

习题纸15

习题 1. 对 \mathbb{R}^2 中的点 $P_0 = (x_0, y_0)$ 以及正数 $\delta > 0$, 分别记

$$U_1(P_0, \delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| + |y - y_0| < \delta\}$$

$$U_2(P_0, \delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < \delta^2\}$$

$$U_\infty(P_0, \delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0|, |y - y_0| < \delta\}$$

证明: 由 $U_1(P_0, \delta)$, $U_2(P_0, \delta)$, $U_\infty(P_0, \delta)$ 这三种类型类型的领域在 \mathbb{R}^2 中定义相同的开集。

习题 2. 设 X 是 \mathbb{R}^n 的子集。记 $\overset{\circ}{X}$ 为 X 的内点组成的集合, 称为 X 的内部; 记 \overline{X} 为 X 和 X 的聚点组成的集合, 称为 X 的闭包。证明:

1. $\overset{\circ}{X}$ 是 \mathbb{R}^n 中的开集, 并且若 U 是 X 的子集且是 \mathbb{R}^n 中的开集, 则 $U \subset \overset{\circ}{X}$ (即 $\overset{\circ}{X}$ 是 X 包含的最大的 \mathbb{R}^n 中的开集)。
2. \overline{X} 是 \mathbb{R}^n 中的闭集, 并且若 $Z \subset \mathbb{R}^n$ 包含 X 且是 \mathbb{R}^n 中的闭集, 则 $Z \supset \overline{X}$ (即 \overline{X} 是包含 X 的最小的 \mathbb{R}^n 中的闭集)。

习题 3. 记 $\{0, 1\}$ 为仅有两个点的集合, $[0, 1]$ 为 \mathbb{R} 中的单位区间。设 X 是 \mathbb{R}^n 的子集。定义:

1. 若从 X 到 $\{0, 1\}$ 的连续函数只有常值函数, 则称 X 是**联通集**。
2. 若对 X 中的任何两点 x, y 都存在一个连续映射 $f: [0, 1] \rightarrow X$ 使得 $f(0) = x$, $f(1) = y$ (即 f 是从 x 到 y 的一条道路), 则称 X 是**道路联通集**。

证明下列命题:

1. $[0, 1]$ 是联通集。
2. 道路联通集必定是联通集。
3. 若 X 是联通集, 则 \overline{X} 也是联通集。
4. \mathbb{R} 中的联通集恰好就是所有区间。
5. 若 X 是联通集, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 则 $f(X)$ 是一个区间。
6. (*) 集合 $C = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in (0, 1]\} \cup \{(0, x) \mid -1 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ 是联通集但不是道路联通集。¹
7. (*) \mathbb{R}^n 中的联通开集必定是道路联通集。

¹集合 C 通常称作**拓扑学家的正弦曲线**。