

习题纸2

习题 1. 设 x 为正实数, 并记 $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}]$, 其中 $[t]$ 表示 t 的整数部分。以下用三种方法来计算 $S(x)$ 的值。

1. 证明: $S(x)$ 至多只有有限项非零。
2. 证明: $[\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}] = [\frac{x}{2^n}] - [\frac{x}{2^{n+1}}]$, 并计算 $S(x)$ 的值。
3. 证明: $[\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}]$ 等于区间 $[1, x]$ 内能写成 $2^n \cdot (2q - 1)$ 形式(q 为整数)的整数个数, 由此计算 $S(x)$ 的值。
4. 证明: 若 x 的二进制展开可以写成

$$x = a_p 2^p + a_{p-1} 2^{p-1} + \cdots + a_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_{-i}}{2^i},$$

其中 $a_i \in \{0, 1\}$, 则有

$$[\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}] = \begin{cases} a_p 2^{p-n-1} + a_{p-1} 2^{p-n-2} + \cdots + a_{n+1} & a_n = 0 \\ a_p 2^{p-n-1} + a_{p-1} 2^{p-n-2} + \cdots + a_{n+1} + 1 & a_n = 1, \end{cases}$$

由此计算 $S(x)$ 的值。

习题 2. 设实数列 (x_n) 满足对任何正整数 m, n 都有 $x_{m+n} \leq x_m + x_n$ 。

1. 证明: 若数列 $(\frac{x_n}{n})$ 存在下确界 l , 则数列 $(\frac{x_n}{n})$ 收敛到 l 。
2. 证明: 若数列 $(\frac{x_n}{n})$ 无下界, 则数列 $(\frac{x_n}{n})$ 收敛到 $-\infty$ 。

习题 3. 设 a_1, a_2, a_3, \cdots 是 $1, 2, 3, \cdots$ 的一个重排。假设数列 $(\frac{a_n}{n})$ 收敛到某个实数 l 。

1. 若 $a_n = n$, 求 l 的值。
2. 设 $\epsilon > 0$ 和正整数 N 满足对任何 $n \geq N$, $l - \epsilon \leq \frac{a_n}{n} \leq l + \epsilon$ 。
 - (a) 证明: 对任何 $n \geq N$, 集合 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 至多有 $N + (l + \epsilon)n$ 个元素。
 - (b) 证明: 若 $a_n < N(l - \epsilon)$, 则 $n < N$ 。
3. 在一般情形下求 l 的值。