

## 习题纸7

习题 1. 用等分分割的黎曼和计算  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx$ 。

习题 2. 将闭区间  $[1, 2]$  分割成  $n$  份, 使得分点的横坐标成等比数列。求函数  $x^3$  对此分割的黎曼和, 并以此计算  $\int_1^2 x^3 dx$ 。

习题 3. 令  $f(x) = x \int_1^x \frac{\sin(t^2)}{t} dt$ 。求  $\int_0^1 f(x) dx$ 。

习题 4. 设常数  $A > 0$ 。证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+A} \frac{\sin(x)}{x} dx = 0$ 。

习题 5. 设  $m, n$  为正整数。运用分部积分及递归计算  $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ 。

习题 6. 设  $f$  是有界闭区间  $[a, b]$  上的有界函数。判断下列命题是否正确:

1. 若  $f$  可积, 则  $f^2$  可积。
2. 若  $f^2$  可积, 则  $f$  可积。
3. 若  $f$  可积, 则  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  可导, 且  $F'(x) = f(x)$ 。
4. 若  $f$  可导且  $f'$  可积, 则  $f(x) = \int_a^x f'(t) dt + f(a)$ 。

习题 7. 设  $f(x)$  是闭区间  $[a, b]$  上的有界可积函数。证明其绝对值  $|f(x)|$  在  $[a, b]$  上也是有界可积函数, 且有

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

习题 8. 设  $\phi$  是定义在  $[A, B]$  上的连续函数,  $f$  是定义在  $[a, b]$  上的可积函数, 且  $f([a, b]) \subset [A, B]$ 。证明: 函数  $\phi(f(x))$  在  $[a, b]$  上可积。