习题纸3

习题 1. 证明：若$\lim_n a_n = a$，则$\lim_n \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = a$。

若实数x的任一邻域都包含数列(x_n)中的无穷多项，则称x是数列(x_n)的一个**聚点**或**极限点**。若数列(x_n)有上界（下界），则称其最大的聚点为其**上极限**（**下极限**），记为$\overline{\lim}_n x_n$（$\underline{\lim}_n x_n$）。

习题 2. 证明：$-\underline{\lim}_n x_n = \overline{\lim}_n(-x_n)$。

习题 3. 证明：若数列(x_n)有上界，则数列$y_n = \sup_{k\geqslant n} x_k$收敛到$(x_n)$的上极限。若数列$(x_n)$有下界，则数列$z_n = \inf_{k\geqslant n} x_k$收敛到$(x_n)$的下极限。

设$A \subset \mathbb{N}_{\geqslant 1}$为自然数集合。若$\lim_{n\to+\infty} \frac{\#(A\cap[1,n])}{n} = 0$，则称$A$的**密度为**0。

习题 4. 设(x_n)为非负有界实数列。考虑下列命题

i) 数列$S_n = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$收敛到0。

ii) 存在一个密度为0的自然数集合A使得$\lim_{n\to+\infty, n\notin A} x_n = 0$。

证明：

1. 若ii)成立，则i)成立。
2. 假设i)成立。
   (a) 证明：数列$t_n = \sup_{k\geqslant n} S_k$收敛到0。
   (b) 令$A = \{n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1} | x_n \geqslant \sqrt{t_n}\}$。证明：$\lim_{n\to+\infty, n\notin A} x_n = 0$。
   (c) 证明：$\#(A\cap[1,n]) \leqslant \frac{x_1+\cdots+x_n}{\sqrt{t_n}}$，由此推出$A$的密度为0。
   (d) 证明ii)成立。

习题 5. 设β为无理数。

1. 证明：对任何正整数N，总存在整数p, q，使得$0 < q \leqslant N$且$|q\beta - p| < \frac{1}{N}$。
2. 证明：存在无数多个正整数对(p, q)使得$q > 1$且$|\beta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$。

习题 6. 1. 设β为无理数。证明：$\inf(\mathbb{Z}\beta+\mathbb{Z})\cap\mathbb{R}_{>0} = 0$，由此推出$\mathbb{Z}\beta+\mathbb{Z}$在$\mathbb{R}$中稠密。

2. 设β为无理数。证明：$\mathbb{N}_{\geqslant 1}\beta + \mathbb{Z}$在$\mathbb{R}$中也稠密。
3. 证明：数列$(\sin(n))$在$[-1, 1]$中稠密。