽，能容纳全部数学。

现在用得最多的是由 Zermelo 提出的，经过 Fraenkel 和 Skolorn 修改的 **ZFC** 系统(或没有选择公理的 **ZF** 系统)。**ZFC** 中只有一个初始概念——集合。

另一个常用的是由 Von Neumann 提出的，经过 Gödel 和 Bernays 修改的 **NGB** 系统。在 **NGB** 中作了类和集合的区分，允

许许多不是集合的类的存在，如全体集合的类 **V**，全体基数的类 **Card** 和全体序数的类 **Ord**，等等。Von Neumann 指出，悖论产生的原因并不在于承认这些类，而在于将这些类当作集合。只要不将这些类当作集合，就不会产生悖论。如果不允许这些类的存在，就会丢掉很多有用的数学手段。

这两个系统本质上是一样的，它们关于集合的限制也是相同的，从而有相同的关于集合的定理。

将直观的集合概念作类和集合的区别，仍然可以在直观的背景上进行，用直观和素朴的观点对待类和集合，可以在素朴集合论中避免已经发现的那些悖论。

用直观和素朴的观点，通过类和集合的区别来讨论集合论悖论，肯定是不深刻的，也不是集合论悖论的解决方案。通过类和集合的差异来说明集合论悖论，是作者的一种尝试，在这里仅仅是简单的介绍，没有详细和严格的论证。这样一种思路，目的是抛砖引玉，以求促进人们进一步地思考和探讨集合论和集合论悖论。

习题 9.1

9.1.1　证明：从全体基数的集合 **Card** 能够推出矛盾。

9.1.2　A 是集合，如果任给 $n\in\mathbf{N}$，存在集合 A_n，使得

$A_0 = A$ 且任给 $n\in\mathbf{N}$，都有 $A_{n+1}\in A_n$，

则称 A 是奇异集合，不是奇异集合的集合称为正则集合。证明：

(1) 如果 $A\in A$，则 A 是奇异集合。

(2) 如果 A 是奇异集合，则存在集合 $B\in A$，使得 B 是奇异集合。

(3) 从全体正则集合的集合 **Reg** 能够推出矛盾。

9.2　类 和 集 合

原来说一堆东西的总体是一个集合。在应用集合的概念时，我们实际上总是假定有一堆东西，就有一堆东西的总体。正是由于这个没有指出的假定，我们才得到了全体集合的集合 **V**，全体基数的集合 **Card** 和全体序数的集合 **Ord** 等产生悖论的集合。这些悖论的发现使我们认识到上述假定是不对的，我们必须将一堆东西和一堆东西的总体加以区别。

类　任何一堆东西称为一个类，类没有任何限制。

集合　如果一堆东西的总体存在，则称这堆东西是一个集合。在这种情况下，可以将这堆东西和这堆东西的总体看作等同的。

真类　不是集合的类称为真类。

集合论悖论说明了真类是存在的。实际上，从区分类和集合的角度，每个集合论悖论都可以看作是用反证法证明了所构造的类不是集合。

例如，在 Russell 悖论证明中，**Rus** $= \{X \mid X$ 是集合且 $X \notin X\}$ 是一个类，既然从 **Rus** 是集合推出矛盾，就说明了 **Rus** 不是集合。类似地，从习题 9.1.2 可以证明全体正则集合的类 **Reg** 不是集合。

如果一堆东西的总体存在，则它就是一个东西，就可以和其它东西一起构成类，从而可以成为其它类的一个元素。如果一堆东西的总体不存在，则它只能是一堆东西而不能是一个东西，从而不能成为其它类的一个元素。

