

## 习题纸4: 函数极限与连续性

设 $S$ 是 $\mathbb{R}$ 的子集, 常数 $k \geq 0$ . 若函数 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ 满足对任何 $x, y \in S$ 都有 $f(x) - f(y) \leq k|x - y|$ , 则称 $f$ 是 $k$ -Lipschitz函数。如果存在某个 $k$ 使得 $f$ 是 $k$ -Lipschitz函数, 则称 $f$ 是Lipschitz函数。

- 习题 1.**
1. 证明: 任何Lipschitz函数必定一致连续。
  2. 证明: 函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 但不是Lipschitz函数。
  3. 证明: 若常数 $0 \leq k < 1$ 且 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是 $k$ -Lipschitz函数, 则 $f$ 必定存在唯一的不动点, 即存在唯一的 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x) = x$ 。
  4. 证明: 若 $[a, b]$ 是有界闭区间, 函数 $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ 满足对任意 $x \neq y$ ,  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ , 则 $f$ 必定存在唯一的不动点。
  5. 举例说明: 若函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足对任意 $x \neq y$ ,  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ , 则 $f$ 不一定存在不动点。

**习题 2.** 证明:  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \left[ \frac{1}{\sqrt{x}} \right] = 1$ 。

**习题 3.** 证明: 函数 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ 在 $x = 0$ 处有可去间断点。

**习题 4.** 证明: 若函数 $f$ 和 $g$ 都在点 $a$ 连续, 则函数 $\max\{f, g\}$ 和 $\min\{f, g\}$ 都在点 $a$ 连续。

**习题 5.** 设函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为周期函数。

1. 证明: 若当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x)$ 有极限, 则 $f$ 是常值函数。
2. 证明: 若 $f$ 是连续函数, 则 $f$ 有界并且取到其上下确界。
3. 证明: 若 $f$ 是连续函数, 则 $f$ 一致连续。

**习题 6.** 设函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 。  
证明:  $f$ 有下界并且取到其下确界。

**习题 7.** 求所有满足 $f \circ f = f$ 的连续函数 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 。

**习题 8.** 设 $I$ 是区间,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数。证明:  $f$ 是单射当且仅当 $f$ 是严格单调函数。