习题纸2

习题 1. 设x为正实数，并记$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}[\frac{x}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}]$，其中$[t]$表示$t$的整数部分。以下用三种方法来计算$S(x)$的值。

1. 证明：$S(x)$至多只有有限项非零。
2. 证明：$[\frac{x}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}]=[\frac{x}{2^n}]-[\frac{x}{2^{n+1}}]$，并计算$S(x)$的值。
3. 证明：$[\frac{x}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}]$等于区间$[1,x]$内能写成$2^n\cdot(2q-1)$形式（$q$为整数）的整数个数，由此计算$S(x)$的值。
4. 证明：若x的二进制展开可以写成

$$x=a_p2^p+a_{p-1}2^{p-1}+\cdots+a_0+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{a_{-i}}{2^i},$$

其中$a_i\in\{0,1\}$，则有

$$[\frac{x}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}]=\begin{cases}a_p2^{p-n-1}+a_{p-1}2^{p-n-2}+\cdots+a_{n+1} & a_n=0\\ a_p2^{p-n-1}+a_{p-1}2^{p-n-2}+\cdots+a_{n+1}+1 & a_n=1,\end{cases}$$

由此计算$S(x)$的值。

习题 2. 设实数列(x_n)满足对任何正整数m,n都有$x_{m+n}\leqslant x_m+x_n$。

1. 证明：若数列$(\frac{x_n}{n})$存在下确界l，则数列$(\frac{x_n}{n})$收敛到l。
2. 证明：若数列$(\frac{x_n}{n})$无下界，则数列$(\frac{x_n}{n})$收敛到$-\infty$。

习题 3. 设$a_1,a_2,a_3,\cdots$是$1,2,3,\cdots$的一个重排。假设数列$(\frac{a_n}{n})$收敛到某个实数l。

1. 若$a_n=n$，求l的值。
2. 设$\epsilon>0$和正整数N满足对任何$n\geqslant N$，$l-\epsilon\leqslant\frac{a_n}{n}\leqslant l+\epsilon$。
   (a) 证明：对任何$n\geqslant N$，集合$\{a_1,\cdots,a_n\}$至多有$N+(l+\epsilon)n$个元素。
   (b) 证明：若$a_n\leqslant N(l-\epsilon)$，则$n\leqslant N$。
3. 证明：在一般情形下总有$l=1$。