

习题纸5

习题 1. 对 \mathbb{R}^3 空间的如下两组基 \mathcal{B}_1 和 \mathcal{B}_2 , 求过渡矩阵 $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$ 。

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1)\} \text{ 和 } \mathcal{B}_2 = \{(3, 1, 4), (5, 3, 2), (1, -1, 7)\}$$

习题 2. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 且 A 和 B 在 $M_n(\mathbb{C})$ 中相似。证明: A 和 B 在 $M_n(\mathbb{R})$ 中相似。

习题 3. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 。证明下列命题等价:

1. $A\bar{A} = I_n$;
2. 存在 $P \in GL_n(\mathbb{C})$ 使得 $A = P\bar{P}^{-1}$ 。

习题 4. 1. 证明: 对所有 n 阶方阵 A 和 B 都有 $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ 。

2. 对方阵 $A \in M_n(\mathbb{F})$, 记 $f_A \in (M_n(\mathbb{F}))^*$ 为线性函数

$$\begin{aligned} f_A : M_n(\mathbb{F}) &\rightarrow \mathbb{F} \\ X &\mapsto \text{Tr}(AX). \end{aligned}$$

证明: 线性映射

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{F}) &\rightarrow (M_n(\mathbb{F}))^* \\ A &\mapsto f_A \end{aligned}$$

是一个同构。

3. 设 $f : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}$ 为线性函数, 且满足 $f(AB) = f(BA)$ 。证明: 存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 使得 $f(A) = \lambda \text{Tr}(A)$ 。

习题 5. 1. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$ 。证明: 对任何质数 p , $\text{Tr}(A+B)^p$ 与 $\text{Tr}(A^p) + \text{Tr}(B^p)$ 模 p 同余。

2. 设 $A \in M_n(\mathbb{Z})$ 。证明: 对任何质数 p , $\text{Tr}(A^p)$ 与 $\text{Tr}(A)$ 模 p 同余。

3. 设递归整数列 $(a_n)_n$ 满足 $a_0 = 3, a_1 = 0, a_2 = 2$, 以及对任何非负整数 n , $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$ 。证明: 对任何质数 p , a_p 是 p 的倍数。