

## 习题纸17

习题 1. 求下列函数的全微分:

1.  $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

2.  $f(x, y) = x^y$

3.  $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x}{y}}$

4.  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

习题 2. 证明: 函数  $f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$  连续且在原点附近存在有界的偏导数, 但在原点处不可微。

习题 3. 设  $E$  为  $\mathbb{R}^2$  中的开集,  $f$  为  $E$  上的函数。证明: 若  $f$  满足

1. 对任意  $y_0$ , 函数  $x \mapsto f(x, y_0)$  连续
2.  $f$  存在有界偏导数  $f'_y$

则函数  $f(x, y)$  连续。

习题 4. 设  $E$  为  $\mathbb{R}^2$  中的凸开集,  $f$  为  $E$  上的函数, 且存在有界的偏导数  $f'_x$  和  $f'_y$ 。证明  $f$  在  $E$  上一致连续。

习题 5. 若函数  $f(x, y, z)$  满足对任意  $t > 0$  都有  $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$ , 则称  $f$  为  $k$  次齐次函数。

1. 证明函数  $\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - xy$  和  $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$  为齐次函数并求其次数。
2. 证明若  $f(x, y, z)$  为可微的  $k$  次齐次函数, 则其偏导数  $f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z), f'_z(x, y, z)$  均为  $k-1$  次齐次函数。
3. 证明若  $f(x, y, z)$  可微, 则  $f(x, y, z)$  为  $k$  次齐次函数当且仅当对任意  $x, y, z$  如下等式成立:

$$xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z) = kf(x, y, z).$$