习题纸5

习题 1. 证明：函数$f(x) = \arcsin(1-x^4)$在0处可导。

习题 2.

1. 设函数f是定义在区间I上的可导函数，常数$k \geqslant 0$。证明下列命题等价：
   (a) f是k-Lipschitz函数；
   (b) 对任何$x \in I$都有$|f'(x)| \leqslant k$。
2. 设f是定义在开区间I上的$\mathcal{C}^1$函数。证明：对I中的任何一点x，存在x的一个邻域U，使得$f_{|U}$是Lipschitz函数。

习题 3. 证明：双曲正弦函数$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是可导双射，且其反函数也可导并求其导函数。

习题 4. 设f是$\mathbb{R}$上的函数，在0处连续，且极限$l = \lim_{x\to 0} \frac{f(3x)-f(x)}{x}$存在。证明：$f$在0处可导，并求$f'(0)$。

习题 5. 证明：函数$f(x) = x - \sin(x)$在$\mathbb{R}$上严格单调递增。

习题 6. 设f是区间$[a,b]$上的可导函数，$a < b$，满足$f(a) = f(b)$，$f'(a) = 0$。证明：存在$c \in (a,b)$使得

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

习题 7. 设$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$为连续函数，在$(0, +\infty)$上可导，且满足

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0).$$

证明：存在$c \in (0, +\infty)$使得$f'(c) = 0$。（提示：证明f不是单射）

习题 8. 考虑函数

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, x > 0 \\ 0, x \leqslant 0. \end{cases} \end{aligned}$$

证明：对任何正整数n，都存在一个多项式$P_n \in \mathbb{R}[X]$，使得对任何$x > 0$，

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

并以此证明f是$\mathcal{C}^\infty$函数。