习题纸8

习题 1. 设f是定义在$[a,b]$上的有界函数。

1. 证明：若f只有有限个间断点，则f可积。
2. 证明：若f只有可列个间断点，则f可积。

   提示：对任意$\epsilon > 0$，构造一列开区间$I_1, I_2, \cdots$使得$\cup_i I_i$包含f的所有间断点，并且所有I_i的长度之和小于ϵ。

习题 2. 设函数f定义在$[a,b]$上，且满足对任何$\epsilon > 0$，都存在$[a,b]$上的可积函数g使得对任何$x \in [a,b]$都有$|f(x)-g(x)| \leqslant \epsilon$。证明：$f$在$[a,b]$上可积。

习题 3. 设f是定义在$[a,b]$上的有界函数，且对于任何$c \in (a,b)$，f在$[a,c]$上可积。证明：f在$[a,b]$上可积。

习题 4. 设函数$f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$可导且严格递增，$f(0)=0$。

1. 证明：
$$\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x).$$
2. 证明：对任何$a,b>0$都有
$$\int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt \geqslant ab,$$
   且等号成立当且仅当$b=f(a)$。

习题 5. 设f是定义在$[a,b]$上的非负连续函数。证明：
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f^n(t)dt\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

习题 6. 设常数$c>0$。证明：对任何$x>0$都有
$$|\int_x^{x+c} \sin(t^2)dt| < \frac{1}{x}.$$

习题 7. 设$f:[a,b] \to (0,+\infty)$是可积函数。证明：$\int_a^b f > 0$。
提示：用反证法，考虑达布上和，并以此构造闭区间套。