同济大学　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　高等代数（下）
课号：12223102　　　　　　　　　　　　　　　　2021-22学年第二学期

习题纸3

习题 1. (商空间) 设V是$\mathbb{F}$上的线性空间，W是V的子空间。记$\pi : V \to V/W$为投影映射。

1. 证明：存在一个线性映射$s : V/W \to V$，使得$\pi \circ s = Id_{V/W}$，并证明$Im(s)$是W在V中的一个直和补。
2. 证明：若V是有限维线性空间，则$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$。
3. 设$f : V \to U$是一个线性映射。 证明：f诱导一个从$V/\ker(f)$到$\mathrm{Im}(f)$的同构。特别，若f是满射，则f诱导一个从$V/\ker(f)$到U的同构。

习题 2. 设Δ为线性空间$\mathbb{R}_n[X]$上的线性变换

$$\begin{aligned}\Delta : \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}_n[X]\\ P &\mapsto P(X+1) - P(X).\end{aligned}$$

求Δ在基$\{1, X, \cdots, X^n\}$下的矩阵，并求Δ的核与像。

习题 3. 设V是n维线性空间，$V_1, \cdots, V_k$是V的子空间。证明：若$\sum_{i=1}^{k} \dim(V_i) > n(k-1)$，则$\cap_{i=1}^{k} V_i \neq \{0\}$。

习题 4. 设$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$在标准单位基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

求$\mathrm{Ker}(f)$与$\mathrm{Im}(f)$的一组基。

习题 5. (投影变换) 设线性空间V的两个子空间V_1和V_2在V中是直和补。若$x \in V$可以写成$x_1 + x_2$的形式，其中$x_1 \in V_1$，$x_2 \in V_2$，定义$p(x) = x_1 \in V$。

1. 证明：p定义一个V上的线性变换。

   我们称p是平行于V_2的在V_1上的**投影变换**。
2. 证明：$\ker(p) = V_2$，$\mathrm{Im}(p) = \ker(s - Id_V) = V_1$。
3. 证明：一个V上的线性变换$p \in L(V, V)$是一个投影变换当且仅当p满足$p \circ p = p$（即$p^2 = p$）。