2023年数学科学学院青年教师教学竞赛

同济大学数学科学学院 金方舟

April 14, 2023

设$\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$是一个域

二次型

设$\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$是一个域

Definition

设V是$\mathbb{F}$上的线性空间，$q: V \to \mathbb{F}$是一个映射。若q满足

设$\mathbb{F}\subset\mathbb{C}$是一个域

Definition

设V是$\mathbb{F}$上的线性空间，$q:V\to\mathbb{F}$是一个映射。若q满足

1. 对任何$\lambda\in\mathbb{F}$和向量$x\in V$，都有$q(\lambda x)=\lambda^2 q(x)$

设$\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$是一个域

Definition

设V是$\mathbb{F}$上的线性空间，$q: V \to \mathbb{F}$是一个映射。若q满足

1. 对任何$\lambda \in \mathbb{F}$和向量$x \in V$，都有$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
2. 函数

$$\begin{aligned} b_q: V \times V &\to \mathbb{F} \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) \end{aligned}$$

是V上的对称双线性函数

设$\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$是一个域

Definition

设V是$\mathbb{F}$上的线性空间，$q : V \to \mathbb{F}$是一个映射。若q满足

1. 对任何$\lambda \in \mathbb{F}$和向量$x \in V$，都有$q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
2. 函数
$$\begin{aligned} b_q : V \times V &\to \mathbb{F} \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) \end{aligned}$$
是V上的对称双线性函数

则称q是V上的一个<u>二次型</u>

Lemma

若V是$\mathbb{F}$上有限维线性空间，$\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$是$V$的一组基，$q$是$V$上的二次型，则$q$可唯一地写成如下形式：

$$\begin{aligned} q(x_1e_1+\cdots+x_ne_n) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} q_{ij}x_ix_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} q_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} q_{ij}x_ix_j \end{aligned}$$

其中$q_{ij}\in\mathbb{F}$

Lemma

若V是$\mathbb{F}$上有限维线性空间，$\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$是$V$的一组基，$q$是$V$上的二次型，则$q$可唯一地写成如下形式：

$$
\begin{aligned}
q(x_1e_1+\cdots+x_ne_n) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} q_{ij}x_ix_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} q_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} q_{ij}x_ix_j
\end{aligned}
$$

其中$q_{ij}\in\mathbb{F}$

二次型=二次齐次多项式

度量矩阵

Definition

对$1 \leqslant i,j \leqslant n$，记$a_{ij} = \frac{1}{2}(q_{ij} + q_{ji})$，其中当$i > j$时$q_{ij} = 0$。则称$n$阶对称矩阵

$$A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{F})$$

为q在$\mathcal{B}$下的度量矩阵，简称q在$\mathcal{B}$下的矩阵

度量矩阵

Definition

对$1 \leqslant i, j \leqslant n$，记$a_{ij} = \frac{1}{2}(q_{ij} + q_{ji})$，其中当$i > j$时$q_{ij} = 0$。则称$n$阶对称矩阵

$$A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{F})$$

为q在$\mathcal{B}$下的度量矩阵，简称q在$\mathcal{B}$下的矩阵

- 若记 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，则二次型$q$可用其度量矩阵表示为

$$q(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = X^T A X$$

度量矩阵

Definition

对$1 \leqslant i,j \leqslant n$，记$a_{ij} = \frac{1}{2}(q_{ij} + q_{ji})$，其中当$i > j$时$q_{ij} = 0$。则称$n$阶对称矩阵

$$A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{F})$$

为q在$\mathcal{B}$下的度量矩阵，简称q在$\mathcal{B}$下的矩阵

- 若记 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，则二次型$q$可用其度量矩阵表示为

$$q(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = X^T A X$$

- 对一组给定的基$\mathcal{B}$，二次型与对称矩阵之间经由度量矩阵形成了一一对应

度量矩阵的基变换

Lemma

若$\mathcal{B}'$是另一组基，$P \in GL_n(\mathbb{F})$是从$\mathcal{B}$到$\mathcal{B}'$的过渡矩阵，则q在基$\mathcal{B}'$下的矩阵为$P^T AP$

度量矩阵的基变换

Lemma

若$\mathcal{B}'$是另一组基，$P \in GL_n(\mathbb{F})$是从$\mathcal{B}$到$\mathcal{B}'$的过渡矩阵，则q在基$\mathcal{B}'$下的矩阵为$P^T AP$

Proof.

