习题纸11

习题 1. 判断下列函数列是否收敛或一致收敛：

1. $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$，$x \in \mathbb{R}$。
2. $f_n(x) = (x + \frac{1}{n})^2$，$x \in \mathbb{R}$。

习题 2. 设I为区间。证明：若f_n，g_n是I上的有界函数组成的函数列，且f_n一致收敛到f，g_n一致收敛到g，则$f_n g_n$一致收敛到fg。

习题 3. 在区间$(0,1)$上分别求下列极限

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 1} x^n \text{ 和 } \lim_{x\to 1} \lim_{n\to+\infty} x^n$$

习题 4. 设I为区间，设I上的函数列f_n一致收敛到f。判断下列命题是否成立，并给出证明或反例：

1. 若每个f_n一致连续，则f一致连续。
2. 设$\lambda \geqslant 0$。若每个f_n都是λ-Lipschitz函数，则f是λ-Lipschitz函数。
3. 若每个f_n都是Lipschitz函数，则f是Lipschitz函数。

若仅仅假设f_n收敛到f，上述命题是否成立？

习题 5. 设$f_n(x) = n^3 x^n (1-x)$，$x \in [0,1]$。判断函数列f_n是否收敛或一致收敛，并研究数列$\int_0^1 f_n$的敛散性。

习题 6. 设g是定义在$[0,1]$上的连续函数，f_n是按以下方式递归定义的函数列：$f_0 = 0$，对任何$n \geqslant 0$，$f_{n+1}(x) = g(x) + \int_0^x f_n(t)dt$。

1. 证明：存在常数$C > 0$，使得对任何$n \geqslant 0$和任何$x \in [0,1]$都有$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant C\frac{x^n}{n!}$。
2. 证明：函数列f_n在$[0,1]$上一致收敛到某个函数f，并且f满足$f(x) = g(x) + \int_0^x f(t)dt$。

习题 7.

1. 设区间$[a,b]$上的连续函数列f_n收敛到某个连续函数f，并且对每个$x \in [a,b]$，数列$f_n(x)$单调递增。证明：f_n在$[a,b]$上一致收敛到f。
2. 设区间$[a,b]$上的函数列f_n收敛到某个连续函数f，并且每个f_n都是单调递增函数。证明：f_n在$[a,b]$上一致收敛到f。