习题纸4

习题 1. 设$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$在标准单位基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

求$\mathrm{Ker}(f)$与$\mathrm{Im}(f)$的一组基。

习题 2. (投影变换) 设线性空间V的两个子空间V_1和V_2在V中是直和补。若$x\in V$可以写成x_1+x_2的形式，其中$x_1\in V_1$，$x_2\in V_2$，定义$p(x)=x_1\in V$。

1. 证明：p定义一个V上的线性变换。

   我们称p是平行于V_2的在V_1上的**投影变换**。

2. 证明：$\ker(p)=V_2$，$\mathrm{Im}(p)=\ker(s-Id_V)=V_1$。

3. 证明：一个V上的线性变换$p\in L(V,V)$是一个投影变换当且仅当p满足$p\circ p=p$（即$p^2=p$）。

习题 3. (对称变换) 设$\mathbb{R}$上线性空间V的两个子空间V_1和V_2在V中是直和补。若$x\in V$可以写成x_1+x_2的形式，其中$x_1\in V_1$，$x_2\in V_2$，定义$s(x)=x_1-x_2\in V$。

1. 证明：s定义一个V上的线性变换。

   我们称s是平行于V_2的在V_1上的**对称变换**。

2. 证明：$\ker(s-Id_V)=V_1$，$\ker(s+Id_V)=V_2$。

3. 设$s\in L(V,V)$是V上的线性变换。证明下列命题等价：

   (a) s是对称变换；

   (b) s满足$s\circ s=Id_V$（即$s^2=Id_V$，也称s是一个**对合映射**）；

   (c) $p=\frac{1}{2}(s+Id_V)$是一个投影变换。

4. 证明：$\mathbb{R}[X]$上的线性变换$P(X)\mapsto P(-X)$是一个对称变换，并求对应的V_1和V_2。

习题 4. 对$\mathbb{R}^3$空间的如下两组基$\mathcal{B}_1$和$\mathcal{B}_2$，求过渡矩阵$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$。

$$\mathcal{B}_1=\{(1,2,1),(2,3,3),(3,7,1)\} \text{ 和 } \mathcal{B}_2=\{(3,1,4),(5,3,2),(1,-1,7)\}$$