习题纸2

习题 1. 设x为正实数，并记$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}[\frac{x}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}]$，其中$[t]$表示$t$的整数部分。以下用三种方法来计算$S(x)$的值。

1. 证明：$S(x)$至多只有有限项非零。
2. 证明：$[\frac{x}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}]=[\frac{x}{2^n}]-[\frac{x}{2^{n+1}}]$，并计算$S(x)$的值。
3. 证明：$[\frac{x}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}]$等于区间$[1,x]$内能写成$2^n\cdot(2q-1)$形式（$q$为整数）的整数个数，由此计算$S(x)$的值。
4. 证明：若x的二进制展开可以写成

$$x=a_p2^p+a_{p-1}2^{p-1}+\cdots+a_0+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{a_{-i}}{2^i},$$

其中$a_i\in\{0,1\}$，则有

$$[\frac{x}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}]=\begin{cases}a_p2^{p-n-1}+a_{p-1}2^{p-n-2}+\cdots+a_{n+1} & a_n=0\\ a_p2^{p-n-1}+a_{p-1}2^{p-n-2}+\cdots+a_{n+1}+1 & a_n=1,\end{cases}$$

由此计算$S(x)$的值。

习题 2. 设实数列(x_n)满足对任何正整数m,n都有$x_{m+n}\leqslant x_m+x_n$。

1. 证明：若数列$(\frac{x_n}{n})$存在下确界l，则数列$(\frac{x_n}{n})$收敛到l。
2. 证明：若数列$(\frac{x_n}{n})$无下界，则数列$(\frac{x_n}{n})$收敛到$-\infty$。

设S是$\mathbb{R}$的子集，常数$k\geqslant 0$。若函数$f:S\to\mathbb{R}$满足对任何$x,y\in S$都有$f(x)-f(y)\leqslant k|x-y|$，则称$f$是$k$-**Lipschitz函数**。

习题 3. 证明：

1. 证明：任何k-Lipschitz函数必定一致连续。
2. 证明：若常数$0\leqslant k<1$且$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是$k$-Lipschitz函数，则$f$必定存在唯一的不动点，即存在唯一的$x\in\mathbb{R}$使得$f(x)=x$。
3. 证明：若$[a,b]$是有界闭区间，函数$f:[a,b]\to[a,b]$满足对任意$x\neq y$，$|f(x)-f(y)|<|x-y|$，则f必定存在唯一的不动点。
4. 举例说明：若函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$满足对任意$x\neq y$，$|f(x)-f(y)|<|x-y|$，则$f$不一定存在不动点。