习题纸14

习题 1. 证明：若以2π为周期的函数$f(x)$的傅里叶级数为$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos nx+b_n\sin nx\Big)$，则函数$f(x)\sin x$的傅里叶级数为

$$f(x)\sin x\sim\frac{b_1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{b_{n+1}-b_{n-1}}{2}\cos nx+\frac{a_{n-1}-a_{n+1}}{2}\sin nx\Big).$$

习题 2.

1. 设$f(x)$是周期2π的可积函数，h为常数。若f的傅里叶系数为a_n,b_n（$n\geqslant 0$），求$f(x+h)$的傅里叶系数$a_n(h),b_n(h)$。
2. 设$f(x)$是周期2π的可积函数，h为常数。若f的傅里叶系数为a_n,b_n（$n\geqslant 0$），求函数
$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)dt$$
的傅里叶系数$A_n(h),B_n(h)$。

习题 3.

1. 将函数$f(x)=x^2$，$x\in[0,\pi]$分别按正弦和余弦展开。
2. 设f为$[-\pi,\pi]$上的可积函数，则有Parseval等式：
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n^2+b_n^2\Big). \tag{1}$$
写出下列函数的Parseval等式：
   (a) $f(x)=x^2$，$f(x)=x^3$和$f(x)=x^4$，$x\in[-\pi,\pi]$；
   (b) $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant\alpha\\ 0, & \alpha<|x|\leqslant\pi.\end{cases}$，$\alpha\in[0,\pi]$。

习题 4. 设m,n为非负整数。证明积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{(2m+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt$$

收敛，并求其值。