习题纸10

习题 1. 研究下列级数的敛散性：

1. $\sum_{n\geqslant 1}\sqrt{1+\frac{1}{n}}$。
2. $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n\ln(n)}$。
3. $\sum_{n\geqslant 1}(n^{\frac{1}{n}}-(n+1)^{\frac{1}{n}})$。
4. $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$。

习题 2.

1. 证明：级数$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$收敛。
2. 运用公式$\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}$，计算上述级数的和。

习题 3. 设数列x_n非负，单调递减且极限为0。 记$y_k=k(x_k-x_{k+1})$。

1. 证明：$\sum_{k=1}^{n} y_k=(\sum_{k=1}^{n} x_k)-nx_{n+1}$。
2. 证明：若级数$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$收敛，则级数$\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$也收敛。
3. 假设级数$\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$收敛。证明：$x_n=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{y_k}{k}$，并由此证明数列$nx_{n+1}$收敛到0。
4. 证明：在一般情况下，级数$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$和$\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$具有相同的敛散性，并且两者都收敛时级数的和相等。
5. 设数列a_n非负，且级数$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$收敛。记
$$R_n=\sum_{k=n}^{+\infty} a_k.$$
证明：级数$\sum_{k=1}^{+\infty} R_k$和$\sum_{k=1}^{+\infty} ka_k$具有相同的敛散性，并且两者都收敛时级数的和相等。

习题 4. 设数列a_n非负，且级数$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$收敛。

1. 证明：若$\alpha>\frac{1}{2}$，则级数$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{a_k}}{k^\alpha}$收敛。
2. 研究级数$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{a_k}}{\sqrt{k}}$的敛散性。