设$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$和 $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ 为同一向量x在基$\mathcal{B}$和$\mathcal{B}'$下的坐标，则有

$$X = PX'$$

Lemma

若$\mathcal{B}'$是另一组基，$P \in GL_n(\mathbb{F})$是从$\mathcal{B}$到$\mathcal{B}'$的过渡矩阵，则q在基$\mathcal{B}'$下的矩阵为P^TAP

Proof.

设$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$和 $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ 为同一向量x在基$\mathcal{B}$和$\mathcal{B}'$下的坐标，则有

$$X = PX'$$

故有

$$q(x) = X^TAX = X'^T(P^TAP)X'$$

度量矩阵的基变换

Lemma

若$\mathcal{B}'$是另一组基，$P \in GL_n(\mathbb{F})$是从$\mathcal{B}$到$\mathcal{B}'$的过渡矩阵，则q在基$\mathcal{B}'$下的矩阵为P^TAP

Proof.

设$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$和 $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$为同一向量$x$在基$\mathcal{B}$和$\mathcal{B}'$下的坐标，则有

$$X = PX'$$

故有

$$q(x) = X^TAX = X'^T(P^TAP)X'$$

即q在基$\mathcal{B}'$下的矩阵为P^TAP □

对称矩阵的合同

- 一般地，设A和B是两个对称矩阵，若存在可逆矩阵$P \in GL_n(\mathbb{F})$使得$B = P^T AP$，则称A和B合同

对称矩阵的合同

- 一般地，设A和B是两个对称矩阵，若存在可逆矩阵$P \in GL_n(\mathbb{F})$使得$B = P^T AP$，则称A和B合同
- 对称矩阵的合同是等价关系

对称矩阵的合同

- 一般地，设A和B是两个对称矩阵，若存在可逆矩阵$P \in GL_n(\mathbb{F})$使得$B = P^T AP$，则称A和B<u>合同</u>
- 对称矩阵的合同是等价关系
- 两个合同矩阵必定等价，所以它们的秩相同

对称矩阵的合同

- 一般地，设A和B是两个对称矩阵，若存在可逆矩阵$P \in GL_n(\mathbb{F})$使得$B = P^T AP$，则称A和B合同
- 对称矩阵的合同是等价关系
- 两个合同矩阵必定等价，所以它们的秩相同
- 一个二次型在任何一组基下的矩阵的秩称为该二次型的秩

对称矩阵的合同

- 一般地，设A和B是两个对称矩阵，若存在可逆矩阵$P \in GL_n(\mathbb{F})$使得$B = P^T AP$，则称A和B合同
- 对称矩阵的合同是等价关系
- 两个合同矩阵必定等价，所以它们的秩相同
- 一个二次型在任何一组基下的矩阵的秩称为该二次型的秩

Theorem (高斯定理)

任何一个对称矩阵都合同于一个对角矩阵，称为A的一个合同标准形

对称矩阵的合同

- 一般地，设A和B是两个对称矩阵，若存在可逆矩阵$P \in GL_n(\mathbb{F})$使得$B = P^T AP$，则称A和B<u>合同</u>
- 对称矩阵的合同是等价关系
- 两个合同矩阵必定等价，所以它们的秩相同
- 一个二次型在任何一组基下的矩阵的秩称为该二次型的<u>秩</u>

Theorem (高斯定理)

