习题纸6

习题 1. 设f是$[a,b]$上的凸函数，且$f(a)=f(b)$。证明：对任何$x\in[a,b]$都有$f(x)\leqslant f(a)$。

习题 2. 设$a_i>0$，$b_i>0$，$i=1,\cdots,n$。证明：

1. 算术-几何不等式：
$$\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$
2. Hölder不等式：若$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$p>1$，$q>1$，则有
$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant(\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}$$

习题 3. 设I和J为非空区间，$f:I\to J$和$g:J\to\mathbb{R}$为凸函数。

1. 举例说明：$g\circ f$不一定是凸函数。
2. 证明：若g是增函数，则$g\circ f$是凸函数。

习题 4. 设f是定义在区间I上的凸函数。

1. 证明：若I是开区间，则f连续。
2. 举例说明：若I不是开区间，则f不一定连续。

习题 5. 证明：有界区间上的凸函数必定有下界。

习题 6. 设f是定义在区间I上的连续函数，且满足对于任何$x,y\in I$都有$f(\frac{x+y}{2})\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2}$。证明：$f$是凸函数。