

2023年数学科学学院青年教师教学竞赛

同济大学数学科学学院 金方舟

April 14, 2023

二次型

设 $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ 是一个域

Definition

设 V 是 \mathbb{F} 上的线性空间, $q: V \rightarrow \mathbb{F}$ 是一个映射。若 q 满足

- ① 对任何 $\lambda \in \mathbb{F}$ 和向量 $x \in V$, 都有 $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
- ② 函数

$$b_q: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

是 V 上的对称双线性函数

则称 q 是 V 上的一个 二次型

有限维线性空间上的二次型

Lemma

若 V 是 \mathbb{F} 上有限维线性空间, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ 是 V 的一组基, q 是 V 上的二次型, 则 q 可唯一地写成如下形式:

$$\begin{aligned} q(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} q_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n q_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} q_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

其中 $q_{ij} \in \mathbb{F}$

二次型=二次齐次多项式

度量矩阵

Definition

对 $1 \leq i, j \leq n$, 记 $a_{ij} = \frac{1}{2}(q_{ij} + q_{ji})$, 其中当 $i > j$ 时 $q_{ij} = 0$ 。则称 n 阶对称矩阵

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{F})$$

为 q 在 \mathcal{B} 下的度量矩阵, 简称 q 在 \mathcal{B} 下的矩阵

- 若记 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 则二次型 q 可用其度量矩阵表示为

$$q(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = X^T A X$$

- 对一组给定的基 \mathcal{B} , 二次型与对称矩阵之间经由度量矩阵形成了一一对应

度量矩阵的基变换

Lemma

若 \mathcal{B}' 是另一组基, $P \in GL_n(\mathbb{F})$ 是从 \mathcal{B} 到 \mathcal{B}' 的过渡矩阵, 则 q 在基 \mathcal{B}' 下的矩阵为 P^TAP

Proof.

设 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 和 $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ 为同一向量 x 在基 \mathcal{B} 和 \mathcal{B}' 下的坐标,

则有

$$X = PX'$$

故有

$$q(x) = X^TAX = X'^T(P^TAP)X'$$

即 q 在基 \mathcal{B}' 下的矩阵为 P^TAP



对称矩阵的合同

- 一般地, 设 A 和 B 是两个对称矩阵, 若存在可逆矩阵 $P \in GL_n(\mathbb{F})$ 使得 $B = P^T A P$, 则称 A 和 B 合同
- 对称矩阵的合同是等价关系
- 两个合同矩阵必定等价, 所以它们的秩相同
- 一个二次型在任何一组基下的矩阵的秩称为该二次型的秩

Theorem (高斯定理)

任何一个对称矩阵都合同于一个对角矩阵, 称为 A 的一个合同标准形

注意: 合同对角化不一定是相似对角化

高斯定理的证明

对矩阵 A 的阶数 n 递归:

- 若 $n = 1$, 显然任何矩阵都是对角矩阵
- 假设 $n \geq 2$, 并且结论对于阶数小于 n 的矩阵都成立
不妨设 $A \neq 0$, 且 A 对应于二次型

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j$$

只需证明该二次型 q 在某组基下可化成对角形式

高斯定理的证明II

分情况讨论:

- 若 A 的对角线元素不全为0, 即存在某个 i 使得 $a_{ii} \neq 0$, 不妨设 $a_{11} \neq 0$, 则有

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_{11}(x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{a_{1i}}{2a_{11}}x_i)^2 + q_1(x_2, \dots, x_n)$$

其中 $q_1(x_2, \dots, x_n)$ 是 \mathbb{F}^{n-1} 上的二次型 (变量个数减少一个)
由于 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{a_{1i}}{2a_{11}}x_i, x_2, \dots, x_n)$ 是可逆线性变换, 故由归纳假设知 q 可对角化

高斯定理的证明III

- 若 A 的对角线元素全为0, 由于 $A \neq 0$, 故存在 $i < j$ 使得 $a_{ij} \neq 0$, 不妨设 $a_{12} \neq 0$, 并记

$$x' = x_1 + \sum_{i=3}^n \frac{a_{1i}}{2a_{12}} x_i$$

$$x'' = x_2 + \sum_{i=3}^n \frac{a_{2i}}{2a_{12}} x_i$$

则有

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= a_{12}x'x'' + q_2(x_3, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{4}a_{12}(x' + x'')^2 - \frac{1}{4}a_{12}(x' - x'')^2 + q_2(x_3, \dots, x_n) \end{aligned}$$

其中 $q_2(x_3, \dots, x_n)$ 是 \mathbb{F}^{n-2} 上的二次型 (变量个数减少两个)
由于 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x' + x'', x' - x'', x_3, \dots, x_n)$ 是可逆线性变换, 故由归纳假设知 q 可对角化

合同对角化的例子

例：求对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 的合同对角化

- A 对应的二次型为

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3 \\ &= 2(x_1 - 3x_3)(x_2 + x_3) + 6x_3^2 \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - 4x_3)^2 + 6x_3^2 \end{aligned}$$

- 若记 $x'_1 = x_1 + x_2 - 2x_3$, $x'_2 = x_1 - x_2 - 4x_3$, 则

$$q(x'_1, x'_2, x_3) = \frac{1}{2}x_1'^2 - \frac{1}{2}x_2'^2 + 6x_3^2$$

合同对角化的例子

- 由于

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

故若记

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则有

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

实对称矩阵的合同矩阵

- 设 $F = \mathbb{R}$ 为实数域, V 是 \mathbb{R} 上有限维线性空间

Theorem (惯性定理I)

对任何 V 上秩为 r 的二次型 q , 存在 V 的一组基 \mathcal{B} 使得 q 在 \mathcal{B} 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$