习题纸1：实数集的拓扑

设$V \subset \mathbb{R}$，$x \in V$。若存在$\epsilon > 0$使得$(x-\epsilon, x-\epsilon) \subset V$，则称$V$是$x$的一个**邻域**。

若$U \subset \mathbb{R}$是其中任何一点的一个邻域，则称U是$\mathbb{R}$的一个**开集**。

习题 1. 证明：

1. $\emptyset$和$\mathbb{R}$是$\mathbb{R}$的开集。更一般地，任何$\mathbb{R}$中的开区间是$\mathbb{R}$的开集。
2. 若U和V是$\mathbb{R}$的开集，则$U \cap V$是$\mathbb{R}$的开集。更一般地，若$U_1, \cdots, U_n$是$\mathbb{R}$的开集，则$\cap_{i=1}^{n}(U_i)$是$\mathbb{R}$的开集。（即开集对于有限交集运算封闭）
3. 若$(U_i)_{i\in I}$是$\mathbb{R}$的一族开集，则$\cup_{i\in I}(U_i)$是$\mathbb{R}$的开集。（即开集对于任意并集运算封闭）
4. 举例说明：若$(U_i)_{i\in I}$是$\mathbb{R}$的一族开集，则$\cap_{i\in I}(U_i)$不一定是$\mathbb{R}$的开集。

习题 2. 设$(x_i) \in \mathbb{R}$是一个数列，$x \in \mathbb{R}$。证明下列命题等价：

1. 数列(x_i)收敛到x；
2. 对x的任意邻域U，数列(x_i)中至多只有有限项不在U中。

若$Z \subset \mathbb{R}$使得$\mathbb{R} - Z$是$\mathbb{R}$的开集，则称Z是$\mathbb{R}$的一个**闭集**。

习题 3. 证明：

1. $\emptyset$和$\mathbb{R}$是$\mathbb{R}$的闭集。更一般地，任何$\mathbb{R}$中的闭区间是$\mathbb{R}$的闭集。
2. 若Z和Y是$\mathbb{R}$的闭集，则$Z \cup Y$是$\mathbb{R}$的闭集。更一般地，若$Z_1, \cdots, Z_n$是$\mathbb{R}$的闭集，则$\cup_{i=1}^{n}(Z_i)$是$\mathbb{R}$的闭集。（即闭集对于有限并集运算封闭）
3. 若$(Z_i)_{i\in I}$是$\mathbb{R}$的一族闭集，则$\cap_{i\in I}(Z_i)$是$\mathbb{R}$的闭集。（即闭集对于任意交集运算封闭）
4. 举例说明：若$(Z_i)_{i\in I}$是$\mathbb{R}$的一族闭集，则$\cup_{i\in I}(Z_i)$不一定是$\mathbb{R}$的闭集。

习题 4. 设$Z \subset \mathbb{R}$。证明下列命题等价：

1. Z是$\mathbb{R}$的闭集；
2. 对Z中的任意数列$(x_i) \in Z$，若(x_i)在$\mathbb{R}$中收敛到一个数x，则$x \in Z$。

即：一个集合是闭集当且仅当它对于数列极限运算封闭

设$S \subset \mathbb{R}$，$x \in S$。若存在x的邻域U使得$U \cap S = \{x\}$，则称x是S的**孤立点**。

习题 5. 设$S \subset \mathbb{R}$使得其中任何一点都是孤立点。证明：S是可列集。