

## 习题纸16

**习题 1.** 考察以下二元函数 $f(x, y)$ 在给定点 $(x_0, y_0)$ 处的重极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ 和累次极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 以及 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 的存在性:

1.  $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 。
2.  $f(x, y) = \log_x(x+y)$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ 。
3.  $f(x, y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 。
4.  $f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 。
5.  $f(x, y) = x^y$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 。
6.  $f(x, y) = \frac{\sin(x)-\sin(y)}{x-y}$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 。

**习题 2.** 证明: 函数  $f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$  在 原点处不连续, 但是 $f(x, y)$ 沿通过原点的任一直线连续, 即对任意 $\alpha$ 都有

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos(\alpha), t \sin(\alpha)) = 0.$$

**习题 3.** 设 $X$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集,  $x_0 \in U$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为函数。

1. 设 $x_0 \in U$ ,  $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}$ 。证明: 函数 $f$ 在点 $x_0$ 处连续当且仅当对任何 $y_0$ 的邻域 $U$ , 其逆像 $f^{-1}(U)$ 是 $x_0$ 在 $X$ 中的一个邻域。
2. 证明: 函数 $f$ 连续当且仅当对任何 $\mathbb{R}$ 中的开集 $U$ , 其逆像 $f^{-1}(U)$ 是 $X$ 中的一个开集。

**习题 4.** 设 $A$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的非空子集。对 $\mathbb{R}^2$ 中的任意点 $P$ , 定义从 $P$ 到 $A$ 的距离为

$$d(P, A) = \inf_{a \in A} d(P, a).$$

证明: 函数 $P \mapsto d(P, A)$ 连续, 且 $d(P, A) = 0$ 当且仅当 $P \in \bar{A}$ 。

**习题 5.** 设二元函数 $f(x, y)$ 在正方形区域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上连续。比较 $\inf_{y \in [0, 1]} \sup_{x \in [0, 1]} f(x, y)$ 与 $\sup_{x \in [0, 1]} \inf_{y \in [0, 1]} f(x, y)$ 。

**习题 6.** 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集 $D$ 内连续。证明:  $f(x)$ 在 $D$ 内一致连续的充要条件是 $\forall x_0 \in \partial D$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in D} f(x)$ 存在。