所以，集合就是可以作为其它类的元素的类，真类就是不可以作为其它类的元素的类，可以用属于关系将它们严格定义如下：

9.2.1　定义　集合和真类　A 是一个类，如果

存在类 B，使得 $A \in B$，

则称 A 是一个集合。如果

不存在类 B，使得 $A \in B$，

则称 A 是一个真类。

一堆东西的总体存在，也就是说可以从整体把握这堆东西。真类的存在告诉我们，有的一堆东西，虽然其中每一个我们都能够认识，但我们无法从总体上把握这堆东西。

前面对于集合的讨论中，极大部分只用到集合作为一堆东西的性质，而不需要假定这堆东西的总体存在，这样的讨论在类上也是成立的。

9.2.2　定义　子类　A 和 B 都是类，如果

任给 x，从 $x \in B$ 得到 $x \in A$，

则称 B 是 A 的子类，也称 B 包含于 A，记为 $B \subseteq A$。

9.2.3　定义　类的运算　A 和 B 都是类，

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$，

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$，

$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$，

分别称为 A 和 B 的交、A 和 B 并、A 和 B 差。

前面讨论的关于集合运算的大多数性质对于类的运算也是成立的，如交换律、结合律、吸收律、幂等律、分配律、De–Morgan 律(参见定理 1.3.9 和 1.4.5)，类运算和子类的关系(参见定理 1.3.7 和 1.4.4)等。

每个元素都是集合的非空类称为集合族，这个集合族的定义和以前稍有差别。

9.2.4　定义　集合族的交和并　Γ是集合族，

$\bigcap \Gamma = \{x \mid$任给 $X \in \Gamma$，都有 $x \in X\}$，

$\bigcup \Gamma = \{x \mid$存在 $X \in \Gamma$，使得 $x \in X\}$，

分别称为Γ的交和Γ的并。

前面讨论的关于集合族的交和并的大多数性质现在仍然成立，如结合律、分配律、De–Morgan 律(参见定理 1.5.11)，集合族的交和并和子类的关系(参见定理 1.5.10)等。

下面定义卡氏积和关系，为了简单起见，我们使用有序对的

集合表示法。

有序对$<x, y> = \{\{x\}, \{x, y\}\}$，所以必须认为两个元素的类(无序对)是集合，才能定义卡氏积和关系。两个元素的类是集合应该是没有问题的。

9.2.5 定义 卡氏积 A 和 B 是两个类，类

$$\{<x, y> \mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}$$

称为 A 和 B 的卡氏积，记为 $A\times B$。

前面讨论的关于集合卡氏积的大多数性质对于类的卡氏积也是成立的，如卡氏积的对于交、并、差的分配律(参见定理 1.6.4)，类的卡氏积和子类的关系(参见定理 1.6.3)等。

9.2.6 定义 关系 有序对的类称为关系。

R 是关系，可以定义 R 的定义域

$$\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \text{ 存在 } y\text{，使得}<x, y>\in R\}，$$

和 R 的值域

$$\mathrm{ran}(R) = \{y \mid \text{ 存在 } x\text{，使得}<x, y>\in R\}。$$

同样有 $R \subseteq \mathrm{dom}(R)\times\mathrm{ran}(R)$。

R 和 Q 是关系，可以定义 R 的逆

$$R^{-1} = \{<x, y> \mid <y, x>\in R\}，$$

和 R 与 Q 的复合

$$Q\circ R = \{<x, y> \mid \text{ 存在 } z\text{，使得}<x, z>\in R \text{ 且}<z, y>\in Q\}。$$

同样有$(R^{-1})^{-1} = R$ 和 $S\circ(Q\circ R) = (S\circ Q)\circ R$。

其它性质也和前面定义的集合的相应概念的性质类似(参见定理 8.1.8 和 3.1.6、习题 3.1.3 等)。

A 是类，如果关系 $R \subseteq A\times A$，则称 R 是 A 上的关系。

可以进一步定义 A 上的等价关系(参见定义 3.2.1)、A 上的偏序关系(参见定义 3.3.1)、A 上的良序关系(参见定义 5.1.1)，等等。它们的性质对于类也是成立的。

利用类上的关系可以简化一些问题的叙述和讨论。如我们有：

(1) 包含关系 $\subseteq$ 是全体集合的类 **V** 上的偏序关系(参见定理 1.2.7)。

(2) 等势是全体集合的类 **V** 上的等价关系(参见定理 4.1.2)，所有和集合 A 等势的集合组成的类就是 A 的等价类。

(3) 相似是全体偏序集的类上的等价关系(参见定理 3.4.16)，它限制在全体良序集的类上就是良序集的相似(参见定理 5.1.13)，所有和良序集 A 相似的良序集组成的类就是 A 的等价类。