任何一个对称矩阵都合同于一个对角矩阵，称为A的一个<u>合同标准形</u>

注意：合同对角化不一定是相似对角化

对矩阵A的阶数n递归：

对矩阵A的阶数n递归：

- 若$n=1$，显然任何矩阵都是对角矩阵

对矩阵A的阶数n递归：

- 若$n=1$，显然任何矩阵都是对角矩阵
- 假设$n\geqslant 2$，并且结论对于阶数小于n的矩阵都成立

对矩阵A的阶数n递归：

- 若$n=1$，显然任何矩阵都是对角矩阵
- 假设$n\geqslant 2$，并且结论对于阶数小于n的矩阵都成立
  不妨设$A\neq 0$，且A对应于二次型

$$q(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_{ij}x_ix_j$$

高斯定理的证明

对矩阵A的阶数n递归：

- 若$n=1$，显然任何矩阵都是对角矩阵
- 假设$n\geqslant 2$，并且结论对于阶数小于n的矩阵都成立
  不妨设$A\neq 0$，且A对应于二次型

$$q(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_{ij}x_ix_j$$

只需证明该二次型q在某组基下可化成对角形式

分情况讨论：

高斯定理的证明II

分情况讨论：

- 若A的对角线元素不全为0，即存在某个i使得$a_{ii} \neq 0$，不妨设$a_{11} \neq 0$

高斯定理的证明II

分情况讨论：

- 若A的对角线元素不全为0，即存在某个i使得$a_{ii} \neq 0$，不妨设$a_{11} \neq 0$，则有

$$q(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{11}} x_i)^2 + q_1(x_2, \cdots, x_n)$$

分情况讨论：

- 若A的对角线元素不全为0，即存在某个i使得$a_{ii}\neq 0$，不妨设$a_{11}\neq 0$，则有

$$q(x_1,\cdots,x_n)=a_{11}(x_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_{1i}}{2a_{11}}x_i)^2+q_1(x_2,\cdots,x_n)$$

其中$q_1(x_2,\cdots,x_n)$是$\mathbb{F}^{n-1}$上的二次型（变量个数减少一个）

分情况讨论：

- 若A的对角线元素不全为0，即存在某个i使得$a_{ii} \neq 0$，不妨设$a_{11} \neq 0$，则有

$$q(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{11}} x_i)^2 + q_1(x_2, \cdots, x_n)$$

其中$q_1(x_2, \cdots, x_n)$是$\mathbb{F}^{n-1}$上的二次型（变量个数减少一个）

由于$(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{11}} x_i, x_2, \cdots, x_n)$是可逆线性变换，故由归纳假设知$q$可对角化

- 若A的对角线元素全为0，由于$A \neq 0$，故存在$i < j$使得$a_{ij} \neq 0$，不妨设$a_{12} \neq 0$

- 若A的对角线元素全为0，由于$A \neq 0$，故存在$i < j$使得$a_{ij} \neq 0$，不妨设$a_{12} \neq 0$，并记

$$x' = x_1 + \sum_{i=3}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{12}} x_i$$

高斯定理的证明III

- 若A的对角线元素全为0，由于$A \neq 0$，故存在$i < j$使得$a_{ij} \neq 0$，不妨设$a_{12} \neq 0$，并记

$$x' = x_1 + \sum_{i=3}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{12}} x_i$$

$$x'' = x_2 + \sum_{i=3}^{n} \frac{a_{2i}}{2a_{12}} x_i$$

高斯定理的证明III

- 若A的对角线元素全为0，由于$A \neq 0$，故存在$i < j$使得$a_{ij} \neq 0$，不妨设$a_{12} \neq 0$，并记

$$x' = x_1 + \sum_{i=3}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{12}} x_i$$

$$x'' = x_2 + \sum_{i=3}^{n} \frac{a_{2i}}{2a_{12}} x_i$$

则有

$$\begin{aligned} q(x_1, \cdots, x_n) &= a_{12} x' x'' + q_2(x_3, \cdots, x_n) \\ &= \frac{1}{4} a_{12} (x' + x'')^2 - \frac{1}{4} a_{12} (x' - x'')^2 + q_2(x_3, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

