习题纸15

习题 1. 对$\mathbb{R}^2$中的点$P_0=(x_0,y_0)$以及正数$\delta>0$，分别记

$$U_1(P_0,\delta)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2||x-x_0|+|y-y_0|<\delta\}$$

$$U_2(P_0,\delta)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2||x-x_0|^2+|y-y_0|^2<\delta^2\}$$

$$U_\infty(P_0,\delta)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\max(|x-x_0|,|y-y_0|)<\delta\}$$

证明：由$U_1(P_0,\delta)$，$U_2(P_0,\delta)$，$U_\infty(P_0,\delta)$这三种类型类型的邻域在$\mathbb{R}^2$中定义相同的开集。

习题 2. 设X是$\mathbb{R}^n$的子集。记$\mathring{X}$为X的内点组成的集合，称为X的**内部**；记$\overline{X}$为X和X的聚点组成的集合，称为X的**闭包**。证明：

1. $\mathring{X}$是$\mathbb{R}^n$中的开集，并且若U是X的子集且是$\mathbb{R}^n$中的开集，则$U\subset\mathring{X}$（即$\mathring{X}$是X包含的最大的$\mathbb{R}^n$中的开集）。
2. $\overline{X}$是$\mathbb{R}^n$中的闭集，并且若$Z\subset\mathbb{R}^n$包含X且是$\mathbb{R}^n$中的闭集，则$Z\supset\overline{X}$（即$\overline{X}$是包含X的最小的$\mathbb{R}^n$中的闭集）。

习题 3. 记$\{0,1\}$为仅有两个点的集合，$[0,1]$为$\mathbb{R}$中的单位区间。设X是$\mathbb{R}^n$的子集。定义：

1. 若从X到$\{0,1\}$的连续函数只有常值函数，则称X是**连通集**。
2. 若对X中的任何两点x,y都存在一个连续映射$f:[0,1]\to X$使得$f(0)=x$，$f(1)=y$（即f是从x到y的一条道路），则称X是**道路连通集**。

证明下列命题：

1. $[0,1]$是连通集。
2. 道路连通集必定是连通集。
3. 若X是连通集，则$\overline{X}$也是连通集。
4. $\mathbb{R}$中的连通集恰好就是所有区间。
5. 若X是连通集，$f:X\to\mathbb{R}$是连续函数，则$f(X)$是一个区间。
6. (*) 集合$C=\{(x,\sin(\frac{1}{x}))|x\in(0,1]\}\cup\{(0,x)|-1\leqslant x\leqslant 1\}\subset\mathbb{R}^2$是连通集但不是道路连通集。[1]
7. (*) $\mathbb{R}^n$中的连通开集必定是道路连通集。

[1]集合C通常称作**拓扑学家的正弦曲线**。