(4) 序数的小于等于关系是全体序数的类 **Ord** 上的良序关系(参见定理 5.3.3 和 5.3.9)。

(5) (在选择公理下)基数的小于等于关系是全体基数的类 **Card** 上的良序关系(参见定理 4.2.7、6.2.3 和 6.2.4)。

我们用关系定义映射。

9.2.7 定义 映射 F 是一个关系，如果

任给$<x, y>, <x, z>\in F$，都有 $y = z$，

则称 F 是一个映射。

9.2.8 定义 A 到 B 的映射 A 和 B 是类，F 是映射，如果 F 满足：$\mathrm{dom}(F) = A$ 且 $\mathrm{ran}(F) \subseteq B$，则称 F 是 A 到 B 的映射，记为 $F：A\to B$。

类似地，我们还可以定义单射、满射、双射(参见定义 8.1.10、8.1.12 和 8.1.13)，映射的限制和复合(参见定义 8.1.7)，子类的像和逆像(参见定义 2.4.1 和 2.4.7)。它们和前面定义的相应概念有类似的性质(参见定理 8.1.16、8.1.17、8.1.18、2.2.13、2.3.4、2.3.5、2.3.6、2.4.3、2.4.4 和 2.4.9 等)。

有些关于集合的概念不能推广到类上，最重要的有幂集 $\mathrm{P}(A)$ 和卡氏幂 B^A。

对于一个类来说，我们无法保证它的子类是集合，所以不能形成以这些子类为元素的类。类似地，我们无法保证从一个类到一个类的映射是集合，所以不能形成以这些映射为元素的类。

最后，我们用映射来严格表述和证明超穷归纳定义。

如果我们对每个序数α定义了 K_α，则

$F = \{<\alpha, \mathrm{K}_\alpha> \mid \alpha\in\mathbf{Ord}\}$

是一个关系。按“定义”的含义，一个序数α只能定义一个 K_α，所以 F 还是一个映射。我们对每个序数α都定义了 K_α，所以 F 的定义域 $\mathrm{dom}(F) = \mathbf{Ord}$。如果我们取类 A，使得$\{\mathrm{K}_\alpha \mid \alpha\in\mathbf{Ord}\}\subseteq A$，则 F 就是 **Ord** 到 A 的映射

因此，可以用 **Ord** 到 A 的映射 F 来严格表述“对每个序数α定义 K_α”。在这种表述下，K_α就是 $F(\alpha)$。

超穷归纳定义的关键是“由所有$\beta<\alpha$的 K_β来定义 K_α”，“所有$\beta<\alpha$的 K_β”就是集合$\{\mathrm{K}_\beta \mid \beta<\alpha\}$，用 F 来表示就是$\{F(\beta) \mid \beta<\alpha\}$，也就是 $F[\mathbf{O}(\alpha)]$。

所以“由所有$\beta<\alpha$的 K_β来定义 K_α”就是用 $F[\mathbf{O}(\alpha)]$来定义 $F(\alpha)$。如果定义的方法用 **V** 到 A 的映射 G 来表示，则“由所有$\beta<\alpha$的 K_β来定义 K_α”就是说映射 F 满足 $F(\alpha) = G(F[\mathbf{O}(\alpha)])$。

另外，当给定一种方法 G 后，得到的定义 F 应该是惟一的。

综合以上讨论，超穷归纳定义的严格表述就是：

任给 **V** 到 A 的映射 G，存在惟一的 **Ord** 到 A 的映射 F，使得任给序数α，都有 $F(\alpha) = G(F[\mathbf{O}(\alpha)])$。

以下是超穷归纳定义的严格证明。证明的思路是：先对每个序数σ，证明存在惟一的满足类似条件的 $\mathbf{O}(\sigma)$到 A 的映射，再用这些映射构造惟一的满足条件的 **Ord** 到 A 的映射 F。

