习题纸18

习题 1. [高维的罗尔定理] 设$S=\{x\in\mathbb{R}^n, ||x||=1\}$为$\mathbb{R}^n$中的单位球面，$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为可微函数，并且$f_{|S}$为常值函数。证明：存在$x\in\mathbb{R}^n$，$||x||<1$，使得$df_x=0$。

习题 2. 设$\Gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|-1\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\}$。求函数

$$\begin{aligned} f:\Gamma&\to\mathbb{R}\\ (x,y)&\mapsto (x-y)^3-6xy \end{aligned}$$

的极值点和最值点。

习题 3. 记$O(n)$为n阶实正交矩阵的集合，求迹函数$\mathrm{Tr}:O(n)\to\mathbb{R}$上的极值点和最值点。

提示：任何正交矩阵都正交相似于一个分块对角矩阵，其中每一块或为1或者-1的一阶方阵，或为形如 $R_\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$的二阶方阵。

习题 4. 证明：方程$y^2(2-y^2)=x^2(x-2)(x-1)$的解集是有界集，并求其中的点到原点距离的最大值在何时取到。

习题 5. [极大值定理] 设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为$\mathcal{C}^2$函数，并记

$$\Delta f=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

为f的拉普拉斯算子。记$B=\{x\in\mathbb{R}^n, ||x||<1\}$为单位开球，$\overline{B}=\{x\in\mathbb{R}^n, ||x||\leqslant 1\}$为单位闭球。证明：

1. 若对任何$x\in B$都有$\Delta f(x)>0$，则对任何$x\in B$都有$f(x)<\max_{||t||=1}f(t)$。
2. 若对任何$x\in B$都有$\Delta f(x)=0$（这样的函数f称为B上的**调和函数**），则对任何$x\in B$都有
   $$\min_{||t||=1}f(t)\leqslant f(x)\leqslant\max_{||t||=1}f(t).$$
   提示：对$\epsilon>0$，考虑函数$g(x)=f(x)+\epsilon\sum_{i=1}^n x_i^2$。