习题纸19

习题 1. 设$x \in (-1,1)$。求$f(x) = \int_0^\pi \ln(1 + x\cos(t))dt$。

习题 2.
1. 证明函数$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$在$\mathbb{R}$上连续，在$(0,+\infty)$上可导，并且有
$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2(1+t^2)}dt.$$
2. 证明积分$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$收敛，并且对任何$x > 0$都有
$$f'(x) = -2Ie^{-x^2}.$$
3. 求I的值。

习题 3.
1. 证明：对任何实数$x \neq \pm 1$，函数$F(x) = \int_0^\pi \ln(1-2x\cos(t)+x^2)dt$都有定义并且连续。
2. 证明：对任何实数$x \neq \pm 1$都有
$$F(-x) = F(x)$$
$$F(x^2) = 2F(x)$$
$$F(\frac{1}{x}) = F(x) - 2\pi\ln(|x|).$$
3. 当$|x| < 1$和$|x| > 1$时，分别计算函数$F(x)$的值。
4. 考虑函数$F'(x)$的表达式，并计算积分$G(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{1-2x\cos(t)+x^2}$的值。

习题 4. 设函数f在$[0,+\infty)$上连续，并且积分$\int_0^{+\infty} f(t)dt$收敛。证明：关于x的函数
$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}f(t)dt$$
在$[0,+\infty)$上收敛并且连续。

习题 5. 证明：存在唯一的实数x使得
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\ln(t)}{1+t^x}dt = 0.$$