9.2.9 引理 A 是类，G 是 **V** 到 A 的映射，F_1 是 $\mathbf{O}(\sigma)$到 A 的映射，F_2 是 $\mathbf{O}(\delta)$到 A 的映射，$\sigma\le\delta$。如果 F_1 和 F_2 满足：任给序数$\alpha\in\mathbf{O}(\sigma)$，都有

$F_1(\alpha) = G(F_1[\mathbf{O}(\alpha)])$且 $F_2(\alpha) = G(F_2[\mathbf{O}(\alpha)])$

则 $F_1 = F_2\,|_{\mathbf{O}(\sigma)}$。

证 对$\alpha\in\mathbf{O}(\sigma)$归纳证明 $F_1(\alpha) = F_2(\alpha)$。

如果任给$\beta<\alpha$，都有 $F_1(\beta) = F_2(\beta)$，则 $F_1[\mathbf{O}(\alpha)] = F_2[\mathbf{O}(\alpha)]$，所以 $F_1(\alpha) = G(F_1[\mathbf{O}(\alpha)]) = G(F_2[\mathbf{O}(\alpha)]) = F_2(\alpha)$。■

9.2.10 引理 A 是类，G 是 **V** 到 A 的映射，则任给序数σ，

都存在惟一的 $\mathbf{O}(\sigma)$到 A 的映射 F_σ，使得

任给$\alpha\in\mathbf{O}(\sigma)$，都有 $F_\sigma(\alpha) = G(F_\sigma[\mathbf{O}(\alpha)])$。

证 由引理 9.2.9 得 F_σ的惟一性，以下对σ归纳证明存在满足条件的 F_σ。

(1) $\sigma = 0$，取 $F_\sigma = \varnothing$，则 $\mathrm{dom}(F_\sigma) = \mathrm{dom}(\varnothing) = \varnothing = \mathbf{O}(\sigma)$。

(2) σ是后继序数β^+，由归纳假设，存在 F_β满足条件。取

$F_\sigma = \{<\alpha, G(F_\beta[\mathbf{O}(\alpha)])> \mid \alpha\in\mathbf{O}(\sigma)\}$，

则任给$\alpha\in\mathbf{O}(\beta)$，都有 $F_\sigma(\alpha) = G(F_\beta[\mathbf{O}(\alpha)]) = F_\beta(\alpha)$，所以，

任给$\alpha\in\mathbf{O}(\sigma)$，都有 $F_\sigma[\mathbf{O}(\alpha)] = F_\beta[\mathbf{O}(\alpha)]$，

因此，任给$\alpha\in\mathbf{O}(\sigma)$，都有 $F_\sigma(\alpha) = G(F_\beta[\mathbf{O}(\alpha)]) = G(F_\sigma[\mathbf{O}(\alpha)])$。

(3) σ是极限序数，由归纳假设，任给$\alpha\in\sigma$，都存在 F_α满足条件。取

$F_\sigma = \{<\alpha, F_{\alpha^+}(\alpha)]> \mid \alpha\in\mathbf{O}(\sigma)\}$，

则任给$\alpha\in\mathbf{O}(\sigma)$，任给$\gamma\in\mathbf{O}(\alpha)$，由引理 9.2.9 得

$F_{\gamma^+}(\gamma) = F_{\alpha^+}(\gamma)$，

所以

$F_\sigma(\gamma) = F_{\gamma^+}(\gamma) = F_{\alpha^+}(\gamma)$，

所以，

任给$\alpha\in\mathbf{O}(\sigma)$，都有 $F_\sigma[\mathbf{O}(\alpha)] = F_{\alpha^+}[\mathbf{O}(\alpha)]$，

因此，任给$\alpha\in\mathbf{O}(\sigma)$，都有

$F_\sigma(\alpha) = F_{\alpha^+}(\alpha) = G(F_{\alpha^+}[\mathbf{O}(\alpha)]) = G(F_\sigma[\mathbf{O}(\alpha)])$。■

9.2.11 引理 A 是类，G 是 **V** 到 A 的映射，F_1 和 F_2 都是 **Ord** 到 A 的映射。如果 F_1 和 F_2 满足：任给序数$\alpha\in\mathbf{Ord}$，都有

