同济大学　　　　　　　　　　　　　　　　　　　数学分析(加)习题课
课号：00301501　　　　　　　　　　　　　　　　2022-23学年第一学期

习题纸16

习题 1. 考察以下二元函数$f(x,y)$在给定点(x_0,y_0)处的重极限$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$和累次极限$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$以及$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$的存在性：

1. $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$，$(x_0,y_0)=(0,0)$。
2. $f(x,y)=\log_x(x+y)$，$(x_0,y_0)=(1,0)$。
3. $f(x,y)=\frac{|x+y|}{x^2+y^2}$，$(x_0,y_0)=(0,0)$。
4. $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$，$(x_0,y_0)=(0,0)$。
5. $f(x,y)=x^y$，$(x_0,y_0)=(0,0)$。
6. $f(x,y)=\frac{\sin(x)-\sin(y)}{x-y}$，$(x_0,y_0)=(0,0)$。

习题 2. 证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)=(0,0)\\ \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0).\end{cases}$ 在原点处不连续，但是$f(x,y)$沿通过原点的任一直线连续，即对任意α都有

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos(\alpha),t\sin(\alpha))=0.$$

习题 3. 设X是$\mathbb{R}^n$的开集，$x_0\in U$，$f:X\to\mathbb{R}$为函数。

1. 设$x_0\in U$，$y_0=f(x_0)\in\mathbb{R}$。证明：函数f在点x_0处连续当且仅当对任何y_0的邻域U，其逆像$f^{-1}(U)$是x_0在X中的一个邻域。
2. 证明：函数f连续当且仅当对任何$\mathbb{R}$中的开集U，其逆像$f^{-1}(U)$是X中的一个开集。

习题 4. 设A为$\mathbb{R}^2$的非空子集。对$\mathbb{R}^2$中的任意点P，定义从P到A的距离为

$$d(P,A)=\inf_{a\in A} d(P,a).$$

证明：函数$P\mapsto d(P,A)$连续，且$d(P,A)=0$当且仅当$P\in\bar{A}$。

习题 5. 设二元函数$f(x,y)$在正方形区域$[0,1]\times[0,1]$上连续。比较$\inf_{y\in[0,1]}\sup_{x\in[0,1]} f(x,y)$与$\sup_{x\in[0,1]}\inf_{y\in[0,1]} f(x,y)$。

习题 6. 设I为区间，$f:I\to\mathbb{R}$为可导函数，考虑

$$\Gamma=\{\frac{f(x)-f(y)}{x-y}|x,y\in I,x<y\}\subset\mathbb{R}.$$

证明Γ是连通集并且有$\Gamma\subset f'(I)\subset\overline{\Gamma}$，并由此证明$f'(I)$是一个区间。