# 习题纸12

**习题 1.** 设$f_n(x)$为一函数列，且每个$f_n$都为多项式函数。证明若$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于某个函数$f$，则$f$亦为多项式函数。

**习题 2.** 考察以下函数列在给定区间内的收敛性和一致收敛性：

1. $f_n(x)=\arctan(nx)$，$x\in(0,+\infty)$。
2. $f_n(x)=x\arctan(nx)$，$x\in(0,+\infty)$。
3. $f_n(x)=\begin{cases}(1-\frac{x}{n})^n & 0\leqslant x\leqslant n,\\ 0 & x>n.\end{cases}$，$x\in[0,+\infty)$。

**习题 3.** 讨论下列函数列在所定义区间上的一致收敛性及极限函数的连续性、可微性和可积性：

1. $f_n(x)=xe^{-nx^2}$，$x\in[-l,l]$。
2. $f_n(x)=\frac{nx}{nx+1}$，分别讨论$x\in[0,+\infty)$和$x\in[a,+\infty)$（$a>0$）。

**习题 4.** 证明下列命题：

1. 幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在其收敛区间内的任何闭区间上一致收敛。
2. 若级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛，则函数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^x}$在$[0,+\infty)$上一致收敛。
3. 黎曼Zeta函数$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$上任意次可导。

**习题 5.** 求下列函数项级数的收敛域并研究和函数连续性：

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}(x+\frac{1}{n})^n$。
2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x+(-1)^nn}{x^2+n^2}$。