$F_1(\alpha) = G(F_1[\mathbf{O}(\alpha)])$且 $F_2(\alpha) = G(F_2[\mathbf{O}(\alpha)])$

则 $F_1 = F_2$。

证 类似于引理 9.2.9，将$\alpha\in\mathbf{O}(\sigma)$改为$\alpha\in\mathbf{Ord}$。详细证明留给读者。■

9.2.12 定理 超穷归纳定义 A 是类，G 是 **V** 到 A 的映射，则存在惟一的 **Ord** 到 A 的映射 F，使得

任给$\alpha\in\mathbf{Ord}$，都有 $F(\alpha) = G(F[\mathbf{O}(\alpha)])$。

证 由引理 9.2.11 得 F 的惟一性。

由引理 9.2.10 得任给序数α，都存在惟一的 $\mathbf{O}(\alpha)$到 A 的映射 F_α，满足

任给$\gamma\in\mathbf{O}(\alpha)$，都有 $F_\alpha(\gamma) = G(F_\alpha[\mathbf{O}(\gamma)])$。

取

$$F = \{<\alpha, F_{\alpha^+}(\alpha)> \mid \alpha\in\mathbf{Ord}\},$$

则任给$\alpha\in\mathbf{Ord}$，任给$\gamma\in\mathbf{O}(\alpha)$，由引理 9.2.9 得

$$F_{\gamma^+}(\gamma) = F_{\alpha^+}(\gamma),$$

所以

$$F(\gamma) = F_{\gamma^+}(\gamma) = F_{\alpha^+}(\gamma),$$

所以，

任给$\alpha\in\mathbf{Ord}$，都有 $F[\mathbf{O}(\alpha)] = F_{\alpha^+}[\mathbf{O}(\alpha)]$，

因此，任给$\alpha\in\mathbf{Ord}$，都有

$$F_\sigma(\alpha) = F_{\alpha^+}(\alpha) = G(F_{\alpha^+}[\mathbf{O}(\alpha)]) = G(F[\mathbf{O}(\alpha)])。\blacksquare$$

习题 9.2

9.2.1 证明引理 9.1.11。

9.2.2 超穷归纳定义第二形式 A 是类，$a\in A$，H 是 A 到 A 的映射，G 是 $\mathbf{V}$ 到 A 的映射，则存在惟一的 $\mathbf{Ord}$ 到 A 的映射 F，满足：

(1) $F(0) = a$。

(2) $F(\alpha^+) = H(F(\alpha))$。

(3) 如果σ是极限序数，则 $F(\sigma) = G(F[\mathbf{O}(\sigma)])$。

9.3 从素朴的观点看集合论悖论

作出类和集合的区别，就可以简单地说，集合论悖论产生的原因在于将真类当作集合来应用。但是这样说几乎等于什么都没说，仅仅是将集合论悖论转化为什么是集合的问题，实际上任何一种解决集合论悖论的方案，最关键的都是要确定什么的集合。所以，要用素朴的观点来分析和解决集合论悖论，就需要进一步讨论如何在类中区分出集合来，即用什么样的标准来判定哪些类是集合。

类和集合是非常一般的概念，什么是集合的问题是不能彻底回答的。只有随着数学实践来确定哪些类是集合，哪些类是真类，任何时间，总有一些类无法确定其到底是不是集合。不可能有一个一劳永逸的方法将它们完全确定，这和我们无法一劳永逸的确定整个宇宙一样。

这样的看法并不是说我们对于悖论无所作为，恰恰相反，从这种观点出发，不但可以解决已出现的悖论，而且对于将来可能出现的新的悖论也能正确对待，只需再次排除某些集合就可以了。

详细地说，随着数学的实践，我们能够确定一些类作为集合，随着矛盾的出现，我们又可以确定一些类是真类。建立在集合论基础上的数学大厦既不会被已出现的悖论所动摇也不会被以后出现的悖论所动摇，至多只需调整其中的某些部分。这实际上也是大多数数学工作者对待集合论悖论的态度。