其中$q_2(x_3, \cdots, x_n)$是$\mathbb{F}^{n-2}$上的二次型（变量个数减少两个）
由于$(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x' + x'', x' - x'', x_3 \cdots, x_n)$是可逆线性变换，故由归纳假设知$q$可对角化

- 若A的对角线元素全为0，由于$A \neq 0$，故存在$i < j$使得$a_{ij} \neq 0$，不妨设$a_{12} \neq 0$，并记

$$x' = x_1 + \sum_{i=3}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{12}} x_i$$

$$x'' = x_2 + \sum_{i=3}^{n} \frac{a_{2i}}{2a_{12}} x_i$$

则有

$$\begin{aligned} q(x_1, \cdots, x_n) &= a_{12} x' x'' + q_2(x_3, \cdots, x_n) \\ &= \frac{1}{4} a_{12} (x' + x'')^2 - \frac{1}{4} a_{12} (x' - x'')^2 + q_2(x_3, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

其中$q_2(x_3, \cdots, x_n)$是$\mathbb{F}^{n-2}$上的二次型（变量个数减少两个）

- 若A的对角线元素全为0，由于$A \neq 0$，故存在$i < j$使得$a_{ij} \neq 0$，不妨设$a_{12} \neq 0$，并记

$$x' = x_1 + \sum_{i=3}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{12}} x_i$$

$$x'' = x_2 + \sum_{i=3}^{n} \frac{a_{2i}}{2a_{12}} x_i$$

则有

$$\begin{aligned} q(x_1, \cdots, x_n) &= a_{12} x' x'' + q_2(x_3, \cdots, x_n) \\ &= \frac{1}{4} a_{12}(x' + x'')^2 - \frac{1}{4} a_{12}(x' - x'')^2 + q_2(x_3, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

其中$q_2(x_3, \cdots, x_n)$是$\mathbb{F}^{n-2}$上的二次型（变量个数减少两个）由于$(x_1, \cdots, x_n) \mapsto (x' + x'', x' - x'', x_3 \cdots, x_n)$是可逆线性变换，故由归纳假设知$q$可对角化

合同对角化的例子

例：求对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 的合同对角化

例：求对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 的合同对角化

- A对应的二次型为

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3 \\ &= 2(x_1 - 3x_3)(x_2 + x_3) + 6x_3^2 \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - 4x_3)^2 + 6x_3^2 \end{aligned}$$

- 若记$x_1' = x_1 + x_2 - 2x_3$，$x_2' = x_1 - x_2 - 4x_3$，则

$$q(x_1', x_2', x_3) = \frac{1}{2}x_1'^2 - \frac{1}{2}x_2'^2 + 6x_3^2$$

例：求对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\end{pmatrix}$ 的合同对角化

- A对应的二次型为

$$\begin{aligned}q(x_1,x_2,x_3)&=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3\\&=2(x_1-3x_3)(x_2+x_3)+6x_3^2\\&=\frac{1}{2}(x_1+x_2-2x_3)^2-\frac{1}{2}(x_1-x_2-4x_3)^2+6x_3^2\end{aligned}$$

- 若记$x_1'=x_1+x_2-2x_3$，$x_2'=x_1-x_2-4x_3$，则

$$q(x_1',x_2',x_3)=\frac{1}{2}x_1'^2-\frac{1}{2}x_2'^2+6x_3^2$$

合同对角化的例子

- 由于

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

合同对角化的例子

- 由于

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3 \end{pmatrix}$$

合同对角化的例子

- 由于

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3 \end{pmatrix}$$

故若记

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

合同对角化的例子

- 由于

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3 \end{pmatrix}$$

故若记

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则有

$$P^TAP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

实对称矩阵的合同矩阵

- 设$\mathbb{F}=\mathbb{R}$为实数域，V是$\mathbb{R}$上有限维线性空间

Theorem (惯性定理I)

对任何V上秩为r的二次型q，存在V的一组基$\mathcal{B}$使得q在$\mathcal{B}$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$