

习题纸3

习题 1. 证明: 若 $\lim_n a_n = a$, 则 $\lim_n \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = a$ 。

若实数 x 的任一邻域都包含数列 (x_n) 中的无穷多项, 则称 x 是数列 (x_n) 的一个聚点或极限点。若数列 (x_n) 有上界 (下界), 则称其最大的聚点为其上极限 (下极限), 记为 $\overline{\lim}_n x_n$ ($\underline{\lim}_n x_n$)。

习题 2. 证明: 若数列 (x_n) 有上界, 则数列 $y_n = \sup_{k \geq n} x_k$ 收敛到 (x_n) 的上极限。若数列 (x_n) 有下界, 则数列 $z_n = \inf_{k \geq n} x_k$ 收敛到 (x_n) 的下极限。

设 $A \subset \mathbb{N}_{\geq 1}$ 为自然数集合。若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#(A \cap [1, n])}{n} = 0$, 则称 A 的密度为 0。

习题 3. 设 (x_n) 为非负有界实数列。考虑下列命题

- i) 数列 $S_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ 收敛到 0。
- ii) 存在一个密度为 0 的自然数集合 A 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty, n \notin A} x_n = 0$ 。

证明:

1. 若 ii) 成立, 则 i) 成立。

2. 假设 i) 成立。

(a) 证明: 数列 $t_n = \sup_{k \geq n} S_k$ 收敛到 0。

(b) 令 $A = \{n \in \mathbb{N}_{\geq 1} | x_n \geq \sqrt{t_n}\}$ 。证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty, n \notin A} x_n = 0$ 。

(c) 证明: $\#(A \cap [1, n]) \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{t_n}}$, 由此推出 A 的密度为 0。

(d) 证明 ii) 成立。

习题 4. 设 β 为无理数。

- 1. 证明: 对任何正整数 N , 总存在整数 p, q , 使得 $0 < q \leq N$ 且 $|q\beta - p| < \frac{1}{N}$ 。
- 2. 证明: 存在无数多个正整数对 (p, q) 使得 $q > 1$ 且 $|q\beta - p| < \frac{1}{q^2}$ 。

习题 5. 1. 设 β 为无理数。证明: $\inf(\mathbb{Z}\beta + \mathbb{Z}) \cap \mathbb{R}_{>0} = 0$, 由此推出 $\mathbb{Z}\beta + \mathbb{Z}$ 在 \mathbb{R} 中稠密。

2. 设 β 为无理数。证明: $\mathbb{N}_{\geq 1}\beta + \mathbb{Z}$ 在 \mathbb{R} 中也稠密。

3. 证明: 数列 $(\sin(n))$ 在 $[-1, 1]$ 中稠密。