到目前为止，有什么类应该是集合呢？当然，人们的看法有所不同，但大多数人还是有一些公共的看法。

(1) 有限类是集合 有限的一堆东西可以在整体把握应该是没有什么问题的。

(2) 集合的子类是集合 由类的意义，一个集合的任何一部分元素可以组成类，这个性质保证了这样的类是集合。

对于性质(2)是可以提出质疑的。一堆东西可以在整体上把握，并没有充分理由保证它的一部分也是可以在整体上把握的。以自然数为例，通过充分理解 0, 1, 2,⋯⋯的序关系可以从整体上把握全体自然数的集合，但对于自然数的一个无规律的子类(如果每个规律都是由刻画自然数性质的语言所表示，则这样的子类一定存在)，就很难说出一个理由可以从整体上把握它。

不过，虽然性质(2)没有太充足的理由，但人们还是倾向于接受它。

在性质(2)下，我们称集合的子类为子集。如果 A 和 B 都是集合，则 $A\cap B$ 和 $A\setminus B$ 都是 A 的子集，所以交和差这两种运算对于集合是封闭的。注意，如果两个类的交(或差)是集合，则这两个类并不一定是集合。

因为集合的子类是集合，所以如果一个类的子类是真类，则这个类也是真类。因为 $\mathbf{Rus} \subseteq \mathbf{V}$，所以我们证明了 **Rus** 是真类也就证明了 **V** 是真类。

9.3.1 定理 全体集合的类 **V** 是真类。

证 用反证法。设 **V** 是集合，取 **V** 的子类

$$\mathbf{Rus} = \{x \mid x\in\mathbf{V} \text{ 且 } x\notin x\}$$

则 **Rus** 也是一个集合，所以 $\mathbf{Rus}\in\mathbf{V}$。

由 **Rus** 的定义可知，任给 $x\in\mathbf{V}$，都有

$$x\in\mathbf{Rus} \text{ 当且仅当 } x\notin x,$$

所以对于 $\mathbf{Rus}\in\mathbf{V}$ 也有

$$\mathbf{Rus}\in\mathbf{Rus} \text{ 当且仅当 } \mathbf{Rus}\notin\mathbf{Rus},$$

矛盾。■

因为集合 A 的每个子集都是集合，所以全体这样的子集可以组成了 A 的幂集

$$\mathsf{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}。$$

注意 $\mathsf{P}(A)$只是一个类。仅有性质(2)，我们并不能证明 $\mathsf{P}(A)$是一个集合。

(3) 集合的幂集是集合 直观地说，如果一堆东西可以从整体上把握，则也可以从整体上把握由它的全体子集组成的类。

性质(3)的问题更多。整体上把握这样的类几乎毫无道理。接受它有两个重要的原因，一是数学中没有它不行，二是还未发现它带来矛盾。

最好的作法应该是，在某种限制下的幂集才是集合。但目前还找不到合适的限制，只好接受“所有的幂集都是集合”。

因为$|A|<|\mathsf{P}(A)|$，所以性质(3)还说明了有越来越大的基数。

Γ是集合族，Γ的并$\bigcup\Gamma$是一个类。当Γ是集合时，$\bigcup\Gamma$是否是集合呢？

(4) 是集合的集合族的并是集合 这是说如果集合族Γ是集合，则它的并$\bigcup\Gamma$也是集合。

性质(4)的直观意义是，如果一堆东西分成若干部分，每一部分可以从整体上把握，也就是每个部分的总体都存在，而这些总体放在一起也能从整体上把握，则这堆东西就能从整体上把握。

A 和 B 是集合，A 和 B 组成的类$\{A, B\}$是集合，所以

$$A\cup B = \bigcup\{A, B\}$$

也是集合，因此集合对于并运算是封闭的。

因为两个集合的并是集合，所以，如果一个真类分成两个类的并，则其中必有一个是真类。

A 和 B 是集合，由定理 8.1.4 得

$$A\times B \subseteq \mathsf{P}(\mathsf{P}(A\cup B)),$$

所以 $A\times B$ 是集合，这说明了集合对于卡氏积也是封闭的。如果 A 是集合，则 A 上关系也是集合，因为 A 上关系是 $A\times A$ 的子集。特别的，如果 A 是集合，则 A 到 A 的映射(它也是 A 上关系)是集合。

