

## 习题纸9

习题 1. 判断积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos \frac{1}{t}}{t^2 \sqrt{\sin \frac{1}{t}}} dt$$

的敛散性, 如果收敛则求其值。

习题 2. 研究下列积分的敛散性:

1.  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$ 。
2.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p(x) \cos^q(x)}$ , 其中  $p, q > 0$ 。
3.  $\int_0^1 \frac{dx}{\ln(x)}$ 。
4.  $\int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx$ , 其中  $t$  为实数。
5.  $\int_0^1 x^p \ln^q\left(\frac{1}{x}\right) dx$ 。

习题 3. 1. 证明: 数列  $a_n = (\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}) - \ln(n)$  收敛。记  $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 。

2. 证明: 积分  $I = \int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt$  收敛。

3. 证明:  $I = 1 - \gamma$ 。

习题 4. 考虑函数  $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2+2}{t^2+1}\right) dt$  ( $x \geq 0$ )。

1. 证明: 函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上有定义且连续, 且在  $(0, +\infty)$  上可导, 并求  $f'(x)$ 。

2. 证明: 函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处不可导。

习题 5. 1. 证明: 对任何正实数  $x$ , 积分  $f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}} dt$  都收敛。

2. 证明  $A = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$  存在, 并求  $A$  的值。