习题纸12

习题 1. 设$f_n(x)$为一函数列，且每个f_n都为多项式函数。证明若$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于某个函数f，则f亦为多项式函数。

习题 2. 考察以下函数列在给定区间内的收敛性和一致收敛性：

1. $f_n(x)=\arctan(nx)$，$x\in(0,+\infty)$。
2. $f_n(x)=x\arctan(nx)$，$x\in(0,+\infty)$。
3. $f_n(x)=\begin{cases}(1-\frac{x}{n})^n & 0\leqslant x\leqslant n,\\ 0 & x>n.\end{cases}$，$x\in[0,+\infty)$。

习题 3. 证明下列命题：

1. 幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$在其收敛区间内的任何闭区间上一致收敛。
2. 若级数$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛，则函数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^x}$在$[0,+\infty)$上一致收敛。
3. 黎曼Zeta函数$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$上任意次可导。

习题 4. 求下列函数项级数的收敛域并研究和函数连续性：

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}(x+\frac{1}{n})^n$。
2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x+(-1)^nn}{x^2+n^2}$。

习题 5.
1. 设$u_n(x)=\frac{x^n}{1-x^n}$。求函数项级数$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$的收敛域，并研究和函数连续性及可微性。
2. 证明：当$x\to1$时有$f(x)\sim\frac{\ln(1-x)}{x-1}$。

   提示：将$u_n(x)$和函数$\int_n^{n+1}\frac{x^t}{1-x^t}dt$比较。
3. 证明：当$|x|<1$时有$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)x^n$，其中$d(n)$为能整除$n$的正整数个数。