

## 习题纸13

**习题 1.** 求下列幂级数的收敛半径并研究其在收敛区间端点的性质（绝对收敛/条件收敛/发散）：

1.  $a + bx + ax^2 + bx^3 + \cdots$ , 其中  $0 < a < b$ 。

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$ 。

3.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n$ 。

4.  $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 + \frac{(-1)^n}{n})^{n^2} x^n$ 。

**习题 2.** 求级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{n \sin(n)} x^n$  的收敛半径。

**习题 3.** 设  $a_0, a_1, \cdots$  为等差数列,  $a_0 \neq 0$ 。

1. 求幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  的收敛域。

2. 求级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$  的和。

**习题 4.** 设  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 。不用  $f(x) = e^x$ , 直接证明:  $f(x)f(y) = f(x+y)$ 。

**习题 5.** 求下列关于  $x$  的函数的幂级数展开式

1.  $\frac{x \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$

2.  $\arcsin x$

3.  $\sin(b \arcsin x)$  ( $b$  为常数)