2013-14 离散数学 I A 卷答案

1. $\neg(\forall x P(x) \vee \exists x Q(x))$ 原公式 $\Leftrightarrow P \vee (P \vee (Q \vee (Q \vee R)))$

$\Leftrightarrow P \vee Q \vee R = M_0$　　为主合取范式

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee \cdots \vee (P \wedge Q \wedge Q)$　为主析取范式

2. 有两种证法：

证法一：反证法

(1) $\neg(\forall x P(x) \vee \exists x Q(x))$	P(附加条件)
(2) $\neg\forall x P(x) \wedge \neg\exists x Q(x)$	T (1) E
(3) $\neg\forall x P(x)$	T (2) I
(4) $\exists x \neg P(x)$	T (3) E
(5) $\neg\exists x Q(x)$	T (2) I
(6) $\forall x \neg Q(x)$	T (5) E
(7) $\neg P(c)$	ES (4)
(8) $\neg Q(c)$	US (6)
(9) $\neg P(c) \wedge \neg Q(c)$	T (7) (8) I
(10) $\neg(P(c) \vee Q(c))$	T (9) E
(11) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$	P
(12) $P(c) \vee Q(c)$	US
(13) $\neg(P(c) \vee Q(c)) \wedge (P(c) \vee Q(c))$	T(10)，(12) I 矛盾

证法二：采用 CP 规则证明 (略)。

3. (1) 关系矩阵为：

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由于

$$M_{R^2} = M_R \circ M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $R^{(2)} = R \circ R = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,3\rangle\}$

(2) $r(R) = R \cup I_A = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,3\rangle\}$

$s(R) = R \bigcup R^c = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 2,4\rangle\}$

用 Warshall 算法计算 t(R)

$$M_{t(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

从而可以计算出 t (R)。

4. (1) R 是自反的，因为：$\forall \langle x, y\rangle \in A \times A$ 显然有 $xy = yx$

所以有 $\langle\langle x, y\rangle, \langle x, y\rangle\rangle \in R$

R 是对称的，因为：$\forall \langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle \in R$，满足：$xv = yu$ (*)

对于 $\langle\langle u, v\rangle, \langle x, y\rangle\rangle$，由 (*) 知：$uy = vx$，故 $\langle\langle u, v\rangle, \langle x, y\rangle\rangle \in R$，所以 R 是对称的。

R 也是传递的，若：$\langle\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle\rangle, \langle\langle u, v\rangle, \langle s, t\rangle\rangle \in R$

由定义 可以证明：$\langle\langle x, y\rangle, \langle s, t\rangle\rangle \in R$

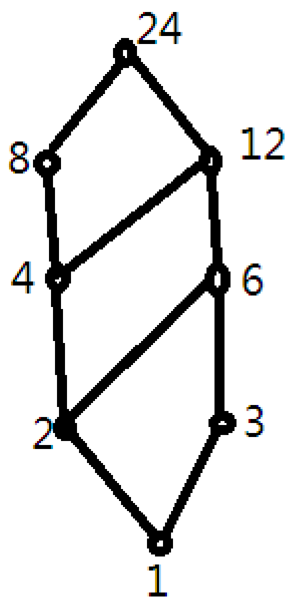
(2) 由定义知：

$[\langle 1,1\rangle]_R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 4,4\rangle\}$，$[\langle 1,2\rangle]_R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,4\rangle\}$，$[\langle 1,4\rangle]_R = \{\langle 1,4\rangle\}$

$[\langle 2,1\rangle]_R = \{\langle 2,1\rangle, \langle 4,2\rangle\}$，$[\langle 4,1\rangle]_R = \{\langle 4,1\rangle\}$

商集 $A \times A / R$ 为上述各集合组成的集合。

5. 容易验证 $\langle D_{24}, \prec \rangle$ 为偏序集（略)。哈斯图为：



$B = \{2, 4, 6\}$ 的最大元：无，最小元为 2，极大元为：4,6；极小元为 2,；上界为 12,24；下界为 2,1；上确界：12；下确界：2.

6. ⑴

先证明 f 为入射。$\forall \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \in R \times R$，

若 $f(\langle x_1, y_1 \rangle) = f(\langle x_2, y_2 \rangle)$，

则由定义知 $\langle \frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_1 - y_1}{2} \rangle = \langle \frac{x_2 + y_2}{2}, \frac{x_2 - y_2}{2} \rangle$。

从而可以证明 $\langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$。

所以 f 为入射。

下面证明 f 为满射。$\forall \langle x, y \rangle \in R \times R$，要找 $\langle s, t \rangle \in R \times R$，使：

$f(\langle s, t \rangle) = \langle x, y \rangle$。

由于 $f(\langle s, t \rangle) = \langle \frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2} \rangle$

令$\begin{cases} \dfrac{s+t}{2}=x \\ \dfrac{s-t}{2}=y \end{cases}$ ，可以求得：$\begin{cases} s=x+y \\ t=x-y \end{cases}$

即有 $f(\langle x+y, x-y\rangle)=\langle x, y\rangle$。

所以 f 为满射。从而 f 为双射。

(2) 由于 f 为双射，所以 f 有逆函数，记 f 的逆函数为 f^{-1}，则

$$f^{-1}\circ f(\langle x, y\rangle)= f^{-1}(f(\langle x, y\rangle))=\langle x, y\rangle$$

即：$f^{-1}(\langle\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2}\rangle)=\langle x, y\rangle$

$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=u \\ \dfrac{x-y}{2}=v \end{cases}$ 则$\begin{cases} x=u+v \\ y=u-v \end{cases}$

所以：

$$f^{-1}(u, v)=\langle u+v, u-v\rangle$$

7. (1) 可以验证 $x*y=y*x$

以及 $(x*y)*z=x*(y*z)$

所以满足交换律与结合律。

(2) 有幺元为 $e=0$.因为 $0*x=x*0=x$

(3) $\forall x\in R$，如果 x 有逆元 x^{-1}，则 $x^{-1}*x=e$，

即：$x^{-1}+x-x^{-1}x=0$，

所以，$x^{-1}=\dfrac{x}{x-1}$。故当 $x\neq 1$ 时，x 有逆元 x^{-1}。

(4) $\langle R, *\rangle$ 不构成群，因为$1\in R$，但1 没有幺元。