如果没有无限集合，则性质(2)、(3)、(4)都是性质(1)的推论，因为有限集合的子集、幂集和并都是有有限集，而性质(1)是毫无疑问的。因此可以说，没有无限集合，也就不需要集合论了。

没有无限集合，也就没有全体自然数的集合。虽然我们可以从全体自然数的类构造出全体整数的类和全体有理数的类(需要适当修改第八章的构造方法，用等价类中的一个元素代替等价类)，但没有有理数的集合，是无法构造出全体实数的类来的。没有实数，数学剩下的大概不会太多了。因此数学是需要无限集合的。

(5) 存在无限集合。

有了无限集合，就有全体自然数的集合，再使用子集、幂集和集合的并三种集合的构造方法，就能得到数学中使用的极大多数集合。

通过 Russell 悖论(将它当作一种反证法)，我们得到了全体集合的类 $\mathbf{V}$ 是真类(定理 9.3.1)。用类似的方法可以证明更多的类是真类。

9.3.2 定理 $\mathbf{V}$ 是全体集合的类，F 是 $\mathbf{V}$ 到 A 的双射，则 A 是真类。

证 用反证法。设 A 是集合，取 A 的子类

$$B = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin F^{-1}(x)\}$$

则 B 也是一个集合，所以 $B\in\mathbf{V}$，因此 $F(B)\in A$。

由 B 的定义可知，任给 $x\in A$，都有

$$x\in B \text{ 当且仅当 } x\notin F^{-1}(x),$$

所以对于 $F(B)\in A$ 也有

$$F(B)\in B \text{ 当且仅当 } F(B)\notin F^{-1}(F(B)),$$

也就是，

$$F(B)\in B \text{ 当且仅当 } F(B)\notin B,$$

矛盾。■

如果 F 是 $\mathbf{V}$ 到 A 的单射，则 F 就是 $\mathbf{V}$ 到 $F[A]$的双射，由定理 9.3.2 得 $F[A]$是真类，又因为 $F[A]$是 A 的子类，所以 A 也是真类。

这样，我们可以通过构造 $\mathbf{V}$ 到类 A 的单射来证明类 A 是真类。

如将集合 X 对应到有序对$\langle X, X\rangle$就能证明全体有序对的类是真类，将集合 X 对应到 X 的恒等映射 i_X 就能证明全体集合到集合的映射组成的类是真类，等等。

定理 9.3.2 告诉我们，和真类 $\mathbf{V}$ 一一对应的类也是真类，一个自然的推广是：和真类一一对应的类也是真类。注意，这个推广并不能证明，所以我们需要关于集合的一条重要性质。

(6) 和集合一一对应的类是集合　详细地说就是：如果存在 A 到 B 的双射，则 A 是集合当且仅当 B 是集合。

这六条性质比较直观，它们所决定的集合基本上满足了数学的需要。

当然，由于哲学(对世界的某种看法)、方法(数学推理的简化)、美(理论的完满性)等方面的原因，可以增加和限制所肯定的集合，也可以实质性的改变这六条性质。标准是它能够避免已经发现的悖论和能够为数学提供足够多的集合。

习题 9.3

9.3.1　$\mathbf{V}$ 是全体集合的类，A 是类。不使用性质(6)证明：如果存在 $\mathbf{V}$ 到 A 的单射，则 A 是真类。

9.3.2　证明以下的类是真类。

(1) $\mathbf{P}$ 是全体有序对的类。

(2) $\mathbf{F}$ 是全体集合到集合的映射的类。

(3) κ是不为 0 的基数，$\mathbf{C}_\kappa = \{X \mid X\in\mathbf{V} \text{ 且} |X| = \kappa\}$。

(4) α是不为 0 的序数，$\mathbf{O}_\alpha = \{X \mid X \text{ 是良序集且 } \overline{X} = \alpha\}$。